Ovisnost uređaja vektora rizika i portfelja

Geštakovski, Matija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Matija Geštakovski

OVISNOST UREĐAJA VEKTORA RIZIKA I PORTFELJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Hvoje Šikić

Zagreb, rujan, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojoj obitelji i prijateljima koji su bili uz mene na svakom koraku ovog dugog putovanja.

Veliko hvala mentoru na ukazanom povjerenju, suradnji, strpljenju i pomoći u izradi ovog rada i kolegama Domagoju Lacmanoviću i Domagoju Galiću na pomoći u izradi ovog rada.

Sadržaj

Uvod

Upravljanje rizicima danas je jedan od glavnih aspekata u poslovanju financijskih i kreditnih institucija te raznih drugih institucija koje su izložene nekoj vrsti rizika. Svaka je institucija izložena riziku na neki način. Osiguravajuće kuće, banke, investicijska društva i sve ostale financijske i kreditne insitucije u svojem portfelju imaju razne vrste proizvoda kao što su životno osiguranje, automobilsko osiguranje, stambeni krediti, dionice, državne obveznice, trezorski zapisi i slično. Svi proizvodi izloženi su nekoj vrsti rizika, a institucije podložne gubitcima. Različite vrste rizika rijetko su nezavisne pa je postalo nužno razviti statističke modele za zavisne varijable i analizirati njihova svojstva te konstatirati rizičnost portfelja.
U ovom radu definirat ćemo ovisnost uređaja ili uređaje zavisnosti takve da vrijedi - ako je vektor rizika $X < Y$, slijedi da je vektor Y jače pozitivno zavisan od vektora X, odnosno Y je rizičniji od X. Uspoređivat ćemo vektore rizika u istoj Fréchetovoj klasi, odnosno s istim marginalnim distribucijama. Koncept pozitivne zavisnosti, uveden u radu E. L. Lehman (1966), [5], pridonio je korisnim rezultatima i u teorijskoj statistici, a široku primjenu ima u aktuarstvu. Rasprave o pozitivnoj zavisnosti mogu se pronaći i Müller i Scarsini (2000), [6], Kimeldorf i Sampson (1989), [4] i drugim. U radu E. L. Lehman (1966) koncept je opisan preko pozitivnog kvadrantnog uređaja, uređaj zavisnosti u $\mathbb{R}^2$.
Prvo poglavlje sadrži nekoliko rezultata koji su nužni za razumijevanje materije u razradi rada.
U drugom poglavlju definirat ćemo poopćenje pozitvnog kvadrantnog uređaja na $\mathbb{R}^n$, ortantni uređaj te odnos sa stohastičkim integralnim uređajem te uređaje generirane klasom funkcija. Δ-monotoni i supermodularni uređaj korisni su uređaji generirani klasom funkcija - ako je dva vektora rizika moguće definirati pomoću funkcije na temelju očekivanja, možemo usporediti pozitivnu zavisnost, a time i rizičnost.
Osim pozitivne zavisnosti, usporedbu rizičnosti vektora rizika ili portfelja moguće je opisati pomoću konveksnosti marginalnih distribucija.
U trećem poglavlju definirat ćemo konveksni uređaj i rastući konveksni uređaj ili stop-loss uređaj, koji ima široku primjenu u aktuarstvu. Jedan je od razloga to što konveksni uređaji nisu ograničeni na istu Fréchetovu klasu. Nadalje, konveksni uređaji opisuju rizik kao uređaj (pozitivne) zavisnosti, ali ga opisuju i u smislu varijabilnosti zbog uvjeta konveks-

nosti marginalnih distribucija. Definirat ćemo i usmjereni konveksni uređaj te promotriti rizičnost nekih modela u odnosu na isti.
Zadnje poglavlje sadrži nekoliko primjera kako bismo bolje opisali teorijsku pozadinu. Definicije i rezultati u diplomskom radu preuzeti su iz [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10] i [11] ako nije navedeno drugačije.

Poglavlje 1

Preliminarije

U ovom poglavlju definirat ćemo nekoliko osnovnih pojmova koje ćemo koristiti u idućim poglavljima. Definicije i rezultati uzeti su iz [10].

1.1 Kopule

Pojam kopula je definiran s idejom kako bi se opisala zavisnost. Funkcija distribucije F n-dimenzionalnog slučajnog vektora X može se razdvojiti na marginalne funkcije distribucije F_i i na kopulu. S $\mathcal{F}(F_1, ..., F_n)$ označavamo familiju n-dimenzionalnih funkcija distribucija s marginalnim funkcijama distribucija $F_1, ..., F_n$. Definicija kopule je iz [10].

Definicija 1.1.1. *Neka je $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ slučajan vektor s funkcijom distribucije F i s marginalnim funkcijama distribucije F_i, $X_i \sim F_i$, $1 \leq i \leq n$. Funkciju distribucije C s uniformnim marginalnim funkcijama distribucije na* $[0, 1]$ *zovemo* kopulom *od X ako vrijedi:*

$$F = C(F_1, ..., F_n).$$

Prema definiciji skup kopula može se definirati kao Fréchetova klasa $\mathcal{F}(\mathcal{U}, ..., \mathcal{U})$ svih funkcija distribucije C, za koje vrijedi da su marginalne funkcije distribucije uniformne, $\mathcal{U}(t) = t,\ t \in [0, 1]$.
Uvodimo centralni teorem u teoriji kopula.

Teorem 1.1.2 (Sklarov teorem). *Neka je $F \in \mathcal{F}(F_1, ..., F_n)$ n-dimenzionalna funkcija distribucije s marginalnim funkcijama $F_1, ..., F_n$. Tada postoji kopula $C \in \mathcal{F}(\mathcal{U}, ..., \mathcal{U})$ s uniformnim marginalnim distribucijama, za koju vrijedi*

$$F(x_1, ..., x_n) = C(F_1(x_1), ..., F_n(x_n)).$$

Navodimo još jedan rezultat iz [1].

Propozicija 1.1.3. *Neka su X i Y 2-dimenzionalni slučajni vektori s funkcijama distribucija F_1 i F_2 s respektivnim kopulama C_1 i C_2. Tada vrijedi $X \leq_c Y \Leftrightarrow C_1(u_1.u_2) \leq C_2(u_1.u_2), \forall u \in [0,1]^2$, gdje je $\leq_c$ podudarni uređaj iz definicije 2.1.6.*

1.2 Generalizirana Fréchetova klasa

Neka je $X = (X_1, ..., X_n)$ vektor rizika s marginalnim distribucijama P_i, $1 \leq i \leq n$. Počinjemo s definicijom.

Definicija 1.2.1 (Poljski prostor). *Za topološki prostor $(E, \mathfrak{A})$ kažemo da je* poljski prostor *ako je separabilan, potpun i metrizabilan.*

Definicija 1.2.2. *Neka su P_i vjerojatnosne mjere na poljskim prostorima $(E_j, \mathfrak{A}_j), 1 \leq j \leq n$, obično $E_i = \mathbb{R}$ ili $E_i = \mathbb{R}^n$. Tada je Fréchetova klasa $\mathcal{M}(P_1, ..., P_n)$ definirana s*

$$\mathcal{M}(P_1, ..., P_n) = \{P \in \mathcal{M}^1(E, \mathfrak{A}) \mid P^{\pi_i} = P_i, 1 \leq i \leq n\},$$

gdje je $(E, \mathfrak{A}) = \bigotimes_{i=1}^n (E_i, \mathfrak{A}_i)$ i π_i projekcija produktnog prostora E na i-tu komponentu, a $\mathcal{M}^1(E, \mathfrak{A})$ je definiran kao skup svih vjerojatnosti, definiranih kao u [11], na skupu $(E, \mathfrak{A})$.

Definirat ćemo i generaliziranu Fréchetovu klasu na prostoru vektora s multivarijatnim marginalnim distribucijama.
Neka su $(E_j, \mathfrak{A}_j), 1 \leq j \leq n$, n prostora mjere i neka je $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(\{1, .., n\})$ sustav podskupova $J \subset \{1, ..., n\}$ takav da $\cup_{J \in \mathcal{E}} J = \{1, ..., n\}$. Neka je $P_j \in \mathcal{M}^1(E_J, \mathfrak{A}_J)$, $J \in \mathcal{E}$ konzistentan (u smislu Kolmogorova, iz [11]) sustav vjerojatnosnih distribucija na $(E_J, \mathfrak{A}_J) = \bigotimes_{j \in J} (E_J, \mathfrak{A}_J)$. Pretpostavka je da znamo zajedničke distribucije komponenata u J za sve $J \in \mathcal{E}$.

Definicija 1.2.3 (Generalizirana Fréchetova klasa). *Neka je dan konzistentan sustav $(P_J)_{J \in \mathcal{E}}$ vjerojatnosnih mjera. Definiramo generaliziranu Fréchetovu klasu $\mathcal{M}_{\mathcal{E}}$ kao*

$$\mathcal{M}_{\mathcal{E}} = \mathcal{M}(P_J, J \in \mathcal{E}) = \{P \in \mathcal{M}^1(E, \mathfrak{A}); P^{\pi_J} = P_J, J \in \mathcal{E}\},$$

gdje su $(E, \mathfrak{A}) = \bigotimes_{i=1}^n (E_i, \mathfrak{A}_i)$ i π_J projekcije na komponente od J.

Koristeći generalizirane Fréchetove klase kao model klasu za vektor rizika X znači da distribucija $X_J = (X_j)_{j \in J}$ je P_J za sve skupove $J \in \mathcal{E}$. U posebnom slučaju gdje je $\mathcal{E} = \{\{1\}, ..., \{n\}\}$, gdje se $\mathcal{E}$ sastoji od jednočlanih skupova, dobivamo uobičajenu Fréchetovu klasu $\mathcal{M}(P_1, ..., P_n)$.

1.3 Fréchetove ograde i komonotonost

Definicija 1.3.1 (Generalizirane Fréchetove ograde). *Za izmjerive funkcije $f : E \to \mathbb{R}$ generalizirane Fréchetove ograde definirane su kao*

$$M(f) = \sup\{\int f dP \mid P \in \mathcal{M}(P_1, ..., P_n)\},$$
$$m(f) = \inf\{\int f dP \mid P \in \mathcal{M}(P_1, ..., P_n)\},$$

ako gornji integrali postoje.

Ako gornja i donja Fréchetova ograda postoje, tada interval $[m(f), M(f)]$ obuhvaća moguće utjecaje zavisnosti na očekivanje $\mathbb{E}[f(X)]$.
Dat ćemo i sljedeću karakterizaciju generaliziranih Fréchetovih ograda.

Definicija 1.3.2 (Klasične Heoffding-Fréchetove ograde). *Neka je $F \in \mathcal{F}(F_1, ..., F_n)$. Tada vrijedi*

1.
$$F_-(x) := (\sum_{i=1}^{n} F_i(x_i) - (n-1))_+ \leq F(x) \leq F_+(x) := \min_{1 \leq i \leq n} F_i(x_i),$$
gdje su F_-, F_+ donja, odnosno gornja Fréchetova ograda.

2. *F_+ je n-dimenzionalna funkcija distribucije s marginalnim funkcijama distribucije $F_1, ..., F_n$, odnsono $F_+ \in \mathcal{F}(F_1, ..., F_n)$. Za $n = 2$ vrijedi $F_- \in \mathcal{F}(F_1, F_2)$.*

3. *Neka je F funkcija distribucije na $\mathbb{R}^n$, tada vrijedi*
$$F \in \mathcal{F}(F_1, ..., F_n) \Leftrightarrow F_- \leq F \leq F_+.$$

Fréchetove ograde mogu se definirati i kao funkcije distribucije slučajnih vektora za koje bi mjera rizika, odnosno gubitak portfelja, bila najmanja za donju ogradu, odnosno najveća za gornju ogradu.
Definirat ćemo komonotone vektore.

Definicija 1.3.3 (Komonotonost i kontrakomonotonost). *Neka su $F_1, ..., F_n$ jednodimenzionalne funkcije distribucije i neka je $U \backsim U(0,1)$ slučajna varijabla s uniformnom distribucijom na intervalu [0,1].*

1. *Slučajni vektor*
$$X^c = (F_1^{-1}(U), ..., F_n^{-1}(U)),$$
gdje je $F_i^{-1} := \inf\{y : F_i(y \geq x)\}$ generalizirani inverz od F_i, naziva se komonoton vektor.

2. *Za* $n = 2$
$$X_c = (F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(1-U))$$
zove se kontrakomonoton vektor.

U kontekstu financijske i aktuarske matematike slučajni vektor se također često naziva i vektorom rizika. Bez dokaza tvrdnji dat ćemo dva svojstva komonotonih vektora koja su nam bitna za daljnju diskusiju u radu.

Teorem 1.3.4 (Fréchetove ograde i komonotonost). *Neka je* $X = (X_1, ..., X_n)$ *vektor rizika na* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *(kao u definiciji 1.2.2) s funkcijom distribucije* $F \in \mathcal{F}(F_1, ..., F_n)$*.*

a) *Sljedeće tvrdnje su ekvivalente:*
   1. $F = F_+$*, F je gornja Fréchetova ograda.*
   2. *F je funkcija distribucije komonotonog vektora* X^c*.*

b) *Za* $n = 2$ *sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*
   1. $F = F_-$*, F je donja Fréchetova ograda.*
   2. *F je funkcija distribucije kontrakomonotonog vektora* X_c*.*

Teorem 1.3.5 (Komonoton vektor i konveksni uređaj). *Neka je* $X = (X_1, ..., X_n)$ *slučajni vektor s marginalnim funkcijama distribucije* F_i*,* $1 \leq i \leq n$*. Neka je* X^c *odgovarajući komonoton vektor takav da vrijedi* $X_i^c \backsim F_i$*. Tada vrijedi*
$$\sum_{i=1}^{n} X_i \leq_{cx} \sum_{i=1}^{n} X_i^c.$$
Portfelj generiran komonotonim vektorom je najrizičniji portfelj u smislu konveksnog uređaja, $\leq_{cx}$*.*

Konveksni uređaj je definiran definicijom 3.1.1.

Poglavlje 2

Pozitivna ortantna zavisnost i supermodularni uređaj

2.1 Ortantni uređaj

Postoje razne ovisnosti uređaja ili uređaji zavisnosti $\prec$ za vektore rizika X i Y. U ovom poglavlju definirat ćemo neke od uređaja te relacije integralnog stohastičkog uređaja, u daljnjem tekstu stohastički uređaj, na realnim slučajnim vektorima, odnosno vektorima rizika, pomoću kojih ćemo opisati svojstvo pozitivne zavisnosti. Za slučajne vektore X i Y moći ćemo reći da su komponente vektora X više pozitivno zavisne od komponenti vektora Y. Nadalje, vrijedi $X \prec Y$, odnosno slučajni vektor Y je više pozitivno zavisan nego X te možemo zaključiti da je i rizičniji. Bazirat ćemo se na slučajnim vektorima koji imaju identične marginalne distribucije, odnosno pripadaju istoj Fréchetovoj klasi. Definiramo 9 svojstava koje uređaj zavisnosti treba zadovoljavati kako bi vrijedilo da $X \prec Y$ označava da je slučajni vektor Y više pozitivno zavisan od slučajnog vektora X, definicija je iz [1].

Definicija 2.1.1. *Neka je $\leq$ uređaj na prostoru realnih slučajnih vektora dimenzije n, $n \geq 2$, iz iste Fréchetove klase te neka su $F_i, 1 \leq i \leq n$ respektivne marginalne funkcije distribucije. Relacija $\leq$ je uređaj zavisnosti ako vrijedi sljedeće:*

1. *(dvovarijabilna podudarnost (bivariate concordance))*
   Ako X≤Y onda

$$P(X_i \leq x_i, X_j \leq x_j) \leq P(Y_i \leq y_i, Y_j \leq y_j), \text{ za sve } x_i, x_j \in \mathbb{R} \text{ i } 1 \leq i \leq j \leq n,$$

2. *(tranzitivnost)*

$$X \leq Y \ \text{ i } Y \leq Z \Rightarrow X \leq Z,$$

3. *(refleksivnost)*

$$X \leq X,$$

4. *(antisimetričnost)*

$$X \leq Y, Y \leq X \Rightarrow X =_d Y,$$

5. *(gornja Fréchetova ograda)*

$$X \leq (F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(U), ..., F_n^{-1}(U)), \text{ gdje je } U \backsim U[0,1],$$

6. *(slaba konvergencija)*

$$\text{Ako } X_n \leq Y_n, \ \forall\, n, \text{ i } X_n \rightarrow_d X, Y_n \rightarrow Y \Rightarrow X \leq Y,$$

7. *(invarijantnost na poredak indeksa)*
   Ako X≤Y onda

$$(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, ..., X_{\pi(n)}) \leq (Y_{\pi(1)}, Y_{\pi(2)}, ..., Y_{\pi(n)}), \text{ za sve permutacije } \pi \text{ skupa } \{1,2,...,n\},$$

8. *(invarijantnost na rastuće transformacije)*
   Ako X≤Y onda

$$(t(X_1), X_2, ..., X_n) \leq (t(Y_1), Y_2, ..., Y_n), \text{ za sve strogo rastuće funkcije } t,$$

9. *(zatvarač pod marginalizacijom)*
   Ako X≤Y onda

$$(X_{i_1}, X_{i_2}, ..., X_{i_k}) \leq (Y_{i_1}, Y_{i_2}, ..., Y_{i_k}), \text{ za sve } 1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n, \ 2 \leq k < n.$$

Uređaji koje ćemo definirati zadovoljavaju svojstva (1)-(9) iz definicije 2.1.1 te neće biti dokazivana za svaki uređaj posebno.
Prvi uređaj koji uvodimo je kvadrantni uređaj na 2-dimenzionalnim slučajnim vektorima X, Y. Krenimo od definicije kvadrantne zavisnosti definirane u [5].

Definicija 2.1.2 (Kvadrantna zavisnost). *Neka je (X, Y) slučajni vektor te F njegova funkcija distribucije. Za vektor (X,Y) ili za funkciju distribucije F kažemo da je pozitivno kvadrantno zavisna ako vrijedi*

$$P(X \leq x, Y \leq y) \geq P(X \leq x)P(Y \leq y), \quad \forall x, y.$$

Analogno se definira negativno kvadrantna zavisnost.

Dat ćemo i definiciju stohastičkog uređaja.

Definicija 2.1.3 (Stohastički uređaj). *Neka su X i Y n-dimenzionalni slučajni vektori. Stohastički uređaj (integralni stohastički uređaj)* $\leq_{st}$ *je definiran s*

$$\mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(Y)], \forall f \;\Rightarrow X \leq_{st} Y,$$

gdje je f rastuća funkcija takva da očekivanje postoji.

Očekivanje iz definicije 2.1.3 se u kontekstu uređaja može interpretirati kao mjera rizika u smislu - što je očekivanje veće, to je rizičnost slučajnog vektora veća.
Na temelju ovih dviju definicija slijedi karakterizacija pozitivne kvadrantne zavisnosti (PQD). Za slučajni vektor X s funkcijom distribucije F, funkciju doživljenja od X, u oznaci $\overline{F}$, definiramo s $\overline{F} := 1 - F$.

Napomena 2.1.4. *Neka je $X = (X_1, X_2)$ slučajni vektor. X je pozitivno kvadrantno zavisan ako i samo ako vrijedi*

$$X_1 \leq_{st} X_1 \cdot \mathbb{1}_{\{X_2 > x_2\}}, \;\forall x_2 \text{ takvi da } \overline{F}_2(x_2) > 0,$$

i

$$X_2 \leq_{st} X_2 \cdot \mathbb{1}_{\{X_1 > x_1\}}, \;\forall x_1 \text{ takvi da } \overline{F}_1(x_1) > 0.$$

Kako je koncept PQD definiran preko integralnog stohastičkog uređaja, vrijedi da, ako slučajna varijabla poprima vrijednosti veće od neke definirane ograde, druga komponenta raste, što je u skladu s intuitivnim shvaćanjem pozitivne zavisnosti.

Uzevši u obzir definicije uređaja zavisnosti 2.1.1 i pozitivne kvadrantne zavisnosti 2.1.2, možemo proširiti definicije na n-dimenzionalne slučajne vektore. Definicije su dane u [10]. Proširenje kvadrantnog uređaja na općeniti slučaj naziva se ortantni uređaj.

Definicija 2.1.5. *Za slučajni vektor $X = (X_1, ..., X_n)$ definiramo slučajni vektor $X^{\perp}$ kao vektor iz iste Fréchetove klase, tako da vrijedi $X_i^{\perp} \backsim X_i$, $1 \leq i \leq n$ te $X_i^{\perp}$ i $X_j^{\perp}$ nezavisni za $i \neq j$.*

Definicija 2.1.6 (Ortantni uređaj). *Neka su X i Y n-dimenzionalni slučajni vektori. Definiramo:*

1. *$X \leq_{uo} Y$ - gornje ortantni uređaj (upper ortant order) - ako vrijedi $\overline{F}_X(x) \leq \overline{F}_Y(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$,*

2. *$X \leq_{lo} Y$ - donje ortantni uređaj (lower ortant order) - ako vrijedi $F_X(x) \leq F_Y(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$,*

3. *$X \leq_c Y$ - podudarni uređaj (concordance order) - ako vrijedi $X \leq_{uo} Y$ i $X \leq_{lo} Y$,*

4. *X se naziva pozitivno gornje ortantno zavisan (positive upper orthant dependent (PUOD)) ako vrijedi $X^{\perp} \leq_{uo} X$.*

Analogno definiramo i PLOD ako vrijedi $X^{\perp} \leq_{lo} X$, odnosno POD ako vrijedi $X^{\perp} \leq_c X$.

Za distribucije P, Q te respektivne funkcije distribucije F, G od X, odnosno Y koristimo istu notaciju kao i u gornjim definicijama. Kažemo da je funkcija distribucije F pozitivno ortantno zavisna ako su svi slučajni vektori s funkcijom distribucije F pozitivno ortantno zavisni.
Bitno je primijetiti da za 2-dimenzionalne slučajne vektore uz pretpostavku istih marginalnih distribucija vrijedi sljedeće:

$$X \leq_{lo} Y \Leftrightarrow X \leq_{uo} Y \Leftrightarrow X \leq_c Y.$$

Ako usporedimo stohastički uređaj i ortantne uređaje, ortantni su "slabiji". U sljedećoj propoziciji pokazat ćemo da su ortantni uređaji kombinacija uređaja zavisnosti i stohastičkog uređaja na marginalnim distribucijama.

Propozicija 2.1.7. *Ako $F \in \mathcal{F}(F_1, .., F_n)$ i $G = \mathcal{F}(F_1, .., F_n)$ te $F \leq_{lo} G$ onda $F_i \leq_{st} G_i, 1 \leq i \leq n$ i za $X \backsim F$, $Y \backsim G$ vrijedi*

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) \leq \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j).$$

Dokaz. U dokazu nejednakosti koristit ćemo Hoeffdingovu reprezentaciju kovarijance

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_i, X_j) &= (\text{Hoeffdingova reprezentacija kovarijance}) = \\
&= \iint (F_{X_i,X_j}(x,y) - F_i(x)F_j(y))dxdy \\
&= \iint F_{X_i,X_j}(x,y)dxdy - \iint (F_i(x)F_j(y))dxdy \\
&= \iint F_{X_i,X_j}(x,y)dxdy - \int F_i(x)dx \int F_j(y)dy \\
&= \iint F_{X_i,X_j}(x,y)dxdy - \int F_i(x)dx \int F_j(y)dy = (F_i \text{ i } F_j \text{ su funkcije distribucije}) \\
&= \iint F_{X_i,X_j}(x,y)dxdy - 1 = (\text{iz definicije } \leq_{lo} \text{ i monotonosti integrala}) \\
&\leq \iint G_{Y_i,Y_j}(x,y)dxdy - 1 = \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)
\end{aligned}$$

Iz definicije donje ortantnog uređaja $\leq_{lo}$:
Iz $F(x) \leq G(x)$ za svaki x, kao posljedica vrijedi $F_i(x_i) \leq G_i(x_i)$ za svaki x_i. iz monotonosti očekivanja, definirano u [11], slijedi $F_i \leq_{st} G_i$. □

Ortantni uređaji su generirani karakterističnim funkcijama ili funkcijama oblika $\prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)$, gdje su f_i nenegativne rastuće za $\leq_{uo}$, odnsono f_i nenegativne padajuće za $\leq_{lo}$.

Na temelju definicije pozitivnog podudarnog ortantnog uređaja (POD) slijede tzv. Šidákove nejednakosti, definirane u [10].

$$P(X \leq x) \geq P(X^{\perp} \leq x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x_i) \tag{2.1}$$

i

$$P(X > x) \geq P(X^{\perp} > x) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i > x_i). \tag{2.2}$$

Nejednakosti u (2.1) i (2.2) slijede iz definicija gornjeg i donjeg ortantnog uređaja. Jednakosti slijede direktno iz definicije nezavisnosti slučajnih varijabli. Nadalje, direktno iz (2.1) i (2.2) slijedi da stohastičke nejednakosti vrijede:

$$\min X_i^{\perp} \leq_{st} \min X_i \; i \; \max X_i \leq_{st} \max X_i^{\perp}.$$

Intuitivno, za X podudarni pozitivno zavisan vektor veća je vjerojatnost da će komponente simultano postizati veće, odnosno manje vrijednosti u odnosu na slučajni vektor s nezavisnim komponentama.

2.2 Δ-monotoni uređaj i supermodularni uređaj

Kao jači uređaj u odnosu na ortantni uređaj, uvest ćemo supermodularni uređaj. Supermodularni uređaj bitan je u primijenjenoj vjerojatnosti i samo neke od referenci su Joe (1990), [2], Müller i Scarsini (2000), [6] i drugi, dok je primjena u teoriji aktuarstva referencirana u [1]. Prije definicije supermodularnog uređaja potrebno je uvesti Δ-monotoni uređaj koji je uveden u Rüschendorf (1980), [7] te nekoliko rezultata pomoću kojih će biti moguće povezati ortantni i supermodularni uređaj.
Definiramo Δ-monotone funkcije, kao u [10].

Definicija 2.2.1 (Δ-monotone funkcije). *Za funkcije $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definiramo diferencijski operator Δ_i^{ε}, $\varepsilon > 0$, $1 \leq i \leq n$, kao $\Delta_i^{\varepsilon} f(x) = f(x + \varepsilon e_i) - f(x)$, gdje je e_i i-ti jedinični vektor. Funkcija $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ zove se Δ-monotona ako za svaki podskup $J = \{i_1, ..., i_k\} \subset \{1, ..., n\}$ i za sve $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_k > 0$ vrijedi*

$$\Delta_{i_1}^{\varepsilon_1} ... \Delta_{i_k}^{\varepsilon_k} f(x) \geq 0, \; za \; sve \; x \in \mathbb{R}^n.$$

Klasu Δ-monotonih funkcija na $\mathbb{R}^n$ označavamo s $\mathcal{F}_\Delta$. Sada možemo definirati Δ-monotoni uređaj kao integralni uređaj generiran klasom Δ-monotonih funkcija $\mathcal{F}_\Delta$.

Definicija 2.2.2. *Neka su X i Y n-dimenzionalni slučajni vektori takvi da*

$$\mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(Y)]$$

za sve Δ-monotone funkcije f, gdje gornje očekivanje postoji. Tada kažemo da je X manji od Y u smislu Δ-monotonog uređaja, u oznaci $X \leq_\Delta Y$.

U idućoj napomeni navest ćemo još neke karakteristike Δ-monotonih funkcija.

Napomena 2.2.3. *Primijetimo, desno neprekidne Δ-monotone funkcije mogu se zapisati kao pozitivna linearna kombinacija karakterističnih funkcija $\mathbb{1}_{[x,\infty)}$. Također vrijedi i sljedeća tvrdnja: Diferencijabilne funkcije su Δ-monotone ako i samo ako vrijedi*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_k}} \geq 0, \ \forall k \leq n \ i \ i_1 < ... < i_k.$$

Dokaz. $\Rightarrow$
Za $\forall \varepsilon_1, ..., \varepsilon_k > 0$ vrijedi

$$\Delta_{i_1}^{\varepsilon_1} ... \Delta_{i_k}^{\varepsilon_k} f(x) \geq 0, \ za \ sve \ x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_k}} \geq 0, \ \forall k \leq n \ i \ i_1 < ... < i_k$$

Pokazujemo indukcijom po broju varijabli.

(B)

Za diferencijabilnu funkciju f, za $\forall \varepsilon_1 > 0$ vrijedi $\Delta_1^{\varepsilon_1} f(x) \geq 0, \ za \ sve \ x \in \mathbb{R}^n$ pa slijedi

$$\begin{aligned} \Delta_{i_1}^{\varepsilon_1} f(x) = & f(x + \varepsilon_1 e_{i_1}) - f(x) \geq 0 / : \varepsilon_1 \\ & \frac{f(x + \varepsilon_1 e_{i_1}) - f(x)}{\varepsilon_1} \geq 0 \\ & \frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \geq 0 \end{aligned}$$

(P)

Pretpostavimo da za $\forall \varepsilon_1, ..., \varepsilon_k > 0$ vrijedi

$$\begin{aligned} & \Delta_{i_1}^{\varepsilon_1} ... \Delta_{i_k}^{\varepsilon_k} f(x) \geq 0, \ za \ sve \ x \in \mathbb{R}^n \\ \Rightarrow & \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_k}} \geq 0, \ \forall k \leq n \ i \ i_1 < ... < i_k \end{aligned}$$

S $\tilde{f}(x)$ označit ćemo $\Delta_{i_1}^{\varepsilon_1} ... \Delta_{i_k}^{\varepsilon_k} f(x)$.

(K)

Vrijedi $\Delta_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}}\Delta_{i_1}^{\varepsilon_1}...\Delta_{i_k}^{\varepsilon_k}f(x) \geq 0,\ za\ sve\ x \in \mathbb{R}^n.$

$$
\begin{aligned}
&\Delta_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}}\tilde{f}(x) \geq 0\\
&\tilde{f}(x+\varepsilon_{k+1}e_{k+1}) - \tilde{f}(x) \geq 0 / : \varepsilon_{k+1}\\
&\frac{\tilde{f}(x+\varepsilon_{k+1}e_{k+1}) - \tilde{f}(x)}{\varepsilon_{k+1}} \geq 0\\
&\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_{k+1}} \geq 0\\
&\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_k}\partial x_{i_{k+1}}} \geq 0
\end{aligned}
$$

Pokazali smo da vrijedi $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_k}} \geq 0,\ \forall k \leq n\ te\ i_1 < ... < i_k.$

$\Leftarrow$

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_k}} \geq 0, \forall k \leq n\ te\ i_1 < ... < i_k \Rightarrow \Delta_{i_1}^{\varepsilon_1}...\Delta_{i_k}^{\varepsilon_k}f(x) \geq 0, za\ sve\ x \in \mathbb{R}^n,\ za\ \forall \varepsilon_1, ..., \varepsilon_k > 0\ .$$

Dokaz provodimo indukcijom po broju varijabli.

(B)

Neka za funkciju f vrijedi $\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}} \geq 0$. Funkcija f je diferencijabilna te ostaje pokazati $\Delta_{i_1}^{\varepsilon_1}f(x) \geq 0$, za $\forall \varepsilon_1 > 0,\ za\ sve\ x \in \mathbb{R}^n$. Pretpostavimo suprotno, odnosno $\exists \varepsilon_1 > 0$ takav da $\Delta_{i_1}^{\varepsilon_1}f(x) < 0$ pa slijedi

$$
\begin{aligned}
&\Delta_{i_1}^{\varepsilon_1}f(x) < 0\\
&f(x+\varepsilon_1 e_{i_1}) - f(x) < 0\\
&f(x+\varepsilon_1 e_{i_1}) < f(x),
\end{aligned}
$$

što je kontradikcija s pretpostavkom rasta funkcije f po varijabli x_{i_1}.

(P)

Pretpostavimo da vrijedi

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}...\partial x_{i_k}} \geq 0,\ \forall k \leq n\ te\ i_1 < ... < i_k\\
&\Rightarrow \Delta_{i_1}^{\varepsilon_1}...\Delta_{i_k}^{\varepsilon_k}f(x) \geq 0,\ za\ sve\ x \in \mathbb{R}^n,\ \forall \varepsilon_1, ..., \varepsilon_k > 0
\end{aligned}
$$

S $\tilde{f}(x)$ označit ćemo $\Delta_{i_1}^{\varepsilon_1}...\Delta_{i_k}^{\varepsilon_k}f(x)$.

(K)

Vrijedi $\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_k} \partial x_{i_{k+1}}} \geq 0$. Pretpostavimo da postoje $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_k > 0$ takvi da $\Delta_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} \Delta_{i_1}^{\varepsilon_1} ... \Delta_{i_k}^{\varepsilon_k} f(x) < 0$.

$$\begin{aligned}
&\Delta_{i_{k+1}}^{\varepsilon_{k+1}} \tilde{f}(x) < 0 \\
&\tilde{f}(x + \varepsilon_{k+1} e_{k+1}) - \tilde{f}(x) < 0 \\
&\tilde{f}(x + \varepsilon_{k+1} e_{k+1}) < \tilde{f}(x),
\end{aligned}$$

što je kontadikcija s rastom funkcije f po varijabli x_{k+1}.

□

Navest ćemo i rezultat bez dokaza, prvi put pokazan u Rüschendorf (1980), [7], a uzet iz [10], koji nam daje relaciju između gornje ortantnog i Δ-monotonog uređaja.

Teorem 2.2.4. *Neka su X i Y n-dimenzionalni slučajni vektori, tada vrijedi:*

$$X \leq_{uo} Y \Leftrightarrow X \leq_{\Delta} Y.$$

Ovime smo pokazali da se gornje ortantni uređaj može, osim kao u definiciji 2.1.6, definirati i kao uređaj generiran klasom Δ-monotonih funkcija, $\mathcal{F}_{\Delta}$.
Analogno se i donje ortantni uređaj $\leq_{lo}$ može definirati kao uređaj generiran klasom funkcija.

$$\mathcal{F}_{\Delta}^{-} = \{h : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}; \exists f \in \mathcal{F}_{\Delta} \text{ takva da } h(x) = f(-x)\}.$$

Sve h $\in \mathcal{F}_{\Delta}^{-}$ su padajuće i zadovoljavaju

$$(-1)^k \Delta_{i_1}^{\varepsilon_1} ... \Delta_{i_k}^{\varepsilon_k} h(x) \geq 0, \text{ za sve } x \in \mathbb{R}^n.$$

te

$$(-1)^k \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} ... \partial x_{i_k}} \geq 0, \ \forall k \leq n \text{ i } i_1 < ... < i_k.$$

Posljedično, podudarni uređaj $\leq_c$ se također može generirati klasom funkcija $\mathcal{F}_{\Delta}^{-} \bigcup \mathcal{F}_{\Delta}$.

Sada možemo uvesti supermodularni uređaj. Supermodularni uređaj primjenjuje se u primijenjenoj vjerojatnosti na slučajnim vektorima u istoj Fréchetovoj klasi, odnosno moguće je uspoređivati vektore s istim marginalima. Na sličan način definirat ćemo ga pomoću klase supermodularnih funkcija. Definiramo supermodularne funkcije, kao u [10].

Definicija 2.2.5 (Supermodularne funkcije). *Za funkciju $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ kažemo da je supermodularna ako za svake $1 \leq i \leq j \leq n$ i $\varepsilon, \delta > 0$ vrijedi da*

$$\Delta_i^{\varepsilon} \Delta_j^{\delta} f(x) \geq 0, \text{ za sve } x \in \mathbb{R}^n.$$

Neka $\mathcal{F}_{sm}$ označava klasu supermodularnih funkcija i neka $\leq_{sm}$ označava pripadni integralni uređaj, supermodularni uređaj.

Očito je da iz definicije supermodularnih funkcija vrijedi $\mathcal{F}_{\Delta} \subset \mathcal{F}_{sm}$ pa možemo reći da je supermodularni uređaj "jači" od Δ-monotonog uređaja te uzevši u obzir rezultat teorema 2.2.4 zaključujemo da je "jači" i od ortantnih uređaja.
Definiramo supermodularni uređaj kao integralni generiran klasom supermodularnih funkcija, iz [1]

Definicija 2.2.6. *Neka su X i Y n-dimenzionalni slučajni vektori takvi da*

$$\mathbb{E}[g(X)] \leq \mathbb{E}[g(Y)],$$

za sve supermodularne funkcije $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ ako očekivanja postoje. Tada kažemo da je X manji od Y u smislu supermodularnog uređaja, $X \preceq_{sm} Y$.

Za slučajni vektor X kažemo da je pozitivno supermodularno zavisan ako vrijedi $X^{\perp} \leq_{sm} X$, gdje $X^{\perp}$ ima nezavisne komponente te iste marginalne funkcije distribucija, kao i slučajni vektor X, $X_i^{\perp} \backsim X_i$.
U idućoj napomeni, analogno napomeni 2.2.3, uvodimo alternativnu karakterizaciju kako bismo lakše opisali uređaj u smislu $\leq_{sm}$.

Napomena 2.2.7. *Diferencijabilne funkcije f su supermodularne ako i samo ako*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \geq 0, \ \forall i < j, \ \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.3}$$

Alternativna definicija supermodularnog uređaja je:
neka su X i Y n-dimenzionalni slučajni vektori, vrijedi $X \leq_{sm} Y$ ako i samo ako

$$\mathbb{E}[g(X)] \leq \mathbb{E}[g(Y)],$$

vrijedi za sve supermodularne funkcije $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ koje zadovoljavaju nejednakost (2.3).
Dokaz je analogan dokazu u napomeni 2.2.3.

Bitan rezultat dan u idućem teoremu, [10], implicira da je za slučajni vektor X pripadni komonoton vektor veći u smislu supermodularnog uređaja. Tvrdnja je izvan koncepta rada te neće biti dokazana. Tvrdnja je dokazana u [8].

Teorem 2.2.8 (Supermodularni uređaj i komonotonost). *Neka je X n-dimenzionalni slučajni vektor s marginalnim funkcijama distribucije $F_1, ..., F_n$, tada*

$$X \leq_{sm} X^c = (F_1^{-1}(U), ..., F_n^{-1}(U)), \tag{2.4}$$

gdje je $U \sim U(0, 1)$.

Možemo primijetiti da je za $n = 2$ (X i Y dvodimenzionalni vektori) supermodularni uređaj $\leq_{sm}$ restringiran na Fréchetovu klasu $\mathcal{F}(F_1, F_2)$ ekvivalentan ortantnim uređajima $\leq_{lo}, \leq_{uo}$. Tvrdnju ćemo pokazati sljedećim teoremom.

Teorem 2.2.9. *Neka $X = (X_1, X_2)$, $Y = (Y_1, Y_2)$ imaju iste marginalne funkcije distribucije F_1, F_2. Tada vrijedi*

$$X \leq_c Y \Leftrightarrow X \leq_{sm} Y. \tag{2.5}$$

Dokaz.
$\Leftarrow$
Implikacija slijedi direktno iz svojstva funkcije distribucije. Funkcija distribucije je očekivanje supermodularnih funkcija.
$\Rightarrow$
U dokazu ćemo koristiti raspis očekivanja pomoću Taylorovog reda iz [1].

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(X)] = g(0,0) &+ \int_0^\infty P(X_2 \geq t_2)\frac{\partial g(0,t_2)}{\partial x_2}dt_2 \\ &+ \int_0^\infty P(X_1 \geq t_1)\frac{\partial g(t_1,0)}{\partial x_1}dt_1 \\ &+ \int_0^\infty \int_0^\infty P(X_1 \geq t_1, X_2 \geq t_2)\frac{\partial^2 g(t_1,t_2)}{\partial x_1, \partial x_2}dt_2 dt_1.\end{aligned}$$

Vrijedi

$$\mathbb{E}[f(Y)] - \mathbb{E}[f(X)] = \int_0^\infty \int_0^\infty (\overline{F}_Y(t_1,t_2) - \overline{F}_X(t_1,t_2))\frac{\partial^2 g(t_1,t_2)}{\partial x_1, \partial x_2}dt_2 dt_1.$$

Zbog $X \leq_c Y$ vrijedi $\overline{F}_Y(t_1,t_2) - \overline{F}_X(t_1,t_2) \geq 0$, a kako je f supermodularna funkcija, vrijedi $\frac{\partial^2 g(t_1,t_2)}{\partial x_1, \partial x_2} \geq 0$. Pa imamo $\mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(Y)]$, odnosno $X \leq_{sm} Y$. □

Tvrdnja teorema 2.2.9 općenito ne vrijedi za n-dimenzionalne vektore X, Y, za $n \geq 3$. Sljedećom napomenom uvest ćemo kontraprimjer za 3-dimenzionalne vektore X, Y.

Napomena 2.2.10. *Neka su X i Y slučajni vektori zadani kao $X = (X_1, X_2, X_3)$ i $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$, X je uniformno distribuiran točkama* $(2,2,1), (2,1,2), (1,2,2), (1,1,1), (0,0,2)$ i $(2,0,0)$, *a Y uniformno distribuiran točkama* $(2,2,2), (2,1,1), (1,2,1), (1,1,2), (2,0,2)$ i $(0,0,0)$. *Za provjeru $X \leq_{uo} Y$ i $X \leq_{lo} Y$ dovoljno je uzeti sve rubne točke skupa $\{0,1,2\}^3$ i pokazati $F_X \geq F_Y$, odnsono $\overline{F}_X \geq \overline{F}_Y$ na svim rubnim točkama. S druge strane postoje supermodularne funkcije $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ takve da $\mathbb{E}[g(X)] > \mathbb{E}[g(Y)]$ kao na primjer $g(x) = (x_1 + x_2 + x_3 - 4)_+$ koja je supermodularna kao kompozicije rastuće realne konveksne i rastuće supermodularne funkcije te slijedi:*

$$\mathbb{E}[g(X)] = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = \mathbb{E}[g(Y)].$$

Sada se vidi da vrijedi $X \leq_{uo} Y$ i $X \leq_{lo} Y$, ali da ne vrijedi $X \leq_{sm} Y$.
Za dimenzije $n \geq 4$ dokaz je proveden u Joe (1990), [2].

Nadalje, pokazat ćemo za slučajne vektore $X = (X_1, X_2), Y = (Y_1, Y_2)$ s identičnim marginalnim distribucijama $X_i \sim Y_i$ da su ortantni uređaji te iz ekvivalencije uređaja i teorema 2.2.9 i supermodularni uređaj, konzistentni s koeficijentima korelacije.

Napomena 2.2.11.

1. *(Pearsonov ϱ_p) Neka su X, Y slučajni vektori s funkcijama distribucije F i G te identičnim marginalnim distribucijama $F_i = G_i$, $1 \leq i \leq n$, takve da vrijedi $F \leq_{lo} G$. Pearsonov koeficijent korelacije dan je s*

$$\varrho_p(X_i, X_j) = \frac{\mathrm{Cov}(X_i, X_j)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_i)\mathrm{Var}(X_j)}}.$$

   Kad je Pearsonov ϱ_p dobro definiran iz propozicije 2.1.7 vrijedi

$$\mathrm{Cov}(X_i, X_j) \leq \mathrm{Cov}(Y_i, Y_j),$$

   pa direktno slijedi

$$\varrho_p(X_i, X_j) \leq \varrho_p(Y_i, Y_j).$$

   Zaključujemo da vrijedi tvrdnja

$$X \leq_{lo} Y \Rightarrow \varrho_p(X_i, X_j) \leq \varrho_p(Y_i, Y_j),$$

   kad Pearsonov ϱ_p postoji.

2. *(Kendallov τ) Neka $X = (X_1, X_2)$ ima kopulu C_1, C_1 je funkcija distribucije vektora $U = (U_1, U_2)$. Tada je Kendallov τ definiran s*

$$\tau(X_1, X_2) = P((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) > 0) - P((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) < 0),$$

   gdje je $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2)$ nezavisan od X i $\tilde{X} \sim X$.
   Odnosno τ se definira kao razlika podudarnosti i nepodudarnosti vektora $\tilde{X}$ i X. Ako su marginalne funkcije distribucije F_1, F_2 neprekidne, Kendallov τ poprima sljedeću reprezentaciju

$$\begin{aligned}
\tau(X_1, X_2) &= 2P((X_1 - \tilde{X}_1)(X_2 - \tilde{X}_2) > 0) - 1 \\
&= 4P(X_1 \leq \tilde{X}_1, X_2 \leq \tilde{X}_2) - 1 \\
&= 4 \iint F(x, y) dF(x, y) - 1 \\
&= 4 \iint C_1(u, v) dC_1(u, v) - 1 \\
&= 4E[C_1(U_1, U_2)] - 1.
\end{aligned}$$

Neka $Y = (Y_1, Y_2)$ ima kopulu C_2. C_2 je funkcija distribucije vektora $V = (V_1, V_2)$. Neka vrijedi $X \preceq_c Y$. Vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned}\tau(X_1, X_2) &= 4E[C_1(U_1, U_2)] - 1 = (\text{iz svojstva kopule 1.1.3})\\ &\leq 4E[C_2(U_1, U_2)] - 1 = (\text{iz } U \preceq_c V)\\ &\leq 4E[C_2(V_1, V_2)] - 1 = \tau(Y_1, Y_2).\end{aligned}$$

Pokazali smo da ako vrijedi $X \preceq_c Y$, onda vrijedi $\tau(X_1, X_2) \leq \tau(Y_1, Y_2)$.

3. *(Spearmanov ϱ_s) Spearmanov koeficijent korelacije definiran je za par neprekidnih slučajnih varijabli X_1, X_2 kao Pearsonov ϱ_p za rang funkcije F_1 i F_2*

$$\varrho_s(X_1, X_2) = \varrho_p(F_1(X_1), F_2(X_2)).$$

Ekvivalentni zapis je

$$\varrho_s(X_1, X_2) = 3(P((X_1 - X_1^\perp)(X_2 - X_2^\perp) > 0) - P((X_1 - X_1^\perp)(X_2 - X_2^\perp) < 0)),$$

gdje je slučajni vektor $X^\perp = (X_1^\perp, X_2^\perp)$ definiran kao u definiciji 2.1.5. Sada slijedi

$$\begin{aligned}\varrho_s(X_1, X_2) &= 3(2P((X_1 - X_1^\perp)(X_2 - X_2^\perp) > 0) - 1)\\ &= 3(4P(X_1 \leq X_1^\perp, X_2 \leq X_2^\perp) - 1)\\ &= 12F_X(X_1^\perp, X_2^\perp) - 3\\ &= 12\int_0^1\int_0^1 C(u_1, u_2)du_1du_2 - 3\\ &= 12\int_0^1\int_0^1 u_1u_2dC(u_1, u_2) - 3\\ &= 12\mathbb{E}[U_1, U_2] - 3,\end{aligned}$$

gdje je $U = (U_1, U_2)$ vektor s uniformnim marginalnim distribucijama $U_1, U_2 \backsim U[0, 1]$ te s istom kopulom C_1 kao i vektor X, . Pokazali smo da Spearmanov ϱ_s ovisi samo o izboru kopule.
Neka su slučajni vektori $X = (X_1, X_2)$ i $Y = (Y_1, Y_2)$ s kopulama C_1, odnosno C_2 takvi da $X \preceq_c Y$. Tada direktno iz svojstva kopule 1.1.3, odnosno $C_1 \leq C_2$ slijedi

$$X \preceq_c Y \Rightarrow \varrho_s(X_1, X_2) \leq \varrho_s(Y_1, Y_2)$$

Prema svemu navedenom u ovoj napomeni za slučajne vektore $X = (X_1, X_2), Y = (Y_1, Y_2)$ s identičnim marginalnim distribucijama te uz prije utvrđene ekvivalencije među uređajima

$$X \preceq_{lo} Y \Leftrightarrow X \preceq_{uo} Y \Leftrightarrow X \preceq_c Y \Leftrightarrow X \preceq_{sm} Y$$

vrijedi sljedeće

$$X \preceq Y \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \varrho_p(X_1, X_2) \leq \varrho_p(Y_1, Y_2), \\ \varrho_s(X_1, X_2) \leq \varrho_s(Y_1, Y_2), \\ \tau(X_1, X_2) \leq \tau(Y_1, Y_2), \end{array}$$

gdje se $\preceq$ odnosi na uređaje $\leq_{uo}$, $\leq_{lo}$, $\leq_c$, $\leq_{sm}$.

Kako smo uveli supermodularni uređaj, navest ćemo svojstva zavisnosti i uređaja pomoću kojih je moguće uspoređivati vektore rizika te njihov odnos u supermodularnom smislu. Ideja je uspostaviti svojstva zavisnosti koja će nam omogućiti usporedbu široke klase mjera rizika generiranih supermodularnim funkcijama.

Definicija 2.2.12 (Pojmovi pozitivne zavisnosti). *Za slučajan vektor $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ kažemo da je:*

1. povezan, *ako je $\mathbb{E}[f(X)g(X)] \geq \mathbb{E}[f(X)]\mathbb{E}[g(X)]$ za sve rastuće funkcije f, g.*

2. slabo povezan *ako $\mathbb{E}[\prod_{i=1}^n f_i(X_i)] \geq \prod_{i=1}^n \mathbb{E}[f_i(X)]$ za sve $f_i \geq 0$, f_i rastuća.*

3. *X manji od Y kao* slabo uvjetno rastući u smislu sekvencijalnog uređaja *(weakly conditional increasing in sequencial order), u oznaci $X \leq_{wcs} Y$ ako za svaki $t \in \mathbb{R}$, $i \leq n-1$ i f rastuću vrijedi*

$$\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{\{X_i>t\}}, f(X_{(i+1)})) \leq \mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{\{Y_i>t\}}, f(Y_{(j+1)})),$$

gdje je $X_{(i+1)} = (X_{(i+1)}, ..., X_n)$, respektivno, te $Y_{(i+1)} = (Y_{(i+1)}, ..., Y_n)$.

4. *kažemo da je X* slabo povezan u nizu *(weakly associated in sequence - WAS) ako*

$$X^\perp \leq_{wcs} X.$$

5. *kažemo da je X* pozitivno supermodularno zavisan *(positive supermodular dependent - PSMD) ako vrijedi*

$$X^\perp \leq_{sm} X.$$

Također ćemo definirati uređaje zavisnosti koji su definirani preko uvjetnih rastućih distribucija. Kako bismo uveli spomenute uređaje, potrebno je definirati stohastički rast. Neka je $\{X_i; i \in I\}$ familija slučajnih vektora indeksirana jednim parametrom $i \in I \subset \mathbb{R}$ i neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funckija, označit ćemo $f^* = \mathbb{E}[f(X_i)]$.

Definicija 2.2.13. *Ako*

$$f \text{ neopadajuća} \Rightarrow f^* \text{ neopadajuća}$$

kažemo da je X_i stohastički rastući.

Kažemo da je slučajni vektor X stohastički rastući ako i samo ako vrijedi $X_i \leq_{st} X_k$ za $i \leq j$. U skladu s definicijom 2.2.13 definiramo $X \uparrow_{st} Y$, slučajni vektor X stohastički raste prema Y ako uvjetna distribucija $P^{X|Y=y}$ raste po y u smislu stohastičkog uređaja, $\leq_{st}$. Definiramo svojstva uvjetnog rasta:

Definicija 2.2.14 (Svojstvo uvjetnog rasta). *Neka je $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$ slučajan vektor, za njega kažemo da je:*

1. uvjetno rastući *(conditional increasing - CI) ako za svaki $i \leq n$ vrijedi*

$$X_i \uparrow_{st} X_J \quad \forall J \subset \{1, ..., n\}$$

2. uvjetno rastući u nizu *(conditional increasing in sequence - CIS) ako vrijedi*

$$X_i \uparrow_{st} (X_1, ..., X_{j-i}), \quad 2 \leq i \leq n$$

3. pozitivno zavisan kroz stohastički uređaj *(positive dependent through stohastic ordering - PDS) ako vrijedi*

$$(X_i, i \neq j) \uparrow_{st} X_j \quad \forall 1 \leq j \leq n.$$

U sljedećoj napomeni definirat ćemo relacije među uređajima iz definicije 2.2.12 i definicije 2.2.14 te ih kroz nekoliko rezultata povezati sa supermodularnim uređajem.

Napomena 2.2.15.

1. ***Relacije između pojmova ovisnosti:*** *Utvrđene su sljedeće implikacije između različitih pozitivnih pojmova ovisnosti:*

$$CI \implies CIS \implies Povezanost \implies WA \implies WAS. \tag{2.6}$$

Dat ćemo skicu dokaza.
Implikacija $CI \implies CIS$ vrijedi direktno iz definicije 2.2.14. Implikacije $Povezanost \implies WA$ i $WA \implies WAS$ slijede direktno iz definicije svojstava iz 2.2.12. Preostalo je pokazati implikaciju $CIS \implies Povezanost$.

Dokaz. U dokazu ćemo koristiti sljedeću karakterizaciju povezanosti. Za slučajni vektor X kažemo da je povezan ako vrijedi

$$\mathrm{Cov}(\varphi_1(X_1, ..., X_n), \varphi_2(X_1, ..., X_n)) \geq 0, \tag{2.7}$$

za sve nepodajuće funkcije φ_1, φ_2 za koje kovarijanca postoji.
Indukcijom po dimenziji prostora pokazat ćemo da za svaki CIS slučajni vektor X vrijedi nejednakost (2.7). Tvrdnja očito vrijedi za $n = 1$. Pretpostavaljamo da vrijedi za dimeninzije $1, ..., n$.
Pokazujemo da tvrdnja vrijedi i za dimenziju $n + 1$. U dokazu koristimo sljedeću karakterizaciju kovarijance.

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}[\mathrm{Cov}(X_1, X_2|Y)] + \mathrm{Cov}(\mathbb{E}[X_1|Y], \mathbb{E}[X_2|Y]),$$

gdje je $\mathrm{Cov}(X_1, X_2|Y)$ uvjetna kovarijanca dana definicijom

Definicija 2.2.16. *Neka je Y m-dimenzionalni slučajni vektor, uvjetna kovarijanca vektora X_1 i X_2 uz Y je dana s*

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2|Y) = \mathbb{E}[(X_1 - \mathbb{E}[X_1|Y])(X_2 - \mathbb{E}[X_2|Y])].$$

Pa imamo

$$\begin{aligned} &\mathrm{Cov}(\varphi_1(X_1, ..., X_{n+1}), \varphi_2(X_1, ..., X_{n+1})) = \\ &\mathbb{E}[\mathrm{Cov}(\varphi_1(X_1, ..., X_{n+1}), \varphi_2(X_1, ..., X_{n+1})|X_1, ..., X_n)] + \\ &\mathrm{Cov}(\mathbb{E}[\varphi_1(X_1, ..., X_{n+1})|X_1, ..., X_n], \mathbb{E}[\varphi_2(X_1, ..., X_{n+1})|X_1, ..., X_n]). \end{aligned}$$

Po pretpostavci X je CIS pa definiramo neopadajuće funkcije $\tilde{\varphi}_1$ i $\tilde{\varphi}_2$ kao

$$\tilde{\varphi}_j(X_1, ..., X_n) = \mathbb{E}[\varphi_j(X_1, ..., X_n)|X_1 = x_1, ..., X_n = x_n], \ j = 1, 2.$$

Sada vrijedi

$$\begin{aligned} &\mathrm{Cov}(\mathbb{E}[\varphi_1(X_1, ..., X_{n+1})|X_1, ..., X_n], \mathbb{E}[\varphi_2(X_1, ..., X_{n+1})|X_1, ..., X_n]) \\ &= \mathrm{Cov}(\tilde{\varphi}_1(X_1, ..., X_{n+1}), \tilde{\varphi}_2(X_1, ..., X_{n+1})) \geq 0. \end{aligned}$$

Također vrijedi i

$$\begin{aligned} &\mathrm{Cov}(\varphi_1(X_1, ..., X_{n+1}), \varphi_2(X_1, ..., X_{n+1})|X_1 = x_1, ..., X_n = x_n) \geq 0 \\ &\implies \mathbb{E}[\mathrm{Cov}(\varphi_1(X_1, ..., X_{n+1}), \varphi_2(X_1, ..., X_{n+1})|X_1, ..., X_n)] \geq 0 \end{aligned}$$

Dobili smo da $\mathrm{Cov}(\varphi_1(X_1, ..., X_{n+1}), \varphi_2(X_1, ..., X_{n+1})) \geq 0$, odnosno X je povezan. □

i

$$\text{PDS} \implies \text{WAS}.$$

2. ***Svojstvo MTP$_2$:***
Definirat ćemo uređaj zavisnosti na $\mathbb{R}^2$, totalno pozitivan reda 2 (TP_2).

Definicija 2.2.17. *Slučajni par $X = (X_1, X_2)$ je totalno pozitivan reda 2 (TP_2) ako $[X_2|X_1 = x_1] \preceq_{LR} [X_2|X_1 = x_1^{'}]$ za svaki $x_1 \leq x_1^{'}$ i $[X_1|X_2 = x_2] \preceq_{LR} [X_1|X_2 = x_2^{'}]$ za svaki $x_2 \leq x_2^{'}$.*

Pri tome da je $\preceq_{LR}$ uređaj omjera vjerojatnosti definiran s

Definicija 2.2.18. *Neka su slučajni vektori $X, Y \in \mathbb{R}^n$. Vrijedi $X \preceq_{LR} Y$ ako $[X|a \leq X \leq b] \preceq_{st} [Y|a \leq Y \leq b]$, $\forall a < b \in \mathbb{R}$*

Ovaj pojam zavisnosti je intuitivan i može se pokazati da vrijedi. Poopćenje TP_2 uređaja na $\mathbb{R}^n$ je multivarijatan totalno pozitivan reda 2. Za vektor X takav da P^X ima gustoću f s obzirom na produktnu mjeru $\mu = \mu_1 \times ... \times \mu_n$, gdje je μ Lebesgueova mjera ili brojeća mjera, definiramo:
X (ili f) je multivarijatan totalno pozitivan reda 2(MTP_2) ako

$$f(x)f(y) \leq f(x \wedge y)f(x \vee y)$$

ili ekvivalentno

$$\ln f \text{ je supermodularan.}$$

Karlin i Rinott (1980), [3] pokazali su da vrijedi

$$X \text{ je MTP}_2 \implies X \text{ je } CI. \tag{2.8}$$

Tvrdnju pokazujemo sljedećim teoremom.

Teorem 2.2.19. *Neka je X n-dimenzionalni slučajni vektor s MTP_2 funkcijom gustoće f i $\mu = \mu_1 \times ... \times \mu_n$ Lebesgueova mjera. Tada za svaku rastuću funkciju $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $1 \leq k \leq n$ vrijedi da je*

$$\mathbb{E}[\varphi(X_1, ..., X_k)|X_{k+1} = x_{k+1}, ..., X_n = x_n]$$

rastuća po $x_{k+1}, ..., x_n$.

Dokaz. Neka su $x_{k+1} \leq x_{k+1}^*, ..., x_n \leq x_n^*$ te definiramo

$$f_1(x_1, ..., x_k) = \frac{f(x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_n)}{\hat{f}(x_{k+1}, ..., x_n)},$$

i

$$f_2(x_1, ..., x_k) = \frac{f(x_1, ..., x_k, x^*_{k+1}, ..., x^*_n)}{\hat{f}(x^*_{k+1}, ..., x^*_n)},$$

gdje je

$$\hat{f}(x_{k+1}, ..., x_n) = \int ... \int f(x_1, ..., x_n) d\mu_1(x_1) ... d\mu_k(x_k).$$

Sada direktno iz $f_1 \leq_{TP2} f_2$, koji zadovoljavaju uvjet po konstrukciji za svaku rastuću funkciju φ vrijedi

$$\int \varphi(\mathbb{x}) f_1(\mathbb{x}) d\mathbb{x} \leq \int \varphi(\mathbb{x}) f_2(\mathbb{x}) d\mathbb{x},$$

gdje je $\mathbb{x} = (x_1, ..., x_k)$.
Odnosno vrijedi X je CI. □

Promotrimo točku 1, implikaciju (2.6) i točku 2, implikaciju (2.8) napomene 2.2.15. Uz tranzitivnost svojstava uređaja zavisnosti i gornjih pojmova može se pokazati kako u praksi postoji relativno lagan način da se za slučajni vektor X pokažu svojstva iz defincije 2.2.12 i definicije 2.2.14.
Sljedećim teoremom i korolarom dajemo odnos između svojsta zavisnosti "slabo uvjetno rastući u smislu sekvencijalnog uređaja" i supermodularnog uređaja, odnosno da $X \leq_{wcs} Y$ povlači $X \leq_{sm} Y$, iz [10].

Teorem 2.2.20. *Neka su X, Y n-dimenzionalni realni slučajni vektori s identičnim marginalnim distribucijama $P_i = Q_i$, $1 \leq i \leq n$. Tada $X \leq_{wcs} Y$ povlači $X \leq_{sm} Y$.*

Dokaz. Neka su $X^\perp, Y^\perp$ slučajni vektori s nezavisnim komponentama i neka je $X_i^\perp \stackrel{d}{=} P_i$, $Y_i^\perp \stackrel{d}{=} Q_i$, $1 \leq i \leq n$. Tada je dovoljno usporediti očekivanja funkcija $f \in \mathcal{F}_{sm}$ koje su ograničene i dva puta diferencijabilne. Označimo $g(t, x_{(2)}) := \frac{\partial f}{\partial x_1}(t, x_{(2)})$ te ćemo primijetiti da je $g(t, \cdot)$ rastuća jer $f \in \mathcal{F}_{sm}$. Dokaz dalje provodimo indukcijom po n. Koristimo jednostavnu formulu reprezentacije

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f(X) - f(X_1^\perp, X_{(2)})] &= \int \mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{\{X_i > t\}}, g(t, X_{(2)})) dt \\ &\leq \int \mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{\{Y_i > t\}}, g(t, Y_{(2)})) dt \\ &= \mathbb{E}[f(Y) - f(Y_1^\perp, Y_{(2)})],\end{aligned}$$

gdje nejednakosti slijede iz $X \leq_{wcs} Y$ i pretpostavke jednakosti marginalnih distribucija $X_1 \sim Y_1$. To ima za posljedicu

$$\mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(Y)] + A_{n-1},$$

gdje je

$$A_{n-1} := \mathbb{E}[f(X_1^\perp, X_{(2)})] - \mathbb{E}[f(Y_1^\perp, Y_{(2)})].$$

Funkcija $\int f(x_1, \cdot) dP_1(x_1)$ je supermodularna funkcija u $(n-1)$ argumenata. Odavde, koristeći $X_1^\perp \sim Y_1^\perp$, dobijemo indukcijom $A_{n-1} \leq 0$ pa stoga vrijedi

$$\mathbb{E}[f(X)] \leq \mathbb{E}[f(Y)].$$

□

Ovim smo definirali i pokazali relacije između uređaja pozitivne zavisnosti. U nastavku ćemo proširiti klasu vektora rizika koju smo do sada promatrali, odnosno uvest ćemo relacije konveksnih uređaja.

Poglavlje 3

Usmjereni konveksni uređaj

3.1 Definicija usmjerenog konveksnog uređaja

Rizik portfelja može porasti na nekoliko načina. Do sada smo promatrali jedan aspekt mogućeg povećanja rizika, pozitivnu zavisnost. U ovom poglavlju diskutirat ćemo o konveksnom porastu marginalnih distribucija komponenata vektora rizika. Definirali smo do sada uređaje unutar iste Fréchetove klase, ali s konveksnim uređajima to nije slučaj. U odnosu na već definirane uređaje koji su uspoređivali vrijednosti mjera rizika, konveksni uređaji opisuju varijabilnost te nam omogućavaju da uspoređujemo parove vektora rizika s istim očekivanjem. Koristit ćemo rezultate iz [1] i [10].
Definiramo konveksni uređaj

Definicija 3.1.1 (Konveksni uređaj). *Neka su X i Y realni slučajni vektori, kažemo da $X \leq_{cx} Y$, X manji od Y u smislu konveksnog uređaja ako vrijedi*

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] \leq \mathbb{E}[\varphi(Y)] \tag{3.1}$$

za sve konveksne funkcije φ za koje postoji očekivanje. Analogno, $X \leq_{icx} Y$, X je manji od Y u smislu rastućeg konveksnog uređaja ako vrijedi nejednakost (3.1) *za sve rastruće integrabilne konveksne funkcije.*

Definirat ćemo i konveksni uređaj po komponentama analogno definiciji rastućeg konveksnog uređaja.

Definicija 3.1.2. *Neka $\leq_{ccx}$ označava konveksni uređaj po komponentama, odnosno integralni uređaj induciran klasom $\mathcal{F}_{ccx}$ po komponentama konveksnih funkcija $f(x_1, ..., x_n)$.*

Napomena 3.1.3.

1. *Konveksni uređaj može se opisati i pomoću funkcije viška gubitka (Excess of loss function) definiran za slučajnu varijablu X kao*

$$\pi_X(t) := \mathbb{E}[X - t]_+, t \in \mathbb{R}. \tag{3.2}$$

   Ekvivalentno,

$$\pi_X(t) = \int_t^\infty \overline{F}(s)ds, \tag{3.3}$$

   gdje je $\overline{F}(s) = 1 - F(s)$ funkcija doživljenja od F.
   Funkcije viška gubitka $\pi = \pi_X$ su padajuće i konveksne te zadovoljavaju

$$\lim_{t\to\infty}\pi(t) = 0, \lim_{t\to\infty}\pi(t) \text{ postoji i jednak je } \mathbb{E}[X]. \tag{3.4}$$

   Svaka padajuća konveksna funkcija π koja zadovoljava tvrdnju (3.4) *je funkcija viška gubitka slučajne varijable Z s funkcijom distribucije oblika*

$$F_Z(t) = 1 + \pi_+^{'}(t), \tag{3.5}$$

   gdje je $\pi_+^{'}(t)$ derivacija zdesna po t. Iz jednakosti (3.3) *i tvrdnje* (3.4) *slijedi*

$$X \leq_{st} \Leftrightarrow \pi_Y - \pi_X \text{ je padajuća.} \tag{3.6}$$

2. *Rastući konveksni uređaj naziva se još i stop-loss uređaj te ima široku primjenu u aktuarstvu. Biti "manji" u smislu $\preceq_{icx}$, znači i biti manji po mjeri rizika i manje varijabilan.*

Sljedećim teoremom uvodimo neka svojstva konveksnog uređaja.

Teorem 3.1.4. *(Kriteriji konveksnog uređaja) Neka su X i Y realne integrabilne slučajne varijable s funkcijama distribucije respektivno F i G, tada vrijedi:*

1. $X \preceq_{icx} Y \Leftrightarrow \pi_X \leq \pi_Y$,

2. *Ako* $X \preceq_{icx} Y$ *i* $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$, *tada* $X \preceq_{cx} Y$,

3. *Kriterij reza*
   Ako za neki $t_0 \in \mathbb{R}$ *vrijedi* $F(t) \leq G(t)$ *za* $t < t_0$ *i* $F(t) \geq G(t)$ *za* $t > t_0$ *i ako* $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ *onda* $X \preceq_{cx} Y$,

4. *$X \preceq_{icx} Y$ ako i samo ako postoji slučajna varijabla Z takva da vrijedi*

$$X \preceq_{st} Z \preceq_{cx} Y.$$

Dokaz.

1. Dokaz proizlazi iz činjenice da se na ograničenoj domeni rastuća konveksna funkcija može zapisati linearnom kombinacijom rubnih funkcija oblika $(x - t_i)_+$.

2. Slijedi direktno iz tvrdnje 1.

3. Iz reprezentacije funkcija viška gubitka π_X, π_Y definiraih kao u napomeni 3.1.3 jednakosti (3.2) slijedi

$$\pi_Y(t) - \pi_X(t) = \int_t^{\infty} (\overline{G}(x) - \overline{F}(x))dx \tag{3.7}$$

$$= \int_t^{\infty} (F(x) - G(x))dx. \tag{3.8}$$

Za $t \geq t_0$ prema uvjetu reza vrijedi $\pi_Y(t) - \pi_X(t) \geq 0$. Nadalje, $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi_Y(t) - \pi_X(t)) = \mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X] = 0$ i onda za $t < t_0$

$$\pi_Y(t) - \pi_X(t) = (\mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[X]) + \int_{-\infty}^{t} (F(x) - G(x))dx. \tag{3.9}$$

Ponovno zbog uvjeta kriterija reza. Sada iz tvrdnje 1 i tvrdnje 2 direktno slijedi $X \preceq_{cx} Y$.

4. Definiramo $\pi(t) = \max\{\pi_X(t), \mathbb{E}Y - t\}$, π je konveksna, padajuća i vrijedi

$$\lim_{t\to\infty} \pi(t) = 0 \;\; i \lim_{t\to-\infty} (\pi(t) + t) = \mathbb{E}[Y]. \tag{3.10}$$

Iz napomene 3.1.3 tvrdnje (3.4) i tvrdnje (3.5) slijedi da postoji slučajna varijabla Z takva da je π funkcija viška gubitka od Z. Kako je $\pi_Z(t) - \pi_X(t)$ padajuća prema 0, za $t \to \infty$ iz napomene 3.1.3 tvrdnje (3.6) slijedi $X \preceq_{st} Z$. Nadalje, $\pi_Z(t) < \pi_Y(t), t \in \mathbb{R}$ te tvrdnji 1 i 2 ovog teorema i tvrdnje (3.10) dobivamo $Z \preceq_{cx} Y$.

□

Kako je već spomenuto u tvrdnji 2 napomene 3.1.3, rastući konveksni uređaj ima široku primjenu u aktuarstvu te je usporediv i s uređajima pozitivne zavisnosti. Iduća propozicija nam daje uvjet relacije između gornje ortantnog uređaja i rastućega konveksnog.

Propozicija 3.1.5. *Neka su $X, Y \in \mathbb{R}^2$ slučajni vektori takvi da $X \preceq_{uo} Y$, tada za svaku $f \in \mathcal{F}_\Delta$ vrijedi*

$$X \preceq_{icx} Y, \tag{3.11}$$

gdje je $\preceq_{icx}$ rastući konveksni uređaj.

Dokaz. Dovoljno je promatrati dva puta diferencijabilne, rastuće konveksne funkcije g, takve da $g^{'} \geq 0, g^{''} \geq 0$ i pretpostavimo da je $f \in \mathcal{F}_\Delta$ diferencijabilna $\frac{\partial f}{\partial x_i} \geq 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \geq 0$. Kao posljedicu imamo da $g \circ f \in \mathcal{F}_\Delta$ zadovoljava

$$(-1)^k \Delta_{i_1}^{\varepsilon_1} ... \Delta_{i_k}^{\varepsilon_k} h(x) \geq 0, \text{ za sve } x \in \mathbb{R}^n.$$

Pa slijedi da $\mathbb{E}[g \circ f(X)] \leq \mathbb{E}[g \circ f(X)]$ iz čega slijedi tvrdnja propozicije 3.11. □

Definiramo i odnos sa supermodularnim uređajem.

Propozicija 3.1.6. *Neka su X, Y slučajni vektori u $\mathbb{R}^n$ takvi da $X \preceq_{sm} Y$ i $h \in \mathcal{F}_{sm}$ monotona, tada vrijedi*

$$h(X) \preceq_{icx} h(Y),$$

gdje je $\preceq_{icx}$ rastući, konveksni uređaj.

Dokaz. Iz definicije 3.1 znamo da kako bi vrijedilo $h(X) \preceq_{icx} h(Y)$, mora vrijediti $\mathbb{E}[\varphi(h(X))] \leq \mathbb{E}[\varphi(h(Y))]$, gdje je φ rastuća konveksna funkcija. Dovoljno je pokazati da za $\varphi \in \mathcal{F}_{icx}$ vrijedi $f = \varphi \circ h \in \mathcal{F}_{sm}$. Ovaj se problem svodi na diferencijalni slučaj i tada iz relacije

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\varphi \circ h) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(h) \cdot \frac{\partial h}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_j} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(h) \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j}, \ i \neq j.$$

Vidimo da za $\forall x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi sljedeće:
$\varphi \in \mathcal{F}_{icx}$, konveksna pa $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j}(h) \geq 0$ i rastuća pa $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(h) \geq 0$, h je supermodularna pa iz definicije slijedi $\frac{\partial h}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial h}{\partial x_j} \geq 0$ i $\frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} \geq 0$. Slijedi da je $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}(\varphi \circ h) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n$, odnosno $\varphi \circ h \in \mathcal{F}_{sm}$ te iz uvjeta $X \preceq_{sm} Y$ slijedi tvrdnja. □

Kao posljedicu propozicije 3.1.6 i teorema 2.2.8 imamo sljedeću napomenu, diskutiramo o mjeri rizika, višku gubitka, u smislu konveksnog uređaja.

Napomena 3.1.7. *(Višak gubitka) Osnovni rezultat usporedbe konveksnosti za višak gubitka zajedničkog portfelja tvrdi*

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \preceq_{cx} \sum_{i=1}^{n} X_i^c.$$

Odnosno, komonotoni vektor X^c je najgori slučaj zajedničkog portfelja.
Za $n = 2$ donja ograda, s obzirom na konveksni uređaj, dan je kontramonotonim vektorom $X_c = (F_1^{-1}(U), F_2^{-1}(1-U)) = (X_1^{cm}, X_2^{cm})$

$$\sum_{i=1}^{2} X_i^{cm} \leq_{cx} \sum_{i=1}^{2} X_i.$$

Kako je pokazano u propoziciji 3.1.6 da $X \leq_{sm} Y$ povlači $X \leq_{icx} Y$ za monotono neopadajuće supermodularne funckije, kao posljedicu teorema 2.2.20, definiramo konveksnu usporedbu na klasi mjera rizika slučajnih vektora u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 3.1.8. *Ako je X slabo povezan u nizu (WAS) i h monotono neopadajuća supermodularna funkcija, tada vrijedi*

$$h(X^{\perp}) \leq_{icx} h(X),$$

odnosno $h(X)$ ima jače rastući konveksni rizik nego $h(X^{\perp})$ za svaku monotono neopadajuću supermodularnu funkciju h.

Slijedi da kriterij pozitivne zavisnosti, slabo povezan u nizu, implicira veći rizik u odnosu na nezavisne portfelje generirane klasom rastućih supermodularnih funkcija.
Sada smo u poziciji da možemo definirati usmjeren konveksni uređaj koji je usko povezan sa supermodularnim uređajem. Glavna razlika je u tome što supermodularni uređaj uspoređuje zavisnost slučajnih vektora s fiksnim marginalima, odnsono elemente unutar iste Fréchetove klase dok je kod usmjerenog konveksnog uređaja uzeta u obzir i varijabilnost marginalnih distribucija, odnosno gdje je zadovoljeno $X_i \leq_{cx} Y_i$ te i $X_i \leq_{icx} Y_i$.

Definicija 3.1.9 (Usmjerene konveksne funkcije i uređaj).

1. *Za funkciju $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ kažemo da je* usmjereno konveksna *ako za sve $1 \leq i \leq j \leq n$ i za sve $\varepsilon, \delta > 0$ vrijedi*
   $$\Delta_i^{\varepsilon} \Delta_j^{\delta} f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$
   Skup svih usmjereno konveksnih funkcija označavamo sa $\mathcal{F}_{dcx}$.

2. *Neka su X, Y slučajni vektori u $\mathbb{R}^n$, tada kažemo da je X manji od Y u usmjereno konveksnom uređaju, u oznaci*
   $$X \leq_{dcx} Y,$$
   ako $\mathbb{E}f(X) \leq \mathbb{E}f(Y)$ za sve integrabilne $f \in \mathcal{F}_{dcx}$. Dakle, $\leq_{dcx}$ je uređaj induciran integralom.

Iz definicije se vidi da za dvostruko diferencijabilnu funkciju f vrijedi

$$f \in \mathcal{F}_{dcx} \iff \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \geq 0, \ \forall 1 \leq i \leq j \leq n.$$

U odnosu na supermodularnost, usmjerene konveksne funkcije su supermodularne i dodatno konveksne u svakoj komponenti x_i. Uređaj $\leq_{dcx}$ je generiran klasom svih beskonačno diferencijalnih konveksnih funkcija s asimptotski linearnim rastom, to jest $f(x) = O(\|x\|)$, kad $\|x\| \to \infty$.

Uvest ćemo još dvije tvrdnje bez dokaza, dokazi su izvan opsega rada, kako bismo definirali još nekoliko svojstava usmjerenog konveksnog uređaja.
Iduća tvrdnja je dokazana u [8].

Teorem 3.1.10 (Ky Fan-Lorentz). *Neka su $F_1, ..., F_n$ i $G_1, ..., G_n$ funkcije distribucije takve da $F_i \leq_{cx} G_i, \ 1 \leq i \leq n$, označimo s*

$$X^c := (F_i^{-1}(U))_{1 \leq i \leq n}, \quad Y^c := (G_i^{-1}),$$

odgovarajuće komonotone vektore, tada vrijedi

$$C^c \leq_{dcx} Y^c.$$

Tvrdnja je dokazana u [6].

Teorem 3.1.11 (Usporedni kriterij za $\leq_{dcx}$). *Neka su $X, \ Y$ vektori u $\mathbb{R}^n$ sa zajedničkom uvjetno rastućom kopulom C. Ako je $X_i \leq_{cx} Y_i, \ 1 \leq i \leq n$, tada vrijedi*

$$X \leq_{dcx} Y.$$

Kako bismo proširili usporedni kriterij iz teorema 3.1.11 na vektore X,Y za koje ne vrijedi da imaju identičnu uvjetno rastuću kopulu, potreban nam je uvjet rastuće strukture zavisnosti te rastućeg konveksnog uređaja po marginalima. Oba potrebna uvjeta zadovoljava uređaj wcs, slabo povezan u nizu. Dobivamo sljedeći rezultat.

Teorem 3.1.12 ($\leq_{dcx}$ uređaj za različite kopule). *Neka su $X, \ Y$ slučajni vektori s marginalnim distribucijama $P_i, \ Q_i$, takvi da vrijedi $P_i \leq_{cx} Q_i, \ 1 \leq i \leq n$. Tada vrijedi:*

$$X \leq_{wcs} Y \implies X \leq_{dcx} Y.$$

Dokaz. Neka je $f \in \mathcal{F}_{dcx}$ dvostruko diferencijabilna i neka je $g := \frac{\partial}{\partial x_1} f$, tada, analogno kao i u teoremu 2.2.20, prema wcs-uređaju te koristeći monotonost od $g(t, \cdot)$, imamo:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}f(X) - \mathbb{E}f(X_1^{\perp}, X_{(2)}) &= \int \mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{\{X_i > t\}}, g(t, X_{(2)}))dt \\
&\leq \int \mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{\{Y_i > t\}}, g(t, Y_{(2)}))dt \\
&= \mathbb{E}f(Y) - \mathbb{E}f(Y_1^{\perp}, Y_{(2)}).
\end{aligned}$$

Budući da vrijedi $X_1^{\perp} \leq_{cx} Y_1^{\perp}$ te je funkcija $f(\cdot, y_{(2)})$ konveksna, vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}f(X) &\leq \mathbb{E}f(Y) + \mathbb{E}f(X_1^{\perp}, X_{(2)}) - \mathbb{E}f(Y_1^{\perp}, Y_{(2)}) \qquad (3.12) \\
&\leq \mathbb{E}f(Y) + \mathbb{E}f(Y_1^{\perp}, X_{(2)}) - \mathbb{E}f(Y_1^{\perp}, Y_{(2)}) \\
&= \mathbb{E}f(Y) + A_{n-1},
\end{aligned}$$

gdje je $A_{n-1} := \mathbb{E}f(Y_1^{\perp}, X_{(2)}) - \mathbb{E}f(Y_1^{\perp}, Y_{(2)})$. Sada zbog $f(y_1^{\perp}, \cdot) \in \mathcal{F}_{dcx}$, odnosno konveksnosti po komponentama i $X \leq_{wcs} Y$ vrijedi $\mathbb{E}f(Y_1^{\perp}, X_{(2)}) \leq \mathbb{E}f(Y_1^{\perp}, Y_{(2)})$ pa indukcijom dobivamo da je $A_{n-1} \leq 0$, stoga rezultat slijedi. □

U slučaju da samo jedna marginalna distribucija raste konveksno, dobivamo sljedeći korolar.

Korolar 3.1.13. *Neka je $X = (X_1, X_{(2)})$, $Y = (Y_1, X_{(2)})$ te neka je f neopadajuća ograničena funkcija. Pretpostavimo da vrijedi*

$$\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{\{X_1 > t\}}, f(X_{(2)})) \geq \mathrm{Cov}(\mathbb{1}_{\{Y_1 > t\}}, f(X_{(2)})), \quad \forall t.$$

Tada vrijedi sljedeća implikacija

$$X_1 \leq_{cx} Y_1 \implies X \leq_{dcx} Y.$$

Dokaz. Dokaz ide analogno kao u teoremu 3.1.12, međutim korak indukcije se može preskočiti nakon formule (3.12) jer samo jedna marginalna distribucija raste konveksno. □

Ako tvrdnju teorema 3.1.12 ograničimo na rastuće funkcije, dobivamo sljedeće:

$$P_i \leq_{icx} Q_i,\ 1 \leq i \leq n \ \text{ i } X \leq_{iwcs} Y \implies X \leq_{idcx} Y,$$

gdje je $\leq_{idcx}$ rastući usmjeren konveksni uređaj. Uređaj definiramo na isti način kao u 3.1.9 s uvjetom rastućih funkcija $f \in \mathcal{F}_{dcx}$. $\leq_{iwcs}$ uređaj rastući slabo povezan u nizu definiran je kao u definiciji 2.2.12, ali restringiran na nenegativne, monotono neopadajuće funkcije f. Vidljivo je da za slučajne vektore iz $\mathbb{R}^2$ teorem 3.1.12 daje dovoljan uvjet za usporedbu rizika u smislu funkcije doživljenja $\overline{F}(u, v) = P(X_1 \geq u, X_2 \geq v)$. U sljedećem korolaru formulirat ćemo usporedbu za rastuće konveksne rizike.

Korolar 3.1.14. *Neka su $X = (X_1, X_2)$, $Y = (Y_1, Y_2)$. Neka su $\bar{F}$, $\bar{G}$ funkcije doživljenja od X i Y respektivno te neka vrijedi*

$$\bar{F}(u,v) - \bar{F}_1(u)\bar{F}_2(v) \leq \bar{G}(u,v) - \bar{G}_1(u)\bar{G}_2(v), \tag{3.13}$$

tada vrijede sljedeće tvrdnje

1. $X_i \leq_{cx} Y_i,\ i = 1,2 \implies X \leq_{dcx} Y$,
2. $X_i \leq_{icx} Y_i,\ i = 1,2 \implies X \leq_{idcx} Y$.

Ovdje $\leq_{idcx}$ označava uređaj u odnosu na klasu $\mathcal{F}_{idcx}$ rastućih usmjereno konveksnih funkcija.

Dokaz. Ako integriramo uvjet, što smijemo zbog monotonosti integrala, dobivamo

$$\bar{F}(u,v) - \bar{F}_1(u)\bar{F}_2(v) \leq \bar{G}(u,v) - \bar{G}_1(u)\bar{G}_2(v) / \iint dudv,$$
$$\iint (\bar{F}(u,v) - \bar{F}_1(u)\bar{F}_2(v))dudv \leq \iint (\bar{G}(u,v) - \bar{G}_1(u)\bar{G}_2(v))dudv,$$

što je upravo Hoeffdingova reprezentacija kovarijance pa iz definicije 2.2.12 vrijedi $X \leq_{wcs} Y$. Tvrdnja slijedi direktno primjenom teorema 3.1.12. □

Sljedećom propozicijom pokazat ćemo u kojem slučaju konveksni uređaj povlači slabo povezan u nizu te ćemo pokazati da je tvrdnja 3.1.11 posljedica tvrdnji iz teorema 3.1.12.

Propozicija 3.1.15. *Neka su X, Y slučajni vektori s istom zavisno rastućom kopulom te neka je $X_i \leq_{cx} Y_i$, $1 \leq i \leq n$. Tada vrijedi $X \leq_{wcs} Y$.*

Dokaz. U prvom koraku, pretpostavljamo da se X i Y razlikuju samo u prvoj komponenti distribucije, odnosno

$$X_1 \leq_{cx} Y_1 \text{ te } X_{(2)} \stackrel{d}{=} Y_{(2)}.$$

Tada treba pokazati da vrijedi:

$$\mathrm{Cov}(f_i(X_i), f(X_{(i+1)})) \leq \mathrm{Cov}(f_i(Y_i), f(Y_{(i+1)})), \quad 1 \leq i \leq n,$$

za f_i i f monotono neopadajuće. Bez smanjenja općenitosti možemo promatrati slučaj kada je $i = 1$. Budući da je $X_{(2)} \stackrel{d}{=} Y_{(2)}$, također možemo pretpostaviti da je $X_{(2)} = Y_{(2)}$ te da je $\mathbb{E}[f(X_{(2)})] = 0$. Koristeći standardnu reprezentaciju zajedničke kopule od X, Y su definirani s

$$X_1 = F_1^{-1}(V_1), \qquad X_i = F_i^{-1} \circ f_i(V_1, ..., V_i),$$
$$Y_1 = G_1^{-1}(V_1), \qquad Y_i = X_i, \quad i \geq 2.$$

Ova reprezentacija implicira da je uvjetni dio dan s $\Theta = (V_2, ..., V_n) = \vartheta$. Imamo $f_1(X_1) = h_1(V_1)$, $f(X_{(2)}) = h_2(V_1)$ te $f_1(Y_1) = g_1(V_1)$, gdje su h_1, g_1 monotono neopadajuće te $g_1 = g_1(\cdot, \vartheta)$. Stoga uvjetno uz $\Theta = \vartheta$ prema teoremu 3.1.10 slijedi:

$$(f_1(X_1), f(X_{(2)})) \leq_{dcx} (f_1(Y_1), f(Y_{(2)}))$$

pa prema tome i

$$\mathrm{Cov}(f_1(X_1), f(X_{(2)})) = \mathbb{E}[f_1(X_1)f(X_{(2)})] \leq \mathrm{Cov}(f_1(Y_1), f(Y_{(2)})).$$

Ako se X i Y razlikuju samo u i-toj komponenti, tada, koristeći odgovarajuću permutaciju π te X_π, Y_π, svodimo slučaj na $i = 1$. To je moguće zato što su X_π i Y_π uvjetno rastući u nizu (CIS). Konačno, generalni slučaj slijedi indukcijom. □

3.2 Usporedba rizika funkcijskih modela pomoću uređaja

Ideja je ovog poglavlja definirati funkcijske modele na kojima je moguće uspostaviti usmjereni konveksni uređaj, odnosno rastući usmjereni konveksni uređaj te diskutirati o povezanosti uređaja s rizikom modela. Diskusiju ćemo započeti jednostavnim modelom miješanja koji je definiran kao u [10].

Teorem 3.2.1 (Model miješanja). *Neka su V_1, Θ nezavisni slučajni vektori, V_1 realan, i neka je $X_i = h_i(V_1, \Theta), Y_i = g_i(V_1, \Theta)$, $1 \leq i \leq n$, gdje su $h_i(\cdot, \vartheta)$ i $g_i(\cdot, \vartheta)$ monotono neopadajuće. Ako za sve ϑ vrijedi*

$$h_i(V_1, \vartheta) \leq_{cx} g_i(V_1, \vartheta), \ 1 \leq i \leq n, \tag{3.14}$$

tada vrijedi $X \leq_{dcx} Y$.

Dokaz. Pretpostavimo da su, uz $\Theta = \vartheta$, $X|\vartheta$ i $Y|\vartheta$ komonotoni vektori. Tada kako su vektori $X = (X_i)$, $1 \leq i \leq n$ i $Y = (Y_i)$, $1 \leq i \leq n$ konveksno uređeni po komponentama, iz teorema 3.1.10 slijedi $X|\vartheta \leq_{dcx} Y|\vartheta$. Kako je svaki integralni uređaj zatvoren na miješanje slijedi $X \leq_{dcx} Y$. Pri tome da se svojstvo zatvoren na miješanje (closure under mixing) definira s

Definicija 3.2.2 (Zatvoren na miješanje (Closure under mixing)).
Ako $[X|Z = z] \leq_* [Y|Z = z]$, *za svaki* z *iz nosača po* Z, *tada općenito vrijedi* $X \leq_* Y$, *gdje je* $\leq_*$ *integralni uređaj.*

□

Razmotrimo konstrukciju modela iz teorema. Reprezentacija $X_i = h_i(V_1, \Theta), Y_i = g_i(V_1, \Theta)$ može se shvatiti kao model s funkcijskom zavisnošću o unutarnjem uzroku V_1 i vanjskom uzroku Θ koji je zajednički oboma. Oba modela ovise o stohastičkom rastu V_1 dok za bilo koji zajednički vanjski uzrok ϑ drugi model ima veći rizik od prvog modela. S druge strane, funkcijski se tip reprezentacije vektora X i Y može definirati regresijskom konstrukcijom, odnosno standardnom konstrukcijom multivarijabilnih distribucija, kao u [9], s funkcijom distribucije F danom s $X = (h_1(V_1), h_2(V_1, V_2), ..., h_n(V_1, ..., V_n))$, gdje su V_i uniformno distribuirane $V_i \backsim U(0, 1)$ te uvjetni dio dan s $\Theta = (V_2, ..., V_n)$.

Promotrimo složeniji funkcijski model. Neka su $(U_i), (V_i), 1 \leq i \leq n$ slučajni nizovi i slučajni vektor V, gdje su (V_i) i V jednodimenzionalni i nezavisni s (U_i) koji su jednodimenzionalni. Nadalje, definirajmo funkcijske modele $X = (X_i), Y = (Y_i), Z = (Z_i)$ te $W = (W_i), 1 \leq i \leq n$ sa

$$\begin{aligned} X_i &= g_i(U_i, V_i), & Y_i &= g_i(U_i, V), \\ Z_i &= \tilde{g}_i(U_i, V_i), & W_i &= \tilde{g}_i(U_i, V). \end{aligned} \tag{3.15}$$

(U_i) su osnovne stohastičke varijable dok su V_i, V slučajni vanjski uzroci čiji je utjecaj opisan funkcijama $g_i, \tilde{g}_i$. Vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned} &(A1)\ (U_i) \text{ su nezavisne,} \\ &(A2)\ V_i \backsim V,\ 1 \leq i \leq n, \\ &(A3)\ g_i(u, \cdot), \tilde{g}_i(u, \cdot) \text{ su monotono neopadajuće.} \end{aligned} \tag{3.16}$$

Primijetimo da model za X ovisi o različitim uzrocima rizika V_i dok model za Y ovisi samo o vanjskom uzroku V. Na ovako definiranim modelima promotrit ćemo i uspostaviti relacije konveksnih uređaja, odnosno uređaja zavisnosti kroz sljedeće rezultate. Pokazat ćemo usporedbu rizika vektora definiranih kao (3.15) u sklopu opisanog modela u ovisnosti o uređaju.

Teorem 3.2.3. *Neka vrijede pretpostavke* (A2) *i* (A3)*, definirane s* (3.16)*. Tada vrijedi*

a)

$$X \leq_{sm} Y, \qquad Z \leq_{sm} W.$$

b) *Ako dodatno vrijedi* $g_i(u_i, V) \leq_{cx} \tilde{g}_i(u_i, V)$, *za svaki* u_i, *tada*

$$Y \leq_{dcx} W.$$

Pri tome su X, Y, Z *i* W *modeli definirani s* (3.15).

Dokaz. a) Za $\varphi \in \mathcal{F}_{sm}$ po teoremu 3.1.10 vrijedi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varphi(x)] &= \mathbb{E}_U[\mathbb{E}[\varphi(X)|U_1 = u_1, ..., U_n = u_n)]] \\ &= \mathbb{E}_U[\mathbb{E}[\varphi(g_1(u_1, V_1), ..., g_n(u_n, V_n)]] \\ &\leq \mathbb{E}_u[\mathbb{E}[\varphi(g_1(u_1, V), ..., g_n(u_n, V)]] \\ &= E\varphi(g_1(U_1, V), ..., g_n(U_n, V)) = \mathbb{E}[\varphi(Y)].\end{aligned}$$

Ovdje E_U označava marginalno očekivanje s obzirom na slučajni vektor U. Tvrdnja $Z \leq_{sm} W$ pokazuje se na sličan način.

b) Dokaz tvrdnje $X \leq_{dcx} W$ slijedi iz a) dijela te kako U_i generira odgovarajući komonoton vektor, iz teorema 3.1.10 slijedi tvrdnja.

□

Pod pretpostavkom da su definirani vektori X, Y, Z i W, iz (3.15), konveksno rastući po marginalima, vrijedi sljedeća tvrdnja.

Teorem 3.2.4. *Neka vrijede pretpostavke* (A1), (A2) *i* (A3), *definirane s* (3.16). *Ako za sve* v, *vrijedi* $\tilde{g}_i(U_i, v) \leq_{cx} g_i(U_i, v)$, *tada*

$$Z \leq_{ccx} X, \quad W \leq_{ccx} Y, \quad \text{i} \quad Z \leq_{dcx} Y, \tag{3.17}$$

gdje su X, Y, Z *i* W *modeli definirani s* (3.15).

Dokaz. Prema teoremu 3.2.3, vrijedi $X \leq_{sm} Y$. Nadalje, za proizvoljnu, po komponentama konveksnu funkciju φ vrijedi da uz uvjet $V_i = v_i$ i koristeći pretpostavku na $g_i, \tilde{g}_i$:

$$\begin{aligned}E\varphi(X) &= E_V E_\varphi(g_1(U_1, v_1), ..., g_n(U_n, v_n)) \\ &\geq E_v E_\varphi(\tilde{g}_1(U_1, v_1), ..., \tilde{g}_n(U_n, v_n)) \\ &= E\varphi(Z).\end{aligned}$$

Dobivamo $Z \leq_{ccx} X$.

E_V je marginalno očekivanje u odnosu na V. Nejednakost smo dobili pomoću (A1)

$$g_1(U_1, v_1), ..., g_n(U_n, v_n) \leq_{ccx} \tilde{g}_1(U_1, v_1), ..., \tilde{g}_n(U_n, v_n).$$

Stoga dobivamo

$$Z \leq_{ccx} X \leq_{sm} Y,$$

iz čega slijedi

$$Z \leq_{dcx} Y.$$

Slično dobivamo nejednakost $W \leq_{ccx} Y$. □

Primijetimo da nije korištena pretpostavka nezavisnosti slučajnih varijabli V_i pri definiciji vektora X, Y, Z i W. Nadalje, bilo koja funkcija distribucije $F \in \mathcal{F}_n$, definirana kao u raspravi prije iskaza teorema 3.2.4, može se prikazati u formi $(g_i(U_i, V_i))$, gdje g_i zadovoljava (A3). Odnosno, odnos uređaja iz gornjih teorema primjenjiv je na široku klasu modela.

U nastavku uzet ćemo u obzir i modele sa slučajnim vektorima kojima su marginalne distribucije multivarijatne.

Definicija 3.2.5 (Slučajni vektor s multivarijatnim marginalnim distribucijama). *Neka je $X = (X_1, X_2, ..., X_n)$, gdje su X_i k_i dimenzionalni vektori s funkcijama distribucije F_i i pripadnim vjerojatnostima $P_1, P_2, ..., P_n$. Funkcija distribucije $F = F_X \in \mathcal{F}(F_1, ...F_n)$ ima multivarijabilne marginalne funkcije distribucije $F_i \backsim P_i$.*

Na modelima s multivarijabilnim marginalnim funkcijama distribucije diskutirat ćemo o riziku u odnosu na konstrukciju vektora u modelu, odnosno promotriti komonotone slučajne vektore.
Za slučajne vektore s jednodimenzionalnim marginalnim distribucijama znamo da komonoton slučajni vektori $(F_1^{-1}(U), ..., F_1^{-1}(U))$ dostiže gornju Fréchetovu ogradu, odnosno ima funkciju distribucije oblika F_+ te znamo da je najrizičniji slučajni vektor.
Definiramo analogno proširenje Fréchetovih ograda za multivarijatne slučajne vektore. Neka je $k = \sum_{i=1}^{n} k_i$ dimenzija vektora X. Rezultati su iz [9].

Teorem 3.2.6 (Fréchetove ograde za multivarijatne marginale).
Definirat ćemo Fréchetove ograde za multivarijatne marginale kao

$$\begin{aligned} F_-(x) := \Big(\sum_{i=1}^{n} F_i(x_i) - (n-1)\Big)_+ &\leq F(x_1, ..., x_n) \\ &\leq \min_{i \leq n} F_i(x_i) =: F_+(x), \end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned} \overline{F}_-(x) := \Big(\sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i(x_i) - (n-1)\Big)_+ &\leq \overline{F}(x_1, ..., x_n) \\ &\leq \min_{i \leq n} \overline{F}_i(x_i) =: \overline{F}_+(x), \end{aligned} \tag{3.19}$$

gdje su $\overline{F}_i(x_i) = P(X_i \geq x_i)$, $\overline{F}(x_1, ..., x_n) = P(X_i \geq x_i)$, $1 \leq i \leq n$ *(multivarijatne) funkcije doživljenja. Ograde u* (3.18) *i* (3.19) *su stroge.*

Dokaz. Za vjerojatnosnu mjeru $P \in \mathcal{M}(P_1, ..., P_n)$ takvu da su marginali $P_i, 1 \leq i \leq n$ definirani na poljskim prostorima, za sve izmjerive skupove $A_1, ..., A_n$ vrijedi

$$(\sum_{i=1}^{n} P_i(A_i) - (n-1))_+ \leq P(A_1 \times ... \times A_n) \leq \min_{i \leq n} P_i(A_i). \tag{3.20}$$

Ograde u (3.20) su stroge. Fréchetove ograde su dobro definirane. □

Promotrimo i komonotone vektore u multivarijatnom smislu. Inače, u multivarijatnom smislu ne postoje komonotoni vektori $X = (X_1, ..., X_n)$ s $X_i \backsim F_i$ u smislu $(X_1, ..., X_2) = (f_1(U), ..., f_n(U))$ s neopadajućim funkcijama $f_i : [0, 1] \to \mathbb{R}^{k_i}$. Čak ni u slučaju da $k_i = k_1, 1 \leq i \leq n$ i $F_1 = ... = F_n$, komonoton vektor s identičnim komponentama $X = (X_1, X_1, ..., X_1)$ neće dostići strogu gornju Fréchetovu ogradu $F_+(x)$, odnosno ne generira najrizičniju funkciju distribucije portfelja.

Propozicija 3.2.7 (Komonotoni slučajni vektor i Fréchetove ograde).

a) *Gornje i donje Fréchetove ograde za* $k_i \geq 2$*, općenito, nisu definirane zajedničkom funkcijom distribucije kao što je to slučaj za* $k_i = 1$ *(komonoton vektor, odnosno pripadna funkcija distribucije).*

b) *Ako je* $F_1 = F_2 = \cdots = F_n$ k_1*-dimenzionalna funkcija distribucije i* $X_1 \sim F_1$*, tada komonotoni slučajni vektor* $X = (X_1, ..., X_1)$ *ima funkciju distribucije*

$$F(x) = F_1(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) \leq F_+(x) = \min_{1 \leq i \leq n} F_1(x_i),\ x_i \in \mathbb{R}^k, \tag{3.21}$$

U općenitom slučaju vrijedi stroga nejednakost u (3.21).

Dokaz.

a) Neka je bez smanjenja općenitosti $n = 2$ te $k_1 = k_2 = 2$.
Pretpostavimo da je za $G, H \in \mathcal{F}_2$ s jednodimenzionalnim marginalima G_1, G_2, H_1, H_2, donja Fréchetova ograda $F_- = F(G, H)$ četverodimenzionalna funkcija distribucije. Tada za $X \sim F$ iz (3.18) zaključujemo

$$(X_1, X_3) \sim F_-(G_1, H_1), \qquad (X_1, X_4) \sim F_-(G_1, H_2),$$
$$(X_2, X_3) \sim F_-(G_2, H_1) \text{ i } \quad (X_2, X_4) \sim F_-(G_2, H_2).$$

To bi impliciralo jaku pozitivnu korelaciju (X_3, X_4) i (X_1, X_2) što je kontradikcija u odnosu na našu pretpostavku. Osim za neke posebne slučajeve s velikim skokovima dobili bismo $(X_1, X_2) \sim F_+(G_1, G_2)$ i $(X_3, X_4) \sim F_+(H_1, H_2)$. Analogno, argument za gornje Fréchetove ograde vodi do jake negativne korelacije između komponenata marginalnih distribucija, odnosno dolazimo do iste kontradikcije.

b) Direktno iz konstrukcije komonotonog slučajnog vektora slijedi $F(x) = F_1(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n)$ te direktno iz (3.18) slijedi nejednakost $F_1(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) \leq \min\limits_{1 \leq i \leq n} F_1(x_i),\ x_i \in \mathbb{R}^k$.
Općenito, samo za $k_1 = 1$ vrijedi jednakost u (3.21).

$\square$

U idućem ćemo poglavlju kroz nekoliko primjera diskutirati o rizičnosti portfelja s multivarijatnim marginalnim funkcijama distribucije.

Poglavlje 4

Primjeri

4.1 Primjeri

U ovom poglavlju navest ćemo nekoliko primjera u kojima ćemo diskutirati o rizičnosti portfelja.
U sljedećem primjeru opisat ćemo rizičnost portfelja kroz multivarijatna proširenja kontrakomonotonih i komonotonih slučajnih vektora za usmjereno konveksne funkcije φ. Pokazat ćemo da u slučaju multivarijatnih marginala općenito ne postoji jedna distribucija koja generira najveći rizik kao što je u slučaju jednodimenzionalnih marginala (komonoton vektor).

Primjer 4.1.1 (Antimonotone i komonotone varijante). *Promotrimo slučaj $k_i = 2$, $1 \leq i \leq n$, gdje je k_i dimenzija slučajnih vektora po komponentama, i $F_i = F_-(G_i, H_i)$, $1 \leq i \leq n$, odnosno za uniformnu slučajnu varijablu U, F_i je definiran s $(G_i^{-1}(U), H_i^{-1}(1-U)) \sim F_i, 1 \leq i \leq n$. Definiramo slučajne vektore s funkcijama distribucije u $\mathcal{F}(F_1, ..., F_n)$ čiju ćemo rizičnost diskutirati pomoću uređaja zavisnosti u ovom primjeru*

$$\begin{aligned} W_+ &= ((G_1^{-1}(U), H_1^{-1}(1-U)), ..., (G_n^{-1}(U), H_n^{-1}(1-U))), \\ Z &= ((G_1^{-1}(U_1), H_1^{-1}(1-U_1)), ..., (G_n^{-1}(U_n), H_n^{-1}(1-U_n))), \\ W_- &= ((G_1^{-1}(U), H_1^{-1}(1-U)), (G_2^{-1}(U), H_2^{-1}(1-U))), \quad \text{za } n = 2, \end{aligned}$$

gdje su (U_i) nezavisne uniformne slučajne varijable. W_+ je generalizirani komonotoni vektor, Z nezavisni vektor i W_- generalizirani antikomonotoni vektor s marginalima F_i. Tada za $x = (x_1, ..., x_n)$, $x_i = (y_i, z_i)$ dobivamo funkciju distribucije od W_+ i Z

$$F_{W_+}(x) = (\min G_i(y_i) + \min H_i(z_i) - 1)_+,$$
$$F_Z(x) = \prod_{i=1}^{n}(G_i(y_i) + H_i(z_i) - 1)_+.$$

Nadalje, Fréchetove ograde s marginalima F_i dane su s

$$F_+(x) = \min(G_i(y_i) + H_i(z_i) - 1)_+,$$
$$F_-(x) = \Big(\sum_{i=1}^{n}(G_i(y_i) + H_i(z_i) - 1)_+ - (n-1)\Big)_+.$$

F_{W_+}, F_Z nisu međusobno uniformno usporedivi.

Slučaj 1 *Kako bismo pokazali da u dimenzijama ≥ 2 komonotoni vektor W_+ nije najgora struktura ovisnosti, najprije promatramo usmjereno konveksnu funkciju $\varphi_1(x) = (\sum y_i + \sum z_i)^2$ i poseban slučaj kad je $G_i = G,\ H_i = H$ s očekivanjem 0. Tada*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varphi_1(W_+)] &= \mathrm{Var}\Big(\sum_{i=1}^{n}(G_1^{-1}(U), H_1^{-1}(1-U))\Big)\\ &= n^2\mathrm{Var}\Big(\sum_{i=1}^{n}(G_1^{-1}(U), H_1^{-1}(1-U))\Big).\end{aligned}$$

Slično,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\varphi_1(Z)] &= \mathrm{Var}\Big(\sum_{i=1}^{n}(G_1^{-1}(U_i), H_1^{-1}(1-U_i))\Big)\\ &= n\mathrm{Var}\Big(\sum_{i=1}^{n}(G_1^{-1}(U), H_1^{-1}(1-U))\Big).\end{aligned}$$

Dakle, vrijedi $\mathbb{E}[\varphi_1(W_+)] = \mathbb{E}[\varphi_1(Z)]$. Komonotoni vektor $W_+ = (X_1, ..., X_n)$, $X_1 = (G^{-1}(U), H^{-1}(1-U)$ u ovom slučaju inducira veću varijancu sume nego nezavisni vektor $Z = (X_1, ..., X_n)$, gdje su X_i nezavisni, $X_i \sim X_1$. Točnije, u ovom slučaju iz klasičnih Fréchetovih ograda dobivamo

$$\mathbb{E}[\varphi_1(W_+)] \geq \mathbb{E}[\varphi_1(X)]$$

za sve X s marginalima $F_i = F_-(G, H)$, to jest rizik s mjerom φ_1 je maksimalan za komonotoni vektor W_+. Tvrdnja vrijedi za sve marginale F_i.

Slučaj 2 *Promotrimo* $\varphi_2(x) = \sum_{i=1}^{n-1}(y_i z_{i+1} + y_{i+1} z_i)^2$ *i neka* G, H *imaju nosač u* $\mathbb{R}_+$. *Tada je* φ_3 *usmjereno konveksan, a samim time i valjana mjera rizika. Za komonotoni vektor* W_+ *dobivamo*

$$\mathbb{E}[\varphi_3(W_+)] = (n-1)E(G^{-1}(U)H^{-1}(1-U) + H^{-1}(U)G^{-1}(1-U))^2.$$

U ovom slučaju komonotoni vektor W_+ *generira najmanji mogući rizik. Razlog tomu je jako negativna ovisnost između komponenti marginalnih distribucija. Najveći mogući rizik dobiva se u slučaju* $n = 2$ *pomoću antikomonotonog vektora*

$$W_- = ((G^{-1}(U), H^{-1}(1-U)), (G^{-1}(1-U), H^{-1}(U))).$$

Navest ćemo i primjer u kojem ćemo diskutirati o rizičnosti portfelja polica osiguranja, odnosno o gubitku koji portfelj generira ovisno o supermodularnom, odnosno konveksnom uređaju.

Primjer 4.1.2. *U standardnom problemu teorije rizika, ukupan iznos potraživanja unutar perioda trajanja police za portfelj sa n polica je dan sa*

$$S_X = \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

gdje je X_i *ukupan iznos potraživanja vezan za policu i,* $i = 1, 2, \dots, n$. *Neka su dana dva portfelja, opisana ukupnim individualnim potraživanjima X i Y. Prema propoziciji 3.1.6 slijedi*

$$X \leq_{sm} Y \implies S_X \leq_{icx} S_Y.$$

Općenito, osiguravajuće društvo neće isplatiti puni iznos štete, nego će iznos isplate biti određen u ugovoru kao funkcija t_i *koja pridružuje šteti x iznos isplate* $t_i(x)$. *Tipičan primjer je*

$$t_i(x) = \min\{(x-d)_+, b\},$$

gdje su b osigurani iznos, a d franšiza. Ako svaki ugovaratelj police ima funkciju štete t_i, *tada ukupni iznos štete koju osiguravajuće društvo treba isplatiti za cijeli portfelj X iznosi* $\sum_{i=1}^{n} t_i(X_i)$. *Iz propozicije 3.1.6 slijedi*

$$X \leq_{sm} Y \implies \sum_{i=1}^{n} t_i(X_i) \leq_{icx} \sum_{i=1}^{n} t_i(Y_i),$$

za svaku neopadajuću funkciju $t_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. *Možemo zaključiti da portfelj Y generira veći gubitak osiguravajućem društvu nego portfelj X. Odnosno, portfelj Y je rizičniji od portfelja X.*

Bibliografija

[1] Michel Denuit, Jan Dhaene, Marc Goovaerts i Rob Kaas, *Actuarial theory for dependent risks: measures, orders and models*, John Wiley & Sons, 2006.

[2] Harry Joe, *Multivariate concordance*, Journal of multivariate analysis **35** (1990), br. 1, 12–30.

[3] Samuel Karlin i Yosef Rinott, *Classes of orderings of measures and related correlation inequalities. I. Multivariate totally positive distributions*, Journal of Multivariate Analysis **10** (1980), br. 4, 467–498.

[4] George Kimeldorf i Allan R Sampson, *A framework for positive dependence*, Annals of the Institute of Statistical Mathematics **41** (1989), br. 1, 31–45.

[5] Erich Leo Lehmann, *Some concepts of dependence*, The Annals of Mathematical Statistics **37** (1966), br. 5, 1137–1153.

[6] Alfred Müller i Marco Scarsini, *Some remarks on the supermodular order*, Journal of Multivariate Analysis **73** (2000), br. 1, 107–119.

[7] Ludger Rüschendorf, *Inequalities for the expectation of* Δ*-monotone functions*, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete **54** (1980), br. 3, 341–349.

[8] Ludger Rüschendorf, *Solution of a statistical optimization problem by rearrangement methods*, Metrika **30** (1983), br. 1, 55–61.

[9] Ludger Rüschendorf, *Comparison of multivariate risks and positive dependence*, Journal of Applied Probability **41** (2004), br. 2, 391–406.

[10] Ludger Rüschendorf, *Mathematical Risk Analysis*, Springer, 2013.

[11] Nikola Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, 1987.

Sažetak

Pojam ovisnost uređaja ili uređaj zavisnosti $\prec$ između vektora rizika način je na koji možemo uspoređivati vektore rizika u smislu da možemo reći $X \prec Y$. U $\mathbb{R}^2$ uređaj zavisnosti je konzistentan s koeficijentima korelacije, Pearsonov ϱ_p, Spearmanov ϱ_s i Kendallov τ. U ovom radu diskutiramo o dva načina na koja se mogu uspoređivati vektori rizika, odnosno portfelja.
Jedan način je pozitivna zavisnost, odnosno vektor X rizičniji je od vektora Y ako ima jaču pozitivnu zavisnost komponenti. Pozitivnu zavisnost usporedili smo na slučajnim vektorima iz iste Fréchetove klase, odnosno vektorima koji imaju iste marginalne distribucije. Definirali smo neke od uređaja zavisnosti. Kroz usporedbu vrijednosti funkcije distribucije slučajnog vektora po točkama definirali smo ortantni uređaj, a pozitivnu zavisnost opisali i stohastičkim uređajem. U kontekstu ovog uređaja se jačina pozitivne zavisnosti po komponentama slučajnog vektora X definira kao očekivanje $\mathbb{E}[f(X)]$, gdje je funkcija f takva da očekivanje postoji. U kontekstu ovog rada to očekivanje se interpretira kao mjera rizika u smislu uređaja, odnosno za vektore rizika X i Y možemo reći da je Y rizičniji od X ako Y ima veće očekivanje. Restrikcijom klase funkcija f na Δ-monotone te supermodularne definirali smo uređaje generirane klasom funckija, Δ-monoton i supermodularni uređaj. Uređaji definirani na ovaj način su uređaji zavisnosti. U praksi je lakše provjeriti pripada li funckija definiranim klasama te na taj način usporediti rizik vektora rizika, odnosno portfelja.
Drugi način diskusije rizičnosti vektora rizika je konveksnost marginalnih distribucija. Restrikcijom klase funkcija f na konveksne funckije definirali smo konveksni uređaj, analogno za rastuće konveksne funkcije definirali smo i rastući konveksni uređaj. Ako konveksne uređaje restringiramo na vektore rizika u istoj Fréchetovoj klasi, komonotoni vektor je najrizičniji vektor u smislu konveksnog uređaja. Diskusijom rizičnosti funkcijskih modela pokazano je da je usmjereni konveksni uređaj, generiran klasom usmjerenih konveksnih funkcija koje su supermodularne i konveksne po komponentama, dobro definiran i primijenjiv u širokoj klasi modela. Poopćenjem funkcijskih modela na modele s multivarijatnim marginalima pokazano je da, za razliku od modela s jednodimenzionalnim marginalima, ne postoji jedinstven vektor koji generira najveći rizik.

Summary

Dependence ordering $\prec$ for risk vectors allows us to infer conclusion of the type $X \prec Y$. Considering risk vectors in $\mathbb{R}^2$ dependence ordering is consistent with correlation coefficients, Pearson's ϱ_p, Spearman's ϱ_s and Kendall's τ. The main notion of this paper is to define and discuss two different ways of comparing risk vectors and portfolios.

The first one is increase of positive dependence, risk vector Y bears more risk than risk vector X if Y is stronger positive dependent than X. We will describe positive dependence of risk vectors within the same Fréchet class, risk vectors that have identical marginals. There are several dependence orderings. The first defined was the orthant ordering which is defined as comparison of distribution functions by points. Considering the stochastic integral ordering the positive dependence is described as expectation of risk vector X, $\mathbb{E}[f(X)]$, for function f such that expectations exists. In this paper the defined expectation is comparable to risk measure since if expectation of risk vector X is less that Y, risk vector Y bears more risk than X. By defining Δ-monotonic and supermodular functions we introduce corresponding orderings, Δ-monotonic and supermodular ordering, which are generated by class of functions. Ordering defined by class of functions are dependence orderings. In practice it relatively easy to verify properties of functions defined in this way and consequently compare risk vectors and portfolios in terms of positive dependence.

The second one is convex increase of marginals. By defining class of convex functions we introduced convex ordering, similarly we define increasing convex ordering. If we restrict risk vectors to the same Fréchet class then comonotonic vector is the worst case joint portfolio, generates the greatest risk. By discussing functional models we note that directionally convex ordering, defined by class of directionally convex functions which are supermodular and convex in each component, as comparison result concerns a large class of models. When considering models with multivariate marginals we conclude that there is not any general worst case vector for portfolio, like there is with models with one-dimensional marginals.

Životopis

Zovem se Matija Geštakovski i rođen sam u Zagrebu, 17. studenoga 1993. godine. Nakon završene Osnovne škole Novo Brestje upisao sam matematički smjer u XV. gimnaziji u Zagrebu. Godine 2012. upisao sam preddiplomski sveučilišni studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Preddiplomski studij završavam 2017. godine i stječem titulu sveučilišnog prvostupnika matematike. Iste godine upisujem diplomski studij Financijska i poslovna matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu.