SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Iva Šobak

# SKUPOVI U NASTAVI MATEMATIKE U OSNOVNOJ I SREDNJOJ ŠKOLI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc. Mladen Vuković

Zagreb, rujan 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

*Ovaj rad posvećujem svojoj obitelji koja mi je uvijek pružala najveću podršku i dečku koji je uvijek bio tu za mene, ohrabrivao me i poticao.*
*Također, zahvaljujem i prijateljima koji su se uvijek veselili svakom mojem uspjehu.*
*Posebno hvala mentoru prof.dr.sc. Mladenu Vukoviću na velikoj pomoći i razumijevanju u pisanju ovog rada.*

# Sadržaj

# Uvod

Temelje teorije skupova postavio je njemački matematičar Georg Cantor u drugoj polovici devetnaestog stoljeća. Njegovim dokazom neprebrojivosti kontinuuma (skupa realnih brojeva) otkriveno je da postoje beskonačnosti različitih veličina. Ovim otkrićem nastala je potreba za novom teorijom koja će se baviti skupovima. Teorija skupova kakvu je zasnovao Cantor danas se naziva *naivna teorija skupova*. U Cantorovoj teoriji skup je primitivan pojam pa se ne definira. Kada je teorija skupova već bila prihvaćena u velikom dijelu matematičke zajednice, pojavili su se paradoksi. Jedan od najpoznatijih je Russellov paradoks: $R = \{x\colon x \text{ je skup i } x \notin x\}$ *nije skup.* Odnosno, skup koji sadrži skupove koji nisu članovi samog sebe nije skup. Bertrand Russell time je dao prvi primjer kolekcije objekata koja nije skup. Postoje i drugi paradoksi naivne teorije skupova koji su potaknuli razvoj *aksiomatske teorije skupova*. Kao što sam naziv govori riječ je o teoriji temeljenoj na aksiomima. Prve aksiome teorije skupova postavio je Ernst Zermelo, a nadopunio ih je Adolf Abraham Fraenkel pa se takav pristup teoriji skupova naziva i *Zermelo-Fraenkelova teorija skupova* te se upravo tu teoriju skupova najčešće upotrebljava. (vidi [1], [10], [11])

Unutar teorije skupova strogo se definiraju matematički pojmovi poput relacija, funkcija, skupova brojeva $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ i drugih matematičkih struktura. Teorija skupova smatra se jednom od fundamentalnih matematičkih disciplina jer se gotovo cjelokupna matematika može na nju svesti. Upravo iz tog razloga sadržaji iz teorije skupova uvode se već u osnovnoj i srednjoj školi. U ovom ćemo radu dati detaljan pregled nastavnih sadržaja iz teorije skupova u nastavi matematike u osnovnoj i srednjoj školi u Republici Hrvatskoj.

Rad je podijeljen u četiri poglavlja. U prvom poglavlju dan je pregled nastavnih sadržaja vezanih uz teoriju skupova aktualnog kurikuluma nastavnog predmeta Matematika po razredima osnovne škole te gimnazije i četverogodišnje strukovne škole (sa 105/96 sati matematike godišnje ili više). Zatim je radu dan pregled nastavnih sadržaja vezanih uz teoriju skupova starijih nastavnih programa matematike u Republici Hrvatskoj te je dana usporedba aktualnog kurikuluma i starijih nastavnih programa u Republici Hrvatskoj. U drugom poglavlju uspoređeni su sadržaji iz teorije skupova u nekoliko aktualnih udžbenika iz matematike za osnovnu školu i gimnazije. U trećem poglavlju dan je prijedlog pripreme za nekoliko nastavnih sati obrade nastavnih sadržaja vezanih uz skupove za gimnazije i četverogodišnje strukovne škole (sa 105/96 sati matematike godišnje ili više). U četvrtom poglavlju dan je kritički osvrt na sadržaje iz teorije skupova koji su navedeni u postojećim kurikulumima za osnovnu i srednju školu.

# Poglavlje 1

# Programi i kurikulumi nastave matematike u Republici Hrvatskoj

## 1.1 Kurikulum nastavnog predmeta Matematika

### Kurikularna reforma

*Škola za život* naziv je eksperimentalnog programa koji se provodio u prvom i petom razredu osnovnih škola te u prvom razredu gimnazije i četverogodišnjih strukovnih škola u školskim godinama 2018./2019. i 2019./2020. Cilj programa bio je provjeriti primjenjivost novih kurikuluma i oblika metoda rada te novih nastavnih sredstava s obzirom na povećanje kompetencija učenika u rješavanju problema i povećanje zadovoljstva učenika u školi te motivacija njihovih učitelja i nastavnika. Kurikulum *Škola za život* planira se do 2021./2022. uvesti u sve razrede osnovnih i srednjih škola na koje se odnosi (vidi [13]).

U siječnju 2019. godine na snagu je stupila *Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj* te *Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2. u Republici Hrvatskoj* objavljene u *Narodnim novinama*, broj 7/2019 te broj 10/2019, koje se primjenjuju za učenike prvog i petog razreda osnovne škole te prvog razreda gimnazije i srednjih strukovnih škola od školske godine 2019./2020., za učenike drugog, trećeg, šestog i sedmog razreda osnovne škole te drugog i trećeg razreda gimnazije i srednjih strukovnih škola od školske godine 2020./2021., a za učenike četvrtog i osmog razreda osnovne škole te četvrtog razreda gimnazije i srednjih strukovnih škola od školske godine 2021./2022. Ovom Odlukom izvan snage stavljeni su dotadašnji *Nastavni plan i program za osnovnu školu* koji se odnosio na predmet Matematika objavljen u *Narodnim novinama*, broj 102/06, *Nastavni plan i program za stjecanje školske spreme u programima jezične, klasične i prirodoslovno-matematičke gimnazije* koji se odnosio na predmet Matematika, objavljen u *Glasniku Ministarstva kulture i prosvjete*, 2. ožujka 1994. te *Nastavni plan i program prirodoslovne gimnazije* koji se odnosio na predmet Matematika, a koji je donesen *Odlukom o nastavnom planu i programu prirodoslovne gimnazije*, 2. prosinca 2003. godine (vidi [6]).

## Matematički procesi i domene kurikuluma nastavnoga predmeta Matematika

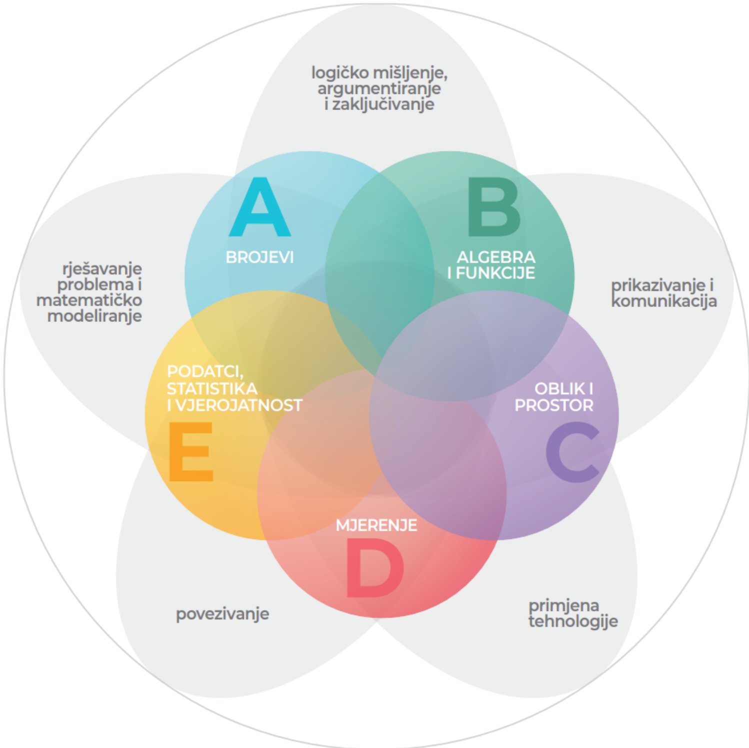
Strukturu nastave matematike čine matematički procesi i domene matematičkog područja kurikuluma. Matematički procesi organizirani su u pet skupina:

- prikazivanje i komunikacija,
- povezivanje,
- logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje,
- rješavanje problema i matematičko modeliranje,
- primjena tehnologije.

Srodni matematički koncepti grupirani su u takozvane domene kurikuluma nastavnog predmeta Matematika, a one su:

- brojevi,
- algebra i funkcije,
- oblik i prostor,
- mjerenje,
- podatci, statistika i vjerojatnost.

Kao što je prikazano na slici 1.1 matematički procesi prožimaju sve domene kurikuluma nastavnoga predmeta Matematika.




Slika 1.1: Matematički procesi i domene kurikuluma nastavnoga predmeta Matematika

Nastavni sadržaji vezani uz skupove pripadaju domeni *Algebra i funkcije* u kojoj učenici prikazuju i analiziraju matematička svojstva, veze i odnose među brojevima, podacima, oblicima i mjerama. Učenici znanje o skupovima primjenjuju u domeni Brojeva u kojoj postupno usvajaju apstraktne pojmove kao što su broj, brojevni sustav i skup te razvijaju vještinu izvođenja aritmetičkih postupaka. Iako su matematički koncepti grupirani u domene, oni su povezani. Kako bi se usvojili koncepti jedne domene, nužno je prethodno usvojiti određene koncepte neke druge domene. Tako se koncepti vezani uz skupove koriste pri obradi drugih nastavnih sadržaja primjerice onih vezanih uz skupove brojeva, funkcije, vjerojatnost (vidi [5], str. 10-14).

## Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole

Sada ćemo navesti ishode učenja u vezi skupova te u kojem razredu bi se učenici trebali susresti s njima prema novom kurikulumu (vidi [5], str. 53-373).

Za obradu nastavnog sadržaja Skupovi u petom razredu predviđeno je osam školskih sati. Učenici će na kraju petog razreda moći:

a) oblikovati i prikazati skupove i njihove odnose pomoću Vennovih dijagrama,

b) koristiti matematičke simbole pri zapisu skupova i njihovih odnosa, pri zapisu presjeka i unije dvaju skupova te podskupa nekog skupa,

c) određivati broj elemenata skupa te prepoznati prazan skup,

d) skupovnim zapisom prikazivati rješenja jednostavne nejednadžbe u skupu prirodnih brojeva s nulom.

Učenici će na kraju šestog razreda moći:

a) prikazivati i računati u skupu cijelih brojeva te skupovnim zapisom prikazivati rješenja jednostavne nejednadžbe u skupu cijelih brojeva,

b) prikazivati i računati u skupu nenegativnih racionalnih brojeva.

Učenici će na kraju sedmog razreda moći:

a) prikazivati i računati u skupu racionalnih brojeva,

b) matematičkim jezikom i u koordinatnome sustavu na pravcu prikazivati i zapisivati otvoreni, poluotvoreni, zatvoreni interval (prošireni sadržaj).

Učenici će na kraju osmog razreda moći:

a) prepoznavati te grafički prikazivati odnose među skupovima prirodnih, cijelih, racionalnih i realnih brojeva.

U tablici 1.1 prikazani su ishodi vezani uz skupove po domenama iz Kurikuluma nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole za pojedine razrede.

| OSNOVNA ŠKOLA | | | |
|---|---|---|---|
| Domene: | **Brojevi** | **Algebra i funkcije** | **Mjerenje** |
| 5. razred | – skup prirodnih brojeva | – pojam skupa<br>– Vennovi dijagrami<br>– broj elemenata skupa<br>– pripadnost skupu<br>– podskup, unija, presjek skupova<br>– prikaz rješenja linearne nejednadžbe u skupu prirodnih brojeva pomoću skupovnih oznaka | |
| 6. razred | – skup nenegativnih racionalnih brojeva<br>– skup cijelih brojeva | – prikaz rješenja linearne nejednadžbe u skupu nenegativnih racionalnih brojeva pomoću skupovnih oznaka<br>– prikaz rješenja linearne nejednadžbe u skupu cijelih brojeva pomoću skupovnih oznaka | |
| 7. razred | – skup racionalnih brojeva | – prikaz rješenja linearne nejednadžbe u skupu racionalnih brojeva pomoću skupovnih oznaka | intervali |
| 8. razred | – skup realnih brojeva<br>– odnosi među skupovima brojeva | – prikaz rješenja linearne nejednadžbe u skupu realnih brojeva pomoću skupovnih oznaka<br>– prikaz rješenja kvadratne nejednadžbe pomoću skupovnih oznaka | |

Tablica 1.1: Ishodi vezani uz skupove u osnovnoj školi

## Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za gimnazije i četverogodišnje strukovne škole

Učenici gimnazija i četverogodišnjih strukovnih škola sa 105 (u četvrtom razredu 96) ili više sati matematike godišnje na kraju prvog razreda moći će:

a) određivati i na različite načine prikazivati skupove i odnose među njima rabeći matematičke simbole te koristeći Vennove dijagrame,

b) prikazivati operacije sa skupovima, određivati uniju, presjek i razliku skupova realnih brojeva zapisujući ih matematičkim simbolima i pomoću Vennovih dijagrama,

c) zapisivati nejednakosti pomoću intervala i obratno,

d) prikazivati intervale na brojevnome pravcu,

e) rješavati linearne nejednadžbe i sustave linearnih nejednadžbi te rješenje zapisati pomoću intervala.

Učenici će na kraju drugog razreda moći:

a) koristiti skupove pri analizi funkcija te pri rješavanju kvadratnih nejednadžbi,

b) prikazivati i računati sa skupom kompleksnih brojeva,

c) koristiti znanje o skupovima pri primjeni vjerojatnosti (određivanje skupa svih povoljnih i skupa svih mogućih događaja te određivanje unije, presjeka i komplementa skupa elementarnih događaja).

Učenici će na kraju trećeg razreda moći:

a) koristiti skupove pri obradi nastavnih sadržaja vezanih uz eksponencijalnu i logaritamsku te trigonometrijske funkcije,

b) koristiti skupove kako bi odredili domenu i kodomenu tih funkcija,

c) koristiti skupove kako bi prikazali rješenja eksponencijalnih, logaritamskih te trigonometrijskih nejednadžbi.

Učenici će na kraju četvrtog razreda moći:

a) razlikovati i opisivati skupove prirodnih, cijelih, racionalnih, iracionalnih te realnih brojeva,

b) koristiti skupove pri analizi svojstava funkcija, određivati domenu, kodomenu, sliku te intervale rasta i pada funkcije.

U gimnazijama i četverogodišnjim strukovnim školama sa 70 (u četvrtom razredu 64) sati matematike godišnje skupovi se obrađuju tek u četvrtom razredu. Na kraju četvrtog razreda učenici će moći:

a) stvarati i prikazivati skupove (brojeva, podataka) i njihove odnose pomoću Vennovih dijagrama,

b) koristiti matematičke simbole u zapisu skupova i njihovih odnosa,

c) određivati i prikazivati podskupove, unije, presjeke i razlike skupova realnih brojeva zapisujući ih matematičkim simbolima.

<table>
<tr><th colspan="4">SREDNJA ŠKOLA (gimnazije i četverogodišnje strukovne škole sa 105 ili više sati matematike godišnje)</th></tr>
<tr><td>Domene:</td><td>Brojevi</td><td>Algebra i funkcije</td><td>Podaci, statistika i vjerojatnost</td></tr>
<tr><td>1. razred</td><td></td><td>– pojam skupa<br>– Vennovi dijagrami<br>– podskup, unija, presjek i razlika skupova<br>– intervali<br>– prikaz rješenja linearne nejednadžbe pomoću skupovnih oznaka</td><td></td></tr>
<tr><td>2. razred</td><td>– skup kompleksnih brojeva</td><td>– analiza funkcije<br>– domena i kodomena funkcije</td><td>– skup mogućih događaja, skup povoljnih događaja<br>– unija, presjek i komplement skupa elementarnih događaja</td></tr>
<tr><td>3. razred</td><td></td><td>– eksponencijalna i logaritamska funkcija<br>– trigonometrijske funkcije<br>– prikaz rješenja eksponencijalne, logaritamske i trigonometrijske nejednadžbe pomoću skupovnih oznaka</td><td></td></tr>
<tr><td>4. razred</td><td>– skup prirodnih, cijelih, racionalnih, iracionalnih i realnih brojeva</td><td>– analiza svojstava funkcija<br>– domena i kodomena funkcije, intervali pada i rasta funkcije</td><td></td></tr>
<tr><th colspan="4">SREDNJA ŠKOLA (četverogodišnje strukovne škole sa 70 sati matematike godišnje)</th></tr>
<tr><td>Domene:</td><td colspan="3">Algebra i funkcije</td></tr>
<tr><td>4. razred</td><td colspan="3">– pojam skupa<br>– Vennovi dijagrami<br>– podskup, unija, presjek i razlika skupova</td></tr>
</table>

Tablica 1.2: Ishodi vezani uz skupove u srednjoj školi

Sada ćemo komentirati starije nastavne programe u Republici Hrvatskoj.

## 1.2 Nastavni plan i program za osnovnu školu u RH od 2006. do 2020. godine

Od školske godine 2006./2007. do 2019./2020. u svim se osnovnim školama provodio Nastavni plan i program za osnovnu školu. Prema tom planu i programu učenici se u nastavi matematike nisu susretali s teorijom skupova u osnovnoj školi. Skup se tek spominjao u osmom razredu kao skup realnih brojeva, no nije ga se povezivalo s ostalim skupovima brojeva (vidi [7]).

## 1.3 Nastavni plan za gimnazije u RH od 1994. do 2020. godine

Prema nastavnom programu za gimnazije (opća, jezična i klasična gimnazija) koji se provodio od 1994./1995. do 2019./2020. (vidi [8]) učenici na kraju prvog razreda mogu:

a) povezivati skup prirodnih, racionalnih i realnih brojeva te primjenjivati operacije na tim skupovima,

b) određivati i na različite načine prikazivati skupove i odnose među njima koristeći matematičke simbole i Vennove dijagrame,

c) određivati i prikazivati uniju i presjek dvaju skupova koristeći matematičke simbole i Vennove dijagrame,

d) određivati intervale te ih prikazivati na brojevnom pravcu,

e) skupovnim zapisom prikazivati rješenja jednostavne nejednadžbe u skupu prirodnih brojeva s nulom.

Učenici na kraju drugog razreda mogu:

a) računati sa skupom kompleksnih brojeva te prikazati njegov odnos s ostalim skupovima brojeva,

b) koristiti intervale za rješenje kvadratne, eksponencijalne i logaritamske nejednadžbe.

Učenici na kraju trećeg razreda mogu:

a) koristiti intervale za rješenje trigonometrijskih nejednadžbi.

Učenici na kraju četvrtog razreda mogu:

a) definirati i primjenjivati omeđen i neomeđen skup, gornju i donju međa skupa, supremum i infimum te minimum i maksimum skupa,

b) definirati i primjenjivati gustoću skupa racionalnih brojeva te potpunost skupa realnih brojeva,

c) određivati i prikazivati Vennovim dijagramima domenu, kodomenu, sliku te intervale rasta i pada funkcije i kompozicije funkcija.

## 1.4 Sličnosti i razlike pri obradi sadržaja iz teorije skupova prema sadašnjim i bivšim kurikulumima

Prema nastavnom planu i programu za osnovnu školu iz 2006. godine, odnosno iz 1994. godine za srednje škole, sadržaji vezani uz teoriju skupova prvi su se puta pojavili tek u srednjoj školi. I dok su sami nastavni sadržaji vezani uz skupove u srednjoj školi ostali isti, samo se njihov raspored po razredima promijenio, prema novom kurikulumu oni se uče već u osnovnoj školi. Skup je temeljni pojam u matematici, ovom promjenom učenicima se u mlađoj dobi daje predodžba što su i gdje se sve mogu koristiti skupovi i pojmovi vezani uz teoriju skupova. Na taj se način pojmovi vezani uz skupove mogu primjenjivati u raznim sadržajima kroz osnovnu školu te se postiže da učenici u srednjoj školi intuitivno koriste skupove u drugim domenama kurikuluma.

# Poglavlje 2

# Analiza i usporedba aktualnih udžbenika za osnovnu i srednju školu

## 2.1 Usporedba udžbenika za osnovnu školu

Sada ćemo usporediti na koji način su obrađene teme vezane uz teoriju skupova u tri aktualna udžbenika za peti razred osnovne škole. U jednom od udžbenika nastavne jedinice vezane uz skupove nalaze se u sklopu nastavne cjeline *Mjerenje* i uvod u *Algebru*, u drugom se udžbeniku nalaze u sklopu nastavne cjeline Skup prirodnih brojeva, dok u trećem udžbeniku postoji zasebna nastavna cjelina Skupovi.

U tablici 2.1 prikazano je u kojim se nastavnim cjelinama obrađuju sadržaji vezani uz teoriju skupova u petom razredu osnovne škole, nastavne jedinice u koje su podijeljeni ti sadržaji te koji sadržaju prethode i slijede tim nastavnim jedinicama u pojedinim udžbenicima.

| | **Udžbenik 1** | **Udžbenik 2** | **Udžbenik 3** |
|---|---|---|---|
| Nastavna cjelina | **Mjerenje i uvod u Algebru** | **Skup prirodnih brojeva** | **Skupovi** |
| Nastavne jedinice | 1. Skup. Zapis skupa<br>2. Razvrstavanje podataka<br>3. Podskup skupa. Presjek skupova. Unija skupova | 1. Skupovi<br>2. Podskup skupa, presjek skupova<br>3. Unija skupova. Broj elemenata skupova<br>4. Prebrojavanje elemenata skupova | 1. Označavanje skupova<br>2. Odnosi među skupovima<br>3. Unija, presjek i Vennovi dijagrami |
| Prethodne nastavne jedinice | - uvodno ponavljanje<br>- mjerne jedinice (za novac, vrijeme, duljinu, masu) | - prva nastavna jedinica | - prva nastavna jedinica |
| Sljedeće nastavne jedinice | - algebarski izrazi<br>- linearna jednadžba | - zapisivanje prirodnih brojeva<br>- brojevni pravac | - skup prirodnih brojeva<br>- prirodni brojevi i točke pravca |

Tablica 2.1: Pregled nastavnih cjelina vezanih uz skupove u osnovnoj školi

## Pojam skupa

Prva nastavna jedinica vezana uz teoriju skupova u sva tri udžbenika obrađuje pojam i zapis skupa. Kao uvodni primjer dan je skup iz svakodnevnog života - stado, krdo, akvarij s ribama u jednom udžbeniku, skup kućnih ljubimaca u drugom te skup prijatelja u trećem udžbeniku. U prva dva udžbenika potom slijedi opis skupa:

1. *U matematici rabimo riječ SKUP želimo li imenovati više članova (ljudi, životinja, zgrada, brojeva, ...) koji imaju neku zajedničku osobinu.*

2. *Skup je cjelina koja se sastoji od elemenata koji imaju neko zajedničko obilježje ili svojstvo.*

U trećem udžbeniku nije dan opis skupa.

## Zapis skupa

U prvom udžbeniku za prvi primjer zapisa skupa uzima se abeceda. Unutar pravokutnika zapisana su sva slova abecede velikim tiskanim slovima te je i sam skup označen velikim tiskanim slovom. Navodi se da su slova članovi ili elementi abecede, odnosno skupa, te da abecedu treba matematički zapisati kao skup tako da unutar vitičastih zagrada nabrojimo sva slova (elemente) abecede i odvojimo ih zarezom. U sljedećem zadatku treba uvježbati pisanje vitičaste zagrade. Zatim slijedi opis elemenata skupa:

*Članovi ili elementi skupa mogu biti: točke, brojevi, predmeti, životinje, ljudi, slova, riječi, pojmovi ili neki drugi objekti koji pripadaju skupu. Članove skupa možemo odrediti po volji, ali ih obično određujemo po nekom zajedničkom svojstvu.*
Sljedeći primjer je skup geometrijskih tijela koje su učenici dotad upoznali te se navode tri načina kako možemo oblikovati skupove: crtežom (dijagramom), nabrajanjem elemenata ili opisom zajedničkog svojstva.

U drugom udžbeniku u prvom primjeru zadan je skup svih dana u tjednu te treba nabrojati elemente tog skupa. Napominje se da skupove grafički prikazujemo pomoću Vennovih dijagrama te da su to zatvorene linije, najčešće kružnice ili ovalne linije. Zatim su navedena još dva načina na koje možemo zapisati skupove: zapisivanjem svih elemenata ili zapisivanjem svojstva koje imaju svi elementi skupa. Dan je primjer skupa zapisan na oba načina te se ističe da se za oba zapisa koriste vitičaste zagrade.

U trećem udžbeniku na početku nastavne jedinice uz uvodni primjer piše da se skup zapisuje tako da se nabroje njegovi elementi (članovi) unutar vitičastih zagrada odvojeni zarezom. Zatim je na taj način zapisan i skup iz uvodnog primjera.

## Pripadnost skupu i broj elemenata skupa

Za razliku od pojma i zapisa skupa koji se u sva tri udžbenika uvode na početku nastavne jedinice, pripadnost skupu te određivanje broja elemenata skupa uvode se različitim redoslijedom u pojedinim udžbenicima.

U prvom udžbeniku u prethodno navedenom primjeru skupa geometrijskih tijela određuje se i pripadnost zadanih elemenata skupu te se uvodi simbol za pripadanje (odnosno ne pripadanje) elemenata zadanom skupu. Određivanje broja elemenata skupa nije posebno istaknuto u primjerima, no u nekoliko zadataka za vježbu treba odrediti broj elemenata skupa.

U drugom udžbeniku u primjeru je potrebno pomoću vitičastih zagrada zapisati skup svih parnih brojeva. Kako ne možemo nabrojati sve elemente, jer ih ima beskonačno mnogo, koristi se zapis pomoću svojstva. U ovom se primjeru uvode simboli za pripadnost elemenata zadanom skupu. Broj elemenata u ovom udžbeniku uvodi se kasnije, nakon što su obrađeni unija i presjek skupova. Navodi se da se elemente skupova može prebrojavati te se uvodi oznaka $k(A)$. Također, istaknuto je da postoje konačni i beskonačni skupovi te su dani neki primjeri konačnih i beskonačnih skupova.

U trećem udžbeniku već se u uvodnom primjeru spominje broj elemenata skupa. U idućem primjeru treba označiti nekoliko skupova brojeva. Navodi se što je to konačan, a što beskonačan skup te kako zapisujemo elemente skupa koji ima velik broj elemenata i skupa koji ima beskonačno mnogo elemenata. Zatim se uvodi simbol za pripadnost elementa skupu te se navodi primjer. U sljedećem zadatku treba odrediti broj elemenata skupova iz prethodnog primjera. U sljedećem primjeru dan je trokut te su istaknute neke točke ravnine. Za svaku istaknutu točku treba odrediti pripada li ona trokut ili ne te to zapisati pomoću simbola.

## Razvrstavanje podataka

U prvom udžbeniku nakon nastavne jedinice vezane uz skup i zapis skupa je nastavna jedinica koja se bavi razvrstavanjem podataka u skupove. Kao uvodni primjer za razvrstavanje podataka u skupove navodi se spremanje sobe i slaganje stvari po nekom pravilu. Dva se primjera bave razvrstavanjem podataka u tablice prema dva različita pravila. U idućem primjeru prikazuje se razvrstavanje podataka u dva koraka. Najprije se zadani podaci razvrstaju u dvije kategorije, a zatim se jedna od tih kategorija dodatno razvrstava prema određenom kriteriju. U ovom poglavlju učenici dobivaju ideju po kojim kriterijima možemo razvrstati podatke u skupove, no nakon razvrstavanja, podaci nisu zapisani u skupove.

## Odnosi među skupovima

Sljedeće što se uvodi u sva tri udžbenika su odnosi među skupovima. U prvom udžbeniku jednakost skupova uvodi se još u prvoj nastavnoj jedinici vezanoj uz pojam i zapis skupa, a podskup skupa obrađen je zajedno s presjekom i unijom skupova u zasebnoj nastavnoj jedinici. U drugom udžbeniku podskup skupa nalazi se u zasebnoj nastavnoj jedinici zajedno s presjekom skupova. U trećem udžbeniku postoji nastavna jedinica koja se bavi samo odnosima među skupovima.

U prvom udžbeniku u prvoj nastavnoj jedinici vezanoj uz skupove na primjeru skupa koji se sastoji od dva broja istaknuto je da redoslijed elemenata u skupu nije važan te da se višestrukim navođenjem jednog elemenata ne mijenja skup. Navodi se da je za skup samo važno što mu pripada, a što ne, neovisno o tome kojim smo redom zapisali elemente skupa i jesmo li koji od njih više puta naveli. Uz to dan je opis jednakih skupova:

*Dva su skupa $S_1$ i $S_2$ jednaka ako se sastoje od istih elemenata, pišemo $S_1 = S_2$.*

U zadatku koji slijedi potrebno je zapisati dva skupa matematičkim simbolima te odrediti jesu li oni jednaki.

U drugom udžbeniku ne uvodi se pojam jednakosti skupova.

U trećem udžbeniku u sljedećem primjeru zadana su dva skupa koji imaju iste elemente. Slijedi opis jednakih skupova:

*Ako skupovi $A$ i $B$ imaju sve elemente jednake, onda se radi o istome skupu. To skraćeno možemo zapisati ovako: $A = B$. Za skupove $A$ i $B$ koji nisu jednaki kažemo da su različiti i pišemo $A \neq B$.*

*Uoči: Skupovi koji imaju različit broj elemenata sigurno su različiti.*
U idućem primjeru zadano je nekoliko parova skupova te treba odrediti jesu li oni jednaki ili ne.

Kao uvodni primjer za podskup skupa u sva tri udžbenika dan je podskup skupa objekata iz svakodnevnog života: skup životinja u zoološkom vrtu koje imaju dvije noge je podskup skupa svih životinja u tom zoološkom vrtu u prvom udžbeniku, skup Marinovih najdražih sladoleda je podskup skupa svih sladoleda u slastičarni u drugom udžbeniku, skup gudačkih i skup puhačkih instrumenata su podskupovi skupa svih instrumenata u trećem udžbeniku. Slijedi opis podskupa skupa:

1. *Ako je svaki element skupa B ujedno i element skupa A, kaže se da je B podskup skupa A, označuje se $B \subseteq A$ i čita B je podskup od A.*

2. *Ako svaki element skupa B pripada i skupu A, tada kažemo da je B podskup skupa A i zapisujemo $B \subseteq A$.*

3. *Ako skup B sadržava sve elemente skupa A, ali i neke koji nisu u skupu A, onda za skup A kažemo da je pravi podskup od B i pišemo $A \subset B$. Ako A nije pravi podskup od B pišemo $A \not\subset B$. Pravi podskup u daljnjem tekstu kraće ćemo nazivati podskup.*

U drugom i trećem udžbeniku uz opis podskupa skupa nalazi se i prikaz pomoću Vennovog dijagrama.

## Presjek i unija dvaju skupova

Nakon podskupa, u sva tri udžbenika uvodi se presjek i unija dvaju skupova. U prvom udžbeniku podskup skupa, presjek i unija skupova obrađeni su u jednoj nastavnoj jedinici. U drugom udžbeniku podskup skupa i presjek skupova nalaze se u jednoj nastavnoj jedinici, dok su unija skupova i broj elemenata skupa druga nastavna jedinica. A u trećem udžbeniku postoji zasebna nastavna jedinica vezana uz presjek, uniju te Vennove dijagrame.

U prvom udžbeniku u primjeru su zadana dva skupa učenika jednog razreda. Pomoću tablice treba odrediti koji se učenici nalaze u oba skupa. Zatim je prikazan Vennov dijagram zadanih skupova te se navodi da elementi koji se nalaze u oba skupa čine novi skup koji nazivamo presjek. Slijedi opis presjeka skupova:

*Ako su A i B dva skupa, tada se skup svih onih elemenata koji su i u A i u B naziva presjek („zajednički dio“) tih skupova. Presjek skupova je skup koji čine svi elementi koji pripadaju i skupu A i skupu B. Oznaka $A \cap B$.*

U drugom udžbeniku uvodni primjer za presjek skupova je skup kontinenata koji okružuju dva oceana. Kako neke kontinente okružuju oba oceana, ti kontinenti su elementi oba skupa, stoga oni čine novi skup koji nazivamo presjek skupova.

*Presjek skupova A i B je skup koji sadrži točno one elemente koji se nalaze i u skupu A i u skupu B. Presjek skupova označavamo s $A \cap B$.*
Uz opis nalazi se i prikaz pomoću Vennovih dijagrama. U sljedećem primjeru određuje se presjek skupova zadanih na različite načine, prvi je skup skup slova zadan pomoću svojstva, a drugi je skup zadan nabrajanjem elemenata.

U trećem udžbeniku u uvodnom primjeru dana su dva skupa cvijeća koje djevojčice žele pokloniti majci. U ovom udžbeniku na istom se primjeru uvodi presjek i unija dvaju skupova. Kako jedan od cvjetova pripada i jednome i drugome skupu, on pripada presjeku tih skupova.

*Presjek dvaju skupova jest skup čiji su elementi točno oni koji pripadaju jednome i drugome skupu. Presjek skupova A i B označava se s $A \cap B$ i čita "A presjek B".*
Uz opis nalazi se i prikaz Vennovim dijagramom.

U prvom udžbeniku u primjeru su zadana dva skupa brojeva. Pomoću dijagrama određen je presjek tih skupova te se uvodi pojam unije dvaju skupova.

*Unija skupova A i B je skup sastavljen od onih elemenata zadanih skupova A i B od kojih se svaki nalazi barem u jednom od zadanih skupova: u skupu A ili u skupu B. Unija tih skupova je skup koji čine svi elementi iz A i svi elementi iz B. Oznaka $A \cup B$.*

U drugom udžbeniku u uvodnom primjeru zadana su dva skupa knjiga koje su pročitale dvije djevojčice. Neke knjige je pročitala samo jedna od djevojčica, a neke su pročitale obje. Treba odrediti skup svih knjiga koje su njih dvije pročitale. Taj se skup naziva unija skupova.

*Unija skupova A i B je skup koji sadrži sve elemente koji se nalaze u barem jednom od skupova A i B. Uniju skupova A i B označavamo s $A \cup B$.*
Uz opis nalazi se i prikaz pomoću Vennovih dijagrama. U idućem primjeru treba odrediti uniju dvaju skupova brojeva. Napominje se da pri zapisu unije dvaju skupova svaki element navodimo samo jedanput.

U trećem udžbeniku se na uvodnom primjeru skupova cvijeća koje djevojčice žele pokloniti majci, uz presjek uvodi i unija dvaju skupova, to jest skup cvijeća koje pripada jednom ili drugom skupu unija je tih skupova.

*Unija dvaju skupova jest skup čiji su elementi točno oni koji pripadaju jednomu ili drugomu skupu. Unija skupova A i B označava se s $A \cup B$ i čita "A unija B".*
Uz opis dan je i prikaz Vennovim dijagramima. U sljedećem primjeru treba odrediti presjek i uniju nekoliko parova skupova.

## Prazan skup

U prvom udžbeniku na primjeru skupa nekoliko slova i skupa nekoliko brojeva uvodi pojam i oznaka praznog skupa. Pomoću dijagrama treba uočiti da ta dva skupa nemaju zajedničkih elemenata pa je njihov presjek tada prazan skup. Slijedi opis praznog skupa:

*Prazan skup je skup koji nema nijedan element. Označujemo ga* $\emptyset$ *i čitamo prazan skup.*

U drugom se udžbeniku na primjeru dva skupa brojeva koji nemaju zajedničkih elemenata uvodi pojam praznog skupa. Slijedi opis praznog skupa:

*Skup koji ne sadrži niti jedan element naziva se prazan skup i označava se sa* $\emptyset$*. Prazan skup je podskup svakog skupa, tj.* $\emptyset \subseteq S$ *za svaki skup* $S$*.*
Te se napominje:

*Unija bilo kojeg skupa* $S$ *s praznim skupom je sam taj skup,* $S \cup \emptyset = S$*.*

U trećem udžbeniku pojam i oznaka praznog skupa uvodi se na jednom primjeru u kojem treba odrediti presjek dvaju skupova koji nemaju zajedničkih elemenata.

### Vennovi dijagrami

U prvom udžbeniku na kraju poglavlja o uniji i presjeku skupova navodi se da se dijagrami koji su se koristili za prikazivanje skupova i njihovih odnosa zovu Vennovi dijagrami.

U drugom udžbeniku u dijelu nastavne jedinice pod naslovom Broj elemenata skupa nalaze se zadaci u kojima pomoću Vennovih dijagrama treba odrediti broj elemenata presjeka, unije i razlike skupova [1]. U primjeru zadana su dva skupa članova sportskog kluba te broj elemenata u jednom skupu, broj elemenata presjeka tih dvaju skupova i broj elemenata unije tih skupova. Pomoću Vennovog dijagrama treba odrediti broj elemenata drugog skupa. Dakle, u Vennove dijagrame mogu se ili upisati svi elementi skupa ili samo broj elemenata pojedinog skupa.

U trećem udžbeniku za primjer Vennovih dijagrama uzima se primjer skupa prijatelja. Zadana su tri podskupa prijatelja. Treba odrediti koliko prijatelja pripada razlici skupova $A \setminus (B \cup C)$. To se može odrediti pomoću Vennovih dijagrama unutar kojih su zapisani svi elementi skupova. U idućem primjeru u Vennovim dijagramima umjesto elemenata upisani su samo brojevi elemenata zadanih skupova te pomoću dijagrama treba odrediti broj elemenata skupova, presjeka, unije i razlike skupova.

## 2.2 Usporedba udžbenika za srednju školu

Sada ćemo usporediti na koji su način obrađeni nastavni sadržaji vezani uz teoriju skupova u tri aktualna udžbenika za prvi razred srednje škole (3 i 4 sata matematike tjedno). U svim udžbenicima pojam skupa uvodi se u nastavnoj cjelini vezanoj uz skupove brojeva. U prvom udžbeniku teme vezane uz skupove obrađene su u nastavnoj jedinici Prirodni, cijeli i racionalni brojevi na početku nastavne cjeline, u drugom udžbeniku pojmovi vezani uz skupove uvode se u nastavnoj cjelini Skupovi također na početku nastavne cjeline, dok

[1] Naziv razlika skupova ne spominje se ni u jednom od udžbenika.

se u trećem udžbeniku uvode nakon što su obrađeni skupovi brojeva u nastavnoj cjelini Operacije sa skupovima.

U tablici 2.2 prikazano je u kojim se nastavnim cjelinama uvode pojmovi vezani uz skupove, u kojim se nastavnim jedinicama koriste te koje nastavne jedinice prethode, a koje slijede nakon obrade sadržaja vezanih uz teoriju skupova u pojedinim udžbenicima.

| | **Udžbenik 1** | **Udžbenik 2** | **Udžbenik 3** |
|---|---|---|---|
| Nastavna cjelina | **Realni brojevi i njihova svojstva** | **Realni brojevi** | **Brojevi** |
| Nastavne jedinice | 1. Prirodni, cijeli i racionalni brojevi<br>2. Realni brojevi<br>3. Intervali<br>4. Operacije s realnim brojevima | 1. Skupovi<br>2. Prirodni i cijeli brojevi<br>3. Racionalni brojevi<br>4. Realni brojevi | 1. Prirodni i cijeli brojevi<br>2. Racionalni brojevi<br>3. Realni brojevi<br>4. Operacije sa skupovima |
| Prethodne nastavne jedinice | - prva nastavna jedinica | - prva nastavna jedinica | - prva nastavna jedinica |
| Sljedeće nastavne jedinice | - potencije s cjelobrojnim eksponentom | - potencije i algebarski izrazi | - potencije |

Tablica 2.2: Pregled nastavnih cjelina vezanih uz skupove u srednjoj školi

## Pojam i zapis skupa

U prvom udžbeniku pojam općenitog skupa se ne uvodi posebno već se samo uvode skupovi brojeva. Na početku se uvodi skup prirodnih brojeva.

U drugom udžbeniku u prvoj nastavnoj jedinici o skupovima navodi se da su roj pčela, jato ptica, zajednica ljudi, udruge, države i unije primjeri skupova. Zatim se navodi:

*U matematici, skup je pojam koji nije lako objasniti jednostavnijim pojmovima. On se ne definira.*

Ističe se da se skupovi označavaju velikim slovom, a članovi skupova malim slovom.

U trećem udžbeniku najprije se uvode skupovi prirodnih, cijelih, racionalnih, iracionalnih i realnih brojeva. Nakon toga slijedi nastavna jedinica vezana uz skupove općenito. Na početku nastavne jedinice postavlja se pitanje što je to skup, budući da su se dotad spominjali različiti skupovi brojeva. Zatim se navodi da je skup temeljni pojam u matematici te da se ne definira jer ga je teško raščlaniti na jednostavnije pojmove. Umjesto toga navodi se sljedeće:

*Skup je određen ako je dobro definiran zakon prema kojem određujemo njegove elemente.*

Slijede dva primjera: skup "svih učenika u razredu" koji je dobro definiran te skup "svih visokih učenika u razredu" koji nije dobro definiran jer nije poznat kriterij "biti visok". Ističe se da skupove zorno predočavamo Euler-Vennovim dijagramima. Sljedeći primjer je skup $A$ neparnih brojeva manjih od 10. Navodi se da je taj skup dobro definiran budući da za svaki broj znamo odrediti pripada li mu ili ne. Ovdje se uvodi zapis pomoću vitičastih zagrada tako da se nabroje svi elementi ili opisno.

## Pripadnost skupu

U prvom udžbeniku na primjeru skupa prirodnih brojeva uvodi se oznaka za pripadnost elemenata skupu, a zatim se uvodi skup cijelih brojeva.

U drugom udžbeniku u marginama se navodi da članove skupa nazivamo elementima, a na primjeru skupa nekoliko slova uvodi se simbol za pripadnost elemenata skupu.

U trećem udžbeniku na primjeru skupa $A$ neparnih brojeva manjih od 10 uvodi se simbol za pripadnost elemenata skupu.

## Odnosi među skupovima

U prvom udžbeniku, kako bi doveli u vezu skup prirodnih i skup cijelih brojeva, uvodi se pojam podskupa i pravog podskupa:

*Ako svaki element skupa A pripada skupu B, onda je skup A podskup skupa B i pišemo* $A \subseteq B$.

*Ako svaki element skupa A pripada skupu B, a u skupu B postoji barem jedan element koji ne pripada skupu A, kažemo da je A pravi podskup skupa B i pišemo* $A \subset B$.

Te se navodi da vrijedi $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ jer je svaki prirodan broj ujedno i cijeli broj, a nula i negativni cijeli brojevi ne pripadaju skupu prirodnih brojeva. Slijedi nekoliko zadataka vezanih za podskup skupa. Nakon što se uvedu operacije sa skupovima, uvode se racionalni brojevi te u zadacima treba odrediti u kojem su oni odnosu s prirodnim i cijelim brojevima. Zatim se uvode iracionalni i realni brojevi te u zadacima treba odrediti u kojem su oni odnosu.

U drugom udžbeniku pomoću Vennovog dijagrama prikazan je podskup skupa te se uvode podskup i pravi podskup skupa:

*Skup $T$ je podskup skupa $S$ jer je svaki element skupa $T$ ujedno i element skupa $S$, što zapisujemo $T \subseteq S$.*

*Za skup $T$ kažemo da je pravi podskup skupa $S$ jer je svaki element skupa $T$ ujedno i element skupa $S$ i $T \neq S$, što zapisujemo $T \subset S$.*

U trećem udžbeniku podskup skupa se uvodi pomoću primjera skupa $A$ neparnih brojeva manjih od 10. Zadan je još jedan skup, skup $B$ koji se sastoji od nekoliko elemenata skupa $A$. Kako svaki element skupa $B$ pripada skupu $A$ navodi se da tada kažemo da je $B$ podskup skupa $A$ i pišemo $B \subseteq A$. Također uvodi se i pojam pravog podskupa. Navodi se da je u ovom primjeru $B \subset A$ jer skup $A$ sadrži barem jedan element koji ne pripada skupu $B$. Uz to ističe se i odnos između skupova brojeva, to jest $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

## Operacije sa skupovima, kardinalni broj skupa, prazan skup, disjunktni skupovi

U prvom udžbeniku nakon što se uvede pojam podskupa slijede i definicije presjeka, unije i razlike skupova:

*Presjek skupova A i B jest skup koji sadržava sve elemente koji se nalaze i u skupu A i u skupu B. Pišemo* $A \cap B = \{x \colon x \in A \text{ i } x \in B\}$.

*Unija skupova A i B jest skup koji sadržava sve elemente koji se nalaze u skupu A ili u skupu B. Pišemo* $A \cup B = \{x \colon x \in A \text{ ili } x \in B\}$.

*Razlika skupova A i B jest skup koji sadržava sve elemente koji su A, a nisu u B. Pišemo* $A \setminus B = \{x \colon x \in A \text{ i } x \notin B\}$.

Operacije sa skupovima se zatim primjenjuju na intervale realnih brojeva. Uvode se omeđeni i neomeđeni intervali te zatvoreni, otvoreni i poluotvoreni ili poluzatvoreni intervali. Zatim se intervali zapisuju skupovno i obrnuto te se određuju unije i presjeci zadanih intervala.

U drugom udžbeniku nakon što se uvede pojam podskupa slijedi dio nastavne cjeline koji obrađuje operacije sa skupovima. Za uvodni primjer unije skupova navodi se primjer dva ili više jata riba koje se mogu udružiti u novo jato. Navodi se da se tako i dva ili više skupova mogu udružiti u novi skup. Zatim slijedi definicija:

*Unija skupova A i B je skup koji sadržava sve elemente koji se nalaze u barem jednome od skupova A i B,*

$$A \cup B = \{x \colon x \in A \text{ ili } x \in B\}.$$

Za uvodni primjer presjeka skupova zadana su tri skupa koji svaki predstavljaju po jedan žanr glazbe. Elementi tih skupova su imena nekoliko prijatelja čiji je to najdraži žanr glazbe. Budući da se jedno ime nalazi u sva tri skupa navodi se da je ono u presjeku tih triju skupova. Zatim slijedi definicija:

*Presjek skupova A i B je skup koji se sastoji od svih zajedničkih elemenata skupova A i B,*

$$A \cap B = \{x \colon x \in A \text{ i } x \in B\}.$$

Zatim se uvodi razlika skupova primjerom iz svakidašnjeg života: Ivan želi kupiti automobil, no prijatelj mu sugerira da ne kupuje automobil stariji od pet godina jer se ti automobili često kvare. Navodi se da to matematički opisujemo kao razliku skupova te se definira:

*Razlika skupova A i B je skup koji se sastoji od svih elemenata skupa A koji nisu elementi skupa B,*

$$A \setminus B = \{x\colon\ x \in A \ i \ x \notin B\}.$$

Sljedeće što se uvodi je komplement skupa. Ponovno se koristi primjer s automobilom: Ivan je odlučio poslušati prijatelja te je kupio automobil mlađi od pet godina. Navodi se da su u skupu svih automobila, nakon što smo izuzeli mlađe od pet godina, ostali automobili stariji od pet godina te da se to naziva komplement skupa automobila mlađih od pet godina.

*Ako je $T \subseteq S$, komplement ili dopuna skupa $T$ u odnosu prema skupu $S$ jest skup koji čine svi elementi iz $S$ koji ne pripadaju skupu $T$. Pišemo $T^C = S \setminus T$.*
Zatim se uvodi pojam kardinalnog broja skupa. U uvodnom primjeru zadana su tri skupa, prvi je skup koji se sastoji od pet slova, drugi se sastoji od pet simbola, a treći od pet brojeva. Definiraju se još neki pojmovi vezani uz skupove:

*Broj elemenata skupa $S$ naziva se kardinalnim brojem skupa $S$ i označava se s $card(S)$.*

*Skup koji nema nijednog elementa zove se prazan skup. Njegova oznaka je $\emptyset$.*

*Skupovi koji nemaju zajedničkih elemenata zovu se disjunktni skupovi. Njihov je presjek prazan skup.*
Nakon toga slijedi nekoliko problemskih zadataka u kojima treba odrediti presjek, uniju ili razliku zadanih skupova. Nakon nastavne jedinice o skupovima u ovom udžbeniku uvode se skupovi prirodnih, cijelih, racionalnih, iracionalnih i realnih brojeva.

U trećem udžbeniku sljedeće što se uvodi je pojam presjeka skupova. Navodi se primjer dva skupa koji nisu jedan podskup drugoga, ali imaju neke zajedničke elemente. Zatim slijedi definicija:

*Presjek skupova A i B je skup A∩B, koji sadrži zajedničke elemente ovih dvaju skupova:* $A \cap B = \{x\colon\ x \in A \ i \ x \in B\}$.

Uz definiciju nalazi se prikaz pomoću Vennovih dijagrama te zapis presjeka skupova zadanih u primjeru. U idućem primjeru zadana su dva skupa, skup $A$ svih parnih i skup $B$ svih neparnih cijelih brojeva. Ističe se da ovi skupovi nemaju zajedničkih elemenata te da takve skupove nazivamo disjunktnim skupovima. Navodi se da je presjek disjunktnih skupova je prazan te da to zapisujemo kao $A \cap B = \emptyset$, pri čemu je $\emptyset$ oznaka za prazan skup, odnosno skup koji nema nijednog elementa. Na primjeru parnih i neparnih cijelih brojeva uvodi se i unija skupova. Navodi se da je svaki cijeli broj ili paran ili neparan, odnosno ili se nalazi u skupu $A$ ili u skupu $B$. Zato kažemo da je unija skupova $A$ i $B$ baš jednaka skupu cijelih brojeva. Zatim slijedi definicija:

*Unija skupova A i B je skup A ∪ B, koji sadrži one elemente koji se nalaze u barem jednom od ovih dvaju skupova:* $A \cup B = \{x\colon\ x \in A \ ili \ x \in B\}$.
Uz to se navodi primjer skupova racionalnih i iracionalnih brojeva, čiji je presjek jednak praznom skupu, a unija skupu realnih brojeva.

# Poglavlje 3

# Prijedlog pripreme za nastavne sate vezane uz teoriju skupova

## 3.1 Opis pripreme za srednju školu

U srednjoj školi prema nastavnom kurikulumu nastavni sadržaji vezani uz skupove uvode se u prvom razredu četverogodišnjih srednjih škola s 3 i 4 sata matematike tjedno. Prema prijedlogu godišnjeg izvedbenog kurikuluma (vidi [3]) za obradu nastavne jedinice vezane uz skupove predviđena su dva školska sata. No, kako se u većini udžbenika skupovi uvode zajedno sa skupovima brojeva na početku srednjoškolskog obrazovanja (iako je u kurikulumu ishod vezan uz skupove povezan uz rješavanje nejednadžbi) te uzmemo li u obzir da se prema sadašnjem kurikulumu učenici upoznaju sa skupovima već u osnovnoj školi, možemo istovremeno uvesti skupove brojeva i ostale pojmove vezane uz skupove na početku školske godine. Za skupove brojeva prema prijedlogu godišnjeg izvedbenog kurikuluma predviđeno je šest školskih sati. Dakle, ukoliko bismo skupove brojeva uvodili istovremeno kad i ostale pojmove vezane za skupove, skupove bismo mogli uvoditi postepeno tokom osam školskih sati. Sada ćemo dati opis pripreme za prvi školski sat obrade nastavnog sadržaja vezanog uz teoriju skupova u srednjoj školi.

U uvodnom dijelu sata preporuča se učenicima zadati motivacijski zadatak koji oni neće odmah znati riješiti. Nastavnik će se na taj zadatak vratiti kada se uvedu novi sadržaji koji su potrebni za njegovo rješavanje. Prijedlog jednog takvog zadatka:

**Zadatak.** Za prirodni broj $n$ definiramo skup $S_n = \{x \in \mathbb{N} \colon x < n\}$. Odredi skupove $S_{10}$ i $S_{1000}$.

Učenicima treba dati priliku da pokušaju riješiti zadatak, no u tom trenutku nije potrebno otkriti rješenje. Zatim, učenicima treba napomenuti da će im se na kraju nastavnog sata ponovno postaviti prethodno navedeni zadatak.

Na početku glavnog dijela sata može se uvesti skup koji su učenici već vidjeli u svom matematičkom obrazovanju – skup prirodnih brojeva. Nastavnik može pitati učenike kako se nazivaju brojevi koje najčešće koristimo za prebrojavanje. Nastavnik može pripremiti kratko izlaganje o povijesti brojeva i navesti neke zapise brojeva u drugim pismima. Nastavnik može pitati učenike poznaju li neke druge brojeve osim prirodnih i kako ih nazivamo. Učenici u razgovoru s nastavnikom otkrivaju naslov nastavne jedinice: Skupovi. Metodom dijaloga nastavnik i učenici ponavljaju zapis skupa prirodnih brojeva te ga zapisuju na ploču:

SKUP PRIRODNIH BROJEVA: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, ...\}$.

Također nastavnik treba podsjetiti učenike da zagrade koje koristimo u skupovnom zapisu zovemo vitičastim zagradama te da se skup sastoji od elemenata koje odvajamo zarezom.

Zatim se može napraviti kratka aktivnost u kojoj svaki od učenika u bilježnicu zapisuje jedan element skupa prirodnih brojeva te simbolima označuje da je taj broj element skupa $\mathbb{N}$. Za ovu aktivnost predviđeno je vrijeme jedna do dvije minute te za to vrijeme nastavnik provjerava što su učenici zapisali. Na kraju aktivnosti nastavnik na ploču zapisuje jedan primjer prirodnog broja iz razreda te simbol koji se koristi u skupovnoj notaciji:

$$123 \in \mathbb{N}.$$

Sljedeće što je važno istaknuti jest da je broj jedan najmanji prirodan broj te da nula ne pripada skupu prirodnih brojeva. Zatim nastavnik i učenici metodom dijaloga dolaze do simbola za „nepripadanje“ elementa skupu:

$$0 \notin \mathbb{N}.$$

Sljedeća aktivnost bio bi rad u paru u kojem učenici trebaju simbolima zapisati po dva elementa koji pripadaju i po dva elementa koji ne pripadaju skupu prirodnih brojeva. Za ovu je aktivnost također predviđena jedna do dvije minute te se na kraju proizvoljnim odabirom učenika zapisuje po nekoliko njihovih primjera na ploču.

Učenicima bi zatim trebalo skrenuti pažnju da je skup prirodnih brojeva beskonačan skup te da se skupovi općenito mogu podijeliti na konačne i beskonačne skupove. Jedan od načina na koji to možemo učiniti je da metodom dijaloga usmjerimo pažnju na činjenicu da ne postoji najveći prirodan broj te da skup prirodnih brojeva ima beskonačno mnogo elemenata.
Sljedeća aktivnost vezana je uz neke primjere beskonačnih skupova. Nastavnik podijeli učenike u parove te im zadaje zadatak da jedan učenik u paru zapiše skup svih parnih, a drugi učenik skup svih neparnih prirodnih brojeva. Nakon jedne do dvije minute učenici

uspoređuju zapise svojih skupova u paru, a zatim dvoje učenika zapisuju tražene skupove na ploču:

$$P = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$$
$$N = \{1, 3, 5, 7, 9, ...\}$$

Nastavnik tada pita učenike što misle postoje li skupovi koji nisu beskonačni te napominje da skupove možemo podijeliti na konačne i beskonačne. Na ploču se može zapisati podjela:

SKUPOVI

konačni beskonačni

Zatim bi trebalo navesti primjer nekog konačnog skupa. Sljedeća bi aktivnost stoga bila da učenici u paru zapišu neki konačan skup čiji su elementi prirodni brojevi. Ovdje bi se moglo spomenuti da da elementi nekog skupa često imaju neko zajedničko svojstvo, odnosno da su skupljeni u skup po nekom kriteriju. Kad učenici zapišu svoje skupove, za što se također predviđa jedna do dvije minute, učenici trebaju pokušati zapisati taj skup na drugačiji način. Nakon nekoliko minuta nastavnik na ploču zapisuje jedan primjer konačnog skupa iz razreda kojeg onda može zapisati na ploču nabrajanjem elemenata i opisno. Primjerice, neka je to skup jednoznamenkastih brojeva:

$$J = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

Nastavnik zatim pita učenike kako znamo je li skup koji smo zapisali dobro definiran. Tada nastavnik ističe da je skup dobro definiran ukoliko elemente skupa možemo jednoznačno odrediti te daje primjer skupa koji nije dobro definiran. Primjerice, skup svih lijepih brojeva ne bi bio dobro definiran budući da kriterij „biti lijep broj" nije jednoznačno određen. Nije loše potražiti u razredu jedan skup iz prethodne aktivnosti za kojeg tada učenici mogu uvidjeti da nije dobro definiran. Učenici mogu uočiti da, budući da točno znamo koji mu elementi pripadaju, a koji ne, skup $J$ jest dobro definiran.

Zatim je potrebno metodom dijaloga doći do zapisa skupa opisno. Kako bi učenici otkrili takav zapis nastavnik na ploču može zapisati:

$$x \in J.$$

te pitati učenike što misle što to znači, odnosno što iz ovog izraza možemo saznati o $x$. Naime, $x$ je varijabla koja označava element skupa $J$ za koju vrijedi da je ona jednoznamenkast prirodan broj. Nastavnik na ploču zapisuje skup $J$ opisno:

$$J = \{x \colon x \textit{ je jednoznamenkasti prirodan broj}\}.$$

Nastavnik mora napomenuti da ovaj zapis čitamo: *J je skup svih x takvih da je x jednoznamenkasti prirodan broj* te istaknuti da dvotočku čitamo kao takav da ili takvi da.

Metodom dijaloga nastavnik i učenici mogu doći do još jednog opisnog zapisa skupa. Naime, svaki element $x$ skupa $J$ je prirodan broj što možemo zapisati kao $x \in \mathbb{N}$. Uz to svaki element skupa $J$ je manji od 10 što možemo zapisati kao $x < 10$. Pa dolazimo do zapisa:

$$J = \{x \in \mathbb{N} \colon x < 10\}.$$

Pripadnost svih elemenata nekom skupu brojeva dakle, zapisujemo prije dvotočke, a svojstvo prema kojem određujemo koji će to biti elementi našeg skupa brojeva zapisujemo nakon dvotočke.

Zatim bi to trebalo uvježbati na još jednom zadatku:

**Zadatak.** Zapišite skup $S$ skup svih prirodnih brojeva većih od 35 i manjih od 82.

Učenicima bi trebalo dati vremena da samostalno riješe zadatak. Nastavnik za to vrijeme obilazi razred kako bi vidio jesu li učenici usvojili zapis skupa te na koji način su zapisali zadani skup. Zatim rješenje zapisuje na ploču i traži od učenika objašnjenje zašto je baš taj skup traženi skup $S$:

$$S = \{36, 37, 38, 39, ..., 80, 81\}.$$

Budući da ovaj skup ima velik broj elemenata, koriste se tri točke kako bi se skratio zapis. No, svakako treba napomenuti da navođenjem nekoliko prvih elemenata skupa te navođenjem nekoliko posljednjih elemenata skupa treba biti očito što se nalazi u ostatku skupa. Za očekivati je da će neki učenici zapisati brojeve 35 i 82 u svoj skup $S$. No, ovdje treba naglasiti da se u zadatku radi o strogoj nejednakosti te da ti brojevi ne zadovoljavaju zadani kriterij.

Kako bi pokazao ispravan zapis skupa $S$ opisno, nastavnik može najprije pitati učenike kako bi zapisali simbolima: $x$ je veći od 35 i manji od 82. Zatim će jedan od učenika na ploču zapisati:

$$x > 35 \text{ i } x < 82,$$

što kraće zapisujemo ovako:

$$35 < x < 82.$$

Kako uz to znamo i da svaki element $x$ iz skupa $S$ pripada i skupu prirodnih brojeva, to jest vrijedi $x \in \mathbb{N}$, skup $S$ mogli bismo zapisati i na sljedeći način:

$$S = \{x \in \mathbb{N} : 35 < x < 82\}.$$

Ovdje nastavnik može istaknuti da je prije dvotočke zapisano da su svi elementi $x$ skupa $S$ prirodni brojevi, a nakon dvotočke da su to samo oni prirodni brojevi za koje vrijedi $35 < x < 82$.

Sljedeće što bi bilo dobro uvesti jest broj elemenata skupa, odnosno kardinalni broj skupa. Zato je učenicima sljedeći zadatak da odrede koliko elemenata ima skup iz prethodnog primjera. Nastavnik naglašava da broj elemenata skupa $S$ zovemo kardinalni broj ili kardinalitet skupa $S$ što označavamo s $k(S)$ te zapisuje na ploču:

$$k(S) = 46$$

Nastavnik zatim učenicima naglašava da će kardinalni broj svakog konačnog skupa biti prirodan broj.

Sada se možemo vratiti na motivacijski primjer s početka sata:

**Zadatak.** Za prirodni broj $n$ definiramo skup $S_n = \{x \in \mathbb{N} : x < n\}$. Odredi skupove $S_{10}$ i $S_{1000}$.

Nastavnik ponovno daje učenicima vremena da zapišu tražene skupove te rješenje zapisuju na ploču:

$$S_{10} = \{x \in \mathbb{N} : x < 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$S_{1000} = \{x \in \mathbb{N} : x < 1000\} = \{1, 2, 3, ..., 998, 999\}$$

Posljednje što bismo još uveli na prvom satu obrade skupova jest pojam praznog skupa. To možemo učiniti zadamo li još jedan skup slično kao u motivacijskom zadatku:

$$S_1 = \{x \in \mathbb{N} : x < 1\}.$$

Nastavnik daje učenicima vremena da pokušaju zapisati skup $S_1$ i osmisliti naziv za takav skup. Zatim prolazi razredom i komentira skupove koje su učenici zapisali te na ploču zapisuje oznaku za prazan skup:

$$S_1 = \emptyset$$

Također, nastavnik naglašava da postoji jedan i samo jedan skup koji nema niti jedan element, taj skup nazivamo prazan skup te koristimo oznaku $\emptyset$.

Posebno, treba istaknuti da za prazan skup vrijedi $k(\emptyset) = 0$.

Također bi bilo dobro istaknuti da $\emptyset \neq \{\emptyset\}$, jer se s lijeve strane nalazi oznaka za prazan skup, odnosno skup koji nema elemenata, a s desne strane imamo skup koji nije prazan, već ima jedan element $\emptyset$.
Ovime bismo završili prvi sat obrade nastavnog sadržaja vezanog uz skupove.

Sada ćemo opisati sat obrade nastavnih sadržaja vezan uz odnose među skupovima. Na početku sata može se zadati sljedeći motivacijski zadatak:

**Zadatak.** U kakvom su odnosu skup prirodnih brojeva, skup višekratnika broja 4, skup parnih prirodnih brojeva i skup jednoznamenkastih prirodnih brojeva?

Možemo očekivati da većina učenika neće znati riješiti ovaj zadatak pa nastavnik napominje da će se kasnije vratiti na njega. Zatim bi trebalo uvesti pojam jednakosti skupova te podskupa nekog skupa. Za to predlažemo aktivnost koju ćemo sada opisati. Nastavnik slaže učenike u skupine od četiri učenika u jednoj skupini. Svaki od učenika dobiti će papirić s oznakom A, B, C ili D i opisom jednog skupa kojeg treba zapisati pomoću skupovnih oznaka nabrajanjem njegovih elemenata. Primjerice, može se zadati sljedeće:

- $A$ je skup svih parnih prirodnih brojeva manjih od 10.
- $B$ je skup svih višekratnika broja 3 manjih od 20.
- $C$ je skup svih višekratnika broja 6 manjih od 20.
- $D$ je skup svih jednoznamenkastih višekratnika broja 2.

Učenici zatim trebaju usporediti svoje skupove i zapisati opažanja. Za ovu aktivnost predviđa se pet minuta. Nastavnik za to vrijeme obilazi razred i promatra kako učenici napreduju sa zadatkom. Na kraju aktivnosti za svaki skup A, B, C i D po jedan učenik dolazi na ploču zapisati rješenje:

$$A = \{2, 4, 6, 8\} \qquad C = \{6, 12, 18\}$$

$$B = \{3, 6, 9, 12, 18\} \quad D = \{2, 4, 6, 8\}$$

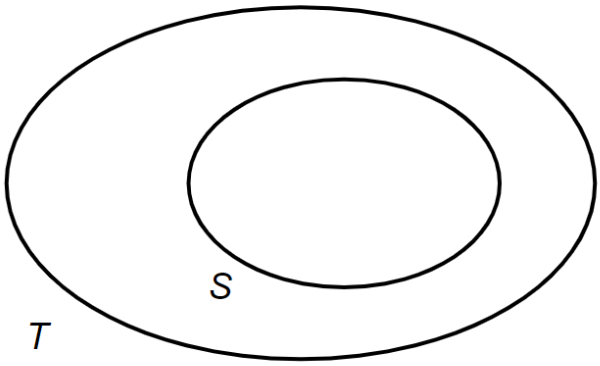
Zatim svaka skupina iznosi svoje zaključke. Možemo očekivat da će učenici uočiti da skup $C$ sadrži neke elemente skupa $B$ te nastavnik na ploču zapisuje sljedeće:

SKUP $C$ JE PODSKUP SKUPA $B$, tj. $C \subseteq B$.

Može se na ploču zapisati i definicija podskupa u općem slučaju ovako:

*Neka su $S$ i $T$ dva skupa. Ako za svaki element $x$ skupa $S$ vrijedi da je $x$ element i od $T$ tada kažemo da je $S$ podskup skupa $T$ i pišemo $S \subseteq T$. Ako $S$ nije podskup od $T$ pišemo $S \nsubseteq T$.*

Kako bi zorno prikazao podskup skupa nastavnik na ploči crta Vennov dijagram kao na slici 3.1.




Slika 3.1: Podskup skupa

Zatim bi učenike trebalo pitati što još mogu uočiti vezano uz skupove $B$ i $C$. Očekujemo da će primijetiti da se u $B$ nalaze i neki elementi koji nisu u $C$. Nastavnik ističe da to znači da je $C$ pravi podskup od $B$, te na ploči piše sljedeće:

SKUP $C$ JE PRAVI PODSKUP SKUPA $B$, tj. $C \subset B$.

Kao dodatno objašnjenje razlike između ova dva simbola, možemo iskoristiti jedan analogon iz aritmetike. Naime, očito vrijedi $3 < 5$ i $3 \leq 5$, ali vrijedi i $5 \leq 5$. U dijalogu s učenicima nastavnik treba skrenuti pažnju na činjenicu da za neki skup $S$ vrijedi $S \subseteq S$, no ne vrijedi $S \subset S$.

Ovdje još možemo skrenuti pažnju i na činjenicu da ukoliko je $S$ pravi podskup od $T$, tada su skupovi $S$ i $T$ sigurno različiti.

I posljednje što treba naglasiti u vezi skupova $A$, $B$, $C$ i $D$ jest jednakost skupova. Učenici su zasigurno primijetili da skupovi $A$ i $D$ imaju sve elemente jednake. Nastavnik navodi da se radi o jednakim skupovima te na ploču zapisuje:

$$A = D.$$

Zatim, na ploču bi trebalo napisati i definiciju jednakosti skupova u općoj situaciji:

*Kažemo da su skupovi $S$ i $T$ jednaki ako je $S \subseteq T$ i $T \subseteq S$.*

Ovdje treba učenicima naglasiti da redoslijed elemenata u skupu nije važan. Nastavnik zadaje skupove $\{1, 2, 3\}$ i $\{3, 2, 1\}$. Učenici trebaju odrediti u kojem su odnosu ovi skupovi. Budući da ovi skupovi imaju sve jednake elemente, vrijedi $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$. Zatim nastavnik zadaje skupove $\{1, 2, 3\}$ i $\{1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3\}$. Učenici trebaju odrediti odnos ovih dvaju skupova. Ovi skupovi također imaju sve iste elemente, ponavljanjem elemenata nismo dodali nove elemente. Učenici mogu uočiti da na skup nema utjecaja ako neki element ponovimo u popisu elemenata skupa, odnosno da vrijedi $\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3\}$.

Treba naglasiti da ukoliko dva skupa nemaju jednak broj elemenata da tada oni ne mogu biti jednaki. Također, treba istaknuti i oznaku $A \neq B$, što čitamo: *skup A nije jednak skupu B ili skup A je različit od skupa B.*

Učenike se može pitati postoji li neki skup koji je podskup svakog skupa. U dijalogu s nastavnikom učenici dolaze do zaključka da je prazan skup podskup svakog skupa te nastavnim na ploču zapisuje:

Za proizvoljan skup $S$ vrijedi $\emptyset \subseteq S$.

Prije uvođenja cijelih brojeva učenici trebaju otkriti svojstva operacija u skupu prirodnih brojeva. No, time se nećemo baviti u ovome radu (budući da je tema rada nastavni sadržaji vezani uz teoriju skupova, a svojstva skupova brojeva pripadaju teoriji brojeva). Metodom dijaloga nastavnik i učenici ponavljaju zapis skupa cijelih brojeva te ga zapisuju na ploču:

SKUP CIJELIH BROJEVA: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Učenici u dijalogu s nastavnikom otkrivaju odnos između skupa prirodnih i skupa cijelih brojeva. Naime, učenici mogu uočiti da su svi prirodni brojevi ujedno i cijeli. No, kako se u skupu cijelih brojeva nalaze i brojevi koji nisu u skupu prirodnih brojeva – negativni brojevi i nula – skup prirodnih brojeva pravi je podskup skupa cijelih brojeva. Nastavnik na ploču zapisuje:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

Zatim bismo uveli pojam partitivnog skupa. Nastavnik može učenicima zadati sljedeći zadatak:

**Zadatak.** Odredi sve podskupove skupa $S = \{1, 2, 3\}$. Koliko podskupova ima skup $S$?

Učenicima treba dati vremena da samostalno pokušaju riješiti zadatak. Zatim nastavnik s razredom komentira njihova rješenja te na ploču zapisuje sve podskupove skupa $S$:

$$\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$$

Nastavnik ističe da gornji skupovi čine partitivni skup skupa $S$ koji označavamo s $\mathcal{P}(S)$ i zapisujemo kao:

$$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Važno je istaknuti da svaki skup $S$ ima dva očigledna podskupa. To su $\emptyset$ i sam skup $S$. Zapravo za svaki skup $S$ vrijedi $\emptyset, S \in \mathcal{P}(S)$.

Na samom kraju sata možemo se posvetiti zadataku s početka. Ponovimo ga:

**Zadatak.** U kakvom su odnosu skup prirodnih brojeva, skup jednoznamenkastih višekratnika broja 4, skup parnih prirodnih brojeva i skup jednoznamenkastih parnih prirodnih brojeva?

Učenici samostalno rješavaju zadatak uz uputu da imenuju i pomoću skupovnih oznaka zapišu svaki od ovih skupova. Zatim učenici na ploču zapisuju skupove:

$$A = \{4, 8\}, \quad B = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}, \quad C = \{2, 4, 6, 8\}$$

i odnose zadanih skupova:

$$A \subset C \subset B \subset \mathbb{N}.$$

Ovime bismo završili drugi sat obrade nastavnih sadržaja vezanih uz skupove.

Na iduća dva školska sata obrade nastavnih sadržaja iz teorije skupova trebalo bi uvesti pojmove presjeka, unije i razlike skupova, disjunktnih skupova te komplementa skupa. To se može obraditi nakon što se uvedu skupovi racionalnih i iracionalnih brojeva i njihova svojstva, a prije skupa realnih brojeva, budući da njega možemo uvesti pomoću unije skupa racionalnih i iracionalnih brojeva.

Kako bi se uveo presjek skupova predlažemo aktivnost koju ćemo sada opisati. Učenike podijelimo u grupe tako da je u svakoj grupi najviše troje učenika. Svaki učenik zapisuje jedan od sljedećih skupova nabrajanjem njegovih elemenata:

- $A$ je skup svih parnih prirodnih brojeva manjih od 10.
- $B$ je skup svih parnih prirodnih brojeva.
- $C$ je skup svih prirodnih brojeva manjih od 10.

Učenici zatim trebaju usporediti zapisane skupove te zapisati svoja opažanja. Za ovu su aktivnost predviđene dvije do tri minute. Za to vrijeme nastavnik obilazi učenike i provjerava njihova rješenja. Učenici zatim zapisuju svoje skupove na ploču:

$$A = \{2, 4, 6, 8\}, \quad B = \{2, 4, 6, 8, ...\}, \quad C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

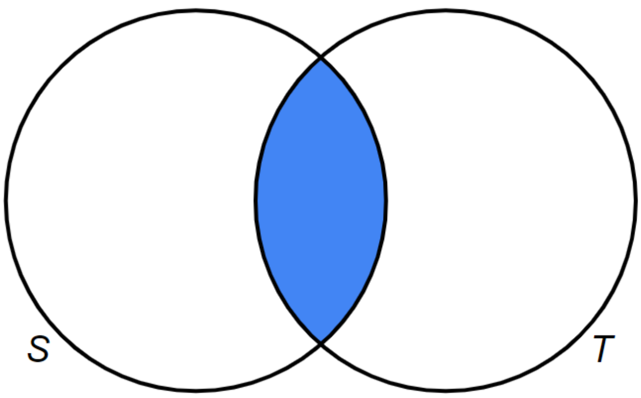
Na kraju aktivnosti nastavnik na ploči zapisuje zadane skupove opisno:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \colon x \text{ je paran i } x < 10\}, \quad B = \{x \in \mathbb{N} \colon x \text{ je paran}\}, \quad C = \{x \in \mathbb{N} \colon x < 10\}$$

Učenici mogu uočiti da povezivanjem skupova $B$ i $C$ veznikom *"i"* dobivamo skup $A$. Nastavnik ističe da skup $A$ zovemo presjekom skupova $B$ i $C$ te zapisuje definiciju presjeka na ploču:

> *Presjek skupova $S$ i $T$ jest skup koji označavamo sa $S \cap T$ te koji sadrži sve elemente koji se nalaze istovremeno u skupu $S$ i u skupu $T$, to jest:*
>
> $$S \cap T = \{x \colon x \in S \textbf{ i } x \in T\}$$

Uz to nastavnik na ploču crta Vennov dijagram presjeka dvaju skupova kao na slici 3.2.




Slika 3.2: Presjek skupova $S$ i $T$

Zatim crta novi Vennov dijagram u kojem zapisuje elemente skupova $B$ i $C$ iz aktivnosti te bojom ističe dio na Vennovom dijagramu koji predstavlja presjek tih skupova.

Kako bi učenici uvježbali određivanje presjeka skupova nastavnik im zadaje sljedeći zadatak:

**Zadatak.** Ako je sa $V_n$ označen skup svih višekratnika prirodnog broja $n$, odredite redom sljedeće skupove:

a) $V_2 \cap V_3$,

b) $V_2 \cap V_5 \cap V_{10}$.

Učenicima treba dati vremena da samostalno riješe zadatak, zatim će svoja rješenja zapisati na ploču:

a) $V_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$, $V_3 = \{3, 6, 9, 12, ...\}$, $V_2 \cap V_3 = \{6, 12, 18, 24, ...\}$,

b) $V_5 = \{5, 10, 15, 20, ...\}$, $V_{10} = \{10, 20, 30, 40, ....\}$, $V_2 = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$,
$V_2 \cap V_5 \cap V_{10} = \{10, 20, 30, 40, ...\}$.

Sljedeći zadatak nastavnik zadaje kako bi uveo pojam disjunktnih skupova.

**Zadatak.** Neka je $A$ je skup svih parnih prirodnih brojeva te neka je $B$ skup svih neparnih prirodnih brojeva. Pomoću skupovnih oznaka zapiši skupove $A$, $B$ i $A \cap B$.

Učenici najprije samostalno rješavaju ovaj zadatak, a zatim rješenje zapisuju na ploču.

$$A = \{2, 4, 6, 8, \dots\}, \quad B = \{3, 5, 7, 9, ...\}, \quad A \cap B = \emptyset$$

Nastavnik ističe da skupove koji nemaju zajedničkih elemenata, odnosno čiji je presjek prazan skup, nazivamo disjunktnim skupovima te zapisuje definiciju na ploču.

*Za skupove $S$ i $T$ kažemo da su disjunktni ako je $S \cap T = \emptyset$.*

Cilj sljedeće aktivnosti jest uvođenje unije skupova. Učenici se ponovno rasporede u grupe tako da je u svakoj grupi najviše troje učenika. Svaki učenik u grupi zapisuje jedan od sljedećih skupova nabrajanjem njegovih elemenata:

- $A$ je skup svih parnih prirodnih brojeva manjih ili jednakih 10.
- $B$ je skup svih neparnih prirodnih brojeva manjih ili jednakih 10.
- $C$ je skup svih prirodnih brojeva manjih ili jednakih 10.

Učenici ponovno trebaju usporediti svoje skupove te zapisati svoja opažanja. Nakon dvije do tri minute, koliko je predviđeno za ovu aktivnost, učenici zapisuju svoje skupove na ploču:

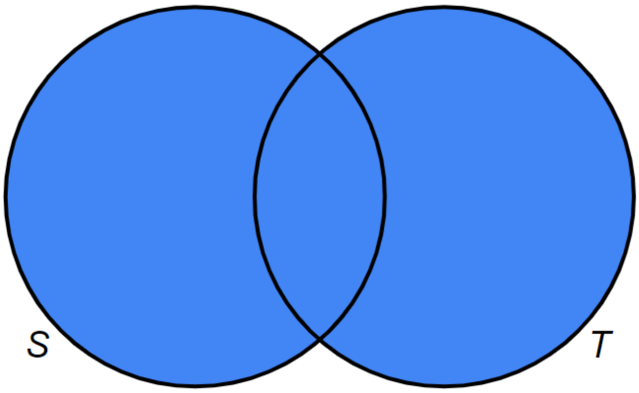
$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, \quad B = \{1, 3, 5, 7, 9\}, \quad C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

Učenici mogu uočiti da su u skupu $C$ okupljeni svi elementi iz skupova $A$ i $B$, odnosno za svaki element iz skupa $C$ vrijedi da je on element ili skupa $A$ ili skupa $B$. Nastavnik ističe da skup $C$ zovemo unijom skupova $A$ i $B$ te zapisuje sljedeću definiciju na ploču:

*Unija skupova $S$ i $T$ jest skup koji označavamo sa $S \cup T$ te koji sadrži sve elemente koji se nalaze u skupu $S$ ili u skupu $T$. To skraćeno možemo zapisati ovako:*

$$S \cup T = \{x \colon x \in S \textbf{ ili } x \in T\}.$$

Nastavnik na ploču crta Vennov dijagram unije dvaju skupova kao na slici 3.3.




Slika 3.3: Unija skupova $S$ i $T$

Zatim još crta novi Vennov dijagram u kojem zapisuje elemente skupova $A$ i $B$ iz aktivnosti te bojom ističe dio na Vennovom dijagramu koji predstavlja uniju tih skupova. Nakon toga nastavnik zadaje učenicima zadatak za vježbu u kojem treba odrediti uniju skupova.

**Zadatak.** Ako je sa $D_n$ označen skup svih djelitelja prirodnog broja $n$, odredi skupove:

a) $D_{12} \cup D_{18}$,

b) $D_{15} \cup D_{30} \cup D_{45}$.

Nakon što samostalno riješe zadatak, učenici zapisuju svoja rješenja na ploču:

a) $D_{12} = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$, $D_{18} = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$, $D_{12} \cup D_{18} = \{1, 2, 3, 6\}$

b) $D_{15} = \{1, 3, 5, 15\}$, $D_{30} = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$, $D_{45} = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$, $D_{15} \cup D_{30} \cup D_{45} = \{1, 3, 5, 15\}$.

Nakon toga uvela bi se još jedna operacija sa skupovima, a to je razlika skupova. Za uvođenje razlike skupova predlažemo aktivnost koju ćemo sada opisati. Učenici se ponovno podjele u grupe tako da je u svakoj grupi najviše troje učenika. U svakoj grupi svaki učenik zapisuje jedan od sljedećih skupova pomoću skupovnih oznaka nabrajanjem njegovih elemenata:

- $A$ je skup svih jednoznamenkastih prirodnih brojeva.
- $B$ je skup svih dvoznamenkastih prirodnih brojeva.
- $C$ je skup svih prirodnih brojeva manjih od 100.

Nakon što zapišu skupove, učenici ih međusobno uspoređuju te zapisuju svoja opažanja. Ponovno nakon dvije do tri minute, učenici zapisuju skupove na ploču:

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \quad B = \{10, 11, 12, \ldots, 98, 99\}, \quad C = \{1, 2, 3, \ldots, 98, 99\}$$

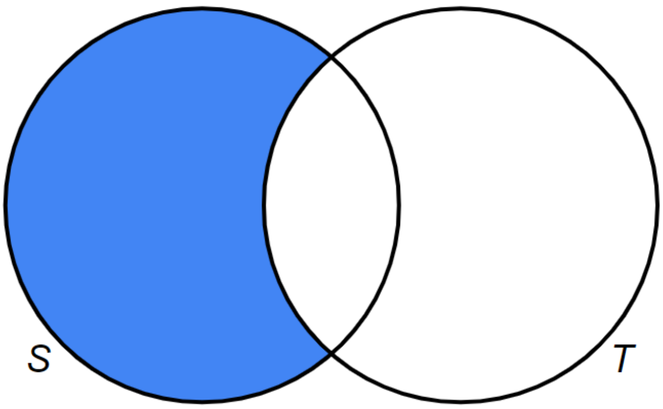
Očekujemo da će učenici uočiti da vrijedi $A \cap B = \emptyset$, odnosno da su skupovi $A$ i $B$ disjunktni, te da vrijedi $A \cup B = C$. No, učenici bi trebali uočiti i da ako primjerice iz skupa $C$ izuzmemo elemente skupa $A$ dobivamo skup $B$. Nastavnik ističe da je tada skup $B$ jednak razlici skupova $C$ i $A$. Slično je ako iz skupa $C$ izuzmemo elemente skupa $B$ dobivamo skup $A$, tada je skup $A$ jednak razlici skupova $C$ i $B$.

Nastavnik tada crta Vennov dijagram kojim zorno prikazuje odnose zadanih skupova te na slici ističe razliku skupa. Zatim navodi sljedeću definiciju:

*Razlika skupova $S$ i $T$ jest skup koji označavamo sa $S \setminus T$ te koji sadrži sve elemente koji se nalaze u skupu $S$, ali ne i u skupu $T$. To kratko zapisujemo ovako:*

$$S \setminus T = \{x \colon x \in S \textbf{ i } x \notin T\}.$$

Nastavnik zatim na ploči crta Vennov dijagram za razliku skupova kao na slici 3.4.




Slika 3.4: Razlika skupova S i T

Nastavnik zadaje zadatak za vježbu određivanja razlike skupova:

**Zadatak.** Odredi skup $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

Učenici samostalno rješavaju zadatak, a zatim jedan od njih zapisuje rješenje na ploču:

$$\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} = \{..., -2, -1, 0\}$$

Posljednje što bi se uvelo na satovima vezanim uz teoriju skupova bio bi komplement skupa. Nastavnik zadaje učenicima zadatak da zapišu jedan podskup sljedećeg skupa:

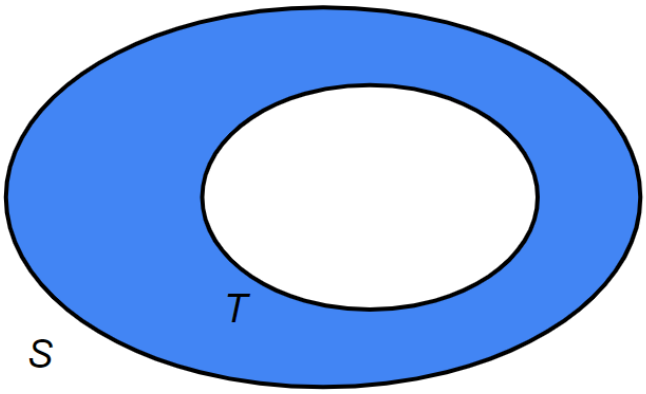
$$A = \{11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99\}$$

te ga označe sa $B$. Učenici zatim trebaju odrediti skup $A \setminus B$.

Promotrimo primjerice skup $B = \{11, 33, 55, 77, 99\}$. Tada $A \setminus B = \{22, 44, 66, 88\}$. Nastavnik ističe da ukoliko je $B$ podskup od $A$, tada $A \setminus B$ još nazivamo komplement skupa $B$ u odnosu na $A$ te ga označavamo s $B^C$, odnosno vrijedi $B^C = A \setminus B$. Nastavnik zatim na ploči zapisuje definiciju komplementa skupa:

> *Ako vrijedi $T \subset S$, tada je komplement skupa $T$ u odnosu na skup $S$ skup koji sadrži sve elemente koji se nalaze u skupu $S$, ali ne i u skupu $T$. To kratko zapisujemo ovako:*
>
> $$T^C = S \setminus T$$

Nastavnik na ploču crta Vennov dijagram kojim ilustrira komplement skupa kao na slici 3.5.




Slika 3.5: Komplement skupa T s obzirom na S

Do kraja sata učenici rješavaju zadatke vezane uz operacije sa skupovima. Pritom bi n nastavnici, uz uobičajene zadatke s određivanjem unije, presjeka i razlike, trebali kreirati što više zadataka kao što su, primjerice, sljedeći zadaci:

1. Odredi neki A skup prirodnih brojeva tako da vrijedi $\{1, 2, 3\} \cap A = \{1, 2\}$. Je li skup A jedinstven?
2. Odredi neki B skup prirodnih brojeva tako da vrijedi $\{1, 2, 3\} \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Je li skup B jedinstven?
3. Neka su A i B podskupovi od $\mathbb{N}$ takvi da je $A \cap B = \{1, 2, 3\}$, $(A \cup B) \setminus A = \{4, 5\}$ i $\{6, 7\} \subseteq A \cup B$. Odredi skup B.

Time bismo završili opis pripreme za nekoliko sati obrade nastavnih sadržaja vezanih uz skupove. Od nekih važnih pojmova vezanih uz teoriju skupova preostali su nam, primjerice, intervali realnih brojeva, Kartezijev produkt te prebrojivi i neprebrojivi skupovi. No, oni bi se mogli uvesti kasnije u srednjoj školi, i to kada se za njima javi potreba. Intervali se prema kurikulumu uvode zajedno s linearnim nejednadžbama pa se mogu obraditi nešto kasnije u prvom razredu. Zatim, Kartezijev produkt bi se morao spomenuti prilikom uvođenja koordinatnog sustava također u prvom razredu. Prebrojivi i neprebrojivi skupovi te kardinalni brojevi skupova $\mathbb{N}$ i $\mathbb{R}$ mogu se uvesti u četvrtom razredu nakon što je uveden pojam bijekcije.

# Poglavlje 4

# Neki kritički osvrt o sadržajima iz teorije skupova u osnovnim i srednjim školama u RH

Iako je teorija skupova nastala tek u drugoj polovici 19. stoljeća, njena je primjena u suvremenoj matematici nezaobilazna. Naime, pokazalo se da je gotovo cjelokupnu matematiku moguće svesti na teoriju skupova, a samim time možemo ju shvatiti kao *„fundamentalnu matematičku disciplinu iz koje su izvedene sve ostale“* (vidi [12]).

No, upravo je teorija skupova u obrazovnom sustavu tijekom godina doživjela najviše promjena. Sedamdesetih su se godina prošloga stoljeća skupovi detaljno obrađivali u petom razredu. Prema članku [4] iz 1977. godine, autora V. G. Kirina, roditeljima je, čak više nego njihovoj djeci, teorija skupova predstavljala problem. Kako bi to ilustrirali, ovdje navodimo nekoliko rečenica iz spomenutog članka:

> *Ovoga puta jedan bauk kruži cijelim svijetom. To je bauk skupova. [...] Roditelji ne umiju riješiti svom djetetu domaći zadatak iz teorije skupova.*

Kako se uvođenjem teorije skupova u osnovne škole nije postigao cilj kojeg su matematičari zamislili, skupovi su se kasnije u potpunosti izbacili iz nastavnog programa za osnovne škole. Tako u nastavnom planu i programu za osnovnu školu iz 2006. godine ne postoje ishodi vezani uz skupove te se oni kao općenit pojam nisu spominjali u osnovnoj školi. Iako su kroz osnovnu školu prema tom nastavnom programu učenici više puta čuli riječ skup (skup prirodnih brojeva, skup točaka ravnine, skup realnih brojeva...), ona se pojavljivala isključivo u naslovima nastavnih cjelina. Osim što se uvodila oznaka za pripadnost skupu te se spominjao pojam podskupa, o tom pojmu nije bilo drugog govora. To je prema mišljenju autora članka [9] iz 2010. godine za osnovnu školu bilo dovoljno. Za razliku od srednje škole, gdje su se skupovne operacije uvodile samo prilikom rješavanja nejednadžbi i definirao se pojam funkcije te se spominjala prebrojivost, autori članka smatraju da je to bilo premalo te da se operacijama sa skupovima nije pridavalo dovoljno pažnje. U udžbenicima za srednju školu broj zadataka s dokazima bio je prilično mali, a neke se važne identitete vezane uz skupove uopće nije dokazivalo.

Iako su se skupovi u međuvremenu izbacili i ponovno vratili u kurikulum, problemi kojima se bavi V. G. Kirin u članku iz sedamdesetih i dalje su aktualni. Zapravo, autori svih članaka koje smo naveli ističu slične probleme s kojima se susrećemo i danas. Prema sadašnjem kurikulumu u osnovnoj školi, već u petom razredu detaljno se obrađuju nastavni sadržaji vezani uz skupove. Pritom primjeri u udžbenicima često nisu matematički. To se čini i kao jedina opcija, budući da je u većini udžbenika to prva nastavna jedinica u višim razredima. U srednjoj školi obujam nastavnih sadržaja vezanih uz teoriju skupova u novom se kurikulumu nije značajno promijenio. Pojmovi vezani uz skupove i dalje su ukratko objašnjeni u sklopu drugih nastavnih cjelina, a zadaci vezani uz operacije sa skupovima slabo zastupljeni.

Kada govorimo o skupovima u nastavi, prema [12], prvo što se nameće je pitanje što su to skupovi. Slično kao što aritmetiku učimo čitavu osnovnu i srednju školu bez da postavljamo pitanje što je to broj, a kamoli da bismo na njega pokušali odgovoriti, tako i skupove promatramo u teoriji skupova bez da ih pokušavamo definirati. Razlika je u tome što su brojevi nešto čime se svjesno koristimo od malih nogu, a pojmovi vezani uz skupove integrirani su nekim drugim riječima i izrazima koje koristimo mnogo dulje nego smo toga svjesni.

U nastavi matematike definicije su nešto oko čega moramo biti posebno pažljivi. Naime, učenici se već u nižim razredima upoznaju s različitim matematičkim pojmovima. No, s prvim pravim definicijama susreću se eventualno tek u srednjoj školi. Primjerice, učenici će se već na početku svog matematičkog obrazovanja upoznati s pojmom trokuta. No, to će biti samo na razini prepoznavanja među ostalim geometrijskim likovima. Kasnije, učenici će naučiti i opisati taj trokut, ali definicija trokuta kao najmanjeg konveksnog skupa koji sadrži tri zadane točke koje ne leže na pravcu može se dati učenicima matematičkih gimnazija i to samo kao ilustracija apstraktnosti matematike. Slično je s brojnim drugim definicijama matematičkih pojmova. Često se pojmovi definiraju i kako bismo pomoću njihovih definicija dokazali da nešto ne vrijedi. Primjerice, neprekidnost funkcije u točki nužno je uvesti kako bi pokazali da neka funkcija nije neprekidna. Općenito, u matematici se pojmovi definiraju pomoću prije definiranih pojmova. No, taj proces svođenja na jednostavnije pojmove u nekom trenutku mora stati. Neki su pojmovi u matematici toliko osnovni da ih se ne definira, već se smatraju intuitivno jasnim. Primjerice, osnovni pojmovi u geometriji su točka, pravac i ravnina. Oni se ne definiraju, ali svaki će učenik intuitivno znati što je točka, pravac i ravnina te će moći graditi teoriju polazeći od njih. Jedan od najosnovnih pojmova u matematici, a pogotovo u teoriji skupova, jest skup (vidi [2]). Ovdje navodimo prvo prijedlog iz [9] kako u nastavi početi pričati o skupovima.

> *Dakle, u nastavi matematike ne treba se uopće truditi kako bi se pokušao objasniti pojam skupa. Naročito nikako ne navoditi rečenicu: Skup je pojam koji se ne definira.*

Zatim, tu je i rečenica iz [4]:

> *Na eventualno uporno pitanje što su skupovi ja bih odgovorio: „Skup sadrži svoje elemente, a oni njemu pripadaju".*

Prema [4] korištenjem skupova dobivamo određeniji pogled na objekte koji imaju neka zajednička svojstva te kasnije u već stvorenim skupovima možemo pronaći nova, još neuočena zajednička svojstva odnosno razlike. Pritom moramo pripaziti da pojmove koje skupljamo u misaonu cjelinu odvojimo od fizičkog smisla njih samih. Naime, za stvaranje skupova važniji je opseg pojma od njegova sadržaja. Slično je za brojanje – ako promatramo broj dva i znamo da u svemiru ne postoje dvije potpuno identične stvari, na što se uopće može odnositi broj dva? Kako bismo ga mogli koristiti u svakodnevnim situacijama bez obzira na to na što se odnosi, broj moramo odvojiti od njegovog fizičkog smisla. Tako i elemente skupova svodimo na svojstva koja ih *„drže na okupu"*. Ta su svojstva često jednostavna i općenita te je upravo zbog toga teorija skupova svugdje primjenjiva. Problem se javlja kod nekih primjera korištenih u školi gdje dolazimo do situacije da se baš sve može staviti u skup, no što onda nije skup? Upravo zato u školi moramo koristiti skupove koji će poticati dječju kreativnost. Ovdje citiramo jednu rečenicu iz [4]:

> *Uopće se treba kloniti stupidnih skupova koliko god se oni dopadali i učiteljima i djeci zbog svoje „lakoće".*

Prema [12] kao što postoji osnovnoškolska aritmetika, na koju se nadovezuje srednjoškolska, a onda i visokoškolska aritmetika (ili matematička analiza), tako bi i skupove u školi trebala objašnjavati *„školska teorija skupova"*. No, za razliku od školske aritmetike koja ima nezaobilazne primjene u svakodnevnom životu i usvajanju novih znanja, čini se da teoriju skupova trebaju poznavati samo budući matematičari i to zbog primjena u ostalim matematičkim disciplinama te zbog eventualnog razumijevanja moguće redukcije matematike na teoriju skupova. Čak neće ni svi studenti matematike slušati poseban kolegij „Teorija skupova", no ona je integrirana u brojnim drugim kolegijima. S druge strane, prihvatimo li da se teorija skupova koristi u brojnim drugim matematičkim disciplinama u školi, znači li to da bi ju trebalo uvesti prije svih drugih nastavnih sadržaja iz matematike kako bismo ju lakše primjenjivali? Prema [12] ovdje dolazimo do problema. Ako želimo djeci predočiti skupove, bez da koristimo druge matematičke discipline (jer ih učenici još nisu upoznali), kakve skupove uopće možemo stvoriti? Naravno, jedan primjer mogao bi biti skup brojeva, primjerice $\{1, 2, 3\}$. Ovdje je $\{1, 2, 3\}$ ime za jednostavan skup brojeva koji mogu primjerice predstavljati skup rješenja jednadžbe trećeg stupnja. U udžbenicima se često pojavljuju i skupovi tipa $\{Marko, Ivana\}$. No, što su elementi ovog skupa? Kako mogu Marko i Ivana, pretpostavimo dvoje prijatelja, činiti skup? Gdje ćemo koristiti ovakav skup? Mogli bismo zadati i skup slova, na primjer $\{a, b, c\}$. Sada imamo skup koji je neodređen dokle god ne znamo što predstavljaju $a$, $b$ i $c$. U algebri koristimo slova kao nazive varijabli. No, ako je teorija skupova prvo što učenici uče od matematičkih sadržaja, $a$, $b$ i $c$ mogu jedino biti slova. Kako će dijete koje je u ranoj dobi naučilo da je $\{a, b, c\}$ skup slova, kasnije shvatiti da to može biti i skup nekih varijabli? U tu svrhu citiramo rečenicu iz [12]:

> *S obzirom na važnu i standardnu upotrebu slova kao varijabli, trebalo bi izbjegavati bavljanje skupovima slova, u kojima slova imaju sasvim drugu upotrebu.*

Dolazimo do zaključka da ako *„želimo skupove prije aritmetike, prije geometrije itd., dakle prije matematike, onda to ne mogu biti neki matematički najnormalniji skupovi brojeva, točaka itd., nego to moraju biti neki nematematički skupovi“*. Tada se slova nameću kao izbor koji će se ipak često pojavljivati u matematici. No, prema [12] to je pogrešno. Na taj će način učenici pojam skupa, koji je i tako apstraktan, poistovjetiti sa skupovima slova, a kasnije će morati „prenaučiti“ da su u matematici slova imena za varijable i nepoznanice.

Jedan dobro organiziran sat *„skupljanja“*, prema [4] bio bi da učenicima damo prikaz nekoliko predmeta te im zadamo zadatak da neke od njih izdvoje i zamisle kao da pripadaju jednoj cjelini, ali da ih pritom fizički ne pomiču. Učenici bi pritom trebali objasniti prema kojem su principu grupirali zadane objekte, što bi dobili da su ih grupirali prema nekom drugom kriteriju te da za neke skupove otkriju princip prema kojem su elementi grupirani.

Prema sadašnjem kurikulumu skupovi se obrađuju kao zasebna nastavna cjelina u petom razredu osnovne škole i to prije nego što su obrađeni neki drugi važni pojmovi koji se često koriste pri konstruiranju skupova. U različitim udžbenicima, na različite načine, autori se trude približiti učenicima pojam skupa i konstrukciju istih. No, i dalje nije posve jasno čemu skupovi služe. Primjeri skupova *„iz života“* mogli bi se zamijeniti skupovima brojeva. Time bi se izbjegle dileme, a i dalje bi se mogli uvesti svi ostali pojmovi vezani uz skupove.

Prema [4] teorija skupova je neophodan obrazovni sadržaj, ali kao nesamostalni dio obrazovnog procesa koji će biti podređen korisnijim sadržajima. Potreba za skupovima prvi put se javlja s prirodnim brojevima kako bismo učenicima mogli reći što su funkcije, a pomoću funkcija opisati ekvipotentne skupove. Prema [4], prva stvari koju je potrebno uvesti je brojanje, odnosno prebrojavanje. Cilj prebrojavanja je poznavanje i upotreba riječi „veći od“, „manji od“ i „jednak“, i to u smislu kardinalnog broja skupova. To potkrepljujemo sljedećom rečenicom iz [4]:

*Tek kada se stigne do sistematskog prebrojavanja svega i svačega, tad bi po mom sudu trebalo po prvi put uzgred spomenuti skupove i elemente, ali ne odgovarati na pitanja iz razreda, što skupovi jesu.*

U [4] se navodi da se i unija, presjek i komplement također mogu uvesti pomoću brojenja. Kako bi se ilustrirao kako to učiniti u školi, navodi se sljedeći primjer:

*„U dvorištu je troje djece. Dvoje od njih voli se igrati loptom, a dvoje skrivača. Kako je to moguće?"*

Ovdje učenici mogu uočiti da je to jedino moguće ako jedno od djece voli i jedno i drugo. Dakle, problem se svodi na prebrojavanje pa možemo doći i do formule za broj elemenata u uniji dvaju skupova čiji presjek nije prazan skup,

$$k(A \cup B) = k(A) + k(B) - k(A \cap B).$$

Prema [9] ono što učenike srednjih škola često zbunjuje pri rješavanju nejednadžbi jest upravo određivanje presjeka i unije. Nije im sasvim jasno u kojem slučaju treba odrediti uniju, a u kojem presjek. Kako bi razriješili takve dileme, autori članka navode da učenicima treba posebno naglasiti vezu presjeka i unije te odgovarajućih veznika *„i"* i *„ili"* te u rješavanju jednadžbe u svakom koraku napominjati o kojem se vezniku radi. Zatim, u članku [9] navodi se nekoliko činjenica vezanih uz teoriju skupova koje je važno da nastavnici znaju u slučaju da nekom izvrsnom učeniku treba objasniti nešto vezano uz skupove, a koje možda neće u redovnoj nastavi matematike imati prilike predavati. To bi, primjerice, bila jednakost skupova. Jesu li dva skupa koji imaju iste elemente zapisane različitim redoslijedom jednaka te što sa skupovima u kojima se neki elementi ponavljaju? Ovdje se nastavnici mogu pozvati na jedan aksiom iz teorije skupova koji se naziva aksiom ekstenzionalnosti:

*Ako skupovi imaju iste elemente tada su oni jednaki. Odnosno, zapisano simbolički:*

$$\forall x\, \forall y\, (\forall z\, (z \in x \Leftrightarrow z \in y) \Rightarrow x = y)$$

Sljedeće što se može objasniti pomoću teorije skupova jest zašto vrijedi $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$. Kako bismo odgovorili na ovo pitanje morali bismo skupove brojeva definirati preko skupova. Skup cijelih brojeva definira se kao skup svih klasa ekvivalencije relacije ekvivalencije na skupu $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definirane ovako:

$$(m_1, n_1) \sim (m_2, n_2) \Leftrightarrow m_1 + n_2 = n_1 + m_2$$

Skup racionalnih brojeva definira se kao skup svih klasa ekvivalencije binarne relacije na skupu $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \backslash \{0\})$ definirane s:

$$(p_1, q_1) \backsimeq (p_2, q_2) \Leftrightarrow p_1 \cdot q_2 = q_1 \cdot p_2$$

Tada je $\frac{p}{q}$ oznaka klase ekvivalencije para $(p, q)$ i jednakost $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ znači da mora vrijediti $(1, 2) \backsimeq (3, 6)$ što vrijedi jer $1 \cdot 6 = 2 \cdot 3 = 6$. Navodimo dio teksta iz [9] koji ilustrira naša prethodna razmatranja:

> *Ovim pitanjem, odnosno njegovim odgovorom, nije nam bio primarni cilj podsjetiti na pojam relacije ekvivalencije. Željeli smo naglasiti zašto se često teorija skupova naziva osnova matematike. U teoriji skupova mogu se definirati skupovi brojeva (prirodni, cijeli, racionalni, realni i kompleksni). U teoriji brojeva dokazati dobro poznata svojstva skupova brojeva (npr. komutativnost i asocijativnost zbrajanja, aksiom matematičke indukcije, ...).*

U članku [9] razmatra se i pitanje prebrojivosti i neprebrojivosti skupova brojeva. U tu svrhu ponovimo prvo definicije prebrojivosti:

> *Za skup A kažemo da je prebrojiv ako postoji barem jedna bijekcija $f : \mathbb{N} \to A$.*
> *Za skup kažemo da je neprebrojiv ako je beskonačan i nije prebrojiv.*

Učenicima koji poznaju bijekciju tada je očito da je skup $\mathbb{N}$ prebrojiv. Također, možemo učenicima opisati bijekciju koja nulu preslikava u nulu, parne prirodne brojeve u pozitivne cijele brojeve i neparne prirodne brojeve u negativne cijele brojeve te učenici mogu uočiti da je i skup $\mathbb{Z}$ također prebrojiv. Dokazi prebrojivosti, odnosno neprebrojivosti ostalih skupova brojeva nisu toliko jednostavni i nisu primjereni za sve učenike srednje škole, no nastavnik može izvrsnim učenicima preporučiti stručnu literaturu u kojoj su dokazane prebrojivosti i neprebrojivosti skupova brojeva kao što su predavanja iz kolegija *Teorija skupova* (vidi [10]). Posebno zainteresiranim učenicima može se ispričati o Hilbertovom hotelu u kojem se na jasan način pristupa teškim pojmovima vezanim uz prebrojivost i neprebrojivost. Dakle, nije nužno da učenici znaju sve o prebrojivosti i neprebrojivosti skupova. No, u srednjoj bi se školi svakako trebali susresti s tim važnim pojmovima.

Velik dio studenata matematike s nekim se važnim pojmovima iz teorije skupa po prvi put susreće na fakultetu. Na mnogim kolegijima na prvoj godini fakulteta osnovni je pojam funkcija. Za uvođenje pojma funkcije studenti moraju dobro baratati pojmovima iz teorije skupova. Kako bi to postigli, studenti bi se s teorijom skupova trebali susresti prije dolaska na fakultet, no ona i dalje nije dovoljno zastupljena u srednjoj školi da bi se s njom mogli koristiti bez poteškoća odmah po dolasku na fakultet.

Posljednja kritika u vezi skupova u nastavi matematike koju želimo ovdje istaknuti, nalazi se u članku [4]. Prema spomenutom članku, u školskim udžbenicima gomila se činjenični materijal. Autor članka smatra da ako količina nastavnog sadržaja nastavi rasti, tada bi se neki dio gradiva mogao proglasiti suvišnim. No, usprkos tome skupove ne smijemo izbaciti iz kurikluma. Matematičari moraju odrediti što je učenicima nužno i dovoljno za naučiti vezano uz teoriju skupova kako bi usvojili sve što je potrebno za njihov daljnji matematički razvoj te inzistirati da se to na primjeren način uvodi u nastavi matematike.

# Bibliografija


[1] F. M. Brückler, *Bit matematike je u njenoj slobodi*, Hrčak (2009).

[2] D. Ilišević i G. Muić, *Uvod u matematiku*, (2020), https://web.math.pmf.unizg.hr/~ilisevic/Slike/UMskripta.pdf.

[3] Godišnji izvedbeni kurikulum iz matematike za prvi razred srednje škole (140 sati godišnje), *Ministarstvo znanosti i obrazovanja*, (2020), https://mzo.gov.hr/UserDocsImages/dokumenti/GIKovi-9-10-2020/Matematika/GIK%20Matematika%201.%20r.%20SS%20140%20sati%202020-2021.docx.

[4] V. G. Kirin, *Što i kako sa skupovima?*, Matematika (1977), br. 2, 25–29.

[5] Kurikulumi nastavnih predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije i Matematika za srednje strukovne škole na razini 4.2., *Ministarstvo znanosti i obrazovanja*, (2019), https://mzo.gov.hr/UserDocsImages/dokumenti/Publikacije/Predmetni/Kurikulumi%20nastavnih%20predmeta%20Matematika%20za%20osnovne%20skole%20i%20gimnazije%20i%20Matematika%20za%20srednje%20strukovne%20skole%20na%20razini%204.2..pdf.

[6] Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj, *Ministarstvo znanosti i obrazovanja*, Narodne novine (2019), br. NN 7/2019, https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html.

[7] Nastavni plan i program za osnovnu školu, *Ministarstvo znanosti obrazovanja i športa*, (2006), https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/full/2006_09_102_2319.html.

[8] Nastavni program za gimnazije, *Ministarstvo kulture i prosvjete*, (1994), https://www.edusinfo.hr/Appendix/PLPREDUS_HR//PLPREDUS201Y1994T1H1463988290_12_1.pdf.

[9] Milana Vuković i Mladen Vuković, *U potrazi za skupovima*, Poučak (2010), br. 41, 61–67, 48–49.

[10] M. Vuković, *Teorija skupova, predavanja*, (2015), `https://www.pmf.unizg.hr/download/repository/TS-predavanja-2015.pdf`.

[11] Z. Šikić, *Neprebrojivost kontinuuma i nastanak teorije skupova*, Matematika (1987), br. 4, 7–21.

[12] ______, *Što su skupovi u školi*, Matematika (1989), br. 3, 19–30.

[13] Škola za život, *Ministarstvo znanosti i obrazovanja*, (2020), `https://skolazazivot.hr/o-projektu/eksperimentalne-skole/`.

# Sažetak

U ovom diplomskom radu dan je detaljan pregled i kritički osvrt nastavnih sadržaja vezanih uz teoriju skupova u osnovnoj i srednjoj školi nekada i danas. Također dan je i prijedlog pripreme za nekoliko sati obrade nastavnih sadržaja iz područja teorije skupova u srednjoj školi. Pojmovi iz teorije skupova prema novom kurikulumu prvi put se uvode u petom razredu osnovne škole. To je promjena koja je izazvala podijeljena mišljenja. Naime, skupovi su se nekada također obrađivali u petom razredu osnovne škole i to detaljnije nego danas pa su iz tog razloga bili u potpunosti izbačeni iz nastavnog programa. Vraćanjem teorije skupova u kurikulum nastavnog predmeta Matematike ponovno su se pojavili stari problemi. U različitim se udžbenicima za peti razred osnovne škole koriste primjeri skupova „iz života“, no takvi su skupovi naišli na neodobravanje od strane nekih stručnjaka iz razloga što se takvim skupovima matematičari nikada ne koriste.

Prvo poglavlje ukratko opisuje kurikularnu reformu općenito, a zatim daje pregled ishoda učenja vezanih uz skupove u osnovnoj školi te gimnaziji i četverogodišnjim strukovnim školama (sa 105/96 sati matematike godišnje ili više) prema aktualnom kurikulumu. Također, prikazan je pregled ishoda učenja iz starijih nastavnih planova i programa za osnovnu školu te gimnazije i četverogodišnje strukovne škole (sa 105/96 sati matematike godišnje ili više). Na kraju poglavlja uspoređeni su sadašnji i bivši kurikulumi i programi nastave matematike za osnovne i srednje škole u Republici Hrvatskoj.

Drugo poglavlje osvrće se na nastavne cjeline vezane uz skupove u aktualnim udžbenicima za osnovnu i srednju školu. Uspoređeni su načini na koje se obrađuju nastavni sadržaji vezani uz skupove u tri različita udžbenika za peti razred osnovne škole i u tri različita udžbenika za prvi razred gimnazije.

U trećem poglavlju dan je prijedlog pripreme za nekoliko nastavnih sati obrade nastavnih sadržaja vezanih uz teoriju skupova u prvom razredu srednje škole (gimnazije i četverogodišnje strukovne škole s 105/96 sati matematike godišnje).

S obzirom na to da je upravo teorija skupova doživjela najviše promjena u nastavi tijekom godina, u četvrtom poglavlju koristeći stručne članke dan je kritički osvrt na sadržaje iz teorije skupova koji su navedeni u postojećim kurikulumima matematike.

# Summary


In this thesis we review current and past programmes of study for mathematics regarding set theory in primary and secondary education. Also we have suggested a plan for theaching several classes regarding set theory in secondary education. Terms regarding set theory according to the new curriculum are first introduced in the fifth grade of primary school. This is a change that caused divided opinions. In the past, sets used to be taught in great detail in fifth grade of primary school, but because of that they were completly omitted from the programmes of study. By bringing back the set theory in the curriculum, old problems have reapeared. In diffrent textbooks for the fifth grade of primary school sets „from real life“ are used, but this kind of sets are not approved by the mathematics community because these kind of sets are not used in mathematics.

In the first chapter we describe the current curriculum and give an overview of learning outcomes regarding set theory in current programmes of study for mathematics in primary and secondary education. Then we give an overview of learning outcomes regarding set theory in some past programmes of study for mathematics in primary and secondary education. Lastly, we compare the current and the past programmes of study for mathematics in primary and secondary education in Croatia.

In the second paragraph we give an overview of teaching units in current textbooks for primary and secondary education. We compare the way certain programmes of study for mathematics regarding set theory are presented in three diffrent textbooks for primary education and in three diffrent textbooks for secondary education.

In the third paragraph we suggest a plan for theaching several classes regarding set theory in secondary education.

Considering that the set theory has gone through many changes in the curriculum, in the fourth chapter using articles we give a critical review of programmes of study for mathematics regarding set theory in current curriculum.

# Životopis

Rođena sam 13. svibnja 1996. u Varaždinu. Završila sam IV. osnovnu školu u Varaždinu te potom upisala opći smjer na Prvoj gimnaziji u Varaždinu. Nakon srednje škole upisala sam Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu gdje sam završila preddiplomski sveučilišni studij matematike, smjer nastavnički. Potom sam upisala diplomski sveučilišni studij matematike, smjer nastavnički također na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu.