Kategorička logika

Šestak, Teo

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Teo Šestak

Kategorička logika

Diplomski rad

Voditelji rada:

dr. sc. Ivan Tomašić,
Queen Mary University of London

prof. dr. sc. Mladen Vuković,
PMF - Matematički odsjek,
Sveučilište u Zagrebu

Zagreb, rujan 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik

2. ______________________________ , član

3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________

2. ______________________________

3. ______________________________

Sadržaj

Uvod

U matematici često promatramo općenitu strukturu nekog objekta koji proučavamo. Pod time mislimo da se neki matematički objekt može proučcavati na način da se izdvoje njegova svojstva i proučava apstraktna teorija objekata koji zadovoljavaju ta svojstva? Primjerice, umjesto promatranja svojstava skupa cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ sa operacijom zbrajanja, možemo promatrati općenitu Abelovu grupu $(G, +)$ i svaki dokazani teorem primijeniti na $(\mathbb{Z}, +)$. Takav pristup možemo nazvati "strukturalističkim" pristupom. Vrlo moćan alat u takvom pristupu je teorija kategorija, koja je nastala u 40-im godinama 20. stoljeća, zahvaljujući Samuelu Eilenbergu i Saundersu Mac Laneu, u njihovim radovima u području algebarske topologije, a danas ima široku primjenu u raznim granama matematike. Osnovna ideja teorije kategorija je formalizacija matematičkih struktura i pojmova vezanih uz njih, poput preslikavanja koja čuvaju tu strukturu (primjerice vektorskih prostora i homomorfizama među njima).

Kategorička logika je strukturalistički pogled na samu logiku. Proučavamo ju koristeći teoriju kategorija, ne kao temelj matematike, nego kao dio same matematike.

Mogli bismo na taj način proučavati samo logiku prvog reda i teorije prvog reda, no možemo i više od toga. Možemo promatrati i višesortnu logiku, u kojoj svaki term ima svoj tip. Klasična logika prvog reda ima samo jedan tip i svi termi imaju isti tip, pa na ovaj način dobivamo jedno njeno proširenje.

Ako dozvolimo formule koje imaju beskonačno mnogo konjunkcija ili disjunkcija, tada dobivamo beskonačnu logiku, jedno drugo proširenje logike prvog reda. No, možemo učiniti i suprotno - umjesto promatranja složenijih logika, možemo promatrati i jednostavnije. U klasičnoj logici prvog reda vrijedi zakon isključenja trećeg $A \vee (\neg A)$. Možemo ga izbaciti i promatrati takvu logiku, tako zvanu intuicionističku logiku, u kojoj nisu dozvoljeni indirektni dokazi dvođenja na kontradikciju.

Na sve te razne vrste logika možemo gledati kao na "objekte sa strukturom", poput grupa ili prstenova. U jednom slučaju bi nas moglo zanimati postoje li inverzi elemenata, a u drugom postoje li negacije formula.

U ovome radu ćemo pokazati na koji način pomoću teorije kategorija i teorije toposa konstruirati modele za neku formalnu teoriju unutar za to pogodne kategorije. Vidjet ćemo da će nam, ovisno o "složenosti" teorije, trebati kategorije s više strukture. Krećemo s rezultatima iz teorije kategorija koji su nam potrebni te ćemo dati definiciju toposa. Zatim nam je cilj dati definicije i pokazati neka svojstva regularnih, koherentnih, Heytingovih i geometrijskih kategorija. Svaka od tih klasa kategorija sadrži modele za određene klase teorija, kao što ćemo i pokazati. Nakon što opišemo kako izgledaju modeli unutar kategorija, razmatrat ćemo konstrukciju sintaktičke kategorije. To je kategorija koja sadrži generički model, tj. model sa svojstvom da se ostali modeli mogu dobiti kao njegova slika pri određenom preslikavanju. Konačno, pokazat ćemo da pomoću sintaktičke kategorije možemo konstruirati klasifikacijski topos, tj. topos koji među toposima ima istu ulogu kao sintaktička među kategorijama te sadrži univerzalni model koji ima analognu ulogu kao generički model.

Takav pogled na logiku i teoriju modela nam otvara mnoge mogućnosti. Primjerice, moguće je konstruirati takozvani Cohenov topos, nazvan po matematičaru Paulu Cohenu, koji je 1963. dokazao da je negacija hipoteze kontinuuma konzistentna s Zermelo-Fraenkelovom teorijom skupova uz aksiom izbora. Cohenov topos zadovoljava aksiom izbora, no hipoteza kontinuuma ne vrijedi. Također, moguće je dobiti i neke "neobične" rezultate. Primjerice, promatranjem modela intuicionističke logike možemo pronaći topos u kojem su sve funkcije iz $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ neprekidne, što nam daje svojevrsni dokaz da je za matematičku analizu kakvu koristimo potreban aksiom $A \vee (\neg A)$ te da je "intuicionistička analiza" konzistentna s tvrdnjom da su sve realne funkcije neprekidne.

Stoga vidimo da kategorička logika omogućava, ne samo proučavanje logike, nego i matematike općenito, kroz teoriju toposa.

1 Rezultati teorije toposa

Od interesa su nam određene klase kategorija koji se nazivaju toposi. U ovoj cjelini ćemo ukratko navesti rezultate iz teorije toposa koji će nam biti potrebni.

Prvo navodimo nekoliko definicija i rezultata iz teorije kategorija koji su nam potrebni kako bismo definirali topos, a zatim dajemo definicije elementarnog toposa i Grothendieckovog toposa.

1.1 Rezultati teorije kategorija

Započinjemo navođenjem pojmova i rezultata iz teorije kategorija, većinom prateći [4] i poglavlje "Categorical preliminaries" iz [3].

Jedan od osnovnih pojmova teorije kategorija jest pojam limesa. On se definira na sljedeći način:

Definicija 1.1.1. *Neka su $\mathcal{C}$ i $\mathcal{J}$ kategorije te $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ kategorija funktora sa $\mathcal{J}$ u $\mathcal{C}$. ($\mathcal{J}$ nazivamo i* indeksna kategorija*, a objekte of $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$* dijagrami.*)*

Neka je C objekt iz $\mathcal{C}$. Prirodna transformacija α s konstantnog dijagrama $\Delta_{\mathcal{J}}(C)$ (koji za sve $j \in \mathcal{J}$ ima istu vrijednost C) na neki drugi dijagram A se zove konus *nad A sa vrhom C (u oznaci $\alpha : C \to A$).*

Konus $\pi : L \to A$ je univerzalan *ako za svaki drugi konus $f : C \to A$ postoji jedinstven morfizam $g : C \to L$ u $\mathcal{C}$ takav da vrijedi $\pi_j \circ g = f_j$ za svaki j iz $\mathcal{J}$, kao na sljedećem komutativnom dijagramu:*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, dashed, "g"] \arrow[dr, "f_j"] \arrow[ddr, "f_k"'] & & L \arrow[dl, "\pi_j"'] \arrow[ddl, "\pi_k"] \\
& A(j) \arrow[d, "A(u)"] & \\
& A(k) &
\end{tikzcd} \qquad u : j \to k.$$

Limes *dijagrama $A : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ je univerzalni konus $\pi : L \to A$ (ili, ponekad nepreciznije, limesom nazivamo njegov vrh L).*

Uočimo da je limes jedinstven do na izomorfizam. Neka je $\pi : L \to A$ (ili, kao prirodna transformacija $\pi : \Delta_{\mathcal{J}} \to A$) limes dijagrama A. Ako promotrimo kategoriju svih konusa nad dijagramom A, njezini objekti su konusi nad A, a morfizmi su definirani preko morfizama između vrhova. Iz definicije limesa tada slijedi da je π terminalni objekt u toj kategoriji, pa je jedinstven do na izomorfizam.

Nas će zanimati "dovoljno lijepe" kategorije, tj. one za koje limes svih konačnih ili svih malih dijagrama postoji. Postojanje općenitih limesa je prejako svojstvo i nama nije od interesa.

Definicija 1.1.2. *Za kategoriju $\mathcal{C}$ kažemo da je*

(a) Konačno potpuna[1] *ako ima sve konačne limese, tj. ako za svaku konačnu kategoriju $\mathcal{J}$ svaki funktor $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ ima limes.*

(b) Potpuna *(ili* malo-potpuna[2]*) ako ima sve male limese, tj. ako za svaku malu kategoriju $\mathcal{J}$ svaki funktor $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ ima limes.*

Funktori između konačno potpunih kategorija koji čuvaju strukturu će nam biti bitni kasnije, pa ih sada definiramo.

Definicija 1.1.3. *Neka su $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ konačno potpune kategorije. Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ je* lijevo egzaktan[3] *ako čuva konačne limese.*

Pogledajmo sada jedan poseban slučaj limesa, gdje je $\mathcal{J} = (\to \cdot \leftarrow)$. Takav limes se zove povlak.

Definicija 1.1.4. *Limes nad dijagramom oblika*

$$A \xrightarrow{f} C \xleftarrow{g} B$$

zovemo povlak[4]. *Vrh povlaka se još označava i sa $A \times_C B$.*

Ako povlak π sa vrhom $A \times_C B$ postoji, on nam daje sljedeći komutativni dijagram:

$$\begin{tikzcd}
A \times_C B \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\pi_1"'] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"] & C
\end{tikzcd}$$

Ponekad se i morfizam π_1 zove *povlak* od g duž morfizma f te se $A \times_C B$ označava sa f^*B, a π_1 sa f^*g.

Jedno svojstvo povlaka, koje će nam kasnije biti bitno je "kocka povlaka".

---

[1] eng. *finitely complete*
[2] eng. *small-complete*
[3] eng. *left exact, flat*
[4] eng. *pullback*

Činjenica 1.1.5. *Neka su A, B, C, D, E, F, G i H objekti u nekoj kategoriji $\mathcal{C}$. Promotrimo sljedeći komutativni dijagram:*

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & F \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& A \arrow[rr] \arrow[dd] & & B \arrow[dd] \\
G \arrow[rr] \arrow[dr] & & H \arrow[dr] & \\
& C \arrow[rr] & & D
\end{tikzcd}$$

Ako su lijeva, prednja i desna strana povlaci, tada je i stražnja strana također povlak.

Ova činjenica se lako dokaže koristeći svojstvo lijepljenja povlaka ([4], str. 72, zadatak 8) prvo za lijevu i prednju, a zatim stražnju i desnu stranu.

Još jedno svojstvo povlaka je karakterizacija monomorfizama promatranjem povlaka duž samog sebe (dokaz tvrdnje slijedi direktno iz slične tvrdnje iz [3], str. 16).

Činjenica 1.1.6. *Neka je $\mathcal{C}$ kategorija i $f : A \to B$ morfizam u $\mathcal{C}$. Morfizam f je monomorfizam ako i samo ako je morfizam induciran s identitetama pomoću univerzalnog svojstva povlaka, $\Delta : A \to A \times_B A$ izomorfizam.*

Morfizam $\Delta : A \to A \times_B A$ iz prethodne propozicije nazivamo i *dijagonalni morfizam.*

Potreban će nam biti i slijedeći slučaj limesa, gdje je $\mathcal{J} = (\downarrow\downarrow)$.

Definicija 1.1.7. *Limes nad dijagramom oblika*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

zovemo ujednačitelj[5] *od f i g.*

Također, ako je $\mathcal{J}$ kategorija s dva objekta u kojoj su jedini morfizmi identitete, tada imamo sljedeći limes:

Definicija 1.1.8. *Limes nad dijagramom oblika*

$$A \qquad\qquad B$$

zovemo produkt *od A i B te ga označavamo s $A \times B$. Morfizme iz $A \times B$ u A i B nazivamo* projekcije.

[5]eng. *equalizer*

Ako kategorija ima produkte, možemo dobiti povlake preko produkta i ujednačitelja na sljedeći način:

Činjenica 1.1.9. *Ako kategorija $\mathcal{C}$ ima produkte, tada je povlak*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

upravo ujednačitelj

$$P \longrightarrow A \times B \underset{g\pi_2}{\overset{f\pi_1}{\rightrightarrows}} C \ .$$

Ova tvrdnja je očita iz definicija povlaka i ujednačitelja, no za formalan dokaz možemo koristiti i konstrukciju općenitog konačnog limesa pomoću produkta i ujednačitelja iz [4] (str. 113).

Naposlijetku, ako je $\mathcal{J}$ prazna kategorija (bez objekata i morfizama), imamo sljedeći limes:

Definicija 1.1.10. Terminalni objekt *je limes nad praznim dijagramom.*

Terminalni objekt možemo promatrati i kao objekt 1 u kategoriji $\mathcal{C}$ sa svojstvom da za svaki objekt A iz $\mathcal{C}$ postoji jedinstveni morfizam $f : A \to 1$.

Može se pokazati da ako kategorija ima sve povlake i terminalni objekt, da je konačno potpuna, tj. vrijedi sljedeća propozicija:

Propozicija 1.1.11. *Kategorija $\mathcal{C}$ koja ima sve povlake i sadrži terminalni objekt ima sve konačne limese.*

Osim limesa, zanimaju nas i neke klase kategorija s određenom strukturom. Jedna od klasa od interesa su tzv. kartezijanski zatvorene kategorije. One su nam važne jer su toposi, koje želimo definirati, i sami kartezijanski zatvorene kategorije. Da bismo dali definiciju kartezijanski zatvorenih kategorija, prvo trebamo definirati adjungirane funktore.

Definicija 1.1.12. *Neka su $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ kategorije.* Adjunkcija *iz $\mathcal{C}$ u $\mathcal{D}$ je četvorka (F, G, ϵ, η), gdje su $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ i $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funktori, a ϵ i η prirodne transformacije*

$$\epsilon : FG \to id_{\mathcal{D}}$$

$$\eta : id_{\mathcal{C}} \to GF$$

koje redom zovemo kojedinica *i* jedinica *takve da vrijedi:*

$$id_F = \epsilon F \circ F\eta,$$

$$id_G = G\epsilon \circ \eta G.$$

Sada dajemo ranije najavljenu definiciju kartezijanski zatvorenih kategorija.

Definicija 1.1.13. *Za kategoriju $\mathcal{C}$ kažemo da je* kartezijanski zatvorena *ako:*

(i) Kategorija $\mathcal{C}$ sadrži terminalni objekt.

(ii) Za svaki par objekata A, B u $\mathcal{C}$ postoji produkt $A \times B$ u $\mathcal{C}$, sa projekcijama $\pi_1 : A \times B \to A$ i $\pi_2 : A \times B \to B$.

(iii) Za svaki funktor oblika $(- \times B) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$, za B u $\mathcal{C}$ postoji desni adjungirani funktor, $(-)^B$.

Napomena 1.1.14. *Svojstvo spomenuto u (iii) prethodne definicije zovemo postojanje* unutarnjeg homa.

Unutarnji hom je funktor $[-,-] : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ takav da za svaki objekt C iz $\mathcal{C}$ postoji sljedeća adjunkcija:

$$(- \times C) \dashv [C, -].$$

Ako definiramo $[B,-] = (-)^B$, tada nam (iii) govori upravo da u $\mathcal{C}$ postoji unutarnji hom.

Zanimljivi su nam i funktori koji čuvaju strukturu kategorija s kojima radimo. Stoga su nam posebno zanimljivi i oni koji čuvaju strukturu kartezijanski zatvorenih kategorija. Sljedeća lema nam daje karakterizaciju takvih funktora.

Lema 1.1.15. *Neka je $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktor između kartezijanski zatvorenih kategorija $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ te neka je L lijevi adjungirani funktor funktora F. Tada je F kartezijanski zatvoren funktor (tj. čuva produkte i unutarnji hom) ako i samo ako je kanonski morfizam*

$$(L\pi_1, \epsilon_A L\pi_2) : L(B \times FA) \to LB \times A$$

(gdje je ϵ kojedinica u adjunkciji $L \dashv F$) izomorfizam za sve A i B objekte u $\mathcal{C}$.

Ova lema se dokazuje direktnom konstrukcijom i dokaz je dan u [2] (Lema A1.5.8).

Bitan će nam biti i pojam podobjekta. Prije definicije tog pojma, promotrimo još jednu situaciju. Za objekt A u kategoriji $\mathcal{C}$, možemo promatrati monomorfizme s kodomenom A. Ako su $f : B \to A$ i $g : C \to A$ dva takva tada kažemo da su oni izomorfni ako postoji izomorfizam $k : B \to C$ takav da je $f = gk$. Lako se provjeri da je ova relacija refleksivna i tranzitivna. Podobjekt će nam, na neki način, svesti te izomorfizme na jednakosti.

Definicija 1.1.16. Podobjekt *objekta* A *u kategoriji* $\mathcal{C}$ *je klasa međusobno izomorfnih monomorfizama s kodomenom* A*.*

Nadalje, na skupu (ili pravoj klasi) monomorfizama s kodomenom A možemo definirati predurеđaj tako da definiramo $(f : B \to A) \leq (g : C \to A)$ ako postoji $k : B \to C$ takav da je $f = gk$.

Na prirodan način sada možemo definirati i predurеđaj na klasi podobjekata od A. Klasu podobjekata od A s takvim predurеđajem označavamo i sa

$$Sub(A).$$

Na $Sub(A)$ možemo definirati unije i presjeke, kao redom najmanju gornju među i najveću donju među. Preciznije, $(B \cup C)$ je *unija* B i C iz $Sub(A)$ ako vrijedi:

(i) $B, C \leq (B \cup C)$.

(ii) Ako je $B, C \leq D$, onda je $(B \cup C) \leq D$.

Analogno je $(B \cap C)$ *presjek* B i C iz $Sub(A)$ ako vrijedi:

(i) $(B \cap C) \leq B, C$.

(ii) Ako je $D \leq B, C$, onda je $D \leq (B \cap C)$.

Posljednji pojam koji nam je potreban prije definicije toposa je klasifikator podobjekata. On je generalizacija ideje da, ako nam je dan skup X i neki njegov podskup A, mi možemo konstruirati funkciju $\chi_A : X \to \{0, 1\}$ takvu da je $\chi_A(x) = 1$ ako i samo ako je $x \in A$.

Definicija 1.1.17. Klasifikator podobjekata[6] *kategorije* $\mathcal{C}$ *koja posjeduje terminalni objekt* 1 *je monomorfizam* $t : 1 \to \Omega$ *takav da za svaki monomorfizam* m *u* $\mathcal{C}$ *postoji jedinstven morfizam* ψ_m *takav da sljedeći dijagram tvori povlak:*

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "f"] \arrow[d, "m"'] & 1 \arrow[d, "t"] \\
X \arrow[r, dashed, "\psi_m"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

gdje je f *jedinstveno preslikavanje na terminalni objekt* 1*. Morfizam* ψ_m *zovemo* karakteristična funkcija *podobjekta* S*, a* t *možemo zvati i* istina.

[6] eng. *subobject classifier*

Na klasifikator podobjekata možemo gledati i kao na objekt Ω takav da postoji prirodna bijekcija

$$Sub(X) \cong Hom_{\mathcal{C}}(X, \Omega).$$

To uistinu i je jedna karakterizacija klasifikatora podobjekata.

Sada promotrimo sve morfizme neke kategorije $\mathcal{C}$. Oni također čine kategoriju.

Definicija 1.1.18. *Neka je $\mathcal{C}$ kategorija i C objekt u $\mathcal{C}$.* Kategorija kriški *kategorije $\mathcal{C}$ nad objektom C (u oznaci $\mathcal{C}/C$) je kategorija čiji cu objekti morfizmi sa kodomenom C*

$$f : D \to C,$$

a morfizmi su komutativni trokuti:

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[rr] \arrow[dr, "f_1"'] & & D_2 \arrow[dl, "f_2"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

1.2 Neke posebne kategorije

Sada ćemo razmotriti neke kategorije s određenim strukturama koje su nam od interesa, velikim dijelom kao u [2] (poglavlje A1), povremeno se referencirajući na [7]. Prvo dajemo definiciju slike morfizma.

Definicija 1.2.1. *Monomorfizam m zovemo* slika *morfizma f ako se f faktorizira kroz m, tj. $f = me$ za neki morfizam e, i pritom vrijedi da ako se f faktorizira kroz monomorfizam h tada se i m faktorizira kroz monomorfizam h.*

Za kategoriju $\mathcal{C}$ kažemo da ima slike *ako za svaki morfizam f u $\mathcal{C}$ postoji morfizam m takav da je m slika od f.*

Napomena 1.2.2. *Prisjetimo se da monomorfizme možemo urediti. Tada na m iz prethodne definicije možemo gledati kao na najmanji monomorfizam kroz koji se f faktorizira.*

Slično, možemo umjesto monomorfizama kroz koje se f faktorizira gledati podobjekte kodomene of f kroz koje se f faktorizira.

Sada ćemo izdvojiti jednu bitnu klasu morfizama, koji su ključni u definiciji regularne kategorije.

Definicija 1.2.3. *Za epimorfizam f kažemo da je* ekstremalan epimorfizam *ako vrijedi da jednakost $f = gh$ za neke morfizme g i h, gdje je g monomorfizam, povlači da je g izomorfizam.*

Primijetimo da ako kategorija ima sve ujednačitelje tada u prethodnoj definiciji ne moramo zahtijevati da je f epimorfizam. Naime, u tom slučaju svaki morfizam koji ima samo trivijalne faktorizacije kroz monomorfizme je epimorfizam. O tome nam govori sljedeća propozicija:

Propozicija 1.2.4. *Neka je $\mathcal{C}$ kategorija u kojoj postoje svi ujednačitelji. Tada je svaki morfizam $f : A \to B$ koji ima samo trivijalne faktorizacije kroz monomorfizme nužno i epimorfizam.*

Dokaz. Dokaz je dan sljedećim dijagramom:

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, shift left, "i"] \arrow[r, shift right, "j"'] & E \arrow[r, "e"] & B \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & C \\
& A \arrow[u, dashed, "\exists ! k"] \arrow[ur, "f"'] & &
\end{tikzcd}$$

Uzmimo neke $g, h : B \to C$ takve da je $gf = hf$ i pogledajmo ujednačitelj od g i h. Označimo njegov vrh s E. Tada se po definiciji ujednačitelja f faktorizira kroz ujednačitelj, tj. postoje $k : A \to E$ i $e : E \to B$ takvi da je $f = ek$, gdje je e monomorfizam (tu tvrdnju ćemo opravdati kasnije). Po pretpostavci na morfizam f je tada e izomorfizam. Sada imamo $e^{-1}eg = e^{-1}eh$ (jer je $eg = eh$), odakle slijedi $id_B \circ g = id_B \circ h$, tj. $g = h$, pa je f epimorfizam.

Dokažimo sada da postoji morfizam k i monomorfizam e. Ako $e : E \to B$ ujednačava $g : B \to C$ i $h : B \to C$, pretpostavimo da je $ei = ej$, za neke morfizme $i, j : D \to E$. Tada je $g(ei) = (ge)i = (he)i = h(ei)$, pa po definiciji ujednačitelja postoji jedinstven $l : D \to E$ takav da $el = ei$. No i je jedan takav, pa slijedi $l = i$. Slično dobivamo $l = j$. Dakle, $i = j$, pa je morfizam $e : E \to B$ monomorfizam. Po prvom dijelu dokaza sada vrijedi da je f epimorfizam. $\square$

Prethodna propozicija nam kaže da su u kategorijama koje imaju ujednačitelje sljedeća svojstva ekvivalentna:

(a) f je ekstremalni epimorfizam

(b) f ima samo trivijalne faktorizacije kroz monomorfizam

To posebno vrijedi u konačno potpunim kategorijama.

Definicija 1.2.5. Stabilnost *ekstremalnih epimorfizama* na povlak *znači da za svaki* $f : A \to B$ *ekstremalan epimorfizam i* $h : C \to B$ *je i* $h^*(f) : C \times_B A \to C$ *također ekstremalan epimorfizam.*

Definicija 1.2.6. *Za konačno potpunu kategoriju* $\mathcal{C}$ *koja ima slike i čiji ekstremalni epimorfizmi su stabilni na povlak kažemo da je* regularna.

Sljedeće vrste kategorija koje nas zanimaju su koherentne kategorije. To su regularne kategorije s dodatnom strukturom. Prije no što ih definiramo, trebamo definirati jedan funktor koji će nam biti potreban kako bismo opisali željenu dodatnu strukturu.

Definicija 1.2.7. *Neka je* $f : A \to B$ *morfizam u kategoriji* $\mathcal{C}$ *koja ima povlake. Neka su* $\mathcal{C}/A$ *i* $\mathcal{C}/B$ *kategorije kriški kategorije* $\mathcal{C}$ *nad* A *i* B*.* Funktor promjene baze[7] *je funktor* $f^* : \mathcal{C}/B \to \mathcal{C}/A$ *induciran sa* f *na sljedeći način:*

(i) Na objektima je dan pomoću povlaka duž f*:*

$$(p : X \to B) \quad \mapsto \quad \begin{tikzcd} A \times_B X \arrow[r, "\pi_X"] \arrow[d, "f^*(p)"'] & X \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

(ii) Na morfizmima je definiran koristeći univerzalnost povlaka:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "p"'] & & X' \arrow[dl, "p'"] \\ & B & \end{tikzcd} \quad \mapsto \quad \begin{tikzcd} A \times_B X \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "f^*(p)"'] & & A \times_B X' \arrow[dl, "f^*(p')"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

Gdje je k *jedinstveni morfizam kao na sljedećem komutativnom dijagramu:*

$$\begin{tikzcd} A \times_B X \arrow[dr, dashed, "k"] \arrow[drr, bend left, "g \circ \pi_X"] \arrow[ddr, bend right, "f^*(p)"'] & & \\ & A \times_B X' \arrow[r, "\pi_{X'}"] \arrow[d, "f^*(p')"'] & X' \arrow[d, "p'"] \\ & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Takav funktor možemo promatrati i samo na klasama $Sub(B)$, gdje je B objekt kategorije $\mathcal{C}$. Može se pokazati da, ako kategorija ima slike, da će taj funktor imati lijevi adjungirani funktor.

[7] eng. *base change functor*

Propozicija 1.2.8. *Neka je $\mathcal{C}$ kategorija koja ima sve povlake. Tada $\mathcal{C}$ ima slike ako i samo ako za svaki morfizam f, funktor promjene baze f^* ima lijevi adjungirani funktor $\exists_f$.*

Dokaz. Iz definicije je jasno da $\mathcal{C}$ ima slike ako i samo ako za svaki objekt A u $\mathcal{C}$, inkluzija $Sub(A) \to \mathcal{C}/A$ ima lijevi adjungirani funktor im, koji podobjektu pridružuje njegovu sliku.

Definirajmo sada $\exists_f$ kao kompoziciju

$$Sub(A) \longrightarrow \mathcal{C}/A \xrightarrow{\Sigma_f} \mathcal{C}/B \xrightarrow{im} Sub(B)\ ,$$

gdje je $\Sigma_f(g) = f \circ g$, i direktnom provjerom dobivamo da je to lijevi adjungirani funktor od f^*.

Obratno, direktnom provjerom dobivamo da primjenom $\exists_f$ na terminalni objekt u $Sub(A)$ dobivamo sliku of f. □

Napomena 1.2.9. *Promotrimo adjunkciju iz dokaza propozicije 1.2.8, inkluzije i funktora im. Može se provjeriti da je tada kanonski morfizam $dom(f) \to dom(im(f))$, jedinica te adjunkcije, ekstremalan ([2], paragraf nakon leme A1.3.1).*

Ukoliko funktor promjene baze f^* ima desni adjungirani funktor tada njega označavamo sa $\forall_f$.

Sada se okrećemo definiciji koherentne kategorije. Funktor f^* smo definirali i na klasama podobjekata. Čuvanje unija u tim klasama je svojstvo koje želimo. Stoga koherentnu kategoriju definiramo upravo kao kategoriju s tim svojstvom.

Definicija 1.2.10. *Za regularnu kategoriju $\mathcal{C}$ kažemo da je* koherentna *ako za svaki njezin objekt A parcijalno uređena klasa $Sub(A)$ ima konačne unije koje su očuvane djelovanjem svakog funktora promjene baze $f^* : Sub(B) \to Sub(A)$, za svaki objekt B iz $\mathcal{C}$.*

Definicija 1.2.11. *Neka je $\mathcal{C}$ koherentna kategorija te A objekt u $\mathcal{C}$.* Komplement *podobjekta $B \hookrightarrow A$ je podobjekt $C \hookrightarrow A$ takav da je $B \cap C \cong 0$ i $B \cup C \cong A$.*

Ako u koherentnoj kategoriji $\mathcal{C}$ svaki podobjekt ima komplement, tada za $\mathcal{C}$ kažemo da je Booleova kategorija.

Napomena 1.2.12. *Uočimo da, ako nam je zadana operacija $\neg$ koja svakom monomorfizmu $B \hookrightarrow A$ pridružuje komplement njegove klase u $Sub(A)$, tada je $\neg$ kontravarijantni funktor $Sub(A) \to Sub(A)$ (ako je $B \leq C$, tada je $\neg C \leq \neg B$), te je njegov kvadrat $\neg\neg \cong id_{Sub(A)}$.*

Definicija 1.2.13. *Neka je $\mathcal{C}$ koherentna kategorija te A objekt u $\mathcal{C}$.* Negacija *(ili* pseudo-komplement*) podobjekta $B \hookrightarrow A$ je najveći podobjekt od A disjunktan s B. Negaciju od B, ako postoji, označavamo s $\neg B \hookrightarrow A$.*

Napomena 1.2.14. *Očito je komplement, ako postoji, ujedno i pseudo-komplement, pa je u redu koristiti oznaku $\neg$.*

Kasnije će nam biti potrebna činjenica da f^* čuva unutarnji hom/eksponencijalne objekte. Sada ćemo to dokazati.

Lema 1.2.15. *Neka je $f : A \to B$ morfizam u regularnoj kategoriji. Tada, za svaka dva podobjekta $A' \hookrightarrow A$ i $B' \hookrightarrow B$, postoji izomorfizam*

$$\exists_f(A' \cap f^*(B')) \cong \exists_f(A') \cap B' \ \ u\ Sub(B).$$

Dokaz. Promotrimo sljedeći dijagram:

$$\begin{tikzcd}
A' \cap f^*(B') \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd, hook] & & \exists_f(A') \cap B' \arrow[dr] \arrow[dd] & \\
& f^*(B') \arrow[rr] \arrow[dd, hook] & & B' \arrow[dd, hook] \\
A' \arrow[rr] \arrow[dr] & & \exists_f(A') \arrow[dr] & \\
& A \arrow[rr, "f"] & & B
\end{tikzcd}$$

Prije svega uočimo da su prednja, lijeva i desna strana povlaci. No tada, po činjenici 1.1.5 je istražnja strana povlak.

Uočimo da je donja stranica stražnje strane ekstremalni epimorfizam. Naime, ako kompoziciju morfizama $A' \to A$ i f označimo sa $g : A' \to B$, tada je po napomeni 1.2.9, $dom(g) \to dom(im(g))$ ekstremalan. No, po definiciji $\exists_f$ je to upravo $A' \to \exists_f(A')$. Tada je i gornja stranica ekstremalni epimorfizam, zbog stabilnosti na povlake.

Prema definiciji operacije $\cap$ je $\exists_f(A') \cap B' \hookrightarrow B$ podobjekt (kao kompozicija monomorfizama), pa je dijagonala desne stranice monomorfizam. Tada je kompozicija $A' \cap f^*(B') \to \exists_f(A') \cap B' \hookrightarrow B$ faktorizacija kroz sliku kompozicije $A' \cap f^*(B') \to A$ sa f, zbog toga sto je lijeva strelica ekstremalni epimorfizam, a desna monomorfizam, pa prema definiciji funktora $\exists_f$, vrijedi $\exists_f(A' \cap f^*(B')) \cong \exists_f(A') \cap B'$. $\square$

Nama su zanimljive i kategorije kod kojih funktori $\forall_f$ i $\exists_f$ postoje. To motivira sljedeću definiciju:

Definicija 1.2.16. *Za koherentnu kategoriju $\mathcal{C}$ kažemo da je* Heytingova *ako za svaki morfizam f u $\mathcal{C}$ inducirani funktor promjene baze f^* ima i desni adjungirani funktor $\forall_f$ i lijevi adjungirani funktor $\exists_f$.*

Heytingove kategorije imaju svojstvo da svaki podobjekt B objekta A postoji najveći podobjekt od A disjunktan s B, tj. da negacija uvijek postoji. To će se pokazati kao bitno svojstvo. Dokažimo tu tvrdnju.

Lema 1.2.17. *Neka je $\mathcal{C}$ Heytingova kategorija te A objekt u $\mathcal{C}$. Neka su $A_1 \hookrightarrow A$ i $A_2 \hookrightarrow A$ podobjekti od A. Tada postoji najveći podobjekt $A_3 \hookrightarrow A$ takav da $A_3 \cap A_1 \leq A_2$.*

Nadalje, ako takav podobjekt označimo s

$$(A_1 \Rightarrow A_2) \hookrightarrow A,$$

tada je tako definirana binarna operacija na podobjektima stabilna na povlake (tj. ako je $f : B \to A$ neki morfizam, te ako su A_1, A_2 u $Sub(A)$, tada je $f^*(A_1 \Rightarrow A_2) \simeq (f^*(A_1) \Rightarrow f^*(A_2))$ u $Sub(B)$).

Dokaz. Neka je m monomorfizam $m : A_1 \hookrightarrow A$. Kako je $\mathcal{C}$ Heytingova, tada funktor promjene baze $m^* : Sub(A) \to Sub(A_1)$ ima desni adjungirani funktor $\forall_m : Sub(A_1) \to Sub(A)$. Definirajmo $(A_1 \Rightarrow A_2) \hookrightarrow A$ kao $\forall_m(A_1 \cap A_2) \hookrightarrow A$.

Kategorija $Sub(A)$ je parcijalni uređaj, pa vrijedi da je $Hom_{Sub(A)}(X, Y)$ neprazan ako i samo ako je $X \leq Y$ te u tom slučaju postoji točno jedan morfizam $X \to Y$. Adjunkcija $m^* \dashv \forall_m$ nam daje bijekciju skupova

$$Hom_{Sub(A_1)}(m^*(X), Y) \cong Hom_{Sub(A)}(X, \forall_m(Y)),$$

odakle imamo

$$m^*(X) \leq Y \text{ ako i samo ako } X \leq \forall_m(Y).$$

Nadalje, zbog postojanja jedinice i kojedinice adjunkcije, postoje prirodne transformacije $\epsilon : m^*\forall_m \to id_{Sub(A)}$ i $\eta : id_{Sub(A_1)} \to \forall_m m^*$ te tada vrijede nejednakosti $m^*(\forall_m(Y)) \leq Y$ i $X \leq \forall_m(m^*(X))$, za X iz $Sub(A)$ i Y iz $Sub(A_1)$. Također, vrijedi i $m^*(X) = X \cap A_1$, po definiciji funktora m^* i činjenice da je presjek u $Sub(A)$ povlak.

Promotrimo podobjekte $(\forall_m(A_1 \cap A_2) \cap A_1) \hookrightarrow A$ i $A_2 \hookrightarrow A$. Iz prethodnog znamo da je $(\forall_m(A_1 \cap A_2) \cap A_1) = m^*(\forall_m(A_1 \cap A_2)) = m^*(\forall_m(m^*(A_2))) \leq m^*(A_2) = A_1 \cap A_2 \leq A_2$. To upravo znači da je $(A_1 \Rightarrow A_2) \cap A_1 \leq A_2$.

Neka je B iz $Sub(A)$ takav da $B \cap A_1 \leq A_2$. Tada je i $B \cap A_1 \leq A_2 \cap A_1$ (iz definicije presjeka i činjenice da je $B \cap A_1$ manji od A_1 po definiciji i

A_2 po pretpostavci). Odatle slijedi $m^*(B) \leq A_2 \cap A_1$ i adjunkcija daje $B \leq \forall_m(A_1 \cap A_2)$, tj. $B \leq (A_1 \Rightarrow A_2)$. Dakle, $(A_1 \Rightarrow A_2)$ je traženi najveći podobjekt.

Preostaje dokazati stabilnost na povlake. Neka je $f : B \to A$ neki morfizam i A' u $Sub(A)$ te B' u $Sub(B)$. Zbog leme 1.2.15 znamo da je kanonski morfizam $(\exists_f \pi_1, \epsilon_{A'} \exists_f \pi_2) : \exists_f(B' \times f^*(A')) \to \exists_f(B') \times A'$ izomorfizam (jer je u $Sub(A)$ i $Sub(B)$ produkt upravo presjek), pa tada, po lemi 1.1.15 funktor f^* čuva unutarnji hom. Ako pokažemo da je implikacija unutarnji hom, tada tvrdnja slijedi.

Uočimo da je u $Sub(A)$ s operacijom $\cap$ dan produkt. Želimo pokazati da vrijedi $(- \cap X) \dashv (X \Rightarrow -)$ za svaki $X \hookrightarrow A$. Tj. da za svaki $Y \hookrightarrow A$ vrijedi $Hom(Y \cap X, Z) \cong Hom(Y, (X \Rightarrow Z))$. No, to je ekvivalentno tome da vrijedi $(Y \cap X) \leq Z$ ako i samo ako $Y \leq (X \Rightarrow Z)$. $Y \leq (X \Rightarrow Z)$ vrijedi ako i samo ako je $Y \leq \forall_m(X \cap Z)$, gdje je $m : X \hookrightarrow A$. Nadalje, to vrijedi ako i samo ako je $Y \cap X = m^*(Y) \leq X \cap Z$. To nam daje $(Y \cap X) \leq Z$, zbog $X \cap Z \leq Z$. Ali daje nam i obratnu implikaciju. Neka je $(Y \cap X) \leq Z$, tada je $(Y \cap X) = (X \cap (Y \cap X)) \leq (X \cap Z)$. Dakle, implikacija je unutarnji hom, pa f^* čuva implikaciju. □

Definicija 1.2.18. *Podobjekt $(A_1 \Rightarrow A_2) \hookrightarrow A$ iz prethodne leme nazivamo* Implikacija *podobjekata $A_1, A_2 \hookrightarrow A$.*

Korolar 1.2.19. *Neka je $\mathcal{C}$ Heytingova kategorija te A objekt u $\mathcal{C}$. Neka je $B \hookrightarrow A$ podobjekt od A. Tada postoji negacija $\neg B \hookrightarrow A$.*

Nadalje, tako definirana operacija na podobjektima je stabilna na povlake (tj. ako je $f : A' \to A$ neki morfizam, te ako je B u $Sub(A)$, tada je $f^*(\neg B) \simeq \neg f^*(B)$ u $Sub(A')$).

Dokaz. Uočimo da je negacija $\neg B$ upravo oblika $(B \Rightarrow 0)$, gdje je 0 inicijalni objekt u kategoriji $\mathcal{C}$. Primjenom prethodne leme dobivamo egzistenciju negacije. □

Postavlja se pitanje kada možemo reći da je svaka negacija ujedno i komplement. To pitanje se svodi na pitanje kada je Heytingova kategorija Booleova.

Lema 1.2.20. *Heytingova kategorija $\mathcal{C}$ je Booleova ako i samo ako je funktor $\neg\neg : Sub(A) \to Sub(A)$ izomorfan funktoru $id_{Sub(A)}$, za svaki objekt A u $\mathcal{C}$.*

Dokaz. Jedan smjer smo komentirali u napomeni 1.2.12. Ako je kategorija $\mathcal{C}$ Booleova tada je $\neg\neg$ funktor izomorfan identiteti.

Obratno, neka je A proizvoljan objekt u $\mathcal{C}$, i $A' \hookrightarrow A$ njegov proizvoljan podobjekt. Očito vrijedi $A' \cap \neg A' \cong 0$. Ali i uvijek vrijedi $\neg(A' \cup \neg A') \cong 0$.

Naime, podobjekt $A'' \hookrightarrow A$ disjunktan s $A' \cup \neg A'$ je posebno disjunktan s A'. Kao takav, sadržan je u $\neg A'$, jer je on najveći takav. Analogno je sadržan i u A'. Dakle, sadržan je i u $A' \cap \neg A' \cong 0$. Pa je tada $\neg(A' \cup \neg A') \cong 0$. Primjenom negacije dobivamo $\neg\neg(A' \cup \neg A') \cong A$ i iz pretpostavke slijedi $A' \cup \neg A' \cong A$. $\square$

Posljednja klasa kategorija koja nas zanima su one regularne kategorije u kojima možemo interpretirati infinitarne disjunkcije.

Definicija 1.2.21. *Za regularnu kategoriju $\mathcal{C}$ kažemo da je* geometrijska *ako za svaki njezin objekt A parcijalno uređena klasa $Sub(A)$ ima male unije koje su očuvane djelovanjem svakog funktora promjene baze $f^* : Sub(B) \to Sub(A)$, za svaki objekt B iz $\mathcal{C}$.*

Biti će nam i bitni funktori koji čuvaju strukturu geometrijskih kategorija. Takve funktore nazivamo geometrijskim funktorima.

Definicija 1.2.22. *Neka je $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funktor između geometrijskih kategorija $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$. Funktor F je* geometrijski *ako:*

(i) Čuva konačne limese.

(ii) Čuva $\exists_p$ za svaki morfizam $p : X \to Y$ u $\mathcal{C}$. Konkretno, za podobjekt $S \hookrightarrow X$ je $F(\exists_p S) = \exists_{F(p)} F(S)$.

(iii) Čuva proizvoljne unije podobjekata.

1.3 Definicija toposa

U ovoj točci nam je cilj definirati pojam toposa, najvećim dijelom prateći [3], povremeno koristeći [4] i [7]. Počinjemo s definicijom elementarnog toposa, a zatim ćemo poopćiti pojam topologije i topološkog prostora, što nam je potrebno kako bismo definirali Grothendieckov topos.

Definicija 1.3.1. *Kategoriju $\mathcal{E}$ nazivamo* elementarni topos *ako vrijedi:*

(i) Kategorija $\mathcal{E}$ ima sve konačne limese.

(ii) Kategorija $\mathcal{E}$ je kartezijanski zatvorena.

(iii) Kategorija $\mathcal{E}$ posjeduje klasifikator podobjekata.

Uz elementarne topose, definirat ćemo nešto manju klasu kategorija, Grothendieckove topose. No prije toga, trebamo generalizirati pojam topološkog prostora. Prvo dajemo definiciju sita.

Definicija 1.3.2. *Neka je C objekt kategorije $\mathcal{C}$.* Sito[8] *na C je skup S morfizama s kodomenom C takav da, ako je $f \in S$ i fh definirano za neki morfizam h, tada je $fh \in S$.*

Najčešća operacija na situ je povlak. Ako je $\mathcal{C}$ kategorija, S sito na objektu C iz $\mathcal{C}$ i $f : C' \to C$ morfizam, onda je $f^*(S) = \{g : D \to C' : D \in \mathcal{C}, fg \in S\}$.

Pomoću sita možemo generalizirati topologiju na topološkom prostoru na tzv. Grothendieckovu topologiju na kategoriji. Ona se definira na sljedeći način:

Definicija 1.3.3. Grothendieckova topologija *na kategoriji $\mathcal{C}$ je funkcija J koja svakom objektu C kategorije $\mathcal{C}$ pridružuje kolekciju $J(C)$ sita tako da:*

(i) Maksimalno sito $t_C = \{f : cod(f) = C\}$ je u $J(C)$.

(ii) (Aksiom stabilnosti) Ako je $S \in J(C)$, tada je $h^*(S) \in J(D)$, za svaki morfizam $h : D \to C$.

(iii) (Aksiom tranzitivnosti) Ako je $S \in J(C)$ i R neko sito na C takvo da je $h^*(R) \in J(D)$ za sve $h : D \to C$ u S, tada je i $R \in J(C)$.

Sada, kada imamo definiranu Grothendieckovu topologiju J na kategoriji $\mathcal{C}$, možemo promatrati par $(\mathcal{C}, J)$, na sličan način kao što kod topoloških prostora promatramo skup i topologiju na njemu. To motivira sljedeću definiciju:

Definicija 1.3.4. *Par $(\mathcal{C}, J)$, gdje je $\mathcal{C}$ kategorija, a J Grothendieckova topologija na $\mathcal{C}$ nazivamo* pozicija[9]. *Ako je C objekt u $\mathcal{C}$ i $S \in J(C)$, kažemo da je S* pokrivač[10] *od C ili da S* pokriva *C.*

Ako su C i D objekti u $\mathcal{C}$ te $f : D \to C$ morfizam, kažemo i da sito S na C pokriva[11] *f ako $f^*(S)$ pokriva D.*

Napomena 1.3.5. *U formulaciji kao u drugom dijelu definicije, uočimo da S pokriva C ako i samo ako S pokriva identitetu na C.*

Uočimo i da, koristeći tu formulaciju, možemo aksiome Grothendieckove topologije zapisati na sljedeći način ("formulacija strelicama"):

(ia) Ako je S sito na C i $f \in S$, tada S pokriva f.

[8]eng. *sieve*
[9]eng. *site*
[10]eng. *covering sieve*
[11]eng. *covers an arrow*

(iia) (Aksiom stabilnosti) Ako S pokriva $f : D \to C$, tada S pokriva i $f \circ g$, za sve $g : E \to D$.

(iiia) (Aksiom tranzitivnosti) Ako S pokriva $f : D \to C$ i R je sito na C koje pokriva sve morfizme u S, tada i R pokriva f.

Navedimo sada primjer koji pokazuje da tako definirana pozicija stvarno je generalizacija pojma topološkog prostora. Tj. da je svaki topološki prostor pozicija na nekoj kategoriji.

Primjer 1.3.6. *Topološki prostor sa standardnom definicijom pokrivača je primjer pozicije. Pogledajmo parcijalno uređen skup $\mathcal{O}(X)$ otvorenih podskupova topološkog prostora $(X, \mathcal{O}(X))$ kao kategoriju s elementima iz $\mathcal{O}(X)$ kao objektima i morfizmima definiranima na način da postoji točno jedan morfizam $U \to V$ ako i samo ako je $U \subseteq V$.*

Sito na U je familija S otvorenih podskupova od U sa svojstvom da ako je $V' \subseteq V \in S$ tada je $V' \in S$.

Sada definirajmo da S pokriva U ako i samo ako je U sadržan u uniji otvorenih skupova iz S. Tako definiran "otvoren pokrivač" zadovoljava aksiome Grothendieckove topologije. U tom slučaju, morfizam f sa kodomenom U je otvoren podskup $W \subseteq U$, a sito S na U pokriva morfizam $W \subseteq U$ ako i samo ako je W sadržan u uniji otvorenih skupova u S. To je ujedno i razlog koji motivira raniju "formulaciju strelicama".

Kada promatramo topološke prostore, često otvoren pokrivač od U opisujemo kao familiju otvorenih skupova $\{U_i : i \in I\}$ s unijom $\bigcup_{i \in I} U_i = U$. Takva familija ne mora nužno biti sito, no može ga, na neki način, generirati. Preciznije, skup svih otvorenih $V \subseteq U$, sa svojstvom da $V \subseteq U_i$, za neki $i \in I$ jest sito. Ponekad može biti korisno definirati takve skupove koji generiraju sita i općenitijem slučaju, tj. u općenitoj kategoriji koja ima povlake.

Definicija 1.3.7. Baza *(Grothendieckove topologije) na kategoriji $\mathcal{C}$ koja ima povlake je funkcija K koja svakom objektu C kategorije $\mathcal{C}$ pridružuje kolekciju $K(C)$, koja se sastoji od familija morfizama s kodomenom C, takvih da:*

(i') Ako je $f : C' \to C$ izomorfizam, onda je $\{f : C' \to C\} \in K(C)$.

(ii') Ako je $\{f_i : C_i \to C : i \in I\} \in K(C)$, onda za svaki morfizam $g : D \to C$, je familija povlaka $\{\pi_2 : C_i \times_C D \to D : i \in I\} \in K(D)$.

(iii') Ako je $\{f_i : C_i \to C : i \in I\} \in K(C)$ i za svaki $i \in I$ postoji familija $\{g_{ij} : D_{ij} \to C_i : j \in I_i\} \in K(C_i)$, onda je familija kompozicija $\{f \circ g_{ij} : D_{ij} \to C : i \in I, j \in I_i\} \in K(C)$.

Napomena 1.3.8. *U prethodnoj definiciji, svojstvo (ii') se ponovno zove aksiom stabilnosti i (iii') aksiom tranzitivnosti. Par* $(\mathcal{C}, K)$ *se, također, zove pozicija i elementi od* $K(C)$ *pokrivači.*

Sada se okrećemo definiciji snopova. Definirat ćemo klasu funktora koju ćemo zvati predsnopovi te ćemo definirati uvjet koji predsnop mora zadovoljavati kako bi ga nazvali snopom.

Definicija 1.3.9. *Neka je* $\mathcal{C}$ *mala kategorija.* Predsnop[12] *na* $\mathcal{C}$ *je funktor*

$$P : \mathcal{C}^{op} \to \mathbf{Set}.$$

Kategoriju svih predsnopova na $\mathcal{C}$ *označavamo sa*

$$\mathbf{PSh}(\mathcal{C}).$$

Uočimo da se kategorija $\mathcal{C}$ može uložiti u $\mathbf{PSh}(\mathcal{C})$ tako da svakom C u $\mathcal{C}$ pridružimo funktor oblika $Hom(-, C)$. Takvo preslikavanje je vrlo bitno i stoga ima svoj naziv.

Definicija 1.3.10. *Neka je* $\mathcal{C}$ *mala kategorija i* $\mathbf{PSh}(\mathcal{C})$ *kategorija predsnopova na* $\mathcal{C}$*. Funktor*

$$y : \mathcal{C} \to \mathbf{PSh}(\mathcal{C}), \quad C \mapsto Hom(-, C)$$

zovemo Yonedino ulaganje.

Predsnopovi ovise samo o kategoriji, no snopovi će ovisiti i o Grothendieckovoj topologiji. Na sličan način kao što funkcije ovise o skupovima, ali neprekidne funkcije ovise o topologiji na skupu.

Definicija 1.3.11. *Neka je* $\mathcal{C}$ *mala kategorija i* J *Grothendieckova topologija. Neka je* F *predsnop na* $\mathcal{C}$ *te neka sito* S *pokriva objekt* C *iz* $\mathcal{C}$*.*

Kompatibilna familija[13] *elemenata od* F *za sito* S *je funkcija koja svakom elementu* $f : D \to C$ *iz* S *pridružuje element* $x_f \in F(D)$ *tako da vrijedi:*

$$F(g)(x_f) = x_{fg} \text{ za svaki } g : E \to D \text{ u } \mathcal{C}$$

Lijepljenje[14] *takve kompatibilne familije je element* $x \in F(C)$ *takav da vrijedi:*

$$F(f)(x) = x_f \text{ za svaki } f \in S$$

[12] eng. *presheaf*
[13] eng. *matching family*
[14] eng. *amalgamation*

Predsnop F nazivamo snop[15] *ako svaka kompatibilna familija za svaki pokrivač svakog objekta od $\mathcal{C}$ ima jedinstveno lijepljenje. Kategoriju svih snopova skupova na poziciji $(\mathcal{C}, J)$ označavamo sa*

$$\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J).$$

Kako je svaki snop predsnop, postoji ulaganje

$$\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J) \to \mathbf{PSh}(\mathcal{C}).$$

Činjenica 1.3.12. *Neka je $(\mathcal{C}, J)$ pozicija, $\mathbf{PSh}(\mathcal{C})$ kategorija predsnopova na $\mathcal{C}$ i $\mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ kategorija snopova na $(\mathcal{C}, J)$. Neka je $j : \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J) \hookrightarrow \mathbf{PSh}(\mathcal{C})$ ulaganje. Funktor j posjeduje lijevo adjungirani funktor*

$$\mathbf{PSh}(\mathcal{C}) \to \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$$

koji zovemo snopifikacija[16].

Ova činjenica nije laka za dokazati. Za detaljan dokaz vidjeti [3] (str. 128, III.5).

Konačno, možemo definirati Grothendieckov topos.

Definicija 1.3.13. *Kategoriju ekvivalentnu kategoriji svih snopova skupova na nekoj poziciji zovemo* Grothendieckov topos.

Vrijedi sljedeća propozicija, koja nam daje poveznicu između elementarnog i Grothendieckovog toposa.

Činjenica 1.3.14. *Svaki Grothendieckov topos je elementarni topos.*

Dokaz ove tvrdnje također nije jednostavan, stoga samo navodimo da se dokaz nalazi u [3] (str. 134-143, III.6, III.7).

Ako promatramo kategoriju toposa, zanima nas što su morfizmi. Morfizme toposa nazivamo geometrijskim morfizmima i definiramo na sljedeći način:

Definicija 1.3.15. *Ako su $\mathcal{E}$ i $\mathcal{E}'$ toposi,* geometrijski morfizam

$$f : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$$

se sastoji od para funktora (f^*, f_*),

$$f^* : \mathcal{E}' \to \mathcal{E},$$

$$f_* : \mathcal{E} \to \mathcal{E}',$$

takvih da vrijedi $f^* \dashv f_*$ i da f^* čuva konačne limese. Funktor f^* zovemo inverzna slika, *a funktor f_** direktna slika.

[15]eng. *sheaf*

[16]eng. *sheafification*

2 Kategorička logika prvog reda

U ovom poglavlju ćemo govoriti o logici i kako ju opisati unutar teorije kategorija. Cilj nam je povezati kategorije i matematičke teorije na način koji nam omogućava da proučavanjem prikladne kategorije možemo zaključiti nešto o toj teoriji. Primjerice, zanimat će nas ispunjivost formula (a samim time i postojanje nekog modela).

U prvoj točci ćemo definirati osnovne pojmove poput varijable i terma te više klasa formula i teorija. Druga točka će biti posvećena semantici. Definirat ćemo pojmove poput strukture i interpretacije formula unutar kategorija te modele za teoriju unutar prikladne kategorije. Štoviše, vidjet ćemo i da modeli za neku teoriju unutar kategorije i sami čine kategoriju.

2.1 Sintaksa

Prvo se okrećemo sintaksi. Promatrat ćemo proširenje "klasične" logike prvog reda, takozvanu višesortnu logiku, prateći [2] (D1.1). Krećemo of definicije signature.

Definicija 2.1.1. Signatura *(prvog reda)* Σ *se sastoji od tri skupa:*

(i) Skupa Σ*-Sort čije elemente zovemo* sorte.

(ii) Skupa Σ*-Fun čije elemente zovemo* funkcijski simboli *i preslikavanja koje svakom* $f \in \Sigma\text{-}Fun$ *pridružuje njegov* tip*, koji se sastoji od konačne neprazne liste sorti (gdje je posljednja sorta u listi istaknuta). Pišemo:*

$$f : A_1 \dots A_n \to B,$$

kao oznaku da je f *tipa* $A_1, \dots, A_n, B$*. Takav funkcijski simbol nazivamo* n-mjesnim *funkcijskim simbolom (Broj* n *se naziva i* mjesnost *od* f*). Ako je* $n = 0$*, tada* f *nazivamo* konstanta *sorte* B*.*

(iii) Skupa Σ*-Rel čije elemente zovemo* relacijski simboli *i preslikavanja koje svakom* $R \in \Sigma\text{-}Rel$ *pridružuje njegov* tip*, koji se sastoji od konačne liste sorti. Pišemo:*

$$R \hookrightarrow A_1 \dots A_n,$$

kao oznaku da je R *tipa* $A_1, \dots, A_n$*. Takav relacijski simbol nazivamo* n-mjesnim *relacijskim simbolom. Ako je* $n = 0$*, tada* R *nazivamo* atomarna propozicija.

Za svaku sortu A signature Σ, dan je beskonačan prebrojiv skup V_A, čije elemente nazivamo *varijable* sorte A. Bitno nam je da u svakom trenutku možemo uvesti novu varijablu sorte A, tj. varijablu sorte A koja se nije već pojavila u nekom termu ili formuli koje razmatramo.

Uočimo da ako za Σ-*Sort* uzmemo jednočlan skup te izostavimo pisanje sorti i tipova (jer su oni u tom slučaju jedinstveno određeni jedinstvenim elementom skupa Σ-*Sort*), tada dobivamo "klasičnu" logiku prvog reda.

Prije definicije riječi koje nas najviše zanimaju, formula, definiramo pojam terma.

Definicija 2.1.2. Terme *nad signaturom* Σ *definiramo rekurzivno na način opisan dolje. Također, definiramo i* sortu *svakog terma i pišemo* $t : A$*, kao oznaku da je* t *term sorte* A*.*

(i) Ako je x *varijabla sorte* A*,* $x : A$ *je term sorte* A*.*

(ii) Ako je $f : A_1 \ldots A_n \to B$ *funkcijski simbol i* $t_1 : A_1, \ldots, t_n : A_n$ *termi,* $f(t_1, \ldots, t_n) : B$ *je term sorte* B*.*

Napomena 2.1.3. *Ako je* f *konstanta, tada za term dobiven iz* f *i prazne liste terma (slučaj (ii) u gornjoj definiciji) umjesto* $f()$ *pišemo* f*.*

Sada dajemo definiciju formula. Preciznije, definirat ćemo nekoliko klasa formula, obzirom na "zatvorenost na operacije". Pod time mislimo da ako na određen način iz jedne ili više riječi konstruiramo novu riječ, zahtijevamo da ta nova riječ također bude formula iz te klase. Različite klase će biti zatvorene na različit skup operacija.

Definicija 2.1.4. *Klasa* F formula *nad signaturom* Σ *i, za svaku formulu* ϕ*, skup* $FV(\phi)$ slobodnih varijabli *u* ϕ *se definiraju rekurzivno ovako:*

(i) Riječ $R(t_1, \ldots, t_n)$ *je u* F *ako je* $R \hookrightarrow A_1 \ldots A_n$ *relacijski simbol i* $t_1 : A_1, \ldots, t_n : A_n$ *termi. Slobodne varijable ove formule su sve varijable koje se pojavljuju u nekom termu* t_i*. (Ako je* R *mjesnosti* 0*, tada umjesto* $R()$*, pišemo* R*.)*

(ii) Riječ $(s = t)$ *je u* F *ako su* s *i* t *termi iste sorte. Skup* $FV(s = t)$ *je skup svih varijabli koje se pojavljuju u* s *ili* t *(ili oboje). (Nekad je praktično označiti sortu terma, pa tada pišemo* $(s =_A t)$*, da bismo naglasili da su* s *i* t *sorte* A*.)*

(iii) Logička konstanta $\top$ *je u* F *te* $FV(\top) = \emptyset$*.*

(iv) Riječ $(\phi \wedge \psi)$ *je u* F *ako su* ϕ *i* ψ *u* F *te definiramo* $FV(\phi \wedge \psi) = FV(\phi) \cup FV(\psi)$*.*

(v) Logička konstanta $\perp$ *je u* F *te* $FV(\perp) = \emptyset$*.*

(vi) Riječ $(\phi \vee \psi)$ je u F ako su ϕ i ψ u F te definiramo $FV(\phi \vee \psi) = FV(\phi) \cup FV(\psi)$.

(vii) Riječ $(\phi \Rightarrow \psi)$ je u F ako su ϕ i ψ u F te $FV(\phi \Rightarrow \psi) = FV(\phi) \cup FV(\psi)$.

(viii) Riječ $\neg\phi$ je u F ako je ϕ u F te $FV(\neg\phi) = FV(\phi)$.

(ix) Riječ $(\exists x)\phi$ je u F ako je ϕ u F i x varijabla; $FV((\exists x)\phi) = FV(\phi) \setminus \{x\}$. (Ako želimo naglasiti sortu varijable, pišemo i $(\exists x : A)\phi$, da bismo naglasili da je x sorte A.)

(x) Riječ $(\forall x)\phi$ (ili $(\forall x : A)\phi$) je u F ako je ϕ u F i x varijabla; $FV((\forall x)\phi) = FV(\phi) \setminus \{x\}$.

(xi) Riječ $\bigvee_{i\in I} \phi_i$ je u F ako je I skup, ϕ_i je u F za svaki $i \in I$ i $\bigcup_{i\in I} FV(\phi_i)$ konačan. Tada je i $FV(\bigvee_{i\in I} \phi_i) = \bigcup_{i\in I} FV(\phi_i)$

(xii) Riječ $\bigwedge_{i\in I} \phi_i$ je u F ako je I skup, ϕ_i je u F za svaki $i \in I$ i $\bigcup_{i\in I} FV(\phi_i)$ konačan. Tada je i $FV(\bigwedge_{i\in I} \phi_i) = \bigcup_{i\in I} FV(\phi_i)$

Koristeći ove uvjete, definiramo sljedeće:

(a) *Skup* atomarnih formula *nad signaturom Σ je najmanji skup zatvoren na (i) i (ii).*

(b) *Skup* Hornovih formula *nad signaturom Σ je najmanji skup zatvoren na (i)-(iv).*

(c) *Skup* regularnih formula *nad signaturom Σ je najmanji skup zatvoren na (i)-(iv) i (ix).*

(d) *Skup* koherentnih formula *nad signaturom Σ je najmanji skup zatvoren na (i)-(vi) i (ix).*

(e) *Skup* formula prvog reda *nad signaturom Σ je najmanji skup zatvoren na (i)-(x).*

Posljednje dvije definicije uključuju (xi) i (xii) i rezultiraju pravim klasama formula.

(f) *Klasa* geometrijskih formula *nad signaturom Σ je najmanja klasa zatvorena na (i)-(vi), (ix) i (xi).*

(g) *Klasa* infinitarnih formula prvog reda *nad signaturom Σ je najmanja klasa zatvorena na (i)-(xii).*

Napomena 2.1.5. *Primijetimo da smo spomenuli pojmove 'regularna', 'koherentna' i 'geometrijska' ranije, kad smo definirali kategorije s određenom strukturom. Kasnije ćemo vidjeti da to nije slučajnost, nego da se regularne, koherentne i geometrijske formule mogu interpretirati u, redom, regularnim, koherentnim i geometrijskim kategorijama. Na sličan način, formule prvog reda se mogu interpretirati u Heytingovim kategorijama.*

Također, vrijedi napomenuti da nam nedostaje jedna klasa formula, one koje odgovaraju konačno potpunim kategorijama. One, hijerarhijski, leže između Hornovih i regularnih formula. No još ne možemo definirati kartezijske formule, pa definiciju odgađamo dok ne razvijemo dovoljnu teoriju.

U nastavku ćemo pretpostavljati da nam je zadana neka signatura te to nećemo naglašavati u svakoj definiciji.

Primijetimo da u nekim slučajevima nije bitno koji simbol uzmemo za varijablu. Primjerice, ne želimo razlikovati formule $(\exists x)R(x)$ i $(\exists y)R(y)$ jer one nam, intuitivno gledajući, govore istu stvar. Korisno je takve formule promatrati kao ekvivalentne. To motivira sljedeću definiciju.

Definicija 2.1.6. *Neka je ϕ formula. Varijabla x koja se pojavljuje u ϕ, koja je u dosegu nekog kvantifikatora, se zove* vezana varijabla*.*

Ako se dvije formule ϕ i ψ razlikuju samo u imenima vezanih varijabli, kažemo da su α-ekvivalentne*.*

Dvije α-ekvivalentne formule u praksi ne razlikujemo. Napominjemo da se neka varijabla može pojaviti kao slobodna i vezana u istoj formuli. No za svaku formulu ϕ postoji α-ekvivalentna formula ϕ' takva da se to ne događa. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da radimo s takvim formulama u kojima smo izabrali imena varijabli tako da to nije slučaj.

Ponekad su nam od interesa baš one formule koje ne sadrže slobodne varijable. Stoga za njih imamo poseban naziv.

Definicija 2.1.7. Zatvorena formula *ili* rečenica *ϕ je formula takva da je $FV(\phi) = \emptyset$.* Zatvoren term *je term $t : A$ koji ne sadrži varijable.*

Sada se okrećemo definiciji konteksta. On nije ništa drugo no konačan niz različitih varijabli, ali u nastavku će se pokazati korisno imati taj pojam.

Definicija 2.1.8. Kontekst *je konačna lista $\vec{x} = x_1, \dots, x_n$ međusobno različitih varijabli. U slučaju $n = 0$, kažemo da je kontekst* prazan*.*

Ako je $\vec{x}$ kontekst, a y varijabla različita od svih varijabli koje se pojavljuju u kontekstu $\vec{x}$, tada sa $\vec{x}, y$ označavamo kontekst $x_1, \dots, x_n, y$. Slično, ako su $\vec{x} = x_1, \dots, x_n$ i $\vec{y} = y_1, \dots, y_m$ dva konteksta takvi da se nijedna varijabla iz $\vec{x}$ ne pojavljuje u $\vec{y}$ (i obratno), onda sa $\vec{x}, \vec{y}$ označavamo kontekst $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m$.

Tip *konteksta je lista (ne nužno različitih) sorti varijabli koji se u njemu pojavljuju.*

Obično ćemo formule promatrati u nekom kontekstu. Za to nam treba sljedeća definicija.

Definicija 2.1.9. *Kažemo da je kontekst $\vec{x}$* prikladan *za neku formulu ϕ ako se sve slobodne varijable formule ϕ pojavljuju u $\vec{x}$. Kažemo da je kontekst prikladan za formulu ϕ* kanonski *ako se sastoji samo od međusobno različitih slobodnih varijabli od ϕ, poredanih prema redoslijedu njihovim prvim pojavljivanjima u formuli ϕ.*

Formula u kontekstu[17] *je izraz oblika $\vec{x}.\phi$, gdje je ϕ formula, a $\vec{x}$ prikladan kontekst za ϕ. Slično,* term u kontekstu[18] *je izraz oblika $\vec{x}.t$, gdje je t term, a $\vec{x}$ kontekst koji sadrži sve varijable koje se pojavljuju u t.*

Sada definiramo *supstituciju varijabli $x_1, \ldots, x_n$ termima $s_1, \ldots, s_n$.* Ako je $\vec{s} = s_1, \ldots, s_n$ lista (ne nužno međusobno različitih) terma iste duljine kao kontekst $\vec{x} = x_1, \ldots, x_n$ prikladan za formulu ϕ, tada sa $\phi[\vec{s}/\vec{x}]$ označavamo formulu dobivenu istovremenom zamjenom svake pojave x_i sa s_i, za sve $i \leq n$, nakon zamjene imena vezanih varijabli u ϕ, ako je potrebno. Tom zamjenom imena izbjegavamo supstituciju vezane varijable nekim od s_i-jeva. $\phi[\vec{s}/\vec{x}]$ je dobro definirana, do na α-ekvivalenciju.

Na sličan način se definira term dobiven istovremenom zamjenom svake pojave x_i sa s_i u t, što označavamo sa $t[\vec{s}/\vec{x}]$.

Napomena 2.1.10. *Bitno je istaknuti razliku istovremene i sekvencijalne zamjene. Naime, ako pogledamo formulu $\phi[s_1/x_1][s_2/x_2]$, tada uočimo da smo supstituirali s_2 u svaku pojavu x_2 u kopijama s_1 koje smo supstituirali u formulu ϕ, dok to u $\phi[s_1, s_2/x_1, x_2]$ nismo učinili.*

Prisjetimo se sada definicije formula, tj. definicije 2.1.4. Pogledajmo, primjerice, geometrijske formule. Uočimo da one ne sadrže implikaciju. Obično nam je upravo implikacija korisna za karakteriziranje logičkih posljedica. U logici prvog reda, po teoremu dedukcije, možemo izraz oblika $\phi \vdash \psi$ (gdje nam $\vdash$ označava logičku posljedicu, tj. postojanje izvoda) poistovjetiti sa izrazom $\top \vdash (\phi \Rightarrow \psi)$, tj. sa formulom $(\phi \Rightarrow \psi)$. Na taj način možemo izvode svesti na račun s implikacijom. No, sa klasama formula koje ne sadrže implikaciju, to ne možemo učiniti. Stoga ćemo definirati pojam sekventi i, za razliku od logike prvog reda, aksiome naših teorija ćemo zapisati kao sekvente, a ne kao formule.

[17] eng. *formula-in-context*

[18] eng. *term-in-context*

Definicija 2.1.11. *Formalni izraz oblika* $(\phi \vdash_{\vec{x}} \psi)$*, gdje su* ϕ *i* ψ *formule nad signaturom* Σ *i* $\vec{x}$ *je kontekst prikladan i za* ϕ *i za* ψ*, nazivamo* sekventa *nad signaturom* Σ*. Kažemo da je sekventa* $(\phi \vdash_{\vec{x}} \psi)$ regularna *ako su obje formule* ϕ *i* ψ *regularne. (Analogno definiramo* koherentne, geometrijske, *itd. sekvente.)*

O sekventama želimo razmišljati kao o logičkim posljedicama, tj. da za svako 'uvrštavanje' vrijednosti u varijable od $\vec{x}$ za koje je ϕ istinita je i ψ istinita.

Sada, napokon, možemo definirati pojam teorije.

Definicija 2.1.12. Teorija *nad signaturom* Σ *je skup* $\mathbb{T}$ *sekventi nad* Σ *čije elemente nazivamo* (nelogički) aksiomi*. Teoriju* $\mathbb{T}$ *nazivamo* regularna *ako su sve sekvente u* $\mathbb{T}$ *regularne. (Analogno definiramo* koherentne, geometrijske, *itd. teorije.)*

Napomena 2.1.13. *Ova definicija ne opisuje teorije u smislu u kojem ih mi želimo promatrati. Naime, mi želimo identificirati dvije teorije ukoliko one imaju iste logičke posljedice. U tom smislu smo upravo definirali* prezentaciju *ili* aksiomatizaciju *teorije.*

2.2 Kategorička semantika

U ovom dijelu ćemo vidjeti kako interpretirati izraze definirane u prethodnoj točci unutar teorije kategorija. Ključnu ulogu će imati pojam strukture. Struktura će pojmovima iz prethodne točke pridruživati objekte, morfizme i podobjekte u kategoriji. Također ćemo povezati klase kategorija iz točke 1.2 sa odgovarajućom klasom formula iz 2.1.4. Cilj ove točke je definirati model M za neku teoriju $\mathbb{T}$ u odgovarajućoj kateogriji $\mathcal{C}$ te kategoriju $\mathbb{T}$-modela u $\mathcal{C}$. Iako se baziramo na [2] (D1.2), dokaze raspisujemo detaljnije no što su dani tamo, pa po potrebi koristimo razne tvrdnje iz [4], [3] i [7].

Krećemo od definicije strukture.

Definicija 2.2.1.

(a) Neka je $\mathcal{C}$ *kategorija s konačnim produktima i* Σ *signatura. Tada se* Σ-struktura M *u kategoriji* $\mathcal{C}$ *sastoji od:*

   (i) funkcije koja svakoj sorti A *iz* Σ*-Sort pridružuje objekt* MA *u* $\mathcal{C}$*. (Proširujemo ovu definiciju na konačne nizove na način da definiramo* $M(A_1, \dots, A_n) = MA_1 \times \cdots \times MA_n$ *te, za prazan niz, u oznaci* $[]$*, je* $M([])$ *terminalni objekt u* $\mathcal{C}$*.)*

(ii) *funkcije koja svakom funkcijskom simbolu* $f : A_1 \dots A_n \to B$ *iz* Σ-*Fun pridružuje morfizam* $Mf : M(A_1, \dots, A_n) \to MB$ *u* $\mathcal{C}$.

(iii) *funkcije koja svakom relacijskom simbolu* $R \hookrightarrow A_1 \dots A_n$ *iz* Σ-*Rel pridružuje podobjekt* $MR \hookrightarrow M(A_1, \dots, A_n)$ *u* $\mathcal{C}$.

(b) *Gore definirane* Σ-*strukture u* $\mathcal{C}$ *su objekti kategorije* Σ-$\mathbf{Str}(\mathcal{C})$, *čiji morfizmi su* homomorfizmi Σ-struktura. *Takvi morfizmi* $h : M \to N$ *se sastoje od morfizama* $h_A : MA \to NA$, *indeksiranima po sortama signature* Σ *i zadovoljavaju sljedeće:*

(iv) *Za svaki funkcijski simbol* $f : A_1, \dots, A_n \to B$, *iz* Σ-*Fun, dijagram*

$$\begin{array}{ccc} M(A_1, \dots, A_n) & \xrightarrow{Mf} & MB \\ \downarrow{\scriptstyle h_{A_1} \times \cdots \times h_{A_n}} & & \downarrow{\scriptstyle h_B} \\ N(A_1, \dots, A_n) & \xrightarrow{Nf} & NB \end{array}$$

komutira.

(v) *Za svaki relacijski simbol* $R \hookrightarrow A_1, \dots, A_n$ *iz* Σ-*Rel postoji dijagram oblika*

$$\begin{array}{ccc} MR & \hookrightarrow & M(A_1, \dots, A_n) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_{A_1} \times \cdots \times h_{A_n}} \\ NR & \hookrightarrow & N(A_1, \dots, A_n) \end{array}$$

koji komutira.

Identitete i kompozicije u Σ-$\mathbf{Str}(\mathcal{C})$ *su definirane po komponentama koristeći one u* $\mathcal{C}$.

Sada ćemo proširiti opis funkcijskih simbola na sve terme na sljedeći način:

Definicija 2.2.2. *Neka je* M *neka* Σ-*struktura u kategoriji* $\mathcal{C}$ *s konačnim produktima. Ako je* $\vec{x}.t$ *term u kontekstu nad* Σ, *gdje je* $\vec{x} = x_1, \dots, x_n$, $x_i : A_i$, *za* $i = 1, 2, \dots, n$ *i* $t : B$, *tada je morfizam*

$$[\![\vec{x}.t]\!]_M : M(A_1, \dots, A_n) \to MB$$

definiran rekurzivno na sljedeći način:

(i) *ako je* t *varijabla, tada je nužno* $t = x_i$ *za jedinstveni* $i \leq n$. *U tom slučaju je* $[\![\vec{x}.t]\!]_M = \pi_i$, *projekcija na* i-*tu 'koordinatu'.*

(ii) ako je $t = f(t_1, \dots, t_m)$*, za* $t_i : C_i$*, za* $i = 1, 2, \dots, m$*, tada je* $[\![\vec{x}.t]\!]_M$ *kompozicija*

$$M(A_1, \dots, A_n) \xrightarrow{([\![\vec{x}.t_1]\!]_M, \dots, [\![\vec{x}.t_m]\!]_M)} M(C_1, \dots, C_m) \xrightarrow{Mf} MB$$

Ponekad, kad je iz konteksta jasno o kojoj Σ-strukturi se radi, pišemo samo $[\![\vec{x}.t]\!]$ bez indeksa.

Sada definiramo složenost terma. Ona će nam biti potrebna za dokaze nekih tehničkih tvrdnji.

Definicija 2.2.3. *Neka je t term.* Složenost *terma t definiramo rekurzivno na sljedeći način:*

(i) Ako je t varijabla, tada je složenost terma t jednaka 0*.*

(ii) Ako je t term oblika $t = f(t_1, \dots, t_n)$*, tada je složenost terma t jednaka* $1 + max_{i \leq n}\{$*složenost terma* $t_i\}$*.*

Postavlja se pitanje kako ćemo opisati supstituciju varijabli termima. O tome govori sljedeća lema, koja nam kaže da se supstitucija može interpretirati pomoću kompozicije morfizama u kategoriji.

Lema 2.2.4. *Neka je M neka* Σ*-struktura u kategoriji* $\mathcal{C}$ *s konačnim produktima. Neka je* $\vec{y} = y_1, \dots, y_m$*,* $y_i : B_i$*, za* $i = 1, \dots, m$*, prikladan kontekst za term* $t : C$ *i neka je* $\vec{s}$ *konačan niz terma iste duljine i tipa kao* $\vec{y}$*. Nadalje, neka je* $\vec{x} = x_1, \dots, x_n$ *prikladan kontekst za svaki* s_i*,* $i = 1, \dots, m$*. Tada je* $[\![\vec{x}.t[\vec{s}/\vec{y}]]\!]$ *kompozicija sljedećih morfizama*

$$M(A_1, \dots, A_n) \xrightarrow{([\![\vec{x}.s_1]\!], \dots, [\![\vec{x}.s_m]\!])} M(B_1, \dots, B_m) \xrightarrow{[\![\vec{y}.t]\!]} MC\ .$$

Dokaz. Tvrdnju leme dokazujemo indukcijom po složenosti terma t.

Neka je t varijabla. Tada je $t : C$ upravo jednak $y_i : B_i$ za neki jedinstveni $i \leq m$, te je $[\![\vec{y}.t]\!] = \pi_i$. Redom imamo:

$$[\![\vec{y}.t]\!] \circ ([\![\vec{x}.s_1]\!], \dots, [\![\vec{x}.s_m]\!]) = \pi_i \circ ([\![\vec{x}.s_1]\!], \dots, [\![\vec{x}.s_m]\!]) = [\![\vec{x}.s_i]\!].$$

No vrijedi i

$$[\![\vec{x}.s_i]\!] = [\![\vec{x}.y_i[\vec{s}/\vec{y}]]\!] = [\![\vec{x}.t[\vec{s}/\vec{y}]]\!],$$

a onda konačno dobivamo

$$[\![\vec{x}.t[\vec{s}/\vec{y}]]\!] = [\![\vec{y}.t]\!] \circ ([\![\vec{x}.s_1]\!], \dots, [\![\vec{x}.s_m]\!]).$$

Pretpostavimo da tvrdnja leme vrijedi za sve terme složenosti $j < k$, za neki $k \in \mathbb{N}$.

Neka je t term složenosti $k > 0$. Tada je on oblika $t = f(t_1, \ldots, t_l)$, za neki $l \in \mathbb{N}$ i neke terme $t_i : D_i$, $i \leq l$ složenosti manje od k. Po definiciji je $[\![\vec{y}.t]\!]$ kompozicija

$$M(B_1, \ldots, B_m) \xrightarrow{([\![\vec{y}.t_1]\!], \ldots, [\![\vec{y}.t_l]\!])} M(D_1, \ldots, D_l) \xrightarrow{Mf} MC \ .$$

Imajući to na umu, želimo pokazati da sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd} M(B_1, \ldots, B_m) \arrow[r, "([\![\vec{y}.t_1]\!], \ldots, [\![\vec{y}.t_l]\!])"] & M(D_1, \ldots, D_l) \arrow[r, "Mf"] & MC \\ M(A_1, \ldots, A_n) \arrow[u, "([\![\vec{x}.s_1]\!], \ldots, [\![\vec{x}.s_m]\!])"] \arrow[urr, "{[\![\vec{x}.t[\vec{s}/\vec{y}]]\!]}"'] & & \end{tikzcd}$$

U tu svrhu pogledajmo dijagram(e), za $i \leq l$

$$\begin{tikzcd} M(B_1, \ldots, B_m) \arrow[r, "[\![\vec{y}.t_i]\!]"] & MD_i \\ M(A_1, \ldots, A_n) \arrow[u, "([\![\vec{x}.s_1]\!], \ldots, [\![\vec{x}.s_m]\!])"] \arrow[ur, "{[\![\vec{x}.t_i[\vec{s}/\vec{y}]]\!]}"'] & \end{tikzcd}$$

koji, po pretpostavci indukcije, komutiraju. Tvrdnja slijedi iz toga i iz činjenica da je $f(t_1, \ldots, t_l)[\vec{s}/\vec{y}] = f(t_1[\vec{s}/\vec{y}], \ldots, t_l[\vec{s}/\vec{y}])$ te $M(D_1, \ldots, D_l) = MD_1 \times \cdots \times MD_l$. Naime,

$$\begin{aligned} &Mf \circ ([\![\vec{y}.t_1]\!], \ldots, [\![\vec{y}.t_l]\!]) \circ ([\![\vec{x}.s_1]\!], \ldots, [\![\vec{x}.s_m]\!]) = \\ =&Mf \circ ([\![\vec{x}.t_1[\vec{s}/\vec{y}]]\!], \ldots, [\![\vec{x}.t_l[\vec{s}/\vec{y}]]\!]) = \\ =&[\![\vec{x}.f(t_1[\vec{s}/\vec{y}], \ldots, t_l[\vec{s}/\vec{y}])]\!] = \\ =&[\![\vec{x}.f(t_1, \ldots, t_l)[\vec{s}/\vec{y}]]\!] = \\ =&[\![\vec{x}.t[\vec{s}/\vec{y}]]\!] \end{aligned}$$

$\square$

Lema 2.2.5. *Neka je $h : M \to N$ homomorfizam Σ-struktura u kategoriji $\mathcal{C}$ s konačnim produktima i neka je $\vec{x}.t$ term u kontekstu nad Σ, za $t : B$, $\vec{x} = x_1, \ldots, x_n$ i $x_i : A_i$, za $i \leq n$. Tada sljedeći dijagram komutira:*

$$\begin{tikzcd} M(A_1, \ldots, A_n) \arrow[r, "[\![\vec{x}.t]\!]_M"] \arrow[d, "h_{A_1} \times \cdots \times h_{A_n}"] & MB \arrow[d, "h_B"] \\ N(A_1, \ldots, A_n) \arrow[r, "[\![\vec{x}.t]\!]_N"] & NB \end{tikzcd}$$

Dokaz. Tvrdnju leme dokazujemo indukcijom po složenosti terma t.

Neka je t varijabla. Tada je $t : C$ upravo jednak $x_i : A_i$ za neki jedinstveni $i \leq n$, te su $[\![\vec{x}.t]\!]_M = \pi_i : M(A_1, \ldots, A_n) \to MA_i$ i $[\![\vec{x}.t]\!]_N = \pi'_i : N(A_1, \ldots, A_n) \to NA_i$. Iz definicije produkta $h_{A_1} \times \cdots \times h_{A_n}$ slijedi da sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{array}{ccc} M(A_1, \ldots, A_n) & \xrightarrow{\pi_i} & MA_i \\ \Big\downarrow{\scriptstyle h_{A_1} \times \cdots \times h_{A_n}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle h_{A_i}} \\ N(A_1, \ldots, A_n) & \xrightarrow{\pi'_i} & NA_i \end{array}$$

Pretpostavimo da tvrdnja leme vrijedi za sve terme složenosti $j < k$, za neki $k \in \mathbb{N}$.

Neka je t term složenosti $k > 0$. Tada je on oblika $t = f(t_1, \ldots, t_m)$, za neki $m \in \mathbb{N}$ i neke terme $t_i : C_i$, $i \leq m$ složenosti manje od k. Imajući na umu definicije $[\![\vec{x}.t]\!]_M$ i $[\![\vec{x}.t]\!]_N$ zanima nas sljedeći dijagram:

$$\begin{array}{ccccc} M(A_1, \ldots, A_n) & \xrightarrow{([\![\vec{x}.t_1]\!]_M, \ldots, [\![\vec{x}.t_m]\!]_M)} & M(C_1, \ldots, C_m) & \xrightarrow{Mf} & MB \\ \Big\downarrow{\scriptstyle h_{A_1} \times \cdots \times h_{A_n}} & & & & \Big\downarrow{\scriptstyle h_B} \\ N(A_1, \ldots, A_n) & \xrightarrow{([\![\vec{x}.t_1]\!]_M, \ldots, [\![\vec{x}.t_m]\!]_N)} & N(C_1, \ldots, C_m) & \xrightarrow{Nf} & NB \end{array}$$

Želimo pokazati da on komutira.

Iz pretpostavke indukcije slijedi da sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{array}{ccc} M(A_1, \ldots, A_n) & \xrightarrow{[\![\vec{x}.t_i]\!]_M} & MC_i \\ \Big\downarrow{\scriptstyle h_{A_1} \times \cdots \times h_{A_n}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle h_{C_i}} \\ N(A_1, \ldots, A_n) & \xrightarrow{[\![\vec{x}.t_i]\!]_N} & NC_i \end{array}$$

Zatim, iz definicije kategorije Σ-$\mathbf{Str}(\mathcal{C})$ slijedi da sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{array}{ccc} M(C_1, \ldots, C_m) & \xrightarrow{Mf} & MB \\ \Big\downarrow{\scriptstyle h_{C_1} \times \cdots \times h_{C_m}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle h_B} \\ N(C_1, \ldots, C_m) & \xrightarrow{Nf} & NB \end{array}$$

Iz činjenice da oba prethodna dijagrama komutiraju, redom imamo:

$$\begin{aligned}
&h_B \circ [\![\vec{x}.t]\!]_M = \\
=&h_B \circ Mf \circ ([\![\vec{x}.t_1]\!]_M, \dots, [\![\vec{x}.t_m]\!]_M) = \\
=&Nf \circ (h_{C_1} \times \cdots \times h_{C_m}) \circ ([\![\vec{x}.t_1]\!]_M, \dots, [\![\vec{x}.t_m]\!]_M) = \\
=&Nf \circ (h_{C_1} \circ [\![\vec{x}.t_1]\!]_M \times \cdots \times h_{C_m} \circ [\![\vec{x}.t_m]\!]_M) = \\
=&Nf \circ ([\![\vec{x}.t_1]\!]_N \circ (h_{A_1} \times \cdots \times h_{A_n}), \dots, [\![\vec{x}.t_m]\!]_N \circ (h_{A_1} \times \cdots \times h_{A_n})) = \\
=&Nf \circ ([\![\vec{x}.t_1]\!]_N, \dots, [\![\vec{x}.t_m]\!]_N) \circ (h_{A_1} \times \cdots \times h_{A_n}) = \\
=&[\![\vec{x}.t]\!]_N \circ (h_{A_1} \times \cdots \times h_{A_n}),
\end{aligned}$$

čime je tvrdnja dokazana. $\square$

Sada ćemo interpretirati formule u Σ-strukturi.

Definicija 2.2.6. *Neka je M neka Σ-struktura u kategoriji $\mathcal{C}$ s konačnim produktima. Formulu u kontekstu $\vec{x}.\phi$ nad Σ, gdje je $\vec{x} = x_1, \dots, x_n$ i $x_i : A_i$, za $i \leq n$, interpretiramo kao podobjekt*

$$[\![\vec{x}.\phi]\!]_M \hookrightarrow M(A_1, \dots, A_n),$$

koji definiramo rekurzivno na sljedeći način:

(i) Ako je formula ϕ oblika $R(t_1, \dots, t_m)$, gdje je R relacijski simbol tipa $B_1, \dots, B_m$ (i $t_i : B_i$, za $i \leq m$), tada je $[\![\vec{x}.\phi]\!]$ povlak

$$\begin{tikzcd}
{[\![\vec{x}.\phi]\!]} \arrow[rr] \arrow[d, hook] & & MR \arrow[d, hook] \\
M(A_1, \dots, A_n) \arrow[rr, "{([\![\vec{x}.t_1]\!], \dots, [\![\vec{x}.t_m]\!])}"] & & M(B_1, \dots, B_m)
\end{tikzcd}$$

(ii) Ako je formula ϕ oblika $(s = t)$, gdje su s i t termi sorte B, tada je $[\![\vec{x}.\phi]\!]$ ujednačitelj

$$M(A_1, \dots, A_n) \underset{[\![\vec{x}.t]\!]}{\overset{[\![\vec{x}.s]\!]}{\rightrightarrows}} MB$$

(iii) Ako je formula ϕ logička konstanta $\top$, tada je $[\![\vec{x}.\phi]\!]$ najveći element skupa (ili prave klase) $Sub(M(A_1, \dots, A_n))$.

(iv) Ako je formula ϕ oblika $(\psi \wedge \chi)$, tada je $[\![\vec{x}.\phi]\!]$ presjek podobjekata $[\![\vec{x}.\psi]\!]$ i $[\![\vec{x}.\chi]\!]$ (tj. povlak)

$$\begin{tikzcd}
{[\![\vec{x}.\phi]\!]} \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & {[\![\vec{x}.\psi]\!]} \arrow[d, hook] \\
{[\![\vec{x}.\chi]\!]} \arrow[r, hook] & M(A_1, \dots, A_n)
\end{tikzcd}$$

(v) *Ako je formula ϕ logička konstanta $\perp$ i ako je $\mathcal{C}$ koherentna kategorija, tada je $[\![\vec{x}.\phi]\!]$ najmanji element skupa (ili prave klase) $Sub(M(A_1,\dots,A_n))$.*

(vi) *Ako je formula ϕ oblika $(\psi \vee \chi)$ i ako je $\mathcal{C}$ koherentna kategorija, tada je $[\![\vec{x}.\phi]\!]$ unija podobjekata $[\![\vec{x}.\psi]\!]$ i $[\![\vec{x}.\chi]\!]$.*

(vii) *Ako je formula ϕ oblika $(\psi \Rightarrow \chi)$ i ako je $\mathcal{C}$ Heytingova kategorija, tada je $[\![\vec{x}.\phi]\!]$ implikacija $[\![\vec{x}.\psi]\!] \Rightarrow [\![\vec{x}.\chi]\!]$ u Heytingovoj algebri $Sub(M(A_1,\dots,A_n))$.*

(viii) *Ako je formula ϕ oblika $(\neg\psi)$ i ako je $\mathcal{C}$ Heytingova kategorija, tada je $[\![\vec{x}.\phi]\!]$ Heytingova negacija $\neg[\![\vec{x}.\psi]\!]$.*

(ix) *Ako je formula ϕ oblika $\exists y(\psi)$, gdje je y sorte B i ako je $\mathcal{C}$ regularna kategorija, tada je $[\![\vec{x}.\phi]\!]$ slika kompozicije*

$$[\![\vec{x},y.\psi]\!] \hookrightarrow M(A_1,\dots A_n,B) \xrightarrow{\pi} M(A_1,\dots,A_n)\ ,$$

gdje je π projekcija na prvih n faktora.

(x) *Ako je formula ϕ oblika $\forall y(\psi)$, gdje je y sorte B i ako je $\mathcal{C}$ Heytingova kategorija, tada je $[\![\vec{x}.\phi]\!]$ jednak $\forall_\pi[\![\vec{x},y.\psi]\!]$, gdje je π kao u (ix).*

(xi) *Ako je formula ϕ oblika $\bigvee_{i\in I}\psi_i$ i ako je $\mathcal{C}$ geometrijska kategorija, tada je $[\![\vec{x}.\phi]\!]$ unija elemenata $[\![\vec{x}.\psi_i]\!]$ u $Sub(M(A_1,\dots,A_n))$.*

(xii) *Ako je formula ϕ oblika $\bigwedge_{i\in I}\psi_i$ i ako $\mathcal{C}$ ima proizvoljne presjeke podobjekata, tada je $[\![\vec{x}.\phi]\!]$ presjek elemenata $[\![\vec{x}.\psi_i]\!]$ u $Sub(M(A_1,\dots,A_n))$.*

Zbog prethodne definicije, ako je M Σ-struktura u konačno potpunoj kategoriji $\mathcal{C}$, možemo formulama pridružiti interpretacije u M. Svim Hornovim formulama u kontekstu pridružujemo interpretacije u M. Ako je $\mathcal{C}$ regularna, možemo svim regularnim formulama u kontekstu pridružiti interpretacije u M. Analogno vrijedi za koherentne, Heytingove i geometrijske kategorije (u Heytingovoj kategoriji gledamo formule prvog reda).

U nastavku ćemo reći "ϕ je interpretabilna u $\mathcal{C}$" ako $\mathcal{C}$ pripada jednoj od gornjih klasa kategorija i ϕ pripada odgovarajućoj klasi formula. Slično ćemo reći za sekvente i teorije interpretabilne u $\mathcal{C}$.

Sada navodimo tvrdnju koja kaže da možemo supstituciju varijabli termima proširiti s terma na formule. Njen dokaz se provodi indukcijom po složenosti formule, tj. broju logičkih veznika u formuli, slično kao i u lemi za terme.

Lema 2.2.7. *Neka je $\vec{y}.\phi$ formula u kontekstu nad Σ interpretabilna u $\mathcal{C}$. Neka je $\vec{s}$ konačan niz terma iste duljine i tipa kao $\vec{y}$ te $\vec{x}$ prikladan kontekst za svaki s_i, $i = 1, \ldots, m$. Tada, za svaku Σ-strukturu M u $\mathcal{C}$ postoji sljedeći povlak:*

$$\begin{tikzcd}
[\![\vec{x}.\phi[\vec{s}/\vec{y}]]\!]_M \arrow[r] \arrow[d, hook] & [\![\vec{y}.\phi]\!]_M \arrow[d, hook] \\
M(A_1, \ldots, A_n) \arrow[r, "{([\![\vec{x}.s_1]\!]_M, \ldots,]\!]\vec{x}.s_m[\![_M)}"] & M(B_1, \ldots, B_m)
\end{tikzcd}$$

gdje su A_i i B_j sorte varijabli x_i i s_j.

Ova lema nam kaže da interpretacija formule u kanonskom kontekstu određuje njenu interpretaciju u bilo kojem drugom prikladnom kontekstu. Uočimo da je posljedica te leme činjenica da možemo odbaciti "nepostojeće varijable", tj. vrijedi sljedeća tvrdnja:

Korolar 2.2.8.

(i) Neka je $\mathcal{C}$ regularna kategorija, $\vec{x}.\phi$ formula u kontekstu nad signaturom Σ koja je interpretabilna u $\mathcal{C}$. Neka je $y : B$ varijabla koja se ne pojavljuje u $\vec{x}$ (pa nije slobodna u ϕ). Tada, za svaku Σ-strukturu u $\mathcal{C}$ takvu da je $MB \to 1$ ekstremalan epimorfizam, su interpretacije $[\![\vec{x}.\phi]\!]_M$ i $[\![\vec{x}.(\exists y)\phi]\!]_M$ jednake.

(ii) Ako je $\mathcal{C}$ Heytingova kategorija, uz pretpostavke kao u (i), tada su interpretacije $[\![\vec{x}.\phi]\!]_M$ i $[\![\vec{x}.(\forall y)\phi]\!]_M$ su jednake.

Dokaz.

(i) U regularnoj kategoriji su ekstremalni epimorfizmi stabilni na povlak. Stoga promotrimo sljedeći dijagram:

$$\begin{tikzcd}
[\![\vec{x}, y.\phi]\!]_M \arrow[r, "e"] \arrow[d, hook] & [\![\vec{x}.\phi]\!]_M \arrow[d, hook, "m"] \\
M(A_1, \ldots, A_n, B) \arrow[r, "\pi"] & M(A_1, \ldots, A_n)
\end{tikzcd}$$

Prije svega uočimo da, ako je $\vec{x}.\phi$ formula u kontekstu, možemo uzeti n-torku terma u kontekstu $\vec{x}, y.\vec{s}$, gdje je $\vec{s} = (x_1, \ldots, x_n)$, tada je $\vec{x}, y.\phi(\vec{s}/\vec{x}) = \vec{x}, y.\phi$, pa je po prethodnoj lemi ovaj dijagram zaista povlak.

Kako je $MB \to 1$ ekstremalan epimorfizam, tada je i projekcija $\pi : M(A_1, \ldots, A_n, B) \to M(A_1, \ldots, A_n)$ ekstremalan epimorfizam. Iz stabilnosti na povlake slijedi da je i e ekstremalan epimorfizam. Tada je dijagonalno preslikavanje jednako me, gdje je m monomorfizam, a kako se tu radi o podobjektu, m je jedinstven do na kompoziciju sa izomorfizmom pa je me faktorizacija kroz sliku. Dakle, $[\![\vec{x}.\phi]\!]_M$ je slika kompozicije $[\![\vec{x}, y.\phi]\!]_M \hookrightarrow M(A_1, \ldots, A_n, B)$ i π, a to je, po definiciji, interpretacija egzistencijalnog kvantifikatora, odakle slijedi $[\![\vec{x}.\phi]\!]_M = [\![\vec{x}.(\exists y)\phi]\!]_M$.

(ii) U (i) smo dokazali da je $\exists_\pi \circ \pi^*$ ideniteta na $Sub(M(A_1, \ldots, A_n))$. Naime, ako promotrimo povlak iz (i), možemo vidjeti da je lijeva strelica $\pi^*(m)$, a na sličan način je desna $\exists(\pi^*(m))$. No desna je jednaka m, odakle slijedi da je $\exists_\pi \circ \pi^*$ ideniteta. Tada je identiteta i njegov desni adjungirani funktor, tj. $\forall_\pi \circ \pi^*$, pa je $\forall_\pi$ ekvivalencija. Time smo dokazali traženu tvrdnju.

Prisjetimo se da smo pokazali da se možemo prebacivati iz jedne Σ-strukture M u drugu Σ-strukturu N pomoću sljedećeg komutativnog dijagrama:

$$\begin{array}{ccc} M(A_1, \ldots, A_n) & \xrightarrow{[\![\vec{x}.t]\!]_M} & MB \\ \downarrow{\scriptstyle h_{A_1} \times \cdots \times h_{A_n}} & & \downarrow{\scriptstyle h_B} \\ N(A_1, \ldots, A_n) & \xrightarrow{[\![\vec{x}.t]\!]_N} & NB \end{array}$$

Slična tvrdnja vrijedi i za formule.

Lema 2.2.9. *Neka je $\mathcal{C}$ konačno potpuna kategorija te neka je $h : M \to N$ homomorfizam Σ-struktura u kategoriji $\mathcal{C}$. Neka je $\vec{x}.\phi$ geometrijska formula u kontekstu interpretabilna u $\mathcal{C}$. Tada postoji sljedeći komutativan dijagram:*

$$\begin{array}{ccc} [\![\vec{x}.\phi]\!]_M & \hookrightarrow & M(A_1, \ldots, A_n) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_{A_1} \times \cdots \times h_{A_n}} \\ [\![\vec{x}.\phi]\!]_N & \hookrightarrow & N(A_1, \ldots, A_n) \end{array}$$

Ova lema se dokazuje indukcijom po složenosti formule, tj. broju logičkih veznika u formuli, slično kao i za terme.

Napomena 2.2.10. *Zahtjev da je formula geometrijska ne možemo izbjeći jer implikacija ne čuva uređaj u prvoj varijabli. Ako je $X_1 \leq Y_1$ i $X_2 \leq Y_2$, općenito ne vrijedi $(X_1 \Rightarrow X_2) \leq (Y_1 \Rightarrow Y_2)$. Na primjer, uzmimo inicijalni objekt $0 \hookrightarrow A$. Uzmimo $X_1 = X_2 = 0$. Tada, ako je $(Y_1 \Rightarrow Y_2)$ netrivijalna implikacija (različita od A i 0), vrijedi $(X_1 \leq Y_1)$ i $(X_2 \leq Y_2)$. Kako su X_1 i X_2 inicijalni, vrijedi da je $(X_1 \Rightarrow X_2) = (0 \Rightarrow 0) = A$. Te, kako je $(Y_1 \Rightarrow Y_2)$ netrivijalna implikacija, slijedi $(X_1 \Rightarrow X_2) > (Y_1 \Rightarrow Y_2)$.*

Sada, kada znamo da se naše strukture "poštuju strukturu formula" kao što smo ih definirali, možemo definirati interpretaciju teorije $\mathbb{T}$ u nekoj kategoriji $\mathcal{C}$.

Definicija 2.2.11. *Neka je M Σ-struktura u kategoriji $\mathcal{C}$.*

(a) Ako je $\sigma = (\phi \vdash_{\vec{x}} \psi)$ sekventa nad signaturom Σ interpretabilna u $\mathcal{C}$, kažemo da je σ ispunjiva *u M (u oznaci $M \vDash \sigma$) ako je $[\![\vec{x}.\phi]\!]_M \leq [\![\vec{x}.\psi]\!]_M$ u $Sub(M(A_1, \ldots, A_n))$.*

(b) Ako je $\mathbb{T}$ teorija nad signaturom Σ interpretabilna u $\mathcal{C}$, kažemo da je M model *za teoriju $\mathbb{T}$ (u oznaci $M \vDash \mathbb{T}$) ako su svi aksiomi od $\mathbb{T}$ ispunjeni u M.*

(c) Sa $\mathbb{T}$-$\mathbf{Mod}(\mathcal{C})$ označavamo punu potkategoriju kategorije Σ-$\mathbf{Str}(\mathcal{C})$ čiji objekti su modeli teorije $\mathbb{T}$.

$\square$

3 Sintaktičke kategorije

Sada kada smo vidjeli kako možemo modele neke teorije interpretirati u nekoj odgovarajućoj kategoriji, postavlja se pitanje postoji li neki model M koji potpuno opisuje teoriju, i to u smislu da su sve sekvente koje su ispunjive u M dokazive u $\mathbb{T}$ (tj. da vrijedi teorem potpunosti).

Odgovor na gornje pitanje je potvrdan. Takav model postoji. Cilj ovog poglavlja je konstruirati kategoriju $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$, koja sadrži generički model $M_{\mathbb{T}}$ s gornjim svojstvom.

3.1 Sekventni račun i dokazivost

Prije konstrukcije sintaktičke kategorije, osvrnuti ćemo se na dokazivost. Kao u prethodnom poglavlju, baziramo se na [2] (D1.3). Jedna od glavnih svrha logike je dokazivanje tvrdnji koje su nam u nekom trenutku (ili u nekoj teoriji) od interesa. Definirat ćemo (djelomično neformalno) dokazivost i neke druge, uz nju vezane, pojmove.

Za formalizaciju dokaza koristit ćemo sekventni račun. Pisat ćemo pravila u obliku

$$\frac{\Gamma}{\sigma}\ ,$$

gdje je Γ niz sekventi (moguće i prazan), a σ sekventa. Interpretacija tog izraza je da, ako su ispunjive sve sekvente u Γ, tada možemo zaključiti da je ispunjiva sekventa σ.

Sada ćemo nabrojati pravila izvoda. Dijelimo ih u sljedeće grupe:

(a) *'Strukturalna' pravila* koja se sastoje od jednog aksioma i dva pravila:

(i) *Aksiom identitete*:

$$(\phi \vdash_{\vec{x}} \phi)$$

(ii) *Pravilo supstitucije*:

$$\frac{(\phi \vdash_{\vec{x}} \psi)}{(\phi[\vec{s}/\vec{x}] \vdash_{\vec{y}} \psi[\vec{s}/\vec{x}])}$$

gdje $\vec{y}$ sadrži sve varijable iz $\vec{s}$.

(iii) *Pravilo reza*:

$$\frac{(\phi \vdash_{\vec{x}} \psi) \qquad (\psi \vdash_{\vec{x}} \chi)}{(\phi \vdash_{\vec{x}} \chi)}$$

(b) *Pravila jednakosti* koja se sastoje od sljedeća dva aksioma:

$$(\top \vdash_x (x = x)) \text{ i } (((\vec{x} = \vec{y}) \wedge \phi) \vdash_{\vec{z}} \phi[\vec{y}/\vec{x}]),$$

gdje su $\vec{x}$ i $\vec{y}$ konteksti istih duljina i istog tipa, $\vec{z}$ sadrži $\vec{x}, \vec{y}$ i slobodne varijable formule ϕ, te je $(\vec{x} = \vec{y})$ pokrata za $((x_1 = y_1) \wedge \cdots \wedge (x_n = y_n))$.

(c) *Pravila za konjunkciju* koja se sastoje od tri aksioma i jednog pravila:

Aksiomi:

$$(\phi \vdash_{\vec{x}} \top), \ ((\phi \wedge \psi) \vdash_{\vec{x}} \phi) \text{ i } ((\phi \wedge \psi) \vdash_{\vec{x}} \phi)$$

Pravilo:

$$\frac{(\phi \vdash_{\vec{x}} \psi) \qquad (\phi \vdash_{\vec{x}} \chi)}{(\phi \vdash_{\vec{x}} (\psi \wedge \chi))}$$

(d) *Pravila za disjunkciju* koja se sastoje od tri aksioma i jednog pravila:

Aksiomi:

$$(\bot \vdash_{\vec{x}} \phi), \ (\phi \vdash_{\vec{x}} (\phi \vee \psi)) \text{ i } (\psi \vdash_{\vec{x}} (\phi \vee \psi))$$

Pravilo:

$$\frac{(\phi \vdash_{\vec{x}} \chi) \qquad (\psi \vdash_{\vec{x}} \chi)}{((\phi \vee \psi) \vdash_{\vec{x}} \chi)}$$

(e) *Pravila za implikaciju* koja se sastoje od dva pravila:

$$\frac{((\phi \wedge \psi) \vdash_{\vec{x}} \chi)}{(\psi \vdash_{\vec{x}} (\phi \Rightarrow \chi))}$$

$$\frac{(\psi \vdash_{\vec{x}} (\phi \Rightarrow \chi))}{((\phi \wedge \psi) \vdash_{\vec{x}} \chi)}$$

Pravila za negaciju dobivamo uzimanjem $\chi = \bot$ i identifikacijom $\neg\phi = (\phi \Rightarrow \bot)$.

(f) *Pravila za egzistencijalnu kvantifikaciju* koja se sastoje od dva pravila:

$$\frac{(\phi \vdash_{\vec{x},y} \psi)}{((\exists y)\phi \vdash_{\vec{x}} \psi)}$$

$$\frac{((\exists y)\phi \vdash_{\vec{x}} \psi)}{(\phi \vdash_{\vec{x},y} \psi)}$$

U gornjim pravilima pretpostavljamo da y nije slobodna varijabla u ψ.

(g) *Pravila za univerzalnu kvantifikaciju* koja se sastoje od dva pravila:

$$\frac{(\phi \vdash_{\vec{x},y} \psi)}{(\phi \vdash_{\vec{x}} (\forall y)\psi)}$$

$$\frac{(\phi \vdash_{\vec{x}} (\forall y)\psi)}{(\phi \vdash_{\vec{x},y} \psi)}$$

(h) *Pravila za infinitarnu konjunkciju i disjunkciju* su analogna pravilima u (c) i (d), ali s beskonačno mnogo sekventi "iznad crte" i formulom koja sadrži infinitarnu disjunkciju ili konjunkciju "ispod crte".

(i) Dva aksioma koje možemo zvati 'miješanim aksiomima':

Aksiom distribucije:

$$((\phi \wedge (\psi \vee \chi)) \vdash_{\vec{x}} (\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi)))$$

Frobeniusov aksiom:

$$((\phi \wedge (\exists y)\psi) \vdash_{\vec{x}} (\exists y)(\phi \wedge \psi))$$

Ova dva aksioma su dokazivi u logici prvog reda koristeći pravila za implikaciju. No, mi možda radimo u logici u kojoj nemamo implikaciju (npr. koherentnoj logici), te tada ne možemo dokazati ove sekvente. Stoga ove sekvente navodimo kao aksiome u koherentnoj logici te Frobeniusov aksiom navodimo kao aksiom u regularnoj logici.

U geometrijskoj logici, uz ova dva aksioma, navodimo i generalizaciju aksioma distribucije koji sadrži infinitarne disjunkcije.

Napomena 3.1.1. *U literaturi se često dokazivost formalizira uz pomoć prirodne dedukcije ili sličnog sustava u kojem se ne koriste sekvente, nego same formule. Uočimo da je sekventni račun generalizacija takvog sustava. Naime, ako vrijedi formula ϕ, tada vrijedi i sekventa $(\top \vdash_{\vec{x}} \phi)$ i obratno.*

Razlog zašto koristimo sekvente, a ne formule, jest taj što trebamo na neki način formalizirati logičke posljedice, što se, ako koristimo formule, formalizira uz pomoć implikacije. No logike s kojima mi radimo možda nemaju implikaciju.

Sada možemo definirati pojmove izvoda i dokazivosti. *Izvod* u našem sustavu će imati oblik stabla, npr.

$$\dfrac{\dfrac{\sigma_1 \quad \sigma_2}{\sigma_3} \qquad \sigma_4}{\sigma_5}$$

gdje je svaka sekventa "bez crte iznad" logički aksiom, a svaka "sa crtom iznad" slijedi iz onih iznad pomoću nekog pravila izvoda, koja ćemo navesti kasnije.

Ako naš jezik uključuje prebrojive disjunkcije ili konjunkcije, tada stablo može biti beskonačno, no to nam nije problem. Bitno nam je samo da stablo ima listove, tj. da nije "beskonačno visoko". To još nazivamo i dobrom utemeljenošću.

Izvod obzirom na teoriju $\mathbb{T}$ je slično definiran, ali tu sekvente "bez crte iznad" mogu biti i nelogički aksiomi teorije $\mathbb{T}$. Ako postoji izvod obzirom na teoriju $\mathbb{T}$ za sekventu σ (izvod takav da je σ korijen stabla), tada za σ kažemo da je *dokaziva* u $\mathbb{T}$ ili $\mathbb{T}$-*dokaziva*.

Prirodno se postavlja pitanje adekvatnosti za kategoričku semantiku iz prethodne cjeline. Sljedeći teorem nam daje potvrdan odgovor na to pitanje.

Teorem 3.1.2. *(Teorem adekvatnosti)*

Neka je $\mathbb{T}$ Hornova teorija (analogno regularna/koherentna/prvog reda/geometrijska) nad signaturom Σ te neka je M model za $\mathbb{T}$ u konačno potpunoj kategoriji (analogno regularnoj/koherentnoj/Heytingovoj/geometrijskoj) $\mathcal{C}$. Ako je σ sekventa koja je dokaziva u $\mathbb{T}$, tada $M \vDash \sigma$.

Skica dokaza. Potrebno je samo pokazati da za svako pravilo izvoda i M model u odgovarajućoj kategoriji, da tada ako su u M zadovoljene sekvente iznad crte, da su tada zadovoljene i one ispod crte. Tada indukcijom po visini stabla izvoda sekvente dobivamo traženu tvrdnju. $\square$

Napomena 3.1.3. *Uočimo da u ovakvom sustavu sekventa $(\top \vdash_{\vec{x}} (\phi \vee \neg\phi))$ nije nužno istinita. To znači da se sve ovdje dokazano može primijeniti na konstruktivističku ili intuicionističku logiku. No sekventu $(\top \vdash_{\vec{x}} (\phi \vee \neg\phi))$ možemo dodati u aksiome i tada dobivamo klasičnu logiku prvog reda.*

Sada ćemo definirati novu klasu formula (i teorija) koja je hijerarhijski niže od regularnih formula. Kod tih novih formula nekad imamo egzistencijalnu kvantifikaciju, ali nemamo ju uvijek. Takve formule se mogu interpretirati u konačno potpunim kategorijama.

Definicija 3.1.4.

(a) *Neka je $\mathbb{T}$ (regularna) teorija. Klasa* kartezijskih *formula u kontekstu u odnosu na $\mathbb{T}$ su definirane na sljedeći način:*

   (i) *Atomarne formule (formule koje se sastoje samo od relacijskih simbola i jednakosti) su kartezijske.*

(ii) Konačne konjunkcije kartezijskih formula su kartezijske.

(iii) $\vec{x}.(\exists y)\phi$ *je kartezijska ako je sekventa* $((\phi \wedge \phi[z/y]) \vdash_{\vec{x},y,z} (y = z))$ *dokaziva u* $\mathbb{T}$.

(b) *Regularna teorija* $\mathbb{T}$ *je* kartezijska *ako postoji dobro utemeljen parcijalni uređaj njezinih aksioma takav da je svaki aksiom kartezijski u odnosu na podteoriju generiranu svim aksiomima manjim od njega.*

Neka je M neki $\mathbb{T}$-model, gdje je $\mathbb{T}$ neka Hornova teorija u konačno potpunoj kategoriji $\mathcal{C}$. Tada svaka kartezijska formula u kontekstu u odnosu na $\mathbb{T}$ ima interpretaciju u M. Nju dobivamo redefinirajući interpretaciju $[\![\vec{x}.(\exists y : B)\psi]\!]_M$ kao sljedeću kompoziciju:

$$[\![\vec{x}, y.\psi]\!] \hookrightarrow M(A_1, \ldots, A_n, B) \xrightarrow{\pi} M(A_1, \ldots, A_n)$$

Ova kompozicija je monomorfizam. Lako se vidi i da lema 2.2.7 vrijedi i za tu kompoziciju, te da su za nju adekvatna i pravila za egzistencijalnu kvantifikaciju i Frobeniusov aksiom. Stoga teorem adekvatnosti vrijedi i za kartezijsku logiku. Formalno, imamo sljedeći rezultat:

Propozicija 3.1.5. *Neka je* $\mathbb{T}$ *kartezijska teorija nad signaturom* Σ *te neka je* σ *kartezijska sekventa u odnosu na* $\mathbb{T}$. *Ako je* σ *dokaziva u* $\mathbb{T}$ *(koristeći pravila za regularnu logiku), tada je ispunjiva u svakom* $\mathbb{T}$*-modelu u konačno potpunoj kategoriji.*

Imajući na umu da su neke formule "iste" obzirom na dokazivost, primjerice $(\phi \wedge \psi)$ i $(\psi \wedge \phi)$, želimo ih nekako identificirati. Kada smo definirali pojam teorije, također smo bili napomenuli da ta definicija nama nije sasvim dobra, i to u smislu da istu teoriju možemo zadati različitim aksiomima. Primjerice u aksiomu u kojem se pojavljuje konjunkcija možemo zamijeniti dvije podformule na koje ta konjunkcija djeluje (kao gornji primjer). To motivira sljedeću definiciju:

Definicija 3.1.6.

(a) *Neka su* ϕ *i* ϕ' *dvije formule i* $\vec{x}$ *kontekst prikladan za obje. Kažemo da su* ϕ *i* ϕ' dokazivo ekvivalentne *(u odnosu na teoriju* $\mathbb{T}$*) ako postoji izvod (obzirom na teoriju* $\mathbb{T}$*) sekventi* $(\phi \vdash_{\vec{x}} \phi')$ *i* $(\phi' \vdash_{\vec{x}} \phi)$.

(b) *Neka su* $\mathbb{T}$ *i* $\mathbb{T}'$ *dvije teorije nad istom signaturom* Σ. *Kažemo da su teorije* $\mathbb{T}$ *i* $\mathbb{T}'$ ekvivalentne *ako je svaki aksiom teorije* $\mathbb{T}'$ *dokaziv u teoriji* $\mathbb{T}$ *i svaki aksiom teorije* $\mathbb{T}$ *dokaziv u teoriji* $\mathbb{T}'$.

Zbog ove definicije i činjenice da je ekvivalencija kategorija relacija ekvivalencije, od sada pa nadalje kada kažemo teorija mislimo na klasu ekvivalencije ove relacije umjesto određenog skupa aksioma. No napominjemo da je naša definicija ekvivalencije vezana uz fiksnu signaturu.

3.2 Sintaktička kategorija i generički model

U prethodnoj točci smo se bavili dokazivošću i teoremom adekvatnosti. Postavlja se pitanje vrijedi li obrat, tj. teorem potpunosti. To ćemo pokazati u ovoj točci, i to uz pomoć ranije najavljenog generičkog modela $M_{\mathbb{T}}$ unutar sintaktičke kategorije $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$. U ovoj točci se vodimo idejama iz [6], no dokaze uzimamo iz [2] te ih po potrebi malo detaljnije raspisujemo.

Ideja iza kategorije $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ je jednostavna. Ona treba imati dovoljno bogatu strukturu i svojstva u smislu da je moguće definirati $\mathbb{T}$-**Mod**$(\mathcal{C}_{\mathbb{T}})$. Želimo početi od teorije $\mathbb{T}$ i konstruirati kategoriju čiji objekti su takvi da ih svaka kategorija koja sadrži model teorije $\mathbb{T}$ mora imati.

Definicija 3.2.1. *Neka je $\mathbb{T}$ geometrijska teorija nad signaturom Σ. Konstruiramo* sintaktičku kategoriju $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ *na sljedeći način:*

(i) Objekti $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ su klase α-ekvivalentnih formula u kontekstu nad Σ. Ovdje malo modificiramo definiciju α-ekvivalencije. Uz razliku u vezanim varijablama kao u definiciji 2.1.6, smatramo da su dvije formule α-ekvivalentne i ako "preimenujemo kontekst", tj. da su formule $\vec{x}.\phi$ i $\vec{y}.\phi[\vec{y}/\vec{x}]$ ekvivalentne ako je $\vec{y}$ iste duljine i tipa kao $\vec{x}$. Klasu takvih α-ekvivalentnih formula od $\vec{x}.\phi$ označavamo sa $\{\vec{x}.\phi\}$.

(ii) Uzmimo dva objekta $\{\vec{x}.\phi\}$ i $\{\vec{y}.\psi\}$. Zbog α-ekvivalencije možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da su $\vec{x}$ i $\vec{y}$ disjunktni. Sada uzmimo formulu θ. Za nju kažemo da je dokazivo funkcionalna *ako su sve slobodne varijable od θ sadržane u $\vec{x}, \vec{y}$ i ako su u $\mathbb{T}$ dokazive sljedeće tri sekvente:*

(1) $(\theta \vdash_{\vec{x},\vec{y}} (\phi \wedge \psi))$

(2) $((\theta \wedge \theta[\vec{z}/\vec{y}]) \vdash_{\vec{x},\vec{y},\vec{z}} (\vec{y} = \vec{z}))$

(3) $(\phi \vdash_{\vec{x}} (\exists \vec{y})\theta)$

Morfizmi u kategoriji $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ između $\{\vec{x}.\phi\}$ i $\{\vec{y}.\psi\}$ su klase dokazivo ekvivalentnih formula koje su dokazivo funkcionalne. Takve klase (pa i morfizme) označavamo sa $[\theta]$. Kontekst izostavljamo, jer ga možemo iščitati iz domene i kodomene.

Napomena 3.2.2. *U gornjoj definiciji uočimo nekoliko stvari.*

(a) *U uvjetu (i) objekti su dobro definirani. Naime, ako je M model teorije $\mathbb{T}$ u konačno potpunoj kategoriji tada su $[\![\vec{y}.\phi]\!]_M$ i $[\![\vec{x}.\phi[\vec{x}/\vec{y}]]\!]_M$ jednaki. Promotrimo dijagram iz leme 2.2.7. U oznakama iz leme $\vec{s}$ nam je upravo $\vec{x}$, pa je donji morfizam identiteta. Tada je gornji morfizam izomorfizam (kao povlak izomorfizma). No, kako mi gledamo podobjekte, izomorfni objekti tvore isti podobjekt.*

(b) *U uvjetu (ii) zapis $(\vec{y} = \vec{z})$ nam je pokrata za $(y_1 = z_1) \wedge \cdots \wedge (y_m = z_m)$, a $(\exists \vec{y})$ za $(\exists y_1) \dots (\exists y_m)$.*

(c) *Promotrimo definiciju dokazivo funkcionalne formule. Iz dokazivosti sekvente (2) tada znamo da je sekventa (3) kartezijska u odnosu na $\mathbb{T}$.*

(d) *U uvjetu (ii) morfizmi su dobro definirani. Uzmemo li formulu θ' koje je dokazivo ekvivalentna formuli θ, lako je vidjeti da ona zadovoljava (1), (2) i (3) koristeći definiciju dokazive ekvivalencije i pravila izvoda.*

Definiramo kompoziciju morfizama $[\theta] : \{\vec{x}.\phi\} \to \{\vec{y}.\psi\}$ i $[\theta'] : \{\vec{y}.\psi\} \to \{\vec{z}.\chi\}$ kao dokazivo funkcionalnu formulu $(\exists \vec{y})(\theta \wedge \theta') : \{\vec{x}.\phi\} \to \{\vec{z}.\chi\}$. Svojstva (1), (2) i (3) je lako direktno provjeriti. Identitetu na $\{\vec{x}.\phi\}$ definiramo sa $[(\phi \wedge (\vec{x} = \vec{x'}))] : \{\vec{x}.\phi\} \to \{\vec{x'}.\phi[\vec{x'}/\vec{x}]\}$ (kodomena i domena su jednake zbog α-ekvivalencije). Dakle, $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ je kategorija i nju nazivamo *sintaktička kategorija* teorije $\mathbb{T}$. Štoviše, ona je i konačno potpuna, sa terminalnim objektom $\{[].\top\}$ (jedinstveni morfizam je $[\phi] : \{\vec{x}.\phi\} \to \{[].\top\}$). Produkti su oblika

$$\{\vec{x'}.\phi[\vec{x'}/\vec{x}]\} \xleftarrow{[(\phi\wedge\psi\wedge(\vec{x}=\vec{x'})]} \{\vec{x}, \vec{y}.(\phi \wedge \psi)\} \xrightarrow{[(\phi\wedge\psi\wedge(\vec{y}=\vec{y'})]} \{\vec{y'}.\psi[\vec{y'}/\vec{y}]\}$$

te su ujednačitelji oblika

$$\{\vec{x'}.(\exists \vec{y})(\theta[\vec{x'}/\vec{x}] \wedge \gamma[\vec{x'}/\vec{x}])\} \xrightarrow{[(\exists\vec{y})(\theta\wedge\gamma\wedge(\vec{x'}=\vec{x}))]} \{\vec{x}.\phi\} \underset{[\gamma]}{\overset{[\theta]}{\rightrightarrows}} \{\vec{y}.\psi\}$$

Odakle slijedi da postoje svi konačni limesi. Svojstva terminalnog objekta, produkta i ujednačitelja se mogu provjeriti direktno.

Kao i ranije, formule ćemo interpretirati kao podobjekte. Stoga nas zanima kako izgledaju podobjekti u sintaktičkoj kategoriji $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$.

Propozicija 3.2.3. *Neka je $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ sintaktička kategorija geometrijske teorije $\mathbb{T}$.*

(i) *Podobjekti objekta $\{\vec{x}.\phi\}$ u $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ su oni objekti $\{\vec{x}.\psi\}$, takvi da je sekventa $\psi \vdash_{\vec{x}} \phi$ $\mathbb{T}$-dokaziva.*

(ii) Dva podobjekta $\{\vec{x}.\psi_1\}$ i $\{\vec{x}.\psi_2\}$ objekta $\{\vec{x}.\phi\}$ u $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ zadovoljavaju relaciju $\{\vec{x}.\psi_1\} \leq \{\vec{x}.\psi_2\}$ ako i samo ako je sekventa $\psi_1 \vdash_{\vec{x}} \psi_2$ $\mathbb{T}$-dokaziva.

Dokaz. Prije svega promotrimo kako izgledaju izomorfizmi u $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$. Tvrdimo da je morfizam $[\theta] : \{\vec{x}.\phi\} \to \{\vec{y}.\psi\}$ u $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ je izomorfizam ako i samo ako je θ dokazivo funkcionalna u oba smjera, tj. da θ inducira i morfizam $[\theta] : \{\vec{y}.\psi\} \to \{\vec{x}.\phi\}$.

Ako je θ dokazivo funkcionalna u oba smjera, tada promotrimo kompoziciju ta dva morfizma koja ona inducira. Ona je jednaka $[(\exists\vec{y})(\theta \wedge \theta[\vec{x'}/\vec{x}])] : \{\vec{x}.\phi\} \to \{\vec{x'}.\phi[\vec{x'}/\vec{x}]\}$. Ako pokažemo da je formula $(\exists\vec{y})(\theta \wedge \theta[\vec{x'}/\vec{x}])$ dokazivo ekvivalentna formuli $(\phi \wedge (\vec{x} = \vec{x'}))$, gotovi smo. Imamo sljedeći izvod (koji zbog ograničenosti prostora pišemo u dva dijela):

$$\cfrac{\cfrac{((\theta \wedge \theta') \vdash_{\vec{x},\vec{x'},\vec{y}} (\vec{x} = \vec{x'}))}{\cdots}}{((\exists\vec{y})(\theta \wedge \theta') \vdash_{\vec{x},\vec{x'}} (\vec{x} = \vec{x'}))}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{((\theta \wedge \theta') \vdash_{\vec{x},\vec{x'},\vec{y}} \theta) \qquad (\theta \vdash_{\vec{x},\vec{x'},\vec{y}} (\phi \wedge \psi))}{((\theta \wedge \theta') \vdash_{\vec{x},\vec{x'},\vec{y}} (\phi \wedge \psi))} \qquad ((\phi \wedge \psi) \vdash_{\vec{x},\vec{x'},\vec{y}} \phi)}{((\theta \wedge \theta') \vdash_{\vec{x},\vec{x'},\vec{y}} \phi)}}{\cdots}}{((\exists\vec{y})(\theta \wedge \theta') \vdash_{\vec{x},\vec{x'}} \phi)}$$

Korak u kojem smo pisali "..." je pokrata za višestruku primjenu pravila za egzistencijalnu kvantifikaciju redom na $y_n, \ldots, y_1$ te nam je θ' bila pokrata za $\theta[\vec{x'}/\vec{x}]$. Kombinacijom ta dva izvoda, i pravila za konjunkciju, dobivamo jednu od traženih sekventi: $((\exists\vec{y})(\theta \wedge \theta[\vec{x'}/\vec{x}]) \vdash_{\vec{x},\vec{x'}} (\phi \wedge (\vec{x} = \vec{x'})))$. Za drugu sekventu imamo sljedeći izvod (ponovno ga zbog ograničenosti pišemo u više dijelova). Pravilo reza daje sekventu $((\phi \wedge (\vec{x} = \vec{x'})) \vdash_{\vec{x},\vec{x'}} (\exists y)\theta)$, odakle slijedi sljedeće:

$$\cfrac{((\phi \wedge (\vec{x} = \vec{x'})) \vdash_{\vec{x},\vec{x'}} (\exists y)\theta) \qquad ((\phi \wedge (\vec{x} = \vec{x'})) \vdash_{\vec{x},\vec{x'}} (\vec{x} = \vec{x'}))}{((\phi \wedge (\vec{x} = \vec{x'})) \vdash_{\vec{x},\vec{x'}} (((\exists y)\theta) \wedge (\vec{x} = \vec{x'})))}$$

Frobeniusov aksiom daje $((((\exists y)\theta) \wedge (\vec{x} = \vec{x'})) \vdash_{\vec{x},\vec{x'}} (\exists y)(\theta \wedge (\vec{x} = \vec{x'})))$ te postoji sljedeći izvod:

$$\cfrac{((\theta \wedge (\vec{x} = \vec{x'})) \vdash_{\vec{x},\vec{x'},\vec{y}} \theta) \qquad ((\theta \wedge (\vec{x} = \vec{x'})) \vdash_{\vec{x},\vec{x'},\vec{y}} \theta')}{((\theta \wedge (\vec{x} = \vec{x'})) \vdash_{\vec{x},\vec{x'},\vec{y}} (\theta \wedge \theta'))}$$

Pritom smo, kako bismo dobili drugu sekventu iznad crte, koristili sljedeće:

$$\frac{((\theta \wedge (\vec{x} = \vec{x'})) \vdash_{\vec{x},\vec{x'}} (\vec{x} = \vec{x'})) \qquad ((\theta \wedge (\vec{x} = \vec{x'})) \vdash_{\vec{x},\vec{x'}} \theta)}{((\theta \wedge (\vec{x} = \vec{x'})) \vdash_{\vec{x},\vec{x'}} ((\vec{x} = \vec{x'}) \wedge \theta))}$$

Ovo vrijedi i općenito za konjunkciju. Možemo podformulama koje sudjeluju u konjunkciji zamijeniti mjesta. Naravno, vrijedi i sljedeće:

$$\cfrac{((\exists y)(\theta \wedge \theta') \vdash_{\vec{x},\vec{x'}} (\exists y)(\theta \wedge \theta'))}{\cfrac{\dots}{((\theta \wedge \theta') \vdash_{\vec{x},\vec{x'},\vec{y}} (\exists y)(\theta \wedge \theta'))}}$$

Odakle pravilom reza dobivamo $((\theta \wedge (\vec{x} = \vec{x'}) \vdash_{\vec{x},\vec{x'},\vec{y}} (\exists y)(\theta \wedge \theta')))$ te pravilom za egzistencijalnu kvantifikaciju dobivamo $((\exists y)(\theta \wedge (\vec{x} = \vec{x'})) \vdash_{\vec{x},\vec{x'}} (\exists y)(\theta \wedge \theta')))$. Uzastopnom pravilom reza na dobivene sekvente dobivamo traženu sekventu $((\phi \wedge (\vec{x} = \vec{x'})) \vdash_{\vec{x},\vec{x'}} (\exists \vec{y})(\theta \wedge \theta[\vec{x'}/\vec{x}]))$

Obratno, ako je $[\theta]$ izomorfizam sa inverzom $[\gamma]$, dovoljno je provjeriti da su θ i γ dokazivo ekvivalentne, zbog čega je θ dokazivo funkcionalna u oba smjera. Dokazat ćemo $(\theta \vdash_{\vec{x},\vec{y}} \gamma)$. Tada se obratna sekventa dokazuje analogno. Izvod je sljedeći:

$$\cfrac{(\theta \vdash_{\vec{x},\vec{y}} \theta) \qquad \cfrac{\cfrac{(\theta \vdash_{\vec{x},\vec{y}} (\phi \wedge \psi))}{(\theta \vdash_{\vec{x},\vec{y}} \psi)} \qquad (\psi \vdash_{\vec{x},\vec{y}} (\exists \vec{x'})\gamma')}{(\theta \vdash_{\vec{x},\vec{y}} (\exists \vec{x'})\gamma'))}}{(\theta \vdash_{\vec{x},\vec{y}} (\theta \wedge (\exists \vec{x'})\gamma'))}$$

Odavde primjenom Frobeniusovog aksioma i pravila reza dobivamo sekventu $(\theta \vdash_{\vec{x},\vec{y}} (\exists \vec{x'})(\theta \wedge \gamma'))$. Ako pokažemo da vrijedi $((\exists \vec{x'})(\theta \wedge \gamma')) \vdash_{\vec{x},\vec{y}} \gamma$, tada nam pravilo reza daje traženu sekventu. Pokažimo to.

$$\cfrac{\cfrac{((\exists \vec{y})(\theta \wedge \gamma') \vdash_{\vec{x},\vec{x'}} (\phi \wedge (\vec{x} = \vec{x'})))}{((\theta \wedge \gamma') \vdash_{\vec{x},\vec{x'},\vec{y}} (\phi \wedge (\vec{x} = \vec{x'})))} \qquad ((\phi \wedge (\vec{x} = \vec{x'})) \vdash_{\vec{x},\vec{x'},\vec{y}} (\vec{x} = \vec{x'}))}{((\theta \wedge \gamma') \vdash_{\vec{x},\vec{x'},\vec{y}} (\vec{x} = \vec{x'}))}$$

To, uz pravilo za konjunkciju $((\theta \wedge \gamma') \vdash_{\vec{x},\vec{x'},\vec{y}} \gamma')$ nam daje sljedeću sekventu $((\theta \wedge \gamma') \vdash_{\vec{x},\vec{x'},\vec{y}} ((\vec{x} = \vec{x'}) \wedge \gamma'))$. Sada pravilom reza i pravilom jednakosti lako dobivamo sekventu $((\theta \wedge \gamma') \vdash_{\vec{x},\vec{x'},\vec{y}} \gamma)$, odakle pravilom za egzistencijalnu kvantifikaciju dobivamo $((\exists \vec{x'})(\theta \wedge \gamma') \vdash_{\vec{x},\vec{y}} \gamma)$, čime je tvrdnja dokazana.

Sljedeći korak je pokazati da je $[\theta]$ monomorfizam ako i samo ako je sekventa $((\theta \wedge \theta[\vec{x}'/\vec{x}]) \vdash (\vec{x} = \vec{x}'))$ dokaziva u $\mathbb{T}$. Kako je $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ konačno potpuna kategorija, postoji povlak od $[\theta]$ duž samog sebe. Koristeći ujednačitelje i produkte koje smo ranije definirali, možemo, koristeći činjenicu 1.1.9 konstruirati povlak (nazovimo morfizme iz povlaka π i π'). Taj povlak je upravo objekt $\{\vec{x'}, \vec{x''}, \vec{y}.(\theta[\vec{x''}/\vec{x}] \wedge \theta[\vec{x'}/\vec{x}])\}$. Uvjet da je $[\theta]$ monomorfizam je prema činjenici 1.1.6 ekvivalentan s uvjetom da je $\Delta : \{\vec{x}.\phi\} \to \{\vec{x}, \vec{x'}, \vec{y}.(\theta[\vec{x''}/\vec{x}] \wedge \theta[\vec{x'}/\vec{x}])\}$ izomorfizam. U ovom slučaju, dijagonalni morfizam je Δ je jednak $[\theta \wedge (\vec{x} = \vec{x'}) \wedge (\vec{x} = \vec{x''})]$. On je izomorfizam ako i samo ako je $\theta \wedge (\vec{x} = \vec{x'}) \wedge (\vec{x} = \vec{x''})$ dokazivo funkcionalna u oba smjera. No, to je ekvivalentno dokazivosti sekvente $((\theta \wedge \theta[\vec{x}'/\vec{x}]) \vdash (\vec{x} = \vec{x}'))$.

Konačno, dokažimo tvrdnje propozicije. Pokazat ćemo da je svaki podobjekt objekta $\{\vec{x}.\phi\}$ izomorfan nekom podobjektu oblika $[\psi \wedge (\vec{x} = \vec{x'})] : \{\vec{x'}.\psi[\vec{x'}/\vec{x}]\} \hookrightarrow \{\vec{x}.\phi\}$, gdje je ψ formula takva da je sekventa $(\psi \vdash_{\vec{x}} \phi)$ dokaziva u $\mathbb{T}$. Očito je takav morfizam monomorfizam, prema ranije pokazanom. Ako nam je dan neki monomorfizam $[\theta] : \{\vec{y}.\psi\} \to \{\vec{x}.\phi\}$, tada je, ponovno zbog prethodno dokazanog, $\vec{x}.(\exists \vec{y})\theta$ kartezijska u odnosu na $\mathbb{T}$. To implicira da postoji morfizam $[\theta] : \{\vec{y}.\psi\} \to \{\vec{x}.(\exists \vec{y})\theta\}$. Međutim, ta θ je dokazivo funkcionalna u oba smjera, pa je taj morfizam i izomorfizam. Direktnom provjerom dobivamo da je $\{\vec{x'}.(\exists \vec{y})\theta[\vec{x'}/\vec{x}]\} \hookrightarrow \{\vec{x}.\phi\}$ podobjekt traženog oblika.

Dakle, svaki podobjekt je izomorfan nekom podobjektu danog oblika, tj. vrijedi (i). Za (ii) je dovoljno napomenuti da je $[\psi_1 \wedge (\vec{x} = \vec{x'})] : \{\vec{x'}.\psi_1[\vec{x'}/\vec{x}]\} \to \{\vec{x}.\psi_2\}$ morfizam u $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ ako i samo ako je $(\psi_1 \vdash \psi_2)$ dokaziva u $\mathbb{T}$. I tada je to jedini morfizam među tim podobjektima. □

Osim kategorije $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$, bitna nam je sljedeća Σ-struktura $M_{\mathbb{T}}$ koju $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ sadrži:

Definicija 3.2.4. *Generički model $M_{\mathbb{T}}$ definiramo na sljedeći način:*

(i) Za svaku sortu A, $M_{\mathbb{T}}A$ se definira kao objekt $\{x.\top\}$, gdje je x varijabla sorte A.

(ii) Za svaki funkcijski simbol $f : A_1 \dots A_n \to B$, $M_{\mathbb{T}}f$ je morfizam

$$[(x_B = f(x_1, \dots, x_n))] : \{x_1, \dots, x_n.\top\} \to \{x_B.\top\},$$

gdje su x_i varijable sorte A_i i x_B varijable sorte B.

(iii) Za svaki relacijski simbol $R : A_1 \dots A_n$, $M_{\mathbb{T}}R$ je podobjekt

$$\{x_1, \dots, x_n.R(x_1, \dots, x_n)\} \hookrightarrow \{x_1, \dots, x_n.\top\},$$

gdje su x_i varijable sorte A_i.

Iz ovoga indukcijom po složenosti formule dobivamo interpretaciju formula u Σ-strukturi $M_{\mathbb{T}}$.

Lema 3.2.5. *Neka je $\vec{x}.\phi$ geometrijska formula u kontekstu nad signaturom Σ. Tada je njena interpretacija $[\![\vec{x}.\phi]\!]_{M_{\mathbb{T}}}$ podobjekt $\{\vec{x}.\phi\} \hookrightarrow \{\vec{x}.\top\}$.*

Prethodna lema, uz propoziciju 3.2.3, daje sljedeći korolar:

Korolar 3.2.6. *Geometrijska sekventa $(\phi \vdash_{\vec{x}} \psi)$ nad signaturom Σ je $\mathbb{T}$-dokaziva ako i samo ako $\{\vec{x}.\phi\} \leq \{\vec{x}.\psi\}$ (kao podobjekti objekta $\{\vec{x}.\top\}$).*

Sada smo spremni dokazati teorem potpunosti, što je i jedan od ciljeva ove točke.

Teorem 3.2.7. *(Teorem potpunosti)*

Neka je $\mathbb{T}$ kartezijska teorija (analogno regularna/koherentna/geometrijska) nad signaturom Σ. Neka je σ kartezijska sekventa (analogno regularna/koherentna/geometrijska) koja je ispunjiva u svakom modelu teorije $\mathbb{T}$ u konačno potpunim kategorijama (analogno regularnim/koherentnim/geometrijskim). Tada je σ dokaziva u $\mathbb{T}$.

Dokaz. Iz korolara 3.2.6 zaključujemo da je $M_{\mathbb{T}}$ model teorije $\mathbb{T}$. Sekventa σ je po pretpostavci teorema ispunjiva u svim modelima teorije $\mathbb{T}$, pa posebno i u $M_{\mathbb{T}}$. Ponovnim korištenjem korolara 3.2.6 slijedi da je σ dokaziva u $\mathbb{T}$. $\square$

Generički model $M_{\mathbb{T}}$ nam je imao ključnu ulogu u dokazu teorema potpunosti. No on je više od samog alata za dokaz tog teorema. Naime, svaki drugi model M u odgovarajućoj kategoriji $\mathcal{C}$ možemo dobiti kao sliku modela $M_{\mathbb{T}}$ uz odgovarajući funktor.

Teorem 3.2.8. *Neka je $\mathbb{T}$ geometrijska teorija, $\mathcal{C}$ geometrijska kategorija i $\mathbf{Geom}(\mathcal{C}_{\mathbb{T}}, \mathcal{C})$ kategorija geometrijskih funktora $\mathcal{C}_{\mathbb{T}} \to \mathcal{C}$ i prirodnih transformacija među njima. Tada je funktor*

$$\mathbf{Geom}(\mathcal{C}_{\mathbb{T}}, \mathcal{C}) \to \mathbb{T}\text{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{C})$$

$$(F : \mathcal{C}_{\mathbb{T}} \to \mathcal{C}) \mapsto F(M_{\mathbb{T}})$$

ekvivalencija kategorija. Obrnuta ekvivalencija je dana sa

$$M \mapsto (F_M : \mathcal{C}_{\mathbb{T}} \to \mathcal{C}),$$

gdje je F_M dan na objektima kao $F_M(\{\vec{x}.\phi\}) = [\![\vec{x}.\phi]\!]_M$, a na morfizmima $F_M([\theta] : \{\vec{x}.\phi\} \to \{\vec{y}.\psi\})$ je morfizam $[\![\vec{x}.\phi]\!]_M \to [\![\vec{y}.\psi]\!]_M$ čiji graf je $[\![\vec{x}, \vec{y}.\theta]\!]_M$.

Skica dokaza. Direktno se može provjeriti da je $F_M(M_{\mathbb{T}}) \cong M$, te da je taj izomorfizam prirodan u M. Obratno, neka je dan funktor $F : \mathcal{C}_{\mathbb{T}} \to \mathcal{C}$, uz uvjet $F(M_{\mathbb{T}}) \cong M$. Tada se indukcijom po složenosti formule ϕ konstruiraju izomorfizmi $F(\{\vec{x}.\phi\}) \cong [\![\vec{x}.\phi]\!]_M$. No, oni su upravo komponente prirodnog izomorfizma $F \cong F_M$. Nadalje, za taj izomorfizam se pokaže da je prirodan u F, pa imamo traženu ekvivalenciju. $\square$

4 Klasifikacijski toposi

U prethodnom poglavlju smo vidjeli da za svaku kartezijsku, regularnu, koherentnu ili geometrijsku teoriju $\mathbb{T}$ postoji sintaktička kategorija $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ koja sadrži generički model. Vođeni sličnom idejom kao kod konstrukcije sintaktičkih kategorija, konstruirat ćemo topos $\mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ koji sadrži model koji je generičan među svim modelima u toposima. Taj topos ćemo zvati klasifikacijski topos.

4.1 Sintaktička pozicija

Ovu točku započinjemo definicijom klasifikacijskog toposa. Zatim ćemo krenuti od sintaktičke kategorije geometrijske teorije i konstruirati topos, za kojeg ćemo kasnije pokazati da je klasifikacijski topos te teorije. U ovoj točci se baziramo gotovo u potpunosti na [6], uz povremeno korištenje [2], [1].

Definicija 4.1.1. *Neka je $\mathbb{T}$ geometrijska teorija.* Klasifikacijski topos *teorije $\mathbb{T}$ je par $(Set[\mathbb{T}], G)$, gdje je $Set[\mathbb{T}]$ Grothendieckov topos, a G objekt u $\mathbb{T}$-$\mathbf{Mod}(Set[\mathbb{T}])$ takav da je za svaki Grothendieckov topos $\mathcal{E}$ funktor*

$$\mathbf{Top}(\mathcal{E}, Set[\mathbb{T}]) \to \mathbb{T}\text{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{E})$$

$$(f : \mathcal{E} \to Set[\mathbb{T}]) \mapsto f^*(G)$$

ekvivalencija kategorija.

Prisjetimo se, (Grothendieckov) topos je kategorija ekvivalentna kategoriji snopova na nekoj poziciji. Stoga ćemo mi u konstrukciji definirati određenu Grothendieckovu topologiju na sintaktičkoj kategoriji $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$. Prije no što to učinimo, potrebna nam je sljedeća definicija:

Definicija 4.1.2. *Za familiju morfizama sa zajedničkom kodomenom*

$$\{f_i : Y_i \to X : i \in I\}$$

kažemo da je globalno epimorfna *ako za svaki par morfizama $g, h : X \to Z$ takve da je $g \neq h$ postoji $i \in I$ takav da je $gf_i \neq hf_i$.*

Sada ćemo definirati Grothendieckovu topologiju koju ćemo označiti sa $J_{\mathbb{T}}$ tako da za svaki objekt definiramo sito na njemu:

Definicija 4.1.3. *Sito na objektu $\{\vec{y}.\psi\}$ kategorije $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ zovemo* $J_{\mathbb{T}}$-pokrivač *ako sadrži familiju morfizama*

$$[\theta_i] : \{\vec{x}_i.\phi_i\} \to \{\vec{y}.\psi\}, \ i \in I$$

koja je globalno epimorfna ili, ekvivalentno, takvu da je sekventa

$$\psi \vdash_{\vec{y}} \bigvee_{i \in I} (\exists \vec{x}_i)\theta_i$$

$\mathbb{T}$*-dokaziva. Takva familija se još naziva i* dokazivo epimorfna *familija.*

Može se direktno provjeriti da je to stvarno Grothendieckova topologija. Ključnu ulogu u dokazu te tvrdnje ima činjenica da su konstrukcije kojima interpretiramo formule u odgovarajućim kategorijama stabilne na povlake. Kao i uvijek, zanimaju nas funktori koji će čuvati ovakvu strukturu.

Definicija 4.1.4. *Neka je* $(\mathcal{C}, J)$ *pozicija i* $\mathcal{E}$ *topos. Funktor* $f : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$ *je* J-neprekidan *ako preslikava familije* J*-pokrivača u globalno epimorfne familije u* $\mathcal{E}$*.*

Sada ćemo iskazati Diaconescuov teorem. On nam daje konstrukciju ekvivalencije kategorije morfizama toposa i kategorije lijevo egzaktnih J-neprekidnih funktora.

Teorem 4.1.5. *(Diaconescu)*
Neka je $\mathcal{C}$ *mala konačno potpuna kategorija te* J *Grothendieckova topologija na* $\mathcal{C}$*. Neka je* $l : \mathcal{C} \to \mathbf{PSh}(\mathcal{C}) \to \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ *kompozicija Yonedinog ulaganja* $y : \mathcal{C} \to \mathbf{PSh}(\mathcal{C})$ *i snopifikacije* $L : \mathbf{PSh}(\mathcal{C}) \to \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$*.*

(i) Za svaki morfizam toposa $f = (f^*, f_*) : \mathcal{E} \to \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ *je funktor* $f^* \circ l : \mathcal{E} \to \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J)$ *lijevo egzaktan i* J*-neprekidan.*

(ii) Funktor definiran u (i) je ekvivalencija kategorija

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{kategorija} \\ \textit{morfizama toposa} \\ \mathcal{E} \to \mathbf{Sh}(\mathcal{C}, J) \end{array}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \textit{kategorija lijevo egzaktnih} \\ J\textit{-neprekidnih funktora} \\ \mathcal{C} \to \mathcal{E} \end{array}\right\}.$$

Sljedeća lema nam daje karakterizaciju geometrijskih funktora koja će povezati Diaconescuov teorem s univerzalinim svojstvom sintaktičke kategorije, što nam omogućuje da ta dva rezultata kombiniramo.

Lema 4.1.6. *Neka je* $\mathbb{T}$ *geometrijska teorija,* $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ *njena sintaktička kategorija te* $\mathcal{E}$ *topos. Funktor* $F : \mathcal{C}_{\mathbb{T}} \to \mathcal{E}$ *je geometrijski ako i samo ako je lijevo egzaktan i* $J_{\mathbb{T}}$*-neprekidan.*

4.2 Univerzalni model

Sada imamo sve što trebamo kako bismo dokazali postojanje klasifikacijskog toposa. Jedna od glavnih ideja kategoričke logike jest gledati modele teorija unutar toposa, stoga je ovo vrlo bitan rezultat. U ovoj točci se baziramo samo na [6].

Sada dajemo iskaz i dokaz teorema o univerzalnosti klasfiikacijskog toposa.

Teorem 4.2.1. *Svaka geometrijska teorija ima klasifikacijski topos.*

Dokaz. Neka je $\mathbb{T}$ geometrijska teorija. Uvedimo sljedeće oznake:

$$\mathcal{E}_{\mathbb{T}} = \mathbf{Sh}(\mathcal{C}_{\mathbb{T}}, J_{\mathbb{T}}),$$

$$U_{\mathbb{T}} = l(M_{\mathbb{T}}).$$

Tvrdimo da je $(\mathcal{E}_{\mathbb{T}}, U_{\mathbb{T}})$ klasifikacijski topos teorije $\mathbb{T}$. Neka je $\mathcal{E}$ proizvoljan topos. Tada imamo sljedeću ekvivalenciju kategorija:

$$\begin{array}{ccc}
\left\{\begin{array}{l}\text{kategorija}\\ \text{morfizama toposa}\\ \mathcal{E} \to \mathcal{E}_{\mathbb{T}}\end{array}\right\} & \longrightarrow & \left\{\begin{array}{l}\text{kategorija lijevo}\\ \text{egzaktnih } J\text{-nepre-}\\ \text{kidnih funktora}\\ \mathcal{C}_{\mathbb{T}} \to \mathcal{E}\end{array}\right\} & \\
 & & \Big\| & \\
 & & \left\{\begin{array}{l}\text{kategorija}\\ \text{geometrijskih}\\ \text{funktora}\\ \mathcal{C}_{\mathbb{T}} \to \mathcal{E}\end{array}\right\} & \longrightarrow \ \mathbb{T}\text{-}\mathbf{Mod}(\mathcal{E})
\end{array}$$

Diaconescuov teorem nam daje prvu ekvivalenciju. Lema 4.1.6 nam daje jednakost te nam univerzalno svojstvo sintaktičke kategorije iz teorema 3.2.8 daje drugu ekvivalenciju. Tada je i njihova kompozicija ekvivalencija.

Promotrimo djelovanje gornje ekvivalencije, koristeći njihov oblik iz Diaconescuovog teorema i teorema 3.2.8:

$$f \mapsto f^* \circ l \mapsto (f^* \circ l)(M_{\mathbb{T}}) = f^*(U_{\mathbb{T}}).$$

Dakle, $(\mathcal{E}_{\mathbb{T}}, U_{\mathbb{T}})$ je klasifikacijski topos teorije $\mathbb{T}$. $\square$

Provjerimo ispunjivost sekventi $U_{\mathbb{T}}$. U [6] (slajd 53), imamo sljedeću tvrdnju:

Lema 4.2.2. *Funktor $l : \mathcal{C}_{\mathbb{T}} \to \mathcal{E}_{\mathbb{T}}$ je pun i vjeran.*

Posljedica te leme je postojanje bijekcije

$$Hom_{\mathcal{C}_{\mathbb{T}}}(X, Y) \cong Hom_{\mathcal{E}_{\mathbb{T}}}(l(X), l(Y)),$$

pa je tada sekventa $(\phi \vdash_{\vec{x}} \psi)$ ispunjiva u $U_{\mathbb{T}}$ ako i samo ako je ispunjiva u $M_{\mathbb{T}}$. Odatle zbog korolara 3.2.6 slijedi sljedeća tvrdnja:

Korolar 4.2.3. *Geometrijska sekventa $(\phi \vdash_{\vec{x}} \psi)$ je $\mathbb{T}$-dokaziva ako i samo ako je ispunjiva u modelu G u klasifikacijskom toposu $(Set[\mathbb{T}], G)$.*

Uočimo da klasifikacijski topos ima sličnu ulogu kao sintaktička kategorija, s razlikom da je on univerzalan u kategoriji toposa, a ne u kategoriji kategorija. Uočimo također, da klasifikacijski topos ovisi o strukturi sintaktičke kategorije. Ako dvije teorije imaju ekvivalentne sintaktičke kategorije, njihovi klasifikacijski toposi će biti ekvivalentni. Obrat općenito ne vrijedi. Dakle, imati ekvivalentne klasifikacijske topose je slabije svojstvo nego imati ekvivalentne sintaktičke kategorije, no dovoljno je da osigura da te dvije teorije imaju ekvivalentne kategorije modela u proizvoljnom toposu.

Literatura

[1] P. T. Johnstone, *Topos Theory*, Dover Publications, 2014.

[2] P. T. Johnstone, *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium*, Oxford University Press, 2006.

[3] S. Mac Lane, I. Moerdijk, *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*, Springer, 1992.

[4] S. Mac Lane, *Categories for Working Mathematician*, Springer, 1998.

[5] C. McLarty, *Elementary Categories, Elementary Toposes*, Oxford University Press, 2014.

[6] L. Lafforgue, *Classifying toposes of geometric theories* - snimke predavanja, 2021, https://www.youtube.com/watch?v=xNRzu1kRSXA (slajdovi dostupni na https://aroundtoposes.com/wp-content/uploads/2021/07/LafforgueSlidesToposesOnline.pdf).

[7] nLab, kolovoz 2021, https://ncatlab.org/nlab/show/HomePage.

[8] Adjoint functors - Wikipedia, kolovoz 2021, https://en.wikipedia.org/wiki/Adjoint_functors.

Sažetak

U ovom radu započinje se s osnovnim pojmovima teorije kategorija i teorije toposa s ciljem da se definira Grothendieckov topos. Također se definiraju klase kategorija koje koristimo za konstrukciju modela formalnih teorija. Uvodi se sekventni račun kao formalizacija izvoda i dokaza te se pomoću njega daje konstrukcija sintaktičke kategorije za geometrijske teorije. Takva kategorija sadrži generički model sa svojstvom da se ostali modeli mogu dobiti kao njegova slika. Rad završava konstrukcijom klasifikacijskog toposa, dokazom njegovog univerzalnog svojstva te se navodi kako konstruirati univerzalni model geometrijske teorije u njenom klasifikacijskom toposu.

Summary

In this thesis we begin by introducing some basics of category theory and topos theory in order to define the Grothendieck topos. We also define several classes of categories which are used to construct models of formal theories. Sequent calculus is introduced in order to formalize concepts of derivations and proofs. Using sequent calculus we also describe the construction of syntactic categories for geometric theories. Syntactic category contains the generic model such that other models can be expressed as images of the generic model. At the very end, the construction of classifying topos is is given, along with the proof of its universal property. We also show how to construct the universal model of a geometric theory inside its classifying topos.

Životopis

Rođen sam 11. travnja 1996. godine u Zagrebu. Završavam Osnovnu školu Josipa Badalića u Graberju Ivanićkom 2011. te iste godine upisujem opću gimnaziju u Srednjoj školi "Ivan Švear" u Ivanić-Gradu. Po završetku obrazovanja u srednjoj školi, 2015. upisujem preddiplomski studij Matematika na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Preddiplomski studij završavam 2019. godine, kada upisujem diplomski studij Teorijska matematika.