Zadaće optimizacije u lancima opskrbe

Nedić, Ana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Nedić

ZADAĆE OPTIMIZACIJE U LANCIMA OPSKRBE

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Marko Vrdoljak

Zagreb, rujan, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Za mamu i tatu. Hvala vam na svemu.
Hvala mentoru na savjetima i pomoći pri izradi ovog rada.

Sadržaj

Uvod

Pojam upravljanja lancem opskrbe (*Supply Chain Management*) pojavio se osamdesetih godina dvadesetog stoljeća te se odnosi na optimizaciju svih složenih aspekata opskrbnog lanca. U suvremenom poslovanju taj pojam postaje jedan od ključnih faktora konkurentske prednosti i dugoročnog uspjeha nekog poduzeća. Općenito, lanac opskrbe shvaćamo kao mrežu međusobno povezanih organizacija kojima je cilj pretvorba sirovina u gotove proizvode te isporuka tih proizvoda do krajnjih kupaca. Primjerice, ako je gotovi proizvod boca vode, tada će opskrbni lanac uključivati dobavljača boca i dobavljača čepova, proizvodnu jedinicu koja će napuniti te boce vodom i začepiti ih te distributere i veletrgovce kojima će se gotove boce isporučiti.

Često se događa da se lanac opskrbe prostire po čitavom svijetu. Kupnja sirovina se obavlja u jednoj zemlji, proizvodnja u drugoj zemlji, a distribucija gotovih proizvoda se odvija po cijelom svijetu. Upravo je zbog toga jedan od najvažnijih dijelova lanca opskrbe logistika. Njen je zadatak međusobno povezati navedene različite poslovne procese te omogućiti učinkovito i optimalno upravljanje lancem opskrbe. Pritom se koriste računalne tehnologije poput sustava za podršku odlučivanju (*Decision Support Systems*) temeljenim na optimizaciji. Oni pomažu donositeljima odluka u tumačenju podataka i donošenju poslovnih odluka u složenim poslovnim okruženjima u kojima je većina problema loše strukturirana te je za njihovo razumijevanje potrebna pomoć računala. Ti sustavi pomažu u rješavanju širokog spektra problema, od strateških problema poput dizajniranja logističke mreže, taktičkih problema poput koordinacije zaliha i donošenja transportnih odluka, do operativnih problema poput planiranja proizvodnje, usmjeravanja vozila i odabira načina isporuke.

U ovom radu predstavit će se optimizacijski modeli određivanja lokacija novih objekata, poput tvornica, skladišta i maloprodajnih objekata. Odabir mjesta na kojemu će navedeni objekti biti smješteni su primjeri strateških odluka kojima se osiguravaju nesmetana kretanja materijala u distribucijskom sustavu i koji imaju izravan utjecaj na smanjenje logističkih troškova nekog poduzeća.

Pri rješavanju ovih problema koristit ćemo metodu Lagrangeove relaksacije koja ima široku primjenu u problemima određivanja lokacije. Ta metoda je vrlo poželjna jer nam daje ocjene odozdo i ocjene odozgo za vrijednost funkcije cilja. Ona zamjenjuje originalni problem pripadnim Lagrangeovim problemom čije će optimalno rješenje dati ocjenu za funkciju cilja originalnog problema. Glavna ideja Lagrangeove relaksacije je eliminirati jedan ili više uvjeta originalnog problema koji otežavaju rješavanje problema na način da se pripadne funkcije uvjeta pomnože Lagrangeovim multiplikatorima i potom dodaju funkciji cilja. Puno je lakše tražiti optimalno rješenje dobivenog relaksiranog problema sa fiksnim vrijednostima multiplikatora, nego rješavati originalni problem zbog zanemarivanja uvjeta koji otežavaju njegovo rješavanje. Multiplikatori su korisni jer navode Lagrangeov problem ka rješenju koje će zadovoljavati relaksirane uvjete, no općenito je vrlo teško odrediti vrijednosti optimalnih Lagrangeovih multiplikatora. Možemo reći da metoda Lagrangeove relaksacije zamjenjuje problem traženja optimalnih vrijednosti svih varijabla odluke sa problemom traženja optimalnih vrijednosti Lagrangeovih multiplikatora.

Glavna prednost metode Lagrangeove relaksacije je što daje ocjene za vrijednost funkcije cilja optimalnog rješenja originalnog problema (ocjene odozdo za minimizacijski problem, odnosno ocjene odozgo za maksimizacijski problem). U nastavku se ograničujemo na probleme minimizacije. Za fiksne vrijednosti Lagrangeovih multiplikatora, optimalna vrijednost Lagrangeove funkcije je manja ili jednaka optimalnoj vrijednosti originalnog problema. Prema tome, za sve Lagrangeove multiplikatore, optimalna vrijednost Lagrangeove funkcije je ocjena odozdo za rješenje originalnog problema. Što je dobivena ocjena odozdo veća, to je bolja za traženje pravog optimalnog rješenja.

Rješenje Lagrangeovog problema za fiksne vrijednosti multiplikatora općenito neće zadovoljavati jedan ili više relaksiranih uvjeta, odnosno neće biti dopustivo za originalni problem. Ako to rješenje možemo transformirati u dopustivo rješenje za originalni problem, pripadna vrijednost funkcije cilja pružit će ocjenu odozgo za funkciju cilja originalnog minimizacijskog problema. Kada razlika ocjene odozgo i ocjene odozdo postane 0, tada smo pronašli optimalno rješenje. Inače, kada ta razlika postane dovoljno mala, primjerice manja od 1%, možemo zaustaviti algoritam jer smo pronašli rješenje koje je unutar 1% optimalnosti.

Jedan od izazova u primjeni Lagrangeove relaksacije je odabrati koje ćemo uvjete relaksirati. U potrazi za najboljim vrijednostima Lagrangeovih multiplikatora, dobiveni relaksirani problem morat ćemo rješavati stotinu ili tisuću puta, stoga je bitno dobiti relaksirani problem koji se može vrlo lako riješiti.

U idućem poglavlju teorijski ćemo predstaviti metodu Lagrangeove relaksacije te ćemo ju ilustrirati na jednostavnom primjeru. Potom ćemo u drugom poglavlju razmotriti tri važna problema vezana uz lokacije skladišta: problem P-medijana, problem određivanja lokacije skladišta ograničenog kapaciteta s jednim izvorom te dizajn distribucijskog sustava. U svakom problemu cilj je odrediti lokacije skladišta tako da ukupan trošak bude minimalan. Pritom razlikujemo fiksne troškove poput izgradnje i najma skladišta te varijabilne troškove poput prijevoza proizvoda iz skladišta do maloprodajnih objekata, kao i mogući trošak dopremanja proizvoda iz tvornica u skladišta.

Započet ćemo s problemom P-medijana, jednim od osnovnih lokacijskih problema. Potom ćemo predstavljeni model poopćiti kako bismo u njega uključili i druge važne faktore u dizajnu distribucijske mreže, poput kapaciteta skladišta i fiksnih troškova. Također ćemo razmotriti i općenitiji model u kojem se prilikom određivanja lokacija skladišta u obzir uzimaju svi dijelovi distribucijskog sustava, to jest tvornice i maloprodajni objekti.

Poglavlje 1

Lagrangeova relaksacija

1.1 Uvod

Promotrimo sljedeću zadaću cjelobrojnog programiranja:

$$\begin{aligned} z_{\mathrm{IP}} = \min\ & cx \\ Ax &= b \\ Dx &\leq e \\ x &\in \mathbb{N}_0^n, \end{aligned}$$

pri čemu je x vektor-stupac dimenzije n, b vektor-stupac dimenzije m, e vektor-stupac dimenzije k, c vektor-redak dimenzije n, A je $m \times n$ matrica, D je $k \times n$ matrica. Pritom pretpostavljamo da su sve komponente zadanih veličina cjelobrojne i podrazumijevamo da zadaća poprima rješenje. Neka je z_{IP} optimalna vrijednost funkcije cilja za taj problem i neka je

$$Q = \{x \in \mathbb{N}_0^n \mid Dx \leq e\} \neq \emptyset.$$

Uz ove oznake, zadaću zapisujemo na idući način:

$$\mathrm{IP(Q)}: \quad \begin{aligned} z_{\mathrm{IP}} = \min\ & cx \\ Ax &= b \\ x &\in Q. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Pretpostavimo da se ovaj minimizacijski problem može vrlo jednostavno riješiti po skupu Q, ali da se dodavanjem uvjeta (1.1) njegovo rješavanje znatno otežava. Prema tome, Lagrangeovom relaksacijom uvjeta (1.1), zajedno s pridruženim *Lagrangeovim multiplikatorom* $\lambda \in \mathbb{R}^m$ (vektor-redak), dobivamo sljedeću relaksiranu zadaću s optimalnom vrijednosti funkcije cilja $z_{\mathrm{LR}}(\lambda)$.

$$\mathrm{LR}(\lambda): \quad z_{\mathrm{LR}}(\lambda) = \min\{cx + \lambda(Ax - b) \mid x \in Q\}$$

Zadaću LR(λ) zovemo *Lagrangeovom relaksacijom* zadaće IP(Q), dok funkciju z_{LR} zovemo *Lagrangeovom funkcijom*. Uočimo da je za fiksne vrijednosti Lagrangeovog multiplikatora λ, optimalna vrijednost funkcije cilja Lagrangeove zadaće ocjena odozdo za optimalnu vrijednost funkcije cilja originalne zadaće.

Lema 1.1.1. *Za sve $\lambda \in \mathbb{R}^m$ vrijedi $z_{LR}(\lambda) \le z_{IP}$.*

Dokaz. Neka je x proizvoljna dopustiva točka problema IP(Q). Tada je $x \in Q$ pa je x dopustiva točka i relaksiranog problema LR(λ). Kako je $z_{\mathrm{LR}}(\lambda)$ optimalna vrijednost tog problema, vrijedi da je

$$z_{\mathrm{LR}}(\lambda) \le cx + \lambda(Ax - b) = cx.$$

Slijedi da je $z_{\mathrm{LR}}(\lambda) \le z_{\mathrm{IP}}$. □

Napomena 1.1.2. *Ako zamijenimo uvjete (1.1) u problemu IP(Q) s $Ax \le b$, tada i problemu LR(λ) dodajmo uvjet $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$ te vrijedi analogna tvrdnja Leme 1.1.1.*

U nastavku pretpostavljamo da je skup Q konačan te da je dopustivi skup sljedeće zadaće neprazan. Iduću diskusiju provodimo na problemu s uvjetima tipa nejednakosti:

$$\text{(IP):} \qquad \begin{aligned} z_{\mathrm{IP}} = \min\ & cx \\ Ax &\le b \\ x &\in Q. \end{aligned}$$

Pripadna Lagrangeova relaksacija s pridruženim multiplikatorom $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$:

$$\text{(LR)}: \quad z_{\mathrm{LR}}(\lambda) = \min\{cx + \lambda(Ax - b) \mid x \in Q\}.$$

Kako $z_{\mathrm{LR}}(\lambda) \le z_{\mathrm{IP}}$ vrijedi za sve $\lambda \in \mathbb{R}^m_+$, pronađimo onaj vektor λ za koji se postiže najveća moguća ocjena odozdo:

$$\text{(LD):} \quad z_{\mathrm{LD}} = \max_{\lambda \in \mathbb{R}^m_+} z_{\mathrm{LR}}(\lambda).$$

Problem (LD) se naziva *Lagrangeova dualna zadaća* pridružena primarnoj zadaći (IP).

Zanemarivanjem uvjeta cjelobrojnosti u zadaći (IP) dolazimo do relaksirane zadaće linearnog programiranja:

$$\text{(LP):} \qquad \begin{aligned} z_{\mathrm{LP}} = \min\ & cx \\ Ax &\le b \\ x &\in \bar{Q} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Dx \le e\}. \end{aligned}$$

Idući teorem daje karakterizaciju Lagrangeove dualne zadaće te se temelji na pojmu konveksne ljuske.

Teorem 1.1.3. *Neka su dane prethodno definirane zadaće (IP), (LR), (LD) te neka je z_{LD} optimalna vrijednost funkcije cilja Lagrangeove dualne zadaće (LD). Pretpostavljamo da je skup Q konačan. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} z_{LD} = min\ & cx \\ Ax \ & \leq \ b \\ x \ & \in \ conv(Q), \end{aligned} \tag{1.2}$$

pri čemu je $Q = \{x \in \mathbb{N}_0^n \mid Dx \leq e\} \neq \emptyset$, a konveksna ljuska skupa $Q = \{x^1, x^2, ..., x^N\}$ je

$$conv(Q) = \left\{ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k x^k : \sum_{k=1}^{N} \alpha_k = 1, \alpha_k \geq 0, k = 1, 2, ..., N \right\}.$$

Dokaz. Neka se skup Q sastoji od konačno mnogo točaka. Tada je

$$\begin{aligned} \mathrm{z_{LD}} &= \max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^m} \{\mathrm{z_{LR}}(\lambda)\} \\ &= \max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^m} \{\min cx + \lambda(Ax - b) \mid x \in Q\} \\ &= \max_{\lambda \in \mathbb{R}_+^m} \{\min cx^i + \lambda(Ax^i - b) \mid i = 1, 2, ..., N\} \\ &= \begin{cases} \max \eta \\ \text{t.d. } \eta \leq cx^i + \lambda(Ax^i - b), \quad i = 1, 2, ..., N \\ \qquad \eta \in \mathbb{R}^1, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+^m, \end{cases} \end{aligned} \tag{1.3}$$

pri čemu je varijabla η ocjena odozdo za $\{cx^i + \lambda(Ax^i - b) \mid i = 1, 2, ..., N\}$. Dobivena zadaća (1.3) je zadaća linearnog programiranja s varijablama $(\eta, \lambda) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}_+^m$. Njena dualna zadaća glasi:

$$\begin{aligned} \mathrm{z_{LD}} = \min \ & \sum_{k=1}^{N} \alpha_k (cx^k) \\ & \sum_{k=1}^{N} \alpha_k = 1 \\ & \sum_{k=1}^{N} \alpha_k (b - Ax^k) \geq 0 \\ & \alpha_k \geq 0, \quad k = 1, 2, ..., N. \end{aligned}$$

Ako postavimo da je $x = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k x^k$, pri čemu je $\sum_{k=1}^{N} \alpha_k = 1$, i $\alpha_k \geq 0, \forall k = 1, 2, ..., N$, onda dobivamo traženu zadaću:

$$\begin{aligned} \mathrm{z_{LD}} = \min\ & cx \\ Ax &\leq b \\ x &\in \mathrm{conv}(Q). \end{aligned}$$

□

Uočimo da je razlika prethodne zadaće (1.2) i primarne zadaće (IP) u tome što se prethodna zadaća odnosi na traženje konveksnih kombinacija točaka skupa Q. Zbog toga kažemo da je prethodna zadaća (1.2) *konveksifikacija* zadaće (IP).

Gornji teorem govori da je optimalna vrijednost funkcije cilja Lagrangeove dualne zadaće (LD) jednaka optimalnoj vrijednosti funkcije cilja konveksificirane zadaće (1.2). Idući teorem govori kada su optimalna vrijednost funkcije cilja Lagrangeove dualne zadaće (LD) i optimalna vrijednost funkcije cilja relaksirane zadaće linearnog programiranja (LP) jednake.

Definicija 1.1.4. *Ako za skup $Q = \{x \in \mathbb{N}_0^n \mid Dx \leq e\}$ vrijedi*

$$conv(Q) = \bar{Q} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Dx \leq e\},$$

onda kažemo da skup Q zadovoljava ***svojstvo cjelobrojnosti****.*

Teorem 1.1.5. *Neka su dane prethodno definirane zadaće (IP), (LR), (LD) i neka je skup $Q = \{x \in \mathbb{N}_0^n \mid Dx \leq e\} \neq \emptyset$ konačan. Neka je z_{LD} optimalna vrijednost funkcije cilja Lagrangeove dualne zadaće (LD), a z_{LP} optimalna vrijednost funkcije cilja relaksirane zadaće linearnog programiranja (LP). Ako skup Q zadovoljava svojstvo cjelobrojnosti, onda je $z_{LD} = z_{LP}$.*

Dokaz. Prema prethodnom Teoremu 1.1.3 i po svojstvu cjelobrojnosti, vrijedi

$$\begin{aligned} \mathrm{z_{LD}} = \min\ & cx \\ Ax &\leq b \\ x &\in \mathrm{conv}(Q) = \bar{Q} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Dx \leq e\}, \end{aligned}$$

to jest $\mathrm{z_{LD}} = \mathrm{z_{LP}}$. □

U idućoj lemi pokazat ćemo da je Lagrangeova funkcija $\mathrm{z_{LR}}(\lambda)$ po dijelovima linearna i konkavna funkcija.

Definicija 1.1.6. *Funkcija $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je **konkavna** ako vrijedi*

$$f(\alpha x^1 + (1-\alpha)x^2) \geq \alpha f(x^1) + (1-\alpha)f(x^2),$$

*za sve $x^1, x^2 \in \mathbb{R}^m$, $\alpha \in [0,1]$. Ako vrijedi obrnuta nejednakost ($\leq$), kažemo da je funkcija f **konveksna**.*

Lema 1.1.7. *Funkcija $z_{LR}(\lambda)$ je po dijelovima linearna i konkavna funkcija.*

Dokaz. Pokažimo najprije da je Lagrangeova funkcija $\mathrm{z_{LR}} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, definirana s

$$\mathrm{z_{LR}}(\lambda) = \min\{cx + \lambda(Ax - b) \mid x \in Q\}$$

konkavna.
Neka je $\mu, \nu \in \mathbb{R}^m$ i $\alpha \in [0,1]$. Tada je

$$\mathrm{z_{LR}}(\mu) = \min\{cx + \mu(Ax - b) \mid x \in Q\}$$

te

$$\mathrm{z_{LR}}(\nu) = \min\{cx + \nu(Ax - b) \mid x \in Q\}.$$

Za $\bar{\lambda} = \alpha\mu + (1-\alpha)\nu$, vrijedi

$$\mathrm{z_{LR}}(\bar{\lambda}) = \min\{cx + \bar{\lambda}(Ax - b) \mid x \in Q\}.$$

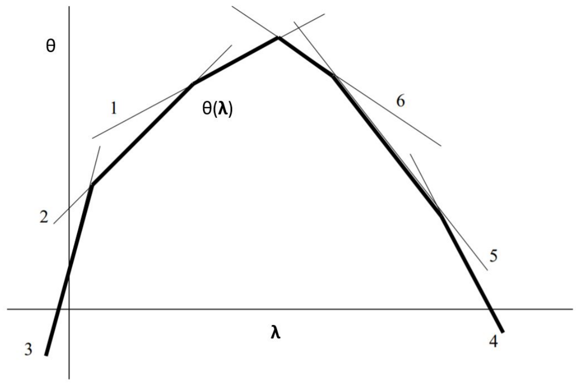
Za neki $\bar{x} \in Q$, vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathrm{z_{LR}}(\bar{\lambda}) &= c\bar{x} + \bar{\lambda}(A\bar{x} - b) \\
&= \alpha[\underbrace{c\bar{x} + \mu(A\bar{x} - b)}_{\geq\, \mathrm{z_{LR}}(\mu)}] + (1-\alpha)[\underbrace{c\bar{x} + \nu(A\bar{x} - b)}_{\geq\, \mathrm{z_{LR}}(\nu)}] \\
&\geq \alpha\ \mathrm{z_{LR}}(\mu) + (1-\alpha)\ \mathrm{z_{LR}}(\nu).
\end{aligned}$$

Dokažimo sada da je Lagrangeova funkcija $\mathrm{z_{LR}}(\lambda)$ po dijelovima linearna funkcija.
Neka se skup Q sastoji od konačno mnogo točaka, $Q = \{x^1, x^2, ..., x^N\}$. Vrijedi da je

$$\begin{aligned}
\mathrm{z_{LR}}(\lambda) &= \min\{cx + \lambda(Ax - b) \mid x \in Q\} \\
&= \min\{cx^i + \lambda(Ax^i - b) \mid i = 1, 2, ..., N\}.
\end{aligned}$$

Kako je Lagrangeova funkcija $\mathrm{z_{LR}}$ minimum konačnog skupa linearnih funkcija, slijedi da je po dijelovima linearna i konkavna funkcija. □



Slika 1.1: Primjer Lagrangeove funkcije $z_{LR}(\lambda)$ za $N = 6$

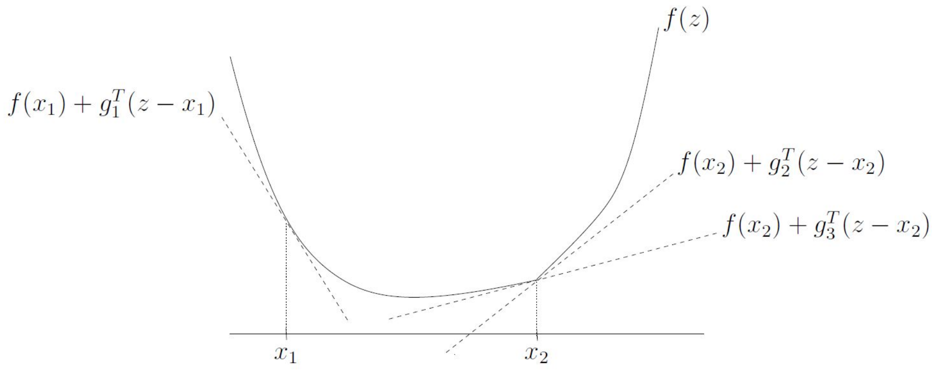
Primjer po dijelovima linearne i konkavne funkcije dan je na Slici 1.1 za $N = 6$, pri čemu je s i označen graf funkcije $\theta = cx^i + \lambda(Ax^i - b)$, za svaki $i = 1, 2, ..., 6$. Prema tome, iz Leme 1.1.7 slijedi da Lagrangeovu dualnu zadaću (LD) možemo promatrati kao problem maksimiziranja po dijelovima linearne i konkavne funkcije. Uočimo da z_{LR} nije svugdje diferencijabilna te se upravo maksimum postiže u "šiljku". Točku maksimuma možemo pronaći *metodom subgradijenata*, klasičnom metodom za minimizaciju konveksne, ali neglatke funkcije.

Definicija 1.1.8. *Za danu funkciju $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ kažemo da je vektor $g \in \mathbb{R}^m$* ***subgradijent*** *funkcije f u točki $x \in \mathbb{R}^m$ ako za svaku točku $z \in \mathbb{R}^m$ vrijedi*

$$f(z) \geq f(x) + g^T(z - x).$$

Ilustrirajmo pojam subgradijenta na primjeru konveksne funkcije. Poznato je da se graf konveksne glatke funkcije na nekom intervalu uvijek nalazi iznad njene tangente u svakoj točki tog intervala. Ako je riječ o funkciji koja nije glatka, tada govorimo o više pravaca iznad kojih se nalazi graf funkcije. Promotrimo Sliku 1.2. Konveksna funkcija f u točki x_1 ima jedinstvenu tangentu, odnosno gradijent g_1 u točki x_1. S druge strane, funkcija f u točki x_2 nije diferencijabilna pa u njoj ima mnogo subgradijenata; g_2 i g_3 su samo neki od njih.

Definicija 1.1.9. *Funkcija $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ je* ***subdiferencijabilna u točki*** *$x \in \mathbb{R}^m$ ako postoji barem jedan subgradijent u x. Skup svih subgradijenata funkcije f u točki x nazivamo* ***subdiferencijalom*** *funkcije f u točki x i označujemo s $\partial f(x)$. Funkcija f je* ***subdiferencijabilna*** *ako je subdiferencijabilna u svim $x \in \mathbb{R}^m$.*



Slika 1.2: Konveksna funkcija f i pripadni subgradijenti

Neka je dana funkcija apsolutne vrijednosti $f(z) = |z|$. Njen je pripadni subdiferencijal:

$$\partial f(0) = [-1, 1]$$

$$\partial f(x) = \begin{cases} \{1\}, & \text{ako je } x > 0 \\ \{-1\}, & \text{ako je } x < 0. \end{cases}$$

Vratimo se na problem Lagrangeove dualne zadaće (LD). Lagrangeova funkcija z_{LR} nije glatka te postiže maksimum upravo u ”šiljku”, stoga je potrebno provesti metodu subgradijenata kojom ćemo pronaći tu točku maksimuma. Ideja te metode je generirati niz vektora (λ_k) takav da $z_{\text{LR}}(\lambda_k)$ konvergira k optimalnoj vrijednosti z_{LD}.
Za dani početni vektor $\lambda_0 \in \mathbb{R}_+^m$, niz vektora je definiran s

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + t_k(Ax^k - b),$$

pri čemu je x^k optimalno rješenje problema (LR), a t_k je pozitivan skalar koji zovemo *korak*. Ako su koraci $t_1, t_2, ...$ odabrani tako da $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = 0$ i $\sum_{k\geq 0} t_k$ je neograničena, tada $z_{\text{LR}}(\lambda_k)$ konvergira k z_{LD}.
Korak koji se u praksi obično uzima je

$$t_k = \frac{\mu_k\big(U - z_{\text{LR}}(\lambda_k)\big)}{\sum_{i=1}^n (a_i x^k - b_i)^2},$$

pri čemu bi umjesto U trebala pisati optimalna vrijednost z_{LD} Lagrangeovog dualnog problema, no kako ona nije poznata, uzimamo U, ocjenu odozgo za z_{LD}. Razlika lijeve i desne strane i-tog ograničenja $Ax^k \leq b$ je $a_i x^k - b_i$, a μ_k je skalar takav da $0 < \mu_k \leq 2$. Obično se na početku algoritma uzme $\mu_0 = 2$. Svaki put kad se nakon određenog broja iteracija vrijednost $z_{\text{LR}}(\lambda)$ ne poveća, dijelimo μ_k s 2.

U idućem primjeru ilustrirat ćemo različite mogućnosti uvođenja Lagrangeovih multiplikatora.

1.2 Problem dodjeljivanja s troškovima obuke

Pretpostavimo da je dan skup od n poslova koje je potrebno dodijeliti skupu od n radnika. Označimo sa c_{ij} trošak uz koji radnik i obavlja posao j te neka je t_{ij} trošak obuke radnika i za obavljanje posla j. Pretpostavimo da raspolažemo s budžetom za obuku radnika od b jedinica. Neka je $N = \{1, 2, ..., n\}$.

Varijable odluke

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako radnik } i \text{ obavlja posao } j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Zapišimo sada taj problem na sljedeći način:

$$\min \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} c_{ij} X_{ij}$$

$$\sum_{j \in N} X_{ij} = 1, \quad \forall i \in N \tag{1.4}$$

$$\sum_{i \in N} X_{ij} = 1, \quad \forall j \in N \tag{1.5}$$

$$\sum_{i \in N} \sum_{j \in N} t_{ij} X_{ij} \leq b \tag{1.6}$$

$$X_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in N$$

Htjeli bismo minimizirati ukupan trošak dodjeljivanja, s obzirom na ograničenje u budžetu za obuku (1.6). Uvjeti (1.4) nam govore da svaki radnik obavlja točno jedan posao, a uvjeti (1.5) da svaki posao obavlja točno jedan radnik. Promotrimo različite formulacije Lagrangeove relaksacije ovog problema.

1. *Lagrangeovom relaksacijom uvjeta (1.6)*, uz Lagrangeov multiplikator $\lambda \in \mathbb{R}^1_+$, dobivamo problem dodjeljivanja:

$$\mathrm{LR}_1(\lambda): \quad \mathrm{z}^1_{\mathrm{LR}}(\lambda) = \min \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} (c_{ij} + \lambda t_{ij}) X_{ij} - \lambda b$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j \in N} X_{ij} = 1, \quad \forall i \in N \\ &\sum_{i \in N} X_{ij} = 1, \quad \forall j \in N \\ &X_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in N \end{aligned}\right\} \quad Q^1$$

Pripadni Lagrangeov dualni problem:

$$\mathrm{LD}_1: \quad \mathrm{z}^1_{\mathrm{LD}} = \max_{\lambda \in \mathbb{R}^1_+} \mathrm{z}^1_{\mathrm{LR}}(\lambda).$$

Problem dodjeljivanja možemo riješiti mađarskom metodom koju ćemo opisati u idućem potpoglavlju.

2. *Lagrangeovom relaksacijom uvjeta (1.4) i (1.5)*, uz Lagrangeove multiplikatore $u \in \mathbb{R}^n$, $v \in \mathbb{R}^n$, dobivamo problem naprtnjače (*Knapsack problem*):

$$\mathrm{LR}_2(u,v): \quad \mathrm{z}^2_{\mathrm{LR}}(u,v) = \min \sum_{i\in N} u_i + \sum_{j\in N} v_j + \sum_{i\in N}\sum_{j\in N}(c_{ij} - u_i - v_j)X_{ij}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i\in N}\sum_{j\in N} t_{ij}X_{ij} \le b \\ &X_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall i,j \in N \end{aligned}\right\} \quad Q^2$$

Pripadni Lagrangeov dualni problem:

$$\mathrm{LD}_2: \quad \mathrm{z}^2_{\mathrm{LD}} = \max_{u,v \in \mathbb{R}^n} \mathrm{z}^2_{\mathrm{LR}}(u,v).$$

O metodama rješavanja problema naprtnjače čitatelj može pronaći u knjizi [3].

3. *Lagrangeovom relaksacijom uvjeta (1.4) ili (1.5)*; na primjer (1.4), uz Lagrangeov multiplikator $u \in \mathbb{R}^n$, dobivamo sljedeći problem naprtnjače:

$$\mathrm{LR}_3(u): \quad \mathrm{z}^3_{\mathrm{LR}}(u) = \min \sum_{i\in N} u_i + \sum_{i\in N}\sum_{j\in N}(c_{ij} - u_i)X_{ij}$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i\in N} X_{ij} = 1, \quad \forall j \in N \\ &\sum_{i\in N}\sum_{j\in N} t_{ij}X_{ij} \le b \\ &X_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall i,j \in N \end{aligned}\right\} \quad Q^3$$

Pripadni Lagrangeov dualni problem:

$$\mathrm{LD}_3: \quad \mathrm{z}^3_{\mathrm{LD}} = \max_{u \in \mathbb{R}^n} \mathrm{z}^3_{\mathrm{LR}}(u).$$

4. *Lagrangeovom relaksacijom uvjeta (1.4) ili (1.5) te (1.6)*; na primjer (1.4) i (1.6), uz Lagrangeove multiplikatore $u \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^1_+$, dobivamo problem:

$$\mathrm{LR}_4(u,\lambda): \quad \mathrm{z}^4_{\mathrm{LR}}(u,\lambda) = \min \sum_{i\in N} u_i + \sum_{i\in N}\sum_{j\in N}(c_{ij} - u_i + \lambda t_{ij})X_{ij} - \lambda b$$

$$\left.\begin{aligned} \sum_{i\in N} X_{ij} = 1, &\quad \forall j \in N \\ X_{ij} \in \{0,1\}, &\quad \forall i,j \in N \end{aligned}\right\} \quad Q^4$$

kojeg je trivijalno riješiti. Za svaki j-ti posao odabiremo i-tog radnika za koje će vrijednost izraza $c_{ij} - u_i - \lambda t_{ij}$ biti najveća te postavimo odgovarajući X_{ij} na 1.
Pripadni Lagrangeov dualni problem:

$$\mathrm{LD}_4: \quad z^4_{\mathrm{LD}} = \max_{u\in\mathbb{R}^n, \lambda\in\mathbb{R}^1_+} z^4_{\mathrm{LR}}(u,\lambda).$$

Promotrimo koliko je dobra ocjena odozdo z_{LD} dobivena rješavanjem pripadne Lagrangeove dualne zadaće. U problemima $\mathrm{LR}_1(\lambda)$ i $\mathrm{LR}_4(u,\lambda)$ možemo primijeniti Teorem 1.1.5 jer su skupovi

$$Q^1 = \left\{X \in B^{n^2} : \sum_{j\in N} X_{ij} = 1, \forall i \in N, \sum_{i\in N} X_{ij} = 1, \forall j \in N\right\},$$

$$Q^4 = \left\{X \in B^{n^2} : \sum_{i\in N} X_{ij} = 1, \forall j \in N\right\},$$

pri čemu je s B^{n^2} označen skup n^2-dimenzionalnih binarnih vektora, konačni i zadovoljavaju svojstvo cjelobrojnosti. Prema tome, vrijedi

$$z^1_{\mathrm{LD}} = z^4_{\mathrm{LD}} = z_{\mathrm{LP}}.$$

Kako je

$$\begin{aligned} Q^3 &= \left\{X \in B^{n^2} : \sum_{i\in N} X_{ij} = 1, \forall j \in N, \sum_{i\in N}\sum_{j\in N} t_{ij}X_{ij} \le b\right\} \\ \subset Q^2 &= \left\{X \in B^{n^2} : \sum_{i\in N}\sum_{j\in N} t_{ij}X_{ij} \le b\right\} \\ &= \left\{X \in \mathbb{R}^{n^2} : \sum_{i\in N}\sum_{j\in N} t_{ij}X_{ij} \le b, 0 \le X_{ij} \le 1, X_{ij} \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned} Q^2 &\subseteq \left\{X \in \mathbb{R}^{n^2} : \sum_{i\in N}\sum_{j\in N} t_{ij}X_{ij} \le b, 0 \le X_{ij} \le 1, \forall i,j \in N\right\} = \bar{Q}^2 \\ \Longrightarrow \mathrm{conv}(Q^2) &\subseteq \mathrm{conv}(\bar{Q}^2) = \bar{Q}^2, \end{aligned}$$

vrijedi

$$z_{\mathrm{IP}} \le z^3_{\mathrm{LD}} \le z^2_{\mathrm{LD}} \le z^1_{\mathrm{LD}} = z^4_{\mathrm{LD}} = z_{\mathrm{LP}},$$

pri čemu je svaka od nejednakosti stroga za neku funkciju cilja.

Mađarska metoda

U klasičnom problemu dodjeljivanja dano je n poslova koje treba dodijeliti n-torici radnika. Pritom svaki radnik obavlja točno jedan posao i svaki posao obavlja točno jedan radnik. Trošak uz koji radnik i može obaviti posao j dan je sa c_{ij}. Cilj je dodijeliti poslove radnicima tako da ukupan trošak bude minimalan.

Varijable odluke

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako radnik } i \text{ obavlja posao } j \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

pri čemu su $i, j \in N$, $\quad N = \{1, 2, ..., n\}$.

Zapišimo sada taj problem na sljedeći način:

$$\min \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} c_{ij} X_{ij}$$

$$\sum_{j \in N} X_{ij} = 1, \quad \forall i \in N \tag{1.7}$$

$$\sum_{i \in N} X_{ij} = 1, \quad \forall j \in N \tag{1.8}$$

$$X_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall i, j \in N.$$

Rješavanje problema

Riješimo problem mađarskom metodom. Neka je sa $C = (c_{ij})$ dana $n \times n$ matrica troška u kojoj element c_{ij} označava cijenu i-tog radnika za obavljanje j-tog posla. Metoda transformira primarnu matricu troška u niz matrica koje vode na ekvivalentne probleme dodjeljivanja, sve dok ne dođe do matrice troška iz koje je optimalno rješenje očito. Konačna ekvivalentna matrica troška sadrži samo nenegativne elemenate te se poslovi dodijeljuju samo na pozicijama elemenata s vrijednostima 0. Kako ukupan trošak ne može biti negativan, očito je ovakav način dodjeljivanja s ukupnim troškom jednakim 0 optimalan. Pitanje je kako možemo transformirati primarnu matricu troška u taj oblik.

Problem se neće promijeniti ako u određenom retku (stupcu) matrice troška dodamo ili oduzmemo neku konstantu od svih elemenata tog retka (stupca). Drugim riječima, optimalno rješenje nove matrice troška bit će optimalno i za staru matricu i obrnuto.

Metoda započinje oduzimanjem najmanjeg elementa pojedinog retka od svakog elementa tog retka. Na taj ćemo način dobiti ekvivalentnu matricu troška koja sadrži nulu u svakom retku i sastoji se od nenegativnih komponenti. Ako matrica sadrži stupac koji nema element s vrijednosti 0, tada u svakom takvom stupcu pronađemo minimalan element te ga oduzmemo od svih elemenata tog stupca. Tako će dobivena ekvivalentna matrica troška imati nulu u svakom retku i u svakom stupcu. Metoda završava kad u matrici troška C prepoznamo n nula tako da nikoje dvije nisu u istom retku, niti u istom stupcu. Time smo došli do *potpunog sparivanja*[1]. Tada je optimalno rješenje problema očito: na tih n pozicija u permutacijskoj matrici X postavimo jedinice, a svi ostali elementi matrice X su 0.

Dokažimo zašto oduzimanjem konstante u nekom retku ili stupcu matrice troška dolazimo do ekvivalentnog problema. Označimo s Δ minimalni element fiksnog retka i_0 matrice troška. Oduzimanjem svakog elementa i_0-tog retka s Δ, dobivamo:

$$\begin{aligned} c'_{i_0 j} &= c_{i_0 j} - \Delta, \qquad j \in N \\ c'_{ij} &= c_{ij}, \qquad i \neq i_0. \end{aligned}$$

Time smo dobili novu funkciju cilja:

$$\begin{aligned} \sum_{i\in N}\sum_{j\in N} c'_{ij}X_{ij} &= \sum_{i\neq i_0, i\in N}\sum_{j\in N} c_{ij}X_{ij} + \sum_{j\in N}(c_{i_0 j} - \Delta)X_{i_0 j} \\ &= \sum_{i\in N}\sum_{j\in N} c_{ij}X_{ij} - \Delta \sum_{j\in N} X_{i_0 j} \\ &= \sum_{i\in N}\sum_{j\in N} c_{ij}X_{ij} - \Delta. \end{aligned}$$

Posljednja jednakost vrijedi jer je $\sum_{j\in N} X_{i_0 j} = 1$. Pokazali smo da se originalna funkcija cilja od nove razlikuje za Δ i zbog toga su problemi ekvivalentni (skupovi optimalnih točaka im se podudaraju). Dokaz je analogan za postupak oduzimanja minimalnog elementa svakog stupca.

	1	2	3	4
1	13	11	15	11
2	15	18	13	20
3	21	17	22	25
4	16	23	18	20

	1	2	3	4
1	2	0	4	0
2	2	5	0	7
3	4	0	5	8
4	0	7	2	4

Slika 1.3: Matrica troška (lijevo) i reducirana matrica troška (desno)

Ilustrirajmo metodu na matrici troška danoj na Slici 1.3. Oduzmemo li 11 od svakog elementa prvog retka, dobit ćemo novu matricu s dvije nule u prvom retku. Time se ukupan trošak nove matrice razlikuje od troška primarne matrice za 11. Postupak nastavljamo

[1]Skup nula u težinskoj matrici tako da nikoje dvije nisu u istom retku, niti u istom stupcu zovemo ***sparivanje***. Sparivanje s n nula zovemo ***potpuno sparivanje***.

s preostalim retcima, čime dobivamo reduciranu matricu troška. Dobivena reducirana matrica troška sadrži elemente s vrijednostima 0 na odgovarajućim pozicijama za optimalno rješenje ovog problema. Ukupan trošak za optimalno rješenje je suma minimalnih elemenata koje smo oduzimali od svakog retka: 11 + 13 + 17 + 16 = 57.

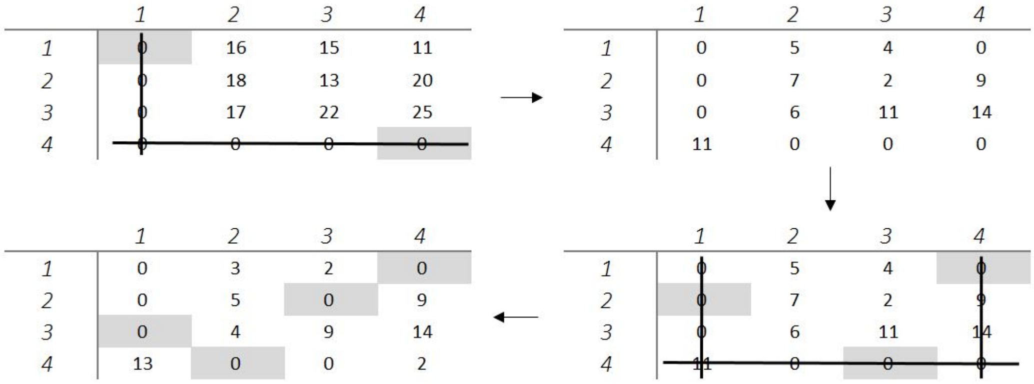
	1	2	3	4
1	0	16	15	11
2	0	18	13	20
3	0	17	22	25
4	0	0	0	0

Slika 1.4: Matrica troška za drugi primjer

Optimalno rješenje nećemo uvijek ovako jednostavno dobiti. Ne možemo računati da ćemo uvijek moći odabrati n nula u reduciranoj matrici troška koje će nam dati permutacijsku matricu. Pogledajmo primjer matrice na Slici 1.4 koja u svakom retku i u svakom stupcu ima barem jednu nulu, ali ne možemo odabrati četiri nule koje će nam dati permutacijsku matricu. Sparivanje s najvećim brojem nula zovemo ***maksimalno sparivanje***. U našem slučaju maksimalno sparivanje ima dvije nule. Najviše možemo odabrati dvije nule tako da nikoje dvije nisu u istom retku, niti stupcu. Upravo takve teže probleme rješava algoritam mađarske metode. Prije nego krenemo na rješavanje, definirajmo još neke pojmove.

Definicija 1.2.1. ***Pokrivač*** *je skup redaka ili stupaca težinske matrice koji sadrže sve nule u matrici. Elemente skupa pokrivača zovemo* **linijama**. *Kažemo da pokrivač* **pokriva** *sve nule težinske matrice.* **Minimalni pokrivač** *je pokrivač s najmanjim brojem linija.*

Ideja je stvoriti nove nule u matrici troška, ali bez elemenata s negativnim vrijednostima, kako bismo dobili veću slobodu u traženju permutacijske matrice. Algoritam započinje uočavanjem minimalnog pokrivača. U našem primjeru, precrtat ćemo prvi stupac i četvrti redak. Potom odredimo najmanji nepokriven element (11) te ga oduzmemo od svakog nepokrivenog elementa matrice i dodamo svakom elementu koji leži na presjeku dviju linija. Na ovaj postupak možemo gledati tako da smo najprije oduzeli 11 od svih elemenata matrice (oduzeli smo ga od svakog retka), čime smo dobili jednu novu nulu, a potom smo dodali 11 svakom precrtanom retku i stupcu kako bismo izbjegli negativne elemente. Time smo dobili problem ekvivalentan polaznom problemu. Postupak ponavljamo, crtamo linije kroz prvi i četvrti stupac te četvrti redak, čime smo dobili sparivanje od 3 nule. Minimalan nepokriven element (2) oduzmemo od nepokrivenih elemenata i dodamo elementima na presjeku linija. Time smo dobili novu nulu i primjećujemo da imamo potpuno sparivanje sa četiri nule. Postupak možemo vidjeti na Slici 1.5. Optimalno rješenje



	1	2	3	4
1	0	16	15	11
2	0	18	13	20
3	0	17	22	25
4	0	0	0	0

	1	2	3	4
1	0	5	4	0
2	0	7	2	9
3	0	6	11	14
4	11	0	0	0

	1	2	3	4
1	0	5	4	0
2	0	7	2	9
3	0	6	11	14
4	11	0	0	0

	1	2	3	4
1	0	3	2	0
2	0	5	0	9
3	0	4	9	14
4	13	0	0	2

Slika 1.5: Algoritam mađarske metode za drugi primjer

je:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

uz trošak $11 + 13 + 0 + 0 = 24$.

Poglavlje 2

Problem P-medijana

2.1 Uvod

Prepostavimo da imamo skup od n maloprodajnih objekata (trgovina) raspršenih na nekom zemljopisnom području. Zadatak je odabrati lokacije P istovjetnih skladišta na tom području kako bi se minimizirala ukupna udaljenost između trgovina i najbližeg skladišta. Prepostavimo da je unaprijed odabrano $m > P$ mjesta koja predstavljaju moguće lokacije skladišta. Nakon što su lokacije svih P skladišta određene, svakoj se trgovini roba isporučuje iz najbližeg skladišta. Pretpostavimo također da nemamo fiksan trošak za izgradnju skladišta na određenoj lokaciji, niti ograničenje na kapacitet skladišta .

Formulacija problema

Promotrimo bipartitni graf $G = (V, E)$, pri čemu je V skup svih vrhova, a E je skup svih bridova. Postoji particija skupa V na dva skupa, skup vrhova potencijalnih lokacija skladišta S i skup vrhova lokacija trgovina T, tako da svaki brid iz E spaja vrh iz T s vrhom iz S. Drugim riječima, između vrhova istog skupa nema bridova. Svakom bridu pridružuje se nenegativni skalar koji predstavlja udaljenost između dva vrha tog brida. Svakom vrhu koji pripada trgovini pridružuje se nenegativni skalar koji predstavlja potražnju te trgovine.
Problem P-medijana je odabrati P lokacija skladišta na grafu tako da se minimizira ukupan trošak transporta. Trošak opsluživanja trgovine pri vrhu $i \in I$ je dan kao umnožak potražnje u vrhu $i \in I$ i udaljenosti između tog vrha $i \in I$ i njemu najbližeg skladišta. U formulaciji ovog problema, koristit ćemo sljedeće oznake:

Ulazni podatci

h_i = potražnja u vrhu $i \in I$

d_{ij} = najkraća udaljenost između vrha $i \in I$ i potencijalne lokacije skladišta $j \in J$

P = broj skladišta kojima treba odrediti lokaciju

Varijable odluke

$$X_j = \begin{cases} 1, & \text{ako lociramo skladište na potencijalnoj lokaciji } j \in J \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je potražnja u vrhu } i \in I \text{ zadovoljena skladištem u vrhu } j \in J \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Zapišimo sada taj problem na sljedeći način:

$$\text{problem } P\text{-medijana:} \quad \min \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} h_i d_{ij} Y_{ij} \tag{2.1}$$

$$\sum_{j \in J} Y_{ij} = 1, \qquad \forall i \in I \tag{2.2}$$

$$\sum_{j \in J} X_j = P \tag{2.3}$$

$$Y_{ij} \leq X_j, \qquad \forall i \in I, j \in J \tag{2.4}$$

$$X_j \in \{0, 1\}, \qquad \forall j \in J \tag{2.5}$$

$$Y_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad \forall i \in I, j \in J. \tag{2.6}$$

Funkcija cilja (2.1) minimizira ukupnu težinsku udaljenost između svakog vrha potražnje i najbližeg skladišta. Uvjet (2.2) osigurava da je svaki vrh potražnje $i \in I$ dodijeljen točno jednom skladištu $j \in J$. Uvjet (2.3) osigurava da je locirano točno P skladišta. Uvjeti (2.4) povezuju lokacijske varijable (X_j) i varijable dodjele (Y_{ij}): vrh potražnje $i \in I$ može biti dodijeljen skladištu na lokaciji $j \in J$ ($Y_{ij} = 1$) samo ako je skladište locirano u vrhu $j \in J$ ($X_j = 1$). Uvjeti (2.5) i (2.6) su standardna binarna ograničenja.

Lagrangeova relaksacija

Promotrimo od kojih se koraka sastoji metoda Lagrangeove relaksacije.

1. Relaksirati jedan ili više uvjeta tako da ih se pomnoži Lagrangeovim multiplikatorima i tako pomnožene uvjete dodati funkciji cilja. Dobiveni relaksirani problem mora biti takav da se može jednostavno riješiti za fiksne vrijednosti Lagrangeovih multiplikatora.

2. Riješiti dobiveni relaksirani problem kako bismo dobili optimalne vrijednosti originalnih varijabli odluka u relaksiranom problemu.

3. Dobivene varijable odluke iz rješenja relaksiranog problema u drugom koraku koristiti za traženje dopustivog rješenja originalnog problema. Ažurirati ocjenu odozgo za najbolje dopustivo rješenje problema.
4. Rješenje dobiveno u drugom koraku koristiti za računanje ocjene odozdo za najbolju vrijednost funkcije cilja.
5. Pogledati rješenje dobiveno u drugom koraku i odrediti koji je od relaksiranih uvjeta "prekršen". Koristiti metodu subgradijentne optimizacije kako bi se izmijenili Lagrangeovi multiplikatori sa ciljem da u idućoj iteraciji relaksirani uvjeti ne budu prekršeni. Nakon što su dobiveni novi Lagrangeovi multiplikatori, vratiti se na korak 2.

Riješimo sada problem P-medijana metodom Lagrangeove relaksacije. Prikazat ćemo dva relaksirana problema, pri čemu je prvi dobiven relaksacijom uvjeta (2.2), a drugi je dobiven relaksacijom uvjeta (2.4). U obje relaksacije najprije ćemo riješiti relaksirani problem za fiksne vrijednosti Lagrangeovih multiplikatora.

Relaksacija uvjeta (2.2)

$$\begin{aligned}
\max_{\lambda} \quad \min_{X,Y} \qquad & \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} h_i d_{ij} Y_{ij} + \sum_{i\in I}\lambda_i\Big(1 - \sum_{j\in J} Y_{ij}\Big) \\
& = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}(h_i d_{ij} - \lambda_i) Y_{ij} + \sum_{i\in I}\lambda_i && (2.7) \\
\sum_{j\in J} X_j = P & && (2.8) \\
Y_{ij} \le X_j, \quad & \forall i \in I, j \in J && (2.9) \\
X_j \in \{0,1\}, \quad & \forall j \in J \\
Y_{ij} \in \{0,1\}, \quad & \forall i \in I, j \in J
\end{aligned}$$

Htjeli bismo *minimizirati* funkciju cilja za fiksne vrijednosti Lagrangeovih multiplikatora λ_i. Obzirom da su vrijednosti λ_i fiksne, $\sum_{i\in I}\lambda_i$ je konstanta. Kako bismo minimizirali funkciju cilja, gledamo koeficijent od Y_{ij}: ako je $h_i d_{ij} - \lambda_i < 0$, htjeli bismo staviti $Y_{ij} = 1$, a u suprotnom $Y_{ij} = 0$; međutim za $Y_{ij} = 1$ također moramo staviti $X_j = 1$ zbog uvjeta (2.9). Također, uvjet (2.8) nas ograničava da samo P varijabli X_j smije biti jednako 1. Zbog svega navedenog, najprije ćemo izračunati vrijednosti postavljanja svake varijable X_j na vrijednost 1. Dakle, za svaku potencijalnu lokaciju $j \in J$, računamo $V_j = \sum_{i\in I} min(0, h_i d_{ij} - \lambda_i)$. Rješenje ovog problema je očito. Pronađemo ukupno P najmanjih izračunatih vrijednosti V_j i stavimo za pripadne vrijednosti $X_j = 1$, a sve ostale $X_j = 0$. Tada možemo odrediti i

Y_{ij} :

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } X_j = 1 \text{ i } h_i d_{ij} - \lambda_i < 0 \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Relaksacija uvjeta (2.4)

$$\max_{\lambda} \quad \min_{X,Y} \qquad \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} h_i d_{ij} Y_{ij} + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \lambda_{ij} \Big(Y_{ij} - X_j \Big)$$

$$= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} (h_i d_{ij} + \lambda_{ij}) Y_{ij} - \sum_{j \in J} \Big(\sum_{i \in I} \lambda_{ij} \Big) X_j \tag{2.10}$$

$$\sum_{j \in J} Y_{ij} = 1, \qquad \forall i \in I \tag{2.11}$$

$$\sum_{j \in J} X_j = P \tag{2.12}$$

$$X_j \in \{0, 1\}, \qquad \forall j \in J \tag{2.13}$$

$$Y_{ij} \in \{0, 1\}, \qquad \forall i \in I, j \in J \tag{2.14}$$

$$\lambda_{ij} \geq 0, \qquad \forall i \in I, j \in J \tag{2.15}$$

Htjeli bismo *minimizirati* funkciju cilja (2.10) s obzirom na varijable X_j i Y_{ij} te *maksimizirati* funkciju cilja s obzirom na Lagrangeove varijable λ_{ij}. Uočimo da nam je za svaki relaksirani uvjet potreban po jedan Lagrangeov multiplikator. Kako se uvjet (2.4) odnosi na sve vrijednosti $i \in I$, i $j \in J$, imat ćemo Lagrangeove multiplikatore λ_{ij}, indeksirane po $i \in I$ i $j \in J$. Obzirom da relaksiramo uvjet nejednakosti, postavit ćemo ograničenje da Lagrangeovi multiplikatori budu nenegativni (2.15).

Prema Napomeni 1.1.2, znamo da će rješenje ovog problema dati ocjenu odozdo za funkciju cilja primarnog problema. Neka je $(X^{L^*}(\lambda), Y^{L^*}(\lambda))$ optimalno rješenje Lagrangeovog problema za neke fiksne vrijednosti Lagrangeovih multiplikatora λ. Znamo da će vrijednost Lagrangeove funkcije cilja kad u nju uvrstimo dobivene vrijednosti varijabli rješenja biti manja ili jednaka vrijednosti Lagrangeove funkcije cilja za uvrštavanje bilo kojih drugih varijabli koje zadovoljavaju uvjete (2.11)–(2.15). Posebno, bit će manja ili jednaka Lagrangeovoj funkciji cilja za uvrštavanje optimalnog rješenja originalnog problema (2.1)–(2.6) jer svako rješenje koje zadovoljava uvjete (2.2)–(2.6) zadovoljava i uvjete (2.11)–(2.15):

$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} h_i d_{ij} Y_{ij}^{L^*} + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} \lambda_{ij}\left(Y_{ij}^{L^*} - X_j^{L^*}\right) \leq$$
$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} h_i d_{ij} Y_{ij}^{*} + \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} \lambda_{ij}\left(Y_{ij}^{*} - X_j^{*}\right) \leq$$
$$\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} h_i d_{ij} Y_{ij}^{*},$$

pri čemu je (X^*, Y^*) optimalno rješenje originalnog problema (2.1)–(2.6). Prva nejednakost slijedi iz optimalnosti Lagrangeovog rješenja. Druga nejednakost slijedi iz dopustivosti optimalnog rješenja $Y_{ij}^* - X_j^* \leq 0$ zbog uvjeta (2.4) i nenegativnosti Lagrangeovih multiplikatora (2.15). Posljednji član $\sum_{i\in I}\sum_{j\in J} h_i d_{ij} Y_{ij}^*$ je optimalna vrijednost originalnog problema. Prema tome, za bilo koje nenegativne vrijednosti Lagrangeovih multiplikatora, minimizirana Lagrangeova funkcija cilja s obzirom na varijable X i Y dat će ocjenu odozdo za funkciju cilja originalnog problema.

Problem se prirodno dijeli na dva odvojena potproblema: jedan s varijablama dodjele Y_{ij} i jedan s lokacijskim varijablama X_j. Promotrimo te probleme.

Problem dodjele po varijablama Y_{ij} za fiksne vrijednosti λ_{ij}:

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sum_{i\in I}\sum_{j\in J}(h_i d_{ij} + \lambda_{ij}) Y_{ij} \\
& \sum_{j\in J} Y_{ij} = 1, \qquad \forall i \in I \\
& Y_{ij} \in \{0,1\}, \qquad \forall i \in I, j \in J
\end{aligned}$$

Problem lociranja po varijablama X_j za fiksne vrijednosti λ_{ij}:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I}\lambda_{ij}\right) X_j \\
& \sum_{j\in J} X_j = P \\
& X_j \in \{0,1\}, \qquad j \in J
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Primjetimo da problem po varijablama X_j za fiksne vrijednosti λ_{ij} postaje maksimizacijski problem (2.16) jer u (2.10) minimiziramo negativnu sumu.

Riješimo sada problem po varijablama Y_{ij}. Napravimo dekompoziciju ovog problema na više potproblema, po jedan za svaku lokaciju trgovine $i \in I$.
Označimo s $j_i^* = \text{argmin}_{j\in J}\{h_i d_{ij} + \lambda_{ij}\}$ lokaciju skladišta koja minimizira $h_i d_{ij} + \lambda_{ij}$, za svaki vrh trgovine $i \in I$. Tada postavimo

$$Y_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } k = j_i^* \\ 0, & \text{za sve ostale lokacije skladišta } k \in J. \end{cases}$$

Rješenje problema po lokacijskim varijablama X_j je očito. Pogledajmo $\sum_{i\in I} \lambda_{ij}$ za fiksne vrijednosti multiplikatora λ_{ij} i odredimo P najvećih vrijednosti. Postavimo pripadne vrijednosti X_j na 1, a sve ostale X_j postavimo na 0.

U bilo kojoj od ove dvije relaksacije, dopustivo rješenje originalnog problema vezano za Lagrangeovo rješenje možemo pronaći ignoriranjem varijabli dodjele Y_{ij} i otvaranjem skladišta na lokacijama za koje vrijedi $X_j = 1$. Sa $S = \{j \mid X_j = 1\}$ označimo skup lokacija otvorenih skladišta. Tada za svaki vrh trgovine $i \in I$ pronađemo otvorena skladišta koja su mu najbliža, $\hat{j}_i = \text{argmin}_{j\in S}\{d_{ij}\}$ i postavimo

$$\hat{Y}_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } k = \hat{j}_i \\ 0, & \text{za sve ostale lokacije } k \in J. \end{cases}$$

Sada možemo izračunati vrijednost funkcije cilja za problem P-medijana, $\sum_{i\in I}\sum_{k\in J} h_i d_{ik} \hat{Y}_{ik}$. Ta je vrijednost ocjena odozgo za rješenje problema. Prolaskom kroz sve iteracije metode Lagrangeove relaksacije možemo pronaći najmanju vrijednost ocjene odozgo i nju uzeti kao najbolju ocjenu odozgo.

Subgradijentna metoda

U bilo kojoj od promatranih relaksacija, računanje novih Lagrangeovih multiplikatora provodit ćemo metodom subgradijentne optimizacije. Osnovna ideja te metode je za fiksne vrijednosti varijabli X_j i Y_{ij} pronaći vrijednosti Lagrangeovih multiplikatora koji maksimiziraju Lagrangeovu funkciju cilja. U nastavku navodimo računanje koraka t^n i Lagrangeovih multiplikatora, za svaku relaksaciju posebno.

Relaksacija uvjeta (2.2)

Kod prve Lagrangeove relaksacije računamo korak t^n u n-toj iteraciji Lagrangeove metode na sljedeći način:

$$t^n = \frac{\alpha^n(U - \mathcal{L}^n)}{\sum\limits_{i\in I}\Big(\sum\limits_{j\in J} Y_{ij}^n - 1\Big)^2} \tag{2.17}$$

pri čemu je

t^n = korak u n-toj iteraciji Lagrangeove metode

α^n = konstanta u n-toj iteraciji, pri čemu se obično kreće sa $\alpha^1 = 2$

U = najbolja (najmanja) ocjena odozgo za funkciju cilja problema P-medijana

$\mathcal{L}^n$ = funkcija cilja Lagrangeove funkcije (2.7) (u slučaju relaksacije uvjeta (2.4) riječ je o funkciji (2.10)) u n-toj iteraciji

Y^n_{ij} = optimalna vrijednost varijable dodjele Y_{ij} u n-toj iteraciji.

Lagrangeovi multiplikatori računaju se sljedećom jednadžbom:

$$\lambda_i^{n+1} = \max\left\{0, \lambda_i^n - t^n\Big(\sum_{j\in J} Y^n_{ij} - 1\Big)\right\}$$

pri čemu je

λ_i^n = Lagrangeov multiplikator u n-toj iteraciji za vrh i.

Primjetimo da je relaksacijom uvjeta jednakosti (2.2) generalno za očekivati da će Lagrangeovi multiplikatori biti $\lambda \in \mathbb{R}^n$. Mi smo ih ipak ograničili na nenegativne vrijednosti i to smijemo, sve dok su sve potražnje h_i i sve udaljenosti d_{ij} nenegativne. Time ćemo utjecati na poboljšanje vrijednosti ocjena odozdo dobivenih iz Lagrangeove funkcije cilja (2.7).

Relaksacija uvjeta (2.4)

Kod računanja Lagrangeovih multiplikatora za drugu relaksaciju, potrebne su sljedeće izmjene u jednadžbama:

$$t^n = \frac{\alpha^n(U - \mathcal{L}^n)}{\sum_{i\in I}\Big(\sum_{j\in J} Y^n_{ij} - X^n_j\Big)^2}$$

pri čemu su sve oznake iste kao i prije, uz dodatnu oznaku

X^n_j = optimalna vrijednost lokacijske varijable X_j u n-toj iteraciji.

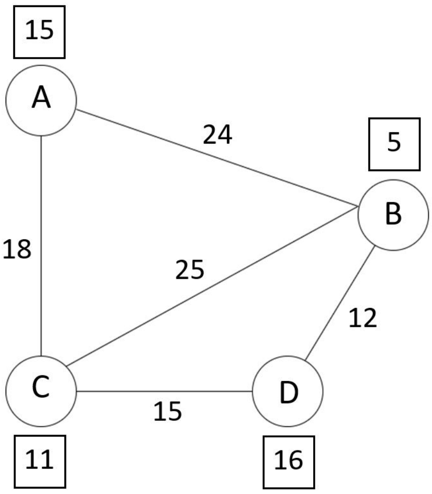
Lagrangeovi multiplikatori se računaju na sljedeći način:

$$\lambda_{ij}^{n+1} = \max\left\{0, \lambda_{ij}^n + t^n\Big(\sum_{j\in J} Y^n_{ij} - X^n_j\Big)\right\}.$$

U bilo kojoj od relaksacija, Lagrangeove multiplikatore možemo inicijalizirati na razne načine. Jednostavan način je inicijalizirati ih sve na neku konstantnu vrijednost. Taj način ćemo korisiti u rješavanju sljedećeg primjera.

2.2 Primjer problema *P*-medijana

Kako bismo ilustrirali formulaciju problema P-medijana i pripadne relaksacije, promotrimo mrežu na Slici 2.1 koja se sastoji od vrhova A, B, C, D i bridova na kojima je navedena udaljenost d_{ij} između svaka dva vrha i i j. Brojevi u kvadratićima pokraj vrhova predstavljaju potražnju h_i.



Slika 2.1: Mreža za problem P-medijana

Formulacija problema

Formulirajmo ovaj problem za $P = 2$.

$$\begin{aligned} \min \quad & h_A d_{AA} Y_{AA} + h_A d_{AB} Y_{AB} + h_A d_{AC} Y_{AC} + h_A d_{AD} Y_{AD} \\ & + h_B d_{BA} Y_{BA} + h_B d_{BB} Y_{BB} + h_B d_{BC} Y_{BC} + h_B d_{BD} Y_{BD} \\ & + h_C d_{CA} Y_{CA} + h_C d_{CB} Y_{CB} + h_C d_{CC} Y_{CC} + h_C d_{CD} Y_{CD} \\ & + h_D d_{DA} Y_{DA} + h_D d_{DB} Y_{DB} + h_D d_{DC} Y_{DC} + h_D d_{DD} Y_{DD} \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned} Y_{AA} + Y_{AB} + Y_{AC} + Y_{AD} &= 1 \\ Y_{BA} + Y_{BB} + Y_{BC} + Y_{BD} &= 1 \\ Y_{CA} + Y_{CB} + Y_{CC} + Y_{CD} &= 1 \\ Y_{DA} + Y_{DB} + Y_{DC} + Y_{DD} &= 1 \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$X_A + X_B + X_C + X_D = 2 \tag{2.20}$$

$$\begin{aligned}
Y_{AA} \leq X_A, \quad Y_{AB} \leq X_A, \quad Y_{AC} \leq X_A, \quad Y_{AD} \leq X_A \\
Y_{BA} \leq X_B, \quad Y_{BB} \leq X_B, \quad Y_{BA} \leq X_B, \quad Y_{BD} \leq X_B \\
Y_{CA} \leq X_C, \quad Y_{CB} \leq X_C, \quad Y_{CC} \leq X_C, \quad Y_{CD} \leq X_C \\
Y_{DA} \leq X_D, \quad Y_{DB} \leq X_D, \quad Y_{CD} \leq X_D, \quad Y_{DD} \leq X_D
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$X_A, X_B, X_C, X_D \in \{0, 1\} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned}
&Y_{AA}, Y_{AB}, Y_{AC}, Y_{AD}, Y_{BA}, Y_{BB}, Y_{BC}, Y_{BD}, \\
&Y_{CA}, Y_{CB}, Y_{CC}, Y_{CD}, Y_{DA}, Y_{DB}, Y_{DC}, Y_{DD} \in \{0, 1\}
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Računanjem umnoška potražnje h_i i udaljenosti d_{ij} za sve vrhove te uvrštavanjem u (2.18), dobivamo:

$$\begin{aligned}
\min \quad & 0Y_{AA} + 360Y_{AB} + 270Y_{AC} + 495Y_{AD} \\
& + 120Y_{BA} + 0Y_{BB} + 125Y_{BC} + 60Y_{BD} \\
& + 198Y_{CA} + 275Y_{CB} + 0Y_{CC} + 165Y_{CD} \\
& + 528Y_{DA} + 192Y_{DB} + 240Y_{DC} + 0Y_{DD}
\end{aligned}$$

s obzirom na (2.19)–(2.23).

Lagrangeova relaksacija

Relaksacija uvjeta (2.19)

Relaksiranjem uvjeta (2.19), dobije se prva od prethodno razmotrenih relaksacija:

$$\begin{aligned}
\max_{\lambda} \quad \min_{X,Y} \quad & (0 - \lambda_A)Y_{AA} + (360 - \lambda_A)Y_{AB} + (270 - \lambda_A)Y_{AC} + (495 - \lambda_A)Y_{AD} \\
& + (120 - \lambda_B)Y_{BA} + (0 - \lambda_B)Y_{BB} + (125 - \lambda_B)Y_{BC} + (60 - \lambda_B)Y_{BD} \\
& + (198 - \lambda_C)Y_{CA} + (275 - \lambda_C)Y_{CB} + (0 - \lambda_C)Y_{CC} + (165 - \lambda_C)Y_{CD} \\
& + (528 - \lambda_D)Y_{DA} + (192 - \lambda_D)Y_{DB} + (240 - \lambda_D)Y_{DC} + (0 - \lambda_D)Y_{DD} \\
& + \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C + \lambda_D
\end{aligned}$$

s obzirom na (2.20)–(2.23).

Kao što smo prethodno najavili, inicijalizirat ćemo sve Lagrangeove multiplikatore na konstantnu vrijednost: $\lambda_A = \lambda_B = \lambda_C = \lambda_D = 150$. Sada za svaku potencijalnu lokaciju $j \in J$, računamo $V_j = \sum_{i \in I} \min(0, h_i d_{ij} - \lambda_i)$. Na primjer, za vrh A računamo:

$$\begin{aligned}
V_A &= \min(0, h_A d_{AA} - \lambda_A) + \min(0, h_B d_{BA} - \lambda_B) + \min(0, h_C d_{CA} - \lambda_C) + \min(0, h_D d_{DA} - \lambda_D) \\
&= \min(0, -150) + \min(0, 120 - 150) + \min(0, 198 - 150) + \min(0, 528 - 150) \\
&= -150 - 30 + 0 + 0 \\
&= -180.
\end{aligned}$$

Nakon što to napravimo za svaku potencijalnu lokaciju, dobijemo sljedeće:

- $V_A = -180$ jer bismo postavili $Y_{AA} = Y_{BA} = 1$ kad bismo imali skladište smješteno u vrhu A, to jest $X_A = 1$
- $V_B = -150$ jer bismo postavili $Y_{BB} = 1$ kad bismo imali skladište smješteno u vrhu B, to jest $X_B = 1$
- $V_C = -25 - 150 = -175$ jer bismo postavili $Y_{BC} = Y_{CC} = 1$ kad bismo imali skladište smješteno u vrhu C, to jest $X_C = 1$
- $V_D = -90 - 150 = -240$ jer bismo postavili $Y_{BD} = Y_{DD} = 1$ kad bismo imali skladište smješteno u vrhu D, to jest $X_D = 1$.

Obzirom da zbog $P = 2$ moramo odabrati dva skladišta, smjestit ćemo ih u vrhove A i D, $X_A = X_D = 1$ jer su oni s najmanjim vrijednostima V_j, a ostale X_B i X_C postavimo na 0. Prema tome, u Lagrangeovu funkciju cilja treba uvrstiti $Y_{AA} = Y_{BA} = Y_{BD} = Y_{DD} = 1$, a za sve ostale vrijednosti $Y_{ij} = 0$. Tada je Lagrangeova funkcija cilja $V_A + V_D + \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C + \lambda_D = -180 - 240 + 600 = 180$. Time smo dobili ocjenu odozdo za funkciju cilja u ovoj iteraciji. S druge strane, funkcija cilja za problem 2-medijana za smještanje skladišta u vrhove A i D je 225 jer smo vrhove B i C dodijelili najbližem vrhu D, $Y_{BD} = Y_{CD} = 1$. Prema tome, ocjena odozgo za funkciju cilja je 225. Kako ocjena odozdo i ocjena odozgo nisu jednake, potrebno je izračunati vrijednosti Y_{ij} i nezadovoljenih relaksiranih uvjeta kako bismo dobili nove Lagrangeove multiplikatore.

Relaksirani uvjeti (2.19) nisu zadovoljeni jer bismo smještanjem skladišta u vrhove A i D u Lagrangeovom problemu postavili da je $Y_{AA} = Y_{BA} = Y_{BD} = Y_{DD} = 1$, a za sve ostale vrijednosti $Y_{ij} = 0$. Time bi vrh B bio dodijeljen dvama skladištima, a vrh C ne bi bio dodijeljen nijednom skladištu. Prema tome, uvjeti (2.19) su "prekršeni" za ta dva vrha. Suma kvadriranih nezadovoljenih uvjeta je 2:

$$\sum_{i \in I} \Big(\sum_{j \in J} Y_{ij}^1 - 1 \Big)^2 = (Y_{AA} - 1)^2 + (Y_{BA} + Y_{BD} - 1)^2 + (-1)^2 + (Y_{DD} - 1)^2 = 2.$$

Koristeći (2.17), dobivamo korak:

$$t^1 = \frac{\alpha^1(U - \mathcal{L}^1)}{\sum_{i \in I}\left(\sum_{j \in J} Y_{ij}^1 - 1\right)^2} = \frac{2(225 - 180)}{2} = 45$$

Još moramo izračunati nove Lagrangeove multiplikatore:

$$\lambda_B^2 = \max\left\{0, \lambda_B^1 - t^1\left(\sum_{j \in J} Y_{ij}^1 - 1\right)\right\} = \max\left\{0, 150 - 45\left(Y_{BA} + Y_{BD} - 1\right)\right\} = 105$$

$$\lambda_C^2 = \max\left\{0, \lambda_C^1 - t^1\left(\sum_{j \in J} Y_{ij}^1 - 1\right)\right\} = \max\left\{0, 150 - 45\left(0 - 1\right)\right\} = 195$$

Time smo završili prvu iteraciju.

U drugoj iteraciji ponovno računamo V_j, pri čemu uvrštavamo nove Lagrangeove multiplikatore λ_B^2 i λ_C^2, dok λ_A i λ_D ostaju nepromijenjeni. Na primjer, za vrh A računamo:

$$\begin{aligned} V_A &= \min(0, h_A d_{AA} - \lambda_A) + \min(0, h_B d_{BA} - \lambda_B^2) + \min(0, h_C d_{CA} - \lambda_C^2) + \min(0, h_D d_{DA} - \lambda_D) \\ &= \min(0, -150) + \min(0, 120 - 105) + \min(0, 198 - 195) + \min(0, 528 - 150) \\ &= -150 + 0 + 0 + 0 \\ &= -150. \end{aligned}$$

Nakon što to napravimo za svaku potencijalnu lokaciju $j \in J$, dobijemo sljedeće:

- $V_A = -150$ jer bismo samo vrh A dodijelili skladištu u vrhu A, $Y_{AA} = 1$ kad bi skladište bilo smješteno u vrhu A
- $V_B = -105$ jer bismo samo vrh B dodijelili skladištu u vrhu B $Y_{BB} = 1$ kad bi skladište bilo smješteno u vrhu B
- $V_C = -195$ jer bismo samo vrh C dodijelili skladištu u vrhu C, $Y_{CC} = 1$ kad bi skladište bilo smješteno u vrhu C
- $V_D = (60-105)+(165-195)+(0-150) = -225$ jer bismo vrhove B, C i D dodijelili skladištu u vrhu D, $Y_{BD} = Y_{CD} = Y_{DD} = 1$ kad bi skladište bilo smješteno u vrhu D.

Ponovno tražimo dvije najmanje vrijednosti V_j te vidimo da se one postižu za vrhove C i D, stoga skladišta smještamo na te lokacije: $X_C = X_D = 1$ te postavljamo $X_A = X_B = 0$. Računamo vrijednost Lagrangeove funkcije cilja: $V_C+V_D+\lambda_A+\lambda_B+\lambda_C+\lambda_D = -195-225+600 = 180$. Kako ova ocjena odozdo nije bolja od prethodne, tada ocjena odozdo ostaje pri istoj vrijednosti 180. Svaki put kad ne uspijemo poboljšati ocjenu odozdo, podijelit ćemo konstantu α s 2, stoga imamo $\alpha^2 = 1$. Smještanjem skladišta u vrhove C i D, funkcija cilja za problem 2-medijana je 330 jer smo vrh A dodijelili skladištu u vrhu C te smo vrh B dodijelili skladištu u vrhu D. Kako je ova ocjena odozgo lošija od prethodne, onda najbolja ocjena odozgo ostaje pri vrijednosti 225.

Kako su skladišta smještena u vrhovima C i D, postavili bismo $Y_{CC} = Y_{BD} = Y_{CD} = Y_{DD} = 1$, a za sve ostale vrijednosti $Y_{ij} = 0$ u Lagrangeovom problemu. Time bi vrh C bio dodijeljen dvama skladištima, a vrh A ne bi bio dodijeljen nijednom skladištu. Dakle, uvjeti (2.19) su "prekršeni" za ta dva vrha. Suma kvadriranih nezadovoljenih uvjeta je ponovno 2:

$$\sum_{i\in I}\Big(\sum_{j\in J} Y_{ij}^2 - 1\Big)^2 = (-1)^2 + (Y_{BD}-1)^2 + (Y_{CC}+Y_{CD}-1)^2 + (Y_{DD}-1)^2 = 2.$$

Izračunajmo korak i nove Lagrangeove multiplikatore.

$$t^2 = \frac{\alpha^2(U-\mathcal{L}^2)}{\sum\limits_{i\in I}\Big(\sum\limits_{j\in J} Y_{ij}^2 - 1\Big)^2} = \frac{1(225-180)}{2} = \frac{45}{2} = 22.5$$

$$\lambda_C^3 = \max\Big\{0, \lambda_C^2 - t^2\Big(\sum_{j\in J} Y_{ij}^2 - 1\Big)\Big\} = \max\Big\{0, 195 - 22.5\Big(Y_{CC}+Y_{CD}-1\Big)\Big\} = 172.5$$

$$\lambda_A^3 = \max\Big\{0, \lambda_A^2 - t^2\Big(\sum_{j\in J} Y_{ij}^2 - 1\Big)\Big\} = \max\Big\{0, 150 - 22.5\Big(0-1\Big)\Big\} = 172.5$$

Time smo završili drugu iteraciju.

U trećoj iteraciji računanjem V_j, za svaku potencijalnu lokaciju $j \in J$ dobijemo:

- $V_A = -172.5$ jer bismo samo vrh A dodijelili skladištu u vrhu A, $Y_{AA} = 1$ kad bi skladište bilo smješteno u vrhu A
- $V_B = -105$ jer bismo samo vrh B dodijelili skladištu u vrhu B $Y_{BB} = 1$ kad bi skladište bilo smješteno u vrhu B
- $V_C = -172.5$ jer bismo samo vrh C dodijelili skladištu u vrhu C, $Y_{CC} = 1$ kad bi skladište bilo smješteno u vrhu C

- $V_D = -202.5$ jer bismo vrhove B, C i D dodijelili skladištu u vrhu D,

  $Y_{BD} = Y_{CD} = Y_{DD} = 1$ kad bi skladište bilo smješteno u vrhu D.

Vidimo da se dvije najmanje vrijednosti postižu za vrh D te za vrhove A i C. Proizvoljno se odlučimo za jedan od vrhova A i C; neka to bude vrh A. Prema tome, vrijedi $X_A = X_D = 1$, a preostale dvije vrijednosti X_B i $X_C = 0$ postavimo na 0. Vrijednost Lagrangeove funkcije cilja je $V_A + V_D + \lambda_A + \lambda_B + \lambda_C + \lambda_D = -172.5 - 202.5 + 600 = 225$. Kako je ova ocjena odozdo upravo jednaka najboljoj ocjeni odozgo koju smo dosad pronašli, možemo se zaustaviti. U ovom slučaju smo dokazali da je rješenje dobiveno metodom Lagrangeove relaksacije optimalno.

Relaksacija uvjeta (2.21)

Promotrimo sada kako izgleda Lagrangeov problem ako oslabimo uvjet (2.21):

$$\begin{aligned}\max_{\lambda} \quad \min_{X,Y} \quad & (0 + \lambda_{AA})Y_{AA} + (360 + \lambda_{AB})Y_{AB} + (270 + \lambda_{AC})Y_{AC} + (495 + \lambda_{AD})Y_{AD} \\ & + (120 + \lambda_{BA})Y_{BA} + (0 + \lambda_{BB})Y_{BB} + (125 + \lambda_{BC})Y_{BC} + (60 + \lambda_{BD})Y_{BD} \\ & + (198 + \lambda_{CA})Y_{CA} + (275 + \lambda_{CB})Y_{CB} + (0 + \lambda_{CC})Y_{CC} + (165 + \lambda_{CD})Y_{CD} \\ & + (528 + \lambda_{DA})Y_{DA} + (192 + \lambda_{DB})Y_{DB} + (240 + \lambda_{DC})Y_{DC} + (0 + \lambda_{DD})Y_{DD} \\ & - (\lambda_{AA} + \lambda_{BA} + \lambda_{CA} + \lambda_{DA})X_A \\ & - (\lambda_{AB} + \lambda_{BB} + \lambda_{CB} + \lambda_{DB})X_B \\ & - (\lambda_{AC} + \lambda_{BC} + \lambda_{CC} + \lambda_{DC})X_C \\ & - (\lambda_{AD} + \lambda_{BD} + \lambda_{CD} + \lambda_{DD})X_D\end{aligned}$$

s obzirom na (2.19), (2.20), (2.22), (2.23). U ovoj relaksaciji nećemo inicijalizirati sve Lagrangeove multiplikatore na konstantnu vrijednost, nego ćemo provesti sljedeću inicijalizaciju:

$$\lambda_{ij} = \begin{cases} h_i \cdot \min\limits_{j \in J, j \neq i} d_{ij} - \epsilon, & \text{ako } i = j \\ 0, & \text{ako } i \neq j \end{cases}$$

Drugim riječima, ako je $i = j$, tada je multiplikator jednak umnošku potražnje h_i u vrhu $i \in I$ te udaljenosti vrha $i \in I$ do drugog najbiližeg vrha umanjenom za mali broj ϵ. Ako $i \neq j$, tada je multiplikator jednak 0. Time ćemo već u prvoj iteraciji otvoriti P skladišta u vrhovima s najvećim umnoškom potražnje i drugog najbližeg vrha. Svaki od tih P vrhova bi najviše doprinio funkciji cilja kad ne bi otvorili skladište u tom vrhu nego bi opsluživali sve vrhove iz drugog najbližeg skladišta. Promotrimo inicijaciju varijabli:

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako } i = j \\ 0, & \text{ako } i \neq j \end{cases}$$

Ovom inicijalizacijom će se P nenegativnih vrijednosti λ_{ij} povezanih s odabranim lokacijama poništiti s koeficijentima pripadnih varijabla dodjele. Tada će vrijednost Lagrangeove funkcije cilja biti jednaka sumi po svim vrhovima potražnje u kojima ne otvaramo skladišta. Sumirat će se umnožak potražnje u vrhu i udaljenost do drugog najbližeg vrha. Sve navedeno treba protumačiti u skladu s uvedenim brojem ϵ, kako bismo izbjegli ponavljanje istih vrijednosti u funkciji cilja već u prvoj iteraciji. U Tablici

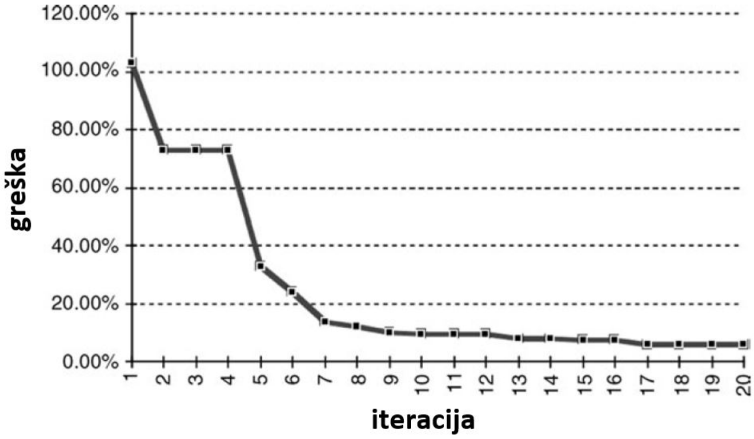
	vrh j			
vrh i	A	B	C	D
A	269.9	0.0	0.0	0.0
B	0.0	59.9	0.0	0.0
C	0.0	0.0	164.9	0.0
D	0.0	0.0	0.0	191.9

Tablica 2.1: Inicijalizacija Lagrangeovih multiplikatora λ_{ij} za drugu relaksaciju

2.1 možemo vidjeti dobivene vrijednosti inicijaliziranih Lagrangeovih multiplikatora. Za dvije najveće vrijednosti $\sum_{i\in I}\lambda_{ij}$ postavimo $X_A = X_D = 1$, a ostale vrijednosti postavimo na 0. Dakle, otvorili smo skladišta u vrhovima A i D. Tada je Lagrangeova funkcija cilja $\lambda_{AA}Y_{AA} + \lambda_{BB}Y_{BB} + \lambda_{CC}Y_{CC} + \lambda_{DD}Y_{DD} - \lambda_{AA}X_A - \lambda_{DD}X_D = \lambda_{BB} + \lambda_{CC} = 224.8$. Time smo dobili inicijalnu ocjenu odozdo za funkciju cilja. Otvaranje skladišta u vrhovima A i D nam daje vrijednost od 225 za funkciju cilja za problem 2-medijana jer smo vrhove B i C dodijelili vrhu D, $Y_{BD} = Y_{CD} = 1$. Time smo dobili i inicijalnu ocjenu odozgo za funkciju cilja. Obzirom da su u ovom primjeru sve potražnje h_i i sve udaljenosti d_{ij} cjelobrojne vrijednosti, znamo da će vrijednost funkcije cilja također biti cjelobrojna. Prema tome, kako se ocjena odozgo i ocjena odozdo razlikuju za manje od 1, možemo se zaustaviti, znajući da smo dobili optimalno rješenje problema.

U ovom smo primjeru dobili optimalno rješenje već u prvoj iteraciji. To je inače vrlo rijetka pojava. Primjerice, na Slici 2.2 možemo vidjeti razliku ocjene odozgo i ocjene odozdo prikazanu kao postotak ocjene odozdo za slučaj $P = 1$. Problem je riješen koristeći iste inicijalne Lagrangeove multiplikatore iz Tablice 2.1 te je konstanta α podijeljena s 2 ako se ocjena odozdo nije poboljšala nakon svake tri uzastopne iteracije. Možemo vidjeti da čak i nakon 20 iteracija razlika ocjene odozgo i odozdo prelazi 6%.

Nadalje, za grafove puno veće od one sa Slike 2.1 i s malim brojem otvorenih skladišta, predstavljena formula za računanje Lagrangeovih multiplikatora neće biti dobar izbor za njihovu inicijalizaciju jer će puno vrhova potražnje morati biti dodijeljeno skladištima u vrhovima koji su udaljeniji od drugog najbližeg vrha. Prema tome, možemo zaključiti



Slika 2.2: Postotna razlika ocjene odozdo i ocjene odozgo, koristeći drugu relaksaciju problema 1-medijana za mrežu sa Slike 2.1

da će korištenje Lagrangeovih multiplikatora iz Tablice 2.1 na primjerima s vrlo malom mrežom biti pametniji izbor za postizanje optimalnog rješenja, nego na primjerima s velikom mrežom.

Christofides i Beasley (1982) su usporedili ove dvije relaksacije koristeći drugačiju formulaciju problema P-medijana. Zapisali su uvjete (2.4) u njihovoj slabijoj verziji:

$$\sum_{i \in I} Y_{ij} \leq |I| X_j, \quad \forall j \in J$$

pri čemu je $|I|$ broj vrhova potražnje. Ako nijedno skladište nije otvoreno u vrhu $j \in J$, to jest $X_j = 0$, tada sve varijable dodjele koje koriste ovo skladište moraju biti 0, $\sum_{i \in I} Y_{ij} = 0$. Ovom formulacijom problema se smanjio broj potrebnih Lagrangeovih multiplikatora jer je u tom slučaju za svaku potencijalnu lokaciju $j \in J$ potreban samo jedan Lagrangeov multiplikator, za razliku od uvjeta (2.4) za koje je potreban po jedan multiplikator za svaki par vrha potražnje i potencijalne lokacije. Christofides i Beasley su ustanovili da je prva relaksacija primijenjena na ovu formulaciju problema puno bolja od druge.

Druga relaksacija podrazumijeva izvođenje više iteracija, nego što ih je potrebno u prvoj relaksaciji. Naime, puno je više uvjeta potrebno relaksirati relaksiranjem uvjeta (2.4), nego relaksiranjem uvjeta (2.2). Također, druga relaksacija razdvaja lokacijske varijable X_j od varijabla dodjele Y_{ij}, čime dobivamo slabiju relaksaciju.

Poglavlje 3

Lociranje skladišta ograničenog kapaciteta s jednim izvorom

Novi problem kojeg ćemo predstaviti je problem određivanja lokacije skladišta ograničenog kapaciteta s jednim izvorom (*Single-Source Capacitated Facility Location Problem*). Pretpostavimo da imamo skup od n maloprodajnih objekata (trgovina) raspršenih na nekom zemljopisnom području. Zadatak je odabrati optimalne lokacije skladišta na tom području. Prepostavimo da je unaprijed odabrano m mjesta koja predstavljaju moguće lokacije skladišta. Nakon što su lokacije skladišta određene, svakoj se trgovini roba isporučuje iz točno jednog skladišta. Za razliku od prethodnog problema P-medijana u kojem je broj skladišta unaprijed poznat, ovdje to nije slučaj. Dodatna razlika je pojava fiksnog troška i ograničenja na kapacitet skladišta.

3.1 Formulacija problema

Neka je $M = \{1, 2, ..., m\}$ skup potencijalnih lokacija skladišta i $N = \{1, 2, ..., n\}$ skup trgovina. Ako je skladište otvoreno, odnosno ako je smješteno na lokaciji $j \in M$, tada s f_j označavamo fiksan trošak skladišta i s q_j označavamo kapacitet skladišta. Za svaki $i \in N$ s w_i ćemo označiti potražnju između trgovine i i njenog skladišta. Svaka trgovina $i \in N$ potražuje w_i jedinica proizvoda koje moraju biti isporučene iz točno jednog skladišta $j \in M$ s kapacitetom q_j. Trošak prijevoza w_i jedinica proizvoda iz skladišta j do trgovine i označit ćemo s c_{ij}, za svaki $i \in N$ i $j \in M$. Treba odlučiti gdje ćemo locirati skladišta te potom dodijeliti trgovine tim skladištima tako da ukupan trošak bude minimiziran. Uočimo da trgovina neće uvijek biti dodijeljena najbližem skladištu zbog ograničenja kapaciteta skladišta. Definirajmo najprije binarne varijable odluke Y_j i X_{ij}:

$$Y_j = \begin{cases} 1, & \text{ako je skladište otvoreno na lokaciji } j, \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

za svaku lokaciju $j \in M$,

$$X_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako skladište na lokaciji } j \text{ opslužuje trgovinu } i \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

za $i \in N, j \in M$.

Sada možemo zapisati taj problem na sljedeći način:

$$Z^* = \min \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} X_{ij} + \sum_{j=1}^{m} f_j Y_j \tag{3.1}$$

$$\sum_{j=1}^{m} X_{ij} = 1, \quad \forall i \in N \tag{3.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} w_i X_{ij} \leq q_j Y_j, \quad \forall j \in M \tag{3.3}$$

$$X_{ij}, Y_j \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in N, j \in M. \tag{3.4}$$

Fukcija cilja minimizira fiksan trošak f_j otvorenog skladišta i trošak prijevoza c_{ij} koji nastaje kad je potražnja zadovoljena. Uvjeti (3.2) zajedno s binarnim uvjetima (3.4) osiguravaju da je svaka trgovina dodijeljena točno jednom skladištu.
Uvjeti (3.3) osiguravaju da se svaka trgovina može dodijeliti skladištu samo ako je skladište otvoreno na lokaciji j te da je pritom suma potražnji svih dodijeljenih trgovina manja ili jednaka kapacitetu tog skladišta.

Postoje različite kategorije problema određivanja lokacije skladišta. U danom problemu (3.1)–(3.4), kapacitet svakog skladišta je ograničen te je svakoj trgovini dodijeljeno samo jedno skladište (*Single-Source Capacitated Facility Location Problem*). Ovaj primjer je suprotan primjeru u kojem je trgovina opslužena s više različitih skladišta (*Multiple-Source Capacitated Facility Location Problem*). U tom bi slučaju svaka trgovina dobila mnogo malih pošiljaka istog proizvoda, što komplicira poslovanje poduzeća, gledano iz menadžerskog, marketinškog i računovodstvenog aspekta. Zbog toga je prikladnije ograničiti varijable (X) da budu binarne, odnosno da isporuke dolaze iz samo jednog skladišta.

3.2 Lagrangeova relaksacija

Neka je Z^* optimalna vrijednost rješenja primarnog problema (3.1)–(3.4). Relaksiranjem uvjeta (3.2) dobivamo sljedeći problem Lagrangeove relaksacije:

$$\begin{aligned} Z_\lambda = \min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}X_{ij} + \sum_{j=1}^{m} f_jY_j + \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(1-\sum_{j=1}^{m}X_{ij}), \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}^n \\ \sum_{i=1}^{n} w_iX_{ij} \le q_jY_j, \quad \forall j\in M \\ X_{ij}, Y_j \in \{0,1\}, \quad \forall i\in N, j\in M. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Neka je Z_λ optimalna vrijednost dobivenog problema. Njegovo optimalno rješenje ne mora biti dopustivo u primarnom problemu jer smo iz njega uklonili uvjet (3.2). Međutim, prema Lemi 1.1.1, optimalno rješenje problema nam daje ocjenu odozdo za funkciju cilja originalnog problema. Za bilo koji vektor $\lambda\in\mathbb{R}^n$, optimalna vrijednost Z_λ relaksiranog problema je ocjena odozdo za optimalnu vrijednost Z^* primarnog problema:

$$Z_\lambda \le Z^*, \quad \forall\lambda\in\mathbb{R}^n. \tag{3.6}$$

Problem (3.5) razdvajamo na m problema. Za danu lokaciju skladišta $j\in M$, rješavamo sljedeći problem, pri čemu je Z_λ^j optimalna vrijednost njegove funkcije cilja:

$$\begin{aligned} Z_\lambda^j- = \min \sum_{i=1}^{n}(c_{ij}-\lambda_i)X_{ij} + f_jY_j \\ \sum_{i=1}^{n} w_iX_{ij} \le q_jY_j \\ X_{ij}\in\{0,1\}, \forall i\in N \\ Y_j\in\{0,1\}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Rješavanje problema (3.7)

Kako bismo došli do rješenja problema (3.7), razlikujemo dva moguća slučaja:

1. $Y_j = 0 \Rightarrow X_{ij} = 0, \forall i\in N$
   Ako skladište nije otvoreno na lokaciji j, tada nijedna trgovina ne može biti dodijeljena tom skladištu.

2. $Y_j = 1$
   Ako je skladište otvoreno na lokaciji $j \in M$, tada imamo sljedeći problem:

$$\min \sum_{i=1}^{n}(c_{ij} - \lambda_i)X_{ij} + f_j$$
$$\sum_{i=1}^{n} w_i X_{ij} \leq q_j$$
$$X_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i \in N.$$

   Taj je problem ekvivalentan *0-1 problemu naprtnjače*: za danu lokaciju skladišta $j \in M$,

$$\min \sum_{i=1}^{n}(c_{ij} - \lambda_i)X_{ij}$$
$$\sum_{i=1}^{n} w_i X_{ij} \leq q_j$$
$$X_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i \in N.$$

   Nakon rješavanja 0-1 problema naprtnjače[1], možemo izračunati vrijednost sljedećeg izraza za svako skladište:

$$\sum_{i=1}^{n}(c_{ij} - \lambda_i)X_{ij} + f_j.$$

   Taj izraz shvaćamo kao umanjeni trošak za Y_j i razlikujemo dva slučaja:

   a) Ako je $\sum_{i=1}^{n}(c_{ij} - \lambda_i)X_{ij} + f_j < 0$,
      onda je $Y_j = 1$, a X_{ij} su vrijednosti dobivene rješavanjem 0-1 problema naprtnjače.
   b) Ako je $\sum_{i=1}^{n}(c_{ij} - \lambda_i)X_{ij} + f_j \geq 0$, nema koristi od otvaranja skladišta pa iz $Y_j = 0$ slijedi $X_{ij} = 0$, za sve $i \in N$.

Zapišimo sada rješenje problema (3.5):

$$Z_\lambda = \sum_{i=1}^{m} Z_\lambda^j + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Kao što smo već spomenuli u (3.6), za bilo koji vektor $\lambda \in \mathbb{R}^n$, Z_λ je ocjena odozdo za optimalno rješenje Z^*. U nastojanju da dobijemo najbolju moguću ocjenu odozdo koristimo metodu subgradijenata.

[1] O rješavanju 0-1 problema naprtnjače čitatelj može pročitati u [3].

3.3 Ocjene odozgo

Za dani skup multiplikatora, ako vrijednosti (X) zadovoljavaju (3.2), svakoj trgovini dodijeljeno je točno jedno skladište i tada imamo optimalno rješenje problema (3.1)–(3.4). Inače tražimo dopustivo rješenje problema na sljedeći način.
Za dane vrijednosti Z_λ^j, za svaki $j \in M$, neka je π permutacija brojeva $1, 2, ..., m$ takva da

$$Z_\lambda^{\pi(1)} \leq Z_\lambda^{\pi(2)} \leq ... \leq Z_\lambda^{\pi(m)}.$$

Ovaj algoritam se temelji na prijašnjim rješenjima 0-1 problema naprtnjače pri rješavanju problema (3.7) za određeni vektor λ. Na primjer, ako je za dano skladište j rješenje problema 0, to jest, ako je optimalna naprtnjača prazna, tada zaključujemo da u tom trenutku nije pametno odabrati tu lokaciju za skladište. S druge strane, ako 0-1 problem naprtnjače ima vrlo negativan trošak, zaključujemo da je pametno odabrati tu lokaciju skladišta.
Neka je W najmanji mogući broj skladišta koja koristimo u optimalnom rješenju problema (3.1)–(3.4). Taj se broj može odrediti rješavanjem problema pakiranja u spremnike (*Bin-packing problem*) koji je generalizacija problema naprtnjače. Više o tom problemu čitatelj može pronaći u knjizi [3].

Algoritam započinje tako da "najboljoj" lokaciji skladišta $j = \pi(1)$ dodijeli one trgovine koje su rješenje 0-1 problema naprtnjače. Potom uzmemo iduću "najbolju" lokaciju, $j = \pi(2)$ i riješimo novi problem naprtnjače: svakoj trgovini i kojoj još nismo dodijelili skladište, definiramo novi trošak: $\overline{c_{ij}} = c_{ij} + \lambda_i$. Sve trgovine u ovom rješenju dodijelimo lokaciji j. Ako je optimalna naprtnjača prazna, tada skladište nije smješteno na toj lokaciji pa prelazimo na iduću lokaciju. Postupak nastavljamo sve dok ne odredimo lokacije svih W skladišta.

Rješenje još uvijek ne mora biti dopustivo rješenje problema (3.1)–(3.4) jer postoji mogućnost da neke trgovine nisu dodijeljene skladištu. U tom slučaju, nedodijeljene trgovine se dodjeljuju skladištima kojima su već određene lokacije, pod uvjetom da su dodatni troškovi minimalni. U slučaju potrebe, mogu se otvoriti nova skladišta, prateći redoslijed određen s π.

Poglavlje 4

Dizajn distribucijskog sustava

Za razliku od prethodnih modela u kojima smo nastojali minimizirati trošak prijevoza iz skladišta do trgovina, u ovom ćemo primjeru predstaviti realističniji model koji uključuje i trošak prijevoza iz tvornica do skladišta.

Promotrimo sljedeći problem: prepostavimo da je skup tvornica i trgovina raspršen na nekom zemljopisnom području. Svaka trgovina potražuje više različitih vrsta proizvoda koji se proizvode u tvornicama do popunjenja njihovih kapaciteta. Pritom se pojedina vrsta proizvoda šalje trgovini samo iz jednog skladišta. Dakle, trgovina može primiti pošiljke iz različitih skladišta, ali u svakoj se pošiljci mora nalaziti proizvod druge vrste. S druge strane, skladište može primiti pošiljke iz bilo koje tvornice te nema ograničenja na količinu poslanog proizvoda, sve dok je to unutar kapaciteta skladišta.

Zadatak je odabrati optimalne lokacije skladišta u distribucijskoj mreži s popisa potencijalnih lokacija te odrediti kako isporučiti proizvode iz tvornica do skladišta i potom iz skladišta do trgovina.

U ukupan trošak ubrajamo trošak prijevoza po jedinici proizvoda iz skladišta do trgovina, ali i trošak prijevoza iz tvornica do skladišta. Također, kao i prije, potrebno je ubrojiti fiksan trošak svakog otvorenog skladišta.

4.1 Formulacija problema

U formulaciji ovog problema ćemo koristiti sljedeće oznake:

Ulazni podatci

L = broj tvornica; neka je $\mathcal{L} = \{1, 2, ..., L\}$

J = broj potencijalnih lokacija skladišta; neka je $\mathcal{J} = \{1, 2, ..., J\}$

I = broj trgovina; neka je $\mathcal{I} = \{1, 2, ..., I\}$

K = broj proizvoda; neka je $\mathcal{K} = \{1, 2, ..., K\}$

W = broj skladišta kojima ćemo odrediti lokaciju

c_{ljk} = trošak prijevoza jedinice proizvoda k iz tvornice l do skladišta na lokaciji j

d_{jik} = trošak prijevoza jedinice proizvoda k iz skladišta na lokaciji j do trgovine i

f_j = fiksan trošak otvaranja skladišta na lokaciji j

v_{lk} = zalihe proizvoda k u tvornici l

w_{ik} = potražnja za proizvodom k u trgovini i

s_k = volumen jedne jedinice proizvoda k

q_j = kapacitet (u volumenu) skladišta na lokaciji j

Varijable odluke

$$Y_j = \begin{cases} 1, & \text{ako je skladište otvoreno na lokaciji } j, \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

za svaku lokaciju $j \in \mathcal{J}$

U_{ljk} = količina proizvoda k poslanog iz tvornice l do skladišta j,

za svaki $l \in \mathcal{L}, j \in \mathcal{J}, k \in \mathcal{K}$

$$X_{jik} = \begin{cases} 1, & \text{ako skladište na lokaciji } j \text{ opslužuje trgovinu } i \text{ proizvodom } k \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

za svaki $j \in \mathcal{J}, i \in \mathcal{I}, k \in \mathcal{K}$

Sada možemo formulirati problem dizajna distribucijskog sustava:

$$\min \sum_{l=1}^{L} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} c_{ljk} U_{ljk} + \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} d_{jik} w_{ik} X_{jik} + \sum_{j=1}^{J} f_j Y_j$$

$$\sum_{j=1}^{J} X_{jik} = 1, \quad \forall i \in \mathcal{I}, k \in \mathcal{K} \tag{4.1}$$

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{k=1}^{K} s_k w_{ik} X_{jik} \leq q_j Y_j, \quad \forall j \in \mathcal{J} \tag{4.2}$$

$$\sum_{i=1}^{I} w_{ik} X_{jik} = \sum_{l=1}^{L} U_{ljk}, \quad \forall j \in J, k \in \mathcal{K} \tag{4.3}$$

$$\sum_{j=1}^{J} U_{ljk} \leq v_{lk}, \quad \forall l \in \mathcal{L}, k \in \mathcal{K} \tag{4.4}$$

$$\sum_{j=1}^{J} Y_j = W \tag{4.5}$$

$$Y_j, X_{jik} \in \{0, 1\}, \quad \forall i \in I, j \in \mathcal{J}, k \in \mathcal{K} \tag{4.6}$$

$$U_{ljk} \geq 0, \quad \forall l \in \mathcal{L}, j \in \mathcal{J}, k \in \mathcal{K}. \tag{4.7}$$

Funkcija cilja minimizira trošak prijevoza od tvornica do skladišta te od skladišta do trgovina i fiksan trošak otvorenih skladišta. Uvjet (4.1) osigurava da je svaki par *trgovina-proizvod* dodijeljen točno jednom skladištu. Uvjet (4.2) osigurava da kapacitet skladišta nije prekoračen. Uvjet (4.3) predstavlja zakon očuvanja kretanja proizvoda u svakom skladištu, odnosno osigurava da je količina svakog proizvoda koja dolazi iz tvornice jednaka količini koja će biti isporučena iz skladišta prema trgovinama. Uvjet (4.4) je uvjet na zalihe. Uvjet (4.5) osigurava da je otvoreno točno W skladišta.

4.2 Lagrangeova relaksacija

Relaksirajmo uvjete (4.1) i pridružimo im multiplikatore λ_{ik} te uvjete (4.3) s pridruženim multiplikatorima θ_{jk}. Dobili smo sljedeći relaksirani problem:

$$\begin{aligned} Z_{\lambda,\theta} = \min \quad & \sum_{l=1}^{L} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} c_{ljk} U_{ljk} + \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} d_{jik} w_{ik} X_{jik} + \sum_{j=1}^{J} f_j Y_j \\ & + \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \theta_{jk} \left(\sum_{i=1}^{I} w_{ik} X_{jik} - \sum_{l=1}^{L} U_{ljk} \right) + \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=1}^{K} \lambda_{ik} \left(1 - \sum_{j=1}^{J} X_{jik} \right), \end{aligned}$$

pri čemu vrijede uvjeti (4.2), (4.4), (4.5), (4.6), (4.7). Neka je $Z_{\lambda,\theta}$ optimalna vrijednost funkcije cilja tog problema. Problem se prirodno dijeli na sljedeća dva problema:

$$\begin{aligned} \text{problem P}_1: \quad & Z_1 = \min \sum_{l=1}^{L}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(c_{ljk} - \theta_{jk})U_{ljk} \\ & \sum_{j=1}^{J} U_{ljk} \leq v_{lk}, \quad \forall l \in \mathcal{L}, k \in \mathcal{K} \\ & U_{ljk} \geq 0, \quad \forall l \in \mathcal{L}, j \in \mathcal{J}, k \in \mathcal{K} \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} \text{problem P}_2: \quad & Z_2 = \min \sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K}(d_{jik}w_{ik} - \lambda_{ik} + \theta_{jk}w_{ik})X_{jik} + \sum_{j=1}^{J} f_jY_j \\ & \sum_{i=1}^{I}\sum_{k=1}^{K} s_kw_{ik}X_{jik} \leq q_jY_j, \quad \forall j \in \mathcal{J} \\ & \sum_{j=1}^{J} Y_j = W, \\ & Y_j, X_{jik} \in \{0,1\}, \quad \forall i \in I, j \in \mathcal{J}, k \in \mathcal{K}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Rješavanje problema $\mathbf{P_1}$

Problem P_1 rješavamo posebno za svaki par *tvornica-proizvod*. Ako u sve potprobleme dodamo sljedeća ograničenja, možemo poboljšati njihove funkcije cilja:

$$s_k \sum_{l=1}^{L} U_{ljk} \leq q_j, \quad \forall j \in \mathcal{J}, k \in \mathcal{K}. \tag{4.10}$$

Za svaki par *tvornica-proizvod*, na primjer za tvornicu l i proizvod k, sortirajmo J vrijednosti $\overline{c_j} = c_{ljk} - \theta_{jk}$. Označimo najmanju vrijednost s $\overline{c_{j'}}$. Ako je $\overline{c_{j'}} \geq 0$, tada je rješenje takvo da se proizvod neće isporučiti skladištu. S druge strane, ako je $\overline{c_{j'}} < 0$, tada treba isporučiti najveću moguću količinu tog proizvoda duž luka (l, j'), pri čemu on zadovoljava uvjete (4.8) i (4.10). Ako sve zalihe v_{lk} proizvoda k u tvornici l nisu isporučene, tada treba ponovno isporučiti najveću moguću količinu tog proizvoda za sljedeći najjeftiniji luk, sve dok je njegov umanjeni trošak ($\overline{c}$) negativan. Postupak ponavljamo sve dok se sav proizvod ne isporuči ili umanjeni trošak više ne bude negativan. U tom slučaju treba prijeći na idući par *tvornica-proizvod* i ponoviti cijeli postupak. Gotovi smo kad prođemo sve *tvornica-proizvod* kombinacije.

Rješavanje problema P_2

Ovaj problem riješit ćemo slično kao što smo riješili relaksirani problem (3.5). Ignorirajmo najprije ograničenja (4.9). Podijelimo sada problem po skladištima, na J različitih potproblema. Kao i prije, za dano skladište $j \in \mathcal{L}$, može biti $Y_j = 0$ ili $Y_j = 1$. U prvom slučaju dobijemo da mora biti $X_{jik} = 0$, za svaki $i \in \mathcal{I}$, $k \in \mathcal{K}$.
Ako je $Y_j = 1$, tada dolazimo do problema naprtnjače s IK stvari. Dakle, za svaku kombinaciju *trgovina-proizvod*, imamo po jedan problem naprtnjače za riješiti. Nakon što riješimo svaki od problema naprtnjače i dobijemo pripadne vrijednosti funkcije cilja Z_2^j, poredajmo ih na sljedeći način:

$$Z_2^{\pi(1)} \leq Z_2^{\pi(2)} \leq ... \leq Z_2^{\pi(J)},$$

pri čemu je π permutacija brojeva $1, 2, ..., J$. Optimalno rješenje Z_2 problema P_2 je odabrati W najmanjih vrijednosti:

$$Z_2 = \sum_{j=1}^{W} Z_2^{\pi(j)}.$$

Za fiksirane vektore λ i θ, ocjena odozdo je

$$Z_{\lambda,\theta} = Z_1 + Z_2 + \sum_{i=1}^{I} \sum_{k=1}^{K} \lambda_{ik}.$$

Ponovno koristimo subgradijentnu metodu kako bi maksimizirali tu ocjenu, $\max_{\lambda,\theta}\{Z_{\lambda,\theta}\}$.

4.3 Ocjene odozgo

U svakoj iteraciji subgradijentne metode nastojimo konstruirati dopustivo rješenje problema. Rješenje problema P_2 može biti takvo da je kombinacija *trgovina-proizvod* dodijeljena različitim skladištima. Cilj je odrediti skup svih kombinacija *trgovina-proizvod* koje su pridružene samo jednom skladištu i popraviti ih. Ostale kombinacije *trgovina-proizvod* dodjeljujemo skladištima na idući način. Za svaku kombinaciju *trgovina-proizvod* najprije se pitamo može li se uopće ta kombinacija dodijeliti skladištu, odnosno imamo li dovoljnu zalihu tog proizvoda u skladištu. Ako je potražnja tog proizvoda u trgovini zadovoljena, onda računamo trošak priduživanja te kombinacije s tim skladištem. Dakle, treba zbrojiti trošak prijevoza tog proizvoda u količini određenoj potražnjom iz skladišta te trošak prijevoza iz tvornica do skladišta. Za svaku kombinaciju *trgovina-proizvod* određujemo ”penal” vezan uz dodjeljivanje isporuke drugom najboljem skladištu, umjesto najboljem skladištu.

Bibliografija

[1] M. S. Daskin, *Network and discrete location: models, algorithms, and applications*, John Wiley & Sons Ltd., Hoboken, 1995.

[2] F. S. Hillier, G. J. Lieberman, *Introduction to Operations Research*, San Francisco: Holden-Day, 1967.

[3] S. Martello, P. Toth, *Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations*, John Wiley & Sons Ltd., 1990.

[4] A. Muriel, D. Simchi-Levi, *Supply Chain Design and Planning – Applications of Optimization Techniques for Strategic and Tactical Models*, u A.G. de Kok and S.C. Graves, Eds., Handbooks in operations research and management science, Vol.11, Supply chain management, pp. 17–93, Elsevier, 2003.

[5] G. L. Nemhauser, L. A. Wolsey, *Integer and combinatorial optimization*, Wiley, 1999.

Sažetak

Strateške odluke poput određivanja lokacija novih objekata, poput tvornica, skladišta i trgovina su ključne za učinkovito i optimalno upravljanje lancem opskrbe. Za dani skup potencijalnih lokacija skladišta te skup trgovina, problem određivanja lokacija skladišta je odrediti lokacije skladišta tako da ukupan trošak dodjeljivanja trgovina skladištima, uz zadovoljavanje potražnje bude minimalan. U ovom radu ćemo predstaviti optimizacijske modele za tri važna problema određivanja lokacija skladišta, započevši s problemom P-medijana. Potom ćemo taj model proširiti kako bismo uključili dodatne faktore poput kapaciteta skladišta i fiksnih troškova. Završit ćemo s općenitijim modelom u kojem se prilikom određivanja lokacija skladišta u obzir uzimaju svi dijelovi distribucijskog sustava, to jest tvornice i trgovine. Pri rješavanju ovih problema koristit ćemo metodu Lagrangeove relaksacije. Ideja te metode je doći do relaksiranog problema kojeg je jednostavnije riješiti, nego originalni problem. Do relaksiranog problema dolazimo eliminiranjem jednog ili više uvjeta originalnog problema na način da se pripadne funkcije uvjeta pomnože Lagrangeovim multiplikatorima i potom dodaju funkciji cilja.

Summary

Strategic decisions like determining the location of facilities such as factories, warehouses and retailers are critical to the effective and efficient supply chain management. Given a set of potential locations for warehouses and a set of retailers, the warehouse location problem is to find the location of warehouses in such a way that the total cost for assigning retailers to warehouses, while satisfying the demand is minimized. In this thesis, optimization models for three important warehouse location problems will be presented, beginning with the P-Median Problem. We then extend this model in order to incorporate additional factors, such as warehouse capacities and fixed costs. We conclude by giving a more general model where all levels of the distribution system, plants and retailers, are taken into account when deciding warehouse locations. In order to solve these problems, we will use the Lagrangian relaxation method. The idea of this method is to obtain a relaxed problem, which is easier to solve than the original problem. This is done by eliminating one or more of the original problem constraints and adding these constraints, multiplied by Lagrangian multiplier, to the objective function.

Životopis

Rođena sam 29. ožujka 1994. godine u Zagrebu. Po završetku osnovnoškolskog obrazovanja, upisala sam Desetu gimnaziju Ivan Supek; opći smjer, koju sam završila 2012. godine. Zbog razvijenog interesa za matematikom, svoje obrazovanje nastavljam na Preddiplomskom sveučilišnom studiju matematika; nastavnički smjer na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu. Nakon stjecanja prvostupničke diplome 2017. godine, na istom fakultetu upisujem Diplomski sveučilišni studij Primijenjena matematika.