SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Emilija Višić

METODA REKURZIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Ana Prlić

Zagreb, rujan 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj rad posvećujem svojoj obitelji, posebno svojim roditeljima koji su mi omogućili školovanje i bili najveća podrška. Zahvaljujem svojim prijateljicama koje su bile uz mene tijekom cijelog perioda studiranja. Posebna zahvala mojoj mentorici doc. dr. sc. Ani Prlić na pruženoj pomoći tijekom izrade ovog rada!

Sadržaj

Uvod

Metoda rekurzije kombinatorna je metoda koja se javlja u raznim matematičkim problemima. Rekurzija je relacija koja n–ti član nekog niza prikazuje pomoću njegovih prethodnika (za $n \in \mathbb{N}$). Primjenjiva je u raznim područjima matematike, posebice kombinatorici. Ovaj rad sadržava razne primjere u kojima se pojavljuju rekurzije.

U prvom poglavlju navedene su definicije i svojstva rekurzivnih relacija. Opisane su poznate rekurzije: aritmetički i geometrijski niz (uz riješene primjere). Riješeno je nekoliko kombinatornih problema primjenom metode rekurzije (uključujući problem poznat pod nazivom „Hanojski tornjevi").

U drugom poglavlju prikazani su načini rješavanja linearnih rekurzija s konstantnim koeficijentima. Opisan je postupak rješavanja linearne homogene rekurzije s konstantnim koeficijentima za različite i višestruke korijene. Navedeni su i koraci pri rješavanju linearnih nehomogenih rekurzija s konstantnim koeficijentima. U poglavlju se nalazi i opis primjene metode rekuzivnih relacija pri računanju determinanti n–tog reda.

Treće poglavlje posvećeno je brojevima koji su definirani rekurzivnom relacijom, a naziv su dobili po matematičaru Leonardu iz Pise. Opisan je „Problem zečeva" i njegovo rješenje kojim se dolazi do rekurzivne relacije koja opisuje Fibonaccijeve brojeve. Dokazano je nekoliko svojstava Fibonaccijevih brojeva i Binetova formula. Riješeno je nekoliko primjera u kojima se primjenjuju Fibonaccijevi brojevi.

U idućem, četvrtom poglavlju opisana su i riješena tri problema vezana za Catalanove brojeve. Matematičari Leonhard Euler i Johann Andreas von Segner bavili su se problemom triangulacije konveksnog n–terokuta i time otkrili rekurzivnu relaciju koja je kasnije naziv dobila po matematičaru Eugenu Charlesu Catalanu.

Posljednje, peto poglavlje posvećeno je zadacima sa srednjoškolskih natjecanja u kojima se primjenjuje metoda rekurzije. Zadaci obuhvaćaju školsko, županijsko i državno natjecanje iz matematike za četvrti razred srednje škole. Prikazana su detaljna rješenja zadataka.

Poglavlje 1

Uvod u rekurzivne relacije

Na početku rada definirat ćemo rekurzivnu relaciju i navesti njezina osnovna svojstva. Definicije i svojstva preuzeti su iz izvora [4] .

Definicija 1.0.1. *Neka je definiran niz brojeva* (a_n). *Tada* ***rekurzivnom relacijom*** *zovemo svaku relaciju koja elemente niza izražava pomoću njihovih prethodnika (elemenata s manjim vrijednostima indeksa).*

Definicija 1.0.2. *Rekurzivna relacija koja elemente niza izražava pomoću fiksnog broja prethodnika (za neki fiksni* $k \in \mathbb{N}$ *proizvoljni element niza* a_n *izražava pomoću* $a_{n-1}, \ldots, a_{n-k}$*) zove se rekurzivna relacija* ***konačne prošlosti****. Rekurzivna relacija koja elemente niza izražava pomoću svih svojih prethodnika zove se rekurzivna relacija* ***beskonačne prošlosti****.*

Za računanje elemenata niza korištenjem rekurzivne relacije potrebno je znati **početne uvjete**, odnosno vrijednosti elemenata niza za neke vrijednosti indeksa. Najčešće su to prvi elementi niza. U rekurzivnim relacijama konačne prošlosti za početne uvjete uzimamo prvih k vrijednosti niza, npr. $a_1, a_2, \ldots, a_k$, a u rekurzivnim relacijama beskonačne prošlosti prvi element niza. Početni uvjeti su ili zadani ili ih se dobije jednostavnim računom.

1.1 Poznate rekurzije

Artimetički niz

Definicija 1.1.1. *Niz brojeva* (a_n) *je* ***aritmetički niz*** *ako mu je razlika susjednih članova konstantna, tj. ako postoji realni broj d takav da je* $a_n - a_{n-1} = d,\ n \geq 2$. *Broj d nazivamo* ***razlika ili diferencija niza****. ([8], str. 89)*

Kod aritmetičkog niza početni uvjeti su prvi član a_1 i diferencijal d. Ostale članove niza određujemo rekurzivno: $a_2 = a_1 + d, a_3 = a_2 + d$, itd., odnosno vrijedi:

$$a_n = a_{n-1} + d, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Budući da prema definiciji vrijedi $a_{n+2} - a_{n+1} = d$ i $a_{n+1} - a_n = d$, slijedi da je

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2},$$

odnosno svaki član aritmetičkog niza je aritmetička sredina njemu susjednih članova. Zbog navedenog svojstva ovaj niz je i dobio naziv aritmetički niz. Iz prethodne jednakosti dobivamo rekurzivnu relaciju

$$a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n,$$

odnosno vrijedi da svaki član niza možemo odrediti i pomoću njemu prethodna dva člana. Prema tome, početni uvjeti aritmetičkog niza kao rekurzije mogu biti i prva dva člana niza.

Primjer 1.1.2. *Odredite opći član aritmetičkog niza i izračunajte stoti član ako su zadana prva dva člana niza:* $-3, -\frac{5}{2}$.

Rješenje: Imamo zadano $a_1 = -3$ i $a_2 = -\frac{5}{2}$. Slijedi da je $d = -\frac{5}{2} - (-3) = \frac{1}{2}$. Prema tome opći član niza jednak je:

$$a_n = a_{n-1} + d = (a_{n-2} + d) + d = \ldots = a_1 + (n-1)d = -3 + (n-1)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}n - \frac{7}{2}.$$

Još nam preostaje odrediti stoti član niza:

$$a_{100} = -3 + (100 - 1)\frac{1}{2} = \frac{93}{2}.$$

Napomena 1.1.3. *Iz prethodnog primjera vidimo da je opći član aritmetičkog niza jednak:*

$$a_n = a_{n-1} + d = (a_{n-2} + d) + d = ... = a_1 + (n-1)d.$$

Geometrijski niz

Definicija 1.1.4. ***Geometrijski niz*** *je niz u kojemu je omjer svakog člana (osim prvog) i člana ispred njega stalan i iznosi:* $q = \frac{a_{n+1}}{a_n}$. *Broj* q *naziva se* ***kvocijent*** *ili* ***količnik geometrijskoga niza****. ([8], str. 96)*

Da bi geometrijski niz bio određen, potrebno je znati prvi član a_1 i kvocijent q. Ostale članove određujemo rekurzivno:

$$a_n = qa_{n-1}.$$

U geometrijskom nizu vrijedi da je svaki član geometrijska sredina njemu susjednih članova, odnosno:

$$a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}.$$

Zbog prethodnog svojstva niz je dobio naziv geometrijski niz.

Primjer 1.1.5. *Napiši sljedeća četiri člana geometrijskog niza ako je $a_1 = 2\sqrt{2}$ i $q = \sqrt{2}$.*

Rješenje: Primjenom formule za opći član geometrijskog niza $a_n = qa_{n-1}$ dobivamo:

$$\begin{aligned} a_2 &= qa_1 = \sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4 \\ a_3 &= qa_2 = \sqrt{2} \cdot 4 = 4\sqrt{2} \\ a_4 &= qa_3 = \sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 8 \\ a_5 &= qa_4 = \sqrt{2} \cdot 8 = 8\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Napomena 1.1.6. *Sređivanjem formule za opći član geometrijskog niza dobivamo:*

$$a_n = qa_{n-1} = q(qa_{n-2}) = q^2a_{n-2} = q^2(qa_{n-3}) = q^3a_{n-3} = \ldots = q^{n-1}a_1.$$

1.2 Primjena rekurzije u zadacima

Podjela ravnine pravcima

Primjer 1.2.1. *Neka je u ravnini zadano n pravaca $p_1, p_2, \ldots, p_n$ u općem položaju (nema paralelnih i nikoja tri ne prolaze istom točkom) i neka je $D_2(n)$ broj dijelova na koje ti pravci dijele ravninu. Koliki je $D_2(n)$? ([7], str. 151)*

Rješenje: Primjer se može riješiti na dva različita načina: metodom matematičke indukcije i metodom rekurzije. Prikazat ćemo rješenje metodom rekurzije. Da bismo odredili broj dijelova $D_2(n)$, rastavit ćemo ga na broj dijelova $D_2(n-1)$, odnosno broj dijelova na koje $n-1$ pravaca dijeli ravninu i broj „novih" dijelova ravnine koje dobijemo dodavanjem n–tog pravca. Naime, n–ti pravac siječe prethodnih $(n-1)$ pravaca u $(n-1)$ točaka, čime dobivamo n novih dijelova ravnine. Slijedi rekurzivna relacija:

$$D_2(n) = D_2(n-1) + n,$$

odnosno:

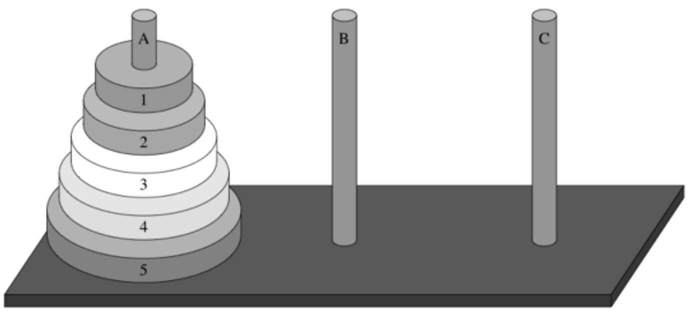
$$\begin{aligned}
D_2(2) &= D_2(1) + 2\\
D_2(3) &= D_2(2) + 3\\
D_2(4) &= D_2(3) + 4\\
&\vdots\\
D_2(n-1) &= D_2(n-2) + n - 1\\
D_2(n) &= D_2(n-1) + n
\end{aligned}$$

Zbrajanjem prethodnih jednakosti dobivamo:

$D_2(n) = D_2(1) + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + (n-1) + n = 1 + (1 + \ldots + n) = 1 + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n+2}{2}$.

„Hanojski tornjevi”

Primjer 1.2.2. *Na jednom od triju štapova A, B, C, npr. na A, nalazi se n kolutova različite veličine nanesenih tako da je svaki kolut (osim najnižeg) manji od onog ispod njega (vidi Sliku 1.1). Sve kolutove treba premjestiti na štap B, tako da i tamo budu u istom položaju. Pritom se kolutovi prenose sa štapa na štap tako da se svaki put prenese samo jedan kolut i da se nikad veći kolut ne stavi na manji. Pritom se možemo koristiti trećim štapom C. Nađite rekurzivnu formulu za najmanji potrebni broj prijenosa kolutova da se provede premještaj s A na B i odredite taj broj. ([10], str. 174)*



Slika 1.1: „Hanojski tornjevi”

Rješenje: Neka je $N(n)$ minimalni broj premještaja kolutova sa štapa A na štap B. Očito je da vrijedi $N(0) = 0$ i $N(1) = 1$. Neka je $n \geq 2$. Da bismo mogli s A izvaditi n–ti (najdonji) kolut, prethodno moramo premjestiti ostalih $n - 1$ kolutova na B i C. Budući da n–ti kolut ne smije stajati na nekom manjem kolutu, odnosno mora biti stavljen prvi na štap B, moramo prethodno prvih $n - 1$ kolutova premjestiti na štap C. Za to je potrebno $N(n - 1)$ premještaja. Nakon toga možemo n–ti kolut staviti na štap B i time imamo $N(n - 1) + 1$ premještaja. Sada moramo $n - 1$ kolutova sa štapa C prenijeti na štap B uz pomoć štapa A. Za to treba još $N(n - 1)$ premještaja. Prema tome, slijedi:

$$N(n) = (N(n - 1) + 1) + N(n - 1) = 2N(n - 1) + 1.$$

Ponavljanjem prethodnih koraka za preostale kolutove dobivamo:

$N(n) = 2N(n-1)+1 = 2(2N(n-2)+1)+1 = 2^2N(n-2)+2+1 = 2^2(2N(n-3)+1)+2+1 = 2^3N(n-3) + 2^2 + 2 + 1 = \ldots = 2^nN(0) + 2^{n-1} + \ldots + 2 + 1 = 2^{n-1} + \ldots + 2 + 1 = 2^n - 1.$

Suma k-tih potencija prvih n prirodnih brojeva

Primjer 1.2.3. *Neka je $S_k(n)$ suma k-tih potencija prvih n prirodnih brojeva, gdje je $k \in \mathbb{N}_0$. Promatrajući niz suma $S_0(n), S_1(n), S_2(n), \ldots, S_{k-1}(n)$, odredite sumu $S_k(n)$.*

Rješenje: Očito je da je $S_0(n) = n$. Odredimo najprije sumu $S_1(n)$. Vrijedi:

$$S_1(n) = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n$$
$$S_1(n) = n + (n - 1) + (n - 2) + \ldots + 2 + 1.$$

Zbrajanjem prethodnih jednakosti dobivamo:

$$2S_1(n) = (n + 1) + (n + 1) + (n + 1) + \ldots + (n + 1) + (n + 1) = n(n + 1),$$

odnosno:

$$S_1(n) = \frac{1}{2}n(n + 1).$$

Odredimo sad $S_2(n)$, odnosno sumu kvadrata prvih n prirodnih brojeva. Promotrimo jednakost:

$$(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1. \tag{1.1}$$

Uvrstimo u (1.1) redom $n = 1, 2, 3, \dots, n-1, n$:

$$\begin{aligned}
2^3 &= 1^3 + 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1\\
3^3 &= 2^3 + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1\\
4^3 &= 3^3 + 3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1\\
&\vdots\\
n^3 &= (n-1)^3 + 3\cdot(n-1)^2 + 3\cdot(n-1) + 1\\
(n+1)^3 &= n^3 + 3\cdot n^2 + 3\cdot n + 1
\end{aligned}$$

Zbrajanjem dobivenih jednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned}
S_3(n+1) - 1 &= S_3(n) + 3S_2(n) + 3S_1(n) + S_0(n)\\
S_3(n) + (n+1)^3 - 1 &= S_3(n) + 3S_2(n) + 3S_1(n) + S_0(n)\\
(n+1)^3 - 1 &= 3S_2(n) + 3S_1(n) + S_0(n).
\end{aligned}$$

Slijedi jednakost:

$$S_2(n) = \frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{3} - S_1(n) - \frac{1}{3}S_0(n).$$

Vidimo da se suma $S_2(n)$ izražava preko prethodnih suma $S_1(n)$ i $S_0(n)$. Te sume smo već odredili pa uvrštavanjem i sređivanjem izraza dobivamo:

$$S_2(n) = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Sumu $S_3(n)$ dobivamo analognim računom kao sumu $S_2(n)$. Sada promatramo jednakost:

$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1.$$

Prethodno napisanu jednakost napišemo redom za $n = 1, 2, 3, \dots, n-1, n$. Dobivene jednakosti zbrojimo i dobivamo izraz:

$$(n+1)^4 - 1 = 4S_3(n) + 6S_2(n) + 4S_1(n) + S_0(n).$$

Slijedi:

$$S_3(n) = \frac{1}{4}(n+1)^4 - \frac{1}{4} - \frac{3}{2}S_2(n) - S_1(n) - \frac{1}{4}S_0(n).$$

Uočimo da se suma $S_3(n)$ izražava preko prethodnih suma $S_2(n), S_1(n)$ i $S_0(n)$, a te sume smo već izračunali pa dobivamo izraz:

$$S_3(n) = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2.$$

Na analogan način izračunali bismo sume $S_k(n)$ za svaki $k \in \mathbb{N}_0$. Pri računanju se koristimo pomoćnim izrazom koji slijedi iz binomne formule:

$$(n+1)^{k+1} = n^{k+1} + \binom{k+1}{1} n^k + \binom{k+1}{2} n^{k-1} + \ldots + \binom{k+1}{1} n + 1.$$

Uvrštavanjem brojeva $n = 1, 2, \ldots, n-1, n$ redom u prethodni izraz, zbrajanjem dobivenih jednakosti i sređivanjem konačnog zbroja dobivamo:

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}(n+1)^{k+1} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2} k S_{k-1}(n) - \ldots - S_1(n) - \frac{1}{k+1} S_0(n). \tag{1.2}$$

Iz jednakosti (1.2) vidimo da se suma $S_k(n)$ može izračunati pomoću prethodnih suma $S_{k-1}(n), \ldots, S_1(n), S_0(n)$. Time smo dobili rekurzivnu relaciju među sumama $S_k(n)$, $k \in \mathbb{N}_0$.

Poglavlje 2

Linearne rekurzije

2.1 Linearne homogene rekurzije s konstantnim koeficijentima

Ne postoji opća metoda koja daje rješenja svake rekurzivne relacije, ali postoje metode koje rješavaju neke klase takvih relacija. Primjer jedne takve klase su linearne homogene rekurzivne relacije s konstantim koeficijentima.

Definicija 2.1.1. ***Linearna homogena rekurzija s konstantnim koeficijentima reda*** *r za niz $(a_n)_{n\geq 0}$ realnih ili kompleksnih brojeva je rekurzija oblika:*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_r a_{n-r}, \quad n \geq r, \tag{2.1}$$

gdje su $c_1, c_2, \ldots, c_r$ zadane konstante i $c_r \neq 0$. ([9], str.122)

Uočimo da se u rekurziji (2.1) pojavljuju samo prve potencije od a i da nema konstantnih članova. To objašnjava naziv „linearna homogena” rekurzija. Lako se pokaže da skup rješenja rekurzije (2.1) čini linearni (vektorski) prostor (nad $\mathbb{C}$), odnosno vrijedi tvrdnja: ako su $(a_n^{'})$ i $(a_n^{''})$ dva niza koja zadovoljavaju (2.1) i $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, onda i niz $(\lambda(a_n^{'}) + \mu(a_n^{''}))$ također zadovoljava (2.1). Lako uočavamo da je jedno rješenje jednakosti (2.1) $a_n = 0$. Njega nazivamo „nul-rješenje”. U nastavku ćemo opisati postupak za nalaženje općeg rješenja rekurzivne relacije (2.1).

Napomena 2.1.2. *Ukoliko promatramo rješenja rekurzije (2.1) uz fiksirane početne uvjete $a_i = b_i, \quad i \in \{0 \ldots, r-1\}$, onda skup rješenja (osim u trivijalnom slučaju) neće biti vektorski prostor.*

Postupak rješavanja linearne homogene rekurzije s konstantnim koeficijentima

Po uzoru na Fibonaccijevu rekurziju $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, kao jednu od najjednostavnijih primjera linearnih homogenih rekurzivnih relacija, rješenje rekurzije (2.1) tražit ćemo u obliku $a_n = x^n$, za $x \neq 0$. Uvrstimo $a_n = x^n$ u rekurziju (2.1) i nakon sređivanja dobivamo:

$$x^n - c_1x^{n-1} - c_2x^{n-2} - \ldots - c_rx^{n-r} = 0 / : x^{n-r}$$
$$x^r - c_1x^{r-1} - c_2x^{r-2} - \ldots - c_r = 0. \tag{2.2}$$

Jednakost (2.2) zovemo **karakteristična jednadžba** rekurzivne relacije (2.1). Ona ima r korijena $x_1, x_2, \ldots, x_r, \quad i \in \mathbb{C},\ i \in \{1, \ldots, r\}$, koji se zovu **karakteristični korijeni** jednadžbe (2.1). Zbog $c_r \neq 0$ svi karakteristični korijeni su različiti od nule. Za $x \in \mathbb{C}$, $x \neq 0$, vrijedi da je karakteristični korijen od (2.1) ako i samo ako je $a_n = x^n$ rješenje od (2.1).

Budući da je skup svih rješenja od (2.1) vektorski prostor (nad $\mathbb{C}$), slijedi tvrdnja: ako su $x_1, x_2, \ldots, x_r$ karakteristični korijeni od (2.1) i $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ konstante, onda je

$$a_n = \lambda_1x_1^n + \lambda_2x_2^n + \ldots + \lambda_rx_r^n \tag{2.3}$$

rješenje od (2.1).

Karakteristična jednadžba može imati r različitih korijena ili višestruke korijene. Opisat ćemo postupak određivanja rješenja za oba slučaja.

Različiti korijeni

Teorem 2.1.3. *Pretpostavimo da su svi karakteristični korijeni $x_1, x_2, \ldots, x_r$ rekurzivne relacije*

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ra_{n-r}, \quad c_r \neq 0, \quad n \geq r,$$

međusobno različiti. Tada je opće rješenje dano s

$$a_n = \lambda_1x_1^n + \lambda_2x_2^n + \ldots + \lambda_rx_r^n.$$

([10], str.182)

Dokaz. Neka je a_n neko rješenje rekurzivne relacije. Tada je a_n potpuno određen početnim uvjetima $a_0 = b_0,\ a_1 = b_1, \ldots,\ a_{r-1} = b_{r-1}$. Pokažimo da možemo odabrati konstante

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ tako da vrijedi:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_r &= b_0 \\ \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_r x_r &= b_1 \\ &\vdots \\ \lambda_1 x_1^{r-1} + \lambda_2 x_2^{r-1} + \ldots + \lambda_r x_r^{r-1} &= b_{r-1}. \end{aligned}$$

Dobili smo sustav r linearnih jednadžbi s r nepoznanica $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$. Pripadna matrica koeficijenata tog sustava je:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_r \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{r-1} & x_2^{r-1} & \ldots & x_r^{r-1} \end{bmatrix},$$

a poznata je pod nazivom **Vandermondeova matrica**. Njena determinanta je produkt

$$\prod_{1 \le i < j \le r} (x_j - x_i)$$

svih $\binom{r}{2}$ razlika oblika $x_j - x_i$, $1 \le i < j \le r$. Budući da su prema pretpostavci svi karakteristični korijeni $x_1, x_2, \dots, x_r$ međusobno različiti, ta determinanta je različita od nule. Prema tome, prethodni sustav ima jedinstveno rješenje po $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$. Preostaje još pokazati da je tada $a_n = \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \ldots + \lambda_r x_r^n$, a to ćemo dokazati metodom matematičke indukcije. Uvrštavanjem $n = 0, 1, \dots, r-1$ tvrdnja vrijedi zbog $a_0 = b_0, \dots, a_{r-1} = b_{r-1}$. Time je provjerena baza indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neke $n-r, n-r+1, \dots, n-2, n-1$, gdje je $n \in \mathbb{N}, n \ge r$, tj.:

$$\begin{aligned} a_{n-r} &= \lambda_1 x_1^{n-r} + \lambda_2 x_2^{n-r} + \ldots + \lambda_r x_r^{n-r} \\ a_{n-r+1} &= \lambda_1 x_1^{n-r+1} + \lambda_2 x_2^{n-r+1} + \ldots + \lambda_r x_r^{n-r+1} \\ &\vdots \\ a_{n-2} &= \lambda_1 x_1^{n-2} + \lambda_2 x_2^{n-2} + \ldots + \lambda_r x_r^{n-2} \\ a_{n-1} &= \lambda_1 x_1^{n-1} + \lambda_2 x_2^{n-1} + \ldots + \lambda_r x_r^{n-1}. \end{aligned}$$

Provjerimo vrijedi li tada tvrdnja i za n:

$$\begin{aligned} a_n &= c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_r a_{n-r} = \\ &= c_1 \left(\lambda_1 x_1^{n-1} + \ldots + \lambda_r x_r^{n-1}\right) + c_2 \left(\lambda_1 x_1^{n-2} + \ldots + \lambda_r x_r^{n-2}\right) + \ldots + c_r \left(\lambda_1 x_1^{n-r} + \ldots + \lambda_r x_r^{n-r}\right) = \\ &= \lambda_1 \left(c_1 x_1^{n-1} + \ldots + c_r x_1^{n-r}\right) + \lambda_2 \left(c_1 x_2^{n-1} + \ldots + c_r x_2^{n-r}\right) + \ldots + \lambda_r \left(c_1 x_r^{n-1} + \ldots + c_r x_r^{n-r}\right) = \\ &= \lambda_1 x_1^n + \lambda_2 x_2^n + \ldots + \lambda_r x_r^n. \end{aligned}$$

S obzirom da vrijedi baza indukcije i iz pretpostavke da tvrdnja vrijedi za neke $n-r, n-r+1, \dots, n-2, n-1, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq r$ slijedi da vrijedi i za prirodni broj n, prema aksiomu matematičke indukcije slijedi da tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n. □

Primjer 2.1.4. *Riješite rekurziju $a_n = a_{n-1} + 9a_{n-2} - 9a_{n-3}$ uz početne uvjete $a_0 = 0,\ a_1 = 1$ i $a_2 = 2$.*

Rješenje: Uvođenjem supstitucije $a_n = x^n$ u zadanu rekurziju i sređivanjem dobivamo karakterističnu jednadžbu:

$$x^3 - x^2 - 9x + 9 = 0.$$

Kubna jednadžba ekvivalentna je izrazu $(x-1)(x^2-9) = 0$ iz kojeg odmah vidimo da su karakteristični korijeni: $x_1 = 1,\ x_2 = -3$ i $x_3 = 3$. Uvrštavanjem karakterističnih korijena i konstanti $\lambda_i,\ i = 1, 2, 3$, dobivamo opću jednadžbu rekurzije:

$$a_n = \lambda_1 1^n + \lambda_2(-3)^n + \lambda_3 3^n.$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta u opću jednadžbu rekurzije dobivamo sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= 0, \\
\lambda_1 - 3\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 1, \\
\lambda_1 + 9\lambda_2 + 9\lambda_3 &= 2.
\end{aligned}$$

Rješavanjem sustava dobivamo konstante: $\lambda_1 = -\frac{1}{4},\ \lambda_2 = -\frac{1}{12}$ i $\lambda_3 = \frac{1}{3}$ i time konačno rješenje rekurzije:

$$a_n = -\frac{1}{4} - \frac{1}{12} \cdot (-3)^n + \frac{1}{3} \cdot 3^n.$$

Napomena 2.1.5. *Ukoliko korijeni $x_1, x_2, \dots, x_r$ nisu svi međusobno različiti, (2.3) nije opće rješenje rekurzivne relacije (2.1). Promotrimo sljedeći primjer.*

Primjer 2.1.6. *Promotrimo rekurziju $a_n = -2a_{n-1} - a_{n-2}$ s početnim uvjetima: $a_0 = 1$ i $a_1 = 3$.*

Rješenje: Analogno kao u Primjeru 2.1.4, uvodimo supstituciju $a_n = x^n$ i dobivamo karakterističnu jednadžbu:

$$x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Lako uočavamo da izraz možemo zapisati u obliku $(x+1)^2 = 0$ i da je karakteristični korijen $x = -1$ kratnosti 2. Uvrštavanjem u (2.3) dobili bismo:

$$a_n = \lambda_1 \cdot (-1)^n + \lambda_2 \cdot (-1)^n = (\lambda_1 + \lambda_2)(-1)^n = \lambda \cdot (-1)^n,\ \lambda = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Uvrštavajući početne uvjete dobivamo sustav:

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ -\lambda = 3 \end{cases},$$

za koji vidimo da nema rješenja. Dakle, $a_n = \lambda \cdot (-1)^n$ nije opće rješenje rekurzije. U nastavku ćemo pokazati postupak rješavanja rekurzivnih relacija s višestrukim korijenima.

Višestruki korijeni

Promotrimo rekurziju

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_r a_{n-r}, \quad c_r \neq 0, \ n \geq r, \tag{2.4}$$

čija je karakteristična jednadžba

$$p(x) = x^r - c_1 x^{r-1} - c_2 x^{r-2} - \ldots - c_r = 0.$$

Radi jednostavnosti zapisa i računanja pretpostavimo da je x_0 trostruki korijen jednadžbe $p(x) = 0$. U slučaju da je x_0 k–struki korijen, gdje je $k \geq 2$, zaključak i dokaz bi bio isti, samo je zapis nešto kompliciraniji. Tada polinom možemo zapisati kao $p(x) = (x-x_0)^3 q(x)$, za neki polinom q. Vrijedi da je, za $n \geq r$, x_0 trostruki korijen polinoma

$$p_n(x) = x^{n-r} p(x) = x^n - c_1 x^{n-1} - c_2 x^{n-2} - \ldots - c_r x^{n-r}.$$

Tada je x_0 dvostruki korijen derivacije polinoma $p_n(x)$:

$$p_n'(x) = n x^{n-1} - (n-1) c_1 x^{n-2} - (n-2) c_2 x^{n-3} - \ldots - (n-r) c_r x^{n-r-1}$$

i polinoma:

$$x p_n'(x) = n x^n - (n-1) c_1 x^{n-1} - (n-2) c_2 x^{n-2} - \ldots - (n-r) c_r x^{n-r}.$$

Specijalno, vrijedi:

$$n x_0^n = c_1 (n-1) x_0^{n-1} + c_2 (n-2) x_0^{n-2} + \ldots + c_r (n-r) x_0^{n-r}$$

i odatle slijedi da je $a_n = n x_0^n$ rješenje od (2.4). Budući da je x_0 dvostruki korijen od $x p_n'(x)$, onda je i korijen derivacije tog polinoma:

$$(x p_n'(x))' = n^2 x^{n-1} - c_1 (n-1)^2 x^{n-2} - c_2 (n-2)^2 x^{n-3} - \ldots - c_r (n-r)^2 x^{n-r-1}$$

pa stoga i korijen polinoma dobivenog množenjem sa x:

$$x (x p_n'(x))' = n^2 x^n - c_1 (n-1)^2 x^{n-1} - c_2 (n-2)^2 x^{n-2} - \ldots - c_r (n-r)^2 x^{n-r}.$$

Specijalno je:

$$n^2x_0^n = c_1(n-1)^2x_0^{n-1} + c_2(n-2)^2x_0^{n-2} + \ldots + c_r(n-r)^2x_0^{n-r}$$

pa je $a_n = n^2x_0^n$ također rješenje rekurzivne relacije (2.4). Dakle, ako je x_0 trostruki korijen karakteristične jednadžbe, onda su $a_n = x_0^n$, $a_n = nx_0^n$ i $a_n = n^2x_0^n$ rješenja od (2.4).

Općenito, ako je x_0 k–struki korijen karakteristične jednadžbe, onda su $a_n = x_0^n, a_n = nx_0^n, \ldots, a_n = n^{k-1}x_0^n$ rješenja od (2.4). Uočimo da su i sve njihove linearne kombinacije također rješenja rekurzivne relacije (2.4).

Teorem 2.1.7. *Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_t$ svi različiti korijeni karakteristične jednadžbe rekurzivne relacije*

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ra_{n-r}, \quad c_r \neq 0,\ n \geq r,$$

te neka je x_i korijen kratnosti k_i, za $i = 1, 2, \ldots, t$. Tada je partikularno rješenje te rekurzije, koje odgovara korijenu x_i, $i = 1, 2, \ldots, t$, dano sa

$$a_n^{(i)} = \lambda_1^{(i)}x_i^n + \lambda_2^{(i)}nx_i^n + \ldots + \lambda_{k_i}^{(i)}n^{k_i-1}x_i^n = (\lambda_1^{(i)} + \lambda_2^{(i)}n + \ldots + \lambda_{k_i}^{(i)}n^{k_i-1})x_i^n,$$

gdje su $\lambda_j^{(i)}$ neke kontante. Opće rješenje te rekurzije dano je sa $a_n = a_n^{(1)} + a_n^{(2)} + \ldots + a_n^{(t)}$. ([10], str. 186)

Dokaz. Analogno, kao u diskusiji prije Teorema 2.1.7, vidimo da, ako je x_i k_i–struki korijen karakteristične jednadžbe, onda su svi $\lambda_j^{(i)}n^{j-1}x_i^n$, $1 \leq i \leq t$, $1 \leq j \leq k_i$, rješenja rekurzije. Budući da su linearne kombinacije rješenja opet rješenja te rekurzije, slijedi da je $a_n = a_n^{(1)} + a_n^{(2)} + \ldots + a_n^{(t)}$ također rješenje. Neka je a_n neko opće rješenje. Tada je a_n potpuno određen uvjetima $a_0 = b_0,\ a_1 = b_1, \ldots,\ a_{r-1} = b_{r-1}$. Treba pokazati da možemo odabrati r konstanti $\lambda_j^{(i)}$, $i \in \{1, 2, \ldots, t\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, k_i\}$, uz uvjet $k_1 + k_2 + \ldots + k_t = r$, tako da vrijede gornji početni uvjeti. To nam daje r linearnih jednadžbi s r nepoznanica, a determinanta tog sustava je jednaka:

$$D=\begin{vmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ x_1 & x_1 & \ldots & x_1 \\ x_1^2 & 2x_1^2 & \ldots & 2^{k_1-1}x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{r-1} & \ldots & \ldots & (r-1)^{k_1-1}x_1^{r-1} \end{matrix}}^{k_1} & \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ x_2 & x_2 & \ldots & x_2 \\ x_2^2 & 2x_2^2 & \ldots & 2^{k_2-1}x_2^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_2^{r-1} & \ldots & \ldots & (r-1)^{k_2-1}x_2^{r-1} \end{matrix}}^{k_2} & \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ x_t & x_t & \ldots & x_t \\ x_t^2 & 2x_t^2 & \ldots & 2^{k_t-1}x_t^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_t^{r-1} & \ldots & \ldots & (r-1)^{k_t-1}x_t^{r-1} \end{matrix}}^{k_t} \end{vmatrix}.$$

Uočimo da se determinanta za $k_1 = k_2 = \ldots = k_t = 1$ podudara s Vandermondeovom determinantom i zato se naziva **generalizirana Vandermondeova determinanta**. Ta je determinanta jednaka ([10], str. 186):

$$D = \prod_{i=1}^{t} (-x_i)^{\binom{k_i}{2}} \prod_{1 \le i < j \le t} (x_j - x_i)^{k_i k_j}.$$

Budući da su brojevi $x_1, x_2, \ldots, x_t$ svi različiti od nule, vrijedi da je $D \neq 0$ i slijedi da sustav jednadžbi ima jedinstveno rješenje po $\lambda_j^{(i)}$. Ostatak dokaza provodi se analogno kao u dokazu Teorema 2.1.3 i time je tvrdnja teorema dokazana. □

Primjer 2.1.8. *Riješite rekurzivnu relaciju* $a_n = -2a_{n-2} - a_{n-4}, \quad n \geq 4$*, uz početne uvjete* $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3$.

Rješenje: Supstitucijom $a_n = x^n$ i dijeljenjem s x^{n-4} dobivamo karakterističnu jednadžbu:

$$x^4 + 2x^2 + 1 = 0 \iff (x^2 + 1)^2 = 0.$$

Lako uočavamo da su karakteristični korijeni $x_1 = i, x_2 = -i$ kratnosti 2. Prema tome, partikularno rješenje rekurzije koje odgovara korijenu $a_1 = i$ je:

$$a_n^{(1)} = \lambda_1 \cdot i^n + \lambda_2 \cdot n \cdot i^n,$$

a partikularno rješenje koje odgovara korijenu $x_2 = -i$ je:

$$a_n^{(2)} = \lambda_3 \cdot (-i)^n + \lambda_4 \cdot n \cdot (-i)^n.$$

Opće rješenje rekurzije je:

$$a_n = a_n^{(1)} + a_n^{(2)} = \lambda_1 \cdot i^n + \lambda_2 \cdot n \cdot i^n + \lambda_3 \cdot (-i)^n + \lambda_4 \cdot n \cdot (-i)^n.$$

Potrebno je još odrediti konstante $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, a to ćemo uz pomoć početnih uvjeta, rješavajući sustav 4 jednadžbe s 4 nepoznanice:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_3 &= 0, \\ \lambda_1 i + \lambda_2 i - \lambda_3 i - \lambda_4 i &= 1, \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 - \lambda_3 - 2\lambda_4 &= 2, \\ -\lambda_1 i - 3\lambda_2 i + \lambda_3 i + 3\lambda_4 i &= 3. \end{aligned}$$

Dobivamo: $\lambda_1 = -\frac{3}{2}i$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2} + i$, $\lambda_3 = \frac{3}{2}i$ i $\lambda_4 = -\frac{1}{2} - i$. Dakle, konačno rješenje rekurzije je:

$$a_n = -\frac{3}{2}i^{n+1} + (-\frac{1}{2} + i)ni^n + \frac{3}{2}i(-i)^n + (-\frac{1}{2} - i)n(-i)^n.$$

2.2 Linearne nehomogene rekurzije s konstantnim koeficijentima

Definicija 2.2.1. ***Linearna nehomogena rekurzija s konstantnim koeficijentima*** *je rekurzija oblika*

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_r a_{n-r} + f(n), \quad n \geq r \tag{2.5}$$

gdje je $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ zadana funkcija. ([9], str. 126)

Izostavljanjem člana $f(n)$ u (2.5) dobivamo **pripadnu homogenu rekurziju** rekurzije (2.5). Osnovna ideja rješavanja linearne nehomogene rekurzije jest da se nađe rješenje pripadne homogene rekurzije i da mu se doda neko **partikularno rješenje nehomogene rekurzije**. Dobiveni zbroj je **opće rješenje** rekurzije (2.5).

Propozicija 2.2.2. *Svako rješenje linearne nehomogene rekurzije s konstantnim koeficijentima je zbroj općeg rješenja pripadne homogene rekurzije i partikularnog rješenja nehomogene rekurzije. ([9], str. 126)*

Dokaz. Neka je a_n' neko partikularno rješenje od (2.5). Tada je $a_n - a_n'$ rješenje pripadne homogene rekurzije. Zbog Teorema 2.1.7 možemo ga zapisati kao opće rješenje a_n^H, za neki izbor konstanti λ_{ij}. Dakle, vrijedi da je $a_n = a_n^H + a_n'$. Time smo dokazali tvrdnju propozicije. □

Koraci pri rješavanju linearne nehomogene rekurzije s konstantnim koeficijentima

Opisat ćemo glavne korake pri rješavanju linearne nehomogene rekurzije. Pri tom ćemo dati i upute za nalaženje partikularnih rješenja, ovisno o obliku funkcije $f(n)$, organiziranih u Tablicu 2.1. Koraci i Tablica 2.1 preuzeti su iz izvora ([1]).

1. korak: Odredimo opće rješenje a_n^H pripadne homogene relacije $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_r a_{n-r}$ po postupku za rješavanje homogene linearne rekurzije. Pri tom ne računamo neodređene koeficijente λ_{ij}.
2. korak: Odredimo, odnosno iščitamo iz Tablice 2.1, partikularno rješenje a_n^P nehomogene rekurzije (prema obliku funkcije $f(n)$).
3. korak: Uvrstimo a_n^P u nehomogenu rekurziju kako bismo odredili neodređene koeficijente u a_n^P.
4. korak: Opće rješenje nehomogene rekuzije zapišemo u obliku $a_n^H + a_n^P$.
5. korak: Početne uvjete iskoristimo za određivanje neodređenih koeficijenata kod a_n^H.

$f(n)$	a_n^P
$f(n) = C \cdot b^n$	a) b nije korijen karakteristične jednadžbe: $a_n^P = A \cdot b^n$ b) b je korijen karakteristične jednadžbe kratnosti k: $a_n^P = A \cdot n^k \cdot b^n$
$f(n)$ polinom stupnja m	a) 1 nije korijen karakteristične jednadžbe: $a_n^P = p(n) =$ polinom stupnja m s neodređenim koeficijentima $p(n) = \sum_{i=0}^m b_i n^i$ b) 1 je korijen karakteristične jednadžbe kratnosti k: $a_n^P = n^k \cdot p(n)$, $p(n)$ je polinom stupnja m s neodređenim koeficijentima
$f(n) = C \cdot n^m \cdot b^n$	a) b nije korijen karakteristične jednadžbe: $a_n^P = p(n) \cdot b^n$ b) b je korijen karakteristične jednadžbe kratnosti k: $a_n^P = n^k \cdot p(n) \cdot b^n$ $p(n)$ je polinom stupnja m s neodređenim koeficijentima

Tablica 2.1: Nalaženje partikularnih rješenja

Primjer 2.2.3. *Riješite rekurzivnu relaciju* $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 3^n - 2^n$ *uz početne uvjete* $a_0 = 1$ *i* $a_1 = 3$.

Rješenje: Pripadna homogena rekurzija je $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$, a njezina karakteristična jednadžba $(x-2)^2 = 0$. Lako uočavamo da je karakteristični korijen jednak 2 i da je kratnosti 2. Prema tome, opće rješenje pripadne homogene rekurzije je

$$a_n^H = \lambda_1 \cdot 2^n + \lambda_2 \cdot n \cdot 2^n.$$

Iz zadane rekurzije vidimo da je $f(n) = 3^n - 2^n$ pa iz Tablice 2.1 iščitamo partikularno rješenje:

$$a_n^P = A \cdot 3^n + B \cdot n^2 \cdot 2^n.$$

Uvrstimo a_n^P u nehomogenu rekurziju kako bismo odredili koeficijente A i B:

$$A3^{n+2} + B(n+2)^2 2^{n+2} - 4(A3^{n+1} + B(n+1)^2 2^{n+1}) + 4(A3^n + Bn^2 2^n) = 3^n - 2^n.$$

Sređivanjem jednadžbe i izjednačavanjem koeficijenata dobivamo da je $A = 1$ i $B = -\frac{1}{8}$. Slijedi da je $a_n^P = 3^n - \frac{1}{8}n^2 2^n$. Dakle, opće rješenje početne nehomogene rekurzije je:

$$a_n = a_n^H + a_n^P = \lambda_1 2^n + \lambda_2 n 2^n + 3^n - \frac{1}{8}n^2 2^n.$$

Preostaje nam još odrediti koeficijente λ_1 i λ_2, a to ćemo odrediti uvrštavanjem početnih uvjeta $a_0 = 1$ i $a_1 = 3$. Dobivamo: $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = \frac{1}{8}$. Konačno, rješenje nehomogene rekurzije je:

$$a_n = \frac{1}{8}n2^n + 3^n - \frac{1}{8}n^2 2^n = (1-n)n2^{n-3} + 3^n.$$

2.3 Računanje determinanti n-tog reda

Jedna od metoda računanja determinanti n-tog reda je **metoda rekurzivnih relacija**. Ideja te metode je da se determinantna n-tog reda , razvojem po nekom stupcu ili retku, zapiše kao linearna kombinacija determinanti reda $(n-1)$ i $(n-2)$ istog oblika. U nastavku ćemo opisati postupak pronalaženja rekurzivnog zapisa determinante D_n preuzet s izvora [2].

Neka je D_n determinanta n-tog reda, $n > 2$, i neka su D_{n-1}, D_{n-2} determinante reda $(n-1)$ i $(n-2)$ istog oblika kao D_n. Pretpostavimo da je

$$D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.6}$$

gdje su p i q konstante neovisne o n. Razlikujemo dva slučaja:

1. $q = 0$
   Tada je $D_n = pD_{n-1}$ pa slijedi:
   $$D_n = pD_{n-1} = p^2 D_{n-2} = \ldots = p^{n-1} D_1,$$
   odnosno, niz determinanti (D_n) je geometrijski niz s kvocijentom p.

2. $q \neq 0$
   Promotrimo karakterističnu jednadžbu rekurzivne relacije $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}$, odnosno kvadratnu jednadžbu $x^2 - px - q = 0$ s korijenima α i β. Primjenom Vieteovih formula dobivamo $\alpha + \beta = p$ i $\alpha\beta = q$ pa relaciju (2.6) možemo zapisati na dva načina:
   $$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha(D_{n-1} - \beta D_{n-2}) \tag{2.7}$$
   $$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}). \tag{2.8}$$
   Razlikujemo 2 slučaja:

   a) $\alpha \neq \beta$
      Iteriranjem jednadžbi (2.7) i (2.8) slijedi:
      $$D_n - \beta D_{n-1} = \alpha(D_{n-1} - \beta D_{n-2}) = \alpha^2(D_{n-2} - \beta D_{n-3}) = \ldots = \alpha^{n-2}(D_2 - \beta D_1),$$
      $$D_n - \alpha D_{n-1} = \beta(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}) = \beta^2(D_{n-2} - \alpha D_{n-3}) = \ldots = \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1).$$

Dobili smo jednadžbe:

$$\begin{aligned} D_n - \beta D_{n-1} &= \alpha^{n-2}(D_2 - \beta D_1), \\ D_n - \alpha D_{n-1} &= \beta^{n-2}(D_2 - \alpha D_1). \end{aligned}$$

Prvu jednadžbu pomnožimo s α, a drugu s β, oduzmemo ih i dobivamo sljedeću jednakost:

$$(\alpha - \beta)D_n = \alpha^{n-1}(D_2 - \beta D_1) - \beta^{n-1}(D_2 - \alpha D_1).$$

Budući da vrijedi $\alpha \neq \beta$, jednadžbu možemo podijeliti s $\alpha - \beta$ i time dobivamo:

$$D_n = \frac{\alpha^{n-1}(D_2 - \beta D_1) - \beta^{n-1}(D_2 - \alpha D_1)}{\alpha - \beta},$$

a možemo ju zapisati i u obliku:

$$D_n = \frac{D_2 - \beta D_1}{\alpha(\alpha - \beta)}\alpha^n + \frac{D_2 - \alpha D_1}{\beta(\beta - \alpha)}\beta^n, \quad n \geq 2. \tag{2.9}$$

b) $\alpha = \beta$
Sada su (2.7) i (2.8) jedna te ista relacija:

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}),\ n \geq 2. \tag{2.10}$$

Dakle, vrijedi jednakost:

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha(D_{n-1} - \alpha D_{n-2}) = \alpha^2(D_{n-2} - \alpha D_{n-3}) = \ldots = \alpha^{n-2}(D_2 - \alpha D_1),$$

odnosno

$$D_n - \alpha D_{n-1} = \alpha^{n-2}(D_2 - \alpha D_1). \tag{2.11}$$

Relacija (2.10) vrijedi i za D_{n-1}, odnosno slijedi da je

$$D_{n-1} - \alpha D_{n-2} = \alpha^{n-3}(D_2 - \alpha D_1),$$

tj. $D_{n-1} = \alpha^{n-3}(D_2 - \alpha D_1) + \alpha D_{n-2}$. Uvrstimo prethodnu jednakost u relaciju (2.11) i dobivamo

$$D_n = 2\alpha^{n-2}(D_2 - \alpha D_1) + \alpha^2 D_{n-2}. \tag{2.12}$$

Analogno, za D_{n-2} u relaciji (2.11) imamo $D_{n-2} - \alpha D_{n-3} = \alpha^{n-4}(D_2 - \alpha D_1)$ pa slijedi $D_{n-2} = \alpha^{n-4}(D_2 - \alpha D_1) + \alpha D_{n-3}$. Uvrštavanjem u (2.12) dobivamo: $D_n = 3\alpha^{n-2}(D_2 - \alpha D_1) + \alpha^3 D_{n-3}$. Ponavljanjem prethodnog postupka dobivamo relaciju:

$$D_n = (n-1)\alpha^{n-2}(D_2 - \alpha D_1) + \alpha^{n-1} D_1. \tag{2.13}$$

Napomena 2.3.1. *Uočimo da smo isti zaključak mogli izvesti i primjenom Teorema 2.1.3 i Teorema 2.1.7.*

Karakteristična jednadžba rekurzivne relacije $D_n = pD_{n-1} + qD_{n-2}, \quad n \geq 2, \ p, q \in \mathbb{C}$ kvadratna je jednadžba oblika $x^2 - px - q = 0$ s korijenima α i β. Razlikujemo dva slučaja: $\alpha \neq \beta$ (različiti korijeni) i $\alpha = \beta$ (višestruki korijen). Promotrimo ta dva slučaja i njihova rješenja primjenom Teorema 2.1.3 i Teorema 2.1.7.

1. $\alpha \neq \beta$
   Prema Teoremu 2.1.3 opće rješenje rekurzije je oblika
   $$D_n = \lambda_1 \alpha^n + \lambda_2 \beta^n, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}. \tag{2.14}$$
   Uvrštavanjem početnih uvjeta D_1 i D_2 dobivamo sustav jednadžbi:
   $$\begin{aligned} D_1 &= \lambda_1 \alpha + \lambda_2 \beta \\ D_2 &= \lambda_1 \alpha^2 + \lambda_2 \beta^2. \end{aligned}$$
   Rješavanjem sustava dviju jednadžbi s dvjema nepoznanicama određujemo konstante λ_1 i λ_2:
   $$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{D_2 - \beta D_1}{\alpha(\alpha - \beta)} \\ \lambda_2 &= \frac{D_2 - \alpha D_1}{\beta(\beta - \alpha)}. \end{aligned}$$
   Konstante λ_1 i λ_2 uvrštavamo u izraz (2.14) i dobivamo konačno rješenje oblika (2.9).

2. $\alpha = \beta$
   Sada imamo karakteristični korijen α kratnosti dva pa je prema Teoremu 2.1.7 opće rješenje rekurzije oblika
   $$D_n = \lambda_1 \alpha^n + \lambda_2 n \alpha^n, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}. \tag{2.15}$$
   Uvrštavanjem početih uvjeta D_1 i D_2 dobivamo sustav:
   $$\begin{aligned} D_1 &= \lambda_1 \alpha + \lambda_2 \alpha \\ D_2 &= \lambda_1 \alpha^2 + 2\lambda_2 \alpha^2. \end{aligned}$$
   Rješavanjem sustava dobivamo:
   $$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{2\alpha D_1 - D_2}{\alpha^2} \\ \lambda_2 &= \frac{D_2 - \alpha D_1}{\alpha^2}. \end{aligned}$$
   Uvrštavanjem konstanti u izraz (2.15) dobivamo konačno rješenje oblika (2.13).

Primjer 2.3.2. *Izračunajte:*

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix}. \tag{2.16}$$

Rješenje: Zadanu determinantu zapisat ćemo u drugačijem obliku (koristeći se pritom razvojem determinante po prvom stupcu, odnosno po prvom retku):

$$\begin{aligned} D_n &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= D_{n-1} + D_{n-2}. \end{aligned}$$

Dobili smo rekurzivnu relaciju $D_n = D_{n-1} + D_{n-2}$ čija je karakteristična jednadžba oblika $x^2 - x - 1 = 0$. Njeni korijeni su $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Budući da vrijedi $\alpha \neq \beta$, slijedi da je determinanta jednaka

$$D_n = \frac{D_2 - \beta D_1}{\alpha(\alpha - \beta)}\alpha^n + \frac{D_2 - \alpha D_1}{\beta(\beta - \alpha)}\beta^n. \tag{2.17}$$

Preostaje nam izračunati determinante D_1 i D_2:

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} 1 \end{vmatrix} = 1 \\ D_2 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem vrijednosti D_1, D_2, α i β u (2.17) dobivamo konačno rješenje:

$$D_n = \frac{2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot 1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2})} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot 1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot (\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2})} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n =$$

$$= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot \frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}.$$

Poglavlje 3

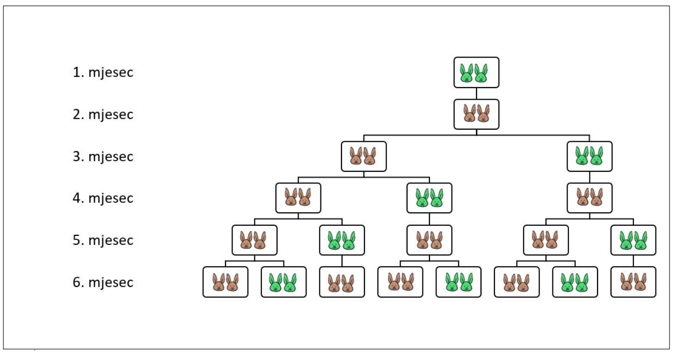
Fibonaccijevi brojevi

3.1 Uvod u Fibonaccijeve brojeve

Matematičar Leonardo iz Pise, poznat još kao Fibonacci, u svom radu *Liber Abaci* postavio je sljedeći zadatak o razmnožavanju zečeva:

Pretpostavimo da je jedan par novorođenih zečeva doveden na pusti otok 1. siječnja. Taj par će dobiti jedan par mladih zečeva svakog prvog dana u mjesecu, počevši od 1. ožujka. Svaki novi par će također dobiti kao potomke jedan par zečeva svakog prvog dana u mjesecu, nakon navršena dva mjeseca života. Treba odrediti koliko će parova zečeva biti na tom otoku 1. siječnja iduće godine. ([5], str. 4)

Pretpostavimo da zečevi ne ugibaju. Na Slici 3.1 se nalazi shematski prikaz razmnožavanja zečeva tijekom prvih šest mjeseci. Zelenom bojom označeni su novorođeni zečevi, a smeđom odrasli zečevi (odnosno, zečevi stari barem jedan mjesec).



Slika 3.1: Razmnožavanje zečeva

Prva dva mjeseca imamo po jedan par zečeva. Nakon drugog mjeseca zečevi su spremni za oplodnju pa dobivamo još jedan par, odnosno, tijekom trećeg mjeseca imamo dva para zečeva. Nakon trećeg mjeseca jedan od prethodna dva para se razmnoži, a drugi još nije spreman za oplodnju, pa ukupno imamo tri para zečeva. Nakon četiri mjeseca imamo ukupno pet parova jer su od prethodnih tri, njih dvoje bili zreli. Tijekom šestog mjeseca imamo ukupno osam parova zečeva (od prethodnih pet, njih troje su bili spremni za oplodnju).

Označimo sa F_n broj parova zečeva na početku n–tog mjeseca od početka godine. Na temelju prethodnih zaključaka i iz Slike 3.1 slijedi da je: $F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5$ i $F_6 = 8$. Broj parova zečeva na početku $(n+2)$–og mjeseca jednak je broju parova zečeva na početku $(n+1)$–og mjeseca uvećanom za broj parova na početku n–tog mjeseca (jer su svi ti parovi nakon 2 mjeseca spremni za oplodnju), odnosno vrijedi:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n. \tag{3.1}$$

Kako bismo rješili zadatak, moramo odrediti broj parova zečeva na početku prvog mjeseca iduće godine, odnosno F_{13}. To možemo lako izračunati koristeći relaciju (3.1), odnosno činjenicu da je n–ti član niza jednak zbroju njemu prethodna dva člana. U Tablici 3.1. prikazan je F_n, za $n = 1, 2, 3, \ldots, 13$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13 ...
F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233 ...

Tablica 3.1: Fibonaccijev niz

Dakle, broj zečeva na početku prvog mjeseca iduće godine jednak je 233.

Definicija 3.1.1. *Brojevi definirani sa $F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ nazivaju se **Fibonaccijevi brojevi**. ([5], str. 5)*

3.2 Svojstva Fibonaccijevih brojeva

U nastavku ćemo kroz nekoliko primjera dokazati neka svojstva Fibonaccijevih brojeva.

Primjer 3.2.1. *Dokažite sljedeću tvrdnju:*

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Rješenje: Primjenom relacije (3.1), odnosno ekvivalentnog izraza $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$, vrijede sljedeće tvrdnje:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_3 - F_2 \\ F_2 &= F_4 - F_3 \\ F_3 &= F_5 - F_4 \\ &\vdots \\ F_{n-1} &= F_{n+1} - F_n \\ F_n &= F_{n+2} - F_{n+1}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem tih tvrdnji u (3.2) i kraćenjem slijedi:

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + \ldots + F_n &= (F_3 - F_2) + (F_4 - F_3) + (F_5 - F_4) + \ldots + (F_{n+1} - F_n) + (F_{n+2} - F_{n+1}) = \\ &= -F_2 + F_{n+2} = F_{n+2} - 1. \end{aligned}$$

Primjer 3.2.2. *Dokažite da je zbroj Fibonaccijevih brojeva s neparnim indeksima jednak F_{2n}, odnosno da vrijedi:*

$$F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}. \tag{3.3}$$

Rješenje: Primjenit ćemo relaciju (3.1), odnosno ekvivalentni izraz $F_{n+1} = F_{n+2} - F_n$:

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 - F_0 \\ F_3 &= F_4 - F_2 \\ F_5 &= F_6 - F_4 \\ &\vdots \\ F_{2n-1} &= F_{2n} - F_{2n-2}. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem prethodnih jednakosti u (3.3) dobivamo:

$$\begin{aligned} F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} &= (F_2 - F_0) + (F_4 - F_2) + (F_6 - F_4) + \ldots + (F_{2n} - F_{2n-2}) = \\ &= -F_0 + F_{2n} = F_{2n}, \end{aligned}$$

gdje je $F_0 = 0$.

Primjer 3.2.3. *Dokažite sljedeću tvrdnju:*

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1} \tag{3.4}$$

Rješenje: Primjenom relacije (3.1) dobivamo da vrijedi: $F_n^2 = F_n \cdot F_n = F_n(F_{n+1} - F_{n-1})$. Prema tome, slijedi:

$$\begin{aligned}
F_1^2 &= F_1(F_2 - F_0) = F_1F_2 - F_1F_0 = F_1F_2 \\
F_2^2 &= F_2(F_3 - F_1) = F_2F_3 - F_2F_1 \\
F_3^2 &= F_3(F_4 - F_2) = F_3F_4 - F_3F_2 \\
&\vdots \\
F_n^2 &= F_n(F_{n+1} - F_{n-1}) = F_nF_{n+1} - F_nF_{n-1}.
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem prethodnih izraza u (3.4) i skraćivanjem odgovarajućih elemenata dobivamo:

$$\begin{aligned}
F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \ldots + F_n^2 &= F_1F_2 + (F_2F_3 - F_2F_1) + \ldots + (F_nF_{n+1} - F_nF_{n-1}) = \\
&= F_nF_{n+1}.
\end{aligned}$$

Primjer 3.2.4. *Dokažimo da su svaka dva susjedna Fibonaccijeva broja relativno prosta.*

Rješenje: Neka je d najveća zajednička mjera od F_n i F_{n+1}, odnosno $d = (F_n, F_{n+1})$. Tada d dijeli F_n i F_{n+1} pa dijeli i njihovu razliku, odnosno $F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$. Budući da d dijeli F_n i F_{n-1}, onda dijeli i njihovu razliku $F_n - F_{n-1} = F_{n-2}$. Analogno zaključujemo da d dijeli i $F_{n-3}, F_{n-4}, \ldots, F_2$. Budući da d dijeli $F_2 = 1$, slijedi da je $d = 1$, odnosno, najveća zajednička mjera svih susjednih Fibonaccijevih brojeva je jednaka jedan. Dakle, svaka dva susjedna Fibonaccijeva broja su relativno prosta.

3.3 Binetova formula

Vidjeli smo da ukoliko želimo izračunati n–ti Fibonaccijev broj, prvo moramo izražunati sve njegove prethodnike, odnosno brojeve $F_1, F_2, \ldots, F_{n-1}$. To nije uvijek jednostavno, pogotovo ako nas zanima Fibonaccijev broj za neki „veliki” n. Postavlja se pitanje: postoji li neki drugi, lakši način za odrediti n–ti Fibonaccijev broj. Odgovor na pitanje nalazi se u sljedećem teoremu.

Teorem 3.3.1. *n–ti Fibonaccijev broj F_n je jednak:*

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right], \quad \textit{za } n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.5}$$

([9], str. 119)

Dokaz. Ideja dokaza je riješiti linearnu homogenu rekurziju $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2$ uz početne uvjete koji vrijede za Fibonaccijeve brojeve $F_0 = 0$ i $F_1 = 1$. Postupak za rješavanje je kao u Poglavlju 2. Uvođenjem supstitucije $F_n = x^n$ dobivamo jednadžbu $x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$. Karakteristična jednadžba je $x^2 - x - 1 = 0$. Rješavanjem kvadratne jednadžbe dobivamo karakteristične korijene $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Slijedi da je:

$$F_n = \lambda_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \lambda_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta dobivamo sustav dviju jednadžbi s dvjema nepoznanicama:

$$\begin{aligned} F_0 &= \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ F_1 &= \lambda_1 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \lambda_2 \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1. \end{aligned}$$

Rješavanjem sustava dobivamo: $\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$ i $\lambda_1 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti u izraz (3.6) dobivamo konačno rješenje:

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]. \end{aligned}$$

Time smo dokazali tvrdnju teorema. □

Napomena 3.3.2. *Formula (3.5) poznata je pod nazivom* ***Binetova formula****.*

3.4 Primjena Fibonaccijevih brojeva u zadacima

Primjer 3.4.1. *Neka je S_n broj različitih načina na koje se prirodan broj n može prikazati kao zbroj jedinica i dvojki. Na primjer, $S_3 = 3$ jer* $1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1 = 3$. *Odredite S_n.*

Rješenje: Prikaz broja n može započeti ili s 1 ili s 2. Ukoliko započinje s 1, preostaje još pridodati sumu jedinica i/ili dvojki koja odgovara broju $n - 1$, odnosno S_{n-1}. Ukoliko zapis započinje s dvojkom, potrebno je dodati S_{n-2}. Dakle, vrijedi relacija $S_n = S_{n-1} + S_{n-2}$. Promotrimo početne uvjete: $S_1 = 1, S_2 = 2, S_3 = 3, \ldots$ Uočimo da je (S_n) Fibonaccijev niz pomaknut za jedan indeks, odsnosno da vrijedi: $S_n = F_{n+1}$. Dakle, rješenje su Fibonaccijevi brojevi pomaknuti za jedan indeks.

Primjer 3.4.2. *Bakterije se razmnožavaju prema ovoj shemi: svaka živi dva sata i svaki sat daje jednu novu bakteriju (dakle, samo dvije tijekom života). Koliko je živo potomstvo jedne bakterije nakon 24 sata i općenito nakon n sati od pojave prve bakterije?*

Rješenje: Označimo s B_n ukupan broj bakterija n sati od pojave prve bakterije. Tada je $B_0 = 1, B_1 = 2, B_2 = 3, B_3 = 5,$ itd. Za $n \geq 3$ vrijedi da je $B_n - B_{n-2} = B_{n-1}$. Dakle, vrijedi $B_n = B_{n-1} + B_{n-2}$, a to je ista rekurzija kao i (3.1). Niz (B_n) možemo poistovjetiti s Fibonaccijevim (bez početna dva člana), tj. vrijedi $B_n = F_{n+2}$. Sada znamo izračunati i ukupan broj bakterija nakon 24 sata pomoću Binetove formule (3.5):

$$B_{24} = F_{26} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{26} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{26}\right] = 121393.$$

Poglavlje 4

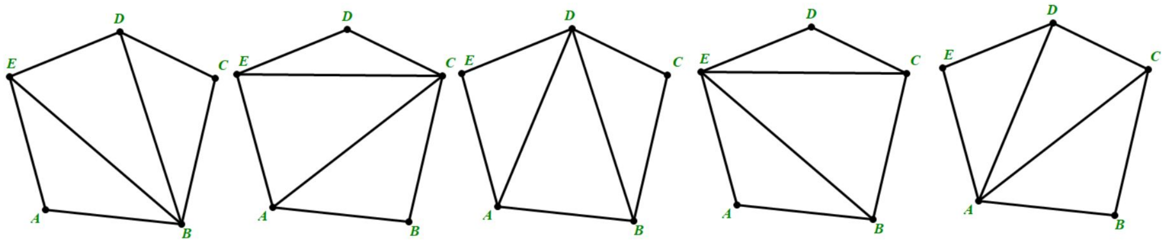
Catalanovi brojevi

U ovom poglavlju bavit ćemo se brojevima na koje su prvi naišli matematičari Leonhard Euler i Johann Andreas von Segner u 18. stoljeću. Bavili su se problemom triangulacije konveksnog n–terokuta za koji je Senger postavio rekurzivnu relaciju, a Euleru ju uspješno riješio. Usprkos njihovom doprinosu, brojevi su naziv dobili po matematičaru Eugenu Charlesu Catalanu. On se tim brojevima bavio tijekom 19. stoljeća. Izveo je i dokazao mnoga svojstva i identitete ovih brojeva. U nastavku ćemo opisati važne kombinatorne probleme u kojima se javljaju Catalanovi brojevi, uključujući i problem triagulacije konveksnog n–teorkuta.

4.1 Problem triangulacije konveksnog n–terokuta

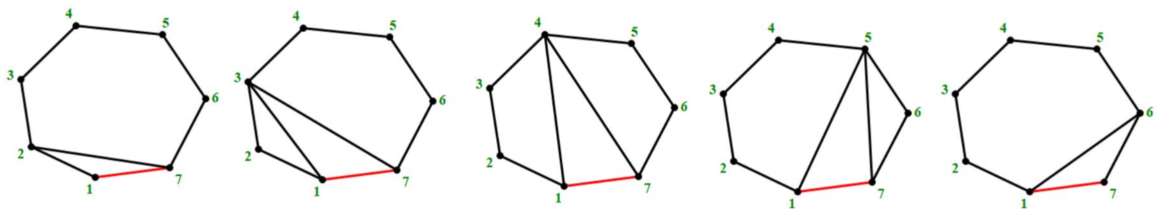
Problem triangulacije konveksnog n–terokuta povijesno je najstariji kombinatorni problem koji je doveo do otkrića Catalanovih brojeva. Unutar konveksnog n–terokuta treba povući $n-3$ dijagonala od kojih se nikoje dvije ne sijeku u unutrašnjosti mnogokuta. Tražimo broj načina na koji je to moguće napraviti, a označit ćemo ga s T_n.

Problem ćemo razmotriti induktivno. Krećemo od T_3, odnosno od trokuta. On je sam po sebi trianguliran, odnosno postoji samo jedan načina da se triangulira trokut pa slijedi $T_3 = 1$. Konveksni četverokut možemo triangulirati na dva načina, tj. $T_4 = 2$. Za peterokut nije odmah očito da je maksimalni broj triangulacija jednak 5 (vidi Sliku 4.1).



Slika 4.1: Triangulacija peterokuta

Odredimo sad maksimalni broj triangulacija za n–terokut. Primijetimo da je svaka stranica n–teorkuta dio samo jednog trokuta triangulacije. Prema tome, fiksiramo jednu stranicu i brojimo triangulacije u kojima sudjeluje svaki od trokuta podignutog nad tom stranicom mnogokuta. Za k–tu točku kao vrh tog trokuta, s desne strane ostao je $(n-k+1)$–teorkut, a s lijeve strane k–terokut (vidi Sliku 4.2). Ukoliko je $k = 2$, s desne strane ostane $(n-1)$–teorkut, a s lijeve ne ostane mnogokut (vidi prvu sličicu na Slici 4.2). S druge strane, ako je $k = n - 1$, s lijeve strane ostane $(n-1)$–terokut, a s desne ne ostane nikakav mnogokut (vidi zadnju sličicu na Slici 4.2).



Slika 4.2: Fiksiranje stranice sedmerokuta

Za $(n - k + 1)$–terokut imamo T_{n-k+1}, a za k–terokut T_k mogućih triangulacija. Budući da su izbori triangulacija tih mnogokuta međusobno neovisni, po principu produkta slijedi da je broj mogućih triangulacija za odabranu točku k jednak $T_k T_{n-k+1}$. Točku k možemo odabrati na n načina i svi odabiri su međusobno neovisni pa slijedi:

$$T_n = \sum_{k=2}^{n-1} T_k T_{n-k+1},$$

uz $T_2 = 1$.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10 ...
T_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430 ...

Tablica 4.1: Triangulacija konveksnog n–terokuta

Propozicija 4.1.1. *Brojevi T_n, $n \geq 4$ zadovoljavaju rekurziju:*

$$T_n = \frac{n}{2(n-3)} \left(T_3 T_{n-1} + T_4 T_{n-2} + \ldots + T_{n-1} T_3\right). \tag{4.1}$$

([10], str. 192)

Dokaz. Fiksirajmo jedan vrh konveksnog n–terokuta. Iz tog vrha možemo povući $n-3$ dijagonala. Za svaku od tih dijagonala imamo $\sum_{k=3}^{n-1} T_k T_{n-k+2} = T_3 T_{n-1} + T_4 T_{n-2} + \ldots + T_{n-1} T_3$ triangulacija (s lijeve strane dijagonale ostane k–terokut, a s desne $(n-k+2)$–terokut). Isto vrijedi za svaki od n vrhova mnogokuta pa je ukupan broj triangulacija jednak:

$$n\left(T_3 T_{n-1} + T_4 T_{n-2} + \ldots + T_{n-1} T_3\right).$$

Budući da je svaka dijagonala računata dvaput (jedna dijagonala računata za dva različita vrha mnogokuta), prethodni izraz potrebno je podijeliti s dva, odnosno:

$$\frac{n}{2}\left(T_3 T_{n-1} + T_4 T_{n-2} + \ldots + T_{n-1} T_3\right).$$

S obzirom da svaka triangulacija sadržava $n-3$ dijagonala, prethodni izraz svaku triangulaciju broji $n-3$ puta pa ga je potrebno podijeliti s tim brojem. Time dobivamo konačni broj triangulacija konveknsog n–teorkuta:

$$T_n = \frac{n}{2(n-3)}\left(T_3 T_{n-1} + T_4 T_{n-2} + \ldots + T_{n-1} T_3\right)$$

i time je tvrdnja propozicije dokazana. □

Teorem 4.1.2. *Za sve $n \geq 2$ je*

$$T_n = \frac{1}{n-1}\binom{2(n-2)}{n-2}.$$

([10], str. 192)

Dokaz. Uvrštavanjem $T_2 = 1$ u rekurziju $T_{n+1} = \sum_{k=2}^{n} T_k T_{n-k+2}$ dobivamo:

$$T_{n+1} - 2T_n = T_3 T_{n-1} + T_4 T_{n-2} + \ldots + T_{n-1} T_3.$$

Zbog izraza 4.1 dokazanog u Propoziciji 4.1.1 imamo:

$$T_3T_{n-1} + T_4T_{n-2} + \ldots + T_{n-1}T_3 = \frac{2(n-3)}{n}T_n$$

pa slijedi:

$$T_{n+1} - 2T_n = \frac{2(n-3)}{n}T_n,$$

odnosno:

$$T_{n+1} = \frac{2(2n-3)}{n}T_n.$$

Uvrštavanjem posljednjeg izraza za $n \in \{2, 3, \ldots, k\}$ dobivamo:

$$T_{k+1} = \frac{2^{k-1}(2k-3)(2k-5)\cdot\ldots\cdot 1}{k!}. \tag{4.2}$$

Proširivanjem razlomka u (4.2) s $[2(k-1)] \cdot [2(k-2)] \cdot \ldots \cdot [2 \cdot 1]$ dobivamo:

$$T_{k+1} = \frac{(2k-2)!}{k(k-1)!(k-1)!} = \frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}.$$

Uvrštavanjem $n = k + 1$ u prethodnom izrazu dobivamo tvrdnju teorema. □

Definicija 4.1.3. *n–ti Catalanov broj C_n je*

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \tag{4.3}$$

([9], str. 133).

Uočimo da je $C_n = T_{n+2}$, $n \in \mathbb{N}$. Kako je $T_n = \sum_{k=2}^{n-1} T_kT_{n-k+1}$, odnosno $T_{n+2} = \sum_{k=2}^{n+1} T_kT_{n+3-k}$, slijedi da Catalanovi brojevi zadovoljavaju rekurzivnu relaciju $C_n = \sum_{k=2}^{n+1} C_{k-2}C_{n+1-k}$, tj.

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_kC_{n-k-1}. \tag{4.4}$$

U Tablici 4.2 možemo vidjeti niz prvih nekoliko Catalanovih brojeva:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 ...
C_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430	4862	16769 ...

Tablica 4.2: Catalanovi brojevi

4.2 Redoslijed množenja

Problem se odnosi na računanje broja načina na koji se može pomnožiti n brojeva, a da se pri tom ne mijenja njihov poredak, već samo redoslijed množenja. Množenje je binarna operacija, tj. množimo dva broja, zatim taj umnožak množimo s narednim elementom, i tako redom. Kako bismo jasno prikazali redoslijed množenja, koristit ćemo zagrade. Neka je Z_n broj načina na koji možemo postaviti zagrade za niz duljine n. Poredak zagrada je važan i ne možemo ga postaviti bilo kako. Da bismo dobili konačan rezultat množenja, moramo pomnožiti neka dva zagrađena bloka. Ti blokovi ne smiju biti raštrkani, odnosno presjek skupova omeđenih tim zagradama mora biti disjunktan. Neka je prvi zagrađeni blok duljine k. Tada je drugi blok duljine $n-k$. Prvi blok možemo zagraditi na Z_k načina, a drugi na Z_{n-k} načina. Dakle, cijeli niz od n elemenata možemo zagraditi na $Z_k Z_{n-k}$ načina (po principu produkta). Budući da blok ne može biti prazan, k ne poprima vrijednosti manje od 1 i veće od $n-1$. Dakle, ukupan broj načina na koji se može pomnožiti n brojeva dan je sljedećom relacijom:

$$Z_n = \sum_{k=1}^{n-1} Z_k Z_{n-k}. \tag{4.5}$$

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9 ...
Z_n	1	1	2	5	14	42	132	429	1430 ...

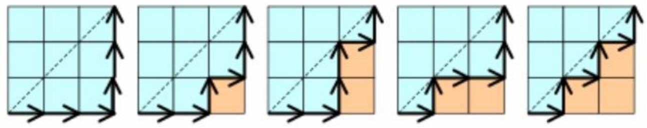
Tablica 4.3: Redoslijed množenja

Iz (4.4), (4.5) i Tablice 4.3 slijedi

$$Z_n = C_{n-1}.$$

4.3 Problem putova u cjelobrojnoj mreži

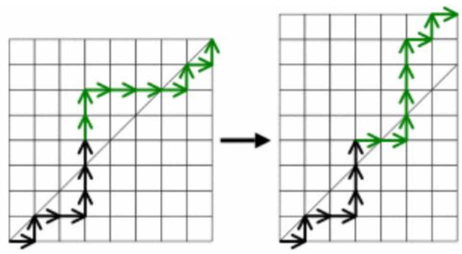
Cjelobrojnu mrežu tvore pravci u Kartezijevom koordinatnom sustavu koji prolaze cjelobrojnim točkama i usporedni su s koordinatnim osima. Uvodimo restrikciju na mrežu koordinatnog sustava veličine $n \times n$ te postavljamo pitanje: koliko ima najkraćih putova u ovakvoj cjelobrojnoj mreži koji nikad ne prelaze njezinu dijagonalu.



Slika 4.3: Putovi u mreži 3×3 [3]

Označimo s P_n broj traženih putova. Bez smanjenja općenitosti promatramo putove koji su uvijek ispod dijagonale. Najkraći putovi zadovoljavaju uvjet da u svakom idućem koraku moraju biti bliže odredišnoj točki (n, n). Za navedeni primjer dopušteni su samo pomaci prema gore ili prema desno (kreće se iz ishodišta koordinatnog sustava, odnosno iz točke $(0, 0)$). Prebrojimo sve moguće putove kroz cjelobrojnu mrežu od $(0, 0)$ do (n, n) i od tog broja oduzmemo broj „zabranjenih" putova koji sijeku dijagonalu.

Imamo n pomaka udesno i n pomaka prema gore pa je ukupan broj mogućih pomaka jednak $2n$. Prema tome, broj mogućih kombinacija puteva od točke $(0, 0)$ do (n, n) iznosi $\binom{2n}{n}$ (od ukupno $2n$ pomaka biramo kojih n pomaka će biti prema gore, a ostali će, jasno, biti pomaci udesno). Preostaje prebrojiti broj putova koji prolaze dijagonalom u cjelobrojnoj mreži. Pretpostavimo da imamo jedan takav put. Promatramo prvu točku koja se nalazi na nedozvoljenom putu, tj. na putu koji prelazi dijagonalu. Od te točke svaki sljedeći korak definiramo tako da svaki pomak udesno zamijenimo za pomak prema gore, i obratno, svaki pomak prema gore promijenimo za pomak prema desno (vidi Sliku 4.4).



Slika 4.4: Reflektirani put [3]

Budući da smo došli jedan korak iznad dijagonale, do sada smo napravili k koraka udesno i $k + 1$ koraka prema gore, za $k \leq n, k \in \mathbb{N}$. Da bismo došli do točke (n, n) preostalo nam je $n - k$ koraka udesno i $n - k - 1$ koraka prema gore. Promijenio se broj preostalih pomaka: reflektirani put ima $k + (n - k - 1) = n - 1$ pomaka udesno i $(k + 1) + (n - k) = n + 1$ pomaka prema gore, a kraj je u točki $(n - 1, n + 1)$. Reflektiranjem smo dobili najkraći put u mreži od $(0, 0)$ do $(n - 1, n + 1)$. Uočimo da je opisano reflektiranje putova bijekcija između skupa svih najkraćih putova koji prelaze dijagonalu i skupa svih najkraćih putova u cjelobrojnoj mreži do točke $(n-1, n+1)$. Dakle, vrijedi sljedeće:

$$P_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n! \cdot n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n-1)!}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$
$$= \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} \cdot \frac{1}{n(n+1)} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Uočimo da je $P_n = C_n$.

Poglavlje 5

Rekurzije u zadacima sa srednjoškolskih natjecanja

Na srednjoškolskim natjecanjima iz matematike ponekad se pojavljuju i zadaci koji uključuju rekurzije. Najčešće su to zadaci s aritmetičkim i geometrijskim nizovima ili zadaci s nizovima koji su definirani rekurzivno. U nastavku ćemo navesti nekoliko primjera zadataka s prijašnjih natjecanja koji uključuju rekurzije.

5.1 Školsko natjecanje

Primjer 5.1.1. *Nikola je zamislio pet brojeva. Prvi broj koji je zamislio je* -2*, a peti je* 6*. Prva četiri broja su uzastopni članovi artimetičkog niza, a zadnja tri su uzastopni članovi geometrijskog niza. Koje je brojeve Nikola zamislio? ([6], Školsko natjecanje 2014., 4. razred)*

Rješenje: Označimo tražene brojeve s a_1, a_2, a_3, a_4 i a_5. S obzirom da su prva četiri člana uzastopni članovi aritmetičkog niza, vrijede sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} a_1 &= -2 \\ a_2 &= a_1 + d = -2 + d \\ a_3 &= a_1 + 2d = -2 + 2d \\ a_4 &= a_1 + 3d = -2 + 3d. \end{aligned}$$

Brojevi a_3, a_4 i a_5 uzastopni su članovi geometrijskog reda pa vrijedi da je kvocijent susjednih brojeva konstantan: $\frac{a_4}{a_3} = \frac{a_5}{a_4}$, odnosno vrijedi:

$$\frac{-2 + 3d}{-2 + 2d} = \frac{6}{-2 + 3d}.$$

Sređivanjem prethodne jednakosti dobivamo:

$$(-2+3d)^2 = 6(-2+2d) \Longleftrightarrow 4-12d+9d^2 = -12+12d \Longleftrightarrow 9d^2-24d+16 = 0.$$

Rješavanjem kvadratne jednadžbe dobivamo jedinstveno rješenje $d = \frac{4}{3}$. Uvrštavanjem $d = \frac{4}{3}$ u a_1, a_2, a_3, a_4 dobivamo tražene brojeve:

$$a_1 = -2, a_2 = -\tfrac{2}{3}, a_3 = \tfrac{2}{3}, a_4 = 2 \text{ i } a_5 = 6.$$

Primjer 5.1.2. *Dan je niz* $a_1 = 1, a_2 = 1$ *i*

$$a_{n+1} = \frac{a_2^2}{a_1} + \frac{a_3^2}{a_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_{n-1}}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \tag{5.1}$$

Odredi a_{2016}. *([6], Školsko natjecanje 2016., 4. razred)*

Rješenje: Odredimo nekoliko sljedećih članova zadanog niza (a_n):

$$\begin{aligned}
a_3 &= \frac{a_2^2}{a_1} = 1 \\
a_4 &= \frac{a_2^2}{a_1} + \frac{a_3^2}{a_2} = 1 + 1 = 2 \\
a_5 &= \frac{a_2^2}{a_1} + \frac{a_3^2}{a_2} + \frac{a_4^2}{a_3} = 1 + 1 + 4 = 6 \\
a_6 &= \frac{a_2^2}{a_1} + \frac{a_3^2}{a_2} + \frac{a_4^2}{a_3} + \frac{a_5^2}{a_4} = 1 + 1 + 4 + 18 = 24 \\
a_7 &= \frac{a_2^2}{a_1} + \frac{a_3^2}{a_2} + \frac{a_4^2}{a_3} + \frac{a_5^2}{a_4} + \frac{a_6^2}{a_5} = 1 + 1 + 4 + 18 + 96 = 120.
\end{aligned}$$

Uočimo da postoji pravilnost u nizu dobivenih brojeva koju možemo zapisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
a_3 &= 1! \\
a_4 &= 2! \\
a_5 &= 3! \\
a_6 &= 4! \\
a_7 &= 5!,
\end{aligned}$$

a to možemo zapisati kao:

$$a_n = (n-2)!, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2. \tag{5.2}$$

Metodom matematičke indukcije dokazat ćemo da za zadani niz (a_n) vrijedi jednakost (5.2). Baza indukcije vrijedi, a to smo već pokazali uvrštavanjem $n = 2$ i $n = 3$ u izraz (5.1). Pretpostavimo da izraz (5.2) vrijedi za neke prirodne brojeve $n-1$ i n, $n \geq 2$. Pokažimo da tada (5.2) vrijedi i za $n+1$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_2^2}{a_1} + \frac{a_3^2}{a_2} + \ldots + \frac{a_n^2}{a_{n-1}} = a_n + \frac{a_n^2}{a_{n-1}} = \\ &= \{\text{pretpostavka indukcije}\} = (n-2)! + \frac{(n-2)! \cdot (n-2)!}{(n-3)!} = \\ &= (n-2)! + (n-2)!(n-2) = (n-2)!(1+n-2) = \\ &= (n-2)!(n-1) = (n-1)!. \end{aligned}$$

Budući da tvrdnja (5.2) vrijedi za $n = 2$ i $n = 3$ te iz pretpostavke da vrijedi za neke $n-1, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ slijedi da vrijedi i za $n+1$, prema aksiomu matematičke indukcije slijedi da tvrdnja (5.2) vrijedi za svaki prirodni broj $n, n \geq 2$.
Sada lako računamo koliko iznosi a_{2016}:

$$a_{2016} = (2016-2)! = 2014!.$$

Primjer 5.1.3. *Nizovi (x_n) i (y_n) zadani su rekurzivno:*

$$\begin{aligned} x_1 &= 3, y_1 = 1, \\ x_{n+1} &= 3x_n + y_n, \quad \text{za sve } n \in \mathbb{N}; \\ y_{n+1} &= x_n + 3y_n, \quad \text{za sve } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dokaži da je $x_{2017}^2 - y_{2017}^2 = 8^{2017}$. ([6], Školsko natjecanje 2017., 4. razred)

Rješenje: Dokažimo da vrijedi tvrdnja $x_n^2 - y_n^2 = 8^n$. Dokaz ćemo provesti metodom matematičke indukcije. Provjerimo vrijedi li baza indukcije, odnosno vrijedi li tvrdnja za $n = 1$:

$$x_1^2 - y_1^2 = 3^2 - 1^2 = 8 = 8^1.$$

Baza indukcije vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodni broj n i provjerimo vrijedi li tada i za broj $n+1$:

$$\begin{aligned} x_{n+1}^2 - y_{n+1}^2 &= (3x_n + y_n)^2 - (x_n + 3y_n)^2 = \\ &= 9x_n^2 + 6x_ny_n + y_n^2 - (x_n^2 + 6x_ny_n + 9y_n^2) = \\ &= 8x_n^2 - 8y_n^2 = 8(x_n^2 - y_n^2) = \{\text{pretpostavka indukcije}\} = \\ &= 8 \cdot 8^n = 8^{n+1}. \end{aligned}$$

S obzirom da tvrdnja vrijedi za $n = 1$ te iz pretpostavke da vrijedi za neki prirodni broj n tvrdnja vrijedi i za prirodni broj $n + 1$, prema aksiomu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki prirodni broj n. Dakle, tvrdnja $x_n^2 - y_n^2 = 8^n$ vrijedi i za $n = 2017$ pa smo time dokazali da vrijedi $x_{2017}^2 - y_{2017}^2 = 8^{2017}$.

5.2 Županijsko natjecanje

Primjer 5.2.1. *Niz (a_n) zadan je rekurzivno s*

$$\begin{aligned} a_0 &= -1, \\ a_n &= \frac{2a_{n-1} - 3}{3a_{n-1} - 4}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Odredite formulu za a_n. ([6], Županijsko natjecanje 1998., 4. razred)

Rješenje: Ispišimo prvih nekoliko članova niza:

$$\begin{aligned} a_0 &= -1, \\ a_1 &= \frac{2a_0 - 3}{3a_0 - 4} = \frac{5}{7}, \\ a_2 &= \frac{2a_1 - 3}{3a_1 - 4} = \frac{11}{13}, \\ a_3 &= \frac{2a_2 - 3}{3a_2 - 4} = \frac{17}{19}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Promatrajući prvih četiri člana niza, možemo naslutiti da je n–ti član oblika

$$a_n = \frac{6n - 1}{6n + 1}. \tag{5.3}$$

Dokazat ćemo da tvrdnja (5.3) vrijedi metodom matematičke indukcije.
Uvrštavanjem $n = 1$ u formulu (5.3) dobivamo $a_1 = \frac{5}{7}$, a to znamo da vrijedi iz već zapisanih članova niza (a_n). Pretpostavimo da za neki prirodni broj n vrijedi $a_n = \frac{6n-1}{6n+1}$. Provjerimo vrijedi li tada tvrdnja (5.3) i za broj $n + 1$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{2a_n - 3}{3a_n - 4} = \{\text{pretpostavka indukcije}\} = \frac{2 \cdot \frac{6n-1}{6n+1} - 3}{3 \cdot \frac{6n-1}{6n+1} - 4} = \\ &= \frac{12n - 2 - 18n - 3}{18n - 3 - 24n - 4} = \frac{6n + 5}{6n + 7} = \frac{6(n + 1) - 1}{6(n + 1) + 1}. \end{aligned}$$

S obzirom da tvrdnja (5.3) vrijedi za $n = 1$ i iz pretpostavke da vrijedi za neki prirodni broj n slijedi da vrijedi i za broj $n + 1$, prema aksiomu matematičke indukcije slijedi da tvrdnja (5.3) vrijedi za svaki prirodni broj n.

Primjer 5.2.2. *Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zadan je rekurzivno:*

$$\begin{aligned} a_1 &= 1, \\ a_n &= \frac{4n-2}{n} a_{n-1}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Dokažite da su svi članovi tog niza prirodni brojevi. ([6], Županijsko natjecanje 2005., 4. razred)

Rješenje: Za svaki $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$ vrijedi:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{4n-2}{n} \cdot a_{n-1} = \frac{4n-2}{n} \cdot \frac{4(n-1)-2}{n-1} \cdot a_{n-2} = \frac{2^2(2n-1)(2n-3)}{n(n-1)} \cdot a_{n-2} = \\ &= \frac{2^3(2n-1)(2n-3)(2n-5)}{n(n-1)(n-2)} \cdot a_{n-3} = \ldots = \\ &= \frac{2^{n-1}(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 3}{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} \cdot a_1 = \\ &= \frac{2^{n-1}(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 3}{n!}. \end{aligned}$$

Množenjem 2^{n-1} s $(n-1)!$ dobivamo:

$$\begin{aligned} 2^{n-1}(n-1)! &= 2\cdot 2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = \\ &= (2n-2)\cdot(2n-4)\cdot\ldots\cdot 6\cdot 4\cdot 2. \end{aligned}$$

Pomnožimo sad brojnik i nazivnik od a_n s $(n-1)!$ i pri tom koristimo prethodno dobivenu jednakost za umnožak $2^{n-1}(n-1)!$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2^{n-1}(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 3}{n!} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1)!} = \\ &= \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)\cdot\ldots\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{n!(n-1)!} = \\ &= \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} = \binom{2n-1}{n}. \end{aligned}$$

Dobili smo zapis općeg člana niza u obliku binomnog koeficijenta. S obzirom da su binomni koeficijenti prirodni brojevi, dokazali smo zadanu tvrdnju.

Primjer 5.2.3. *U prostoriji se nalazi n kutija visina* $1, 2, 3, ..., n$ *koje treba nekim poretkom smjestiti uz zid. Mačak Fiko može skočiti s jedne kutije na sljedeću ako je sljedeća kutija niža (nije bitno koliko) od one na kojoj se nalazi ili je za najviše* 1 *viša od one na kojoj se trenutno nalazi. Na koliko načina se kutije mogu poredati tako da Fiko može krenuti s prve kutije u nizu i skočiti redom na svaku iduću kutiju? ([6], Županijsko natjecanje 2020., 4. razred)*

Rješenje: Za raspored kutija kažemo da je dobar ukoliko Fiko može krenuti s prve kutije u nizu i redom skočiti na svaku sljedeću kutiju. Neka je a_n broj dobrih rasporeda n kutija za prirodni broj n. Ukoliko na tren zanemarimo kutiju visine n, ostaje nam niz $n-1$ kutija koje možemo poredati na a_{n-1} načina. U odnosu na sve te dobre nizove, kutiju visine n možemo smjestiti samo na dva mjesta: na početak niza ili ispred kutije visine $n-1$. Prema kombinarnom principu produkta, ukupan broj dobrih rasporeda n kutija je

$$a_n = 2a_{n-1}.$$

Analogno dolazimo do zaključka da je broj dobrih rasporeda $n-1$ kutije jednak $a_{n-1} = 2a_{n-2}$, odnosno da vrijedi:

$$a_n = 2a_{n-1} = 2^2 a_{n-2} = 2^3 a_{n-3} = \ldots = 2^{n-1} a_1.$$

Budući da je $a_1 = 1$, slijedi da je

$$a_n = 2^{n-1},$$

odnosno, broj dobrih raporeda n kutija jednak je 2^{n-1}, za $n \in \mathbb{N}$.

5.3 Državno natjecanje

Primjer 5.3.1. *Izračunajte sumu*

$$\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \ldots + \frac{a_k}{2^k} + \ldots$$

gdje je (a_n) *niz brojeva definiran na ovaj način:*

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad \text{za } n > 2.$$

([6], Državno natjecanje 1999., 4. razred)

Rješenje: Uočimo da su elementi niza (a_n) Fibonaccijevi brojevi. Izračunajmo n–tu parcijalnu sumu reda $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^k}$:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_1 + a_2}{2^3} + \frac{a_2 + a_3}{2^4} + \ldots + \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2^n} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{a_1}{8} + \frac{a_2}{8} + \frac{a_2}{16} + \frac{a_3}{16} + \ldots + \frac{a_{n-2}}{2^n} + \frac{a_{n-1}}{2^n} = \\ &= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^k} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^k} - \frac{1}{4} - \frac{a_{n-1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^{n+2}} - \frac{a_n}{2^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{2^k} - \frac{a_n}{2^{n+2}} - \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{3}{4} S_n - \frac{a_n}{2^{n+2}} - \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Dobili smo jednakost $S_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} S_n - \frac{a_n}{2^{n+2}} - \frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}$ iz koje slijedi:

$$S_n = 2 - \frac{a_n}{2^n} - \frac{a_{n+1}}{2^{n-1}},$$

tj.

$$|S_n - 2| = \frac{a_n}{2^n} + \frac{a_{n+1}}{2^{n-1}}.$$

Želimo pokazati da je $\lim_{n->\infty} |S_n - 2| = 0$. Pokažimo prvo matematičkom indukcijom da vrijedi

$$a_n \leq 3^{\frac{n}{2}}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.4}$$

Lako uočavamo da tvrdnja (5.4) vrijedi za $n = 1$ i $n = 2$. Time smo potvrdili da vrijedi baza indukcije. Pretpostavimo da vrijedi $a_{n-1} \leq 3^{\frac{n-1}{2}}$ i $a_n \leq 3^{\frac{n}{2}}$ za neki prirodni broj n. Provjerimo vrijedi li tada tvrdnja i za prirodni broj $n + 1$:

$$a_{n+1} = a_n + a_{n-1} = \{\text{pretpostavka indukcije}\} \leq 3^{\frac{n}{2}} + 3^{\frac{n-1}{2}} = 3^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left(3^{\frac{1}{2}} + 1\right) \leq 3^{\frac{n-1}{2}} \cdot 3 = 3^{\frac{n+1}{2}}.$$

Prema aksiomu matematičke indukcije zaključujemo da tvrdnja (5.4) vrijedi za svaki prirodni broj n. Sada je:

$$\begin{aligned} |S_n - 2| &= \frac{1}{2^{n-1}} a_{n+1} + \frac{1}{2^n} a_n \\ &\leq \frac{1}{2^{n-1}} \cdot 3^{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{2^n} \cdot 3^{\frac{n}{2}} = \\ &= 3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}} + \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Uočavamo da je $\lim\limits_{n->\infty} |S_n - 2| = 0$. Dokazali smo željenu tvrdnju i time pokazali da je $\lim\limits_{n->\infty} S_n = 2$.

Primjer 5.3.2. *Niz (a_n) zadan je rekurzivno:*

$$\begin{aligned} a_0 &= 3 \\ a_n &= 2 + a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

a) Dokažite da su svi članovi tog niza u parovima relativno prosti prirodni brojevi.

b) Odredite a_{2007}.

([6], Državno natjecanje 2007., 4. razred)

Rješenje:

a) Ispišimo nekoliko članova niza: $a_0 = 3, a_1 = 5, a_2 = 17, a_3 = 257, \ldots$ Uočimo da su svi elementi niza neparni brojevi. Pretpostavimo da tvrdnja ne vrijedi, odnosno da postoje dva elementa a_i i a_j, $i, j \in \mathbb{N}, i < j$ koji nisu relativno prosti prirodni brojevi. Tada postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da $k \mid a_i$ i $k \mid a_j$. Iz rekurzije

$$a_0 \cdot a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} = a_n - 2 \tag{5.5}$$

slijedi da $k \mid 2$ pa je jedina mogućnost $k = 2$. Međutim, tada $2 \mid a_i$ i $2 \mid a_j$, a to je nemoguće jer su elementi niza (a_n) neparni brojevi. Dakle, tvrdnja je točna, odnosno svi članovi niza u parovima su relativno prosti prirodni brojevi.

b) Iz rekurzije za opći član niza slijedi $a_{n-1} - 2 = a_0 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-2}$. Uvrštavanjem te jednakosti u (5.5) dobivamo:

$$(a_{n-1} - 2) \cdot a_{n-1} = a_n - 2,$$

a to je ekvivalentno izrazu

$$a_n - 1 = (a_{n-1} - 1)^2.$$

Slijedi

$$\begin{aligned} a_n - 1 &= (a_{n-1} - 1)^2 = (a_{n-2} - 1)^4 = (a_{n-3} - 1)^8 = \ldots = (a_{n-k} - 1)^{2^k} = \\ &= (a_0 - 1)^{2^n} = \{a_0 = 3\} = 2^{2^n}. \end{aligned}$$

Dakle, $a_n = 2^{2^n} + 1$ pa dobivamo da je $a_{2007} = 2^{2^{2007}} + 1$.

Napomena 5.3.3. *Brojevi oblika $2^{2^n} + 1$ za $n = 0, 1, 2, \ldots$ nazivaju se **Fermatovi brojevi** po matematičaru Pierre-u de Fermat-u.*

Primjer 5.3.4. *Niz (a_n) zadan je rekurzivno: $a_1 = 2, a_n = 2(n + a_{n-1})$ za $n \geq 2$. Dokaži da je $a_n < 2^{n+2}$ za sve $n \in \mathbb{N}$. ([6], Državno natjecanje 2013., 4. razred)*

Rješenje: Promotrimo razlike $2^{n+2} - a_n$ za prvih nekoliko $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
2^3 - a_1 &= 8 - 2 = 6\\
2^4 - a_2 &= 16 - 8 = 8\\
2^5 - a_3 &= 32 - 22 = 10\\
2^6 - a_4 &= 64 - 52 = 12.
\end{aligned}$$

Iz prethodnih jednakosti naslućujemo da vrijedi $2^{n+2} - a_n = 2(n+2)$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Metodom matematičke indukcije dokazat ćemo da vrijedi

$$a_n = 2^{n+2} - 2(n + 2), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.6}$$

Već smo pokazali da vrijedi baza indukcije, odnosno da je $2^3 - a_1 = 2(1+2)$. Pretpostavimo da tvrdnja (5.1) vrijedi za neki prirodni broj n. Koristeći pretpostavku pokažimo da tada tvrdnja vrijedi i za $n + 1$, odnosno da je $a_{n+1} = 2^{n+3} - 2(n + 3)$:

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= 2(n + 1 + a_n) = \{\text{pretpostavka indukcije}\} =\\
&= 2(n + 1 + 2^{n+2} - 2(n + 2)) = 2n + 2 + 2^{n+3} - 4n - 8 =\\
&= 2^{n+3} - 2n - 6 = 2^{n+3} - 2(n + 3).
\end{aligned}$$

S obzirom da tvrdnja (5.1) vrijedi za $n = 1$ te iz pretpostavke da vrijedi za neki prirodan broj n slijedi da vrijedi i za $n + 1$, prema aksiomu matematičke indukcije zaključujemo da tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj n.
Sada lako dokazujemo da vrijedi zadana tvrdnja, tj. da je:

$$a_n = 2^{n+2} - 2(n + 2) < 2^{n+2}.$$

Bibliografija

[1] *Kombinatorna i diskretna matematika, skripta za vježbe*, (2021), `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kidm/rekurzije.pdf`.

[2] *Linearna algebra 1, skripta za vježbe*, (2021), `https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/Vjezbe_4_-_Determinante_%28prva_dva_potpoglavlja%29.pdf`.

[3] Hrvoje Čavrak, *Catalanovi brojevi*, Hrvatski matematički elektronski časopis **7**, `http://e.math.hr/old/catalan/index.html`.

[4] Maja Cvitković, *Kombinatorika: zbirka zadataka*, Element, 1994.

[5] Andrej Dujella, *Fibonaccijevi brojevi*, HMD, Zagreb (2000).

[6] Antonija Horvatek, *Natjecanja iz matematike u RH*, Matematika na dlanu, `http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/natjecanja-iz-matematike.htm`.

[7] Zdravko Kurnik, *Metoda rekurzije*, Matematika i škola **24** (2004), 148–155.

[8] Zvonimir Šikić, Sanja Sntoliš, Aneta Copić, Rebeka Kalazić, Snježana Lukač i Eva Špalj, *Matematika 4, udžbenik za četvrti razred gimnazije i srednje strukovne škole*.

[9] Darko Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, 2001.

[10] Darko Veljan i Mijo Mišetić, *Kombinatorika: s teorijom grafova*, Školska knjiga, 1989.

Sažetak

Ovaj diplomski rad posvećen je primjeni metode rekurzije u matematici. Rad je podijeljen na pet poglavlja. U prvom poglavlju navedene su definicije rekurzivnih relacija, opisane su poznate rekurzije (aritmetički i geometrijski niz) i riješeni su primjeri u kojima se primjenjuje metoda rekurzije. U drugom poglavlju opisan je postupak rješavanja linearnih rekurzija (homogenih i nehomogenih) s konstantnim koeficijentima koji je prikazan na riješenim primjerima. Također, opisana je i primjena rekurzivnih relacija pri računanju determinanti n–tog reda. Iduća dva poglavlja obuhvaćaju Fibonaccijeve i Catalanove brojeve. U posljednjem poglavlju ovog rada metodom rekurzije riješeno je nekoliko zadataka sa srednjoškolskih natjecanja.

Summary

This thesis describes the implementation of the recursion in mathematics and it is divided in five chapters. In the first chapter, definitions of recursive relations are stated, important recursions are described (arithmetic and geometric sequence) and several examples using recursion are given. In the secon chapter, a procedure for solving linear recursions (homogeneous and non-homogeneous) with constant coefficients is described and several solved examples are shown. In addition, the implementation of the recursion in the calculation of nth order determinants is displayed. The following two chapters cover well-known two recursive relations: Fibonacci and Catalan numbers. Finally, the last chapter of this thesis includes a few solved tasks from high school competition in which recursion is applied.

Životopis

Rođena sam 15. rujna 1996. godine u Zadru. Pohađala sam Osnovnu školu Valentin Klarin na Ugljanu, a 2011. godine upisala Gimnaziju Jurja Barakovića u Zadru, opći smjer. Studij sam započela 2015. godine na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu gdje sam upisala preddiplomski sveučilišni studij Matematika, inžinjerski smjer. Iduće godine prebacila sam se na preddiplomski svučilišni studij Matematika, smjer nastavnički koji sam završila 2019. godine. Iste godine upisala sam diplomski sveučilišni studij Matematika, smjer nastavnički.