Dinamika Navier-Stokesove jednadžbe

Martinčić, Tijana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Tijana Martinčić

DINAMIKA NAVIER-STOKESOVE JEDNADŽBE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc.
Siniša Slijepčević

Zagreb, rujan, 2021

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj rad posvećujem roditeljima. Ocu koji koji je bio bezuvjetna podrška, i majci koja bi bila najsretnija da me vidi kako ga držim u rukama.

Sadržaj

Uvod

Navier-Stokesove jednadžbe proučavaju gibanje viskoznih fluida. Od velike su važnosti jer je njihova primjena široka. Modeliraju vrijeme, krvotok, morske struje, strujanje zraka oko krila motora,.. Pokrivaju probleme inženjerske, pa sve do znanstvene prirode. Upravo je zato zanimljivo da je i nakon 150 godina proučavanja matematička teorija Navier Stokesovih jednadžbi i dalje nepotpuna. Unatoč širokoj primjeni, globalno postojanje i jedinstvenost rješenja je i dalje upitno. U dimenziji 2 matematička teorija je potpuna. U dimenziji 3 javljaju se problemi. I dan danas nije dokazano da glatko rješenje uvijek postoji. Taj je problem poznat kao " Navier–Stokes existence and smoothness problem".
U ovom radu prvo definiramo funkcijske prostore na kojima ćemo proučavati Navier-Stokesove jednadžbe. Srce teorije parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, pa i proučavanja polaznog problema su Soboljevi prostori.
Drugo i treće poglavlje baziraju se na stvaranju pogodne okoline, i uvođenju matematičkih alata za teorijsko proučavanje. Osim što se uvode rubni i početni uvjeti odgovarajući za inocijalno-rubni problem, definira se energija, enstrofija te energetska jednakost. Kruna poglavlja je izvođenje slabe formulacije problema.
Kod Navier-Stokesovih jednadžbi imamo međudjelovanje inercijskih i viskoznih sila. Kad jedan od navedenih članova dominira, drugi je zanemariv. Na taj način dolazimo do pojednostavljenih sustava, kojima je lakše pronaći rješenje. Zbog kompleksnosti problema, to je jedan od načina za proučavanje Navier-Stokesovih jednadžbi.
Za kraj, proučavamo rezultate o jedinstvenosti i egzistenciji rješenja. U dvije dimenzije rješenja postoje i jedinstvena su. U tri dimenzije slaba rješenja postoje, ali nisu jednistvena. S druge strane, za jaka rješenja imamo egzistenciji i jednostvenost, no samo na konačnim vremenskim intervalima.

Poglavlje 1

Navier Stokesove jednadžbe

Mehanika kontinuuma proučava gibanja i ravnoteže plinova, tekućina i krutih tijela. Bavi se makroskopskim svojstvima koja opisuju svakodnevna opažanja. Ovaj će se rad temeljiti na proučavanju fluida. Fluid, poput vode ili zraka, tvar je koja se lako kreće i mijenja oblik.
Navier–Stokesove jednadžbe opisuju gibanje inkompresibilnog, homogenog, Newtonovskog fluida. Fluid je inkompresibilan ako mu se gustoća ne mjenja pri toku, dok homogenost znaći da je gustoća konstantna. Kod Newtonovskog fluida viskoznost ovisi o temperaturi i tlaku, a ne o sili koja djeluje na njega. To je fluid koji nastavlja svoj tok bez obzira na silu primjenjenu na njega.

1.1 Izvod Navier Stokesove jednadžbe

Navier Stokesove jednadžbe izvedene su iz osnovnih principa mehanike kontinuuma: očuvanje mase, očuvanje energije i očuvanja količine gibanja. Očuvanje mase izraženo je jednadžbom kontinuiteta:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \tag{1.1}$$

Zakon očuvanja količine gibanja, zapisan po koordinatama, izražen je jednadžbom

$$\rho \gamma_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i, \quad i = 1, 2, 3 \tag{1.2}$$

gdje $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ predstavlja vektor akceleracije, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ Cauchyjev tenzor naprezanja, a $\mathbf{f} = (f_1, f_2, f_3)$ predstavlja silu primijenjenu na fluid. Zapišimo vektor akceleracije $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x}, t)$ pomoću materijalne derivacije:

$$\boldsymbol{\gamma} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \tag{1.3}$$

ili po komponentama:

$$\gamma_i = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad i = 1, 2, 3 \tag{1.4}$$

Materijalna derivacija izražava brzinu promjene fizikalnog svojstva čestice fluida. Drugim riječima promjenu koju bi osjetio promatrač koji se giba zajedno s česticom.
Uvrstimo (1.3) u lijevu stranu jednadžbe (1.2):

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \right) = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i, \quad i = 1, 2, 3 \tag{1.5}$$

Ovom transformacijom nakon množenja dobijemo nelinearni član $\rho(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$, takozvani inercijski član.
Promatramo Newtonov fluid, iz čega slijedi da je Cauchyjev tenzor naprezanja linearan, dan formulom:

$$\sigma_{ij} = \mu \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\} + (\lambda \mathrm{div}\mathbf{u} - p)\delta_{ij} \tag{1.6}$$

gdje $p = p(\mathbf{x}, t)$ predstavlja tlak a λ i μ su konstante. δ_{ij} je Kroneckerov simbol, koji definiramo na način:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \tag{1.7}$$

Zbog termodinamičkih razloga vrijedi $\mu > 0$ i $3\lambda + 2\mu \geq 0$. Izraz $3\lambda + 2\mu$ zove se koeficjent dilatacije viskoznosti. Uvrštavanjem (1.6) u (1.5) dobivamo:

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \right) = \mu \Delta \mathbf{u} + (\mu + \lambda)\nabla \mathrm{div}\mathbf{u} - \nabla p + \mathbf{f} \tag{1.8}$$

Sustav jednadžbi sastavljen od jednadžbe (1.1) i (1.8):

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \mathbf{u}) = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \right) = \mu \Delta \mathbf{u} + (\mu + \lambda)\nabla \mathrm{div}\mathbf{u} - \nabla p + \mathbf{f} \end{cases} \tag{1.9}$$

opisuje kretanje kompresibilnog Newtonovskog fluida.
Ako pretpostavimo da je fluid inkompresibilan i homogen, tada je gustoća ρ konstantna u prostoru i vremenu, tj vrijedi $\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0$. Tada jednadžba kontinuiteta dobiva oblik:

$$\mathrm{div}\mathbf{u} = 0 \tag{1.10}$$

takozvani "divegrnece free condition". Druga, često korištena notacija je $\nabla \cdot \mathbf{u}$.
Zbog uvjeta da je gustoća konstantna, mozemo jednadžbu (1.8) podjeliti sa ρ_0:

$$\rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} \right) = \mu \Delta \mathbf{u} - \nabla p + \mathbf{f} \quad \Big/ : \rho_0 \tag{1.11}$$

Tada imamo:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \frac{\mu}{\rho_0}\Delta \mathbf{u} - \frac{\nabla p}{\rho_0} + \frac{\mathbf{f}}{\rho_0} \tag{1.12}$$

Uvedemo li kinematičku viskoznost $\nu := \frac{\mu}{\rho_0}$,te zamjenimo tlak i volumnu silu s kinetičkim tlakom $\frac{p}{\rho_0}$ i gustoćom masene sile $\frac{f}{\rho_0}$ dobivamo *Navier-Stokesove jednadžbe za viskozne, inkompresibilne, homogene fluide*:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \tag{1.13}$$

Za razradu ovog poglavlja koristili smo [2].

1.2 Bezdimenzionalni oblik

U mehanici fluida tehnika pretvaranja Navier-Stokesovih jednadžbi u bezdimenzionalni oblik može olakšati analizu problema i smanjiti broj slobodnih parametara. Bezdimenzionalne Navier–Stokesove jednadžbe korisne su za sustave koji imaju slične fizičke pretpostavke. Pomaže u boljem razumijevanju fizičke situacije, s promjenama u dimenzijama parametara koji su uključeni u jednadžbu. Zanemarivanje manjih pojmova u odnosu na veće omogućuje pojednostavljenje situacije.

Skaliranje Navier-Stokesove jednadžbe odnosi se na postupak odabira odgovarajuće prostorne ljestvice za određenu vrstu toka. Uvedimo referentnu duljinu L_*, referentno vrijeme T_*, te iduće supstitucije varijabli:

$$\mathbf{x} = L_*\mathbf{x}', \quad t = T_*t', \quad p = P_*p', \quad \mathbf{u} = U_*\mathbf{u}', \quad \mathbf{f} = \frac{L_*}{T_*^2}\mathbf{f}' \tag{1.14}$$

gdje je $P_* = U_*^2$ referentni tlak, a $U_* = \frac{L_*}{T_*}$ referentna brzina. Uvrstimo uvedene supstitucije u Navier-Stokesovu jednadžbu (1.13):

$$\frac{\partial(U_*\mathbf{u}')}{\partial(T_*t')} - \nu\Delta(U_*\mathbf{u}') + (U_*\mathbf{u}' \cdot \nabla)U_*\mathbf{u}' + \nabla(P_*p') = \frac{L_*}{T_*^2}\mathbf{f}' \tag{1.15}$$

Nakon sređivanja dobivene jednakosti imamo:

$$\frac{L_*^2}{\nu T_*}\frac{\partial(\mathbf{u}')}{\partial(t')} - \Delta(\mathbf{u}') + \frac{U_*L_*}{\nu}(\mathbf{u}' \cdot \nabla)\mathbf{u}' + \frac{P_*L_*}{\nu U_*}\nabla(p') = \frac{L_*^3}{T_*^2\nu U_*}\mathbf{f}' \tag{1.16}$$

Dobivena konstanta $\frac{U_*L_*}{\nu}$ zove se *Reynoldsov broj*, u oznaci *Re*.

$$\frac{L_*^2}{\nu T_*}\frac{\partial(\mathbf{u}')}{\partial(t')} - \Delta(\mathbf{u}') + \mathrm{Re}(\mathbf{u}' \cdot \nabla)\mathbf{u}' + \frac{P_*L_*}{\nu U_*}\nabla(p') = \frac{L_*^3}{T_*^2\nu U_*}\mathbf{f}' \tag{1.17}$$

Reynoldsov broj pomaže predvidjeti obrasce protoka u različitim situacijama protoka fluida. Kod niskih Reynoldsovih brojeva, protocima obično dominira laminarni protok ($\leq\approx$ 2300), dok kod visokih Reynoldsovih brojeva protoci imaju tendenciju da budu turbulentni ($\geq\approx$ 3000). Tokove sa sličnim Reynoldsovim brojem možemo smatrati sličnima. Njegova vrijednost ovisi o odabiru prostorne ljestvice, tj referentne duljine.
Daljnjim sređivanjem jednadžbe, množenjem izraza s $\frac{1}{\mathrm{Re}}$, i zamjenom $P_* = U_*^2$ i $U_* = \frac{L_*}{T_*}$ imamo *Bezdimenzionalni oblik Navier-Stokesove jednadžbe*:

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t'} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla)\mathbf{u}' + \nabla p' = \mathbf{f}' \tag{1.18}$$

Primjetino da je jednadžba jednaka početnoj, samo umjesto konstante ν imamo $\frac{1}{Re}$.
Postavljanjem $\mathrm{Re} = +\infty$ imamo slučaj neviskoznog fluida. U tom je slučaju "divergence free" uvjet sačuvan, ali se jednadžba linearnog momenta mijenja. Kada se zanemaruju viskozne sile, kao što je slučaj neviskoznog toka, Navier-Stokesova jednadžba može se pojednostaviti u oblik poznat kao Eulerova jednadžba:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \tag{1.19}$$

Reynoldsov broj neviskoznog protoka približava se beskonačnosti kako se viskoznost približava nuli. Ova pojednostavljena jednadžba primjenjiva je na neviskozan protok, kao i na protok male viskoznosti gdje je Reynoldsov broj mnogo veći od jedan, $\mathrm{Re} \gg 1$. Korištenjem Eulerove jednadžbe mnogi problemi s dinamikom fluida koji uključuju nisku viskoznost lako se rješavaju, međutim, pretpostavljena zanemariva viskoznost više ne vrijedi u području fluida u blizini čvrste granice. Neki primjeri neviskoznog fluida su protok oko krila aviona ili oceanske struje.

1.3 Funkcijski prostori

Matematička teorija Navier-Stokesove jednadžbe bazira se na funkcijskim prostorima. Funkcijski prostor je skup funkcija između dva fiksna skupa. U ovom poglavlju dajemo pregled potrebnih rezultata iz funkcionalne analize i teorije parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, te gradimo temelje za okolinu pogodnu za proučavanje s matematičke, ali i fizčke strane problema.
Prilikom razrade teorije prostora glatkih funkcija, L^p prostora i prostora Soboljeva koristili smo [3] te [2].

Prostori glatkih funkcija

Za početak, navedimo neke glavne definicije i tvrdnje koje su nam potrebne kako bi razumjeli pojam distribucija i konvergencije u smislu distribucija.
Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dakle, gledamo funkcije kojima je domena otvoren skup Ω. Tada je

$$C(\Omega) = \{\ u : \Omega \to \mathbb{R}\ :\ u \text{ neprekidna }\} \tag{1.20}$$

prostor neprekidnih funkcija u odnosu na operacije zbrajanja i množenja skalarom. Nadalje definiramo,

$$C^k(\Omega) = \{\ u : \Omega \to \mathbb{R}\ :\ \partial^\alpha u \in C(\Omega) \text{ za } |\alpha| \le k,\ k \in \mathbb{N}\} \tag{1.21}$$

prostor k-puta neprekidno diferencijabilnih funkcija.

Koristeći prethodnu definiciju prostora $C^k(\Omega)$, dolazimo do definicije **prostora glatkih funkcija** u oznaci C^∞:

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(\Omega) \tag{1.22}$$

Definicija 1.3.1 (Nosač). *Neka je $u \in C(\Omega)$. Skup*

$$supp\ u := Cl\,\{x \in \Omega :\ u(x) \neq 0\} \tag{1.23}$$

*zove se **nosač** funkcije u.*

Nosač je dakle komplement najvećeg otvorenog skupa na kojem je funkcija jednaka nuli. Ekvivalentno je reći kako je nosač najmanji zatvoren skup u domeni funkcije na kojemu funkcija poprima vrijednosti različite od nule.
Uvedimo jos, radi lakšeg zapisa, skup $K(\Omega)$, familiju svih kompaktnih skupova sadržanih u Ω. Za $m \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ definiramo skupove funkcija s kompaktnim nosačem:

$$C_c^m(\Omega) := \{u \in C^m(\Omega) :\ \text{supp } u \in K(\Omega)\} \tag{1.24}$$

Lako se provjeri da je dobiveni prostor zapravo vektorski prostor.

Definicija 1.3.2 (Test funkcije). *Neka je $u \in C^\infty$.Prostor*

$$C_c^\infty(\Omega) = D(\Omega) := \{u \in C^\infty(\Omega) :\ supp\ u \in K(\Omega)\} \tag{1.25}$$

*zove se **prostor test funkcija** na Ω.*

Prostor funkcija C_c^∞ zovemo i *prostor kompaktno uloženih funkcija*.
Korištenjem teorije razvijene na prostoru test funkcija dobivamo alternativan pristup rješavanju parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Najvažniji alat dobiven uvođenjem ovih prostora je pojam distribucije i konvergencije u smislu distribucija.

Definicija 1.3.3. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ otvoren. Za linearan funkcional $u : \mathbb{C}_c^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$ kažemo da je* ***distribucija*** *ako*

$$(\forall K \in K(\Omega))(\exists C > 0, m \in \mathbb{N}) \;\; \varphi \in C_K^\infty(\Omega) \implies |\langle u, \varphi\rangle| \leq C \max_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_\infty \tag{1.26}$$

Distribucija je zapravo svaki neprekinut lienaran funkcional u na prostoru $D(\Omega)$, takav da za svaki niz $\varphi_n \to \varphi_0$ u $D(\Omega)$ vrijedi:

$$u(\varphi_n) \to u(\varphi_0) \tag{1.27}$$

Prostor distribucija označavamo s $D'(\Omega)$.

Definicija 1.3.4. *Za niz distrubucija $u_n \in D'(\Omega)$ kažemo da* ***konvergira*** *k $u \in D'(\Omega)$ ako vrijedi:*

$$(\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega)) \, \langle u_n, \varphi\rangle \to \langle u, \varphi\rangle \tag{1.28}$$

U tom slučaju pišemo $u_n \xrightarrow{D'} u$.

Napomena 1.3.5. *Primjetimo da smo koristili dva različita zapisa za istu stvar, tj $u(\varphi) = \langle u, \varphi\rangle$.*

Lebesgueovi prostori L^p

Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ili općenitije otvoren, povezan i izmjeriv skup. Za $1 \leq p < +\infty$ definiramo prostor $L^p(\Omega)$ kao:

Definicija 1.3.6. *Za $1 \leq p < +\infty$ definiramo prostor $L^p(\Omega)$ kao*

$$L^p(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} : \; u \text{ izmjeriva}, \; \int_\Omega |u|^p dx < \infty\} \tag{1.29}$$

Pripadna norma kojom je prostor razapet dana je sa:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(\boldsymbol{x})|^p \, d\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{p}} \tag{1.30}$$

To je dakle prostor svih realnih izmjerivih funkcija definiranih na Ω čija je apsolutna vrijednost na p-tu potenciju integrabilna.
Definiciju $L^p(\Omega)$ prostora proširujemo i na granični slučaj, tj. za $p = \infty$. Prostor $L^\infty(\Omega)$ je skup svih izmjerivih funkcija koje su esencijalno ograničene. Drugim riječima, to su funkcije $u = u(\mathbf{x})$ za koje postoji konstanta $M \in \mathbb{R}$ tako da vrijedi $u(\mathbf{X}) \leq M$ za gotovo svaki $x \in \Omega$ (osim za skupove mjere 0). Definiramo funkciju $\|\cdot\|_\infty : L^\infty \to \mathbb{R}$ s

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \inf\{M : |u| \leq M \; g.s\} \tag{1.31}$$

Dakle, najmanji takav M predstavlja normu prostora L^∞.
Prvi prirodni funkcijski prostor bitan za proučavanje Navier Stokesove jednadžbe je $L^2(\Omega)$. Prostor kvadratno integrabilnih funkcija na Ω. Također, uvodimo i analogni prostor $L^2(\Omega)^3$, prostor kvadratno integrabilnih vektoskih polja na Ω. Vektorsko polje je funkcija koja svakoj točki prostora pridružuje vektor.
Prostor $L^2(\Omega)$, u sklarnom slučaju, razapet je skalarnim produktom

$$(u, v) = \int_\Omega u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \;\; u, v \in L^2(\Omega) \tag{1.32}$$

Dok u slučaju vektorskih polja analogno vrijedi:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \;\; \mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 \tag{1.33}$$

U usporedbi sa ostalim Lebesguevim prostorima, $L^2(\Omega)$ ($L^2(\Omega)^3$) je jedini funkcijski prostor čija je norma inducirana skalarnim produktom. Dakle, navedeni skalarni produkti induciraju odgovarajuće norme:

$$|u| = \left(\int_\Omega |u(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \mathbf{x} \in \Omega, \;\; u \in L^2(\Omega) \tag{1.34}$$

za skalarni slučaj, i:

$$|\mathbf{u}| = \left(\int_\Omega |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \mathbf{x} \in \Omega, \;\; \mathbf{u} \in L^2(\Omega)^3 \tag{1.35}$$

za slučaj vektorskog polja.
Za skalarni produkt u prostoru $L^2(\Omega)$ i odgovarajuću normu, vrijedi jedna od najvažnijih nejednakosti u matematici:

$$\begin{gathered} |(u, v)| = \left| \int_\Omega u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \right| \leq \int_\Omega |u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})|\; d\mathbf{x} \\ = \int_\Omega |u(\mathbf{x})|\,|v(\mathbf{x})|\; d\mathbf{x} = \int_\Omega |u(\mathbf{x})|\; d\mathbf{x} \int_\Omega |v(\mathbf{x})|\; d\mathbf{x} \leq \left(\int_\Omega |u(\mathbf{x})|^2\; d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v(\mathbf{x})|^2\; d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}} \\ = |u||v|, \;\; \forall u, v \in L^2(\Omega) \end{gathered} \tag{1.36}$$

Dobivena nejednakost:

$$|(u, v)| \leq |u||v|, \;\; \forall u, v \in L^2(\Omega) \tag{1.37}$$

zove se *Cauchy Schwarz nejednakost*.
Analogno vrijedi Cauchy Schwarz nejednakost i za prostor $L^2(\Omega)^3$:

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq |\mathbf{u}||\mathbf{v}|, \;\; \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in L^2(\Omega)^3 \tag{1.38}$$

Definicija 1.3.7. *Kažemo da je normiran prostor potpun ako svaki Cauchyjev niz u njemu konvergira. Potpun unitaran prostor se naziva* ***Hilbertov prostor****.*

$L^2(\Omega)$ je Hilbertov prostor s definiranom normom (1.34) i skalarnim produktom (1.32). Za prostor $L^2(\Omega)$ vrijedi karakterizacija:

Vrijedi da je brzina toka $u \in L^2(\Omega)$ ako i samo ako postoji niz glatkih funkcija u_n, kompaktno uloženih u Ω, takvh da $|u_n|$ ostaje ograničen, i konvergira prema u, u smislu distribucija, kako $n \to \infty$.
Ova karakterizacija preuzeta je iz [2], stranica 15.
Slična karakterizacija vrijedi za prostor $L^2(\Omega)^3$, jedina razlika je što umjesto apsolutne vrijednosti od u_n promatramo $e(u_n)$, gdje e predstavlja kinetičku energiju toka.

Definicija 1.3.8. *Neka je zadana brzina vektorskog polja $\boldsymbol{u} : \Omega \to \mathbb{R}^3$.*
Kinetička energija toka *definirana je kao:*

$$e(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})|^2 dx = \frac{1}{2}|\boldsymbol{u}|^2 \tag{1.39}$$

uz pretpostavku da je gustoća normalizirana.

Uz ovako definiranu kinetičku energiju, za prostor $L^2(\Omega)^3$ vrijedi karakterizacija:

Vrijedi da je brzina vektorskog polja $\boldsymbol{u} \in L^2(\Omega)$ ako i samo ako postoji niz glatkih funkcija u_n, kompaktno uloženih u Ω, takvh da $e(u_n)$ ostaje ograničen i konvergira prema u, u smislu distribucija, kako $n \to \infty$.
Ova karakterizacija preuzeta je iz [2], stranica 16.

Napomena 1.3.9. *Ako Ω nije ograničen skup, treba dodati zahtjev da vrijedi da je $e(u_n)$ ograničen, $\forall n$.*

Važnost prostora L^2 leži u tome jer većina prostora u kojima ćemo proučavati Navier-Stokesovu jednadžbu proizlazi upravo iz njega. Nama najbitnija je familija *prostora Soboljevih*.

Soboljevi prostori

U ovom poglavlju dolazimo do Soboljevih prostora, u oznaci $W^{m,p}(\Omega)$. Prostor Soboljeva je skup svih funkcija čije se sve derivacije (do m-tog reda) nalaze u prostoru L^p. U većini primjena pojavljuju se prostori vezani uz $L^2(\Omega)$, te ćemo zato njima dati najviše važnosti
Prije definicije Soboljevih prostora, potrebno je definirati *slabu derivaciju*, *slabu parcijalnu derivaciju* i *lokalno integrabilne prostore*.

Definicija 1.3.10 (Lokalno integrabilna funkcija)**.** *Neka je funkcija $u : \Omega \to \mathbb{C}$ takva da vrijedi:*

$$\int_\Omega |u\phi|\, dx < \infty, \quad \forall \phi \in C_c^\infty \tag{1.40}$$

onda je ona lokalno integrabilna. Prostor lokalno integrabilnih funkcija označava se sa $L^1_{loc}(\Omega)$.

Definicija 1.3.11 (Slaba derivacija)**.** *Neka je $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ proizvoljna funkcija. Kažemo da je $v_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ slaba derivacija od u po x_i ako vrijedi*

$$\int_\Omega u\partial_i\phi\, dx = -\int_\Omega v_i\phi\, dx, \quad \forall \phi \in C_c^\infty \tag{1.41}$$

i pišemo $\partial_i f$.

Definicija 1.3.12 (Slaba parcijalna derivacija)**.** *Za funkciju $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ kažemo da ima slabu parcijalnu derivaciju $\partial^\alpha u$ ako postoji funkcija $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tako da vrijedi:*

$$\int_\Omega u\partial^\alpha\phi\, dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\phi\, dx, \quad \forall \phi \in C_c^\infty \tag{1.42}$$

i pišemo $v = \partial^\alpha u$.

Nakon uvodnih definicija, možemo definirati Soboljeve prostore.

Definicija 1.3.13 (Prostor Soboljeva)**.** *Za $1 \leq p < \infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ je prostor svih $L^p(\Omega)$ funkcija čije su slabe derivacije isto u L^p, tj*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega), [\alpha] \leq m\} \tag{1.43}$$

gdje je $\alpha = (\alpha_1, .., \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ multiindeks, $[\alpha] = \alpha_1 + ...\alpha_d$ a D^α je skraćena oznaka za:

$$\frac{\partial^{\alpha_1+...+\alpha_d}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\cdots\partial_{x_d}^{\alpha_d}}$$

Ako odaberemo $p = 2$, koristimo oznaku $W^{m,2}(\Omega)$=$H^m(\Omega)$:

$$H^m(\Omega) = \left\{u \in L^2(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), [\alpha] \leq m\right\} \tag{1.44}$$

$H^m(\Omega)$ ima definiran unutarnji produkt i normu:

$$\begin{aligned} ((u,v))_{H^m(\Omega)} &= \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{L^{2(m-k)}}\sum_{[\alpha]=k}\int_\Omega D^\alpha u(\mathbf{x})D^\alpha v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \\ \|u\|_{H^m(\Omega)} &= \{((u,u))_{H^m(\Omega)}\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{1.45}$$

Prostor $H^m(\Omega)$ je Soboljev prostor reda m, te za njega vrijedi iduća karakterizacija:

Vrijedi da je brzina toka $u \in H^m(\Omega)$ ako i samo ako postoji niz glatkih funkcija u_j, kompaktno uloženih u Ω, takvh da $\|u_j\|_{H^m(\Omega)}$ ostaje ograničen, i konvergira prema u, u smislu distribucija, kako $j \to \infty$.

Detalji ove karakterizacije nalaze se u [2], stranica 22.

Nadalje, za $m = 1$ dolazimo do nama najbitnijeg Soboljevog prostora, na kojem ćemo izgraditi čitavu analizu problema. $H^1(\Omega)$ je Hilbertov prostor sa unutarnjim produktom i normom:

$$
\begin{aligned}
((u,v))_1 &= \frac{1}{L^2}\int_\Omega u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})\,\mathrm{dx} + \sum_{j=1}^{3}\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\
\|u\|_1 &= |((u,u))|^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
\tag{1.46}
$$

Analogno Lebesgueovom slučaju, uvodimo prostor $H^1(\Omega)^3$ u slučaju vektorskih polja. $H^1(\Omega)^3$ je također Hilbertov prostor s unutarnjim produktom i normom:

$$
\begin{aligned}
((\mathbf{u},\mathbf{v}))_1 &= \frac{1}{L^2}\int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x})\,\mathrm{dx} + \sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}\mathbf{x} \\
\|\mathbf{u}\|_1 &= |((\mathbf{u},\mathbf{u}))|^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
\tag{1.47}
$$

gdje je L na primjer duljina dijametra od Ω.

Kako bi mogli izreći karakterizaciju prostora $H^1(\Omega)^3$ potrebna nam je energija i gustoća vrtnje, takozvana enstrofija. Dakle, uvodimo *enstrofiju* brzine fluida $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$:

$$
E(\mathbf{u}) = \sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right|^2 d\mathbf{x} \tag{1.48}
$$

Vrijedi iduća karakterizacija:

Neka je Ω ograničen skup, i niz u_n takav da sadrži jedan (ili više) podnizova koji teže (u smislu distribucija) ka vektorskoj funkciji $\boldsymbol{u}$. Kažemo da je vektorska funkcija $\boldsymbol{u} \in H^1(\Omega)^3$ ako i samo ako vrijedi $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3) \in L^2(\Omega)^3$ i vrijedi

$$
E(\boldsymbol{u}) \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} E(\boldsymbol{u}_n) \tag{1.49}
$$

Detalji ove karakterizacije nalaze se u [2], stranica 16.

Možemo reći da se prostor $L^2(\Omega)^3$ sastoji od svih vektorskih polja $\mathbf{u}$ s konačnom kinetičkom energijom, dok prostor $H^1(\Omega)^3$ sadržava sva vektorska polja $\mathbf{u}$ koji imaju konačnu enstrofiju.

Konačno smo razvili okolinu na kojoj ćemo promatrati Navier stokesovu jednadžbu. Svi prostori koje ćemo promatrati proizlaze iz prostora konačne kinetičke energije $L^2(\Omega)^3$ i prostora konačne enstrofije $H^1(\Omega)^3$. Isto vrijedi i za dva centralna prostora koja ćemo promatrati kroz ovaj rad, V i H.

Napomena 1.3.14. *Prostor V sastoji se od svih limesa (u smislu distribucija) konvergentih nizova glatkih vektorski polja u_n koji zadovoljavaju rubne uvjete problema i čija enstrofija ostaje ograničena, tj $E(u_n) \leq cost < \infty$*

Slično vrijedi i za prostor H:

Napomena 1.3.15. *Prostor H sastoji se od svih limesa (u smislu distribucija) konvergentih nizova glatkih vektorski polja u_n koji zadovoljavaju rubne uvjete problema i čija kinetička energija ostaje ograničena, tj $e(u_n) \leq cost < \infty$*

Soboljeve nejednakosti

U ovom poglavlju navesti ćemo najbitnije nejednakosti korištene u proučavanju parcijalnih diferencijalnij jednadžbi. Izreći ćemo, i dokazati nejednakost *Ladyzhenskaye* i *Poincare-ovu* nejednakost. Dokazi će biti sprovedeni u prostoru $\mathbb{R}^2$, dok je za $\mathbb{R}^3$ situacija skoro pa analogna. Također, spomenuti ćemo još neke bitnije nejednakosti, no za njih ćemo izostaviti dokaze.

Teorem 1.3.16. *Za glatku, kompaktno uloženu sklarnu funkciju $u \in \mathbb{R}^2$ vrijedi*

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u(\boldsymbol{x})|^4 \, d\boldsymbol{x} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} |u(\boldsymbol{x})|^2 \, d\boldsymbol{x} \right) \left(\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(\boldsymbol{x})|^2 \, d\boldsymbol{x} \right) \tag{1.50}$$

U prostoru $\mathbb{R}^3$ vrijedi:

$$\int_{\mathbb{R}^3} |u(\boldsymbol{x})|^4 \, d\boldsymbol{x} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u(\boldsymbol{x})|^2 \, d\boldsymbol{x} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(\boldsymbol{x})|^2 \, d\boldsymbol{x} \right)^{\frac{3}{2}} \tag{1.51}$$

Prije dokaza izreći ćemo *Agmonovu* nejednakost i *Cauchy-Schwartz* nejednakost u $\mathbb{R}$ koju ćemo koristiti u dokazu:

Teorem 1.3.17 (Agmonova nejednakost)**.** *Za glatku funkciju $g \in \mathbb{R}$, s kompaktnim nosačem u $\mathbb{R}$ vrijedi:*

$$|g(x)|^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |g(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g'(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{1.52}$$

Dokaz. Za dokaz teorema pogledati [5], tvrdnja (4.10), stranica 18. □

Teorem 1.3.18 (Cauchy-Schwartz nejednakost)**.** *Neka su $f, g \in L^2(\Omega)$, tada je $fg \in L^1(\Omega)$ i vrijedi:*

$$\int_\Omega u(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x} \leq \left(\int_\Omega |u(\boldsymbol{x})|^2\, d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v(\boldsymbol{x})|^2\, d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.53}$$

Dokaz. Za dokaz teorema pogledati [1], tvrdnja B.2.*e*, stranice 622, 623.
Fiksirati $p = 2$. □

Kasnije ćemo iskazati Hölderovu nejednakost, koja je zapravo generalizacija Cauchy-Schwartzove nejednakosti.
Sada imamo spreman teren za dokaz nejednakosti Ladyzhenskaye.

Dokaz. Za dokaz nejednakosti Ladyzhenskaye koristiti ćemo Agmanovu nejednakost dva put. Prvo integriramo po prostornoj varijabli x_1, dok ćemo x_2 fiksirati kao konstantu, i obrnuto.

$$u(x_1, x_2)^4 = u(x_1, x_2)^2 u(x_1, x_2)^2$$

$$\leq \left[\left(\int_\mathbb{R} |u(\xi_1, x_2)|^2\, d\xi_1\right)\left(\int_\mathbb{R} |u'(\xi_1, x_2)|^2\, d\xi_1\right)\left(\int_\mathbb{R} |u(x_1, \xi_2)|^2\, d\xi_2\right)\left(\int_\mathbb{R} |u'(x_1, \xi_2)|^2\, d\xi_2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

Integriranjem po prostornim varijablama slijedi:

$$\int_\mathbb{R}\int_\mathbb{R} u(x_1, x_2)^4\, dx_1 dx_2$$

$$\leq \int_\mathbb{R}\left(\int_\mathbb{R} |u(\xi_1, x_2)|^2\, d\xi_1 \int_\mathbb{R} |u'(\xi_1, x_2)|^2\, d\xi_1\right)^{\frac{1}{2}} dx_2 \int_\mathbb{R}\left(\int_\mathbb{R} |u(x_1, \xi_2)|^2\, d\xi_2 \int_\mathbb{R} |u'(x_1, \xi_2)|^2\, d\xi_2\right)^{\frac{1}{2}} dx_1$$

Korištenje Cauchy-Schwartzove nejednakosti nam daje:

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} u(x_1,x_2)^4\,dx_1dx_2 \leq$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\left(\int_{\mathbb{R}}|u(\xi_1,x_2)|^2\,d\xi_1\int_{\mathbb{R}}|u'(\xi_1,x_2)|^2\,d\xi_1\right)^{\frac{1}{2}}\right|^2 dx_2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\left(\int_{\mathbb{R}}|u(x_1,\xi_2)|^2\,d\xi_2\int_{\mathbb{R}}|u'(x_1,\xi_2)|^2\,d\xi_2\right)^{\frac{1}{2}}\right|^2 dx_1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|u(\xi_1,x_2)|^2\,d\xi_1\int_{\mathbb{R}}|u'(\xi_1,x_2)|^2\,d\xi_1\right)dx_2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|u(x_1,\xi_2)|^2\,d\xi_2\int_{\mathbb{R}}|u'(x_1,\xi_2)|^2\,d\xi_2\right)dx_1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \iint_{\mathbb{R}}|u(x_1,x_2)|^2\,dx_1dx_2\iint_{\mathbb{R}}|\nabla u(x_1,x_2)|^2\,dx_1dx_2$$

I time smo dokazali početnu tvrdnju. □

Dokaz nejednakosti u $\mathbb{R}^3$ je analogan.
Jos jedna važna nejednakost, koju ćemo potkrijepiti dokazom je Poincareova nejednakost.

Teorem 1.3.19 (Poincareova nejednakost)**.** *Neka je u glatka funkcija, $u \in C_c^\infty$ takva da iščezava izvan $\frac{-L}{2} < x_1, x_2 < \frac{L}{2}$, onda vrijedi:*

$$\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|u(x_1,x_2)|^2\,dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{2}} \leq L\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|\nabla u(x_1,x_2)|^2\,dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1.54}$$

Dokaz. Pomoćna tvrdnja koju ćemo koristiti u dokazu je ranije iskazana Agmanova nejednakost. Dakle, koristiti ćemo

$$|g(x)|^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}}|g(\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}}|g'(\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}},\quad \forall x\in\mathbb{R}$$

tako da fiksiramo x_2 kao konstantu.

$$u(x_1,x_2)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}}|u(\xi_1,x_2)|^2\,d\xi_1\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial u}{\partial\xi_1}(\xi_1,x_2)\right|^2\,d\xi_1\right)^{\frac{1}{2}}$$

Pošto desna strana ne ovisi o x_1, integriranjem cijele nejednakost po x_1 od $\frac{-L}{2}$ do $\frac{L}{2}$ izlazi konstanta L.

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{R}|u(x_1,x_2)|^2\,dx_1dx_2 \leq L\int_{\mathbb{R}}\left(|u(\xi_1,x_2)|^2\,d\xi_1\right)^{\frac{1}{2}}\int_{\mathbb{R}}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial \xi_1}(\xi_1,x_2)\right|^2\,d\xi_1\right)^{\frac{1}{2}}dx_2$$

Pošto u iščezava na $\frac{-L}{2} < x_1 < \frac{L}{2}$, to znači da je izvan tih granica 0, pa se ne mjenja vrijednost napišemo li $\int_{\mathbb{R}}$ ili $\int_{\frac{-L}{2}}^{\frac{L}{2}}$. Korištenjem Cauchy-Schwartz nejednakosti slijedi:

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{R}|u(x_1,x_2)|^2\,dx_1dx_2 \leq L\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\left|\int_{\mathbb{R}}|u(\xi_1,x_2)|^2\,d\xi_1\right|^{\frac{1}{2}}\right)^2\,dx_2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\left|\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial u}{\partial \xi_1}(\xi_1,x_2)\right|^2\,d\xi_1\right|^{\frac{1}{2}}\right)^2\,dx_2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= L\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|u(\xi_1,x_2)|^2\,d\xi_1\,dx_2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial u}{\partial \xi_1}(\xi_1,x_2)\right|^2\,d\xi_1\,dx_2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \begin{bmatrix}\text{zamjenom varijabli}\\ \xi_1 = x_1\end{bmatrix}$$
$$= L\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|u(x_1,x_2)|^2\,dx_1\,dx_2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2)\right|^2\,dx_1\,dx_2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Djeljenjem cijele nejednakosti s $\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|u(x_1,x_2)|^2\,dx_1\,dx_2\right)^{\frac{1}{2}}$ imamo:

$$\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|u(x_1,x_2)|^2\,dx_1\,dx_2\right)^{\frac{1}{2}} \leq L\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_1,x_2)\right|^2\,dx_1\,dx_2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ako ponovimo cijeli postupak s fiksiranom varijablom x_2, i zbrojimo dobiveno, dobivamo upravo traženu Poincareovu nejednakost:

$$\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|u(x_1,x_2)|^2\,dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{2}} \leq L\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|\nabla u(x_1,x_2)|^2\,dx_1dx_2\right)^{\frac{1}{2}}$$

□

Poincareova nejednakost u višim dimenzijama slično se dokaže.
U dimenziji 3 Poincareova nejednakost poprima oblik:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}}|u(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}} \leq L\left(\int_{\mathbb{R}^{\not{3}}}|\nabla u(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}}, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \tag{1.55}$$

Navesti ćemo još jednu bitnu nejednakost, koja je najčešće korištena kroz cijelo proučavanje teorije parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. To je *Hölderova nejednakost*:

Teorem 1.3.20 (Hölderova nejednakost)**.** *Neka su* $u \in L^p(\Omega)$*, i* $v \in L^{p'}(\Omega)$ *izmjerive funkcije, gdje je* $1 < p < \infty$*, a* p' *je takav da:*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

Tada vrijedi:

$$\int_\Omega u(\boldsymbol{x})v(\boldsymbol{x})\,d\boldsymbol{x} \leq \left(\int_\Omega |u(\boldsymbol{x})|^p\,d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |v(\boldsymbol{x})|^{p'}\,d\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{p'}} \tag{1.56}$$

Dokaz. Za dokaz teorema pogledati [1], tvrdnja B.2.*e*, stranice 622, 623. □

Poglavlje 2

Turbulencije

Strujanje je gibanje tekućina ili plinova. Dijeli se na laminarno i turbulentno. Laminarno strujanje je pravilno, te se svi slojevi fluida gibaju paralelno. Fluid se kod laminarnog strujanja giba sporo. Povećanjem brzine slojevi fluida se mješaju, i gibanje postaje turbulentno. Turbulentno strujanje je nepravilno. Karakterizira ga stvaranje vrtloga. Vrtlog je spiralno strujanje oko jedne točke ili osi. Zbog nepravilnosti gibanja turbulenciju je teško opisati, no turbulencija je potpuno opisana Navier Stokesovim jednadžbama.

2.1 Energija i enstrofija

Navier-Stokesove jednadžbe su parcijalne diferencijalne jednadžbe koje opisuju tok viskoznih, inkompresibilnih, homogenih fluida, a opisuje ih idući sustav jednadžbi:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \tag{2.1a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \tag{2.1b}$$

Uz pretpostavku da je gustoća ρ normalizirana, tj. da vrijedi $\rho = 1$, *kinetička energija* fluida određenog brzinom $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ koji zauzima domenu Ω je oblika:

$$e(\mathbf{u}) = \int_\Omega |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \tag{2.2}$$

dok smo *enstrofiju* zadali kao:

$$E(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{d} \int_\Omega |\nabla u_i(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \right|^2 \, d\mathbf{x} \tag{2.3}$$

za $d = 2$ ili 3, ovisno o dimenziji toka.
Neka je domena Ω cijeli prostor $\mathbb{R}^2$ ili R^3, i ako se brzina kada teži prema beskonačnosti rapidno smanjuje, onda parcijalnom integracijom i "divergence free uvjetom" (2.1b) imamo:

$$E(\mathbf{u}) = \int_\Omega |\omega(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} \tag{2.4}$$

gdje je $\omega = \operatorname{curl} \mathbf{u}$ *vektor vrtložnosti*. Vrtložnost je gibanje fluida pri kojemu se brzina i smjer strujanja brzo i nepravilno mijenjaju.

Definicija 2.1.1 (Vrtložnost)**.** *Vrtložnost ω vektorskog trodimenzionalnog toka definira se kao rotacija vektorskog polja $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ tj. $\omega = curl\ \boldsymbol{u}$.*
Zapisano u Kartezijevim koordinatama:

$$curl\ \boldsymbol{u} = \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) \tag{2.5}$$

Vrtložnost opisuje promjenu vektora brzine kada se pomiće za infinitezimalna udaljenost u smjeru okomitom na samog sebe.
Zbog jednostavnosti pretpostavimo da je domena cijeli prostor, tj. $\Omega = \mathbb{R}^3$. Također, dodatna pretpostavka neka bude da $\mathbf{u}$ i p brzo propadaju u beskonačnosti.
Promatrajmo skalarni produkt jednadžbe gibanja (2.1a) s $\mathbf{u}$ i integrirajmo nad Ω:

$$\int_\Omega \left\langle \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p - \mathbf{f}, \mathbf{u} \right\rangle \, d\mathbf{x}$$

Sad ćemo raspisat gornji izraz član po član.
Prvi član nam daje:

$$\int_\Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega |\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|^2 \, d\mathbf{x} \tag{2.6}$$

Nadalje, koristeći parcijalnu integraciju:

$$\begin{aligned}
-\nu \int_\Omega \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} &= -\nu \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} u_i \, d\mathbf{x} \\
&= -\nu \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_i \, \Big|_{\partial\Omega} + \nu \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \, d\mathbf{x} \\
&= [\text{prvi član iščezava na rubu}] = \\
&= \nu \sum_{i,j=1}^{3} \int_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 \, d\mathbf{x} \\
&= \nu E(\mathbf{u})
\end{aligned}$$

Treći i četvrti član nestaju koristeći parcijalnu integraciju i "divergence free" uvjet (2.1b). Promotrimo prvo inercijski član:

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega [(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}]\cdot\mathbf{u}\,d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j}u_i\,d\mathbf{x}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega u_j\frac{\partial(u_i^2)}{\partial x_j}\,d\mathbf{x}\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}u_ju_i^2\,\Big|_{\partial\Omega} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega\frac{\partial u_j}{\partial x_j}u_i^2\,d\mathbf{x}\\
&= [\text{prvi član iščezava na rubu}]\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\int_\Omega\frac{\partial u_j}{\partial x_j}u_i^2\,d\mathbf{x} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_j}{\partial x_j}u_i^2\,d\mathbf{x}\\
&- \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\int_\Omega(\nabla\cdot\mathbf{u})\,u_i^2\,d\mathbf{x} = [\text{"divergence free" uvjet}]\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Zatim, slično slijedi i s tlakom:

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla p\cdot\mathbf{u}\,d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{3}\int_\Omega\frac{\partial p}{\partial x_i}u_i\,d\mathbf{x}\\
&= \sum_{i=1}^{3}pu_i\,\Big|_{\partial\Omega} - \sum_{i=1}^{3}\int_\Omega p\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\,d\mathbf{x}\\
&= [\text{prvi član iščezava na rubu}]\\
&- \sum_{i=1}^{3}\int_\Omega p\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\,d\mathbf{x} = -\int_\Omega\sum_{i=1}^{3}p\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\,d\mathbf{x} = -\int_\Omega(\nabla\cdot\mathbf{u})\,d\mathbf{x}\\
&= [\text{"divergence free" uvjet}]\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Nakon svih sređivanja dobivamo jednadžbu očuvanja energije:

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega|\mathbf{u}(\mathbf{x},t)|^2\,d\mathbf{x} + \nu\sum_{i,j=1}^{3}\int_\Omega\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)^2\,d\mathbf{x} = \int_\Omega\mathbf{f}\cdot\mathbf{u}\,d\mathbf{x}
$$

tj. zapisano u terminima kinetičke enrgije e i enstrofije E:

$$\frac{d}{dt}e(\mathbf{u}) + \nu E(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} \tag{2.7}$$

Ona nam zapravo izražava stopu rasipanja kinetičke energije. U slučaju kada kad su volumne sile $f = 0$, vidimo da stopa rasipanja kinetičke energije upravo viskozni član $-\nu E(\mathbf{u})$:

$$\frac{d}{dt}e(\mathbf{u}) = -\nu E(\mathbf{u}) \tag{2.8}$$

2.2 Rubni i početni uvjeti

Razrada teorije rubnih i početnih uvjeta slijedi [2].
Egzistencija i jedinstvenost rješenja polaznog sustava

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

nisu mogući uz samo zadane jednadžbe. Kako bi problem bio jedinstveno određen, potrebno je zadati odgovarajuće rubne i početne uvjete. Same jednadžbe nisu dovoljne da pronađemo **u** i **p**, jer rješenja ima beskonačno mnogo.
Rubni uvjeti ovise o problemu kojeg promatramo, a u ovom tekstu razmatrati ćemo dvije vrste rubnih uvjeta :

- No-Slip rubni uvjeti
- Periodički rubni uvjeti

Za inkompresibilni tok, ako znamo rubni/početni uvjet za polje brzine **u**, možemo lako doći do rubnog/početnog uvjeta za **p**.

No-Slip rubni uvjet

Fluid ispunjava glatku, ograničenu domenu Ω, s čvrstim rubom $\partial\Omega$. Kod no-slip rubnog uvjeta čestice fluida ne kreću se zajedno s protokom. Fluid je "zaljepljen" za krutu granicu, koja je stacionarna. Pretpostavimo da znamo brzinu **u** na rubu $\partial\Omega$, i da je ona jednaka φ, tada je *no-slip*, tj *Dirichletov* rubni uvjet oblika:

$$\mathbf{u} = \varphi, \quad \text{na } \partial\Omega \tag{2.9}$$

Čestice fluida blizu površine ne kreću se zajedno s protokom kad su adhezijske sile (privlačne sile između različitih tvari) jače od kohezijskih sila (privlačene sile između istovrsnih molekula). Ova neravnoteža sila svodi brzinu fluida na 0. Kad fluid na rubu miruje, no-slip rubni uvjet je oblika:

$$\mathbf{u} = 0, \quad \text{na } \partial\Omega \tag{2.10}$$

Uvijek pretpostavljamo da je domena neovisna o vremenu t. No-slip uvjet definiran je za viskozne fluide gdje vrijedi koncept kontinuuma.

Periodički rubni uvjet

Prostorno periodički rubni uvjeti nisu dostižni u realnim fizičkim uvjetima. Fizički nemaju smisla, jer je nemoguće u prirodi pronaći toliko pravilna ponavljanja. Korisni kad promatramo idealizirane situacije. Također, koriste se kako bi simulirali proširenje domene do beskonačnosti, u jednom ili više smjerova. Periodički rubni uvjeti nastaju kod proučavanja homogene turbulecije (statističke osobine turbulencije nezavisne su na prostorne promjene), uz pretpostavku da su rubovi daleko od područja koje se promatra. To povlači da efekti zida ne utječu na tok. U slučaju prostorno-periodčikih rubnih uvjeta, domena koju promatramo je cijeli $\mathbb{R}^d$ ($d = 2$ ili 3). Pretspostavljamo da je tok periodički u smjeru $0x_i$, perioda $L_i \forall i \in 1, .., d$ Domena Ω je prekrivena pravokutnicima:

$$\Omega = \left[-\frac{L_1}{2}, \frac{L_1}{2}\right] \times \left[-\frac{L_2}{2}, \frac{L_2}{2}\right]$$

u slučaju $d = 2$, i:

$$\Omega = \left[-\frac{L_1}{2}, \frac{L_1}{2}\right] \times \left[-\frac{L_2}{2}, \frac{L_2}{2}\right] \times \left[-\frac{L_3}{2}, \frac{L_3}{2}\right]$$

u slučaju $d = 3$.
U ovom poglavlju, promatrati ćemo pojdnostavljeni slučaj, za koji vrijedi $L_i = L > 0, \ \forall i$, te je domena oblika:

$$\Omega = Q(L) = \left[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}\right]^d, \quad d = 2 \text{ ili } 3$$

Prostorno periodičke rubne uvjete zapisujemo kao:

$$\mathbf{u}(t, \mathbf{x} + Le_i) = u(t, \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega \tag{2.11}$$

Kako bi problem bio rješiv, s gledišta konačne domene, sve ostale funkcije koje se pojavljuju u problemu moraju biti također periodičke. Tako se za svaki period vraćamo originalnom problemu.

Napomena 2.2.1. *$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{f}$ i p su periodičke u smjeru $0x_i$ uz pripadni period $L_i = L > 0, \ i = 1, ..., d$ ($d = 2$ ili 3)*

Navedimo još jednu specijalnu vrstu pojednostavljenog problema kod periodičkih rubnih uvjeta. To je Navier Stokesova jednadžba za koju vrijedi:

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x} = 0 \tag{2.12}$$

Što, uz pretpostavku da je prosjek početnog toka isto 0, dodatno povlači uvjet:

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x} \equiv 0 \tag{2.13}$$

Ponekad je korisno i lakše promatrati takav pojednostavljen problem.

Početni uvjeti

Da bi imali potpuno određen matematički problem potrebno je zadati početne uvjete. Za zadanu brzinu $\mathbf{u}_0$ oni su oblika:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x}), \quad x \in \Omega \tag{2.14}$$

Napomena 2.2.2. *Primjetimo da ne zadajemo rubne i početne za tlak, pošto je tlak potpuno i jedinstveno (do na konstantu) određen pomoću* $\boldsymbol{u}$*.*

Uz navedene rubne i inicijalne uvjete, dolazimo do potpuno postavljenih mješovitih, tj. inicijalno-rubnih problema Navier Stokesove jednadžbe:

- (P_{nsp})

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u} = 0, \text{ na } \partial\Omega \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0, \ \mathbf{x}\in\Omega \end{cases}$$

- (P_{per})

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0, \ \mathbf{x}\in\Omega \\ \mathbf{u}(t, \mathbf{x} + Le_i) = u(t, \mathbf{x}), \ \text{ na } \partial\Omega, \ \forall i \in 1, ..d \end{cases}$$

- $(\dot{P}_{per})$

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \\ \text{uz uvjete (2.12), (2.13)} \end{cases}$$

Naravno, za inicijalno-rubne probleme (P_{per}) i $(\dot{P}_{per})$ mora vrijediti napomena 2.2.1.

2.3 Pojednostavljeni problemi

Kod proučavanja Navier Stokesovih jednadžbi imamo međudjelovanje inercije i viskoznosti fluida. Kada jedno od navedenih svojstava dominira, jednadžbu možemo pojednostaviti zanemarujući član koji nije dominantan. Time dobivamo pojednostavljene sustave Navier Stokesove jednadžbe. Njihova prednost je da su lakše rješivi, a stečena znanja možemo upotrijebiti kod proučavanja određenih svojstava tokova, kao na primjer stabilnosti protoka.

Stacionarni problem

Polje brzine **u** ne ovisi o vremenu:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}), \ \forall t \geq 0 \tag{2.15}$$

Da bi takav sustav imao smisla f (i φ u (P_{nsp}) sustavu) moraju biti neovisni o vremenu. Neovisnost polja brzine **u** o vremenu povlači:

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{u}(\mathbf{x}) = 0$$

pa *Stacionarna Navier Stokesova jednadžba* poprima oblik:

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

Kako bi jednadžba bila rješiva treba dodati $\mathbf{u} = 0$ na $\partial\Omega$, Dirichletov rubni uvjet. Rješenje ovog sustava je stabilno samo za male Reynoldsove brojeve. Tok sa malim Re zovemo laminaran tok. Kritična vrijednost Reynoldsovog broja za prelazak između laminarnog i turbulentnog režima nije egzaktno definirana, ali se smatra da je to 10^3. Određena stacionarna rješenja postaju nestabilna kako se Re povećava, tj. tok postaje turbulentan.

Linearizirana verzija

Nelinearnost čini većinu problema teškim ili nemogućim za rješavanje i glavni je čimbenik turbulencije koju modeliraju jednadžbe. Kod tokova koji su spori a gdje je viskoznost fluida velika utjecaj inercijskog člana na tok zanemariv je u usporedbi s utjecajem linearnih članova. Oni imaju jako nizak Reynoldsov broj ($Re << 1$). Problem nelinearnosti tada može se rješiti linearizacijom sustava bez većeg gubitka točnosti. Sustav poprima oblik:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases} \tag{2.17}$$

Uz odgovarajuće početne i rubne probleme ovo postaje dobro postavljen inicijalno-rubni problem, takozvani "*Creep flow*". Primjer fluida čiji bi tok mogli opisati ovom vrstom Navier Stoksove jednadžbe su med, teška ulja, pa čak i uske gomile ljudi. Pokazuju beznačajne učinke inercije i umjesto toga su dominirane unutarnjim trenjem.

Stokesove jednadžbe

Za mali Reynoldsov broj imamo i stacionaran lienarizirani sustav, takozvani *Stokesov sistem*:

$$\begin{cases} -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \end{cases} \tag{2.18}$$

Stokesov problem je jedan od najjednostavnijih nestabilnih problema, koji daju egzaktno rješenje Navier Stokesove jednadžbe.

2.4 Funkcijski prostori razapeti rubnim uvjetima

Nakon uvedenih rubnih uvjeta, teoriju funkcijskih prostora možemo produbiti uz navedene rubne i početne uvjete. Proučavamo funkcijske prostore vezane uz no-slip i periodičke rubne uvjete. Imamo dva, ranije uvedena, fundamentalna funkcijska prostora H i V čiju ćemo definiciju poopćiti na rubne uvjete. To su prirodni prostori za razvijanje teorije Navier Stokesovih jednadžbi. U ovoj sekciji poistovjetiti ćemo njihovu definiciju s enstrofijom i kinetičkom energijom.
Sljedeća razrada teorije funkcijskih prostora preuzeta je iz [2].

Definicija prostora H i V

Krenimo od prostora kvadratno integrabilnoh funkcija vektorskih polja sa Ω u $\mathbb{R}^d$. Prismjetimo se da je $L^2(\Omega)^d$ Hilbertov prostor, razapet normom i skalarnim produktom:

$$\langle\mathbf{u},\mathbf{v}\rangle = \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x})\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x},\quad \forall\mathbf{u},\mathbf{v}\in L^2(\Omega)^d$$

$$|\mathbf{u}| = |\langle\mathbf{u},\mathbf{u}\rangle|^{\frac{1}{2}} = \left(\int_\Omega |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\ d\mathbf{x}\right)^{\frac{1}{2}},\ \forall\mathbf{u}\in L^2(\Omega)^d$$

Također, definirali smo kinetičku energiju:

$$e(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 dx = \frac{1}{2}|\mathbf{u}|^2$$

Samom definicijom dana nam je veza između kinetičke energije i norme $L^2(\Omega)^d$ prostora:

$$|\mathbf{u}|^2 = 2e(\mathbf{u}), \ \forall \mathbf{u} \in L^2(\Omega)^d \tag{2.19}$$

Imajući na umu danu vezu, uvodimo definiciju prostora H:

Definicija 2.4.1. *Prostor H sastoji se od svih limesa (u smislu distribucija) svih mogućih nizova glatkih vektorskih polja $\boldsymbol{u}_n$, za koje vrijedi "divergence-free" uvjet tj. $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$, zadovoljavaju rubne uvjete polaznog problema i čija kinetička energija ostaje ograničena kad $n \to \infty$, tj $e(\boldsymbol{u}_n) \leq const. < \infty$*

Dakle, prostor H je prostor inkompresibilnih vektorskih polja s konačnom kinetičnkom energijom i pripadnim rubnim uvjetima koje inicijalno-rubni problem zahtjeva. Promatrajući ovu definiciju, vidimo da je prostor H potprostor $L^2(\Omega)^d$, uz odgovarajuće rubne uvjete.

Drugi bitan prostor kod proučavanja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi je $H^1(\Omega)^d$. Već smo ga spominjali, a vezan je uz enstrofiju toka. Prostor sadržava sva vektorska polja na Ω koja su kvadratno integrabilna, i čiji je gradijent kvadratno integrabilan. Pripadna norma i unutarnji produkt prostora su:

$$\langle\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\rangle_1 = \frac{1}{L^2} \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \, d\mathbf{x}, \ \ \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^d$$

$$\|\mathbf{u}\|_1 = \langle\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle\rangle_1^{\frac{1}{2}}$$

gdje je L referentna duljina, kao naprimjer dijametar domene Ω.

Unutar norme i unutarnjeg produkta, osim djela povezanog uz kinetičku energiju (kao i kod L^2 prostora), imamo i član vezan uz enstrofiju. Uvodimo unutarnji produkt i normu samo člana enstrofije, u oznakama $<< \cdot, \cdot >>$ i $\| \cdot \|$:

$$\langle\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \, d\mathbf{x}$$

$$\|\mathbf{u}\| = \langle\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle\rangle^{\frac{1}{2}}$$

Sada možemo zapisati normu i unutarnji produkt prostora $H^1(\Omega)^d$ kao:

$$\begin{aligned} \langle\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\rangle_1 &= \frac{1}{L^2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle\rangle \\ \|\mathbf{u}\|_1^2 &= \frac{1}{L^2} |\mathbf{u}|^2 + \|\mathbf{u}\|^2 \end{aligned} \tag{2.20}$$

Imajući na umu vezu između unutarnjeg produkta i enstrofije, uvodimo iduću definiciju prostora V:

Definicija 2.4.2. *Prostor V sastoji se od svih limesa (u smislu distribucija) svih mogućih nizova glatkih vektorskih polja $\boldsymbol{u}_n$, za koje vrijedi "divergence-free" uvjet tj. $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$, zadovoljavaju rubne uvjete polaznog problema i čija enstrofija ostaje ograničena kad $n \to \infty$, tj $E(\boldsymbol{u}_n) \leq const. < \infty$*

Dakle, prostor V je prostor inkompresibilnih vektorskih polja konačne enstrofije koji zadovoljavaju pripadne rubne uvjete inicijalno-rubnog problema. Slično kao i ranije, vidimo da je prostor V potprostor $H^1(\Omega)^d$, uz odgovarajuće rubne uvjete.

No-slip rubni uvjet

Neka je domena Ω takva da vrijedi:
Ω je otvoren, ograničen, povezan skup, s C^2 rubom, tako da je rub samo sa jedne strane domene

Napomena 2.4.3. *Rub klase C^2 znači da se može prikazati lokalno grafom neke C^2 funkcije.*

Imajući na umu no-slip rubne uvjete (2.10) i prostor H, definiramo potprostor H_{nsp}:

$$H_{nsp} = \left\{ \mathbf{u} \in L^2(\Omega)^d : \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \mid_{\partial\Omega} = 0 \right\} \tag{2.21}$$

Prostor H_{nsp} razapet je normom $|\cdot|$ i unutarnjim produktom $< \cdot, \cdot >$.
Slično, za no-slip rubne uvjete (2.10) i prostor V, definiramo potprostor V_{nsp}:

$$V_{nsp} = \left\{ \mathbf{u} \in H^1(\Omega)^d : \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \ \mathbf{u} \mid_{\partial\Omega} = 0 \right\} \tag{2.22}$$

Prostor V_{nsp} razapet je normom $\|\cdot\|$ i unutarnjim produktom $<< \cdot, \cdot >>$.
U matematičkoj teoriji parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, najčešće se prostor H_{nsp} definira kao zatvarač prostora

$$\mathcal{V}_{nsp} = \left\{ \mathbf{u} \in C_c^\infty(\Omega)^d : \ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \right\} \tag{2.23}$$

u $L^2(\Omega)^d$, s obzirom na normu prostora $L^2(\Omega)^d$.
Slično, prostor V_{nsp} definira se kao zatvarač prostora

$$\mathcal{V}_{nsp} = \left\{ \mathbf{u} \in C_c^\infty(\Omega)^d : \ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \right\} \tag{2.24}$$

u $H^1(\Omega)^d$, s obzirom na normu prostora $H^1(\Omega)^d$.
Za detalje pogledati [1].

Periodički rubni uvjeti

Kod periodičkih rubnih uvjeta domena je beskonačna, te je zapisujemo kao:

$$\Omega = \prod_{i=1}^{d} \left(-\frac{L_i}{2}, \frac{L_i}{2,} \right)$$

gdje je $L_i > 0$ period u smjeru $0x_i$, $\forall i = 1, .., d$.
Kako bi mogli definirati prostore V i H za periodičke rubne uvjete, prvo trebamo periodičkim uvjetima razapeti prostore $L^2(\Omega)^d$ i $H^1(\Omega)^d$. Dakle uvodimo prostore $L^2_{per}(\Omega)^d$ i $H^1_{per}(\Omega)^d$.
Prostor $L^2_{per}(\Omega)^d$ je prostor vektorskih polja $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ definiranih za $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ koja su L_i-periodička u svim smjerovima $0x_i$, $i = 1, ..d$, te koja pripadaju $L^2(\mathcal{O})$, za svaki ograničen skup $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$.
Prostor $H^1_{per}(\Omega)^d$ je prostor vektorskih polja $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ definiranih za $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ koja su L_i-periodička u svim smjerovima $0x_i$, $i = 1, ..d$, te koja pripadaju $H^1(\mathcal{O})$, za svaki ograničen skup $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$.
Sada imamo temelje za definicije prostora H_{per} i V_{per}.
Imajući na umu periodičke uvjete (2.11) i prostor H definiramo prostor H_{per}:

$$H_{per} = \left\{ \mathbf{u} \in L^2_{per}(\Omega)^d : \nabla \cdot u = 0 \right\} \tag{2.25}$$

Prostor H_{per} razapet je normom $|\cdot|$ i unutarnjim produktom $< \cdot, \cdot >$.
Nadalje, za periodičke uvjete (2.11) i prostor V definiramo prostor V_{per}:

$$V_{per} = \left\{ \mathbf{u} \in H^1_{per}(\Omega)^d : \nabla \cdot u = 0 \right\} \tag{2.26}$$

Prostor V_{per} razapet je normom $\|\cdot\|_1$ i unutarnjim produktom $<< \cdot, \cdot >>_1$.
Slično kao i kod no-slip rubnih uvjeta, definiramo matematički preciznije prostor H_{per} kao zatvarač prostora

$$\mathcal{V}_{per} = \left\{ \mathbf{u} \in C^\infty_{per}(\Omega)^d : \ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \right\} \tag{2.27}$$

u $L^2(\Omega)^d$, s obzirom na normu prostora $L^2(\Omega)^d$.

Napomena 2.4.4. *$C^\infty_{per}(\Omega)^d$ je prostor Ω-periodičkih (L_i-periodičkih u svim smjerovima $0x_i$, $i = 1, .., d$) funkcija koje su C^∞ vektorska polja definirana na $\mathbb{R}^d$*

Analogno vrijedi da definiramo matematički preciznije prostor V_{per} kao zatvarač prostora

$$\mathcal{V}_{per} = \left\{ \mathbf{u} \in C^\infty_{per}(\Omega)^d : \ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \right\} \tag{2.28}$$

u $H^1(\Omega)^d$, s obzirom na normu prostora $H^1(\Omega)^d$.
Kao i kad smo definirali periodičke rubne uvjete, imamo pojednostavljen problem kod

periodičkih rubnih uvjeta, kad vrijedi:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x} = 0 \\
\frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\, d\mathbf{x} \equiv 0
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

Dakle, gledamo tok kome je prosječna brzina jednaka 0.
Promatrajući pojednostavljene periodičke uvjete (2.12) i (2.13), te prostor H definiramo prostor $\dot{H}_{per}$:

$$
\dot{H}_{per} = \left\{ \mathbf{u} \in L^2_{per}(\Omega)^d : \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0,\ \nabla \cdot u = 0 \right\}
\tag{2.30}
$$

Prostor $\dot{H}_{per}$ razapet je normom $|\cdot|$ i unutarnjim produktom $< \cdot, \cdot >$.
Nadalje, za pojednostavljene periodičke uvjete (2.12) i (2.13) i prostor V definiramo prostor $\dot{V}_{per}$:

$$
\dot{V}_{per} = \left\{ \mathbf{u} \in H^1_{per}(\Omega)^d : \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0,\ \nabla \cdot u = 0 \right\}
\tag{2.31}
$$

Prostor $\dot{V}_{per}$ razapet je normom $\|\cdot\|$ i unutarnjim produktom $<< \cdot, \cdot >>$.
Analogno kao i ranije, prostor $\dot{H}_{per}$ definiramo kao zatvarač prostora

$$
\dot{\mathcal{V}}_{per} = \left\{ \mathbf{u} \in C^\infty_{per}(\Omega)^d : \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0,\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \right\}
\tag{2.32}
$$

u $L^2(\Omega)^d$, s obzirom na normu prostora $L^2(\Omega)^d$.
Prostor $\dot{V}_{per}$ definiramo kao zatvarač prostora

$$
\dot{\mathcal{V}}_{per} = \left\{ \mathbf{u} \in C^\infty_{per}(\Omega)^d : \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0,\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \right\}
\tag{2.33}
$$

u $H^1(\Omega)^d$, s obzirom na normu prostora $H^1(\Omega)^d$.

Funkcijski prostori koji uključuju vrijeme

Funkciju dvije varijable možemo interpretirati kao vektorsku funkciju jedne varijable. Promatramo funkciju $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ kao funkciju $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ koja ovisi samo vremenu, s fiksiranom prostornom varijablom. Neka je X Banachov prostor (potpun normiran prostor). Definirajmo prostor $L^p(0, T; X)$:

Definicija 2.4.5.

$$L^p(0,T;X) = \{\boldsymbol{u} : [0,T] \to X : \ \boldsymbol{u} \text{ } izmjeriva \text{ } i \text{ } \|\boldsymbol{u}\|_{L^p(0,T;X)} < +\infty\} \tag{2.34}$$

gdje je:

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T |\boldsymbol{u}(t)|_X^p \, dt\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.35}$$

Također, imamo i prostor esencijano ograničenih funkcija $L^\infty(0,T;X)$:

Definicija 2.4.6.

$$L^\infty(0,T;X) = \{\boldsymbol{u} : [0,T] \to X : \ \boldsymbol{u} \text{ } izmjeriva \text{ } i \text{ } \|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty(0,T;X)} < +\infty\} \tag{2.36}$$

gdje je:

$$\|\boldsymbol{u}\|_{L^\infty(0,T;X)} = \underset{t\in[0,T]}{\text{sup.ess.}} |\boldsymbol{u}(t)|_X \tag{2.37}$$

Napomena 2.4.7. sup.ess. *predstavlja esencijalni supremum, kao i kod realnih funkcija. Kažemo da je $|\boldsymbol{u}(t)|_X$ esencijalno ograničena ako je ograničena za gotovo svaki $t \in [0,T]$. Najmanja takva konstanta predstavlja normu prostora $L^\infty(0,T;X)$*

Definicije funkcijskih prostora ovisnih o vremenskim varijablama proširujemo i na prostor neprekidnih funkcija sa $[0,T]$ u X, u oznaci $C(0,T;X)$:

Definicija 2.4.8.

$$C([0,T];X) = \{\boldsymbol{u} : [0,T] \to X : \ \boldsymbol{u} \text{ } neprekidna, \ \|\boldsymbol{u}\|_{C([0,T];X)} < +\infty\} \tag{2.38}$$

gdje je:

$$\|\boldsymbol{u}\|_{C([0,T];X)} = \max_{t\in[0,T]} \|\boldsymbol{u}(t)\|_X \tag{2.39}$$

Napomena 2.4.9. *Prostori $C([0,T];X)$ i $L^p(0,T;X)$ su Banachovi prostori.*

Za opis Soboljevih prostora ovisnih o vremenskoj varijabli koristili smo [4].
Definirajmo pojam slabe derivacije:

Definicija 2.4.10. *Neka su $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in L^1(0,T;X)$. Kažemo da je $\boldsymbol{v}$ slaba derivacija od $\boldsymbol{u}$ ako vrijedi:*

$$\int_0^T \boldsymbol{u}(t)\varphi'(t) \, dt = -\int_0^T \boldsymbol{v}(t)\varphi(t) \, dt, \quad \forall\varphi \in C_c^\infty(0,T) \tag{2.40}$$

i označava se $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}'$.

Definicija 2.4.11 (Prostori Soboljeva)**.**

$$H^1(0,T;X) = \left\{ \boldsymbol{u} \in L^2(0,T;X) : \ \boldsymbol{u}' \in L^2(0,T;X) \right\} \tag{2.41}$$

Uz pripadnu normu:

$$||\boldsymbol{u}||_{H^1(0,T;X)} = \left(||\boldsymbol{u}||^2_{L^2(0,T;X)} + ||\boldsymbol{u}'||^2_{L^2(0,T;X)} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.42}$$

Za detaljniju teoriju ovog poglavlja pogledati [2] i [4].
Sad imamo razvijene temelje za proučavanje inicijalno-rubnog problema Navier Stokesove jednadžbe. Ovo je jedini način na koji smo mogli uopće raspravljati o jedinstvenosti i egzistenciji rješenja. Bez obzira na količinu teorije i posla kako bi se došlo do ovih prostora, ovaj postupak ključan je za rješavanje našeg problema.

Poglavlje 3

Varijacijska formulacija

Klasična (jaka) rješenja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi zadovoljavaju diferencijalnu jednadžbu, te rubni i početni uvjet u svakoj točki domene i njene granice. Kako bi to vrijedilo koeficjenti jednadžbe moraju biti dovoljno glatke, neprekidno derivabilne funkcije. Formulacija rubne zadaće u obliku varijacijske formulacije pogodno je za analizu rubnih zadaća. Pomoću varijacijske formulacije dolazimo do slabih rješenja rubnih problema. Jaki uvjeti na koeficjente nužni za egzistenciju klasičnog rješenja, kod slabih su znatno oslabljeni. Također, egzistenciju slabih rješenja puni je lakše dokazati. Svako slabo rješenje, uz dovoljnu glatkoću, je ujedno i klasično.

3.1 Slabo rješenje Navier Stokesove jednadžbe

Varijacijska formulacija rubne zadaće dobiva se množenjem jednadžbe s test funkcijom iz odgovarajućeg prostora. Pogledajmo inicijalno-rubnu zadaću:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \tag{3.1a}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \tag{3.1b}$$

Prisjetimo se ranije uvedenog prostora V:

Definicija 3.1.1. *Prostor V sastoji se od svih limesa (u smislu distribucija) svih mogućih nizova glatkih vektorskih polja $\boldsymbol{u}_n$, za koje vrijedi "divergence-free" uvjet tj. $\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0$, zadovoljavaju rubne uvjete polaznog problema i čija enstrofija ostaje ograničena kad $n\to\infty$, tj $E(\boldsymbol{u}_n) \le const. < \infty$*

Dakle, prostor V je prostor svih inkompresibilnih vektorskih polja konačne enstrofije, koja zadovoljavaju odgovarajuće rubne uvjete. Tražimo rješenje zadaće (3.1) pomoću varijacijske formulacije idućim postupkom.

Množimo koristeći unutarnji produkt jednadžbu (3.1a) test funkcijom $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in V$, zatim integriramo po prostornoj domeni Ω. Primjetimo da je test funkcija $\mathbf{v}$ ”divergence-free”, te zadovoljava iste rubne uvjete kao i $\mathbf{u}$. Promatrat ćemo i pojednostavit član po član jednadžbe.

- $$\int_\Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \frac{\partial}{\partial t} \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$$

  Parcijalna derivacija po t izlazi ispred integrala jer se integrira po prostornoj varijabli, i test funkcija ne ovisi o vremenu.

- Prije idućeg člana, navesti ćemo teorem koji ćemo koristiti pri sređivanju jednadžbe.

  Teorem 3.1.2 (Greenova formula)**.** *Neka su $u, v \in C^2(\Omega)$. Tada vrijedi:*

  $$\int_\Omega Dv \cdot Du\, dx = -\int_\Omega u\Delta v + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial n} u\, dS \tag{3.2}$$

  gdje je n vanjska jedinična normala na $\partial\Omega$.

  Dokaz. Za dokaz pogledati [1], Teorem 3, stranica 628. □

  $$\begin{aligned}
  &-\nu \int_\Omega \Delta\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \\
  &= [\text{parcijalna integracija } + \text{ Greenova formula}] \\
  &= -\nu \sum_{i,j=1}^{d} \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) \cdot v_i(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) + \nu \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \\
  &= [\text{Prvi integral nestaje jer } \mathbf{v} \text{ propada na rubu}] = \\
  \nu &\sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}
  \end{aligned}$$

- $$\begin{gathered}
  \int_\Omega \nabla p(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = [\text{parcijalna integracija}] = \\
  \int_{\partial\Omega} p(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x})\, dS(\mathbf{x}) - \int_\Omega p(\mathbf{x}, t)\mathrm{div}\mathbf{v}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}
  \end{gathered}$$

  [prvi integral nestaje jer v iščezava na rubu, a drugi zbog ”divergence free” uvjeta na $\mathbf{v}$]

  $$= 0$$

Nakon sređivanja ostaje:

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}+\nu\sum_{i,j=1}^{d}\int_{\Omega}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x},t)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}+\sum_{i,j=1}^{d}\int_{\Omega}u_i(\mathbf{x},t)\frac{\partial u_j}{\partial x_j}(\mathbf{x},t)v_j(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$
$$=\int_{\Omega}\mathbf{f}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x},\quad\forall\mathbf{v}\in V \tag{3.3}$$

Zapišimo to jednostavnije:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}\,d\mathbf{x}+\nu\sum_{i,j=1}^{d}\int_{\Omega}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(t)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\,d\mathbf{x}+\sum_{i,j=1}^{d}\int_{\Omega}u_i(t)\frac{\partial u_j}{\partial x_j}(t)v_j\,d\mathbf{x}\\ =\int_{\Omega}\mathbf{f}(t)\cdot\mathbf{v}\,d\mathbf{x},\quad\forall\mathbf{v}\in V\end{aligned} \tag{3.4}$$

Nadalje, kako bi još pojednostavili zapis, uvodimo iduće oznake:

Za svaka dva vektoska polja φ i ϕ definiranih na Ω vrijedi:

$$\langle\varphi,\phi\rangle=\int_{\Omega}\varphi(\mathbf{x})\cdot\phi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$
$$\langle\langle\varphi,\phi\rangle\rangle=\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{d}\frac{\varphi(\mathbf{x})}{\partial x_i}\frac{\phi(\mathbf{x})}{\partial x_i}\,d\mathbf{x}$$

Za trojku vektoskih polja φ, ϕ i ψ definiranih na Ω vrijedi:

$$b(\varphi,\phi,\psi)=\sum_{i,j=1}^{d}\int_{\Omega}\varphi_i(\mathbf{x})\frac{\partial\phi_j(\mathbf{x})}{\partial x_i}\psi_j(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$$

Da bi rješenje postojalo, treba ga potkrijepiti početnim uvjetom:

$$\mathbf{u}_0(0)=\mathbf{u}_0 \tag{3.5}$$

Pomoću uvedenih oznaka, za *slabo rješenje* Navier Stokesove jednadžbe vrijedi:

Za izmjerivu funkciju $t\to\boldsymbol{u}(t)$, $\boldsymbol{u}\in V$ kažemo da je slabo rješenje Navier Stokesove jednadžbe na Ω ako i samo ako vrijedi:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\langle\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}\rangle+\nu\langle\langle\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v}\rangle\rangle+b(\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{u}(t),\boldsymbol{v})=\langle\boldsymbol{f}(t),\boldsymbol{v}\rangle\,,\\ \boldsymbol{u}_0(0)=\boldsymbol{u}_0\\ \textit{za svaku test funkciju } \boldsymbol{v}\in V\end{gathered} \tag{3.6}$$

3.2 Energetska jednadžba

Energetska jednadžba je diferencijalni oblik zakona održavanja energije. U mehanici fluida, zakon održavanja energije predstavlja primjenu prvog zakona termodinamike na elemente fluida u strujanju. U svakom zatvorenom sustavu zbroj svih oblika energije je stalan. Drugim riječima, prvi zakon termodinamike može se poopćiti kao:
Energija zatvorenog sustava ne može nestati niti ni iz čega nastati, energija može samo prelaziti iz jednog oblika u drugi, i ona je konstantna.
Ranije, u prvom poglavlju, kad smo izvodili energetsku jednadžbu, kretali smo od pretpostavke da fluid popunjava cijelu domenu, a u beskonačnosti miruje. Sada produbljujemo teoriju i promatramo fluide i tokove koji zadovoljavaju početne i rubne uvjete. Krećemo od slabe formulacije Navier Stokesove jednadžbe (3.3):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \nu\sum_{i,j=1}^{d}\int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x},t)\frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} + \sum_{i,j=1}^{d}\int_\Omega u_i(\mathbf{x},t)\frac{\partial u_j}{\partial x_j}(\mathbf{x},t)v_j(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \\ = \int_\Omega \mathbf{f}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{v}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x},\quad \forall\mathbf{v}\in V\end{aligned} \tag{3.7}$$

Umjesto $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, uvrštavamo ponovno $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x} + \nu\sum_{i,j=1}^{d}\int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x},t)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x} + \sum_{i,j=1}^{d}\int_\Omega u_i(\mathbf{x},t)\frac{\partial u_j}{\partial x_j}(\mathbf{x},t)u_j(t)\,d\mathbf{x} \\ = \int_\Omega \mathbf{f}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x}\end{aligned} \tag{3.8}$$

Sredimo član po član, kako bi pojednostavili integralnu jednadžbu:

1. Prvi član:
$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\mathbf{u}(\mathbf{x},t)|^2\,d\mathbf{x}$$

2. Drugi član:
$$\nu\sum_{i,j=1}^{d}\int_\Omega \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x},t)\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x},t)\,d\mathbf{x} = \nu\sum_{i,j=1}^{d}\int_\Omega \left|\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x},t)\right|^2\,d\mathbf{x}$$

3. Treći član:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega u_i(\mathbf{x},t) \frac{\partial u_j}{\partial x_j}(\mathbf{x},t) u_j(t)\, d\mathbf{x} \\
&= \left[\text{Koristeći svojstvo } b(\mathbf{u},\mathbf{u},\mathbf{u}) = \int_\Omega [(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}]\cdot\mathbf{u}\, d\mathbf{x} = 0 \right] \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Nakon sređivanja svih članova, naša jednadžba izgleda ovako:

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\mathbf{u}(\mathbf{x},t)|^2 \, d\mathbf{x} + \nu \sum_{i,j=1}^{d} \int_\Omega \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\mathbf{x},t) \right|^2 \, d\mathbf{x} = \int_\Omega \mathbf{f}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{u}(\mathbf{x},t)\, d\mathbf{x} \tag{3.9}
$$

Za svako vektorsko polje φ postavimo:

$$
\begin{aligned}
|\, \varphi \,| &= \langle \varphi, \varphi \rangle^{\frac{1}{2}} \\
\|\, \varphi \,\| &= \langle\langle \varphi, \varphi \rangle\rangle^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

Takvom notacijom, jednadžbu (3.9) zapisujemo kao:

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\, \mathbf{u}(t)\,|^2 + \nu \|\, \mathbf{u}(t)\,\|^2 = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{u}(t) \rangle
$$

Zatim u kontekstu energije i enstrofije imamo:

$$
\begin{aligned}
e(\varphi) &= \frac{1}{2}|\, \varphi \,|^2 \\
E(\varphi) &= \|\, \varphi \,\|^2
\end{aligned}
$$

Čime smo izveli *energetsku jednakost*:

$$
\frac{d}{dt} e(\mathbf{u}(t)) = -\nu E(\mathbf{u}(t)) + \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{u}(t) \rangle \tag{3.10}
$$

Dakle, promjena kinetičke energije je jednaka razlici vanjskih volumnih sila i energije koja proizlazi iz disipacije po viskoznosti.
Proučavajući dovoljne uvjete na slaba rješenja tako da ona zadovoljavaju energetsku jednakost dolazi se do zaključka da su ona zadovoljena u dimenziji $d = 2$. No, u dimenziji $d = 3$ takvi uvjeti jos ne postoje. Stoga pitanje egzistencije rješenja u dimeziji $d = 3$ takvog da je energetska jednakost zadovoljena i da je jedinstveno, ostaje otvoreno.

Poglavlje 4

Jedinstvenost i egzistencija rješenja

Navier Stokesove jednadžbe opisuju kretanje fluida u prostoru, i kao takve pokrivaju širok spektar pojava u prirodi. Njihova rješenja pronalaze svoju važnost u mnogim praktičnim primjenama. Upravo je zato zanimljivo da sa teorijske strane razumjevanje njihovog rješenja nepotpuno. Često opisuju turbulencije, koje su jedno od najvećih nerješenih pitanja u fizici.
Navier Stokesove jednadžbe imaju dvije vrste rješenja, slabo i jako. Ona se vežu za enstrofiju. Kod jakih rješenja enstrofija je uvijek konačna, dok kod slabih može postati beskonačna u nekim trenutcima.
U dvodimenzionalnom slučaju matematička teorija i razumjevanje razvijeni su do kraja. Slaba rješenja postoje, regularna su, jedinstvena i dokazuje se da su slaba rješenja ujedno i jaka. Rješenja su jedinstvena, i uz odgovarajući početni uvjet postoje u svakom trenutku.
U trodimenzionalnom slučaju situacija nije toliko lijepa. Dokazano je da za zadani Navier Stokesov sustav slabo rješenje uvijek postoji, no jedistvenost je upitna. S druge strane, za jaka rješenja dokazana su egzistencija i jedinstvenost, no samo na konačnom vremenskom intervalu.

Napomena 4.0.1. *Sve rezultate koje ćemo izreći za rješenja Navier Stokesovih jednadžbi vrijede za bilo koji od navedenih inicijalno-rubnih problema koje smo ranije obrađivali* ((P_{nsp}), (P_{per}) *i* $(\dot{P}_{per})$)*. Vrstu rubnih i inicijalnih uvjeta nećemo posebno naglašavati. Prostori* V *i* H *podrazumjevati će sve prostore ranije uvedene.*

4.1 Egzistencija i jedinstvenost u dimenziji 3

Prisjetimo se slabe formulacije Navier Stokesovih jednadžbi izvedene u prethodnom poglavlju.
Za izmjerivu funkciju $t \to \mathbf{u}(t)$, $\mathbf{u} \in V$ kažemo da je slabo rješenje Navier Stokesove

jednadžbe na Ω ako i samo ako vrijedi:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\langle \mathbf{u}(t), \mathbf{v}\rangle + \nu \langle\langle \mathbf{u}(t), \mathbf{v}\rangle\rangle + b(\mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}) = \langle \mathbf{f}(t), \mathbf{v}\rangle , \\ \mathbf{u}_0(0) = \mathbf{u}_0 \\ \text{za svaku test funkciju } \mathbf{v} \in V\end{gathered} \tag{4.1}$$

U dimenziji 3 idući teorem govori nam o egzistenciji slabog rješenja. Prije samog teorema, definirat ćemo pojam *slabe neprekidnosti*.

Definicija 4.1.1 (Slabo neprekidna funkcija)**.** *Funkcija $\boldsymbol{u}$ je **slabo neprekidna** funkcija koje ide sa* $[0, T]$ *na H ako vrijedi*

$$t \to (\boldsymbol{u}(t), \boldsymbol{v}) = \int_\Omega \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t) \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\, d\boldsymbol{x}, \quad \forall \boldsymbol{v} \in H$$

Teorem 4.1.2 (Egzistencija slabog rješenja u dimenziji 3)**.** *Pretpostavimo da je $\boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{f}$ i $T > 0$ su zadani, i zadovoljavaju*

$$\begin{gathered}\boldsymbol{u}_0 \in H \\ \boldsymbol{f} \in L^2(0, T; H)\end{gathered}$$

Postoji barem jedno rješenje $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ od (4.1) *tako da vrijedi*

$$u_i,\ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega \times (0, T)), \quad i, j = 1, 2, 3$$

i $\boldsymbol{u}$ je slabo neprekidna funkcija s $[0, T]$ *u H. Štoviše, vrijedi iduća energetska nejednakost:*

$$\int_0^T \left\{ -\frac{1}{2} |\boldsymbol{u}(t)|^2 \psi'(t) + \nu \|\boldsymbol{u}(t)\|^2 \psi(t) \right\} dt \le \frac{1}{2} |\boldsymbol{u}(0)|^2 \psi(0) + \int_0^T (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(t))\psi(t)\, dt \tag{4.2}$$

za sve nenegativne realne funkcije ψ klase C^1 definirane na $[0, T]$ *za koje vrijedi* $\psi(T) = 0$.

Dokaz. Dokaz egzistencije moze se pogledati u [5], stranica 283.
Dio o slaboj energetskoj nejednakosti objašnjen je u [5], stranica 290.

□

Slaba rješenja Navier Stokesove jednadžbe u dimenziji 3, kao što vidimo po prethodnom teoremu, poštuju energetsku nejednakost (4.2). Nažalost, nije dokazano da zadovoljava jači uvjet, energetsku jednakost:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt} |\mathbf{u}(t)|^2 + \nu \|\mathbf{u}(t)\|^2 = (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}(t))$$

Kasnije ćemo vidjeti da slaba rješenja u dimenziji 2 zadovoljavaju energetsku jednakost, te kod njih problem sa jedinstvenosti ne postoji. Osim sa teorijeske strane, energetska jednakost imala bi smisla i sa fizičkog stajališta. Problem je u tome što energetska jednakost slabog rješenja dozvoljava rast kinetičke energije za određene intervale, a kinetička energija nemože rasti. Zbog toga gledamo slabiji uvjet, tj energetsku nejednakost (4.2). Također, energetska nejednadost povlači iduću diferencijalnu nejednakost, u smislu distribucija, na $(0, T)$:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,|\mathbf{u}(t)|^2 + \nu\,\|\mathbf{u}(t)\|^2 \leq (\mathbf{f}(t), \mathbf{u}(t))$$

što je i dalje slabiji zahtjev od energetske jednakosti.
Potreba za proučavanjem slabih rješenja postoji najviše zbog dimenzije 3. Čak i ako su zadane funkcije $\mathbf{u}_0$ i $\mathbf{f}$ "lijepe", znamo da postoji jako rješenje, ali samo za kratke vremenske intervale.

Teorem 4.1.3 (Lokalna egzistencija i jedinstvenost jakih rješenja u dimenziji 3)**.** *Neka su $\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{f}$ i $T > 0$ zadani takvi da zadovoljavaju*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_0 &\in V \\ \boldsymbol{f} &\in L^2(0, T; H) \end{aligned} \tag{4.3}$$

Tada postoji T_*, $(0 < T_* \leq T)$, koji ovisi o zadanim parametrima Ω, ν, ,$\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{u}_0$ i T takav da na vremenskom intervalu $[0, T_*\rangle$ postoji jedinstveno rješenje $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ slabe formulacije (4.1) *koje zadovoljava:*

$$u_i, \frac{\partial u_i}{\partial t}, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \in L^2(\Omega \times (0, T)), \quad i, j, k = 1, 2, 3 \tag{4.4}$$

i $\boldsymbol{u}$ je neprekidna funkcija koja se preslikava sa $[0, T_*\rangle$ na V.
Nadalje, jaka rješenja su jedinstvena u smislu da ne postoji drugo jake rješenje koje zadovoljava (4.3) *i* (4.4)*, i ne postoji drugo slabo rješenje na $[0, T_*\rangle$ koje zadovoljava Teorem* 4.1.2.

Dokaz. Dokaz egzistencije moze se pogledati u [5], stranica 297.
Dokaz jedinstvenosti moze se pogledati u [5], stranica 303 i 309.

□

Prethodna dva teorema daju nam egzistenciju, ali ne jedinstvenost slabog rješenja, i daju nam jedinstvenost ali ne egzistanciju jakog rješenja. Egzistenciju imamo samo na određenim intervalima. Problemi jedinstvenosti slabog i egzistencije jakog rješenja povezani su idućim rezultatom:

Teorem 4.1.4. *Neka su $\boldsymbol{f}$ i $\boldsymbol{u}_0$ zadane, tako da vrijedi*

$$\boldsymbol{f} \in L^2(0,T;H)$$
$$\boldsymbol{u}_0 \in H$$

Ako postoji rješenje u slabe formulacije (4.1) *koje zadovoljava* (4.9) *(t.j. jako rješenje), onda ne postoji niti jedno drugo rješenje slave formulacije* (4.1) $\boldsymbol{v}$ *takvo da zadovoljava* (4.9) *i energetsku nejednakost* (4.2) *(t.j. slabo rješenje).*

Dokaz. Dokaz teorema može se pronaći u [5], Teorem 3.9, stranica 309. □

4.2 Egzistencija i jedinstvenost u dimenziji 2

Kao što se već dalo naslutiti, u dimenziji 2 situacija je puno ljepša. Naime, osim egzistencije slabog rješenja, imamo i jedinstvenost na cijelom vremenskom intervalu. O tome govori idući teorem:

Teorem 4.2.1 (Egzistencija i jedinstvenost slabih rješenja u dimenziji 2)**.** *Neka su* $\boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{f}$ *i* $T > 0$ *zadani takvi da zadovoljavaju*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_0 &\in H \\ \boldsymbol{f} &\in L^2(0,T;H) \end{aligned} \tag{4.5}$$

Tada postoji jedinstveno rješenje $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ *slabe formulacije* (4.1) *tako da vrijedi:*

$$u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \in L^2(\Omega \times (0,T)), \quad i,j = 1,2 \tag{4.6}$$

i $\boldsymbol{u}$ *je neprekidna funkcija sa* $[0,T]$ *na* H.
Nadalje, sljedeća energetska jednakost vrijedi na $[0,T]$*:*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\boldsymbol{u}(t)|^2 + \nu\,||\boldsymbol{u}(t)||^2 = (\boldsymbol{f}(t), \boldsymbol{u}(t)) \tag{4.7}$$

Dokaz. Dokaz egzistencije moze se pogledati u [5], stranica 283.
Dokaz jedinstvenosti moze se pogledati u [5], stranica 294.
Dio o energetskoj jednakosti objašnjen je u [5], stranica 290 (Teorem 3.2, Lema (2.1)).
□

Razlika slabih rješenja u dimenziji 2 i dimenziji 3 leži u tome da kod dimenzije 2 imamo neprekidnost rješenja, a ne slabu neprekidnost. Također, **u** poprima vrijednosti u funkcijskom prostoru H, koji je razapet normom kinetičke energije. Iz čega slijedi da je zadovoljena energetska jednakost (4.7).

Teorem 4.2.2 (Egzistencija i jedinstvenost jakih rješenja u dimenziji 2)**.** *Neka su* $\boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{f}$ *i* $T > 0$ *zadani takvi da zadovoljavaju*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}_0 &\in V \\ \boldsymbol{f} &\in L^2(0,T;H) \end{aligned} \tag{4.8}$$

Tada postoji jedinstveno rješenje $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ *slabe formulacije* (4.1) *tako da vrijedi:*

$$u_i, \frac{\partial u_i}{\partial t}, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \in L^2(\Omega \times (0,T)), \quad i, j = 1, 2 \tag{4.9}$$

i $\boldsymbol{u}$ *je neprekidna funkcija sa* $[0,T]$ *na* V*.*

Dokaz. Objašnjenje dokaza nalazi se u [2], strana 59 uz dodatak Appendix A. □

Napomena 4.2.3. *U prethodnim teoremima o slabim i jakim rješenjima egzistencija rješenja dokazuje se Galerkinovom metodom. Konstruiraju se aproksimativna rješenja, i gleda se ponašanje kad limes teži u* 0*.*
Za jednistvenost se koristi klasičan trik, uzmu se dva rješenja koja zadovoljavaju iste rubne i početne uvjete, te se promatra njihova razlika.
Pošto Galerkinovu metodu nismo spominjali u ovom radu, a koristi se u dokazima ključnih rezultata, objasnit ćemo ju ukratko u nastavku.

4.3 Galerkinova metoda

Fundamentalnu ulogu u teoriji Navier Stokesovih jednadžbi imaju *Galerkinovi projektori*. Koriste se kod dokazivanja egzistencije rješenja, točnije za numeričku aproksimaciju rješenja.

Definicija 4.3.1 (Galerkinov projektor)**.** *Za svaki pozitivan cijeli broje m,* ***Galerkinov projektor*** P_m *definira se kao ortogonalan projektor prostora H na prostor razapet sa prvih m svojstvenoh vektora* $\boldsymbol{w}_1, ..., \boldsymbol{w}_m$ *Stokesovog operatora.*

Gledajmo vektorska polja definirana na ograničenom skupu. Na takvoj domeni, *Helmholtz-Leray* dekompozicija razdvaja vektorsko polje **w** na sumu gradijenta i vektor vrtložnosti. Za vektorsko polje **w** tražimo dekompoziciju u obliku

$$\mathbf{w} = \nabla \mathbf{q} + \mathbf{v}, \quad \text{div}\, \mathbf{v} = 0$$

gdje je **v** vektor vrtložnosti.
Sada uvodimo preslikavanje $P_L\ \mathbf{w} \mapsto \mathbf{v}$ kao:

$$P_L: \ \mathbf{w} \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{w})$$

Ovakvo preslikavanje zove se *Lerayov projektor*.

Definicija 4.3.2 (Stokesov operator)**.** ***Stokesov operator*** *A za vektorsko polje* ***u*** *je definiran kao*

$$A : D(A) \subset H \mapsto H, \ \ A\boldsymbol{u} = -P_L \Delta \boldsymbol{u}$$

Pošto je $\{\mathbf{w}_m\}_m$ ortonormirana baza za H, svaki $\mathbf{u} \in H$ može se zapisati kao

$$\mathbf{u} = \sum_{m=1}^{\infty} u_m \mathbf{w}_m$$

Galerkinov projektor P_m daje nam:

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{m} u_k \mathbf{w}_k$$

Sad kad smo uveli glavne pojmove, možemo opisati postupak dokazivanja. Metoda dokazivanja egzistencije bazira se na Galerkinovoj aproksimaciji. Galerkinove aproksimacije su zapravo sustavi običnih diferencijalnih jednadžbi kojima znamo rješenje. Promatramo projektor $P_m : H \to H$ na prostor razapet sa $\mathbf{w}_1, .., \mathbf{w}_m$. Primjenimo P_m na polazni problem:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \nu A\mathbf{u} + B(\mathbf{u}, \mathbf{u}) &= \mathbf{f} \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0 \end{aligned} \tag{4.10}$$

(Ovakav zapis Navier Stokesove jednadžbe detaljno se može pronaći u [2] na stranici 38.)
Nakon djelovanja projektora imamo Galerkinov sustav:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_m}{dt} + \nu A\mathbf{u}_m + B(\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_m) &= \mathbf{f}_m \\ \mathbf{u}_m(0) &= P_m \mathbf{u}_m^0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

gdje u_m pripada prostoru $P_m H$.
Neka je sada $\xi_j = \xi_j(t)$ j-ta komponenta od $\mathbf{u}_m(t)$. Dok je $n_j(t)$ j-ta komponenta od $\mathbf{f}_m(t)$.

$$\begin{aligned} \xi_j(t) &= (\mathbf{u}_m(t), \mathbf{w}_j) \\ n_j(t) &= (\mathbf{f}_m(t), \mathbf{w}_j) \end{aligned}$$

Tada je Galerkinov sustav ekvivalentan sa

$$\begin{aligned} \frac{d\xi_j}{dt} + \nu\lambda_j \xi_j + \sum_{k,l=1}^{m} b(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_l, \mathbf{w}_j)\xi_k \xi_l &= n_j, \quad j = 1, ..., m \\ \xi_j(0) &= \xi_j^0, \quad j = 1, ..., m \end{aligned} \tag{4.12}$$

Galerkinov sistem se transformirao u kvadratni sustav reda $m \times m$ običnih diferencijalnih jednadžbi, konstantih koeficijenata. Za takav kvadratni sustav znamo da postoji jedinstveno rješenje. Cilj metode je imati dovoljno lijepe uvjete na funkcije sistema (4.11), kako bi mogli pustiti $m \to \infty$. Kao rezultat dobivamo rješenje polaznog Navier Stokesovog sustava.

Bibliografija

[1] Lawrence C. Evans, *Partial differential equations*, American Mathematical Society, Providence, R.I., 2010, ISBN 9780821849743 0821849743.

[2] C. Foias, O. Manley, R. Rosa i R. Temam, *Navier-Stokes Equations and Turbulence*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, 2001.

[3] Gunther Hormann, *Lecture Notes on the THEORY OF DISTRIBUTIONS*, 2009.

[4] Boris Muha, *Mehanika fluida, bilješke s predavanja*, PMF MO, Zagreb, 2020.

[5] Temam R., *Navier Stokes equations, Theory and numerical analysis*, North-Holland publishing company - Amsterdam, 1997.

Sažetak

U ovom diplomskom radu izveli smo Navier-Stokesove jednadžbe. Navier–Stokesove jednadžbe opisuju gibanje inkompresibilnog, homogenog, Newtonovskog fluida. Unatoč rasprostranjenosti primjene, egzistencija i jedinstvenost rješenja i dalje nisu potpuno dokazani. U prvom poglavlju uveli smo funkcijske prostore ključne za teorijsko proučavanje problema. To su prostori glatkih funkcija, Lebesgueovi i Soboljevi prostori. Drugo poglavlje posvećeno je uvođenju rubnih i početnih uvjeta kako bi imali potpuno postavljen problem. Zbog kompleksnosti Navier-Stokesovih jednadžbi nemamo globalnu egzistenciju i jedinstvenost rješenja. Zato se treće poglavlje bavi izvođenjem slabe formulacije problema. I za kraj, zadnje poglavlje daje nam rezultate o egzistenciji i jedninstvenosti slabog i jakog rješenja u dimenzijama 2 i 3.

Summary

In this diploma thesis we derived Navier-Stokes equations. Navier-Stokes equations describe the motion of an incompressible, homogeneous, Newtonian fluid. Despite the prevalence of application, the existence and uniqueness of the solution are still not fully proven. In the first chapter we introduced functional spaces that are fundamental for the theoretical study of the problem. These are spaces of smooth functions, Lebesque spaces and Sobolev spaces. The second chapter is focused to the introduction of boundary and initial conditions in order to have a fully posed problem. Due to the complexity of Navier-Stokes equations, we do not have the global existence and uniqueness of the solution. Therefore, the third chapter deals with deriving a weak formulation of the problem. Finally, the last chapter gives us results on the existence and uniqueness of a weak and strong solution in dimensions 2 and 3.

Životopis

Tijana Martinčić rođena je 27.6.1994. u Puli. Pohađala je osnovnu školu u Marčani (OŠ Marčana). Srednju školu završila je Puli (Gimnazija Pula - opći smjer). Školovanje je nastavila u Zagrebu. Godine 2013. upisala je preddiplomski studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Na istom fakultetu 2018. godine upisala je diplomski sveučilišni studij Primijenjene matematike.