

# Matematičko modeliranje u klimatologiji

---

**Brčić, Petra**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:114032>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-12-18**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Petra Brčić

**MATEMATIČKO MODELIRANJE U**  
**KLIMATOLOGIJI**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Nenad Antić

Zagreb, rujna 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Hvala svima, posebno dinosaurima.*



# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Općenito o padu asteroida</b>	<b>2</b>
<b>2 Nastajanje kratera</b>	<b>4</b>
2.1 Šok-valovi . . . . .	5
2.2 Kontakt i kompresija . . . . .	8
2.3 Ekskavacija . . . . .	11
2.4 Modifikacija . . . . .	12
2.5 Motivacija hidrodinamičkog opisa problema . . . . .	18
<b>3 Hidrodinamika</b>	<b>19</b>
3.1 Jednadžbe očuvanja . . . . .	19
3.2 Model udara asteroida . . . . .	31
3.3 Jednadžbe plitke vode . . . . .	33
<b>4 Numerika</b>	<b>39</b>
4.1 Hidrokod . . . . .	39
4.2 Numeričko rješavanje jednadžbi plitke vode . . . . .	52
<b>5 Klimatske posljedice udara asteroida u ocean</b>	<b>57</b>
5.1 Utjecaji prolaska kroz atmosferu . . . . .	58
5.2 Utjecaji šok-vala . . . . .	58
5.3 Primjer udara u Jadransko more . . . . .	61
<b>Bibliografija</b>	<b>63</b>

# Uvod

Sveprisutnost matematičkih modela u klimatologiji nam nudi širok spektar zanimljivih modela. U ovom radu ćemo izložiti matematički model udara asteroida. Klimatske posljedice jednog takvog događaja imaju veći utjecaj na klimu u slučaju udara u vodenu površinu. Udar asteroida u ocean se razlikuje od udara u kopno jer uzrokuje ubačaj iznimno velike količine vode u stratosferu te dolazi do tsunamija izazvanog udarom.

Osnovne razloge proučavanja udara asteroida ćemo dati u prvom poglavlju ovog rada, kao i poznate kraterske strukture na Zemlji kao potvrdu takvih događaja u prošlosti, te podjelu udara asteroida na faze. Proces udara je kontinuiran i nema jasne granice između danih faza. Ukoliko je udar kosi, sa strane gdje trajektorija asteroida zatvara šiljasti kut s površinom Zemlje je proces udara u ranijoj fazi od njoj suplementarne.

U drugom poglavlju izložimo proces nastajanja kratera te klasičnu podjelu na faze krateriranja dominirane različitim fizikalnim procesima: kontakt i kompresija, ekskavacija, modifikacija. Utjecaji dubine vode na kolaps prolaznog kratera su opisani u podpoglavlju 2.4. Pri udaru dolazi do trenutnog porasta tlaka koji uzrokuje diskontinuitet, šok, u fazi kontakta i kompresije. Jednadžbe koje opisuju stanje prije i nakon prolaska fronte šoka su također dane.

Pri ekstremnim uvjetima kompresije, naprezanja materijala su nekoliko redova veličine veća od njegove čvrstoće, te se kruto tijelo, nakon plastičnog popuštanja, ponaša kao kompresibilni fluid zanemarive otpornosti na smicanje. Huang u [15] kaže da tenzor naprezanja mora biti izotropan za idealan fluid koji se ne opire smicanju. Analogno možemo reći i ovdje za slučaj krutih tijela pod utjecajem opterećenja od udara. Kao rezultat, jednadžba gibanja krutog tijela se bazira na nelinearnoj teoriji elastičnosti te ima oblik Eulerove jednadžbe za dinamiku plinova izvedene u trećem poglavlju.

Uz jednadžbe očuvanja mase, količine gibanja i energije, potrebne su nam i jednadžbe koje opisuju materijal: jednadžba stanja i konstitutivni model. Poglavlje 4 nas vodi kroz numeričko rješavanje ovog sustava korištenjem hidrokoda. Zbog memorijske i vremenske zahtjevnosti izvođenja hidrokoda prezentirano je pojednostavljenje simuliranja širenja udarnog vala kroz plitku vodu korištenjem jednadžbi plitke vode.

Na kraju ćemo pogledati klimatske utjecaje udara kroz nekoliko primjera te posljedice udara asteroida u Jadransko more.

# Poglavlje 1

## Općenito o padu asteroida

Oceani i mora prekrivaju više od dvije trećine površine Zemlje, a ipak postoji samo malen broj dokaza za udare asteroida u ocean. Vjerojatnost da se većina udara dogodila, i da će se dogoditi, u oceanu je znatno veća nego onih na kopnu. Tektonsko podvlačenje je izbrisalo svu oceansku koru stariju od 120 milijuna godina, tako da udarni krateri nisu mogli opstati. K tomu, voda vrlo efektivno apsorbira energiju udara, pa je potreban veliki događaj da kreira i skromniji krater na morskom dnu. Uz to, još i pomicanje sedimenata nakon udara dodatno prikriva tragove osim u slučaju kada je dijametar udarnog elementa, asteroida, usporediv s dubinom oceana. Kada bi asteroid bilo koje veličine preživio put kroz atmosferu, vjerojatno bi udario u ocean te potom, ovisno s veličini, i površinu morskog dna. Udari u ocean mogu dovesti do stvaranja dugih vodenih valova velike amplitude koji se šire prema obalama s potencijalnim katastrofalnim posljedicama kao što je poplava obalnih područja, uništavanje infrastrukture i utjecaj navedenog na mogućnost bilo kakve hitne evakuacije. Proučavanje oceanskih udara je važno iz dva razloga:

- (1) kvantifikacije opasnosti koju predstavlja pad asteroida u ocean te potencijalnu prijetnju uzrokovanu velikim tsunamijima koji pritom nastaju
- (2) rekonstrukcije količine Zemljinih udara uračunavajući veliki broj neotkrivenih kraterskih struktura na kori oceana.

Drugo je važno radi određivanja učestalosti takvih događaja kroz povijest, te mogućnosti predviđanja budućih udara.

Na geološkoj vremenskoj skali, udari asteroida i kometa u Zemlju su relativno česte pojave koje mogu uzrokovati znatne poremećaje biološkim zajednicama i snažno utječu na tijek evolucije. Najpoznatiji među katastrofalnim udarima je onaj koji je označio kraj krede i završio dominaciju dinosaura. Sada je široko prihvaćeno da je slijed masovnog iz-

umiranja na granici krede<sup>1</sup> i paleogena<sup>2</sup> direktno uzrokovan sudarom asteroida ili kometa sa Zemljom. Dokazi uključuju: veliku udarnu strukturu (promjera 200 km) zakopanu kod grada Chicxuluba na Yucatánu u Mexicu; globalno distribuirani sloj iridija na K-T<sup>3</sup> granici; i nanose tsunamija daleko u unutrašnjosti Sjeverne Amerike. Svi ti dokazi datiraju istoj epohi kao i događaj izumiranja. Potvrđeni krateri uzrokovani udarom su promatrani samo na priobalnom rubu. Dodatni dokazi su struktura Mjølnir sjeverno od Norveške iz doba Jure, zaljev Chesapeake i krater Montagnais u blizini Nove Škotske, oba iz doba eocena te spomenuti krater Chicxulub. Udar Eltanin u duboku vodu na dnu južnog Pacifika nema krater, ali postoje dokazi o sloju iridija na njegovoj lokaciji.

Sveukupni proces udara asteroida i posljedičnog tsunamija je vrlo složen i može se rasporediti u nekoliko različitih faza:

- 1) inicijalni udar asteroida u ocean i formacija prolazne praznine u vodi
- 2) kolaps šupljine i širenje vala od središta udara prema van u dubokoj vodi (obično nekoliko kilometara)
- 3) inicijalni utjecaji na amplitudu vala pri dostizanju plitke vode kod približavanja kopnu
- 4) potencijalno lomljenje vala u relativno plitkoj vodi (<100 m dubine) priobalnog ruba
- 5) završni kontakt vala s obalom i njegovo napredovanje na površini.

Zadnja stavka se odnosi na maksimalnu visinu naleta vala na kontinent iznad uobičajene razine vode te maksimalnu udaljenost koju valovi dosegnu na kopnu.

---

<sup>1</sup> Kreda je posljednje (treće) razdoblje u mezozoiku; 145,5-65,5 milijuna godina.

<sup>2</sup> Paleogen (ponekad zva i tercijar) je geološko razdoblje u prošlosti Zemlje; 65-23 milijuna godina.

<sup>3</sup> K-T granica je granica između krede i tercijara, odnosno paleogena

## Poglavlje 2

# Nastajanje kratera

Proces nastajanja kratera, koji ćemo opisati u ovom dijelu prema [31], se odnosi na interakciju između krute mete (kontinentalne ili oceanske kore) i projektila. Međutim, udar na Zemlju počinje kada projektil (asteroid) uđe u atmosferu. Dok putuje kroz atmosferu, tijelo neprekidno gubi energiju. Slično je i s udarom u ocean gdje asteroid, ne samo da usporava zbog plinovitog sloja nego i zbog vodenog stupca. U oba slučaja se gubitak kinetičke energije može aproksimirati računanjem otpora koje tijelo pruža pri gibanju nadzvučnom brzinom kroz sredstvo male gustoće (atmosfera ili voda). Ovisno o strukturi i kemijskom sastavu, te mehaničkim svojstvima asteroida, on može eksplodirati, izgorjeti ili usporiti do pada pod utjecajem sile teže. U tim slučajevima ne dolazi do formacije udarnog kratera.

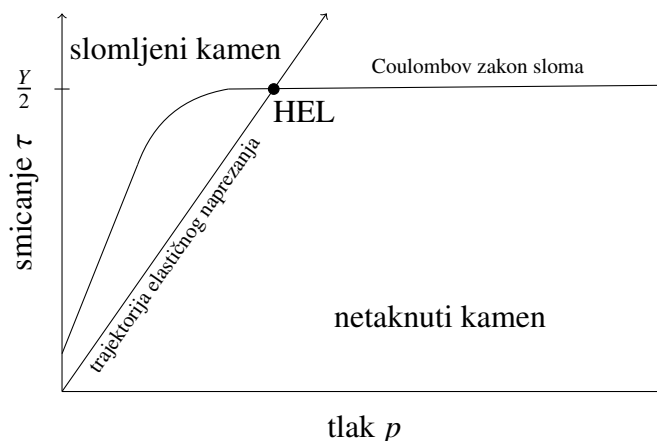
Udar objekta koji se kreće brzinom većom od nekoliko kilometara u sekundi u površinu planeta pokreće slijed događaja koji na kraju rezultira udarnim kraterom. Iako je taj proces kontinuiran, prikladno ga je razdvojiti u više različitih faza od kojih je svaka dominirana drugačijim fizikalnim procesom. Najuobičajenija je podjela na kontakt i kompresiju, ekskavaciju i modifikaciju.

Udar velike brzine uzrokuje iznenadnu kompresiju projektila i pogođenih materijala na površini udara, izazivajući udarni val koji se širi kroz projektil i metu. Kako val prolazi, brzo dolazi do promjene termodinamičkog stanja materijala, što je nepovratni proces (povećanje entropije), od inicijalnog stanja do stanja šoka. Termodinamička promjena je toliko brza da šok matematički tretiramo kao diskontinuitet karakteristika materijala. Kada šok dosegne stražnji kraj projektila i površinu mete, reflektira se unazad kao razrjeđujući val koji adijabatski otpušta isprva kompresiran materijal do nižeg tlaka (očuvanje entropije). Brzina razrijeđenog vala je veća od hemisferno širućeg šoka, tako da naposljetku šok-val postigne oblik tanke ljuske razgraničene frontom šok-vala i razrijeđenog vala. Iza tih valova, meta održava brzinu čestica koja djeluje pri otvaranju kratera u fazi ekskava-

cije. Radijalna komponenta materijalne brzine nadopunjena tangencijalnom komponentom, izazvana prisutnošću slobodne površine, skreće trajektoriju čestice prema površini te tako gura materijal u metu i izbacuje materijal iz širećeg kratera. Protok iskopavanja se usporava bilo kojom kohezivnom čvrstoćom koju materijal može zadržati, kao i suhim trenjem (otpornost na smicanje granuliranih materijala) i silom težom. U velikim udarima, najvažnija je sila teža; iskopavanje se zaustavlja kada nema dovoljno energije za podizanje prekrivajućeg materijala u smjeru suprotnom sili njegove težine. Naknadni i završni stadij procesa krateriranja je kolaps ili faza modifikacije. U suštini, urušavanje kratera se događa zbog sile teže koja uzrokuje modifikacije nestabilne praznine stvorene u fazi iskopa - prolaznog kratera. U konačnici to rezultira plićom geometrijom kratera koja je stabilnija u gravitacijskom polju.

## 2.1 Šok-valovi

Kinetička energija projektila se prenosi na metu kao iznenadni impuls koji uzrokuje velike valove naprezanja pri kontaktu projektila i mete. U ovom dijelu ćemo sagledati svojstva takvih valova, kako se šire kroz metu i pritom mijenjaju svoja svojstva. Općenito, postoje tri vrste valova naprezanja: elastični, plastični i šok-valovi. Oni se razlikuju po amplitudi (radi jednostavnosti možemo reći hidrostatskom tlaku) i brzini širenja.



Slika 2.1: Naprezanje smicanjem je prikazano kao funkcija srednje vrijednosti tlaka kako bismo vidjeli slom kamenog materijala u ovisnosti o njihovim vrijednostima. Trajektorija elastičnog naprezanja raste linearno i presjeca omotač popuštinja u točki zvanj Hugonotova elastična granica (HEL).

Relativno slab impuls tlaka rezultira valom elastičnog tipa koji putuje kroz kruto tijelo.

Elastično naprezanje u krutom tijelu je ograničeno čvrstoćom  $Y$ . Slika 2.1 prikazuje tok  $Y$  (izražen kao smicanje  $\tau$ ), kao funkciju hidrostatskog tlaka  $p$ , često zvan omotač popuštanja (Coulombov zakon sloma). Prikazana trajektorija elastičnog naprezanja linearno raste sa srednjom vrijednosti tlaka. To nam govori da je omjer naprezanja i srednje vrijednosti tlaka konstantan. Trajektorija raste malo manje strmo od ilustriranog omotača sloma za uobičajeno kameno tijelo. Zbog reverzibilnog karaktera elastičnih valova, kruto tijelo kroz koje se šire ostaje nepromijenjeno i svojstva nakon prolaska vala su mu jednaka inicijalima prije njegova dolaska. Jednom kada elastična trajektorija prijeđe omotač popuštanja (odgovarajuće longitudinalno naprezanje se naziva Hugonitova elastična granica, HEL; gdje je naprezanje  $\frac{Y}{2}$ ) smicanje se više ne može akumulirati. Impuls tlaka koji je dovoljno jak da prijeđe omotač popuštanja uzrokuje ireverzibilne promjene krutog tijela, odnosno plastičnu deformaciju. Svako daljnje naprezanje od ovog trenutka je kompresivno jer je maksimalno naprezanje ograničeno čvrstoćom. Srednji tlak se može izraziti pomoću longitudinalnog  $\sigma_L$  i vertikalnog  $\sigma_V$  naprezanja (ako pretpostavimo da su dvije komponente tenzora naprezanja  $\sigma_{ij}$  ekvivalentne)

$$p = -\frac{\sigma_L + 2\sigma_V}{3}.$$

Smicanje je dano sa

$$\tau = \frac{\sigma_L - \sigma_V}{2}.$$

Uz pomoć ovih jednakosti, HEL možemo zapisati kao

$$\sigma_L = -\sigma_{HEL} = -\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\right)Y, \quad (2.1)$$

gdje je  $\nu$  Poissonov omjer <sup>1</sup>.

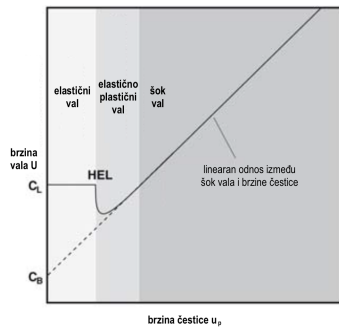
Razlika između elastičnih i plastičnih valova je prikazana na slici 2.2a, gdje vidimo brzinu čestice u odnosu na brzinu širenja valova naprezanja  $U$ . Za elastične valove je brzina širenja konstantna te modul smicanja i modul stlačivosti pridonose longitudinalnoj brzini

$$U \equiv c_L = \sqrt{\frac{K_0 + \frac{4}{3}\mu}{\rho_0}},$$

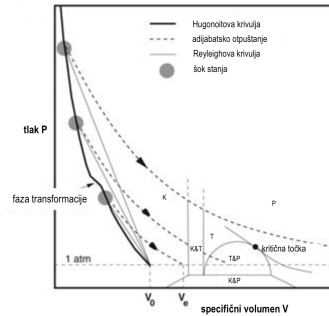
gdje je  $\rho_0$  gustoća,  $K_0$  modul stlačivosti i  $\mu$  modul smicanja.

---

<sup>1</sup>Poissonov omjer  $\nu$  je mjera deformacije (ekspanzije ili kontrakcije) materijala u smjeru okomitom na djelovanje opterećenja.



(a) Brzina širenja valova napreznja kao funkcija brzine čestice.



(b) Hugonitova krivulja u  $P - V$  i  $U_p - u_p$  rav-nini.  $K$ ,  $T$  i  $P$  označavaju krutu ( $K$ ), tekuću ( $T$ ) i plinovitu ( $P$ ) fazu.

Slika 2.2

Ako napreznje prijeđe  $\sigma_{HEL}$ , koji odgovara određenoj brzini čestice  $u_p$ , brzina širenja se smanji skoro do sljedeće brzine širenja

$$U \equiv c_B = \sqrt{\frac{K_0}{\rho_0}}$$

Do sada smo pretpostavljali da je modul stlačivosti  $K_0$  konstantno svojstvo materijala, no  $K$  je funkcija tlaka i raste pri kompresiji. Dakle,  $K_0$  treba zamijeniti s  $K = K(P)$  u jednakosti za brzinu  $c_B$ .

Na početku prijelaza iz elastičnog u plastični, u okolini HEL-a, plastični val putuje znatno sporije od elastičnog vala (slika 2.2a). Međutim, u režimu visokog tlaka (gdje je veliko longitudinalno napreznje  $\sigma_L$  ili velika brzina čestice  $u_p$ ) je  $K > K_0 + \frac{4}{3}\mu$  te  $U > c_L > c_B$ , gdje je  $U = \sqrt{\frac{K(P)}{\rho_0}}$ , pa plastični val preuzme frontu elastičnog vala. Takav val se smatra šok-valom jer putuje brzinom većom od brzine zvuka.

Šok-valovi, ne samo da se šire brže od elastičnih, nego pokazuju drugačija svojstva u odnosu na elastične i plastične valove. Fronta vala odgovara naglom porastu tlaka. Najbolja matematička aproksimacija takvog iznenadnog porasta je diskontinuirani skok.

Osnovne jednačbe, koje opisuju stanje prije i nakon prolaska fronte šok-vala, je izveo P. H. Hugonit 1887. godine i proizlaze iz zakona očuvanja mase, energije i količine gibanja. Označimo s  $\rho_0, P_0, T_0, E_0$  i  $u_0$ , redom, gustoću, tlak, temperaturu, specifičnu unutarnju energiju i brzinu čestice u nekompresiranom području, te s  $\rho_s, P_s, T_s, E_s, u_p$  iste parametre iza fronte šoka u kompresiranom režimu. Parametri  $\rho, P, T, E$  i  $u$  označavaju



stanje materijala nakon prolaska šok-vala. Pod pretpostavkom da je  $V_s$  kompresirani i  $V_0$  nekompresirani specifični volumen ( $\rho = \frac{1}{V_s}$ ,  $\rho_0 = \frac{1}{V_0}$ ) te da fronta šoka putuje brzinom  $U$ , Hugonitove jednadžbe glase

$$\begin{aligned}\rho(U - u_p) &= \rho_0 U \\ P_s - P_0 &= \rho_0 u_p U \\ E_s - E_0 &= \frac{1}{2}(P_s + P_0)(V_0 - V_s).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Kompresija šok-valom je izentropni proces gdje se stanje materijala mijenja gotovo istog trenutka. Obratni proces, otpuštanje iz visokog tlaka, se događa pri uvjetima termodinamičke ravnoteže. Kompresija šokom je termodinamički ireverzibilan proces tijekom kojeg je više unutarnje energije prenešeno na materijal nego je otpušteno dekompresijom. Ostatak energije je pretvoren u toplinu (temperatura nakon šoka) i rezidualnu brzinu čestice. Inducirano polje brzine iza šok-vala ima važnu ulogu u ekskavaciji kratera.

Jači šok-val uzrokuje veće promjene materijala, njegovog termodinamičkog (ili mehaničkog) stanja nakon otpuštanja. Različita stanja šoka su ilustrirana na slici 2.2b gdje vidimo specifični volumen u odnosu na najveći tlak šoka. Krivulja koja povezuje ova stanja se naziva Hugonitova krivulja i ne treba je zamijeniti s termodinamičkim tokom kroz koji prolazi materijal kako bi dostigao određena stanja šoka (sive točke). Npr. ako materijal ima inicijalni specifični volumen  $V_0$  onda je kompresiran duž tzv. Reyleighove linije. Nakon otpuštanja iz stanja šoka duž toka adijabatske dekompresije materijal može prijeći granice faza na termodinamičkom faznom dijagramu i završiti u tekućem ili plinovitom stanju, slika 2.2b.

Šok-valovi mogu uzrokovati prijelaz faza krutog tijela poznatu kao modifikacije šok-vala (neravnina Hugonitove krivulje na slici 2.2a). U nekim materijalima, npr. kvarcu, ovaj proces je dobro istražen i postojanje faza visokog tlaka kao koesit i stishovit nedvosmisleno identificiraju prolazak šok-vala koji jedino mogu nastati pri ovakvom udaru. Specifične značajke šok-vala se mogu pripisati određenim rasponima tlaka, stoga je moguće rekonstruirati propadanje uzrokovano šok-valom propadanje u prirodnom udarnom krateru analizom mineraloških uzoraka na različitim udaljenostima od točke udara.

## 2.2 Kontakt i kompresija

Prva faza započinje kada udarno tijelo dotakne površinu mete. Pomoću slike 2.3 možemo vidjeti kako ovaj proces izgleda u numeričkoj simulaciji. Kontakt i kompresija je najkraća od tri faze s trajanjem samo malo duže nego li je potrebno projektilu da prijeđe svoj promjer

L. Ukoliko s  $v_i$  označimo brzinu udara, tada ova faza traje  $t_c$  vremena, tj.

$$t_c = \frac{L}{v_i}.$$

U slučaju kosog udara, gdje se udarni objekt približava površini mete pod kutom  $\theta$ , vrijeme kontakta se produžuje zbog kosine i jednako je

$$t_c = \frac{L}{v_i \sin \theta}.$$

Prema tome, za projektil promjera  $10\text{km}$  koji se približava površini pod strmim kutem pri brzini od  $20\text{km s}^{-1}$ , usporediv s onim koji je uzrokovao masovno izumiranje na granici krede i paleogena prije 65 milijuna godina, faza kontakta i kompresije traje samo  $0,5\text{s}$ .

Tijekom ove kratke ali važne faze projektil prvo dotakne površinu planeta i prenese svoju energiju i količinu gibanja na materijal koji udari. Specifična kinetička energija (energija po jedinici mase,  $0,5v_i^2$ ) projektila koji putuje i samo nekoliko kilometara po sekundi je iznenađujuće velika.

Brzina projektila u trenutku udara može biti između druge kozmičke brzine <sup>2</sup> i  $70\text{km/s}$  za komete. Prosječna brzina udara na Zemlji je  $18\text{ km/s}$ . Zbog tako velikih brzina dolazi do nastajanja šok-valova na spoju mete i udarnog tijela te nastaju dvije šok-fronte:

- jedan šok putuje prema gore u projektil
- drugi šok putuje prema dolje u metu.

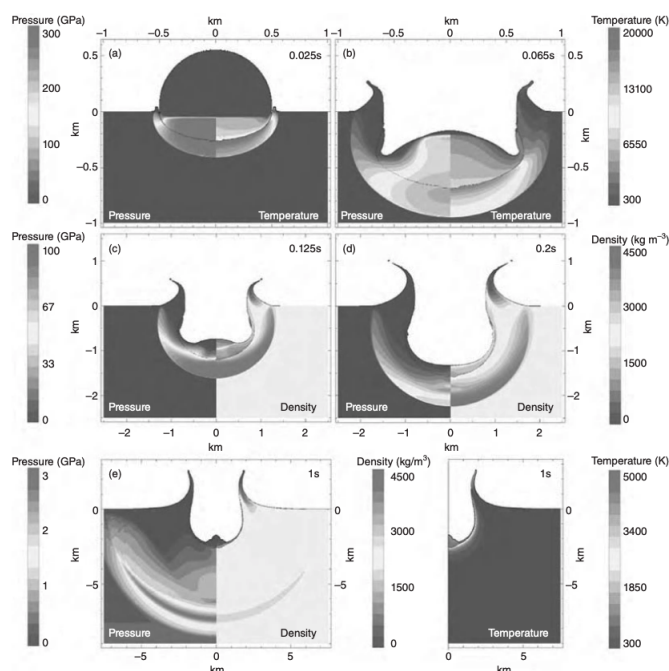
Na području između šok-fronti (šok-platou) materijal je kompresiran do visokog tlaka pri konstantnoj amplitudi. Ostala svojstva, kao gustoća mete i projektila ili specifična unutarnja energija te brzina širenja šok-fronti, ovise o svojstvima materijala mete i projektila. Uvjeti (amplituda tlaka, brzina čestica, brzina propagacije vala) tijekom kompresije šok-valom se mogu odrediti koristeći Hugonitove jednadžbe (2.2) posebno za svaki materijal.

Pod pretpostavkom da je tlak jednak u oba šoka (za projektil i metu) i da se projektil giba prema dolje brzinom  $v_i$ , možemo vidjeti linearan odnos između brzine čestice u meti i projektila

$$u_m = v_i - u_p,$$

gdje je  $u_m$  brzina čestica mete, a  $u_p$  brzina čestica projektila. Ako meta i projektil imaju jednak materijalni sastav, tada je  $u = u_m = u_p = \frac{1}{2}v_i$ . Uz pomoć ove linearne relacije, brzina

<sup>2</sup>Druge kozmičke brzine (eng. escape velocity) za Zemlju iznosi  $11,15\text{km/s}$ .



Slika 2.3: Kontakt i kompresija projektila pri udaru u površinu. Prikaz numeričke simulacije udara od 0.025 do 1 sekunde nakon inicijalnog kontakta. Projektil je dunitni promjera  $1\text{ km}$  i udara u granitnu metu pri brzini  $18\text{ km s}^{-1}$  (srednja brzina pri udarima asteroida u Zemlju). (a) Projektil nakon kontakta s metom; kreira se malo polje velikog pritiska duž dodirnog dijela. I meta i udarno tijelo se kompresiraju i počinju mijenjati oblik; zadnji dio udarnog tijela nije pod utjecajem događaja na prednjem dijelu. (b) Šok-val u udarnom tijelu doseže stražnji dio i (c) reflektira se kao val razrijeđivanja oslobađajući projektil do nižeg tlaka. (d) Šok-val se u meti širi prema van u skoro hemisfernom obliku praćen valom razrijeđenja. (e) Iza odvojenog šok-vala, širi se udarna perjanica (isparen projektil i proksimalna meta) i započinje faza iskopa. Iz [5].

širenja šoka  $U$  se može izračunati pomoću

$$U = C_B + S u, \quad (2.3)$$

gdje  $C_B$  aproksimira  $c_B$  što je brzina širenja zvučnog vala, a  $S$  je parametar koji ovisi o materijalu (za vodu  $s = 1,6$ , za granit  $S = 1,24$ , za više vrijednosti pogledati [22]). Na kraju možemo pomoću Hugonitovih jednadžbi odrediti najveći tlak tijekom šoka uz uvjet poznavanja inicijalne gustoće  $\rho_0$ , brzine čestica  $u$  i brzine širenja šoka  $U$ . Slično možemo računati i u slučaju kada projektil i meta nisu od istog materijala. Ovaj račun vrijedi samo u slučaju ravnog vala, kada je udarno tijelo sfernog oblika i samo u prvim trenucima udara. Međutim, ove jednadžbe daju dobre rezultate za procjenu inicijalnog vrha udarnog tlaka

pri srednjem rasponu vrijednosti tlaka (linearna relacija (2.3) vrijedi samo u određenom rasponu vrijednosti tlaka; za više pogledati [29]).

Tlakovi do kojih dođe pri udaru asteroida dosežu nekoliko stotina GPa, što lako prelazi granicu elastičnosti bilo kojeg krutog tijela. Takvi impulsi tlaka uzrokuju plastične deformacije projektila i mete. Zbog plastične deformacije započinje rast kratera i baza projektila sve više prijanja u rastuću kratersku prazninu. Šok-val koji putuje kroz projektil se reflektira o slobodnu površinu na kraju projektila. Tijekom refleksije impuls tlaka mijenja predznak što znači da je val sada karakteriziran dekompresijom, a ne kompresijom. Reflektirani val se širi prema meti kao val razrijeđenja. Adijabatska dekompresija se može širiti brže u kompresiranom materijalu od šok-vala. Materijal može biti u plinovitom ili tekućem stanju ili raspadnut nakon prolaska šoka tijekom razrijeđenja. Projektil sada više nije pod visokim tlakom i najčešće je u potpunosti isparen. Trajanje ove faze je između  $2,5 \times 10^{-3}$  i  $2,5 \times 10^{-1}$  s. Ovaj interval odgovara promjeru projektila od  $10m$  za donju granicu i  $1km$  za vrijednost gornje granice.

## 2.3 Ekskavacija

Faza ekskavacije je karakterizirana s dva procesa:

- širenje i slabljenje šok-vala
- ekskavacija praznine kratera.

Tijekom kontakta i kompresije šok-val putuje prema dolje u metu i raspada se zbog sfernog širenja (jednaka energija treba biti raspoređena po rastućoj površini), što doprinosi slabljenju amplitude proporcionalnom  $\frac{1}{r}$ , gdje je  $r$  radijus projektila. Važna razlika širenja šoka tijekom faze ekskavacije, u usporedbi s fazom kontakta i kompresije, je da on sada ometa val razrijeđenja koji dolazi s kraja projektila i slobodne površine mete. Val razrijeđenja se prikači za šok-val što vodi k bržem raspadu šok-vala ( $\geq \frac{1}{r^2}$ ). Proces širenja više nema direktan kontakt s formacijom kratera.

Važan čimbenik koji razlikuje udare pri nadzvučnoj brzini ( $v \gg c_B$ ) od onih male brzine je da šok-val ostavlja rezidualnu komponentu brzine u materijalu mete čija vrijednost odgovara jednoj petini najveće vrijednosti brzine čestice tijekom kompresije šokom. To je dovoljno da izazove tok materijala (ekskavacijski tok) usmjeren prema van od točke udara. Zbog interferencije sa slobodnom površinom dodaje se jedna komponenta polju brzine, vertikalna prema gore, koja uzrokuje izbacivanje materijala iz kratera. Geometrija toka ekskavacije je prikaza na slici 2.4(A). Bočni i vertikalni rast, isprva sferne kasnije otprilike

paraboličke praznine, se može opisati zakonima skaliranja u slučaju vertikalnog udara sa

$$\frac{x}{r} \sim \left(\frac{vt}{r}\right)^\alpha. \quad (2.4)$$

Parametar  $x$  se može zamijeniti ili sa dubinom kratera  $d$  ili promjerom kratera  $D$ . EkspONENT  $\alpha$  je  $\sim 0,36$  za  $d$  ili  $\sim 2,0$  za  $D$ . Parametar  $r$  je radijus projektila. Član u zagradama se može interpretirati kao skalirano vrijeme  $t$  koje dozvoljava usporedbu sličnih faza formacije kratera neovisno o veličini ili brzini projektila.

Rast kratera se prekida zbog svojstava čvrstoće okolnog materijala mete (suhog trenja ili bilo kakvog kohezivnog otpora) i primarno zbog (za prirodne kraterne na planetarnim površinama) sile teže. Promjer  $D_t$  krajnjeg kratera, koji se naziva prolaznim kraterom, se može procijeniti pomoću sljedeće jednakosti

$$D_t = 1,161 \left(\frac{\rho_p}{\rho(t)}\right)^{\frac{1}{3}} (2r)^{0,78} v^{0,44} g^{-0,22}. \quad (2.5)$$

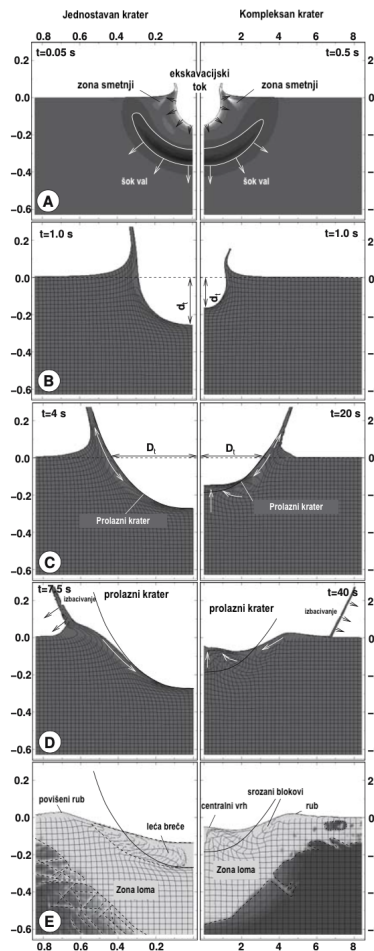
Ova jednakost je dobivena eksperimentalnim zapažanjima i numeričkim modelima.

Jer se tok ekskavacije ne prekida u svim smjerovima u istom trenutku, te ne raste bočno i vertikalno istom brzinom, maksimalni opseg kratera se najbolje može opisati paraboloidom. Međutim, to vrijedi samo kao idealizirani opis jer tako pravilna formacija nije realna. Modifikacija kratera već kreće u verikalnom smjeru dok promjer kratera i dalje raste. Međutim, mali krateri oblika zdjele (jednostavni krateri) su bliski teorijskoj konstrukciji prolaznog kratera.

## 2.4 Modifikacija

Prolazna praznina nije konačan oblik kratera. Čvrstoća mete i sila teža rade protiv toka ekskavacije sve dok rast kratera ne završi. Oba parametra imaju važan utjecaj na modifikaciju prolazne praznine i ravnoteža dviju sila je ključna za posljedični proces modifikacije. Morfologija kratera je funkcija njegove veličine. Jednostavni krateri se pojavljuju do određenog tranzicijskog promjera  $D_{tranz}$ . Iznad granične vrijednosti  $D_{tranz}$  morfologija postaje kompliciranija te je možemo podijeliti na nekoliko različitih vrsta:

- krateri sa središnjim vrhom
- krateri sa središnjim prstenom
- krateri s više središnjih prstenova.



Slika 2.4: (A) Ekskavacija nakon  $t = 0,05s$  za jednostavan krater i  $t = 0,5s$  za kompleksni krater. (B-D) Prikaz razlika modifikacije jednostavnog i kompleksnog kratera. (E) Unutarnja struktura jednostavnog i kompleksnog kratera. Preuzeto iz [31], Slika 6.

Pod pretpostavkom da svojstva (čvrstoća materijala) na površinama različitih planetarnih tijela nisu toliko različita, može se zaključiti da je tranzicijski promjer  $D_{tranz}$  između jednostavnog i kompleksnog kratera samo funkcija sile teže. To znači da  $D_{tranz}$  postiže različite vrijednosti za različita planetarna tijela. Npr., na Mjesecu je  $D_{tranz} = 15km$ , dok je na Zemlji  $D_{tranz} = 2 - 4km$ . Razlika na Zemlji se može objasniti razlikama u čvrstoći Zemljine kore (sedimentne stijene pružaju manji otpor naprezanju od kristalnih meta).

Kako bi analizirali ovisnost morfologije kratera o sili teži i promjeru kratera, prikladno je uvesti bezdimenzionalne parametre. Kao u hidrodinamici, omjer između unutarnje sile i utjecaja sile teže se može izraziti pomoću Froudeovog broja koji predstavlja parametriza-

ciju sile teže

$$F = \frac{v_i^2}{gd_t}. \quad (2.6)$$

Kao i u (2.6), čvrstoću mete možemo izraziti Cauchyjevim brojem koji je dan kao omjer naprezanja i snage (više pogledati u [23])

$$C = \frac{\rho v_i^2}{Y}. \quad (2.7)$$

Omjer ova dva važna broja daje dobar parametar ravnoteže između sile teže i čvrstoće prema [33]

$$S = \frac{F}{C} = \frac{Y}{\rho g d_t}, \quad (2.8)$$

gdje je  $d_t/r = 1, 2(\frac{gr}{v_i^2})^{-0,22}$  prema [23]. Kako bi odredili vrijednost  $S_{tranz}$  za prijelaz između jednostavnih i kompleksnih kratera, Melosh u [21] pretpostavlja rast paraboličke praznine koji rezultira silom usmjerenom vertikalno prema gore  $F_A = \frac{1}{8}\pi\rho g D_t^2 d_t$  (uzgon). Sila  $F_A$  djeluje na površinu  $A = \frac{1}{2}\pi D_t^2$ . Čvrstoća je jednaka  $Y = \frac{F_A}{A}$ , što na kraju daje

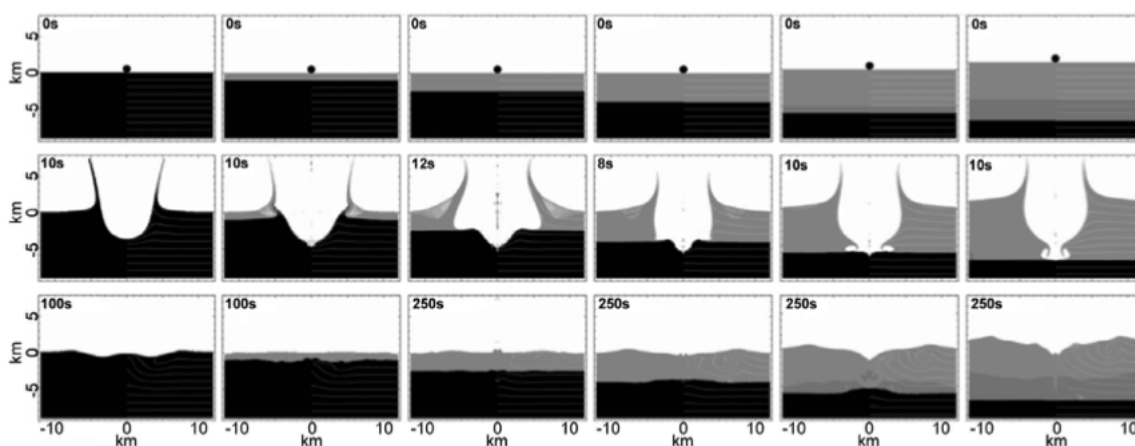
$$S_{tranz} = \frac{Y}{\rho g d_t} = 0,25.$$

Ako je omjer  $S (= f(Y, g, d_t))$  veći od  $S_{tranz} (= 0,25)$  tada prevladava čvrstoća materijala mete te nastaje jednostavan krater. Materijalna obloga prolaznog kratera otkliže prema dolje u najdublju točku praznine (slika 2.4(C-E)) i skupi se u leću breče koja se sastoji od izrazito napuklog kamena i istopljenog metala. Povišeni rub kratera s prevrnutom stratigrafijom označava rub kratera. Vertikalni i lateralni dokazi prolaska šok-vala se protežu van granice kraterske praznine. Velika zona pukotina i rasjeda okružuje vidljivu kratersku strukturu, slika 2.4(E).

Ako je  $S < S_{tranz}$ , tada dominira sila teža i dolazi do nastajanja kompleksnog kratera. To znači da je prolazna šupljina velika i djelovanje sile teže inducira litostatički tlak koji je dovoljno visok da nadjača čvrstoću okolnih stijena i uzrokuje njihovo urušavanje. Najprije dolazi do podizanja dna kratera 2.4(C). U isto vrijeme se rub srozava u prazninu i dolazi do rastućeg središnjeg vrha. Za jako velike udarne kraterne središnji vrh premašuje određenu granicu te postaje nestabilan i urušava se rezultirajući nastajanjem centralnog prstena ili više njih u slučaju oscilacija. Cijeli proces je sličan urušavanju praznine vode jer se stijena počne ponašati sličnije viskoznom fluidu nego lomljivom krutom tijelu što podržava pojednostavljenja korištena u podpoglavlju 2.1.

## Utjecaj dubine vode na modifikaciju kratera

Prolazni krateri se urušavaju pri djelovanju sile teže. Količina modifikacije ovisi o veličini prolaznog kratera. Stoga prisustvo vodenog sloja, koji potiskuje formaciju prolaznog kratera u meti, ima osnovni utjecaj na morfologiju rezultirajućeg kratera na morskom dnu. Dodatno, kako voda putuje u praznu unutrašnjost kratera, rub kratera i najviši dijelovi sloja dna mogu biti pogođeni povratnim tokom. Mnoge studije numeričkih modela proučavaju urušavanje kratera i kakav utjecaj ima prisustvo vodenog sloja i na koji način povrat vode može dodatno modificirati morfologiju kratera. U [12] se istražuje utjecaj dubine vode na formaciju kratera na morskom dnu za različite udare. Morsko dno je modelirano kao jedan materijal čvrstoće prikladne kristalnim stijenkama ili jače. Rezultati ove studije, ali i drugih, predlažu tri režima udara u morsko dno: (1) udar u plitku vodu, (2) udar u srednje duboku vodu i (3) udar u duboku vodu. Prijelaz između ova tri režima ovisi o veličini kratera i omjeru dubine vode u odnosu na promjer udarnog elementa ( $h/L$ ). Slika 2.5 daje primjer rezultata numeričkih modela iz [12] koji prikazuju utjecaj dubine vode na oblikovanje kratera u morskom dnu za asteroid promjera  $1\text{ km}$  pri udaru brzine  $15\text{ km s}^{-1}$ .



Slika 2.5: Oblikovanje kratera za različite dubine vode (0, 1, 2, 5, 4, 6 i 8 km) gdje projektil ima promjer  $1\text{ km}$  te brzinu  $15\text{ km s}^{-1}$ . U prvom redu je inicijalno stanje, u srednjem redu je trenutak kada se postigne maksimalna dubina kratera i u zadnjem redu je završno stanje. Nijanse boje označuju gustoću. Rezultati su iz *Davidson and Collins* [12], Slika 2.

### Udar u plitku vodu

Sloj vode pri udaru asteroida u plitku vodu ima minimalan utjecaj na sam udar. Veličina kratera koji pri udaru nastaje je vrlo malo smanjen u odnosu na udar u kopno te je morfologija rezultirajućeg kratera vrlo slična ekvivalentnom krateru na kopnu. Dokaz o povratu



vode u krater se može vidjeti u malim modifikacijama ruba i ispune kratera te značajno ovisi o čvrstoći najvišeg sloja morskog dna. Režim plitke vode se postiže za  $h/L < 1$ , a prema [12] za jednostavne krater se postiže i za  $h/L < 4$ ; međutim, značajnije promjene ruba su se dogodile za  $h/L > 1$ . Prema *Collinsu* i *Wünnemannu* [6] te *Kenkmannu* [18] je tok povrata vode u krater nastao pri udaru u zaljev Chesapeake promjera 85km imao značajan utjecaj na morfologiju konačne strukture kratera. Prema njihovim simulacijama su sedimenti zasićeni vodom, koji leže ispod približno 500m dubokog sloja vode, završili u unutarnjoj praznini kratera zbog jakog toka vode i iznimno niske čvrstoće sedimenta, što možemo vidjeti na slici 2.6. Kao rezultat, morfologija tog kratera je karakterizirana u potpunosti zatrpanim unutarnjim kraterom s nanosima izbačenog materijala i povećanim promjerom vanjskog ruba kratera zbog prijenosa najvišeg sloja sedimenta prema točki udara.

### Udar u duboku vodu

Pri udarima u duboku vodu sloj vode u potpunosti potiskuje kraterirne morskog dna; ne dolazi do formiranja depresijskog kratera. Laboratorijski eksperimenti i numerička istraživanja navode da se to događa za  $h/L > 4$ ; međutim najnoviji modeli udara u ocean, koji koriste uvjete udara najbližije Zemlji i aproksimiraju čvrstoću morskog dna najrealističnije, navode da ne dolazi do kreiranja prolaznog kratera u morskome dnu za  $h/L > 5$  [12].

Iako ne dolazi do formacije kratera u ovom režimu, neke modifikacije morskog dna se mogu dogoditi. Istraživanjem udara Eltanin<sup>3</sup> otkrivena je zona visine 20 – 40m kaotično izmiješanih sedimenata koja je najvjerojatnije nastala od turbulentnih struja oceana potaknutih urušavanjem prolaznog vodenog kratera. Neke simulacije tog udara sugeriraju da je projektil morao biti manji od 1km kako bi dubina vode zaustavila nastajanje kratera na dnu oceana.

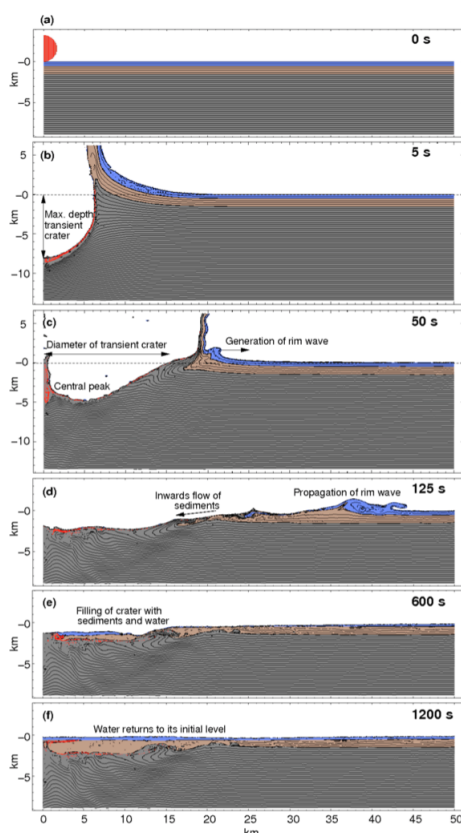
Još jedna značajka udara u duboku vodu je privremeno uklanjanje znatne količine vode što olakšava podizanje, uslijed izostatičke prilagodbe materijala, morskog dna oslabljenog lomljenjem. Rezultirajuća morfologija kratera je središnja uzvisina koja može biti viša i od razine prije udara, te topografsko snižavanje razine prema van zbog toka povratne vode. Takva značajka nije tipična za uobičajene zemaljske i vanzemaljske krater te je možemo videti na slici 2.5 u šestom stupcu.

### Udar u vodu srednje dubine

Između režima plitke i duboke vode ( $1 < h/L < 6$ ) vodeni sloj ima temeljni utjecaj na proces nastajanja kratera uzrokovanog udarom. Prolazni krater se smanjuje zbog us-

---

<sup>3</sup>Udar Eltanin (dobio naziv po istraživačkom brodu koji je otkrio veliku količinu iridija na tom mjestu) je udar ateroida na istoku južnog Pacifika, u blizini obale Južne Amerike.



Slika 2.6: Deformacija iz simulacije udara u zaljev Chesapeake koristeći iSALE hidro-kod iz [34]. Projektil ima gustoću  $2658\text{kgm}^{-3}$  te promjer  $1600\text{m}$ . Brzina pri udaru iznosi  $16\text{kms}^{-1}$ . Dubina vode je  $500\text{m}$ , a morsko dno (kristalne stijene) je prekriveno  $1\text{km}$  debelim slabim slojem sedimenta zasićenog vodom. (a) Inicijalno stanje. (b) Nakon udara se formira krater koji dosegne maksimalnu dubinu nakon otprilike 5 sekundi. (c) Urušavanje izbačenog materijala i ruba kratera na površinu vode inducira veliki vodeni val. (d) Sediment i voda se vrata nazad u prazninu kratera dok mu se rub širi prema van. (e i f) U krateru polako dolazi do porasta sedimenta pri povratku vode na inicijalnu razinu.

poravanja projektila vodenim slojem, a brzi povrat vode utječe na kolaps kratera i njegovu konačnu morfologiju. Slika 2.5 prikazuje prolazne kraterne i morfologiju kratera za različite dubine vode. U svakom od slučajeva prolazna praznina ima slična obilježja: duboka depresija u obliku zdjele s konstantnim omjerom dubine i promjera. Veličina prolaznog kratera približno linearno opada povećanjem dubine vode.

Centripetalni dotok vode iz okolnog oceana ne mora biti simetričan, može biti asimetričan zbog asimetrije topografije kratera uzrokovane razlikama čvrstoće morskog dna ili zbog

kosih udara. Promjenjiv dotok vode može uzrokovati povratne brazde u rubu kratera. Primjenom pojednostavljenog modela pucanja brane za tok preko dane topografije kratera je dobiveno da, inicijalno, 200m dubok sloj vode uzrokuje erozivnu silu usporedivu s poplavom jezera Missoula, najvećom poplavom na Zemlji. Izuzetno zahtjevna interakcija vode i morskog dna je važan dio svakog potpunog hidrokoda.

## 2.5 Motivacija hidrodinamičkog opisa problema

U ovom poglavlju smo vidjeli da pri sudaru dva kruta tijela pri nadzvučnoj brzini (reda  $10\text{km/s}$ ) dolazi do jakih valova naprezanja u oba tijela nakon čega dolazi do popuštanja materijala. Kada je tijelo podvrgnuto tako velikim opterećenjima, deformacijski valovi velikih amplituda se razvijaju u šok-valove zbog znatne stlačivosti krutih tijela pri visokom tlaku. Tijekom ekstremnih uvjeta kompresije, naprezanja materijala su uvelike veća od njegove čvrstoće, te će se kruto tijelo, nakon plastične deformacije, ponašati kao kompresibilan fluid zanemarive otpornosti na smicanje. Prema [15], poznati teorem hidrostatike kaže da tenzor naprezanja mora biti izotropan za idealan fluid koji se ne opire smicanju. Analogno možemo reći i za kruta tijela pod utjecajem opterećenja uzrokovanih udarom. Kao rezultat, jednadžba gibanja krutog tijela se zasniva na nelinearnoj teoriji elastičnosti te ima oblik Eulerove jednadžbe za dinamiku plinova koju izvodimo u sljedećem poglavlju.

## Poglavlje 3

# Hidrodinamika

Naš glavni cilj u ovom poglavlju je izvesti osnovne jednađbe hidrodinamike: jednađbu kontinuiteta i jednađbu gibanja (Navier-Stokesove jednađbe), iz fizikalnih zakona o očuvanju mase te iz drugog Newtonovog zakona, redom. Prije nego što to učinimo, prisjetit ćemo se materijalne derivacije i osnovnih tvrdnji teorije elastičnosti.

Važnu ulogu u modeliranju našeg problema ima i energijska jednađba koja, uz jednađbu očuvanja mase i količine gibanja, sudjeluje u modelu procesa udara asteroida i uvijek se koristi za numerički model te simulaciju nastajanja kratera. Kako bi model bio potpun, potrebno je još dodati materijalne modele dominirane kompresijom u početnoj fazi udara te čvrstoćm materijala u kasnijim fazama.

S obzirom da navedene jednađbe zahtjevaju poveći broj računalnih operacija pri izvođenju simulacije, dobro ih je koristiti za detaljniji uvid u ono što se dogodi u prvom dijelu udara na maloj skali, odnosno samo na mjestu udara. Kako bi optimizirali računanje na velikoj skali i pratili propagaciju tsunamija, valjalo bi uvesti nešto jednostavniji model koji funkcionira i dovoljno dobro aproksimira tražene rezultate. Tu dolazimo do teorije plitke vode, te ćemo na kraju vidjeti aproksimacijsku jednađbu plitke vode.

### 3.1 Jednađbe očuvanja

Neka je  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  ograničen, otvoren i povezan skup. Označimo sa  $\bar{\Omega}$  volumen koji zauzima tijelo prije deformacije (u referentnoj konfiguraciji).

**Definicija 3.1.1.** Funkciju  $\varphi : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  nazivamo deformacijom ako je injektivna, dovoljno glatka i vrijedi  $\det \nabla \varphi(x) > 0$ ,  $x \in \bar{\Omega}$ .

S  $\varphi(\bar{\Omega})$  označavamo deformiranu konfiguraciju te vrijedi  $x^\varphi \in \varphi(\bar{\Omega})$ .

**Napomena 3.1.2.** Funkciju  $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  nazivamo progib, te je  $\varphi(x) = x + u(x)$ .

**Definicija 3.1.3.** Gibanje je dovoljno glatko preslikavanje  $\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  takvo da je  $\varphi(\cdot, t)$  deformacija,  $t \in \mathbb{R}$ .

**Definicija 3.1.4.** Funkciju  $v = \frac{\partial \varphi}{\partial t} : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  nazivamo Lagrangeva brzina, a funkcija definirana s  $a = \frac{\partial v}{\partial t}$  je Lagrangevo ubrzanje.

Eulerovu brzinu definiramo s  $v^\varphi(x^\varphi, t) = v(\varphi_t^{-1}(x), t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\varphi_t^{-1}(x^\varphi), t)$ , a Eulerovo ubrzanje s  $a^\varphi(x^\varphi, t) = a(\varphi_t^{-1}(x^\varphi), t)$ .

**Napomena 3.1.5.** • Lagrangeovo polje je svako preslikavanje na  $\Omega \times \mathbb{R}$ .

• Trajektorija gibanja je  $\tau_\varphi = \tau := \{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} : x \in \Omega_t, t \in \mathbb{R}\} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Omega_t \times \{t\}$ . Eulerovo polje je svako preslikavanje na  $\tau$ .

• Za zadano Lagrangevo polje  $f$

$$f^\varphi(x^\varphi, t) := f(\varphi_t^{-1}(x^\varphi), t) \quad (3.1)$$

je Eulerovo polje.

• Za zadano Eulerovo polje  $f^\varphi$

$$f(x, t) := f^\varphi(\varphi_t(x), t) \quad (3.2)$$

je Lagrangevo polje.

**Definicija 3.1.6.** Materijalna derivacija Eulerovog polja  $f^\varphi$  je

$$\dot{f}^\varphi(x^\varphi, t) = \frac{df^\varphi}{dt}(x^\varphi, t) := \frac{\partial}{\partial t}(f^\varphi(\varphi_t(x), t)) \circ \varphi_t^{-1}(x^\varphi) \quad (3.3)$$

a komponiranje je samo po prvoj varijabli.

**Napomena 3.1.7.** • Vrijedi sljedeće

$$\dot{f}^\varphi(x^\varphi, t) = \nabla_{x^\varphi} f^\varphi(x^\varphi, t) v^\varphi(x^\varphi, t) + \frac{\partial f^\varphi}{\partial t}(x^\varphi, t). \quad (3.4)$$

• Česta oznaka materijalne derivacije u literaturi za udare je

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (3.5)$$

za  $x_i \in \Omega$ ,  $i = 1, \dots, d$ , gdje je  $d$  dimenzija prostora.

Jednadžba gibanja slijedi iz drugog Newtonovog zakona koji kaže da je suma svih sila (momenata) jednaka brzini promjene (kutne) količine gibanja. Sile opisuju djelovanje vanjskog svijeta na tijelo. Razlikujemo vanjske volumne i kontaktne sile. Vanjske volumne sile su dane volumnom gustoćom  $f^\varphi : \Omega^\varphi \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Za  $P \subset \Omega^\varphi$  je  $\int_P f^\varphi dx^\varphi$  je ukupna volumna sila na dio domene  $P$ . Vanjska kontaktna sila je dana gustoćom vanjske kontaktne sile  $g^\varphi : \Gamma_1^\varphi \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , gdje je  $\Gamma_1^\varphi \subset \partial\Omega^\varphi$ . Za  $A \subset \Gamma_1^\varphi$  je  $\int_A g^\varphi da^\varphi$  dana ukupna vanjska kontaktna sila na dio  $A$ .

Označimo s  $\rho^\varphi : \Omega^\varphi \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gustoću mase u deformiranoj konfiguraciji. Za komad  $P \subset \Omega^\varphi$  je s  $\int_P \rho^\varphi dx^\varphi$  dana masa komada  $P$ .

**Napomena 3.1.8.** Za  $b^\varphi : \Omega^\varphi \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiranu s  $b^\varphi = \frac{f^\varphi}{\rho^\varphi}$  označavamo gustoću vanjske sile po jedinici mase.

Razlikujemo i dvije količine gibanja dane gustoćom, linearnu  $\rho^\varphi v^\varphi$  i kutnu  $x^\varphi \times \rho^\varphi v^\varphi$ .

**Aksiom 3.1.9.** (Euler, Cauchy) Postoji vektorsko polje  $t^\varphi : \overline{\Omega}^\varphi \times S^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1\}$  takvo da vrijedi sljedeće

$$1.) \quad t^\varphi(x^\varphi, n^\varphi, t) = g^\varphi(x^\varphi, t), \quad x^\varphi \in \Gamma_1^\varphi \quad (3.6)$$

gdje je  $n^\varphi$  jedinična normala na  $\Gamma_1^\varphi$  vanjska na  $\Omega^\varphi$

2.) zakon očuvanja impulsa:

$$\text{Za svaki } P^\varphi \subset \overline{\Omega}^\varphi \text{ otvoren i povezan vrijedi}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{P^\varphi} \rho^\varphi(x^\varphi, t) v^\varphi(x^\varphi, t) dx^\varphi = \int_{\partial P^\varphi} t^\varphi(x^\varphi, n^\varphi, t) da^\varphi + \int_{P^\varphi} f^\varphi(x^\varphi, t) dx^\varphi \quad (3.7)$$

gdje je  $n^\varphi$  jedinična normala na  $\partial P^\varphi$  vanjska na  $P^\varphi$

3.) zakon očuvanja momenta impulsa:

$$\text{Za svaki } P^\varphi \subset \overline{\Omega}^\varphi \text{ otvoren i povezan vrijedi}$$

$$\frac{d}{dt} \int_{P^\varphi} x^\varphi \times \rho^\varphi(x^\varphi, t) v^\varphi(x^\varphi, t) dx^\varphi = \int_{\partial P^\varphi} x^\varphi \times t^\varphi(x^\varphi, n^\varphi, t) da^\varphi + \int_{P^\varphi} x^\varphi \times f^\varphi(x^\varphi, t) dx^\varphi \quad (3.8)$$

gdje je  $n^\varphi$  jedinična normala na  $\partial P^\varphi$  vanjska na  $P^\varphi$ .

**Napomena 3.1.10.** Kontaktna sila  $t^\varphi$  se naziva Cauchyjev vektor naprezanja. Zapravo je gustoća  $\int_A t^\varphi da^\varphi$  ukupna kontaktna sila na plohu  $A$ , odakle slijedi da je  $\int_{\partial P^\varphi} t^\varphi + \int_{P^\varphi} f^\varphi$  ukupna sila na  $P^\varphi$ , te  $\int_{\partial P^\varphi} x^\varphi \times t^\varphi + \int_{P^\varphi} x^\varphi \times f^\varphi$  ukupan moment na  $P^\varphi$ .

### Zakon očuvanja mase

U referentnoj konfiguraciji je gustoća u oznaci  $\rho : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ , a u deformiranoj  $\rho^\varphi : \Omega^\varphi \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Prema zakonu očuvanja imamo da za svaki  $P \subset \Omega$  otvoren i povezan vrijedi

$$\int_{P^{\varphi_t}} \rho^\varphi(x^\varphi, t) dx^\varphi = \int_P \rho(x) dx. \quad (3.9)$$

Kako je  $P^{\varphi_t} = \varphi_t(P)$ , to lijevu stranu zakona očuvanja možemo zapisati kao

$$\int_P \rho^\varphi(\varphi(x, t), t) \det \nabla \varphi(x, t) dx. \quad (3.10)$$

Sada za svaki  $P$  imamo

$$\int_P (\rho(x) - \rho^\varphi(\varphi(x, t), t) \det \nabla \varphi(x, t)) = 0. \quad (3.11)$$

Poizvoljnost od  $P$  sada daje

$$\rho(x) = \rho^\varphi(\varphi(x, t), t) \det \nabla \varphi(x, t). \quad (3.12)$$

Parcijalno derivirajmo (3.12) po  $t$  kako bi dobili sljedeće

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} (\rho^\varphi(\varphi(x, t), t) \det \nabla \varphi(x, t)). \quad (3.13)$$

Koristeći identitet (3.15) dobivamo

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho^\varphi(\varphi(x, t), t)) \det \nabla \varphi(x, t) + \rho^\varphi(\varphi(x, t), t) (\operatorname{div} v^\varphi) \circ \varphi(x, t) \det \nabla \varphi(x, t) \\ &= (\dot{\rho}^\varphi + \rho^\varphi \operatorname{div} v^\varphi) \circ \varphi(x, t) \det \nabla \varphi(x, t) \\ &= \dot{\rho}^\varphi + \rho^\varphi \operatorname{div} v^\varphi. \end{aligned} \quad (3.14)$$

**Napomena 3.1.11.** *Jednakost (3.14) se naziva jednadžba kontinuiteta.*

Ako je fluid inkompresibilan, tada je njegova gustoća konstantna  $\rho = \text{konst.}$ . Zakon očuvanja mase tada glasi  $\operatorname{div} v^\varphi = 0$ .

U računu smo iskoristili identitet koji ćemo sada i dokazati koristeći lemu koja je dokazana na predavanjima iz kolegija Teoreija elastičnosti.

**Teorem 3.1.12.** *Za dovoljno glatko gibanje  $\varphi$  vrijedi*

$$\frac{d}{dt} (\det \nabla \varphi(x, t)) = (\operatorname{div} v^\varphi) \circ \varphi(x, t) \det \nabla \varphi(x, t). \quad (3.15)$$

**Lema 3.1.13.**

$$D(\det)(A)(T) = \det \operatorname{Atr}(A^{-1}T), \quad A \in GL(\mathbb{R}^n). \quad (3.16)$$

Dokažimo sada teorem.

*Dokaz.* Primjenom leme dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\det \nabla \varphi(x, t)) &= D(\det)(\nabla \varphi(x, t)) \left( \frac{d}{dt} \nabla \varphi(x, t) \right) \\ &= \det \nabla \varphi(x, t) \operatorname{tr} \left( \nabla \varphi_t(x)^{-1} \frac{d}{dt} \nabla \varphi(x, t) \right) \end{aligned}$$

S druge strane je  $v^\varphi(x^\varphi, t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\varphi_t^{-1}(x^\varphi), t)$  odakle slijedi

$$\begin{aligned} \nabla v^\varphi(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi(\varphi_t^{-1}(x^\varphi), t) \nabla \varphi_t^{-1}(x^\varphi) \\ \implies \operatorname{div} v^\varphi(x, t) &= \operatorname{tr} \left( \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi(\varphi_t^{-1}(x^\varphi), t) \nabla \varphi_t^{-1}(x^\varphi) \right) \\ &= \operatorname{tr} \left( \nabla \varphi_t^{-1}(x^\varphi) \frac{\partial}{\partial t} \nabla \varphi(\varphi_t^{-1}(x^\varphi), t) \right) \end{aligned}$$

i  $\nabla \varphi_t \circ \nabla_t^{-1} \nabla \varphi_t^{-1} = I$ . □

Cilj nam je izvesti diferencijalnu formulaciju za jednadžbu gibanja. Da bimo to učinili potrebne su nam sljedeće tvrdnje.

**Lema 3.1.14.** (*Transportna formula*) Za skalarno ili vektorsko Eulerovo polje  $f$  i  $P \subset \Omega$  vrijedi transportna formula ( $P^{\varphi_t} = \varphi_t(P)$ )

$$\frac{d}{dt} \int_{P^{\varphi_t}} f(x^\varphi, t) dx^\varphi = \int_{P^{\varphi_t}} \left( \dot{f}(x^\varphi, t) + f(x^\varphi, t) \operatorname{div} v^\varphi(x^\varphi, t) \right) dx^\varphi. \quad (3.17)$$

*Dokaz.* Zamijenom varijabli  $x^\varphi = \varphi_t(x)$ , integral ovisan o  $t$  prebacimo na domenu  $P$  neovisnu o  $t$  na sljedeći način

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\varphi_t(P)} f(x^\varphi, t) dx^\varphi &= \frac{d}{dt} \int_P f(\varphi(x, t), t) \det \nabla \varphi(x, t) dx \\ &= \int_P \frac{\partial}{\partial t} \left( f(\varphi(x, t), t) \det \nabla \varphi(x, t) \right) + f(\varphi(x, t), t) \frac{\partial}{\partial t} \left( \det \nabla \varphi(x, t) \right) dx. \end{aligned}$$

Iskoristimo (3.16) kako bismo dobili sljedeće

$$\begin{aligned} &= \int_P \left[ \frac{\partial}{\partial t} \left( f(\varphi(x, t), t) \right) + f(\varphi(x, t), t) (\operatorname{div} v^\varphi) \circ \varphi(x, t) \right] \det \nabla \varphi(x, t) dx \\ &= \int_{P^{\varphi_t}} \left( \dot{f}(x^\varphi, t) + f(x^\varphi, t) \operatorname{div} v^\varphi(x^\varphi, t) \right) dx^\varphi. \end{aligned} \quad (3.18)$$

□



**Korolar 3.1.15.**

$$\frac{d}{dt} \int_{P^{\varphi_t}} \rho^\varphi v^\varphi dx^\varphi = \int_{P^{\varphi_t}} \rho^\varphi \dot{v}^\varphi dx^\varphi, \quad P \subset \Omega, P^{\varphi_t} = \varphi_t(P). \quad (3.19)$$

*Dokaz.* Primjenom transportne formule dobivamo

$$\frac{d}{dt} \int_{P^{\varphi_t}} \rho^\varphi v^\varphi dx^\varphi = \int_{P^{\varphi_t}} \rho^\varphi \dot{v}^\varphi + \rho^\varphi v^\varphi \operatorname{div} v^\varphi dx^\varphi.$$

Za Eulerova polja  $f$  i  $g$  vrijedi

$$\begin{aligned} \dot{f}g(x^\varphi, t) &= \frac{d}{dt} (f(\varphi_t(x), t)g(\varphi_t(x), t)) \circ \varphi_t^{-1}(x^\varphi) \\ &= \frac{d}{dt} (f(\varphi_t(x), t)) \circ \varphi_t^{-1}(x^\varphi) g(\varphi_t(x), t) + f(x^\varphi, t) \frac{d}{dt} (g(\varphi_t(x), t)) \circ \varphi_t^{-1}(x^\varphi) \\ &= \dot{f}g + f\dot{g}. \end{aligned}$$

Stoga vrijedi

$$\frac{d}{dt} \int_{P^{\varphi_t}} \rho^\varphi v^\varphi dx^\varphi = \int_{P^{\varphi_t}} \rho^\varphi \dot{v}^\varphi + \dot{\rho}^\varphi v^\varphi + \rho^\varphi v^\varphi \operatorname{div} v^\varphi dx^\varphi,$$

iz čega odmah slijedi tvrdnja koristeći jednadžbu kontinuiteta.  $\square$

**Zakon očuvanja momenta impulsa**

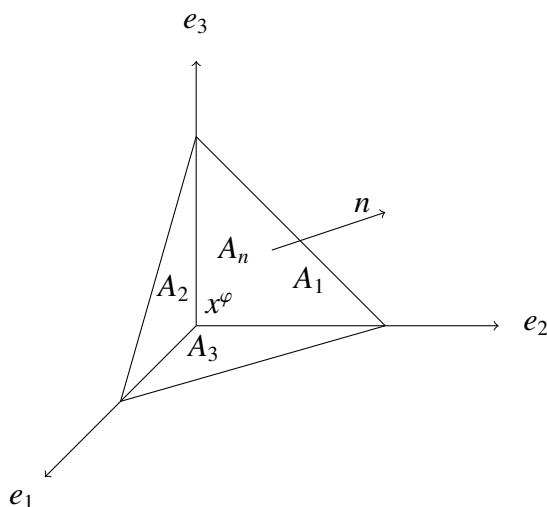
**Teorem 3.1.16.** (Cauchy) *Neka su  $t^\varphi : \overline{\Omega}^\varphi \times S^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $f^\varphi : \overline{\Omega}^\varphi \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\rho^\varphi \dot{v}^\varphi : \overline{\Omega}^\varphi \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  neprekidne i neka vrijedi zakon očuvanja impulsa. Tada postoji  $T^\varphi : \overline{\Omega}^\varphi \times \mathbb{R} \rightarrow M_3(\mathbb{R})$  Cauchyjev tenzor naprezanja takav da vrijedi*

$$t^\varphi(x^\varphi, n^\varphi, t) = T^\varphi(x^\varphi, t)n^\varphi, \quad x^\varphi \in \overline{\Omega}^\varphi, n^\varphi \in S^2. \quad (3.20)$$

*Dokaz.* Neka je  $x^\varphi \in \Omega^\varphi$ ,  $n \in S^2$ ,  $n = n_1 e_1 + n_2 e_2 + n_3 e_3$ ,  $n_1, n_2, n_3 > 0$ , te  $e_1, e_2, e_3$  su vektori ortonormirane baze u  $\mathbb{R}^3$ . Definirajmo tetraedar  $A^\varphi$  s vrhom u  $x^\varphi$  kao na slici 3.1. Tri stranice  $A_1, A_2, A_3$  su u koordinatnim ravninama, te  $A_n$  s normalom  $n$ . Normale na  $A_j$  su  $-e_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ .

Za  $i \in \{1, 2, 3\}$  je

$$\begin{aligned} \int_{\partial A^\varphi} t_i^\varphi(y^\varphi, n^\varphi, t) da^\varphi &= \int_{A_1} t_i^\varphi(y^\varphi, -e_1, t) da^\varphi + \int_{A_2} t_i^\varphi(y^\varphi, -e_2, t) da^\varphi \\ &+ \int_{A_3} t_i^\varphi(y^\varphi, -e_3, t) da^\varphi + \int_{A_n} t_i^\varphi(y^\varphi, n, t) da^\varphi. \end{aligned} \quad (3.21)$$



Slika 3.1: Prikaz tetraedra iz dokaza Cauchyjevoj teorema.

Zbog neprekidnosti  $t_i^\varphi$  možemo primijeniti Teorem srednje vrijednosti na integrale. Postoje točke  $x^{ij} \in A_j$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,  $x^i \in A_n$ , takve da je

$$\begin{aligned} \int_{\partial A^\varphi} t_i^\varphi(y^\varphi, n^\varphi, t) da^\varphi &= t_i^\varphi(x^{i1}, -e_1, t) \text{pov}(A_1) + t_i^\varphi(x^{i2}, -e_2, t) \text{pov}(A_2) \\ &\quad + t_i^\varphi(x^{i3}, -e_3, t) \text{pov}(A_3) + t_i^\varphi(x^i, n, t) \text{pov}(A_n) \\ &\quad \{\text{geometrijski argument: } \text{pov}(A_i) = n_i \text{pov}(A_n)\} \\ &= [t_i^\varphi(x^{i1}, -e_1, t)n_1 + t_i^\varphi(x^{i2}, -e_2, t)n_2 + t_i^\varphi(x^{i3}, -e_3, t)n_3 \\ &\quad + t_i^\varphi(x^i, n, t)] \text{pov}(A_n). \end{aligned}$$

Primjena zakona očuvanja impulsa sada povlači

$$\begin{aligned} &| t_i^\varphi(x^{i1}, -e_1, t)n_1 + t_i^\varphi(x^{i2}, -e_2, t)n_2 + t_i^\varphi(x^{i3}, -e_3, t)n_3 + t_i^\varphi(x^i, n, t) | \\ &\leq \frac{1}{\text{pov}(A_n)} \left| \int_{A^\varphi} (\rho^\varphi \dot{v}^\varphi - f^\varphi) dx^\varphi \right| \\ &\quad \{ \rho^\varphi \dot{v}^\varphi - f^\varphi \text{ je neprekida na } A^\varphi \implies \text{ograničena je konstantnom } C \} \\ &\leq C \frac{\text{vol}(A^\varphi)}{\text{pov}(A_n)} \longrightarrow 0, \quad \text{kada } A^\varphi \longrightarrow \{x^\varphi\} \text{ homotetično.} \end{aligned}$$

U limesu dobivamo

$$t_i^\varphi(x^\varphi, n, t) = - \sum_{j=1}^3 t_i^\varphi(x^\varphi, -e_j, t) n_j.$$

No to vrijedi za svaku komponentu  $i = 1, 2, 3$

$$t^\varphi(x^\varphi, n, t) = - \sum_{j=1}^3 t^\varphi(x^\varphi, -e_j, t) n_j.$$

U limesu kada  $n \rightarrow e_k$ , ( $n_j > 0$ ), jer je  $t^\varphi$  neprekinuta, imamo

$$t^\varphi(x^\varphi, e_k, t) = -t^\varphi(x^\varphi, -e_k, t).$$

Sada je  $t^\varphi(x^\varphi, n, t) = \sum_{j=1}^3 t^\varphi(x^\varphi, e_j, t) n_j$ , ( $n_j > 0$ ).

Definiramo  $T^\varphi(x^\varphi, t) e_j := t^\varphi(x^\varphi, e_j, t)$ ,  $j = 1, 2, 3$ . Onda vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned} T^\varphi(x^\varphi, t) n &= \sum_{j=1}^3 n_j T^\varphi(x^\varphi, t) e_j \\ &= \sum_{j=1}^3 |n_j| T^\varphi(x^\varphi, t) \operatorname{sgn}(n_j) e_j \\ &= \sum_{j=1}^3 |n_j| \operatorname{sgn}(n_j) t^\varphi(x^\varphi, e_j, t) \\ &= \sum_{j=1}^3 |n_j| t^\varphi(x^\varphi, \operatorname{sgn}(n_j) e_j, t) \\ &= t^\varphi(x^\varphi, \sum_{j=1}^3 |n_j| \operatorname{sgn}(n_j) e_j, t) \\ &= t^\varphi(x^\varphi, n, t). \end{aligned}$$

□

Zakon očuvanja impulsa sada glasi

$$\int_{A^\varphi} \rho^\varphi \dot{v}^\varphi dx^\varphi = \int_{\partial A^\varphi} T^\varphi(x^\varphi, t) n^\varphi da^\varphi + \int_{A^\varphi} f^\varphi dx^\varphi, \quad A^\varphi. \quad (3.22)$$

Teorem o divergenciji ( $\int_{\partial A} T n da = \int_A \operatorname{div} T dx$ ) omogućuje prelazak na integral po domeni  $A^\varphi$

$$\int_{A^\varphi} \rho^\varphi \dot{v}^\varphi dx^\varphi = \int_{A^\varphi} \operatorname{div} T^\varphi dx^\varphi + \int_{A^\varphi} f^\varphi dx^\varphi, \quad A^\varphi. \quad (3.23)$$

Odakle slijedi

$$\int_{A^\varphi} (\rho^\varphi \dot{v}^\varphi - \operatorname{div} T^\varphi - f^\varphi) dx^\varphi = 0, \quad A^\varphi.$$

Proizvoljnost domene povlači da je  $u$  u  $\Omega^\varphi$

$$\rho^\varphi \dot{v}^\varphi = \operatorname{div} T^\varphi + f^\varphi. \quad (3.24)$$

Dobivena jednakost (3.24) je diferencijalni oblik zakona očuvanja impulsa, odnosno imamo jednažbu gibanja u Eulerovoj formulaciji.

**Tvrđnja 3.1.17.** *Cauchyjev tenzor naprezanja je simetričan.*

*Dokaz.* Zakon očuvanja momenta impulsa glasi

$$\int_{A^\varphi} x^\varphi \times \rho^\varphi \dot{v}^\varphi dx^\varphi = \int_{\partial A^\varphi} x^\varphi \times T^\varphi n^\varphi da^\varphi + \int_{A^\varphi} x^\varphi \times f^\varphi dx^\varphi.$$

Vrijedi

$$\int_{\partial A^\varphi} x^\varphi \times T^\varphi n^\varphi da^\varphi = \int_{A^\varphi} x^\varphi \times (\rho^\varphi \dot{v}^\varphi - f^\varphi) dx^\varphi = \int_{A^\varphi} x^\varphi \times \operatorname{div} T^\varphi dx^\varphi.$$

Koristeći teorem o divergenciji raspišemo desnu strani, te neka je  $A$  antisimetrična matrica s aksijalnim vektorom  $v \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \int_{A^\varphi} x^\varphi \times \operatorname{div} T^\varphi dx^\varphi &= \int_{\partial A^\varphi} (Ax^\varphi T^\varphi) n^\varphi da^\varphi = \int_{A^\varphi} \operatorname{div} (Ax^\varphi T^\varphi) dx^\varphi \\ &= \int_{A^\varphi} \sum_i \partial_{x_i^\varphi} (Ax^\varphi T^\varphi e_i) dx^\varphi = \sum_i \int_{A^\varphi} \partial_{x_i^\varphi} (x^\varphi \times T^\varphi e_i) dx^\varphi \\ &= \sum_i \int_{A^\varphi} e_i \times T^\varphi e_i + x^\varphi \times \partial_{x_i^\varphi} (T^\varphi e_i) dx^\varphi \\ &= \int_{A^\varphi} \sum_i e_i \times T^\varphi e_i + x^\varphi \times \operatorname{div} T^\varphi dx^\varphi. \end{aligned}$$

Sada slijedi

$$\int_{A^\varphi} \sum_i e_i \times T^\varphi e_i dx^\varphi = 0$$

za svaki  $A^\varphi$ . Proizvoljnost domene implicira

$$\sum_i e_i \times T^\varphi e_i = 0.$$

Stoga je

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_i e_i \times T^\varphi e_i = e_1 \times (T_{11}^\varphi e_1 + T_{21}^\varphi e_2 + T_{31}^\varphi e_3) \\ &\quad + e_2 \times (T_{12}^\varphi e_1 + T_{22}^\varphi e_2 + T_{32}^\varphi e_3) \\ &\quad + e_3 \times (T_{13}^\varphi e_1 + T_{23}^\varphi e_2 + T_{33}^\varphi e_3) \\ &= T_{21}^\varphi e_3 - T_{31}^\varphi e_2 - T_{12}^\varphi e_3 + T_{32}^\varphi e_1 + T_{13}^\varphi e_2 - T_{23}^\varphi e_1, \end{aligned}$$

odnosno

$$T_{21}^\varphi = T_{12}^\varphi, \quad T_{31}^\varphi = T_{13}^\varphi, \quad T_{32}^\varphi = T_{23}^\varphi.$$

Dakle,  $(T^\varphi)^T = T^\varphi$ . □

Kao posljedicu aksioma dobivamo diferencijalnu jednadžbu gibanja u deformiranoj konfiguraciji

$$\begin{aligned} \rho^\varphi \dot{v}^\varphi &= \operatorname{div} T^\varphi + f^\varphi && \text{u } \Omega^\varphi \\ T^{\varphi T} &= T^\varphi && \text{u } \Omega^\varphi \\ T^\varphi n^\varphi &= g^\varphi && \text{na } \Gamma_1^\varphi. \end{aligned} \quad (3.25)$$

### Slaba formulacija

Pomnožimo prvu jednakost iz (3.25) s  $\theta^\varphi$  dovoljno glatkom funkcijom takvom da je  $\theta^\varphi|_{\Gamma_0^\varphi} = 0$ , gdje je  $\Gamma_0^\varphi = \partial\Omega^\varphi - \Gamma_1^\varphi$ , te integrirajmo po cijeloj domeni  $\Omega^\varphi$

$$\int_{\Omega^\varphi} \rho^\varphi \dot{v}^\varphi \cdot \theta^\varphi dx^\varphi = \int_{\Omega^\varphi} \operatorname{div} T^\varphi \cdot \theta^\varphi dx^\varphi + \int_{\Omega^\varphi} f^\varphi \cdot \theta^\varphi dx^\varphi. \quad (3.26)$$

Želimo primijeniti teorem o divergenciji. Za  $\eta = T\theta$  računamo

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \eta &= \partial_1 \eta_1 + \partial_2 \eta_2 + \partial_3 \eta_3 \\ &= \partial_1 (T_{11} \theta_1 + T_{12} \theta_2 + T_{13} \theta_3) + \partial_2 (T_{21} \theta_1 + T_{22} \theta_2 + T_{23} \theta_3) \\ &\quad + \partial_3 (T_{31} \theta_1 + T_{32} \theta_2 + T_{33} \theta_3) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \partial_1 T_{11} + \partial_2 T_{21} + \partial_3 T_{31} \\ \partial_1 T_{12} + \partial_2 T_{22} + \partial_3 T_{32} \\ \partial_1 T_{13} + \partial_2 T_{23} + \partial_3 T_{33} \end{pmatrix} \cdot \theta + T \cdot \begin{pmatrix} \partial_1 \theta_1 + \partial_1 \theta_2 + \partial_1 \theta_3 \\ \partial_2 \theta_1 + \partial_2 \theta_2 + \partial_2 \theta_3 \\ \partial_3 \theta_1 + \partial_3 \theta_2 + \partial_3 \theta_3 \end{pmatrix}.$$

Dakle,  $\operatorname{div}(T\theta) = (\operatorname{div} T^T) \cdot \theta + T^T \cdot \nabla \theta$ , tj.  $\operatorname{div}(T^T \theta) = (\operatorname{div} T) \cdot \theta + T \cdot \nabla \theta$ . Sada (3.26) možemo zapisati na sjedeći način

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\varphi} \rho^\varphi \dot{v}^\varphi \cdot \theta^\varphi dx^\varphi &= \int_{\Omega^\varphi} (\operatorname{div}(T^{\varphi T} \theta^\varphi) - T^\varphi \cdot \nabla \theta^\varphi) dx^\varphi + \int_{\Omega^\varphi} f^\varphi \cdot \theta^\varphi dx^\varphi \\ &= \int_{\partial\Omega^\varphi} T^{\varphi T} \theta^\varphi \cdot n^\varphi da^\varphi - \int_{\Omega^\varphi} T^\varphi \cdot \nabla \theta^\varphi dx^\varphi + \int_{\Omega^\varphi} f^\varphi \cdot \theta^\varphi dx^\varphi. \end{aligned}$$

Korištenjem sljedećeg

$$\int_{\partial\Omega^\varphi} \theta^\varphi \cdot T^\varphi n^\varphi da^\varphi = \int_{\Gamma_1^\varphi} \theta^\varphi \cdot T^\varphi n^\varphi da^\varphi = \int_{\Gamma_1^\varphi} \theta^\varphi \cdot g^\varphi da^\varphi$$

dobivamo sljedeću slabu formulaciju jednadžbe gibanja u deformiranoj konfiguraciji gdje za svaki  $\theta^\varphi$  takav da je  $\theta^\varphi|_{\Gamma_0^\varphi} = 0$  vrijedi

$$\int_{\Omega^\varphi} \rho^\varphi \dot{v}^\varphi \cdot \theta^\varphi dx^\varphi + \int_{\Omega^\varphi} T^\varphi \cdot \nabla \theta^\varphi dx^\varphi = \int_{\Omega^\varphi} f^\varphi \cdot \theta^\varphi dx^\varphi + \int_{\Gamma_1^\varphi} g^\varphi \cdot \theta^\varphi da^\varphi. \quad (3.27)$$

Slaba formulacija (3.27) je formalno ekvivalentna rubnoj zadaći

$$\begin{cases} \rho^\varphi \dot{v}^\varphi &= \operatorname{div} T^\varphi + f^\varphi & \text{u } \Omega^\varphi, \\ T^\varphi n^\varphi &= g^\varphi & \text{na } \Gamma_1^\varphi. \end{cases}$$

### Jednadžba gibanja u referentnoj konfiguraciji

Provedimo zamijenu varijabi u (3.27). Definirajmo novu test funkciju  $\theta := \theta^{\varphi_t} \circ \varphi_t$ . Tada je

$$\begin{aligned} \nabla \theta &= \nabla \theta^{\varphi_t} \circ \varphi_t \nabla \varphi_t \\ \nabla \theta^{\varphi_t} \circ \varphi_t &= \nabla \theta (\nabla \varphi_t)^{-1}. \end{aligned}$$

Imamo

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_t} T^\varphi \cdot \nabla \theta^\varphi dx^\varphi &= \int_{\Omega} T^\varphi(\varphi_t(x), t) \cdot \nabla \theta^\varphi \circ \varphi_t(x, t) \det \nabla \varphi_t(x, t) dx \\ &= \int_{\Omega} T^\varphi(\varphi_t(x), t) \cdot \nabla \theta(x) (\nabla \varphi_t(x))^{-1} \det \nabla \varphi_t(x) dx \\ &= \int_{\Omega} T(x, t) \cdot \nabla \theta(x) dx. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Definirajmo prvi Piola-Kirchhoffov tenzor naprezanja (u referentnoj konfiguraciji) sa

$$T(x, t) := \det \nabla \varphi_t(x, t) T^\varphi(\varphi_t(x), t) \nabla \varphi_t^{-T}(x). \quad (3.29)$$

Lako se pokaže da ovaj tenzor nije simetričan. Definirajmo volumnu gustoću sile u referentnoj konfiguraciji sa

$$f(x, t) := f^\varphi(\varphi_t(x), t) \det \nabla \varphi_t(x).$$

Tada je

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^\varphi} f^\varphi \cdot \theta^\varphi dx^\varphi &= \int_{\Omega} f^\varphi(\varphi_t(x), t) \cdot \theta^\varphi \circ \varphi_t(x) \det \nabla \varphi_t(x) dx \\ &= \int_{\Omega} f(x, t) \cdot \theta(x) dx. \end{aligned}$$

Površinska sila u referentnoj konfiguraciji poprima sljedeći oblik

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1^\varphi} g^\varphi \cdot \theta^\varphi da^\varphi &= \int_{\Gamma_1} g^\varphi(\varphi_t(x), t) \|\nabla\varphi_t(x)^{-T}n\| \det \nabla\varphi_t(x) \cdot \theta(x) dx \\ &= \int_{\Gamma_1} g(x, t) \cdot \theta(x) dx,\end{aligned}$$

gdje smo definirali površinsku gustoću kontaktne sile u referentnoj konfiguraciji sa

$$g(x, t) = g^\varphi(\varphi_t(x), t) \|\nabla\varphi_t(x)^{-T}n\| \det \nabla\varphi_t(x),$$

a  $n$  je jedinična vanjska normala u referentnoj konfiguraciji.

Inercijalni član u referentnoj konfiguraciji je sljedeći

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^\varphi} \rho^\varphi \dot{v}^\varphi \cdot \theta^\varphi dx^\varphi &= \int_{\Omega} \rho^\varphi(\varphi_t(x), t) \dot{v}^\varphi(\varphi_t(x), t) \cdot \theta^\varphi \circ \varphi_t(x) \det \nabla\varphi_t(x) dx \\ &= \int_{\Omega} \rho(x) \frac{\partial v}{\partial t}(x, t) \cdot \theta(x) dx,\end{aligned}$$

gdje je gustoća mase u referentnoj konfiguraciji definirana sa

$$\rho(x) = \rho^\varphi(\varphi_t(x), t) \det \nabla\varphi_t(x),$$

te smo uzeli u obzir sljedeći odnos Eulerove i Lagrangeve brzine

$$\dot{v}^\varphi(\varphi_t(x), t) = \frac{\partial v}{\partial t}(x, t).$$

Sada slaba formulacija jednadžbe gibanja u referentnoj konfiguraciji glasi

$$\int_{\Omega} \rho(x) \frac{\partial v}{\partial t} \cdot \theta(x) dx + \int_{\Omega} T(x, t) \cdot \nabla\theta(x) dx = \int_{\Omega} f(x, t) \cdot \theta(x) dx + \int_{\Gamma_1} g(x, t) \cdot \theta(x) dx. \quad (3.30)$$

Iz (3.30) dobivamo diferencijalnu formulaciju u referentnoj konfiguraciji

$$\begin{aligned}\rho \frac{\partial v}{\partial t} &= \operatorname{div} T + f \quad \text{u } \Omega \\ \nabla\varphi_t T^T &= T \nabla\varphi_t^T \quad \text{u } \Omega\end{aligned} \quad (3.31)$$

$$Tn = g \quad \text{na } \Gamma_1. \quad (3.32)$$

Uz pretpostavku dovoljne glatkoće, slaba i diferencijalna formulacija su ekvivalentne.

## 3.2 Model udara asteroida

Diferencijalna jednadžba gibanja u deformiranoj konfiguraciji opisuje unutarnje naprezanje i vanjske sile, kao što je sila teža. Proučavajući sile koje djeluju na česticu fluida vrijedi

$$\rho \dot{u} = \operatorname{div} \sigma + f, \quad (3.33)$$

gdje ćemo od sada pa nadalje koristiti notaciju iz literature, gdje je  $\rho$  gustoća,  $u$  brzina,  $\sigma$  Cauchyjev tenzor naprezanja, te  $f$  uračunava prisutne vanjske sile. Vrijedi da je  $\sigma$  simetrični tenzor ranga 2, te je u ortogonalnim koordinatama u tri dimenzije reprezentiran  $3 \times 3$  matricom

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix},$$

gdje je  $\sigma_{ii}$ ,  $i = x, y, z$  normalno naprezanje i  $\tau_{ij}$ ,  $i, j = x, y, z$ ,  $i \neq j$  smicanje. Matricu možemo rastaviti na sljedeći način

$$\sigma_{ij} = - \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{xx} + p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} + p & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} + p \end{pmatrix} = -PI + \tau$$

gdje je  $I \in M_3$  identiteta i  $\tau$  devijatorni tenzor naprezanja. Devijatorni tenzor naprezanja je sljedećeg općenitog oblika

$$\tau = \mu(\nabla u + (\nabla u)^T) + \lambda(\nabla \cdot u)I,$$

gdje su  $\mu$  (koeficijent viskoznosti) i  $\lambda$  (volumna viskoznost) konstante proporcionalnosti vezane uz pretpostavku linearne ovisnosti viskoznih naprezanja. Stokesove pretpostavke su da je tenzor naprezanja linearna funkcija tenzora promjene deformacije i gradijenta brzine, da je fluid izotropan<sup>1</sup>, te da za fluid u mirovanju vrijedi  $\nabla \cdot \tau = 0$ .

Uvrštavanjem  $\tau$  u (3.33) uz pretpostavke da je viskoznost  $\mu$  konstantna, volumna viskoznost zanemariva  $\lambda = 0$ , te da je fluid inkompresibilan ( $\nabla \cdot u = 0$ ) imamo

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) = -p + \nabla \cdot (\mu(\nabla u + (\nabla u)^T)) + \rho g.$$

<sup>1</sup>Izotropan fluid je fluid čija svojstva ne ovise o smjeru duž kojeg su mjerena.



Pogledajmo viskozni član za prvu ( $x$ ) komponentu:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x} \left( 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \mu \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \\
&= 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \\
&= \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} \\
&= \mu \Delta u + \mu \frac{\partial u}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \\
&= \mu \Delta u
\end{aligned}$$

gdje zadnja jednakosti slijedi iz uvjeta inkompresibilnosti. Analogno možemo računati za drugu i treću komponentu te dobiti, redom,  $\mu \Delta v$  i  $\mu \Delta w$ . Na ovaj način dobivamo Navier-Stokesove jednačbe koje opisuju inkompresibilan Newtonovski<sup>2</sup> fluid. Dakle, Navier-Stokesove jednačbe na cijelom prostoru  $\mathbb{R}^3$  glase

$$\begin{cases} \rho(\partial_t u + (u \cdot \nabla)u) - \mu \Delta u + \nabla p & = f \\ \operatorname{div} u & = 0. \end{cases} \quad (3.34)$$

### Jednačbe očuvanja mase, impulsa i energije

Problem sudara dva elastična tijela koji proučavamo se aproksimira pomoću kompresibilnih Navier-Stokesovih jednačbi uz pretpostavu da je fluid neviskoznan, odnosno da su obje viskoznosti zanemarive,  $\mu = \lambda = 0$ . S obzirom da fluid nije inkompresibilan ne vrijedi  $\dot{\rho} = 0$ . Dakle, nemamo pojednostavljenije jednačbe kontinuiteta. Jednačbe gibanja kojima opisujemo gibanje materijala za problem pada asteroida u ocean u Lagrangeovoj formulaciji su sljedeće

$$\begin{cases} \dot{\rho} + \rho \nabla \cdot u & = 0 \\ \rho \dot{u} + \nabla p & = \rho g \\ \rho \dot{E} + p \nabla \cdot u & = 0. \end{cases} \quad (3.35)$$

Ovdje je  $E$  oznaka za unutarnju energiju po jedinici mase. Jednakosti (3.35) su redom očuvanje mase, količine gibanja i energije. Ukoliko raspišemo materijalnu derivaciju jednačbi očuvanja, tada su dane u Eulerovoj formulaciji te glase

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot u & = 0 \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \cdot \nabla u + \nabla p & = \rho g \\ \rho \frac{\partial E}{\partial t} + \rho u \cdot \nabla E + p \nabla \cdot u & = 0. \end{cases} \quad (3.36)$$

<sup>2</sup>Newtonovski fluidi su fluidi u kojima su viskozna naprezanja linearno ovisna.

## Jednadžba stanja

Još su nam potrebne dvije veze da bismo dobili potpuni skup jednadžbi koje određuju dinamiku našeg problema u kontinuiranom mediju; jednadžba stanja i konstitutivni model. Jednadžba stanja nekog određenog materijala povezuje tlak, gustoću i temperaturu ili unutarnju energiju. Ona opisuje kompresibilnost, toplinsku ekspanziju, brzine vala i druga termodinamička svojstva. Može sadržavati i opise faza promjena materijala kao što su kruto-kruto, taljenje i isparavanje. Kako se unutarnja energija najčešće računa direktno u modelu udara, najprigodnija forma jednadžbe stanja je tipično

$$p = f(\rho, E). \quad (3.37)$$

Međutim, često se entropija i temperatura računaju dodatno. Jednadžbe stanja koje su implementirane u hidrokodove su detaljnije objašnjene u poglavlju Numerika.

## Konstitutivni model

Konstitutivni model (ponekad se naziva i model devijatornog naprezanja ili model jakosti) povezuje devijatorno naprezanje s naprezanjem, promjenom naprezanja, unutarnjom energijom i oštećenjem (ili tlakom i temperaturom) na sljedeći način

$$\tau_{ij} = f(\epsilon_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}, E, D). \quad (3.38)$$

Ova jednakost opisuje odgovor materijala na opterećenje uzrokovano devijatornim naprezanjem. Jednadžba stanja, zajedno s konstitutivnim modelom, definiraju materijalni odgovor na naprezanje, koji se skupno nazivaju model materijala. Specifična svojstva materijala određuju odgovor materijala na naprezanje, implicirajući da se različiti materijali različito ponašaju za nominalno iste uvjete udara. Stoga mogućnost numeričkog modela da simulira sudar dva objekta uvelike ovisi o sofisticiranosti i točnosti modela materijala uvedenih da opišu udarni element i metu. Težina kreiranja točnih modela materijala ostaje i dalje veliki izazov za numeričko modeliranje udara. Više o konstitutivnim modelima koji su implementirani u hidrokodove se može vidjeti u sljedećem poglavlju.

## 3.3 Jednadžbe plitke vode

Tok plitke vode je samo jedan od mnogih posebnih modela u hidrodinamici. Neki tokovi u atmosferi se također opisuju korištenjem ovih jednadžbi koje ćemo izvesti. Jednadžbe plitke vode su sustav nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi koje određuju tok fluida u oceanima, priobalnim područjima, estuarijima, rijekama i kanalima. Općenita svojstvenost toka plitke vode je da je vertikalna dimenzija značajno manja od horizontalne.

Jednadžbe plitke vode se koriste za predviđanje plime, razine podizanja mora pri olujama i promjene priobalja nastalih uslijed uragana ili morskih struja.

Problem koji gledamo zahtijeva proučavanje širenja valova u morima i oceanima koji su inkompresibilni Newtonovski fluidi, dakle tenzor naprezanja je oblika  $\sigma = -pI + \tau$ . Pretpostavimo da su salinitet i temperatura promatranog fluida konstantni, pa vrijedi da je i gustoća  $\rho$  konstanta. Također možemo pretpostaviti da je jedina sila koja djeluje na česticu fluida sila teža (za točniji račun može se promatrati i Coriolisova sila). Uz ove pretpostavke, jednadžbe koje opisuju gibanje fluida su sljedeće

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (3.39)$$

$$\rho \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \rho \mathbf{g} + \nabla \cdot \sigma, \quad (3.40)$$

gdje smo brzinu označili s  $\mathbf{v} = (u, v, w)$ . Notacija za prostorne koordinate je  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

Osnovna pretpostavka u teoriji plitke vode je da je verikalna dimenzija  $H$  promatrane domene značajno manja od bilo koje horizontalne dimenzije  $L$ , ( $H \ll L$ ). Primijetimo da je brzina čestice fluida jednaka na svim dubinama. Prema teoriji linearnih valova, koja ne uključuje pretpostavke plitke vode od samog početka, saznaje se da dobivamo duge valove plitke vode ako je omjer dubine vode i valne duljine manji od 0,05. To možemo smatrati gornjom granicom teorije plitke vode.

Pretpostavimo da promatrani fluid zadovoljava pretpostavke plitke vode te promotrimo sliku 3.2 i definiramo sljedeće funkcije:

- $\zeta = \zeta(t, x, y)$  je uzvišenje (u  $m$ ) slobodne površine u odnosu na geoid<sup>3</sup>
- $b = b(x, y)$  je batimetrija<sup>4</sup> (u  $m$ ) mjerena pozitivno prema dolje od geoida
- $H = H(t, x, y)$  je ukupna dubina; primijetimo da je  $H = \zeta + b$ .

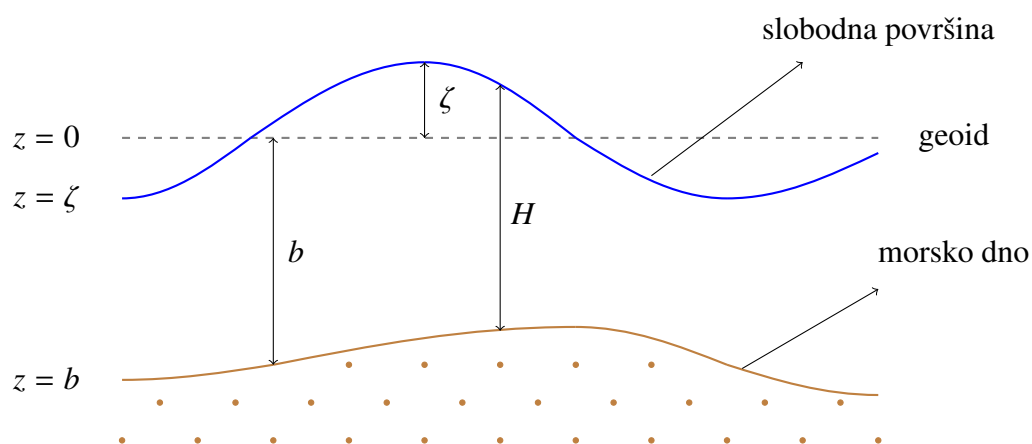
## Rubni uvjeti

Kako bismo izveli jednadžbe plitke vode, potrebni su nam rubni uvjeti. Koristit ćemo rubne uvjete zadane na morskom dnu i na slobodnoj površini. Postoje i drugi koji se mogu naći u [30]. Uvjete je potrebno zadati na dnu i površini.

Na morskom dnu gdje je  $z = -b$  možemo zadati sljedeće rubne uvjete

<sup>3</sup>Geoid je tijelo koje nastaje ako zamislimo morsku površinu koja prolazi ispod kopna. Geoid je fizikalno tijelo, smjer sile teže okomit je na diferencijal plohe.

<sup>4</sup>Batimetrija je mjera dubine vode u oceanima, rijekama ili jezerima. Na temelju izmjerenih dubina izrađuju se batimetrijske karte na kojima se s pomoću izobata može odrediti reljef dna.



Slika 3.2: Ilustracija presjeka mora.

1) bez klizanja

$$u = v = 0$$

(eng. *no-slip*)

2) bez normalne brzine

$$u \frac{\partial b}{\partial x} + v \frac{\partial b}{\partial y} + w = 0$$

3) smicanje na dnu

$$\tau_{bx} = \tau_{xx} \frac{\partial b}{\partial x} + \tau_{xy} \frac{\partial b}{\partial y} + \tau_{xz},$$

gdje je  $\tau_{bx}$  trenje na oceanskom snu. Slično i za  $y$  smjer.Na slobodnoj površini gdje je  $z = \zeta$  možemo zadati sljedeće rubne uvjete

1) bez relativne normalne brzine

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} - w = 0$$

2)  $p = 0$ 

3) Smicanje na površini

$$\tau_{sx} = -\tau_{xx} \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \tau_{zx}.$$

### Dvodimenzionalne jedndžbe plitke vode

Integrirajmo prvu jednakosti iz (3.39) po trećoj komponenti

$$\int_{-b}^{\zeta} \operatorname{div} \mathbf{v} dz = w(\zeta) - w(-b) + \nabla_{12} \cdot \int_{-b}^{\zeta} \mathbf{v} dz = 0. \quad (3.41)$$

Za vertikalnu komponentu brzine  $w$  vrijedi  $\frac{d\zeta}{dt} = w(\zeta)$ . Uzimajući no-slip rubni uvjet na dnu i definirajući sljedeće

$$\int_{-b}^{\zeta} \mathbf{v} dz = (\zeta + b)v(x, y, t)$$

$$z = \zeta + b,$$

imamo

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \operatorname{div}(zv) = 0.$$

U drugoj jednakosti iz (3.39) zanemarujemo sve članove koji sadrže  $w$ , to možemo jer smo pretpostavili da je voda plitka, te dobivamo

$$\frac{\partial p}{\partial z} = \rho g.$$

To možemo smatrati središnjim svojstvom teorije plitke vode. Rješavajući separabilnu običnu diferencijalnu jednadžbu je

$$p = \rho g(\zeta - z),$$

odakle slijedi

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad \text{i} \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \quad (3.42)$$

Integrirajmo jednadžbu kontinuiteta  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  od  $z = -b$  do  $z = \zeta$ . Primjenom Leibnitzovog pravila, jer i  $b$  i  $\zeta$  ovise o  $t$ ,  $x$  i  $y$ , dobivamo :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-b}^{\zeta} \nabla \cdot \mathbf{v} dz = \int_{-b}^{\zeta} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) dz + w \Big|_{z=\zeta} - w \Big|_{z=-b} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{-b}^{\zeta} u dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^{\zeta} v dz - \left( u \Big|_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + u \Big|_{z=-b} \frac{\partial b}{\partial x} \right) \\ &\quad - \left( v \Big|_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + v \Big|_{z=-b} \frac{\partial b}{\partial y} \right) + w \Big|_{z=\zeta} - w \Big|_{z=-b}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Definirajmo srednje brzine po dubini na sljedeći način

$$\bar{u} = \frac{1}{H} \int_{-b}^{\zeta} u dz$$

$$\bar{v} = \frac{1}{H} \int_{-b}^{\zeta} v dz.$$

Iskoristimo li rubne uvjete te definirane srednje brzine za račun (3.43), dobivamo

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(H\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(H\bar{v}) = 0. \quad (3.44)$$

Promotrimo sada lijevu stranu jednadžbe očuvanja količine gibanja za  $x$  i  $y$  komponente. Integrirajući lijevu stranu te jednadžbe za  $x$  komponentu po dubini, dobivamo

$$\int_{-b}^{\zeta} \left( \frac{\partial}{\partial t} u + \frac{\partial}{\partial x} u^2 + \frac{\partial}{\partial y} (uv) + \frac{\partial}{\partial z} (uw) \right) dz$$

$$= \frac{\partial}{\partial t} (H\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x} (H\bar{u}^2) + \frac{\partial}{\partial y} (H\bar{u}\bar{v}) + \left\{ \begin{array}{l} \text{članovi diferencijalne advekcije} \\ \text{cijalne advekcije} \end{array} \right\}.$$

Članovi diferencijalne advekcije računavaju činjenicu da srednja vrijednost produkta dvije funkcije nije produkt srednjih vrijednosti. Slično kao gore dobivamo i integriranjem lijeve strane jednadžbe momenta za  $y$  komponentu.

Promotrimo sada desnu stranu jednadžbe momenta za prvu i drugu komponentu. Integriranjem po dubini dobivamo, redom, za  $x$  i  $y$  komponente

$$-\rho g H \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \tau_{sx} - \tau_{bx} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-b}^{\zeta} \tau_{xx} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^{\zeta} \tau_{xy} dz,$$

$$-\rho g H \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \tau_{sy} - \tau_{by} + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^{\zeta} \tau_{xy} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^{\zeta} \tau_{yy} dz.$$

Uzimajući u obzir integracijski račun koji smo proveli, dobivamo 2D nelinearne jednadžbe plitke vode

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(H\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y}(H\bar{v}) & = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t}(H\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial x}(H\bar{u}^2) + \frac{\partial}{\partial y}(H\bar{u}\bar{v}) & = -gH \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{\rho}(\tau_{sx} - \tau_{bx} + F_x) \\ \frac{\partial}{\partial t}(H\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial x}(H\bar{u}\bar{v}) + \frac{\partial}{\partial y}(H\bar{v}^2) & = -gH \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{1}{\rho}(\tau_{sy} - \tau_{by} + F_y). \end{cases}$$

Površinsko naprežanje  $\tau_{sx}$  i  $\tau_{sy}$ , trenje na dnu  $\tau_{bx}$  i  $\tau_{by}$  te  $F_x$  i  $F_y$  ovise o promatranom problemu te su unaprijed poznate veličine. Članovi  $F_x$  i  $F_y$  uključuju naprežanje vjetra, gradijent atmosferskog tlaka te radijacijsko naprežanje (kratkih) valova. Više se može naći u [30].

Dani sustav možemo zapisati i u vektorskom obliku

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial y} + \mathbf{s} = 0, \quad (3.45)$$

gdje su fluksevi i desna strani dani sa

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} bu \\ bv \\ b \end{pmatrix}, \mathbf{f}_1 = \begin{pmatrix} bu^2 + \frac{1}{2}gb^2 \\ buv \\ bu \end{pmatrix}, \mathbf{f}_2 = \begin{pmatrix} buv \\ bv^2 + \frac{1}{2}gb^2 \\ bv \end{pmatrix}, \mathbf{s} = \begin{pmatrix} -fbv + c_f u \|\mathbf{v}\| + gb \frac{\partial \zeta}{\partial x} \\ fbu + c_f v \|\mathbf{v}\| + gb \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

# Poglavlje 4

## Numerika

U ovom poglavlju ćemo dati uvid u numeričko modeliranje pada asteroida u ocean. Kako smo u prvom poglavlju podijelili takav događaj u pet distinktnih faza, slično možemo učiniti i s numeričkim modelom. Hidrodinamički model iz trećeg poglavlja koji smo izveli iz zakona o očuvanju mase, količine gibanja i energije se koristi za numeričku simulaciju udara i procesa nastajanja kratera. Kolapsom kratera, koji smo opisali u drugom poglavlju, nastaje val čije širenje modeliramo jednadžbama plitke vode radi smanjenja broja računalnih operacija samo u tom posebnom slučaju.

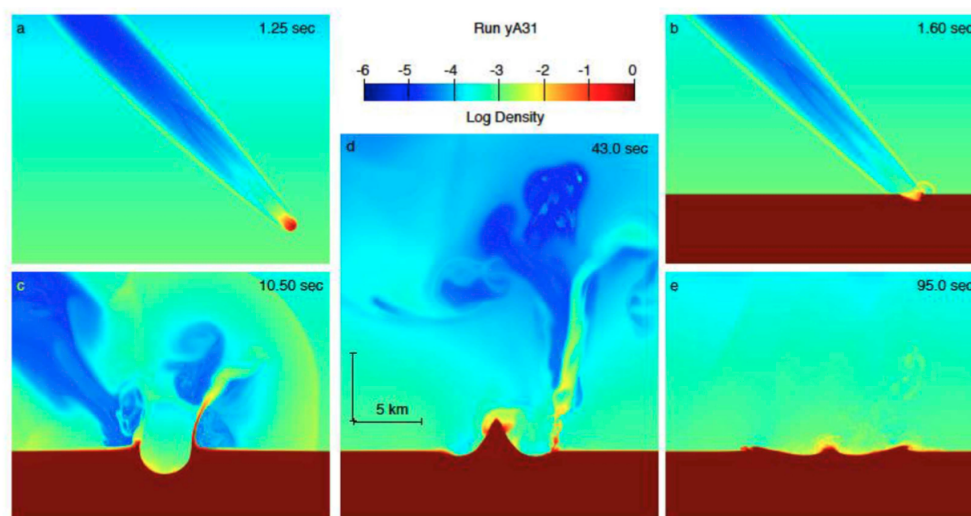
Modeliranje dinamičnog procesa, kao što je nastajanje kratera pri udaru asteroida, zahtijeva sofisticiran računalni kod koji može simulirati ne samo prolaz šok-vala, nego i ponašanje geoloških materijala kroz širok raspon stanja naprezanja. Računalni programi koji se bave širenjem šok-valova i računaju brzine, smicanja, naprezanja itd. kao funkciju vremena i prostornih varijabli se nazivaju hidrokodovi (eng. „*hydrocodes*”) ili kodovi fizike šokova.

Izlazni podaci hidrokoda, koji služe kao ulazni podaci za kod jednadžbi plitke vode, su visine vodenog stupca za svaki element mreže, pod pretpostavkom da se mreže u oba koda podudaraju. Ekstrahiramo ih u trenutku kada je postignuta maksimalna visina vodenog stupca središnjeg vrha prolaznog kratera (slika 4.1,d) te postavljamo kao inicijalno stanje visine vode u kodu jednadžbi plitke vode. Kao jedan primjer ovakvog pristupa prilažem rad [13] koji kombinira hidrodinamički kod GEODYN i kod plitkog vodenog vala SWWP.

### 4.1 Hidrokod

Hidrokodovi, odnosno paketi kodova fizike šokova, su isprva nastali radi studija učinaka oružja gdje su razine tlaka bile dovoljno visoke, znatno iznad granice elastičnosti materijala, da se zanemari čvrstoća. Upravo iz tog razloga su u ovom radu povremeno spomenuti izrazi poput ”projektil” umjesto asteroida ili ”meta” za Zemlju.





Slika 4.1: Prikaz pada asteroida korištenjem koda RAGE iz rada Robertsona i Gislera (2018) (vidi [26]). Korištena je Sesame jednadžba stanja, karakteristike asteroida: sferni, promjera  $250m$ , homogen, željezni, na inicijalnoj visini  $20km$  u statičkoj atmosferi u hidrostatskoj ravnoteži. Pada brzinom  $20kms^{-1}$  pod kutom trajektorije  $45^\circ$  u ocean dubine  $5km$ .

Hidrokodovi koriste klasičnu mehaniku kontinuuma za opisivanje dinamike kontinuira-nog medija. Oni rješavaju jednadžbe očuvanja mase, količine gibanja i energije koristeći eksplicitne algoritme. Potrebne su još dvije jednadžbe kako bi sustav bio potpun, jed-nadžba stanja i konstitutivni model. Kinematički pristupi rješavanju ovog problema su Lagrangev i Eulerov, dok su numeričke tehnike rješavanja metoda konačnih diferencija, metoda konačnih volumena i metoda konačnih elemenata. Lagrangev pristup karakterizira činjenica da se mreža giba s materijalom i uobičajeno se koristi metoda konačnih diferencija, dok je u Eulerovom mreža fiksna u prostoru te se koristi metoda konačnih volumena. Osim ova dva pristupa, može se još koristiti njihova kombinacija ili metoda glatkih čestica koja nije obuhvaćena ovim radom.

## Diskretizacija

Kako bismo riješili jednadžbe očuvanja numerički, potrebno ih je diskretizirati. Obično zadajemo mrežu, koja se sastoji od ćelija duljine  $\Delta x$ , koja reprezentira geometriju objekta koji proučavamo. Vrijeme diskretiziramo postavljanjem vremenskog koraka  $\Delta t$  koji određuje duljinu integracijskog ciklusa. Vremenski korak se određuje tako da zadovoljava Courant–Friedrichs–Lewyjev uvjet koji kaže da se niti jedna informacija ne smije proširiti

preko najmanje ćelije u jednom vremenskom koraku. To znači da je  $\Delta t$  proporcionalan s  $\Delta x$ , odnosno

$$dt \leq \frac{|dx|}{c}, \quad (4.1)$$

gdje je  $c$  brzina zvuka poznatog materijala. Prema CFL uvjetu, numerička stabilnost je zajamčena ako vrijedi (4.1). Ovisno o metodi, ponekad su potrebni dodatni uvjeti, npr. CTH (Eulerovski kod) ima uvjet ograničenja promjene volumena ćelija što sprječava preveliku kompresiju i ekspanziju ćelije.

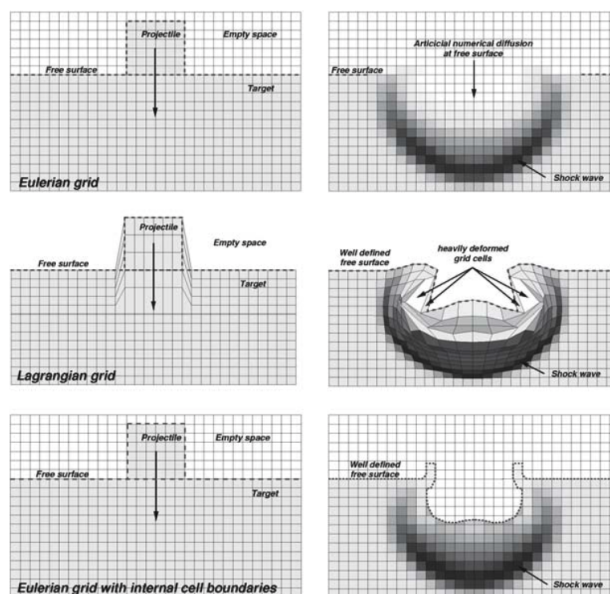
Simulacija bi se trebala izvršavati s dovoljno velikom rezolucijom da bismo riješili sve važne promjene toka u prostoru i vremenu. Finoća mreže je ograničena dostupnom memorijom i vremenom izvođenja programa gdje se tijekom svakog eksplicitnog vremenskog koraka iterira kroz mrežu, ćeliju po ćeliju, te ažurira pozicije mreže kako bi se uračunao utjecaj vanjskih i unutarnjih sila. Često se koriste i algoritmi za lokalno profinjenje mreže. Zahtjevi za mrežu moraju biti u ravnoteži s hardverom jer je ukupna pohrana u računalu proporcionalna broju ćelija mreže

$$N^k \times M, \quad (4.2)$$

gdje je  $k$  dimenzija prostora problema koji gledamo,  $N$  je broj prostornih ćelija u svakom smjeru,  $M = \frac{T}{dt}$  broj integracijskih ciklusa, a  $T$  ukupno vrijeme izvršavanja. Velika ovisnost računalne memorije i vremena izvođenja simulacije o dimenzionalnosti hidrokoda znači da računalni hardver može značajno ograničiti potencijalnu složenost simulacije. Upravo iz ovog razloga je većina hidrokodova  $2D$  koji omogućavaju bočno širenje i pretpostavljajući osnu simetriju, mogu se koristiti za modeliranje vertikalnog udara i kolapsa kratera, procesa koji se može smatrati osno simetričnim. Modeliranje procesa udara u njegovoj sveukupnoj složenosti, uključujući i oblik udarnog tijela zahtijeva  $3D$  hidrokod.

Dodatnu zabrinutost uzrokuje diskontinuiranost prirode šok-događaja koji mogu donijeti nestabilnosti u diskretiziranu reprezentaciju. Numeričko rješenje koje stabilizira numerički opis šokova je uvođenje potpuno artifičijelnog disipativnog mehanizma zvanog artifičijelna viskoznost; ona glatko raspoređuje šok po nekoliko ćelija. Ovo je numerički objekt korišten samo za vrijeme kompresije materijala. Iako artifičijelan, zaista predstavlja male fizikalne procese koji se odvijaju na skalama manjim od jedne ćelije i ne mogu se drugačije riješiti u računu. Korištenjem artifičijelne viskoznosti šokovi imaju konačnu debljinu i vrijeme nastajanja, te su bolje numerički opisani. Prikaz ovog mehanizma se može vidjeti na slici 4.2 iz rada Weissa i Wünnemana (2007) [31].

Osim što slika 4.2 prikazuje difuziju šok-vala, također ukazuje na probleme Eulerovog i Lagrangevog pristupa. Primijetimo da se u Eulerovom pristupu pojavljuje problem razlikovanja materijala, odnosno granice između dva materijala nisu jasne te dolazi do miješanja materijala u ćelijama. Ovaj problem se može riješiti implementacijom profinjenje mreže ili uvođenjem rutina za praćenje granica, no oba postupka zahtijevaju dodatnu memoriju i povećavaju vrijeme izvođenja. U slučaju Lagrangevog pristupa su granice između materi-



Slika 4.2: [Weiss, Wünneman 2007] Usporedba kinematičkih modela (Euler, Lagrange, Euler s rutinama za praćenje granica) i prikaz numeričke artifičijne difuzije za svaki od njih. Udarno tijelo i meta su sačinjeni od istog materijala.

jala i slobodne površine jasne tijekom cijelog izvršavanja, no nailazimo na problem distorzije ćelija. Kada su ćelije značajno iskrivljene, metoda konačnih diferencija ima smanjenu točnost jer može doći do preklapanja ćelija što rezultira negativnim masama. Rješenje je u ovom slučaju iskrivljenu mrežu prekriti novom, neiskrivljenom, po cijenu smanjene točnosti.

## Modeliranje materijala

Prema rezultatima trećeg poglavlja, znamo da se modeliranje materijala sastoji od jednadžbe stanja i konstitutivnog modela. Termodinamička jednadžba stanja povezuje tlak  $p$  s materijalnom gustoćom i unutarnjom energijom  $E$  ili temperaturom  $T$

$$p = f(\rho, E). \quad (4.3)$$

Većina numeričkih modela kao izlazne vrijednosti daje gustoću i unutarnju energiju, zbog toga se većinom tlak izražava upravo pomoću njih. Ona ima centralnu ulogu pri računanju utjecaja kompresibilnosti, tj. promjene gustoće i ireverzibilne termodinamičke procese kao što je toplinski udar. Jednadžba stanja je ključna u početnoj fazi udara, fazi kontakta i kompresije, kada je devijatorno naprezanje malo u odnosu na tlak.

Tijekom kompresije šokom, materijal možemo tretirati kao fluid jer hidrodinamički tlak uvelike premašuje čvrstoću materijala. Nakon dekompresije materijal se vraća svojim krhkim i duktilnim svojstvima. Dok su faze kontakta i kompresije te ekskavacije dominirane hidrodinamičkim tokom materijala, kasna faza modifikacije, kao kolaps kratera, je dominirana ravnotežom između naprezanja silom težom i otpornosti smicanja materijala. Konstitutivni model opisuje odgovor materijala na deformaciju, odnosno opisuje promjenu oblika ili čvrstoće materijala i općenito ga možemo zapisati kao

$$\sigma_{ij} = f(\epsilon_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}, E, D), \quad (4.4)$$

kao što smo vidjeli ranije. I ovdje možemo gledati temperaturu  $T$  umjest  $E$  u (4.4). Konstitutivni model računa devijatornu komponentu naprezanja te je važan za kasnije faze procesa krateriranja kada čvrstoća materijala određuje konačni oblik i karakteristike kratera. Korisnost cijelog hidrokoda ovisi o sofisticiranosti jednadžbe stanja i konstitutivnog modela.

### Jednadžba stanja

Za širok raspon mogućih šok stanja (tlaka i temperature), tranzicije između faza (kruto stanje, taljenje, isparavanje, disocijacija, ionizacija) moraju biti definirane jednadžbom stanja uz dane razumne pretpostavke svojstava materijala (brzina zvuka, toplinski kapacitet, toplinska provodljivost,...) u danim uvjetima. Dakle, jednadžbe stanja zahtijevaju dugi niz parametara materijala i ne dozvoljavaju jednostavna analitička rješenja za određeno stanje prema [31]. Ovdje ćemo spomenuti nekoliko najčešće korištenih jednadžbi stanja koje nalazimo u literaturi u kontekstu kompresije šok-valovima i procesa udara asteroida.

Najjednostavnija jednadžba stanja je jednadžba idealnog plina

$$p = (\gamma - 1)\rho E, \quad (4.5)$$

gdje je  $\gamma$  omjer specifične topline. Iako je jednostavna, daje dovoljno dobre rezultate za prolazak asteroida kroz atmosferu prije nego udari u površinu Zemlje. Nešto kompliciranije jednadžbe stanja adekvatne za opis termodinamičkih stanja krutih materijala su Mur-naghanove i Mie-Grüneisenove jednadžbe stanja koje su uspješno korištene za opis toplinskih stanja Zemljine unutrašnjosti i plastičnih valova pri umjerenim razinama tlaka. Za tretiranje šok-valova, kada je prisutan širok raspon tlakova i gustoća, posebno je uvedena Tillotsonova jednadžba stanja u Tillotsonovom radu iz 1962. [28]. Jednadžba stanja je važan analitički alat za termodinamiku šoka, pa ćemo prezentirati ukupan sustav jednadžbi. Za komprimirani režim ( $\rho > \rho_0$ , gustoća pri nultom tlaku) i hladno stanje ekspanzije ( $E < E_{ii}$ , specifična unutarnja energija inicijalnog isparavanja), tlak je dan sa

$$P_c = \left( a + \frac{b}{E/(E_0\eta^2) + 1} \right) \rho E + A\mu + B\mu^2. \quad (4.6)$$

Material	$\rho_0$ ( $kg/m^3$ )	a	b	A ( $GPa$ )	B ( $GPa$ )	$E_0$ ( $MJ/kg$ )	$\alpha$	$\beta$	$E_{iv}$ ( $MJ/kg$ )	$E_{cv}$ ( $MJ/kg$ )
Iron	7800	0,5	1,5	128	105	9,5	5	5	2,4	8,67
Aluminum	2700	0,5	1,63	75,2	65	5	5	5	3,0	13,9
Granite	2680	0,5	1,3	18	18	16	5	5	3,5	18
Gabbroic Anorthosite										
(lpp)	2940	0,5	1,5	71	75	478	5	5	4,72	18,2
(hpp)	3970	0,5	1,3	240	130	1800	5	5	3,19	16,8
Andesite	2700	0,5	1,3	18	18	16	5	5	3,5	18
Wet Tuff	1970	0,5	1,3	10	6	11	5	5	3,2	16
Dry Tuff	1700	0,5	1,3	4,5 <sup>a</sup>	3	6	5	5	3,2	18
Limestone	2700	0,5	0,6	40	67	10	5	5	2,5	14
Halite	2160	0,5	0,6	25	30	5	5	5	2	15
Alluvium	2600	0,5	0,8	30	10	6	5	5	3,5	18
Water (0°C)	998	0,7	0,15	2,18	13,25	7	10	5	0,419	2,68
Ice (hpp, -10°C)	1293	0,3	0,1	10,7	65	10	10	5	0,773	3,04

Slika 4.3: Tablica parametara za Tillotsnovu jednadžbu stanja iz [31].

Oblik korišten za stanje ekspanzije ( $\rho_0 < \rho$ ), kada energija premašuje energiju potpunog isparavanja ( $E > E_{pi}$ ) je

$$P_e = a\rho E + \left( \frac{b\rho E}{E/(E_0\eta^2) + 1} + A\mu^{-\beta(\rho_0\rho-1)^2} \right) e^{-\alpha(\rho_0/\rho-1)^2}. \quad (4.7)$$

Za djelomično isparavanje ( $\rho_0 < \rho$  i  $E_{ii} > E > E_{pi}$ ) koristi se sljedeća formulacija

$$P = \frac{(E - E_{ii})P_e + (E_{pi} - E)P_c}{E_{pi} - E_{ii}}. \quad (4.8)$$

U ovim jednadžbama  $\eta = \rho/\rho_0$ ,  $\mu = \eta - 1$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  i  $E_0$  su parametri materijala koji se mogu vidjeti na slici 4.3. Tillotsonova jednadžba stanja daje dobre rezultate za metale i jednostavan kamen kada su modifikacije krute faze zanemarive.

Puno sofisticiraniji opis termodinamičkih svojstava daje ANEOS (Analytic EOS) izvedena u radu Thompsona i Lausona (1972.). Ova jednadžba stanja je paket FORTRAN-skih analitičkih modela koji ovise o različitim fizikalnim aproksimacijama u različitim domenama vrijednosti. Tlakovi, temperature i gustoće su izvedeni iz Helmholtzove slobodne energije što ih čini termodinamički konzistentnima. Svojstva materijala su opisana nizom od 24 do 40 parametara uz informaciju o atomskom broju i masenom udjelu svakog elementa u materijalu. Prednosti ove jednadžbe su da nudi promjene faza, a mana je da tretira plinove kao monoatomne zbog čega se ne može razriješiti problem isparavanja za npr. vodu. Iz ove jednadžbe je izvedena jednadžba stanja SESAME koja je tablična što ubrzava izvršavanje simulacije jer nema potrebe za računanjem, no nasljeđuje sva ostala ograničenja od ANEOS-a.

## Konstitutivni model

Kada govorimo o konstitutivnom modelu, govorimo o matematičkoj aproksimaciji empirijski određenog ponašanja materijala pri naprezanju. Potoje različiti oblici čvrstoće ovisno o uvjetima opterećenja: vlačna, kompresivna, smicanje, lomljenje. Svaka od njih određuje mogućnost materijala da podnese različite vrste naprezanja. Svaka od njih je karakterizirana različitim dijelom jednog omotača popuštanja. Omotač popuštanja je granica definirana u prostoru naprezanja između elastične i neelastične deformacije. Nakon što materijal više ne može apsorbirati naprezanje, dodatni dio modela, pravila toka, opisuje prirodu plastične deformacije od toka do loma. Međutim, povijest šokova modificira i oštećuje materijal te se i to treba uzeti u obzir.

Model razvijen za duktilne materijale je von Misesov model. Plastični tok se javlja pri naprezanju većem od granice elastičnosti  $Y_0$  koja je u ovom modelu konstantna. Von Misesov kriterij je implementiran u šok kodove reduciranjem devijatornog naprezanja na sljedeći način

$$S_{ij} \longrightarrow fS_{ij}, \quad f = \left\{ \frac{Y_0^2}{3J_2}, 1 \right\}, \quad (4.9)$$

gdje se druga invarijanta tenzora naprezanja  $J_2 = \frac{1}{2}S_{ij}S_{ij}$  koristi kao skalarna mjera maksimalnog naprezanja smicanjem. Postupak (4.9) se naziva metoda radijalnog povrata i također je, za von Misesov model, smjer pridruženog pravila toka teorije plastičnosti.

Geološki materijali (tlo, kamen, led) imaju kompleksnije ponašanje od duktilnih materijala. Važna karakteristika njihove čvrstoće je značajan porast otpornosti smicanju s povećanjem tlaka. To je uobičajena značajka sofisticiranijih kriterija sloma za geološke materijale opisana detaljnije u [14]. Smicanje se može mjeriti na dva načina, maksimalnim naprezanjem smicanjem  $\tau$  u bilo kojoj ravnini ili prosječnim smicanjem danim invarijantom naprezanja  $\sqrt{J_2}$ . Tlak može biti stvarni prosjek normalnog naprezanja  $p$  ili maksimalno normalno naprezanje  $\sigma$  u bilo kojoj ravnini. Ovisno o načinu računanja smicanja i tlaka, razlikujemo dva modela, Drucker-Prager model koristi  $p$  i  $\sqrt{J_2}$ , te Mohr-Coulombov model koristi  $\sigma$  i  $\tau$ . Oba modela imaju granicu elastičnosti koja ovisi o tlaku te su najjednostavniji modeli sloma uobičajeno korišteni za mehaniku tla i kamena.

Jedan model čvrstoće daje Collins u svom radu [4] koji je implementiran u mnoge hidrokodove. Koristi sljedeću mjeru otpornosti smicanju, koja ovisi o tlaku, za neoštećeni materijal

$$Y_i = Y_0 + \frac{\mu_i p}{1 + \frac{\mu_i p}{Y_M - Y_0}}, \quad (4.10)$$

gdje je  $Y_0$  otpornost smicanju pri nultom tlaku (kohezija),  $Y_M$  otpornost smicanju kada  $p \longrightarrow \infty$ ,  $\mu_i$  je koeficijent unutarnjeg trenja za neoštećeni materijal. Smicanje se u ovom modelu mjeri pomoću  $\sqrt{J_2}$ . Da bismo opisali granicu elastičnosti potpuno oštećenog ka-

mena, što uključuje i granulirani materijal, koristi se sljedeća jednakost

$$Y_d = \mu_d p, \quad (4.11)$$

gdje je  $\mu_d$  koeficijent trenja oštećenog materijala. Dodatno, model mora specificirati na koji način se naprezanje koje prelazi granicu elastičnosti preslikava nazad na površinu sloma u svakom vremenskom koraku (metoda povrata) i rezultirajući inkrement plastičnog toka tijekom svakog vremenskog koraka (pravilo toka). Granica elastičnosti  $Y$  se često koristi za redukciju devijatornog naprezanja (reprezentiranog s  $\sqrt{J_2}$ ) za faktor  $\frac{Y}{\sqrt{J_2}}$ . Dakle, i ovdje imamo metodu radijalnog povrata. Komplikacija pri lomu kamena je da kamen pri naprezanju prelazi u granulirani kamen (šljunak ili pijesak) te dolazi do promjene omotača popuštanja iz kohezivnog u odgovarajući za granulirani materijal. Skalarni parametar oštećenja  $D$  opisuje akumulaciju vlačnih i/ili smicajnih lomova od neoštećenog  $D = 0$  do potpuno oštećenog  $D = 1$  te se često koristi za interpolaciju između (4.10) i (4.11) na sljedeći način

$$Y = (D - 1)Y_i + DY_d, \quad (4.12)$$

gdje je  $Y$  ograničen tako da je  $Y \leq Y_i$ . Parametar oštećenja se računa koristeći model pucanja/loma i može biti povezan i s modelima poroznosti. U kontinuumu se često koriste temeljne strukture s postojećom Weibullovom distribucijom pukotina koje rastu i spajaju se pri vlačnom opterećenju. U ovim modelima pukotine rastu konstantnom brzinom jednom kada defekt postane aktivan. Konačna brzina rasta pukotina prirodno vodi do sloma kamenog materijala. Postoje dvije skale poroznosti: mikro i makro poroznost. Skala veličine za liniju razgraničenja je veličina ćelije mreže. Makroporoznost se implementira vizualno očitim prazninama u strukturi, dok se mikroporoznost rješava korištenjem materijalnog modela na subpodručjima. Za više pogledati [4].

## Primjer

U ovom radu ćemo koristiti kod fizike šokova iSALE (Wünnemann, 2006. [32]), koji je ekstenzija hidrokoda SALE (Amsden, 1980. [1]). Da bi simulirali procese hiperbrzih udara u krute materijale SALE je modificiran te uključuje elasto-plastični konstitutivni model, modele fragmentacije, različite jednadžbe stanja (EoS) i mnoge materijale (Melosh, 1992. [20]; Ivanov, 1997. [17]). Novija poboljšanja uključuju modificirani model čvrstoće (Collins, 2004. [4]), model poroznosti zbijanja (Wünnemann, 2006. [32]; Collins, 2011. [8]) te model dilatantnosti (Collins, 2014. [7]). Verzija korištena za generiranje simulacije je iSALE-Dellen o kojoj se može više naći u priručniku [11]. Zahvaljujem se svim tvorcima iSALE-a, te posebno hvala Thomasu Davidsonu na odobravanju korištenja iSALE2D.

Primjer koji gledamo je dan kao primjer korištenja iSALE-a i pokušaj je reprodukcije kratera Chicxulub. Model je slabe rezolucije udara asteroida promjera 14.4km koji udara

DESCRIPTION	granite	dunite_	calcite
Poisson ratio	0.30	0.25	0.30
Strength at zero pressure (intact; MPa)	10.	10.	5.
Strength at inf. pressure (intact; MPa)	2500.	3500.	500.
Internal friction coeff. (intact)	2.00	1.20	1.
Strength at zero pressure (damaged; MPa)	0.01	0.01	0.01
Friction coefficient (damaged)	0.60	0.60	0.40
Melt Temperature (degrees Kelvin)	1673.	1373.	1500.
Specific Heat Capacity (J/Kg/Kelvin)	1000.	1000.	1000.
Thermal Softening parameter	1.20	1.20	1.20
Simon parameters for Melt Temp. vs P.	6000.	1520.	6000.
Simon parameters for Melt Temp. vs P.	3.00	4.05	3.00
Visc. of ac. fluid. target (m2/s)	288000.	2880000.	0.
Decay time for block oscillations (s)	165.60	72.00	0.
A.F. viscosity scaling paramameter	0.0080	0.080	0.
A.F. decay time scaling parameter	120.	500.	0.

Slika 4.4: Tablica materijalnih parametara za simulaciju Chicxulub kratera korištenjem iSALE-Dellen.

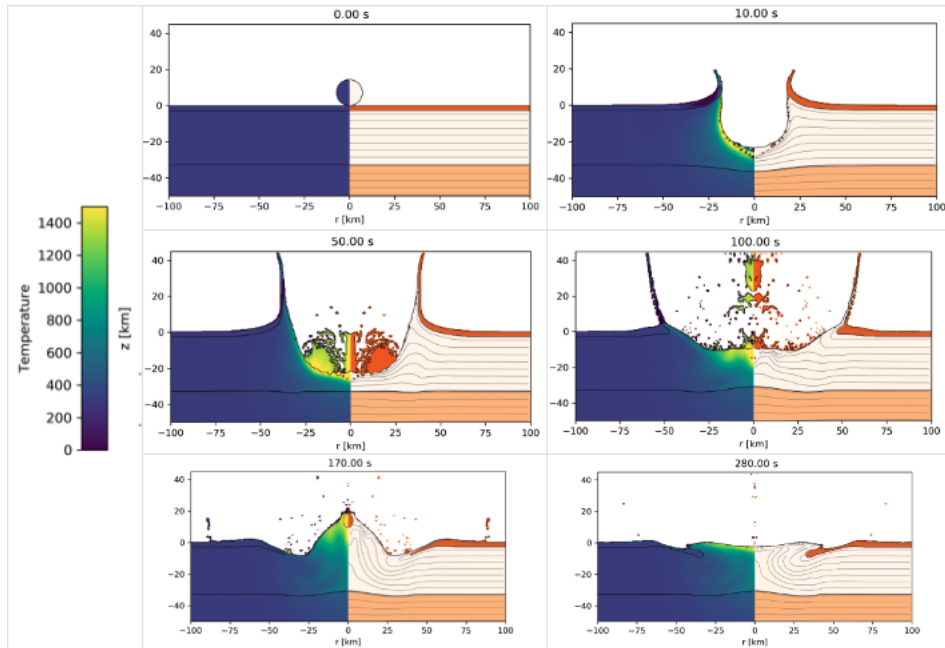
metu pri  $12\text{km/s}$ . Udarno tijelo je sfernog oblika građeno od materijala reprezentiranog koristeći tabličnu jednadžbu stanja izvedenu iz ANEOS-a za granit. Meta ima površinsku gravitaciju  $9.81\text{m/s}^2$  i sastoji se od  $2.8\text{km}$  sedimenta (kalcit) iznad  $30\text{km}$  kore (granit) koja prekriva plašt (dunit). Jednadžba stanja svakog od materijala je definirana koristeći tabličnu jednadžbu stanja izvedenu iz ANEOS-a. Koristi se akustična fluidizacija kako bi se oslabilo metu i zadovoljio kolaps kompleksnog kratera. Model je sličan onima opisanim u radu Ivanova, 2005. [16]. Meta ima inicijalnu temperaturu koja je konstantna i iznosi  $293\text{K}$ .

Broj ćelija visoke rezolucije u smjeru  $x$  je 250 veličine  $400\text{m}$ , a u smjeru  $y$  200 veličine također  $400\text{m}$ . Parametri materijala su dani u tablici na slici 4.4.

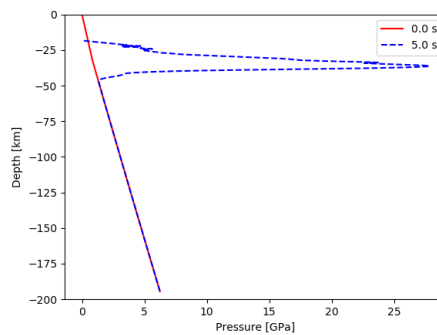
Vrijeme izvođenja je  $188\text{min}$  i  $41\text{s}$  na procesoru i7-8705G CPU@3.10GHz. Iako računalo ima osam jezgara, kod je izvršavan samo na jednoj te je korišteno  $80\text{MB}$  radne memorije. Rezultate simulacije za temperaturu i gibanje materijala možemo vidjeti na slici 4.5 te rezultate akustične fluidizacije i čvrstoće materijala na slici 4.7 uz razliku tlakova inicijalnog stanja i prvog koraka simulacije na slici 4.6.

Pogledajmo još jedan primjer predstavljen na Konferenciji planetarne obrane (eng. Planetary Defense Conference) 2017. godine te opisan u radu Robertsona, 2018. [26]. Gledamo udar željeznog asteroida koji pada pri brzini  $17\text{km/s}$  u okolici Japana. Ovaj udar je ekvivalentan  $1\text{Gt}$  TNT-a. Za izvršavanje simulacije je korišten Lawrence Livermore ALE3D (LANL) hidrokod na NASA Pleidaes superračunalu uz Eulerov način na osno-simetričnoj 2D domeni. Svaki materijal u ćeliji zadržava svoje varijable stanja i prenosi se odvojeno korištenjem shema rekonstrukcije granica. Materijalni modeli korišteni su tablični LEOS slični Sesame biblioteci. Mreža se sastoji od ćelija veličine  $1\text{m} - 100\text{m}$  (npr.

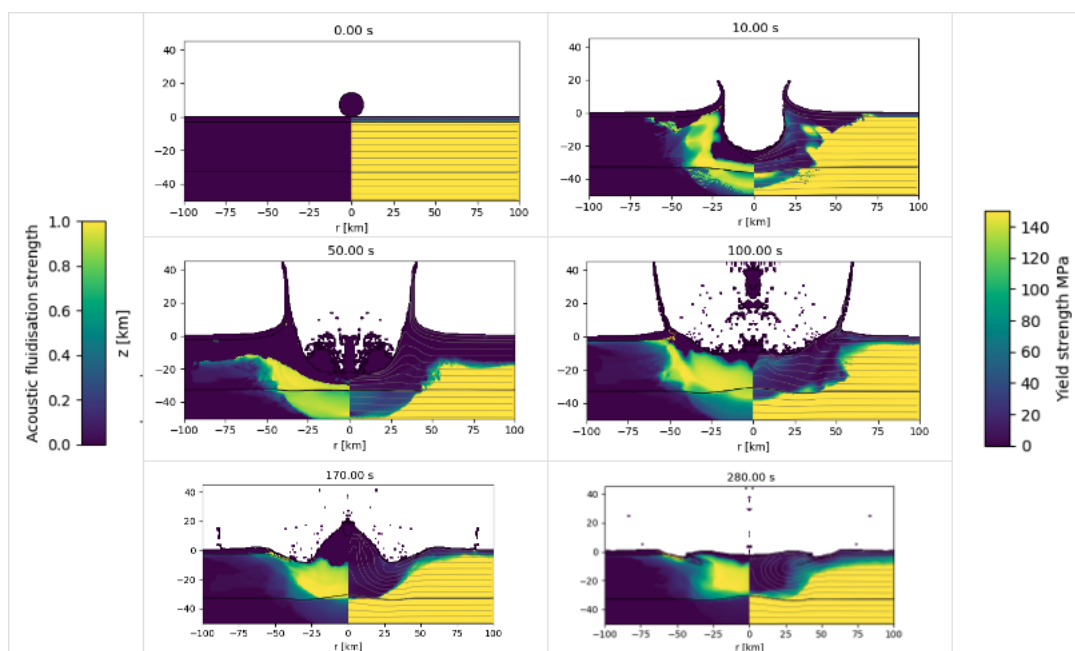




Slika 4.5: Prikaz temperatura u Kelvinima i gibanja materijala. Maksimalna temperatura koja se postiže je 1500K.

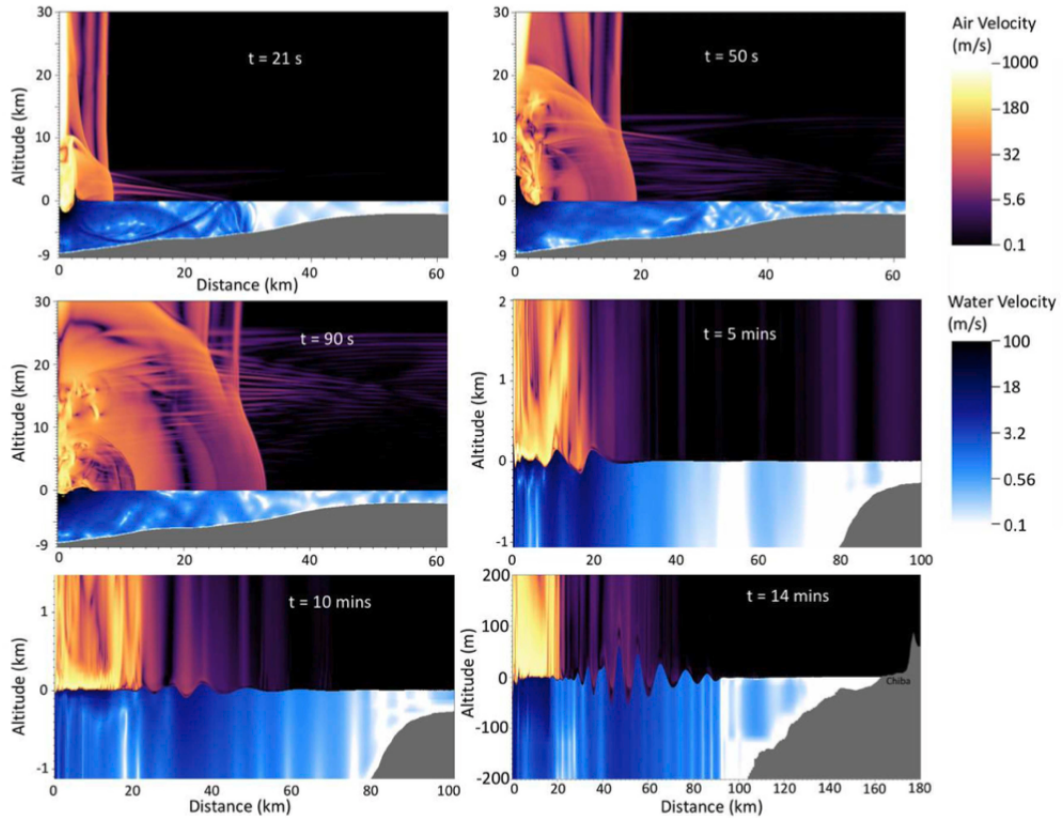


Slika 4.6: Prikaz vertikalnog profila tlaka za Chicxulub primjer koristeći iSALE-Dellen. Usporedba inicijalnog stanja tlaka pri dubinama do 200km i prvog koraka simulacije gdje postiže preko 25GPa.

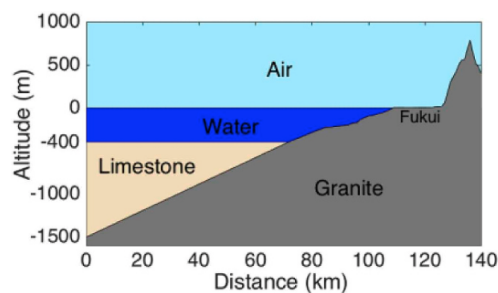


Slika 4.7: Prikaz čvrstoće materijala i akustične fluidizacije za Chicxulub primjer koristeći iSALE-Dellen.

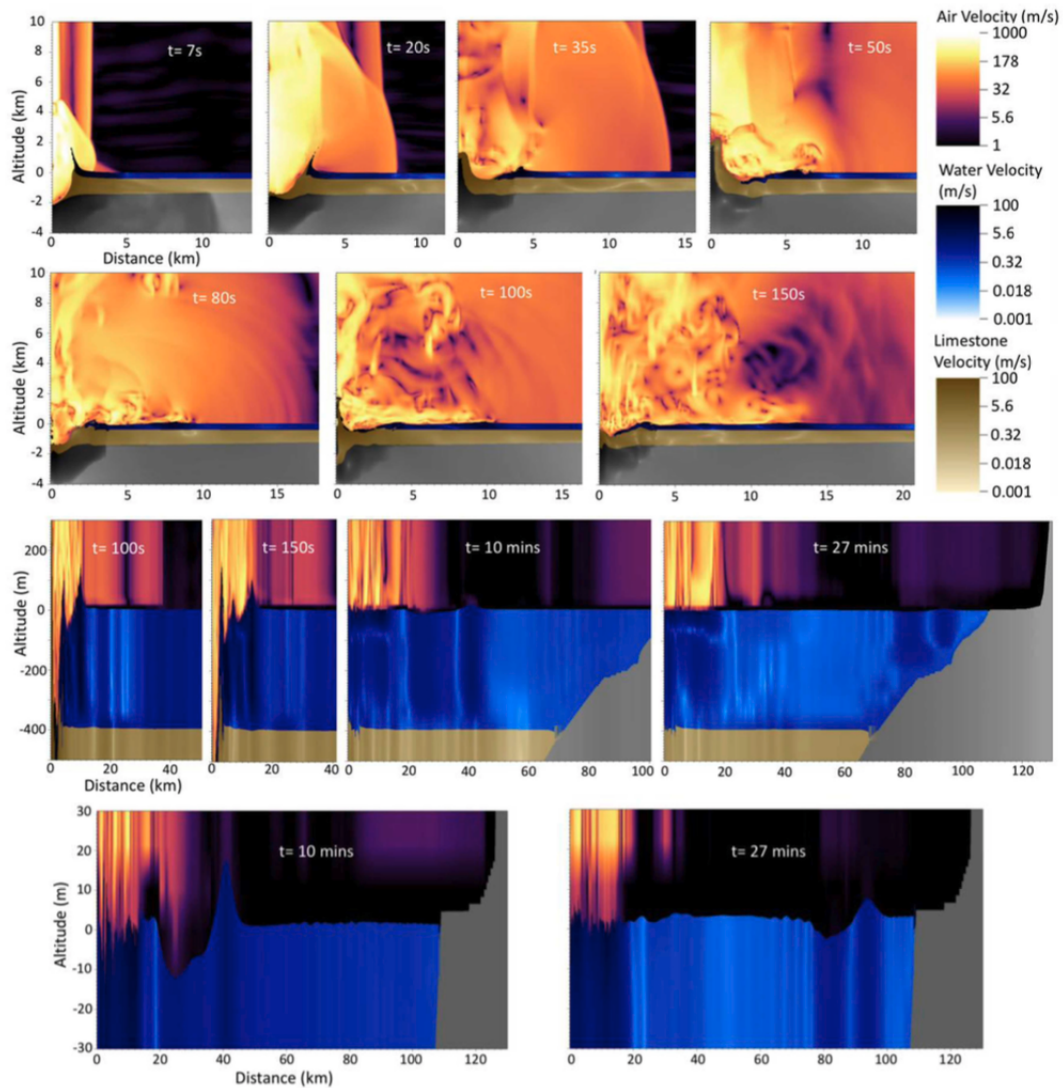
na udaljenosti 100m je ćelija veličine 1m). Pogledat ćemo rezultate na slici 4.8 udara u duboku vodu, točnije u Japansku brazdu na < 200km od prefektura Tokyo i Chiba u ocean dubine 9km. Na slici 4.10 su dani rezultati pada asteroida istih karakteristika u plitku vodu, u Japansko more između Japana i Koreje, prosječne dubine 400m.



Slika 4.8: (Robertson, 2018. [26]) Udar asteroida u Japansku brazdu, dubina do  $9\text{km}$ . Prolazni krater je promjera  $3\text{km}$  čijim oscilacijama centralnog vrha i praznine rezultiraju dva velika tsunamija uzrokovana udarom i nekoliko manjih nakon  $5\text{min}$ . Vodeni valovi su valne duljine  $5\text{km}$ , dakle valovi duboke vode koji doživljavaju disperziju.



Slika 4.9: (Robertson, 2018. [26]) Prikaz materijala za simulacija udara asteroida u plitko Japansko more.



Slika 4.10: (Robertson, 2018. [26]) Udar asteroida u Japansko more, prosječne dubine 400m, uz materijale prikazane na slici 4.9. Prikaz kratera od promjera 3km. Dolazi do probijanja vode, vapnenca i granita. Vapnenac i granit poprime karakteristike fluida te formiraju centralni vrh. Kolaps ruba kreira jedan tsunami koji  $\approx 50\text{km}$  od mjesta udara postaje površinski val valne duljine 20km. Valna duljina je  $\approx 50$  puta dulje od 400m dubine vode što val karakterizira kao nedisperzivan i implicira mogućnost proučavanja daljnje propropagacije pomoću koda jednažbi plitke vode.

## 4.2 Numeričko rješavanje jednadžbi plitke vode

Kao što smo vidjeli na primjeru pada asteroida u plitko Japansko more (slika 4.10), valovi koji pritom nastaju zadovoljavaju uvjete valova plitke vode te se njihova propagacija nadalje može simulirati pomoću numeričkog koda koji rješava jednadžbe plitke vode uvedene u poglavlju 3. Ako pretpostavimo da fluid nije viskozan, iz Navier-Stokesovih jednadžbi dobivamo Eulerove jednadžbe. Uz dodatnu pretpostavku da je amplituda vala i dubina vode kroz koju propagira mala u usporedbi s valnom duljinom, iz Eulerovih jednadžbi dobivamo jednadžbe plitke vode (JPV). Da bi vrijedila fizikalna pojednostavljenja za JPV, valna duljina mora biti bar 20 puta veća od dubine vode. Geometrijsko širenje rezultira smanjenjem amplitude vala. Za konstantne dubine i kružni inicijalni poremećaj vode, da bi kriterij JPV bio zadovoljen, valovi koji se šire kružno propagiraju dalje od izvora te im se amplituda smanjuje prema  $\frac{A}{\sqrt{r}}$ , gdje je  $A$  amplituda, a  $r$  udaljenost od središta udara. Za manje omjere dubine vode i valne duljine (gdje grupna i fazna brzina divergiraju) primijenjuju se Boussinesqove jednadžbe.

U ovom dijelu ćemo opisati numeričku RKDG (Runge-Kutta Diskontinuirana Galerkinova) metodu rješavanja JPV. Diskontinuirana Galerkinova metoda je klasa metoda konačnih elemenata koja koristi diskontinuiran po dijelovima polinomijalni prostor rješenja i prostor test funkcija. Ona kombinira prednosti metode konačnih elemenata i metode konačnih volumena. Prednosti su joj: točnost, visoka paralelna efikasnost, fleksibilnost za hp-profinjenje<sup>1</sup> te proizvoljne geometrije i mreže. Osim opisa metode, pratiti ćemo i implementaciju koda dostupnog na [2] koji koristi `Dune::PDELab`. Paralelizacija se u kodu vrši koristeći `Dune::MPIHelper`.

Neka je  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ,  $d = 1, 2$  otvoren i ograničen. Neka je  $T > 0$  vrijeme izvođenja simulacije,  $g$  označava silu težu i neka je  $b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  glatka funkcija koja predstavlja nadmorsku visinu dna mjerenu s referentne nadmorske visine. Primijetimo da je prostorna derivacija  $b$  nagib dna. Neka je  $(x_1, \dots, x_d)$  oznaka za prostorne koordinate. Nadalje koristimo konvenciju sumacije za ponavljajuće indekse. Nelinearne jednadžbe plitke vode koje su prvog reda se mogu zapisati na sljedeći način

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_i(U)}{\partial x_i} = S(U, b) \text{ u } \Omega \times \langle 0, T \rangle \quad (4.13)$$

početni i rubni uvjeti

gdje je  $U := (h, q) : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{d+1}$ ,  $h \in \mathbb{R}$  je visina vode i  $q \in \mathbb{R}^d$ ,  $q = (q_1, q_2) = (hu, hv)$  je protok u dvije dimenzije. Desna strana  $S(U, b)$  i funkcije fluksa  $F_i(U)$ ,  $1 \leq i \leq d$  su za  $d = 1$  definirane sa

<sup>1</sup>hp-profinjenje (eng. hp-adaptivity) je profinjenje mreže elemenata varijabilne veličine ( $h$ ) i polinomnog stupnja ( $p$ ).

$$S(U, b) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial b}{\partial x_1} \end{pmatrix}, \quad F_1(U) = \begin{pmatrix} q \\ \frac{q^2}{h} + \frac{g}{2}h^2 \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

te za  $d = 2$

$$S(U, b) = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \frac{\partial b}{\partial x_1} \\ -gh \frac{\partial b}{\partial x_2} \end{pmatrix}, \quad F_1(U) = \begin{pmatrix} q_1 \\ \frac{q_1^2}{h} + \frac{g}{2}h^2 \\ \frac{q_1 q_2}{h} \end{pmatrix}, \quad F_2(U) = \begin{pmatrix} q_2 \\ \frac{q_1 q_2}{h} \\ \frac{q_2^2}{h} + \frac{g}{2}h^2 \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

JPV prikazane ovdje su bez dodatnih članova koji odgovaraju kompliciranijim modelima kao difuzije, trenja na dnu, Coriolisove sile ili naprezanja uzrokovana vjetrovom. Svi ovi dodatni članovi se mogu diskretizirati koristeći DG pristup.

### Prostorna diskretizacija

Neka je  $\tau$  triangulacija domene  $\Omega$ , intervali za  $d = 1$  i mreža trokuta za  $d = 2$  gdje je domena poligonalna. Neka je  $\eta := \max_{K \in \tau} \eta_K$ , gdje je  $\eta_K$  promjer elementa triangulacije  $K$  i neka je  $n_K = (n_{K,1}, \dots, n_{K,d})^T$  jedinična vanjska normala na  $K$ . Za  $d = 1$  je  $n_k = \pm 1$  ovisno o orijentaciji. Za  $K \in \tau$ ,  $\sigma \subset \partial K$  je unutarnja granica (vanjska granica, ili granica na rubu) od  $K$  ako postoji  $K' \in \tau$ ,  $K' \neq K$  takav da  $\sigma = K \cap K'$  ( $\sigma = K \cap \partial\Omega$ ). Sa  $E^i(K)$  ( $E^\partial(K)$ ) označimo skup svih unutarnjih (vanjskih) granica elementa  $K$ . Za  $d = 1$  stranice su jednostavno vrhovi. Stavimo  $E(K) = E^i(K) \cup E^\partial(K)$ . Za  $\sigma \in E^i(K)$ ,  $K \in \tau$ ,  $K_\sigma$  označava element triangulacije koji dijeli stranicu  $\sigma$  s elementom  $K$ . Za  $\sigma \in E(K)$ ,  $n_{K,\sigma}$  označava vanjsku jediničnu normalu od  $K$  na  $\sigma$  i  $|\sigma|$  je  $(d-1)$ -dimenzionalna mjera na  $\sigma$  (za  $d = 1$ ,  $|\sigma| = 1$ ).

Prostor  $\mathbb{P}^p(K)$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $K \in \tau$  označava prostor polinomnih funkcija  $d$  varijabli nad elementom  $K$  najviše stupnja  $p$ . DG prostor je definiran sa

$$\mathbb{P}_D^p := \left\{ v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : v|_K \in \mathbb{P}^p(K), \forall K \in \tau \right\}. \quad (4.16)$$

Neka je  $K \in \tau$ , pomnožimo (4.13) sa  $v \in (\mathbb{P}^p(K))^m$ ,  $m = d + 1$ , integrirajmo po  $K$  i primijenimo Greenovu formulu (za  $d = 1$ , rubni integrali se svode na evaluaciju po točkama). Ovaj postupak vodi do varijacijske ili slabe formulacije naše početne jednadžbe (4.13)

Naći  $U_D := (h_D, q_D) \in C^1([0, T], [\mathbb{P}_D^p(K)]^m)$

tako da  $\forall t \in \langle 0, T \rangle, \forall K \in \tau$

$$\int_K v \frac{\partial U_D}{\partial t} + \int_{\partial K} v \phi_K(U_D) - \int_K \frac{\partial v}{\partial x_i} F_i(U_D) = \int_K v S(U_D, b), \quad \forall v \in [\mathbb{P}_D^p(K)]^m \quad (4.17)$$

početni uvjeti,

ovdje je  $\phi_K(U_D)$  oznaka za numerički fluks. Numerički fluks se računa na sljedeći način

$$\forall K \in \tau, \forall \sigma \in E(K), \forall x \in \sigma \quad (4.18)$$

$$\phi_K(U_D)(x) = \begin{cases} \phi_*(U_D|_K(x), U_D|_{K_\sigma}(x), n_{K,\sigma}), & \sigma \in E^i(K), \\ (\phi_*(U_D|_K(x), U_D^\partial(x), n_{K,\sigma}), & \sigma \in E^\partial(K), \end{cases}$$

gdje je  $\phi_* : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$  funkcional numeričkog fluksa neovisan o ćeliji mreže koju promatramo i  $U_D^\partial(x)$  je fiktivno vanjsko stanje koje služi za provođenje rubnih uvjeta slabo kroz numeričke flukseve. Funkcional  $\phi_*$  mora zadovoljavati određene uvjete kao što su

- konzervativnost

$$\forall (X, Y, n) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d \quad \phi_*(X, Y, n) + \phi_*(Y, X, -n) = 0 \quad (4.19)$$

- i konzistentnost

$$\forall (X, n) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^d \quad \phi_*(X, X, n) = F_i(X)n_i. \quad (4.20)$$

Često korištene funkcije fluksa su Lax-Friedrichsov fluks i Harten-Lax-van Leer-Einfeldov za  $d = 2$  i Harten-Lax-van Leer-Contactov za  $d = 1$ . U kodu dostupnom na [2] je korišten Lax-Friedrichsov fluks dan na sljedeći način

$$\phi_*(a, b) = \frac{1}{2}(F(a) + F(b) - \alpha(b - a)), \quad (4.21)$$

gdje je  $a = U_D|_K(x)$ ,  $b = U_D|_{K_\sigma}(x)$  ili  $b = U_D^\partial(x)$ ,  $\alpha = \max(|U_D| + \sqrt{gh})$  na cijeloj domeni.

Da bismo (4.17) napisali u vektorskoj formulaciji trebamo odrediti bazne funkcije iz prostora  $[\mathbb{P}^p]^m$ . Da bismo iskoristili lokalni karakter DG metoda, bazne funkcije imaju nosač lokaliziran na jednoj ćeliji mreže. Na danoj ćeliji mreže lokalne bazne funkcije su Legendreovi polinomi. U kodu na [2] su oni implementirani sa

```
Dune::PDELab::QkDGLocalFiniteElementMap<GV::Grid::ctype, double,
degree, dim, Dune::PDELab::QkDGBasisPolynomial::legendre>;
```

Određeni skup modalnih baznih funkcija konstruiranih koristeći baricentrične koordinate u dvije dimenzije se može naći u [25].

Neka je  $\bar{U}_D \in \mathbb{R}^N$  vektor komponenti od  $U_D$  s obzirom na bazne funkcije. Ovdje  $N$  označava ukupan broj stupnjeva slobode,  $N = Mm \frac{(p+d)!}{d!p!}$ , gdje je  $M$  broj ćelija mreže. Invertiranjem matrice masa, (4.17) možemo zapisati s

$$\frac{d\bar{U}_D}{dt} = \mathcal{H}_D(\bar{U}_D), \quad (4.22)$$

gdje je  $\mathcal{H}_D : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ . Primijetimo da je matrica masa blok dijagonalna te stoga lako invertibilna.

## Vremenska diskretizacija

Neka je  $(t^k)_{k \in \mathbb{N}}$  diskretan niz i  $t^0 = 0$ . Neka je  $(\Delta t)^k = t^{k+1} - t^k$   $(k + 1)$ -vi vremenski korak. Da bismo konstruirali aproksimaciju  $\bar{U}_D^k$  od  $\bar{U}_D$  u vremenu  $t^k$ , koristimo Runge-Kuttinu shemu  $q$ -tog reda. Uz dani početni uvjet  $\bar{U}_D^k$ , shema se sastoji od sljedećih koraka:

$$\begin{aligned} & \text{Za } k \in \mathbb{N}, \text{ postavi } \bar{U}_D^{k+1,0} = \bar{U}_D^k \\ & \text{tada za } i \in \{1, \dots, q\} \text{ izračunaj RK poditeracije} \\ & \bar{U}_D^{k+1,i} = \sum_{l=0}^{i-1} c_i^l \bar{w}_{D,i}^l, \quad \bar{w}_{D,i}^l = \bar{U}_D^{k+1,l} + \frac{d_i^l}{c_i^l} (\Delta t)^k \mathcal{H}_D(\bar{U}_D^{k+1,i}) \\ & \text{Postavi } \bar{U}_D^{k+1} = \bar{U}_D^{k+1,q}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Koeficijenti  $c_i^k$  i  $d_i^k$  se mogu naći u [3]. Da bismo osigurali jednak red točnosti u prostoru i vremenu, koriste se RK shema reda  $p + 1$ , tj.  $q = p + 1$ . Vremenski korak se određuje uzimanjem  $\min \{(\Delta t)^*, \alpha(\Delta t)_{CFL}^k\}$ , gdje je  $(\Delta t)^*$  maksimalni korak određen proizvoljno,  $\alpha = \frac{1}{2}$ , a  $(\Delta t)_{CFL}^k$  rezultira iz sljedećeg CFL uvjeta

$$(\Delta t)_{CFL}^k = \frac{1}{2p + 1} \min_{K \in \tau} \left( \frac{\eta_K}{\sup_{\partial K} \left| \frac{q_D^k}{h_D^k} \cdot n_K \right| + \sqrt{gh_D^k}} \right). \quad (4.24)$$

U kodu koji gledamo se vremenski korak realizira sljedećim linijama koda

```
Dune::PDELab::ExplicitOneStepMethod<RF, IGO, LS, V, V> osm(*method, igo, ls);
*method=Dune::PDELab::RK4Parameter<RF>
```

uz definiranje operatora i rješavača redom danima s

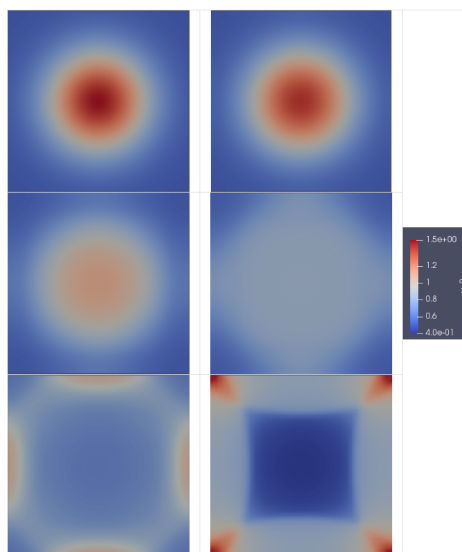
```
Dune::PDELab::DGHyperbolicSpatialOperator<NUMFLUX, FEMDG>;
Dune::PDELab::ISTLBackend_OVLP_ExplicitDiagonal<GFS>;
```

## Primjer

Ovaj kod je dostupan kao primjer korištenja DG metode iz `Dune::PDELab HowTo` priručnika za rješavanje jednadžbi plitke vode. Pogledajmo primjer rješavanja JPV (4.13). Koristimo opisanu RKDG metodu s refleksivnim rubnim uvjetima i početnim uvjetom

$$u_0 = \exp - \left( \frac{(x_1 - 0.5)^2}{2} + \frac{(x_2 - 0.5)^2}{2} \right) + \frac{1}{2}. \quad (4.25)$$





Slika 4.11: Isječci iz simulacije dobiveni korištenjem koda koji se može vidjeti u [2]. Slike redom su u vremenima koji odgovaraju koraku izvođenja  $k = 0, 47, 132, 209, 318, 500$ .

Mreža je strukturirana veličine  $(0, 1) \times (0, 1)$ , broj ćelija u svakom smjeru je  $N = 2$ , profinjenje je postavljeno parametrom  $ref = 4$ , stupanj je  $deg = 1$ , uz proizvoljno odabran vremenski korak  $dt = 0,001$  i s ukupnim vremenom izvršavanja  $T = 0,5$ .

## Poglavlje 5

# Klimatske posljedice udara asteroida u ocean

U ovom poglavlju ćemo se osvrnuti na klimatske posljedice udara asteroida u ocean te dodati primjer koji donosi pregled jednog takvog događaja u Jadranskom moru.

Prema [24], udar na K-T granici je izazvao značajne posljedice za okoliš, od lokalnih do globalnih, koje su trajale od nekoliko sekundi do nekoliko tisuća godina. Lokalni i regionalni utjecaji udara uključuju zračni udar i toplinu od eksplozije pri udaru, tsunamije i potrese. Globalni utjecaji uključuju šumske požare zapaljene pri povratu izbačenog materijala u Zemljinu atmosferu. Unos iznimno velikih količina prašine u gornju atmosferu onemogućuje fotosintezu, u slučaju udara na K-T granici, na čak dva mjeseca. Dolazi i do nastajanja velikih količina dušikovog monoksida od zagrijavanja atmosfere šokom. Nakon reakcije vode sa sumpornim i ugljikovim dioksidom dospjelim u atmosferu pri udaru, dolazi do kiselih kiša.

Na ozbiljnost udara na K-T granici je djelomično utjecala kompozicija pogođenih stijena: 3km karbonata i evaporata koji prekrivaju kristalni podrum<sup>1</sup>. Inicijalno se mislilo da su isparavanje i dekompozicija karbonata (produkcija kalcij-oksida i otpuštanje ugljikovog dioksida rezultiraju globalnim zagrijavanjem) važni, sada se pokazuje da su najdestruktivniji efeti došli od otpuštanja sumpornih čestica iz isparenog kamena. Studije su pokazale da vulkanske erupcije bogate sumporom, kao erupcija vulkana Pinatubo 1991. godine, mogu značajno reducirati količinu sunčeve svjetlosti koja pada na Zemljinu površinu i rezultirati kratkotrajnim globalnim zahlađenjem. Procjenjuje se da je prosječno smanjenje globalne temperature iznosilo 15°C nakon udara na K-T granici.

---

<sup>1</sup>U geologiji, podrum i kristalni podrum su stijene ispod sedimentne platforme ili pokrova, ili općenito bilo koja stijena ispod sedimentnih stijena ili sedimentnih bazena koji su metamorfni ili magnetski po podrijetlu.

## 5.1 Utjecaji prolaska kroz atmosferu

Svemirski objekti promjera manjeg od  $100m$  su nakon prolaska kroz atmosferu ili u potpunosti ispareni ili raspadnuti do slobodnog pada. Asteroidi od  $100m$  do  $1000m$  promjera su nakon prolaska u potpunosti oštećeni, ali i dalje mogu uzrokovati jak udarni val koji može i ne mora imati utjecaja na površinu mete. Asteroidi promjera većeg od  $1km$  ne dožive značajnu disperziju te predstavljaju veliku opasnost. Od velike važnosti za disperziju je materijal asteroida. Homogeni željezni asteroidi u vodu udare gotovo neoštećeni te se maksimizira prijenos kinetičke energije na vodu prema Robertsonu i Gisleru [26]. Dakle, gustoća asteroida i njegova veličina, kut trajektorije te brzina određuju oštećenje asteroida tijekom njegovog prolaska kroz atmosferu.

Za odabranu gustoću, minimalan promjer asteroida koji može uzrokovati žrtve je  $18m$  prema [27] zbog utjecaja zračnog udara i toplinskog zračenja. Štetni utjecaji šoka postaju smrtni već za promjere asteroida od  $40m$ . Istraživanja u [27] potvrđuju da ovi zaključci korespondiraju s padom meteora koji je pogodio Čeljabinsk 2013. godine. Objekt promjera  $17-20m$  putujući  $19km/s$  pod kutom  $18^\circ$  se raspao u zraku nad Uralom na visini  $30-40km$ . Većina oštećenja i ozljeda je nastalo uslijed aerodinamičkog šoka koji je ošteti građevine i stakla uzrokujući indirektno ozljede. Stanovništvo okolice je također prijavilo opekline i privremenu sljepoću zbog jakog elektromagnetnog zračenja.

Važna posljedica prolaska asteroida kroz atmosferu je izazivanje atmosferskih šok-valova koji u interakciji s atmosferskim plinovima uzrokuju kemijske reakcije između molekula kisika i dušika koje formiraju dušikov oksid (npr. Tunguska iz 1908. godine, kada je nastalo  $3 \times 10^{10}kg$  dušikovog monoksida). Kemijska reakcija šokom nastalog dušikovog monoksida i atmosferskih plinova je omogućila dušikove spojeve koji su djelovali kao snažni fertilizatori i uzrokovali značajan rast vegetacije nakon udara.

## 5.2 Utjecaji šok-vala

Zračni udar (šok-val iniciran udarom u atmosferi) je najdestruktivnija posljedica udara uz formaciju kratera i distribuciju izbačenog materijala. Intenzitet udarnog vala ovisi o energiji udara i visini atmosfere taloženja energije. Zračni udar kompresira zrak do visokih tlakova izazivajući silovite udare vjetra odmah iza visokotlačne fronte. Skaliranjem nuklearnih eksplozija je procijenjeno da za maksimalne udare vjetra do  $40m/s$  otprilike 30% drveća bude srušeno, no za brzine vjetra preko  $90m/s$  čak 90%. Za događaje udara jakosti  $20-40Mt$  drveće bi bilo srušeno na radijalnoj udaljenosti  $14-19km$  od posljedica zračnog udara. Do 50% sisavaca ljudske veličine bi poginulo na do  $9-14km$ .

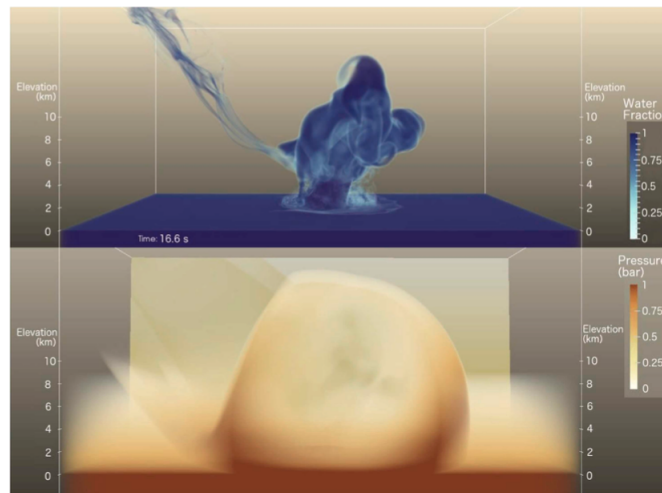


Slika 5.1: (Robertson i Gisler, 2018. [26]); Prikaz volumena frakcije vodene mase pri  $t = 75s$  za primjer sa slike 4.1. Ovaj udar rezultira isparavanjem četvrtine milijarde tona vode u stratosferu što rezultira regionalnim klimatološkim posljedicama.

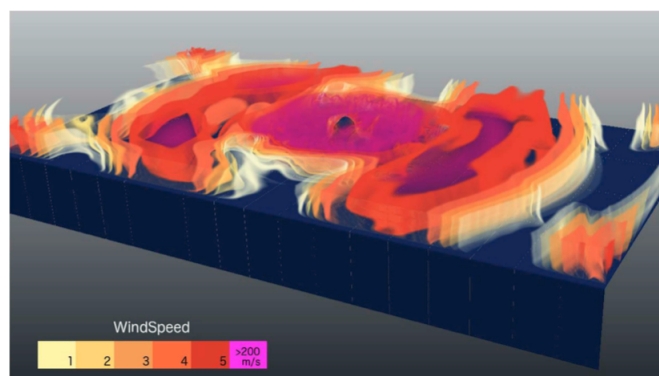
Pri doticaju s vodom, asteroid, ili ono što je od njega preostalo, trenutno isparava u stratosferu. Činjenica da je energija po jedinici mase udarnog tijela znatno veća od latentne topline isparavanja vode, velika količina vode, znatno veća od mase projektila, također ispari iznimno brzo u stratosferu. Voda koja ne ispari pri udaru formira vodenu zavjesu oko prolaznog kratera visine nekoliko kilometara u atmosferi, ali ostaje u tekućem stanju te naposljetku pada te uzrokuje sekundarno zapljuskivanje. Ukoliko je udar blizu naseljene obale, uzrokuje značajne poplave i oštećenje infrastrukture.

Stratosfera je obično vrlo suha. Većina Zemljine isparene vode je u troposferi i cirkulira relativno brzo (dani, tjedni) te pada na površinu. U stratosferi se voda zadržava dulje (u desetljećima). Lokalni unos pola milijarde tone vode može imati značajne regionalne posljedice koje vode do hlađenja ili zagrijavanja ovisno dođe li do kondenzacije u cirus. Količinu isparene vode za primjer sa slike 4.1 možemo vidjeti na slici 5.1

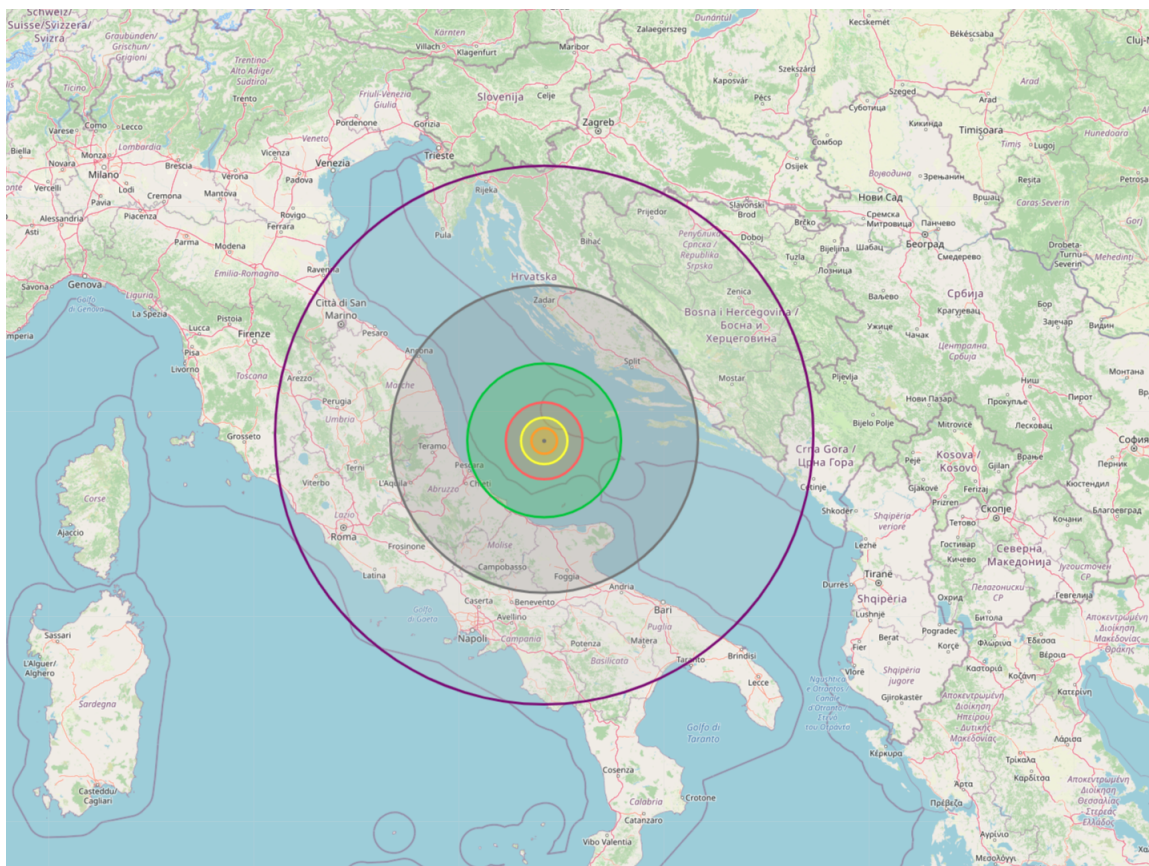
Nakon prolaska inicijalnog šoka, površinske temperature  $5km$  dalje od mjesta udara dosežu preko  $1200^{\circ}C$ . Već  $30s$  nakon udara šok je prošao preko  $20km$  s lokalnom površinskom temperaturom  $58 - 80^{\circ}C$ . Nakon minute, temperature veće od  $55^{\circ}C$  se protežu  $7km$  dalje popraćene horizontalnom brzinom vjetra od  $30m/s$  s orkanskom silom prema točki udara, te još većim vertikalnim brzinama. Na slici 5.3 je prikazana distribucija ukupnih brzina vjetra za primjer iz [26] na nadmorskoj visini  $1km$ . Lokalni tlak u vertikalnom smjeru na  $5km$  od točke udara premašuje  $10atm$  ( $1MPa$ ) pri prolasku šoka. Nakon prolaska šoka, na udaljenosti  $10km$ , ukupan površinski tlak je  $4,05 - 4,4atm$  ( $0,405 - 0,44MPa$ ).



Slika 5.2: (Robertson i Gisler, 2018. [26]); Prikaz frakcija vode (gore) i tlaka (dolje) za  $t = 16.6s$  za primjer sa slike 4.1 ( $20km/s$ , bez prisilnog rasprsnuća, promjera  $250m$ , kut  $45^\circ$ ). Voda ispari duž putanje lijevo od trajektorije asteroida vertikalno u stratosferu.



Slika 5.3: (Robertson i Gisler, 2018. [26]); Ilustracija brzina vjetra na  $1km$  nadmorske visine za primjer sa slike 4.1 za  $t = 43s$ . Brojevi 1 – 5 označavaju Saffir-Simpsonovu skalu uragana, čije su donje granice redom  $33, 43, 50, 58$  i  $70m/s$ . Ljubičastom bojom su označene brzine vjetra veće od  $200m/s$ . U blizini točke udara tok zraka je usmjeren vertikalno prema gore, slično kao kod gljivastih oblaka pri eksploziji. U blizini mjesta udara su najsilovitiji vjetrovi.



Slika 5.4: Prikaz posljedica udara željeznog asteroida promjera 1000m. Od najmanje kružnice do najveće karakteristike su: površina kratera, sve živo umire (narančasto); većina zgrada je srušena, gori ljudska koža, većina umire (žuto); ljudska koža može gorjeti, uništena je infrastruktura, padajuće krhotine su fatalne (crveno); uništene su građevine, određena odjeća se može zapaliti, krhotine i vrućina su fatalni za mnoge (zeleno); osjećaju se nepodnošljivi toplinski valovi koji su fatalni za starije i neka zdravstvena stanja, zvučni val, većina građevina ostane stajati, toplinki i šok-valovi (sivo); padanje prašine i pepela, svi ljudi su svjesni situacije jer su čuli i/ili vidjeli (ljubičasto).

### 5.3 Primjer udara u Jadransko more

Promotrimo primjer udara željeznog asteroida promjera 1000m pri brzini 20km/s pod kutom 60°. Koordinate mjesta udara su (42.852144, 15.478587) što možemo vidjeti na slici 5.4 kao središte kružnica koje predstavlja veličinu asteroida. Slika 5.4 je dobivena koristeći [19]. Posljedice prema [19] su dane u opisu slike 5.4.

Iste podatke o udaru smo uvrstili i u program koji se može naći na [9] te se o samom

programu više može pročitati u Collinsovom radu iz 2005. godine [10]. Rezultati ovog programa slijede.

Energija prije ulaska u atmosferu je  $8,38 \cdot 10^{20} J = 2 \times 10^5 Mt$  TNT-a. Radi usporedbe spomenimo da najjača hidrogenska bomba ima jakost 50–58Mt TNT-a. Frekventnost ovakvog događaja je otprilike jednom u milijun godina. Promjer prolaznog kratera je 22,9km, a dubina 8,09km. Nakon oscilacija, konačni kompleksni krater ima promjer 34,5km i dubinu 860m. U Zagrebu se vidi vatrena kugla radijusa 10,1km i čini se 6,91 puta veća od Sunca. Toplinska izloženost na lokaciji PMF, Zagreb je  $1,56 \times 10^6 Jm^{-2}$  pri čemu većina tijela trpi opekline 1. stupnja. Trajanje ozračivanja je 4,08min. Seizmička aktivnost na lokaciji PMF-a u Zagrebu počinje 1,11min nakon udara magnitudom 8,1 po Richterovoj skali i intenziteta VI - VII po Mercallijevoj. Izbačeni materijal (prašina s ponekim većim fragmentom srednje vrijednosti promjera 9,34mm) počinje padati u Zagrebu 4,48min nakon udara u nanosu od 6,61cm. Zračni udar na lokaciju PMF-a dolazi za 16,8min i povisi tlak za 21400Pa. Maksimalna brzina vjetra na PMF-u je tada  $46,4ms^{-1}$  (uragan drugog stupnja) te dolazi do pucanja stakala na prozorima, 30% drveća srušeno, ostalom drveću polomljene grane i lišće. Intenzitet zvuka je 87dB (glasno kao gust promet).

Za istu situaciju u Splitu, koji je 107km udaljen od mjesta udara, je radijus vidljive vatrene kugle 18km, a ona se čini 41 puta veća od Sunca. Toplinska izloženost od  $3,77 \times 10^7 J/m^2$  i trajanja 4,08min uzrokuje zapaljenje odjeće, većina tijela trpi opekline trećeg stupnja, zapali se papir, gori i listopadno drveće te trava. Seizmička aktivnost počinje već 20sec nakon udara magnitudom 8,1 po Richterovoj skali i intenziteta VII - VIII po Mercallijevoj. Izbačeni materijal (prašina s većim fragmentima srednje vrijednosti promjera 14,8cm) počinje padati 2,4min nakon udara u nanosu od 56,8cm. Zračni udar do Splita dolazi za 5,05min i povisi tlak za 221000Pa. Brzina vjetra doseže 306m/s uz intenzitet zvuka od 107dB što uzrokuje bol u ušima. Višekatnice će se srušiti kao i mostovi. Tsunami val amplitude 53,7 – 107m generiran udarom dolazi 26,6min nakon udara.

Najbliže udaru, na 29km udaljenosti, se nalazi otok Sveti Andrija. Iako je vidljivi radijus vatrene kugle samo za 0,8km veći nego u Splitu, čini se 147 puta veća od Sunca. Vrlo sličan je utjecaj toplinske izloženosti kao u Splitu, ali seizmička aktivnost počinje već 5,8sec nakon udara istom magnitudom kao u Splitu, ali intenziteta X-XI po Mercallijevoj skali. Nakon 1,29min cijeli otok prekrije nanos od 23,3m izbačenog materijala srednje vrijednosti promjera 3,94m. Zračni udar podiže tlak za  $3,37 \times 10^6 Pa$  i uzrokuje brzine vjetra od 1450m/s te intenzitet zvuka 131dB. Amplituda tsunami vala je između 185m i 371m te dolazi do obale za 7,7min.

# Bibliografija

- [1] C. Hirt A. Amsden, H. Ruppel, *SALE: A simplified ALE computer program for fluid flow at all speeds*, Los Alamos National Laboratories Report, 1980.
- [2] P. Brčić, *Diplomski-SWE*, dostupno na: <https://github.com/Qkvad/Diplomski-SWE>, (rujan 2021.).
- [3] B. Cockburn, C.W. Shu, *Runge-Kutta Discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems*, Journal of Scientific Computing **16** (2001), br. 3, 173–261.
- [4] B.A. Ivanov G.S. Collins, H.J. Melosh, *Modeling damage and deformation in impact simulations*, Meteoritics Planetary Science **39** (2004), br. 2, 217–231.
- [5] G.R. Osinski G.S. Collins, H.J. Melosh, *The Impact Cratering Process*, Elements **8** (2012), br. 1, 25–30.
- [6] G.S. Collins, K. Wünnemann, *How big was the Chesapeake Bay impact? Insight from numerical modeling*, Geology **33** (2005), br. 12, 925–928.
- [7] G.S. Collins, *Numerical simulations of impact crater formation with dilatancy*, Journal of Geophysical Research - Planets **119** (2014), br. 12, 2600–2619.
- [8] K. Wünnemann G.S. Collins, H.J. Melosh, *Improvements to the epsilon-alpha compaction model for simulating impacts into high-porosity solar system objects*, International Journal of Impact Engineering **38** (2011), br. 6, 434–439.
- [9] R. Marcus G.S. Collins, H.J. Melosh, *Impact: Earth!*, dostupno na: <https://impact.ese.ic.ac.uk/ImpactEarth/index.html>, (kolovoz 2021.).
- [10] R.A. Marcus G.S. Collins, H.J. Melosh, *Earth Impact Effects Program: A Web-based computer program for calculating the regional environmental consequences of a meteoroid impact on Earth*, Meteoritics Planetary Science **40** (2005), br. 6, 817–840.



- [11] T.M. Davison K. Wünnemann B. Ivanov H.J. Melosh G.S. Collins, D. Elbeshausen, *iSALE-Dellen manual*, dostupno na: <https://doi.org/10.6084/m9.figshare.3473690.v2>, (rujan 2021.).
- [12] D. Davidson, G.S. Collins, *The effect of the oceans on the terrestrial crater size-frequency distribution: Insight from numerical modeling*, *Meteoritics Planetary Science* **4** (2007), br. 11, 1915–1927.
- [13] P.L. Miller D.S. Dennison D.S. Dearborn T.H. Antoun S.M. Ezzedine, I. Lomov, *Simulation of Asteroid Impact on Ocean Surfaces, Subsequent Wave Generation and the Effect on US Shorelines*, *Procedia Engineering* **103** (2015), 113–120.
- [14] K.A. Holsapple, *On the "strength" of the small bodies of the solar system: A review of strength theories and their implementation for analyses of impact disruptions*, *Planetary and Space Science* **57** (2009), 127–141.
- [15] Y.K. Huang, D. Norman, *Shock Dynamics of Hypervelocity Impact of Metals*, *Naval Engineers Journal* **76** (1963), br. 4, 577–582.
- [16] B.A. Ivanov, *Numerical modeling of the largest terrestrial meteorite craters*, *Solar System Research* **39** (2005), br. 5, 381–409.
- [17] G. Neukum B.A. Ivanov, D. Deniem, *Implementation of dynamic strength models into 2D hydrocodes: Applications for atmospheric breakup and impact cratering*, *International Journal of Impact Engineering* **20** (1997), br. 1-5, 411–430.
- [18] A. Wittmann K. Wünnemann W.U. Reimold H.J. Melosh T. Kenkmann, G.S. Collins, *A model for the formation of the Chesapeake Bay impact crater as revealed by drilling and numerical simulations*, *Geology* **33** (2009).
- [19] P. McBurney Jr., *Asteroid Damage Visualization Map*, dostupno na: <https://asteroidcollision.herokuapp.com/>, (kolovoz 2021.).
- [20] E. Asphaug H.J. Melosh, E.V. Ryan, *Dynamic fragmentation in impacts: Hydrocode simulation of laboratory impacts*, *Journal of Geophysical Research* **97** (1992), br. 9, 14735–14759.
- [21] H.J. Melosh, *Crater modification by gravity: A mechanical analysis of slumping, Impact and explosion cratering* (1977), 1245–1260.
- [22] H.J. Melosh, *Impact Cratering: A Geological Process*, Oxford University Press, New York, 1989.

- [23] J.D. O’Keefe, T.J. Ahrens, *Impact-induced melting of planetary surfaces*, Large Meteorite Impacts and Planetary Evolution **293** (1999).
- [24] G.R. Osinski, E. Pierazzo, *Impact cratering: processes and products*, Blackwell Publishing Ltd, 2013.
- [25] S. Piperno, *Symplectic local time-stepping in non-dissipative DGTD methods applied to wave propagation problems*, Math.Model.Numer.Anal. **40** (2006), br. 5, 815–841.
- [26] D.K. Robertson, G.R. Gisler, *Near and far-field hazards of asteroid impacts in oceans*, Acta Astronautica **156** (2018), 226–277.
- [27] P.M. Atkinson C.M. Rumpf, H.G. Lewis, *Asteroid impact effects and their immediate hazards for human populations*, Geophysical Research Letters **44** (2017), br. 8, 3433–3440.
- [28] J.H. Tillotson, *Metallic equations of state for hypervelocity impact*, Air Force Special Weapons Center, 1962.
- [29] G.S. Collins G.R. Osinski H.J. Melosh J.V. Morgan V.U. Reimond E.P. Turtle, E. Pierazzo, *Impact structures: What does crater diameter mean?*, Large Meteorite Impacts III **384** (2005).
- [30] C.B. Vreugdenhil, *Numerical methods for Shallow-water Flow*, Kluwer Academic Publishers, 1994.
- [31] R. Weiss, K. Wünnemann, *Large waves caused by oceanic impacts of meteorites*, Tsunami and Nonlinear Waves (2007), 237–261.
- [32] H.J. Melosh K. Wünnemann, G.S. Collins, *A strain-based porosity model for use in hydrocode simulations of impacts and implications for transient crater growth in porous targets*, Icarus **180** (2006), 514–527.
- [33] K. Wünnemann, B. Ivanov, *Numerical Modelling of impact crater depth–diameter dependence in an acoustically fluidized target*, Planetary and Space Science **51** (2003), 831–845.
- [34] R. Weiss K. Wünnemann, G.S. Collins, *Impact of a cosmic body into Earth’s ocean and the generation of large tsunami waves: Insight from numerical modeling*, Reviews of Geophysics **48** (2010), br. 4.

# Sažetak

Opisujemo kako matematički modelirati udar asteroida u vodenu površinu te razriješiti diskontinuitete koji pritom nastaju. Rezultate važne za klimatske promjene uzrokovane ovim događajem dobivamo korištenjem numeričkih paketa kodova fizike šokova koji rješavaju jednadžbe očuvanja mase, količine gibanja i energije uz materijalne modele na proizvoljnoj domeni. U slučaju da je tsunami val generiran udarom vala plitke vode, dano je numeričko pojednostavljenje izvođenja simulacije širenja vala numeričkim rješavanjem jednadžbi plitke vode.

# Summary

We describe how to mathematically model an asteroid impact in water surface and how to manage the discontinuities that arise. Results important for climate changes caused by this event are obtained using shock physics code packages that solve conservation equations for mass, momentum and energy along with material models on an arbitrary domain. In a special case when tsunami wave generated by the impact is a shallow water wave, this work gives numerical simplification for simulating wave propagation by numerically solving shallow water equations.

# Životopis

Rođena sam 16. veljače 1994. godine u Našicama gdje sam provela cijelo svoje djetinjstvo te pohađala osnovnu školu Dore Pejačević. 2008. godine upisujem prirodoslovno-matematičku gimnaziju u srednjoj školi Isidora Kršnjavog u Našicama, u jesen 2012. godine Preddiplomski sveučilišni studij Nastavničke matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu.

Tijekom ljeta 2015. godine pohađam jednomjesečnu praksu u Europskoj Centralnoj Banci u Frankfurtu na odjelu Micro prudential supervision II: Supervisory Oversight & NCA Relations. S kolegom s računarstva, 2016. godine sudjelujem na studentnskom natjecanju LC Code Challenge gdje osvajamo drugu nagradu.

Po završetku preddiplomskog studija 2017. godine se zapošljam kao student analitičar podataka u Zagrebačkoj pivovari. Iste godine upisujem Diplomski studij Primijenjene matematike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Tijekom diplomskog studija radim na različitim projektima: otkrivanju egzoplaneta iz Keplerovih podataka koristeći konvolucijske neuronske mreže, prepoznavanju glasovnih naredbi pomoću algoritama stojnog učenja, implementaciju diskontinuirane Galjorkinove metode za rješavanje eliptičkih jednadžbi i drugima. Trenutno radim na znanstvenom radu dokazivanja matematičke točnosti spektralne analize  $\phi$ ESTA korštene za poboljšanje metode detekcije egzoplaneta koristeći metodu radijalne brzine.