

# Formiranje "cat-states" u nanoelektromehaničkim sustavima

---

Tečer, Matija

Master's thesis / Diplomski rad

2021

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:898822>

Rights / Prava: [In copyright](#)/Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-10-05**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Matija Tečer

FORMIRANJE "CAT-STATES" U  
NANOELEKTROMEHANIČKIM SUSTAVIMA

Diplomski rad

Zagreb, 2021.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

**Matija Tečer**

Diplomski rad

**Formiranje "cat-states" u  
nanoelektromehaničkim sustavima**

Voditelj diplomskog rada: Izv. prof. dr. sc. Danko Radić

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2021.

Zahvaljujem se najprije svojoj obitelji koja mi je bila podrška kroz čitavo moje obrazovanje, posebice mojim roditeljima od kojih sam naučio kako je uz predanost i marljivost sve moguće. Moja braća sa svojim uspjesima uvijek su mi bila pozitivna konkurencija koja mi je davala dodatnu motivaciju za rad.

Zahvaljujem se i svojem mentoru Izv. prof. dr. sc. Danku Radiću koji mi je dao puno slobode u istraživanju i pisanju ovog rada, no istovremeno je uvijek bio spreman priskočiti u pomoć kada je to bilo potrebno.

Na kraju bih se zahvalio svojoj djevojci Dariji koja je uvijek bila uz mene. Uz njezinu podršku svaki izazov pa tako i završavanje fakulteta i pisanje ovog rada, postali su puno jednostavniji.

Izrada ovog rada poduprta je projektima HRZZ IP-2016-06-2289 i ZCI QuantiXLie - projekt KK.01.1.1.01.0004.

## Sažetak

Superpoziciju koherentnih stanja, tzv. *cat-state*, može se promatrati kao kvantnu superpoziciju makroskopskih stanja. U ovom radu pokazano je kako se u nanoelektromehaničkom (NEM) sustavu mogu kreirati mehanički *cat-state*-ovi kvantno isprepletena sa stanjima dvorazinskog (qubitnog) kvantnog sustava koja opisuju električne stupnjeve slobode sustava. Promatrani NEM sustav sastoji se od supravodljive kvantne točke koja harmonički oscilira između dva supravodljiva kontakta. Supravodljivi kontakti spojeni su na prednapon koji se može kontrolirati. Inducirani naboj na kvantnoj točki može se kontrolirati naponom vrata te se posebnim odabirom parametara broj Cooperovih parova na kvantnoj točki može opisati kao qubitni sustav. Prilikom gibanja kvantne točke između supravodljivih kontakata, Cooperovi parovi tuneliraju s kvantne točke na supravodljive kontakte i obrnuto, ispreplićući tako mehaničke i električne (qubitne) stupnjeve slobode kvantne točke. Evolucija ovog sustava uz poseban protokol za kontrolu prednapona vodi k stvaranju mehaničkih *cat-states*

U radu je najprije izveden hamiltonijan sustava. Nakon toga analitički je, korištenjem aproksimacije stacionarne faze, izračunata evolucija sustava. U središnjem dijelu, evolucija sustava izračunata je numerički, uz dodatno promatranje realističnijih postavki sustava. Naposljetku su stanja okarakterizirana Wignerovom funkcijom i entropijom kvantne isprepletenosti. Wignerova funkcija *cat-statea* poprima negativne vrijednosti što je potpis nekласičnog ponašanja tipičnog za *cat-state*.

Ključne riječi: *cat-states*, nanoelektromehanički sustavi, Josephsonov spoj

# Formation of "Cat-States" in Nanoelectromechanical Systems

## Abstract

A superposition of coherent states, a "cat-state", can be treated as a quantum superposition of macroscopic states. In this thesis, I show how mechanical "cat-states", entangled to qubit states that describe electric degrees of freedom of the system, are generated in nanoelectromechanical (NEM) system. The examined NEM system consists of a movable superconducting quantum dot that harmonically oscillates between two bulk superconductors. The bulk superconductors are connected to a controllable bias voltage. The induced charge on the quantum dot can be controlled via the gate voltage. By the special choice of parameters, the charge population (number of Cooper pairs) on the quantum dot can be described as a qubit system. As the quantum dot oscillates between the bulk superconductors, Cooper pairs tunnel from the bulk superconductors to the quantum dot and vice versa. This couples electrical and mechanical degrees of freedom of the quantum dot. Under the special protocol of controlling the bias voltage, the evolution of the system leads to the creation of mechanical "cat-states".

In this thesis, firstly I derive the Hamiltonian of the system. After that the evolution of the system is calculated analytically using rotating wave approximation. In the main part, I present exact numerically calculated evolution of the system and I also take more realistic assumptions to consideration. Finally, the obtained states are characterized by the entanglement entropy and the Wigner function. The Wigner function of cat-states displays negative parts which is a signature of non-classical behaviour typical for the cat-states.

Keywords: "Cat-States", Nanoelectromechanical Systems, Josephson Effect

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
1.1	Josephsonov spoj . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Izvod hamiltonijana</b>	<b>5</b>
2.1	Elektrostatski dio hamiltonijana . . . . .	5
2.2	Hamiltonijan tuneliranja . . . . .	7
2.3	Ukupni hamiltonijan . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Analitičko rješenje</b>	<b>9</b>
3.1	Slika interakcije . . . . .	9
3.2	Konstantan napon . . . . .	10
3.2.1	Wignerova funkcija - koherentna stanja . . . . .	13
3.3	Protokol okretanja napona . . . . .	16
3.3.1	Wignerova funkcija - "c-stanja" . . . . .	18
3.4	Entropija kvantne isprepletenosti . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Numeričko rješenje</b>	<b>23</b>
4.1	Postavljanje sustava . . . . .	23
4.2	Konstantni napon . . . . .	27
4.3	Okretanje napona . . . . .	30
4.4	Odstupanje od uvjeta trenutka okretanja napona . . . . .	31
4.5	Odstupanje od rezonancije - Semiklasični pristup . . . . .	32
4.6	Odstupanje od rezonancije - Numeričko rješenje . . . . .	35
4.7	Odstupanje od rezonancije - "c-stanja" . . . . .	37
4.8	Modeliranje okretanja napona . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Eksperimentalna izvedba</b>	<b>40</b>
<b>6</b>	<b>Zaključak</b>	<b>41</b>
	<b>Dodatci</b>	<b>43</b>
<b>A</b>	<b>Svojstva Wignerove funkcije</b>	<b>43</b>
A.1	Weylova transformacija . . . . .	44



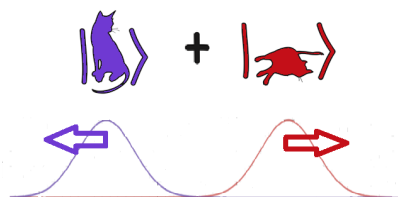
A.2	Svojstva Wignerove funkcije . . . . .	44
A.3	Miješana i čista stanja . . . . .	45
<b>B</b>	<b>Koeficijenti u razvoju</b>	<b>46</b>
<b>C</b>	<b>Transformacija baze</b>	<b>46</b>
	<b>Literatura</b>	<b>48</b>

# 1 Uvod

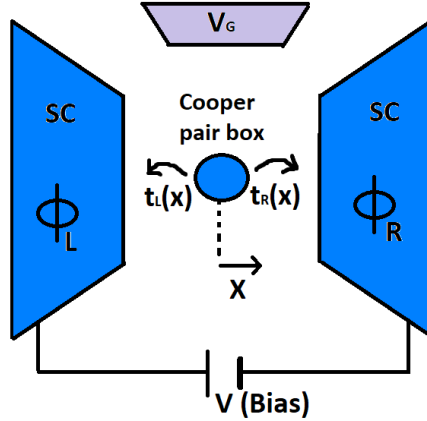
Još od slavnog Schrödingerovog misaonog eksperimenta "Schrödingerove mačke" [1] postavlja se pitanje je li moguće stvoriti kvantnu superpoziciju makroskopskih stanja. Naime, misaoni eksperiment pretpostavlja da je mačka zatvorena u metalnu kutiju s otrovom u bočici koja je "povezana" s atomom koji se nalazi u nestabilnom (pobuđenom) stanju. Deekscitacija atoma u niže stanje pokreće lančanu reakciju koja uzrokuje puštanje otrova u kutiju, a time i loš ishod za mačku. Budući da se atom nalazi u superpoziciji osnovnog stanja  $|g\rangle$  (što povlači smrt mačke) i ekscitiranog stanja  $|e\rangle$  (mačka ostaje živa), ovo "isprepleteno" stanje mačke i atoma može se prikazati kao:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle|M\rangle + |e\rangle|Z\rangle), \quad (1.1)$$

gdje smo s  $|M\rangle$  označili stanje mrtve mačke, a s  $|Z\rangle$  stanje žive mačke. No, zbog interakcije s okolinom takvo stanje vrlo kratko traje, tj. dolazi do dekoherencije i nedijagonalni članovi matrice gustoće  $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$  nestaju te se dobiva klasični ansambl stanja mačka-atom, a ne kvantna superpozicija [2]. Stoga se postavlja pitanje, je li moguće stvoriti opažljivu kvantnu superpoziciju makroskopskih stanja. Odgovor je potvrđan: željena superpozicija može se ostvariti putem superpozicije koherentnih stanja. Koherentna su stanja superpozicija Fockovih stanja, no njihova posebnost leži u tome što se ponašaju "klasično" te što su otporna na vanjske perturbacije, zbog čega ih možemo promatrati kao makroskopska stanja (granicu klasičnog i kvantnog). Superpozicija koherentnih stanja naziva se *cat-stateom* (shematski prikaz na Slici 1.1). *Cat-state* u nastavku ćemo skraćeno zvati "c-stanje". "C-stanja" nisu samo od akademskog značaja, već imaju i vrlo važnu ulogu u teoriji kvantne komunikacije, kao i potencijalnu primjenu u kvantnom računarstvu.



Slika 1.1: *Cat-state*: Superpoziciju koherentnih stanja može se promatrati kao kvantnu superpoziciju makroskopskih stanja zbog čega se ova superpozicija naziva *cat-state*.



Slika 1.2: **Shematski prikaz sustava:** Supravodljiva kvantna točka harmonički titra između supravodljivih kontakata (SC) spojenih na prednapon  $V$ . Napon vrata  $V_G$  određuje elektrostatsku energiju kvantne točke. Amplitude tuneliranja Cooperovih parova s lijevog kontakta  $t_L(x)$  i desnog kontakta  $t_R(x)$  na kvantnu točku određene su položajem kvantne točke  $x$ . Razlika faza supravodljivih kondenzata desnog  $\phi_R$  i lijevog kontakta  $\phi_L$  određena je prednaponom  $V$ .

Do sada je napravljeno nekoliko prijedloga te konkretnih eksperimentalnih izvedbi sustava u kojima je moguće stvoriti "c-stanja". Većina dosadašnjih izvedaba bazirana je na optičkim sustavima [3], [4]. U ovom radu pokazano je kako uz manipulaciju vanjskih parametara dolazi do stvaranja "c-stanja" isprepletenih s qubitnim stanjima dvorazinskog sustava u sustavu prikazanom na Slici 1.2. Promatrani sustav zapravo je Josephsonov spoj u kojem je između supravodljivih kontakata postavljena supravodljiva kvantna točka koja može harmonički oscilirati između kontakata (tzv. "Shuttle") [5], [6]. Osciliranjem kvantne točke između supravodiča, dolazi do koherentnog tuneliranja Cooperovih parova sa supravodljivih kontakata na kvantnu točku [7], [8], [9]. Supravodljivi kontakti spojeni su na prednapon  $V$  koji je moguće kontrolirati. Napon  $V$  određuje razliku faza između kontaktnih supravodiča [10]:

$$\phi = \phi_R - \phi_L, \tag{1.2a}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{2eV}{\hbar}, \tag{1.2b}$$

gdje su  $\phi_R$  i  $\phi_L$  faze desnog odnosno lijevog supravodljivog kontakta. Manipulacijom elektrostatske energije kvantne točke putem napona vrata  $V_g$  (engl. 'gate voltage') moguće je ostvariti da se kvantna točka efektivno ponaša kao dvorazinski kvantni sustav, tj. kao qubit. Ova dva kvantna stanja razlikuje se za jedan Cooperov par;

kvantna točka u stanju  $|0\rangle$  ima  $n$  Cooperovih parova, a u stanju  $|1\rangle$   $n + 1$  Cooperov par pa se stoga za ovaj sustav koristi engleski izraz "Cooper Pair Box" (CPB).

U ovom radu najprije je izveden hamiltonijan koji opisuje navedeni sustav sa Slike 1.2. Zatim je pokazano u okviru aproksimacije stacionarne faze kako odgovarajućom manipulacijom napona  $V$ , evolucija ovog sustava vodi k pojavi mehaničkih "c-stanja" (superpozicija mehaničkih koherentnih stanja) kvantno isprepletenih s qubitnim stanjima. U središnjem dijelu numerički je izračunata egzaktna evolucija sustava te je tako ispitana opravdanost aproksimacije stacionarne faze. Nadalje, numerički je ispitana osjetljivost sustava na odstupanje od predloženog protokola za stvaranje "c-stanja" te je promotren realističniji protokol kontrole prednapona koji se zbog kompleksnosti nije mogao analitički riješiti. Dobivena stanja okarakterizirana su entropijom kvantne isprepletenosti i Wignerovom funkcijom.

Kako bismo uspješno teorijski opisali predloženi sustav, potrebno je najprije izložiti nekoliko bitnih svojstava i koncepata supravodiča i tipičnog Josephsonovog spoja.

## 1.1 Josephsonov spoj

Tipičan Josephsonov spoj prikazan je na Slici 1.3. Dva supravodiča odvojena su tankim izolatorskim spojem. Parametar uređenja lijevog supravodiča je  $\Psi_L = |\psi_L|e^{i\phi_L}$ , a desnog  $\Psi_R = |\psi_R|e^{i\phi_R}$ . Parametre uređenja možemo promatrati kao valne funkcije kondenzata Cooperovih parova, dok u semiklasičnoj aproksimaciji (veliki broj parova)  $|\psi_{R/L}|^2$  možemo interpretirati kao gustoću Cooperovih parova s desne odnosno lijeve strane. Budući da kvantna mehanika dopušta tuneliranje čestica u klasično zabranjeno područje, moguće je da dio Cooperovih parova prodire sa supravodiča u područje izolatora (i drugog supravodiča). Gustoća Cooperovih parova koji tuneliraju kroz barijeru opada eksponencijalno s udaljenosti od supravodiča (valna funkcija eksponencijalno trne u klasično zabranjenom području).

U čistom kvantno-mehaničkom opisu opservablu broja  $\hat{n}$  (koja predstavlja broj Cooperovih parova) i opservablu faze  $\hat{\phi}$  ne možemo istovremeno znati proizvoljno precizno. Dapače, operator broja  $\hat{n}$  i operator faze  $\hat{\phi}$  konjugirane su varijable:

$$[\hat{\phi}, \hat{n}] = i. \quad (1.3)$$

Budući da su navedene opservable konjugirane, svojstvena stanja operatora faze  $|\phi\rangle$  (sa svojstvenom vrijednosti  $\phi$ ) možemo prikazati preko svojstvenih stanja operatora broja  $|n\rangle$  (sa svojstvenom vrijednosti  $n$ ):

$$|\phi\rangle = \sum_N e^{in\phi} |n\rangle \quad (1.4)$$

i obrnuto:

$$|n\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{-in\phi} |\phi\rangle. \quad (1.5)$$

U idućim poglavljima rada pokazat će se da je korisno definirati operator:

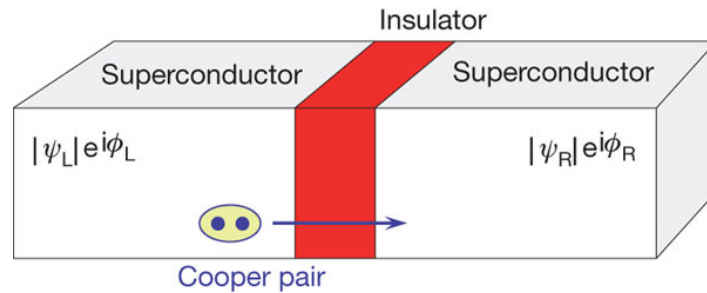
$$e^{i\hat{\phi}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi' |\phi'\rangle \langle\phi'|, \quad (1.6a)$$

$$e^{i\hat{\phi}} |\phi\rangle = e^{i\phi} |\phi\rangle. \quad (1.6b)$$

Korištenjem izraza (1.4) ovaj operator i njegov hermitski konjugat  $e^{-i\hat{\phi}}$  (operator  $e^{i\hat{\phi}}$  nije hermitski) mogu se prikazati u bazi operatora broja:

$$e^{i\hat{\phi}} = \sum_n |n-1\rangle \langle n|, \quad (1.7a)$$

$$e^{-i\hat{\phi}} = \sum_n |n\rangle \langle n-1|. \quad (1.7b)$$



Slika 1.3: **Josephsonov spoj:** Između dva supravodiča postavljen je tanki sloj izolatora. Parametri uređenja lijevog odnosno desnog supravodiča opisani su gustoćom Cooperovih parova  $|\psi_{R/L}|$  i fazom supravodljivog kondenzata  $\phi_{L/R}$ . Cooperovi parovi mogu tunelirati s jednog supravodiča na drugi kroz područje izolatora. [11]

Sustav promatran u ovom radu razlikuje se od tipičnog Josephsonovog spoja opisanog u ovom poglavlju time što se u njemu između supravodljivih kontakata ne nalazi izolator, već supravodljiva kvantna točka koja harmonički oscilira između supravodljivih kontakata.

## 2 Izvod hamiltonijana

Hamiltonijan promatranog sustava (Slika 1.2) može se zapisati u obliku [12]:

$$H = H_C + H_{TUN} + H_{HO} + H_{SC}, \quad (2.1a)$$

$$H_C = \left( -2eV_G(t) + \frac{4e^2}{C} \right) |1\rangle \langle 1|, \quad (2.1b)$$

$$H_{HO} = \hbar\omega \left( \frac{\hat{P}^2}{2} + \frac{\hat{X}^2}{2} \right) = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \quad (2.1c)$$

$$H_{SC} = |\phi_L\rangle \langle \phi_L| + |\phi_R\rangle \langle \phi_R|, \quad (2.1d)$$

$$H_{TUN} = t_L(\hat{x}) \sum_{n_L} (|n_L + 1\rangle \langle n_L| \otimes |0\rangle \langle 1| + |n_L\rangle \langle n_L + 1| \otimes |1\rangle \langle 0|) + \quad (2.1e)$$

$$t_R(\hat{x}) \sum_{n_R} (|n_R + 1\rangle \langle n_R| \otimes |0\rangle \langle 1| + |n_R\rangle \langle n_R + 1| \otimes |1\rangle \langle 0|). \quad (2.1f)$$

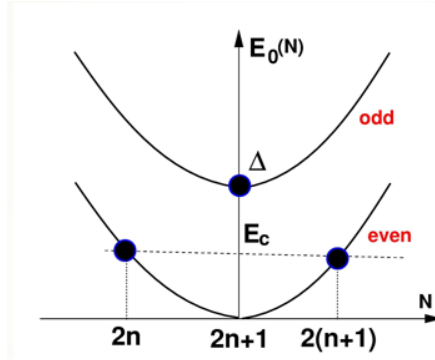
Član hamiltonijana  $H_{HO}$  hamiltonijan je harmoničkog oscilatora te opisuje mehaničke stupnjeve slobode kvantne točke. Operatori  $\hat{P} = \sqrt{\frac{1}{\hbar m \omega}} \hat{p}$ ,  $\hat{X} = \sqrt{\frac{\hbar}{m \omega}} \hat{x}$  re-skalirani su operatori položaja i impulsa, a operatori  $a$  i  $a^\dagger$  su operatori stvaranja i poništenja bozonskih pobuđenja harmoničkog oscilatora.

$H_{SC}$  opisuje stupnjeve slobode povezane sa supravodljivim kontaktima. Koristeći činjenice da ukupni hamiltonijan implicira da su  $\phi_L$  i  $\phi_R$  dobri kvantni brojevi te da se supravodljivi kontakti nalaze u tim stanjima (kontrolirano s  $V$ ), možemo zanemariti taj član u daljnjem razmatranju, budući da on ne utječe na dinamiku sustava.

Preostala dva člana opisat ćemo u zasebnim potpoglavljima.

### 2.1 Elektrostatski dio hamiltonijana

Izraz (2.1b) predstavlja elektrostatsku energiju kvantne točke. Navedeni izraz već je pojednostavljen izraz za elektrostatsku energiju. Naime, već se promatra kvantna točka kao dvorazinski kvantni sustav.



Slika 2.1: Elektrostatska energija kvantne točke  $E_0(N)$  u ovisnosti o broju elektrona  $N$  na kvantnoj točki uz poseban odabir napona vrata  $\alpha V_G = 2n + 1$ . Stanja s  $N = 2n$  odnosno  $N = 2(n + 1)$  elektrona čine degenerirano osnovno stanje sustava s energijom  $E_C = \frac{e^2}{2C}$ . Stanje s neparnim brojem elektrona  $N = 2n + 1$  odvojeno je energetske procijepom  $\Delta$  od osnovnog stanja.

Stoga, krenimo od općenitijeg izraza za elektrostatsku energiju supravodljive kvantne točke [13]:

$$E_C = \frac{e^2}{2C}(N - \alpha V_G)^2 + \Delta_N, \quad (2.2a)$$

$$\Delta_N = \begin{cases} 0, & N = 2n \\ \Delta, & N = 2n + 1 \end{cases}. \quad (2.2b)$$

$N$  je broj elektrona na kvantnoj točki,  $\alpha V_G$  inducirani naboj na kvantnoj točki uzrokovan naponom vrata  $V_G$ , a  $C$  ukupni kapacitet kvantne točke.  $\Delta$  je energetske procijep iz BCS teorije supravodljivosti (energetske procijep između energije kondenzata Cooperovih parova i energije pobuđenja). Taj član posljedica je toga što svaki novi Cooperov par "ulazi" u kondenzat osnovnog stanja zajedno s prijašnjim parovima, dok će nespareni elektroni popunjavati pobuđena kvazičestična stanja (koja su procijepom  $\Delta$  odvojena od osnovnog stanja). Ako je  $\Delta > \frac{e^2}{2C}$ , osnovno stanje (elektrostatskog dijela hamiltonijana) kvantne točke nužno će biti ono s parnim brojem elektrona.

Odabirom  $\alpha V_G = 2n + 1$ , osnovno stanje kvantne točke s  $2n$  i  $2(n + 1)$  elektrona postaje degenerirano (Slika 2.1). Dva stanja koja se razlikuju za jedan Cooperov par imaju jednaku energiju.

Ako je  $\Delta \gg \frac{e^2}{2C}$ , prvo energetske stanje iznad osnovnog (dodavanje još jednog Cooperovog para), ima energiju  $\frac{9e^2}{2C}$  veću od osnovnog stanja. Stoga, ako je karakteristična energija tuneliranja (u idućem potpoglavlju ćemo vidjeti da to odgovara

Josephsonovoj energiji  $E_J$ ) manja od razmaka  $\frac{9e^2}{2C}$  između osnovnog i pobuđenog elektrostatskog stanja, električne stupnjeve slobode kvantne točke možemo promatrati kao dvorazinski kvantni sustav (qubit). Ova dva degenerirana stanja kvantne točke, koja se razlikuju za jedan Cooperov par, označavat ćemo s  $|0\rangle \equiv |2n\rangle$  i  $|1\rangle \equiv |2(n+1)\rangle$ .

Uz ovaj specijalni odabir  $V_G$ ,  $H_C$  ne doprinosi dinamici sustava u izrazu za ukupni hamiltonijan (2.1).

## 2.2 Hamiltonijan tuneliranja

Promotrimo sada  $H_{TUN}$ , dio hamiltonijana za koji ćemo ustvrditi da je odgovoran za vezanje električnih i mehaničkih stupnjeva slobode kvantne točke. Stanja  $|0\rangle$  i  $|1\rangle$  kvantne točke opisana su u prošlom potpoglavlju. Stanja  $|n_L\rangle$  i  $|n_R\rangle$  svojstvena su stanja operatora broja lijevog odnosno desnog supravodljivog kontakta. Iz oblika (2.1e) vidljivo je da taj član opisuje tuneliranje Cooperovih parova s lijevog odnosno desnog supravodljivog kontakta na kvantnu točku i obrnuto. Funkcije  $t_L(\hat{x})$  i  $t_R(\hat{x})$  predstavljaju amplitude tuneliranja Cooperovih parova s lijevog odnosno desnog supravodljivog kontakta. Amplituda ovisi o poziciji kvantne točke  $x$  budući da gustoća Cooperovih parova koji tuneliraju trne eksponencijalno s udaljenosti od supravodiča. Stoga amplitude imaju oblik:

$$t_L(x) = -\frac{E_J}{2} e^{-\frac{\hat{x}}{\lambda}}, \quad (2.3a)$$

$$t_R(x) = -\frac{E_J}{2} e^{\frac{\hat{x}}{\lambda}}, \quad (2.3b)$$

gdje je  $E_J$  tzv. Josephsonova energija koja opisuje energetska skalu tuneliranja Cooperovih parova u Josephsonovom spoju. Efektivna duljina tuneliranja  $\lambda$  predstavlja prostornu skalu za duljinu prodiranja valne funkcije u klasično zabranjeno područje. Za promatrani sustav je  $\lambda \gg x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ , gdje je  $x_0$  amplituda oscilacija osnovnog stanja ("zero-mode oscilacije"). Stoga, prirodno je uvesti mali parametar:

$$\epsilon = \frac{x_0}{\lambda} \ll 1. \quad (2.4)$$



Uvodeći operator  $\hat{X} = \frac{\hat{x}}{x_0}$  te razvijajući eksponencijale po malom parametru  $\epsilon$ , amplitude tuneliranja mogu se zapisati u obliku:

$$t_L \approx \frac{-E_J}{2}(1 - \epsilon\hat{X}), \quad (2.5a)$$

$$t_R \approx \frac{-E_J}{2}(1 + \epsilon\hat{X}). \quad (2.5b)$$

Nadalje, izraz (2.1e) prirodnije je prikazati u bazi operatora faze supravodljivih kontakata, budući da se oni nalaze u svojstvenim stanjima faze, te da se korištenjem izraza (1.7) hamiltonijan tuneliranja (2.1e) svodi na dijagonalnu formu u prostoru stanja supravodljivih kontakata:

$$H_{TUN} = \frac{-E_J}{2}(1 - \epsilon\hat{X})(e^{-\hat{\phi}_L} \otimes |0\rangle\langle 1| + e^{\hat{\phi}_L} \otimes |1\rangle\langle 0|) + \frac{-E_J}{2}(1 + \epsilon\hat{X})(e^{-\hat{\phi}_R} \otimes |0\rangle\langle 1| + e^{\hat{\phi}_R} \otimes |1\rangle\langle 0|). \quad (2.6)$$

Ovaj izraz može se svesti na oblik:

$$H_{TUN} = -E_J \cos(\phi) \hat{\sigma}_x + \epsilon E_J \sin(\phi) \hat{X} \hat{\sigma}_y \quad (2.7)$$

gdje je  $\phi = \frac{\phi_R - \phi_L}{2}$ , a  $\hat{\sigma}_i$  su odgovarajuće Paulijeve matrice. Sada smo spremni promotriti pojednostavljeni ukupni hamiltonijan sustava.

### 2.3 Ukupni hamiltonijan

Uz specijalni odabir  $V_G$  i navedene aproksimacije, ukupni hamiltonijan ima oblik:

$$H(t) = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) - E_J \cos(\phi(t)) \sigma_x + \epsilon E_J \sin(\phi(t)) \hat{X} \sigma_y. \quad (2.8)$$

Faza  $\phi(t)$  određena je prednaponom  $V(t)$  (izraz (1.2b)) koji se može kontrolirati.

## 3 Analitičko rješenje

### 3.1 Slika interakcije

Kako bismo lakše izračunali operator vremenske evolucije sustava  $\hat{U}(t, t')$  promatramo sustav u slici interakcije. Stoga trebamo hamiltonijan (2.8) razdvojiti na dva dijela:

$$H = H_0 + H_I, \quad (3.1a)$$

$$H_0 = -E_j \cos(\phi) \sigma_x + \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right), \quad (3.1b)$$

$$H_I = \epsilon E_J \sin(\phi) \hat{X} \sigma_y. \quad (3.1c)$$

Valne funkcije u slici interakcije  $|\tilde{\psi}\rangle$  i u Schrödingerovoj slici  $|\psi\rangle$  povezani su relacijom

$$|\tilde{\psi}\rangle = U_0^\dagger |\psi\rangle. \quad (3.2)$$

Operator  $U_0$  zadovoljava Schrödingerovu jednadžbu s hamiltonijanom  $H_0$ :

$$i\hbar \frac{\partial U_0(t, t')}{\partial t} = H_0 U_0(t, t'). \quad (3.3)$$

Valna funkcija u Schrödingerovoj slici evoluira operatorom  $U$  koji zadovoljava Schrödingerovu jednadžbu oblika (3.3) s ukupnim hamiltonijanom  $H$ , dok valna funkcija u slici interakcije evoluira operatorom  $\tilde{U}_I$  koji zadovoljava jednadžbu:

$$i\hbar \frac{\partial \tilde{U}_I(t, t')}{\partial t} = \tilde{H}_I \tilde{U}_I(t, t'), \quad U_I(t, t) = \mathbb{I}, \quad (3.4)$$

gdje je  $\tilde{H}_I$  hamiltonijan interakcije u slici interakcije:

$$\tilde{H}_I = U_0^\dagger H_I U_0. \quad (3.5)$$

Stoga valne funkcije evoluiraju kao:

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = \tilde{U}_I(t, t_0) |\tilde{\psi}(t_0)\rangle, \quad (3.6a)$$

$$|\psi(t)\rangle = U_0(t) \tilde{U}_I(t, t_0) U_0(t_0)^\dagger |\psi(t_0)\rangle. \quad (3.6b)$$

Strategija je najprije riješiti jednadžbu za  $U_0$  pomoću kojeg onda izračunamo  $\tilde{H}_I$  iz jednadžbe (3.5). Uz poznavanje  $\tilde{H}_I$ , rješavajući jednadžbu (3.4) može se izračunati operator evolucije u slici interakcije  $\tilde{U}_I$ . Primijenimo ovu strategiju za konkretan izbor prednapona  $V(t)$ .

### 3.2 Konstantan napon

Najprije ćemo promotriti slučaj konstantnog napona  $V(t) = V_0$  primijenjenog na supravodljive kontakte [14]. U tome je slučaju razlika faza supravodiča:

$$\phi = \nu t, \quad (3.7)$$

$$\nu = \frac{2eV}{\hbar} \quad (3.8)$$

Veličinu  $\nu$  nazivamo Josephsonovom frekvencijom. Također pretpostavljamo da je vlastita frekvencija oscilatora višekratnik Josephsonove frekvencije:

$$\omega = k\nu, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.9)$$

što je esencijalna pretpostavka za koherentno tuneliranje Cooperovih parova i stvaranje koherentnih stanja. Kroz izvod ćemo  $\omega$  pisati u obliku (3.9), a na kraju ćemo promotriti rezonantni slučaj  $k = 1$ . Prvi korak u pronalaženju operatora evolucije, izračunati je hamiltonijan interakcije u slici interakcije pomoću (3.5). Stoga moramo odrediti operator  $U_0$ . Budući da za promatrani hamiltonijan vrijedi:

$$[H_0(t), H_0(t')] = 0 \quad (3.10)$$

možemo integrirati jednadžbu (3.3):

$$U_0(t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_0^t H_0(t') dt'\right) \quad (3.11a)$$

$$U_0(t) = \exp\left(-i\omega a^\dagger a t + i\frac{E_J}{\nu\hbar} \sin(\nu t) \sigma_x\right). \quad (3.11b)$$

Operator  $\hat{X}$  iz  $H_I$  pogodnije je napisati u obliku:  $\hat{X} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger)$ . Sada možemo izračunati operator  $\tilde{H}_I$  koristeći Hadamardovu lemu i komutacijske relacije bozon-

skih operatora i sigma matrica:

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!}[A, [A, B]] + \dots, \quad (3.12a)$$

$$[a^\dagger a, a] = -a, \quad [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger, \quad (3.12b)$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k. \quad (3.12c)$$

Transformirajmo najprije mehaničke stupnjeve slobode  $H_I$ :

$$e^{i\omega a^\dagger a}(a + a^\dagger)e^{-i\omega a^\dagger a} = a^\dagger e^{i\omega t} + a e^{-i\omega t}. \quad (3.13)$$

Zatim transformirajmo električne stupnjeve slobode:

$$e^{-i\frac{E_J}{\hbar\nu} \sin(\nu t)\sigma_x} \sigma_y e^{i\frac{E_J}{\hbar\nu} \sin(\nu t)\sigma_x} = \sigma_y \cos\left(\frac{2E_J}{\hbar\nu} \sin(\nu t)\right) + \sigma_z \sin\left(\frac{2E_J}{\hbar\nu} \sin(\nu t)\right). \quad (3.14)$$

Hamiltonijan interakcije u slici interakcije tada poprima oblik:

$$\tilde{H}_I = \epsilon E_J \left( f_1(t) \hat{X} \sigma_y + f_2(t) \hat{P} \sigma_y + f_3(t) \hat{X} \sigma_z + f_4(t) \hat{P} \sigma_z \right), \quad (3.15)$$

pri čemu su:

$$f_1(t) = \cos\left(\frac{2E_J}{\hbar\nu} \sin(\nu t)\right) \sin(\nu t) \cos(k\nu t), \quad (3.16a)$$

$$f_2(t) = \cos\left(\frac{2E_J}{\hbar\nu} \sin(\nu t)\right) \sin(\nu t) \sin(k\nu t), \quad (3.16b)$$

$$f_3(t) = \sin\left(\frac{2E_J}{\hbar\nu} \sin(\nu t)\right) \sin(\nu t) \cos(k\nu t), \quad (3.16c)$$

$$f_4(t) = \sin\left(\frac{2E_J}{\hbar\nu} \sin(\nu t)\right) \sin(\nu t) \sin(k\nu t). \quad (3.16d)$$

Uz izračunati  $\tilde{H}_I$  moguće je odrediti operator  $\tilde{U}_I$ , no budući da  $\tilde{H}_I$  ne komutira u različitim trenutcima, nije moguće samo integrirati izraz (3.4). Stoga smo primorani koristiti aproksimativne metode. Koristit ćemo aproksimaciju stacionarne faze (engl. Rotating Wave Approximation, RWA); zanemarit ćemo sve oscilatorne (nestacionarne) doprinose hamiltonijanu.

To ćemo postići razvijanjem funkcija  $f_i(t)$  u Fourierov red:

$$f_i(x) = \frac{a_{0i}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{ni} \cos(nx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_{ni} \sin(nx), \quad x = \nu t \quad (3.17)$$

i zanemarivanjem svih članova u razvoj osim konstantnog  $a_{0i}$ :

$$a_{0i} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_i(x) dx. \quad (3.18)$$

U RWA aproksimaciji  $\tilde{H}_I$  možemo napisati u vremenski neovisnom obliku:

$$\tilde{H}_I = \frac{\epsilon E_J}{2} \left( a_{01} \hat{X} \sigma_y + a_{02} \hat{P} \sigma_y + a_{03} \hat{X} \sigma_z + a_{04} \hat{P} \sigma_z \right). \quad (3.19)$$

Odmah se može zaključiti da je  $a_{01} = a_{04} = 0$  jer su  $f_1(x)$  i  $f_2(x)$  neparne funkcije. U slučaju neparnog  $k$ , što pokriva i rezonantni slučaj ( $k=1$ ), integriranjem izraza (3.18) dobiva se da je  $a_{03} = 0$ , dok je koeficijent  $a_{02}$  jedini različit od nule:

$$a_{02} = J_{k-1} \left( \frac{2E_J}{\hbar\nu} \right) - J_{k+1} \left( \frac{2E_J}{\hbar\nu} \right), \quad (3.20)$$

gdje je  $J_n(y)$   $n$ -ta Besselova funkcija:

$$J_n(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(nx - y \sin(x)) dx. \quad (3.21)$$

Budući da  $\tilde{H}_I$  u RWA aproksimaciji ne ovisi o vremenu, jednadžbu (3.4) možemo integrirati te dobivamo:

$$\tilde{U}_I = \exp \left( -i\epsilon\alpha t \hat{P} \sigma_y \right), \quad (3.22)$$

pri čemu je:

$$\alpha = \frac{E_J}{2\hbar} \left( J_{k-1} \left( \frac{2E_J}{\hbar\nu} \right) - J_{k+1} \left( \frac{2E_J}{\hbar\nu} \right) \right). \quad (3.23)$$

Sada operator evolucije možemo primijeniti na početno stanje sustava. Za početno stanje sustava uzimamo osnovno stanje sustava prije uključivanja napona; direktni produkt svojstvenog stanja  $\sigma_x$  matrice  $|+x\rangle$  (sa svojstvenom vrijednosti  $+1$ ) i osnovnog stanja harmoničkog oscilatora:

$$|\psi(t=0)\rangle = |+x\rangle \otimes |0\rangle. \quad (3.24)$$

Prije evoluiranja stanja zamijetimo da je:

$$\exp(-i\bar{X}\hat{P})|0\rangle = |\bar{X}\rangle \quad (3.25)$$

operator prostorne translacije. Dobiveno stanje,  $|\bar{X}(t)\rangle$ , koherentno je stanje s  $\langle\hat{X}\rangle = \bar{X}(t)$ . Stoga zaključujemo da operator  $\tilde{U}_i$  djeluje na direktni produkt svojstvenih stanja  $\sigma_y$  matrice  $|\pm y\rangle$  i osnovnog stanja harmoničkog oscilatora na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \exp(-i\epsilon\alpha t \hat{P}\hat{\sigma}_y)|\pm y\rangle \otimes |0\rangle &= |\pm y\rangle \otimes \exp(\mp i\epsilon\alpha t \hat{P})|0\rangle \\ &= |\pm y\rangle \otimes |\pm\alpha\epsilon t\rangle. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Primjenjujući ovaj rezultat na početno stanje (3.24) i razvijajući  $|x\rangle$  u bazi svojstvenih vektora  $\sigma_y$  matrice, dobivamo evoluiranu valnu funkciju u slici interakcije:

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = \frac{1+i}{2}|+y\rangle \otimes |\alpha\epsilon t\rangle - \frac{1-i}{2}|-y\rangle \otimes |-\alpha\epsilon t\rangle. \quad (3.27)$$

$|\pm y\rangle$  svojstvena su stanja operatora  $\sigma_y$ . Dobiveno stanje isprepleteno je stanje qubitnih stanja i koherentnih stanja koja se šire u suprotnim smjerovima (shematski prikaz na Slici 1.1). U Schrödingerovoj slici valna funkcija ostaje sličnog oblika kao (3.27). Koherentna stanja evoluirat će u oblik  $|e^{-i\omega t}(\pm\alpha\epsilon t)\rangle$  (tj. kružit će u faznom prostoru po putanji klasičnog harmoničkog oscilatora), dok će qubitna stanja evoluirati pod utjecajem operatora  $\sigma_x$ :  $|\pm y(t)\rangle = e^{i\frac{E_J}{\hbar\nu}\sin(\nu t)\sigma_x}|\pm y\rangle$ .

### 3.2.1 Wignerova funkcija - koherentna stanja

Kako bi prikazali da na ovaj način nismo dobili željena "c-stanja", izračunat ćemo i grafički prikazati Wignerovu funkciju mehaničkog dijela valne funkcije. Wignerova funkcija je kvazidistribucija vjerojatnosti koja preslikava Schrödingerovu jednadžbu u distribuciju vjerojatnosti u faznom prostoru (Svojstva Wignerove funkcije opisana su u Dodatku A).

Wignerova funkcija za stanje okarakterizirano matricom gustoće  $\hat{\rho}$  računa se kao Weylova transformacija matrice gustoće sustava [15]:

$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{-\frac{ipy}{\hbar}} \langle x + \frac{y}{2} | \hat{\rho} | x - \frac{y}{2} \rangle. \quad (3.28)$$

Ukoliko  $\hat{\rho}$  određuje čisto stanje opisano valnom funkcijom  $\psi(x)$ , Wignerovu funkciju možemo izračunati kao:

$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int e^{\frac{-ipy}{\hbar}} \psi^* \left(x - \frac{y}{2}\right) \psi \left(x + \frac{y}{2}\right). \quad (3.29)$$

Kako bismo izračunali Wignerovu funkciju mehaničkog dijela valne funkcije (3.27), potrebno je prvo izračunati reduciranu matricu gustoće mehaničkog podsustava  $\hat{\rho}_m$  uzimajući parcijalni trag matrice gustoće složenog sustava po qubitnim stupnjevima slobode. Izračunajmo najprije matricu gustoće složenog sustava:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) &= |\tilde{\psi}(t)\rangle \langle \tilde{\psi}(t)| \\ \hat{\rho}(t) &= \frac{1}{2} |+\alpha\epsilon t\rangle \langle +\alpha\epsilon t| + \frac{i}{2} |+\alpha\epsilon t\rangle \langle -\alpha\epsilon t| - \frac{i}{2} |-\alpha\epsilon t\rangle \langle +\alpha\epsilon t| + \frac{1}{2} |-\alpha\epsilon t\rangle \langle -\alpha\epsilon t|. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Uzimajući parcijalni trag po qubitnim stupnjevima slobode dobivamo:

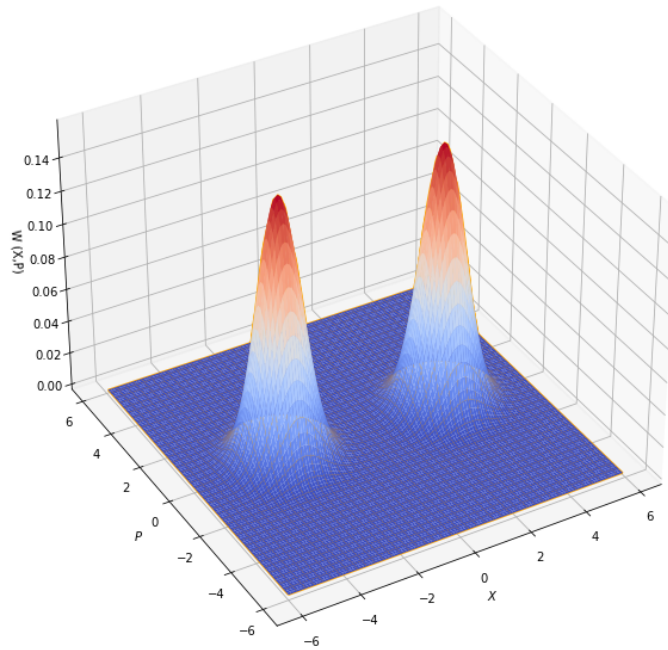
$$\begin{aligned} \hat{\rho}_m(t) &= \text{Tr}_q [\hat{\rho}(t)] \\ \hat{\rho}_m(t) &= \frac{1}{2} |+\alpha\epsilon t\rangle \langle +\alpha\epsilon t| + \frac{1}{2} |-\alpha\epsilon t\rangle \langle -\alpha\epsilon t|. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Dobivena matrica gustoće opisuje miješano stanje dvaju koherentnih stanja amplituda suprotnog predznaka  $\pm\alpha\epsilon t$ , a ne superpoziciju istih tj. "c-stanje". Wignerova funkcija mehaničkog podsustava je:

$$W(x, p) = \frac{1}{2} \left( W_0(x - \alpha\epsilon t \cdot x_0, p) + W_0(x + \alpha\epsilon t \cdot x_0, p) \right), \quad (3.32)$$

pri čemu je  $W_0(x - \bar{x}, p - \bar{p})$  Wignerova funkcija koherentnog stanja s očekivanjem  $\langle \hat{x} \rangle = \bar{x}$ ,  $\langle \hat{p} \rangle = \bar{p}$ :

$$W_0(x - \bar{x}, p - \bar{p}) = \frac{1}{\pi\hbar} \cdot e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{x_0^2}} \cdot e^{-\frac{(p-\bar{p})^2}{\hbar^2} \frac{x_0^2}{2}}. \quad (3.33)$$



Slika 3.1: **Wignerova funkcija mehaničkog podsustava uz konstantan napon:** Wignerova funkcija mehaničkog podsustava u stanju (3.31) u trenutku  $t = 9T$  ( $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ). Prikazano stanje miješano je stanje dvaju koherentnih stanja amplituda suprotnih predznaka. Osi na grafu predstavljaju reskalirani položaj  $X = \frac{x}{x_0}$  i impuls  $P = \frac{p x_0}{\hbar}$

Grafički prikaz Wignerove funkcije na Slici 3.1 jasno dočarava da je stanje mehaničkog podsustava miješano stanje dvaju koherentnih stanja suprotnih amplituda kao što smo zaključili i iz oblika (3.31). Amplitude ovih koherentnih stanja rastu linearno u vremenu povećavajući tako međusobnu udaljenost u faznom prostoru. Budući da preklop dvaju koherentnih stanja opada eksponencijalno s udaljenosti stanja u faznom prostoru ( $|\langle \alpha \epsilon t | -\alpha \epsilon t \rangle|^2 \propto e^{-2\epsilon t^2}$ ), ova dva stanja s vremenom postaju praktički ortogonalna, tj. međusobno razlučiva.

Dakle, dobiveno stanje klasični je ansambl dvaju razlučivih koherentnih stanja, a ne kvantna superpozicija istih. Neklasično ponašanje u Wignerovoj funkciji očituje se u negativnim vrijednostima distribucije (Dodatak A.3). Kao što je vidljivo na grafičkom prikazu, dobiveno stanje ne prikazuje neklaasično ponašanje iz već objašnjenih razloga.

Kako bismo dobili željenu kvantnu superpoziciju koherentnih stanja, a ne miješano stanje istih, potrebno je sustav dovesti u stanje u kojem su qubitna stanja isprepletana s "c-stanjima". U nastavku je opisan protokol za kontrolu prednapona  $V(t)$  kojim se može dobiti željeno stanje.



### 3.3 Protokol okretanja napona

Jedna od ideja za dobivanje željenog stanja je da razlika faza prije uključivanja prednapona bude različita od nule:  $\phi(t=0) = -\phi_0$  te da se u nekom trenutku  $t_1$ , prednaponu promijeni predznak:

$$V(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ V_0, & t \in [0, t_1] \\ -V_0, & t > t_1 \end{cases} . \quad (3.34)$$

Koristeći (1.2b) i (3.3) dobiva se:

$$U_0(t) = \begin{cases} \exp(-i\omega a^\dagger at + \frac{iE_J}{\hbar\nu} h(t, \phi_0)\sigma_x), & t \in [0, t_1] \\ \exp(-i\omega a^\dagger at + \frac{iE_J}{\hbar\nu} g(t, t_1, \phi_0)\sigma_x), & t > t_1 \end{cases} \quad (3.35)$$

gdje je  $h(t, \phi_0) = \sin(\nu t - \phi_0) + \sin(\phi_0)$ , a  $g(t, t_1, \phi_0) = \sin(\nu t - (2\nu t_1 - \phi_0)) + \sin(\phi_0) + 2\sin(\nu t_1 - \phi_0)$ . Stoga će se i oblik za  $\tilde{H}_I$  razlikovati za ova dva perioda. Za predloženi protokol također ćemo koristiti RWA aproksimaciju, što će voditi na isti oblik kao i (3.19) samo uz druge koeficijente:

$$\tilde{H}_I = \frac{\epsilon E_J}{2} \left[ (b_{01}\hat{X} + b_{02}\hat{P})\sigma_y + (b_{03}\hat{X} + b_{04}\hat{P})\sigma_z \right], \quad t \in [0, t_1], \quad (3.36a)$$

$$\tilde{H}_I = \frac{\epsilon E_J}{2} \left[ (c_{01}\hat{X} + c_{02}\hat{P})\sigma_y + (c_{03}\hat{X} + c_{04}\hat{P})\sigma_z \right], \quad t > t_1. \quad (3.36b)$$

Stoga, moramo evoluirati sustav najprije do trenutka  $t_1$  hamiltonijanom (3.36a), a nakon njega hamiltonijanom (3.36b). Kako bismo dobili željeni rezultat, do trenutka  $t_1$  trebamo dobiti stanja u kojem su 'suprotna' koherentna stanja vezana na svojstvena stanja jedne od sigma matrica (kao u primjeru konstantnog napona), primjerice na  $\sigma_z$ ; što bi zahtijevalo da su koeficijenti  $b_{01} = b_{02} = 0$ . Nakon okretanja napona, htjeli bismo da se 'suprotna' koherentna stanja razdvoje na dva nova koherentna stanja koja su sada vezana na svojstvena stanja operatora  $\sigma_y$ ; to bi zahtijevalo da je  $c_{03} = c_{04} = 0$ . Izrazi za navedene koeficijente ne mogu se napisati u zatvorenoj formi; u Dodatku B nalaze se eksplicitno napisani izrazi. Iz njih slijedi da je traženi protokol moguć

ostvariti uz:

$$A \sin(\phi_0) = (2K + 1) \frac{\pi}{2}, \quad K \in \mathbb{Z}, \quad (3.37a)$$

$$\nu t_1 = \arcsin \left( \left( M - \frac{2K + 1}{2} \right) \frac{\sin(\phi_0)}{2K + 1} \right) + \phi_0 + R\pi, \quad M, R \in \mathbb{Z}, \quad (3.37b)$$

gdje smo definirali  $A = \frac{2E_J}{\hbar\nu}$ . Budući da se  $\nu$  može kontrolirati (preko iznosa  $V_0$ ), a time i  $A$ , možemo ispuniti uvjet (3.37a). Trenutak okretanja napona u eksperimentu bilo bi teško egzaktno pogoditi, no u principu možemo izabrati trenutak okretanja napona  $t_1$  da zadovoljava uvjet (3.37b). Pogledajmo evoluciju sustava uz ovako odabrane parametre. Do trenutka  $t_1$ , sustav evoluira pod utjecajem operatora:

$$\tilde{U}_I^{t_1}(t) = \exp \left( -i \frac{\epsilon E_J t}{2\hbar} (b_{03} \hat{X} + b_{04} \hat{P}) \sigma_z \right). \quad (3.38)$$

Prije nego evoluiramo početno stanje sustava, definirajmo operator pomaka u mehaničkom potprostoru:

$$D(\alpha) |0\rangle = |\alpha\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \quad (3.39a)$$

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}, \quad (3.39b)$$

$$D(\alpha) = e^{i(\bar{P}\hat{X} - \bar{X}\hat{P})}, \quad (3.39c)$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{X} + i\bar{P}) \quad (3.39d)$$

gdje je  $|\alpha\rangle$  koherentno stanje ( $a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ ). Najprije definirajmo:

$$\bar{P}_1(t_1) = \frac{\epsilon E_J t_1}{2\hbar} b_{03} \quad (3.40a)$$

$$\bar{X}_1(t_1) = -\frac{\epsilon E_J t_1}{2\hbar} b_{04} \quad (3.40b)$$

$$\alpha_1(t_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{X}_1(t_1) + i\bar{P}_1(t_1)). \quad (3.40c)$$

Djelovanjem operatora (3.38) na početno stanje (3.24) dobiva se:

$$|\tilde{\psi}(t_1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} | +z \rangle e^{-i(\bar{P}_1(t_1)\hat{X} - \bar{X}_1(t_1)\hat{P})} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} | -z \rangle e^{i(\bar{P}_1(t_1)\hat{X} - \bar{X}_1(t_1)\hat{P})} |0\rangle. \quad (3.41)$$

Stanja  $|\pm z\rangle$  svojstvena su stanja  $\sigma_z$  matrice qubitnog podsustava. U dobivenom izrazu prepoznajemo operator pomaka u mehaničkom potprostoru (3.39c) pa stoga

dobivamo:

$$|\tilde{\psi}(t_1)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle |-\alpha_1(t_1)\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle |\alpha_1(t_1)\rangle. \quad (3.42)$$

Nakon trenutka  $t_1$ , sustav evoluira pod utjecajem operatora:

$$\tilde{U}_I(t) = \exp\left(-i\frac{\epsilon E_J(t-t_1)}{2\hbar}(c_{01}\hat{X} + c_{02}\hat{P})\sigma_y\right). \quad (3.43)$$

Koristeći istu strategiju kao i kod operatora evolucije do trenutka  $t_1$ , definirajući  $\alpha_2$  za operator pomaka  $D(\alpha_2)$  te koristeći relaciju:

$$D(\alpha_2)|\alpha_1\rangle = e^{i\text{Im}(\alpha_2\alpha_1^*)}|\alpha_1 + \alpha_2\rangle \quad (3.44)$$

za stanje u trenutku  $t > t_1$  dobiva se:

$$\begin{aligned} |\tilde{\psi}(t)\rangle = & \frac{1}{2} |+\rangle \left( \beta(t, t_1) |-\alpha_1(t_1) - \alpha_2(t - t_1)\rangle - i\beta^*(t, t_1) |\alpha_1(t_1) - \alpha_2(t - t_1)\rangle \right) \\ & + \frac{1}{2} |-\rangle \left( \beta^*(t, t_1) |-\alpha_1(t_1) + \alpha_2(t - t_1)\rangle + i\beta(t, t_1) |\alpha_1(t_1) + \alpha_2(t - t_1)\rangle \right), \end{aligned} \quad (3.45)$$

pri čemu smo definirali  $\beta(t, t_1) = e^{\text{Im}(\alpha_2\alpha_1^*)}$ . Za evoluciju stanja u Schrödingerovoj slici dobili bismo ekvivalentan rezultat kao u slučaju konstantnog napona. Dobiveno stanje je ono što smo tražili: isprepletano stanje qubitnog stanja sa superpozicijom koherentnih stanja ("c-stanje"). Kako bismo potvrdili da se mehanički podsustav ponaša kao željena kvantna superpozicija, izračunajmo Wignerovu funkciju.

### 3.3.1 Wignerova funkcija - "c-stanja"

Matrica gustoće složenog sustava  $\hat{\rho}(t) = |\tilde{\psi}(t)\rangle \langle \tilde{\psi}(t)|$  je:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}(t) = & \frac{1}{2} |+\rangle |\psi_+(t)\rangle \langle \psi_+(t)| \langle +| + \frac{1}{2} |+\rangle |\psi_+(t)\rangle \langle \psi_-(t)| \langle -| \\ & + \frac{1}{2} |-\rangle |\psi_-(t)\rangle \langle \psi_+(t)| \langle +| + \frac{1}{2} |-\rangle |\psi_-(t)\rangle \langle \psi_-(t)| \langle -|. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Uzimajući parcijalni trag po qubitnim stupnjevima slobode dobivamo reduciranu matricu gustoće mehaničkog podsustava:

$$\begin{aligned}\hat{\rho}_m(t) &= \text{Tr}_q[\hat{\rho}(t)] \\ \hat{\rho}_m(t) &= \frac{1}{2} |\psi_+(t)\rangle \langle \psi_+(t)| + \frac{1}{2} |\psi_-(t)\rangle \langle \psi_-(t)|,\end{aligned}\quad (3.47)$$

pri čemu smo definirali:

$$|\psi_+(t)\rangle = \begin{cases} |-\alpha_1(t)\rangle, & t \in [0, t_1] \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \beta(t, t_1) |-\alpha_1(t_1) - \alpha_2(t - t_1)\rangle - i\beta^*(t, t_1) |\alpha_1(t_1) - \alpha_2(t - t_1)\rangle \right) & t > t_1 \end{cases}\quad (3.48a)$$

$$|\psi_-(t)\rangle = \begin{cases} |\alpha_1(t)\rangle, & t \in [0, t_1] \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \beta^*(t, t_1) |-\alpha_1(t_1) + \alpha_2(t - t_1)\rangle + i\beta(t, t_1) |\alpha_1(t_1) + \alpha_2(t - t_1)\rangle \right) & t > t_1 \end{cases}\quad (3.48b)$$

Dobivena matrica gustoće prije okretanja napona prikazuje miješano stanje dvaju koherentnih stanja suprotnih amplituda. Nakon okretanja napona, matrica gustoća prikazuje miješano stanje dvaju "c-stanja".

Wignerova funkcija prije okretanja napona ima oblik:

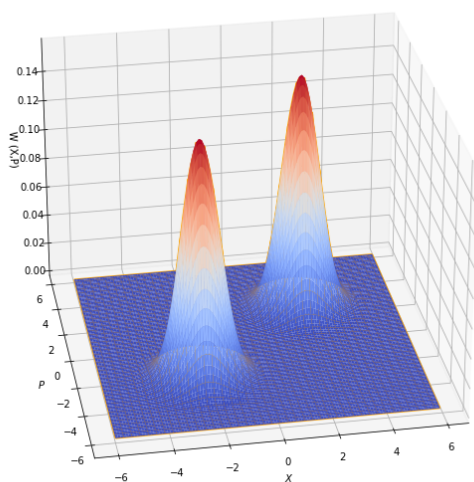
$$W(x, p) = \frac{1}{2} \left( W_0(x - x_1, p - p_1) + W_0(x + x_1, p + p_1) \right), \quad (3.49)$$

pri čemu je:

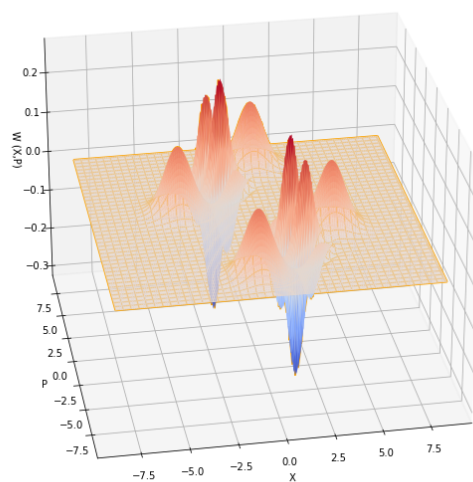
$$x_1 = \bar{X}_1 \cdot x_0, \quad p_1 = \bar{P}_1 \cdot \frac{\hbar}{x_0}. \quad (3.50)$$

Wignerova funkcija nakon okretanja napona ima oblik:

$$\begin{aligned}W(x, p) &= \frac{1}{2} \left( W_0(x - (x_1 + x_2), p - (p_1 + p_2)) + W_0(x - (x_2 - x_1), p - (p_2 - p_1)) \right) \\ &\quad - 2 \sin \left( \frac{2xp_1}{\hbar} - \frac{2px_1}{\hbar} + \gamma \right) W_0(x - x_2, p - p_2) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left( W_0(x + (x_1 + x_2), p + (p_1 + p_2)) + W_0(x + (x_2 - x_1), p + (p_2 - p_1)) \right) \\ &\quad + 2 \sin \left( \frac{2xp_1}{\hbar} - \frac{2px_1}{\hbar} - \gamma \right) W_0(x + x_2, p + p_2),\end{aligned}\quad (3.51)$$



(a)  $t = 10 T < t_1$



(b)  $t = 50 T > t_1$

**Slika 3.2: Wignerova funkcija mehaničkog podsustava uz okretanje polarizacije napona u trenutku  $t_1 = 10.23 T$  ( $T = \frac{2\pi}{\nu}$ )**

(a) Wignerova funkcija koja opisuje stanje mehaničkog podsustava (3.47) u trenutku  $t = 10 T < t_1$ . Prikazano stanje miješano je stanje dvaju koherentnih stanja.

(b) Wignerova funkcija koja opisuje stanje mehaničkog podsustava (3.47) u trenutku  $t = 50 T > t_1$ . Prikazano stanje miješano je stanje dvaju "c-stanja".

pri čemu je:

$$x_1 = \bar{X}_1 \cdot x_0, \quad p_1 = \bar{P}_1 \cdot \frac{\hbar}{x_0}, \quad x_2 = \bar{X}_2 \cdot x_0, \quad p_2 = \bar{P}_2 \cdot \frac{\hbar}{x_0}, \quad (3.52)$$

$$\gamma = \frac{3x_1p_2 - x_2p_1}{\hbar}.$$

Grafički prikaz Wignerove funkcije na Slici 3.2 pokazuje da se "c-stanja" stvaraju nakon okretanja polarizacije napona u točno odabranom trenutku. Prije okretanja napona (Slika 3.2a) stanje mehaničkog podsustava miješano je stanje dvaju koherentnih stanja suprotnih amplituda čija udaljenost u faznom prostoru raste linearno u vremenu. Wignerova funkcija pozitivna je u čitavom faznom prostoru, tj. ne pokazuje nekласično ponašanje. Nakon okretanja napona (Slika 3.2b), stanje mehaničkog podsustava miješano je stanje dvaju "c-stanja" čija udaljenost u faznom prostoru raste linearno u vremenu. Udaljenost koherentnih stanja koja čine "c-stanja" proporcionalna je vremenu  $t_1$ . Između koherentnih stanja koja čine "c-stanja" Wignerova funkcija poprima negativne vrijednosti što je znak nekласičnog ponašanja, tj. pokazatelj da smo ostvarili kvantnu superpoziciju stanja.

### 3.4 Entropija kvantne isprepletenosti

Kako bismo izračunali entropiju kvantne isprepletenosti

$$S(t) = \text{Tr} [\hat{\rho}_q(t) \ln(\hat{\rho}_q(t))] = \text{Tr} [\hat{\rho}_m(t) \ln(\hat{\rho}_m(t))] \quad (3.53)$$

potrebno je izračunati reduciranu matricu gustoće qubitnog podsustava provođenjem parcijalnog traga po mehaničkim stupnjevima slobode  $\hat{\rho}_q = \text{Tr}_m(\hat{\rho})$ , ili mehaničkog podsustava provođenjem parcijalnog traga po qubitnim stupnjevima slobode  $\hat{\rho}_m = \text{Tr}_q(\hat{\rho})$ . Entropiju je jednostavnije izračunati preko qubitne reducirane matrice  $\hat{\rho}_q$ . Stoga, napravimo parcijalni trag matrice gustoće (3.46) po mehaničkim stupnjevima slobode:

$$\begin{aligned} 2\hat{\rho}_q = & | +y \rangle \langle +y | \text{Tr} ( |\psi_+ \rangle \langle \psi_+ | ) + | +y \rangle \langle -y | \text{Tr} ( |\psi_+ \rangle \langle \psi_- | ) \\ & + | -y \rangle \langle +y | \text{Tr} ( |\psi_- \rangle \langle \psi_+ | ) + | -y \rangle \langle -y | \text{Tr} ( |\psi_- \rangle \langle \psi_- | ), \end{aligned} \quad (3.54)$$

što vodi na izraz:

$$\hat{\rho}_q(t) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \eta(t) \\ \eta^*(t) & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.55)$$

pri čemu je  $\eta(t) = \langle \psi_-(t) | \psi_+(t) \rangle$ :

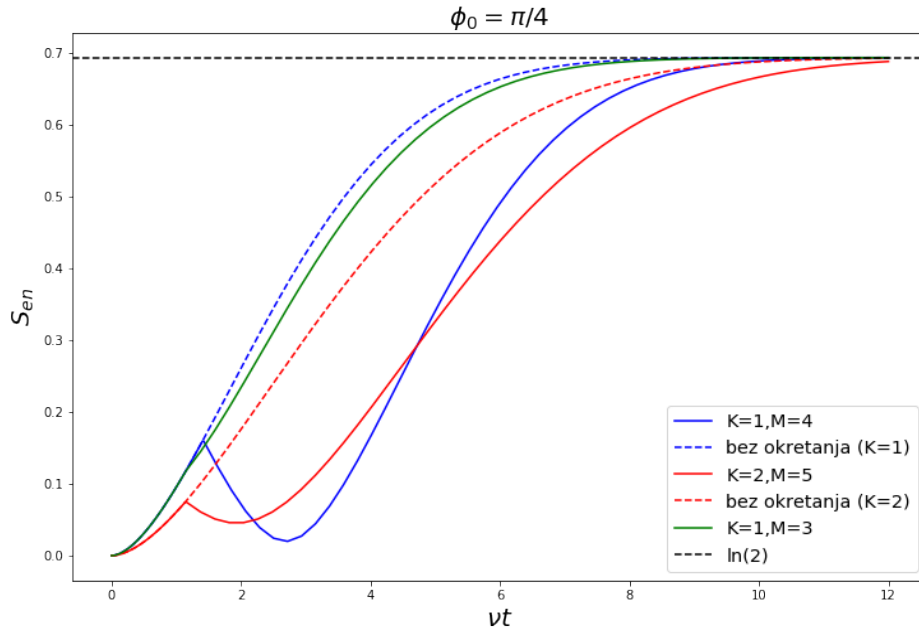
$$\eta(t) = \begin{cases} e^{-2|\alpha_1(t_1)|^2}, & t \in [0, t_1] \\ i \sin(4\beta(t)) e^{-2|\alpha_2(t-t_1)|^2} - \frac{i}{2} \left( e^{-2|\alpha_1(t_1)+\alpha_2(t-t_1)|^2} + e^{-2|\alpha_2(t-t_1)-\alpha_1(t_1)|^2} \right), & t > t_1 \end{cases} \quad (3.56)$$

Entropija ne ovisi o bazi u kojoj ju računamo, stoga ćemo dijagonalizirati matricu (4.64). Dijagonalizacijom se dobivaju svojstvene vrijednosti:

$$\lambda = \frac{1}{2} (1 \pm |\eta|^2). \quad (3.57)$$

Uvrštavajući dobivenu vrijednost u izraz (3.53) dobiva se:

$$S(t) = \ln 2 - \frac{1}{2} \ln(1 - |\eta(t)|^2) - \frac{1}{2} \ln \left( \frac{1 + |\eta(t)|}{1 - |\eta(t)|} \right). \quad (3.58)$$



Slika 3.3: **Entropija isprepletenosti:** Entropija kvantne isprepletenosti za različite izbore parametara  $K, M$  koji osiguravaju ispunjenje uvjeta (3.37a), (3.37b). Crtkanom linijom prikazana je entropija za protokole u kojima se ne okreće smjer napona

Na Slici 3.3 grafički je prikazana entropija sprezanja za različite protokole. Vidljivo je da u slučaju konstantnog napona, entropija monotono raste od nule (entropija čistog stanja) do maksimalne vrijednosti  $\ln 2$ . Za protokol s okretanjem smjera napona, ovisno o parametrima  $K$  i  $M$  iz uvjeta (3.37a), (3.37b), entropija raste, no u trenutku okretanja napona javlja se značajka koja prekida njezin monotoni rast da bi kasnije opet monotono rasla do maksimalne vrijednosti  $\ln 2$ .

## 4 Numeričko rješenje

U ovom poglavlju najprije će biti opisano kako postaviti sustav diferencijalnih jednadžbi za numeričko rješavanje evolucije sustava u Fockovoj bazi pod djelovanjem hamiltonijana (2.8). Također će biti prikazan konkretan algoritam za numeričko rješavanje sustava. Kasnije će algoritam biti primijenjen za različite izbore prednapona  $V(t)$  te različite parametre hamiltonijana.

### 4.1 Postavljanje sustava

Evoluciju sustava numerički ćemo izračunati u slici interakcije rješavajući jednadžbu:

$$i\hbar \frac{\partial |\tilde{\psi}(t)\rangle}{\partial t} = \tilde{H}_I(t) |\tilde{\psi}(t)\rangle. \quad (4.59)$$

Hamiltonijan u gornjoj jednadžbi poprimiti će oblik hamiltonijana u jednadžbi (3.15), no općenito neće sadržavati funkcije  $f_i(t)$  budući da su one određene odabirom prednapona  $V(t)$ . Stoga ćemo sustav za numeričko rješavanje postaviti za neki općeniti prednapon  $V(t)$  koji će voditi na hamiltonijan:

$$\tilde{H}_I = \epsilon E_J \left( g_1(t) \hat{X} \sigma_y + g_2(t) \hat{P} \sigma_y + g_3(t) \hat{X} \sigma_z + g_4(t) \hat{P} \sigma_z \right). \quad (4.60)$$

Lako se pokaže da funkcije  $g_i$  poprimaju oblik:

$$g_1(t) = \cos \left( \frac{2E_J}{\hbar} \zeta(t) \right) \sin(\phi(t)) \cos(\omega t), \quad (4.61a)$$

$$g_2(t) = \cos \left( \frac{2E_J}{\hbar} \zeta(t) \right) \sin(\phi(t)) \sin(\omega t), \quad (4.61b)$$

$$g_3(t) = \sin \left( \frac{2E_J}{\hbar} \zeta(t) \right) \sin(\phi(t)) \cos(\omega t), \quad (4.61c)$$

$$g_4(t) = \sin \left( \frac{2E_J}{\hbar} \zeta(t) \right) \sin(\phi(t)) \sin(\omega t), \quad (4.61d)$$

pri čemu je:

$$\zeta(t) = \int_0^t \cos(\phi(t')) dt'. \quad (4.61e)$$



Sustav ćemo riješiti razvijajući funkciju  $|\tilde{\psi}(t)\rangle$  u direktnom produktu Fockove baze i baze svojstvenih vrijednosti  $\sigma_y$  matrice:

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = \sum_n C_n(t) |+\rangle \otimes |n\rangle + D_n(t) |-\rangle \otimes |n\rangle. \quad (4.62)$$

Sustav je razvijen u svojstvenim stanjima  $\sigma_y$  matrice zbog lakšeg uspoređivanja s analitičkim rješenjem budući da su konačne valne funkcije analitičkih rješenja zapisane u toj bazi. Paulijeve operatore u hamiltonijanu (4.60) stoga ćemo prikazati u bazi svojstvenih stanja  $\sigma_y$  matrice. Rotacijom baze iz  $|\pm z\rangle$  u  $|\pm y\rangle$ , Paulijevi operatori se transformiraju kao:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\rightarrow \sigma_2, \\ \sigma_2 &\rightarrow \sigma_3, \\ \sigma_3 &\rightarrow \sigma_1. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Prešli smo u notaciju  $\sigma_{1,2,3}$  kako bismo izbjegli zabune oko toga što predstavlja koja matrica:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (4.64)$$

Hamiltonijan (4.60) zapisat ćemo preko operatora stvaranja i poništenja. Na taj način lakše ćemo odrediti njegovo djelovanje na stanje (4.62) razvijeno u Fockovoj bazi.

$$\begin{aligned} \hat{X} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger + a), \\ \hat{P} &= \frac{i}{\sqrt{2}}(a^\dagger - a). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Koristeći transformacije (4.65) i (4.63) dobivamo hamiltonijan zapisan u formi pogodnijoj za numeričko rješavanje:

$$\begin{aligned} \tilde{H}_I &= \frac{\epsilon E_J}{\sqrt{2}} \left( (g_1(t) - ig_2(t)) a \sigma_3 + (g_1(t) + ig_2(t)) a^\dagger \sigma_3 \right. \\ &\quad \left. + (g_3(t) - ig_4(t)) a \sigma_1 + (g_3(t) + ig_4(t)) a^\dagger \sigma_1 \right). \end{aligned} \quad (4.66)$$

Budući da dobiveni hamiltonijan sadrži imaginarni dio, a numerički je pogodnije koristiti samo realne brojeve, jednadžbu (4.59) treba razdvojiti na imaginarni i realni

dio. Kako bismo to napravili, stanje (4.62) treba razdvojiti na realni i imaginarni dio:

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle = |\tilde{\psi}(t)\rangle_R + i |\tilde{\psi}(t)\rangle_I, \quad (4.67a)$$

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle_R = \sum_n C_n^R(t) |+\rangle \otimes |n\rangle + D_n^R(t) |-\rangle \otimes |n\rangle, \quad (4.67b)$$

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle_I = \sum_n C_n^I(t) |+\rangle \otimes |n\rangle + D_n^I(t) |-\rangle \otimes |n\rangle. \quad (4.67c)$$

Hamiltonijan također možemo rastaviti na realni i imaginarni dio  $\tilde{H}_I = \tilde{H}_I^{(R)} + i\tilde{H}_I^{(I)}$ . Uvrštavanjem tako rastavljenog hamiltonijana i rastavljene valne funkcije (4.67a) u jednadžbu (4.59) te razdvajanjem imaginarnog i realnog dijela jednadžbe, dobivamo:

$$\frac{\partial |\tilde{\psi}\rangle_R}{\partial t} = \frac{1}{\hbar} \left( \tilde{H}_I^{(I)} |\tilde{\psi}\rangle_R + \tilde{H}_I^{(R)} |\tilde{\psi}\rangle_I \right), \quad (4.68a)$$

$$\frac{\partial |\tilde{\psi}\rangle_I}{\partial t} = \frac{-1}{\hbar} \left( \tilde{H}_I^{(R)} |\tilde{\psi}\rangle_R - \tilde{H}_I^{(I)} |\tilde{\psi}\rangle_I \right). \quad (4.68b)$$

Poznavajući djelovanje operatora stvaranja i poništenja na Fockova stanja te Paulije-  
vih matrica prikazanih u bazi  $|\pm y\rangle$ :

$$\begin{aligned} a |n\rangle &= \sqrt{n} |n-1\rangle, & a^\dagger |n\rangle &= \sqrt{n+1} |n+1\rangle, \\ \sigma_1 |\pm y\rangle &= |\mp y\rangle, & \sigma_3 |\pm y\rangle &= \pm |\pm y\rangle, \end{aligned} \quad (4.69)$$

moguće je napisati sustav jednadžbi za koeficijente u razvoju stanja (4.67a):

$$\begin{aligned} \frac{d C_n^R(t)}{dt} &= \frac{\epsilon E_J}{\sqrt{2}\hbar} \left( g_1(t) \sqrt{n+1} C_{n+1}^I + g_1(t) \sqrt{n} C_{n-1}^I + g_3(t) \sqrt{n+1} D_{n+1}^I + g_3(t) \sqrt{n} D_{n-1}^I \right. \\ &\quad \left. - g_2(t) \sqrt{n+1} C_{n+1}^R + g_2(t) \sqrt{n} C_{n-1}^R - g_4(t) \sqrt{n+1} D_{n+1}^R + g_4(t) \sqrt{n} D_{n-1}^R \right), \end{aligned} \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned} \frac{d D_n^R(t)}{dt} &= \frac{\epsilon E_J}{\sqrt{2}\hbar} \left( -g_1(t) \sqrt{n+1} D_{n+1}^I - g_1(t) \sqrt{n} D_{n-1}^I + g_3(t) \sqrt{n+1} C_{n+1}^I + g_3(t) \sqrt{n} C_{n-1}^I \right. \\ &\quad \left. + g_2(t) \sqrt{n+1} D_{n+1}^R - g_2(t) \sqrt{n} D_{n-1}^R - g_4(t) \sqrt{n+1} C_{n+1}^R + g_4(t) \sqrt{n} C_{n-1}^R \right), \end{aligned} \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} \frac{d C_n^I(t)}{d t} = \frac{\epsilon E_J}{\sqrt{2} \hbar} & \left( g_1(t) \sqrt{n+1} C_{n+1}^R + g_1(t) \sqrt{n} C_{n-1}^R + g_3(t) \sqrt{n+1} D_{n+1}^R + g_3(t) \sqrt{n} D_{n-1}^R \right. \\ & \left. + g_2(t) \sqrt{n+1} C_{n+1}^I - g_2(t) \sqrt{n} C_{n-1}^I + g_4(t) \sqrt{n+1} D_{n+1}^I - g_4(t) \sqrt{n} D_{n-1}^I \right), \end{aligned} \quad (4.72)$$

$$\begin{aligned} \frac{d D_n^I(t)}{d t} = \frac{\epsilon E_J}{\sqrt{2} \hbar} & \left( -g_1(t) \sqrt{n+1} D_{n+1}^R - g_1(t) \sqrt{n} D_{n-1}^R + g_3(t) \sqrt{n+1} C_{n+1}^R + g_3(t) \sqrt{n} C_{n-1}^R \right. \\ & \left. - g_2(t) \sqrt{n+1} D_{n+1}^I + g_2(t) \sqrt{n} D_{n-1}^I + g_4(t) \sqrt{n+1} C_{n+1}^I - g_4(t) \sqrt{n} C_{n-1}^I \right). \end{aligned} \quad (4.73)$$

Dobiven je beskonačno velik sustav vezanih diferencijalnih jednadžbi, no moguće je procijeniti broj  $N$  na kojem možemo "odsjeći" ovaj sustav. Potrebno je samo odrediti broj  $N$  nakon kojeg koeficijenti više ne doprinose evoluciji sustava, tj. koeficijenti budu približno jednaki nuli (saturacija rješenja).

Kvadrati apsolutnih vrijednosti koeficijenata  $C_n$ , odnosno  $D_n$ , predstavljaju vjerojatnost da se sustav nalazi u stanju s  $n$  fonona. Broj  $N$  za koji je vjerojatnost  $P(N) \approx 0$  možemo ocijeniti iz analitičkog rješenja. Analitički smo za rješenje dobili koherentna stanja ili njihovu superpoziciju. Vjerojatnost  $P(n)$  da se sustav nađe u stanju s  $n$  fonona kada se nalazi u koherentnom stanju  $|\xi\rangle$ ,  $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}} (\bar{X} + i\bar{P})$  prati Poissonovu raspodjelu sa srednjom vrijednosti  $\langle n \rangle = |\xi|^2$ :

$$P(n) = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle}. \quad (4.74)$$

Poznavajući svojstvenu vrijednost  $\xi$  koherentnog stanja, koju je moguće procijeniti iz analitičkog rješenja, odredimo na kojem  $N$  možemo odrezati sustav jednadžbi budući da za  $N \gg \langle n \rangle$  vrijedi da je  $P(N) \approx 0$ . Iz analitičkih rješenja (3.27), (3.40) vidljivo je da  $\xi \propto t$  tj.  $\langle n \rangle \propto t^2$ . Stoga zaključujemo da što sustav dulje evoluira, bit će potreban veći broj jednadžbi  $N$  kako bi ga se točno opisalo.

Kada odredimo  $N$ , preostaje nam samo numerički integrirati jednadžbe (4.70)-(4.73) i analizirati dobivena rješenja. U idućim poglavljima prezentirano je numeričko rješenje za različite parametre sustava i oblike prednapona  $V(t)$ .

## 4.2 Konstantni napon

U ovom potpoglavlju usporedit ćemo numeričko rješenje s aproksimacijom stacionarne faze (RWA) za konstantan prednapon  $V(t) = V_0$ . Očekujemo da RWA aproksimacija postaje lošija kako raste energija interakcije qubitnog i mehaničkog podsustava  $E_{int} \propto \epsilon \hbar \alpha \sqrt{\langle x^2 \rangle}$  u odnosu na energiju  $\hbar \omega$ . Budući da  $\sqrt{\langle x^2 \rangle}$  raste linearno u vremenu, očekujemo da aproksimacija postaje nepreciznija za veća vremena. Koristeći RWA aproksimaciju za rješenje smo dobili isprepletano stanje qubitnih stupnjeva slobode i koherentnih stanja amplituda istog iznosa i suprotnih predznaka (3.27). Ukoliko je RWA aproksimacija bila opravdana, tada bi koeficijenti u razvoju valne funkcije (4.62) numeričkog rješenja trebali biti jednaki koeficijentima u razvoju koherentnih stanja u Fockovoj bazi. Budući da kvadrati apsolutnih vrijednosti koeficijenata u razvoju koherentnog stanja u Fockovoj bazi prate Poissonovu distribuciju (4.74), ista stvar treba vrijediti i za koeficijente  $C_n$  i  $D_n$ :

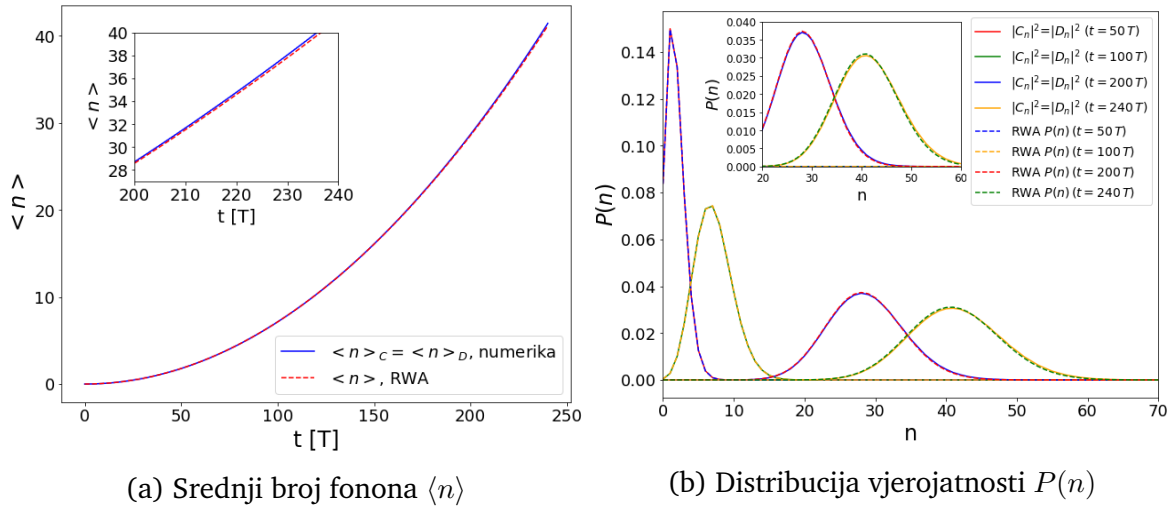
$$|C_n(t)|^2 = \frac{1}{2} \frac{\langle n_C(t) \rangle^n}{n!} e^{-\langle n_C(t) \rangle}, \quad (4.75a)$$

$$|D_n(t)|^2 = \frac{1}{2} \frac{\langle n_D(t) \rangle^n}{n!} e^{-\langle n_D(t) \rangle}. \quad (4.75b)$$

Predfaktor  $\frac{1}{2}$  dolazi od normiranosti ukupne valne funkcije i zbog toga što sustav ima jednaku vjerojatnost biti u  $|+y\rangle$  stanju i  $|-y\rangle$  stanju, odnosno pripadnim isprepletenim koherentnim stanjima  $|\pm \alpha \epsilon t\rangle$ . Srednja vrijednost Poissonove distribucije koherentnog stanja je:

$$\langle n_C(t) \rangle = \langle n_D(t) \rangle = |\alpha \epsilon t|^2. \quad (4.75c)$$

Ukoliko su izrazi (4.75a) - (4.75c) zadovoljeni, tada su stanja dobivena primjenom konstantnog prednapona uistinu koherentna kako RWA aproksimacija predviđa. Na Slici 4.4 grafički je prikazana provjera valjanosti navedenih izraza. Na Slici 4.4a vidimo da za veća vremena raste odstupanje numerički i aproksimativno izračunatih  $\langle n \rangle$ . Na Slici 4.4b je također vidljivo da za veća vremena ( $t = 200T, 240T$ ) odstupanje u distribuciji fonona  $P(n)$  raste. Takvi rezultati su u skladu s očekivanjem da RWA aproksimacija postaje lošija kako vrijeme raste zbog povećanja energije interakcije. Dobra mjera za uspoređivanje dvaju stanja je "fidelity"  $F$  koji mjeri koliko su dva stanja "blizu" u Hilbertovom prostoru.



Slika 4.4: Usporedba numeričkog i RWA rješenja za konstantni prednapon  $V_0$ . Prikaz vjerojatnosti da se sustav nađe u Fockovom stanju  $|n\rangle$  u vremenu

(a) Usporedba srednjeg broja fonona  $\langle n \rangle$  (srednja vrijednost Poissonove raspodjele) za numeričko i aproksimativno (RWA) rješenje u vremenu. Na umetnutom grafu, uvećani je prikaz  $\langle n \rangle$  za period  $t \in [200T, 240T]$

(b) Prikaz distribucije vjerojatnosti da se sustav nađe u Fockovom stanju  $|n\rangle$  u različitim vremenskim trenucima  $t = 50T, 100T, 200T, 240T$ . Crtkane linije su aproksimativno (RWA) rješenje, a pune linije numeričko. Na umetnutom grafu, uvećani je prikaz srednjih vrijednosti distribucija za  $t = 200T, 240T$

U slučaju dva čista stanja  $|\psi\rangle$  i  $|\phi\rangle$ , fidelity je jednak preklopu ta dva stanja:

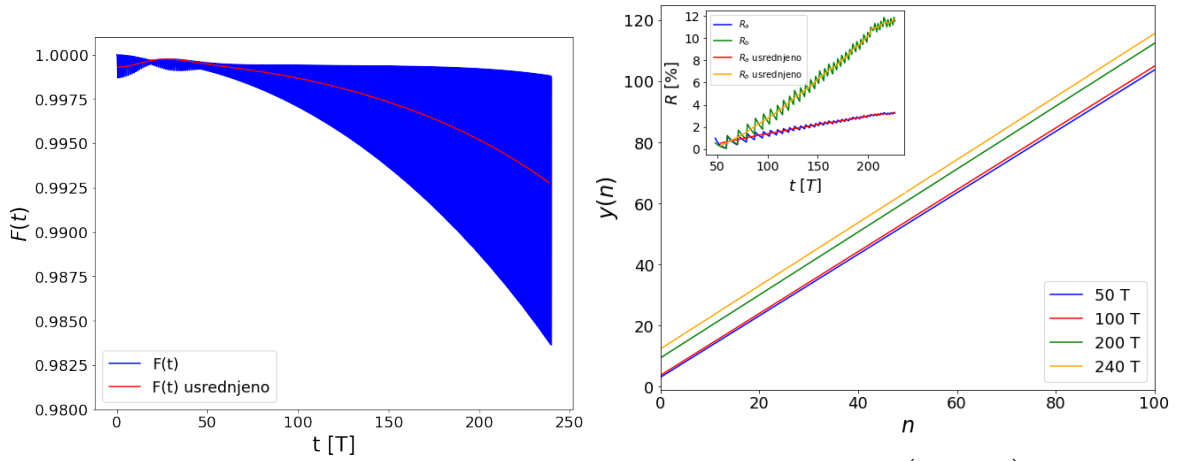
$$F = |\langle \phi | \psi \rangle|^2. \quad (4.76)$$

Fidelity je stoga dobra mjera za provjeru točnosti RWA aproksimacije [3]. Na Slici 4.5a prikazan je fidelity numeričkog i aproksimativnog rješenja:

$$F(t) = |\langle \tilde{\psi}(t)_{RWA} | \tilde{\psi}(t)_{Num} \rangle|^2. \quad (4.77)$$

Sa Slike 4.5a vidljivo je da se fidelity smanjuje u vremenu što je konzistentno s već iznesenim opažanjem da se točnost RWA aproksimacije smanjuje kako se vrijeme povećava.

Dobiveni rezultat ne ukazuje samo na ograničenost RWA aproksimacije, nego također implicira da dobivena stanja nisu egzaktno koherentna. Stanja postaju različitija ("udaljenija" u Hilbertovom prostoru) od koherentnih stanja s porastom vremena. Kako bi to kvantitativno okarakterizirali, koristit ćemo činjenicu da bi broj fonona u koherentnom stanju trebao pratiti Poissonovu raspodjelu (4.75a).



$$(a) F(t) = |\langle \tilde{\psi}(t)_{RWA} | \tilde{\psi}(t)_{Num} \rangle|^2$$

$$(b) y(n) = \frac{\ln(|C_n|^2 2n!)}{\ln(\langle n_C \rangle)}$$

Slika 4.5: **Provjera koherentnosti stanja u vremenu za  $V(t) = V_0$**

(a) Preklap (fidelity) aproksimativno i numerički izračunatih valnih funkcija u ovisnosti o vremenu. Crvena linija predstavlja usrednjen fidelity na skali perioda  $T$ .

(b) Prilagodba veličine  $y(n)$  ((4.78b)) metodom najmanjih kvadrata za vremena  $t = 50T, 100T, 200T, 240T$ . Na umetnutom grafu, prikazano je odstupanje od koherentnog stanja (4.79) u ovisnosti o vremenu te usrednjeno odstupanje.

Logaritmiranjem izraza (4.75a), dobiva se jednadžba pravca:

$$y(n) = n - b, \quad (4.78a)$$

$$y(n) = \frac{\ln(|C_n|^2 2n!)}{\ln(\langle n_C \rangle)}, \quad (4.78b)$$

$$b = \frac{\langle n_C \rangle}{\ln(\langle n_C \rangle)}. \quad (4.78c)$$

Računanjem veličine  $y(n)$  iz izraza (4.78b) u ovisnosti o broju fonona  $n$ , metodom najmanjih kvadrata možemo provjeriti prati li  $y(n)$  linearnu ovisnost (4.78a) uz odsječak na  $y$ -osi (4.78c). Odstupanje veličine  $y(n)$  od ovisnosti (4.78a), mjeri odstupanje mehaničkog podsustava valne funkcije isprepletenog sa stanjem  $|+y\rangle$  od koherentnog stanja. Kako bismo kvantificirali to odstupanje u ovisnosti o vremenu, računat ćemo relativnu pogrešku izračunatih vrijednosti koeficijenata  $a_t$  i  $b_t$  u prilagodbi funkcije  $y(n) = a_t n + b_t$  u odnosu na vrijednosti koje bi trebali imati u slučaju koherentnog stanja:  $a = 1, b = \frac{\langle n_C \rangle}{\ln(\langle n_C \rangle)}$ :

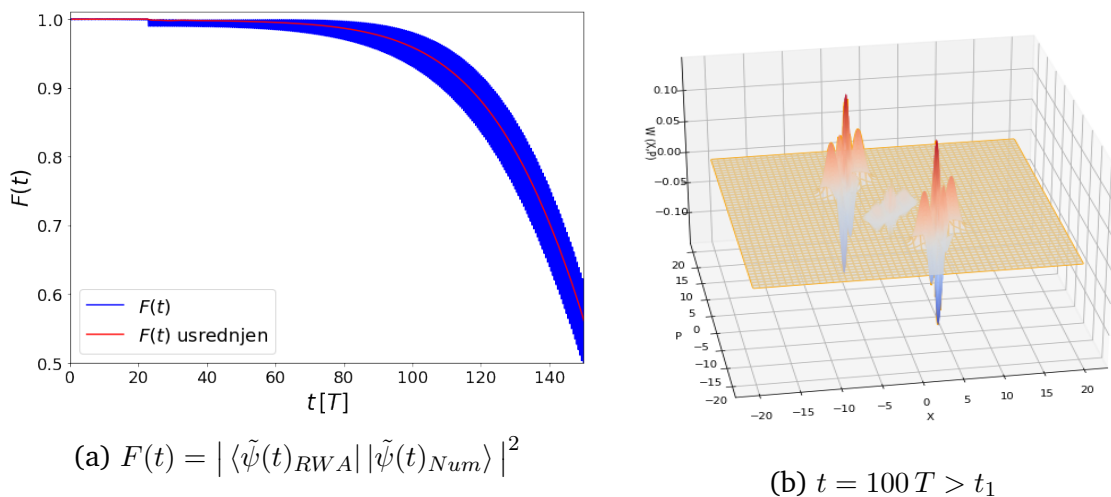
$$R_a = \left| \frac{a_t - 1}{1} \right|, \quad R_b = \left| \frac{b_t - b}{b} \right|. \quad (4.79)$$

Na Slici 4.5b prikazana je ovisnost veličine (4.79) o vremenu. Vidljivo je da odstupanje od koherentnog stanja raste s vremenom, no odstupanja su čak i nakon vremena  $t = 200T$  relativno mala (oko 10%).

### 4.3 Okretanje napona

U ovom potpoglavlju usporedit ćemo numeričko rješenje s aproksimacijom stacionarne faze za protokol okretanja napona definiran u jednadžbi (3.34). Iznos magnitude prednapona i trenutak okretanja polarizacije napona zadovoljavaju uvjete za stvaranje "c-stanja" (3.37a), (3.37b). Iz razloga navedenog u prošlom potpoglavlju, očekujemo da RWA aproksimacija postaje lošija za veća vremena evolucije. Budući da broj fonona u "c-stanju" ne prati Poissonovu raspodjelu, ne možemo koristiti iste veličine za usporedbu kao u prošlom potpoglavlju. Jedina veličina od veličina korištenih u prošlom potpoglavlju primjenjiva na "c-stanja" je fidelity (4.77).

Sa slike 4.6a vidljivo je da RWA aproksimacija postaje lošija za veća vremena. Time zaključujemo da za veća vremena nemamo nužno simetrična "c-stanja" dobivena aproksimativnim rješenjem. Međutim, i za vremena  $t = 100T$  fidelity je dovoljno velik da dobivena stanja budu praktički identična onima dobivena RWA aproksimacijom, tj. simetričnim "c-stanjima" (Slika 4.6b)



Slika 4.6: Usporedba RWA i numeričkog rješenja za (3.34) V(t) protokol  
 (a) Preklap (fidelity) aproksimativno i numerički izračunatih valnih funkcija u ovisnosti o vremenu . Crvena linija predstavlja usrednjen fidelity na skali perioda  $T$ .  
 (b) Wignerova funkcija numerički izračunatog stanja u trenutku  $t = 100T$  uz okretanje napona u trenutku  $t_1 = 22.7T$  koji ispunjava uvjet (3.37b) uz  $(K,M,R)=(1,4,45)$

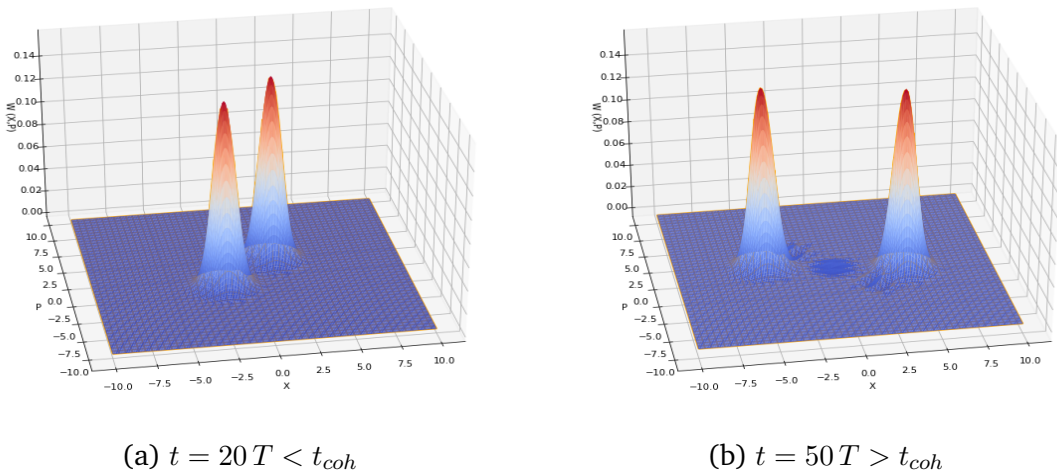
#### 4.4 Odstupanje od uvjeta trenutka okretanja napona

U ovom potpoglavlju, numerički je ispitano generiraju li se "c-stanja" u slučaju kada trenutak okretanja ne zadovoljava uvjet (3.37b). Analizom kakva je provedena u analitičkom dijelu za dobivanje ovog uvjeta, može se dobiti uvjet za trenutak  $t_{coh}$  za koji i nakon okretanja napona dobivamo isprepletano stanje qubitnih i koherentnih stanja (kao i prije okretanja napona). Taj uvjet glasi:

$$\nu t_{coh} = \arcsin\left(\frac{L-K}{2K+1}\sin(\phi_0)\right) + \phi_0 + R\pi, \quad L, K, R \in \mathbb{Z}. \quad (4.80)$$

Na Slici 4.7 prikazana je Wignerova funkcija u slučaju takvog protokola. Vidljivo je da uistinu ne nastaju "c-stanja", nego stanje ostaje miješano stanje dvaju koherentnih stanja. Za ovakav protokol, Wignerova funkcija ne posjeduje negativne dijelove koji bi bili pokazatelj nekласičnog ponašanja. Stoga zaključujemo da se napon ne može okrenuti u proizvoljnom trenutku za generiranje kvantne superpozicije makroskopskih stanja.

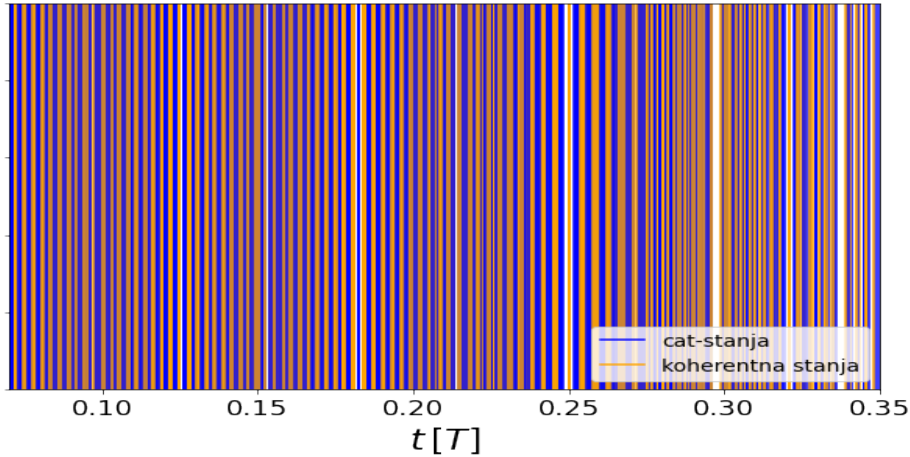
Postavlja se pitanje, što se događa kad trenutak okretanja napona ne zadovoljava niti uvjet (3.37b) stvaranja "c-stanja" niti uvjet (4.80) kojim stanje ostaje miješano stanje koherentnih stanja i nakon okretanja napona. Na Slici 4.8 prikazano je u kojim vremenskim trenucima je ispunjen uvjet (3.37b), a u kojima (4.80).



**Slika 4.7: Wignerova funkcija mehaničkog podsustava uz okretanje polarizacije napona u trenutku  $t_{coh} = 20.25 T$**

(a) Wignerova funkcija mehaničkog podsustava prije okretanja napona. Trenutak okretanja napona  $t_{coh} = 20.25 T$  zadovoljava jednadžbu (4.80) uz  $(K,L,R)=(1,4,40)$ .  
(b) Wignerova funkcija mehaničkog podsustava nakon okretanja napona.





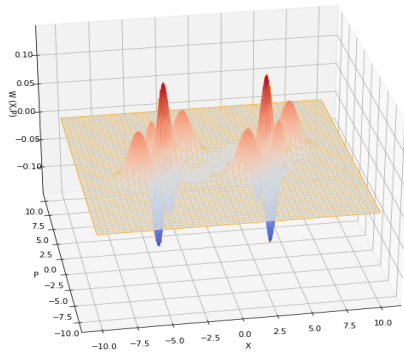
Slika 4.8: **Raspodjela trenutaka koji zadovoljavaju uvjet (4.80) (narančasto) i (3.37b) (plavo).** Bijele praznine predstavljaju trenutke koji ne zadovoljavaju niti jedan od navedenih uvjeta.

Trenutaka (3.37b) i (4.80) ima prebrojivo beskonačno te je njihova distribucija prikazana na Slici 4.8. Takvi trenutci ponavljaju se periodički s periodom  $\frac{T}{2}$ . Za sve ostale trenutke (neprebrojivo beskonačno) oba uvjeta su neispunjena. Na Slici 4.9 prikazane su Wignerove funkcije za nasumično generirane trenutke okretanja prednapona. Iz prikazanih primjera, a i primjera koji nisu prikazani u ovom radu, vidljivo je većinom pojavljivanje asimetričnih "c-stanja". U rijetkim slučajevima pojavljuju se oblici koji izgledaju kao miješano stanje koherentnih stanja (klasično ponašanje), a većinom je vidljiva asimetrična superpozicija makroskopskih stanja.

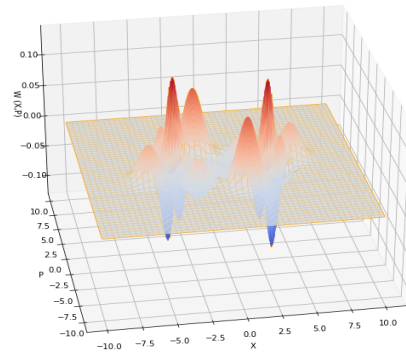
#### 4.5 Odstupanje od rezonancije - Semiklasični pristup

U ovom i idućem potpoglavlju ispitana je evolucija sustava u slučaju odstupanja od rezonancije mehaničke i Josephsonove frekvencije (3.9). Pretpostavit ćemo da  $k$  nije prirodni nego realni broj. U ovom potpoglavlju semiklasičnim pristupom ćemo provjeriti kako odstupanje od rezonancije utječe na stvaranje koherentnih odnosno "c-stanja" dok ćemo u idućem potpoglavlju to numerički potvrditi. U semiklasičnom pristupu, moguće je pokazati [12] da qubitni podsustav djeluje kao tjeranje na mehanički podsustav te zapisati klasičnu jednadžbu gibanja mehaničkog podsustava:

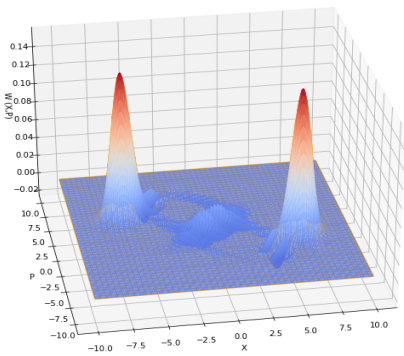
$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f_0 \cos(\nu t), \quad f_0 = 2\nu|\alpha\epsilon|. \quad (4.81)$$



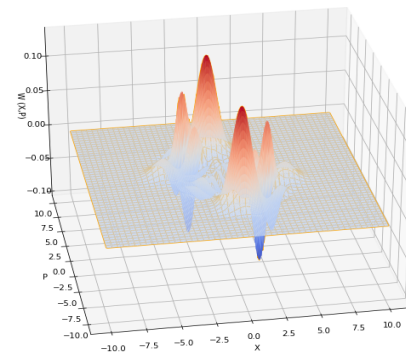
(a)  $t_{rev} = 22.559 T$



(b)  $t_{rev} = 22.795 T$



(c)  $t_{rev} = 22.939 T$



(d)  $t_{rev} = 21.985 T$

**Slika 4.9: Wignerova funkcija mehaničkog podsustava uz okretanje polarizacije napona u nasumičnom trenutku  $t_{rev}$**

U slučaju rezonancije  $\omega = \nu$  rješenje jednadžbe gibanja je osciliranje uz rast amplitude linearno u vremenu (Slika 4.10a). Specifično za početni uvjet  $x(t = 0) = \dot{x}(t) = 0$ :

$$x(t) = \frac{f_0}{2\nu} t \sin(\nu t). \quad (4.82)$$

Ovakav rezultat u skladu je s rezultatima dobivenim RWA aproksimacijom i numeričkim računom koji za rezultat daju (u slučaju konstantnog prednapona) koherentna stanja koja kruže u faznom prostoru (oscilacije) te im se amplituda povećava linearno u vremenu.

U općenitom slučaju kada mehanička i Josephsonova frekvencija ne ispunjavaju rezonantni uvjet ( $k \notin \mathbb{N}$ ), rješenje uz jednake početne uvjete je:

$$x(t) = \frac{2f_0}{\nu^2(k^2 - 1)} \sin\left(\frac{\nu}{2}(k-1)t\right) \sin\left(\frac{\nu}{2}(k+1)t\right). \quad (4.83)$$

U slučaju da su frekvencije  $\omega$  i  $\nu$  bliske ( $k \approx 1$ ), tada za rješenje (4.83) dobivamo

udare (Slika 4.10b). U tom slučaju mehanički podsustav oscilira brzo frekvencijom  $\frac{\nu}{2}(k+1)$  dok se amplituda titranja mijenja sporim oscilacijama perioda  $T_{Long} = \frac{2\pi}{\nu(k-1)}$ . Sa Slike 4.10b vidljivo je da se početno titranje u slučaju udara može aproksimirati kao titranje u kojem amplituda raste linearno u vremenu kao u rezonantnom slučaju. Takvo ponašanje vidljivo je i razvojem sporooscilirajućeg faktora u Taylorov red za mala vremena (i mali  $(k-1)$ ):

$$\frac{2f_0}{\nu^2(k^2-1)} \sin\left(\frac{\nu}{2}(k-1)t\right) \approx \frac{f_0}{(k+1)\nu} t. \quad (4.84)$$

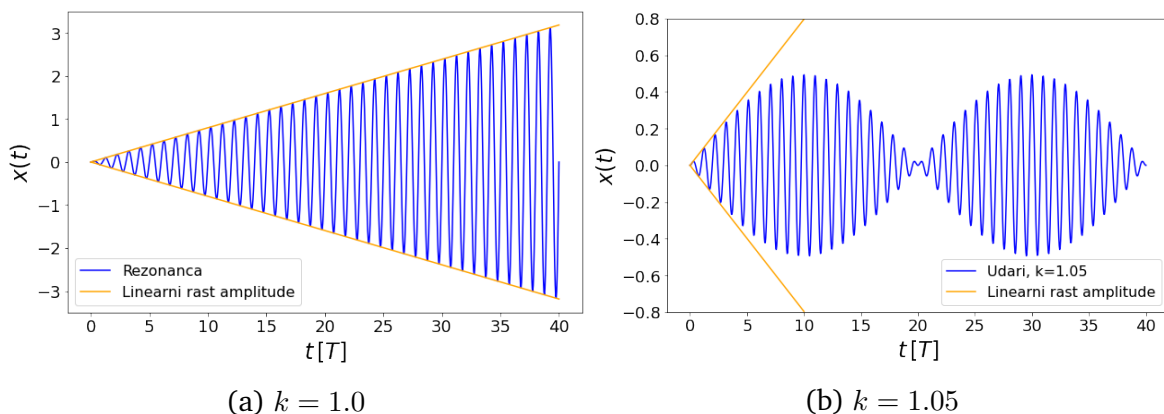
Vrijeme  $t_{lin}$  za koja je aproksimacija (4.84) valjana odredit ćemo iz uvjeta da argument sinusa treba biti manji od neke vrijednosti  $\epsilon$ :

$$t_{lin} \leq \frac{2\epsilon}{\nu(k-1)}. \quad (4.85)$$

Konkretnije, ako želimo da je odstupanje  $\frac{\epsilon - \sin(\epsilon)}{\sin(\epsilon)}$  manje od 1%, tada je  $\epsilon = 0.244$  te dobivamo da je aproksimacija valjana za vremena:

$$t_{lin} \leq \frac{0.488}{\nu(k-1)}. \quad (4.86)$$

Uvjet (4.86) govori do kojeg trenutka evolucija sustava vodi na stvaranje koherentnih stanja (time i "c-stanja") kojima amplituda raste linearno u vremenu kada Josephsonova i mehanička frekvencija nisu u rezonanciji.



Slika 4.10: Rješenje  $x(t)$  klasične jednadžbe gibanje (4.81):

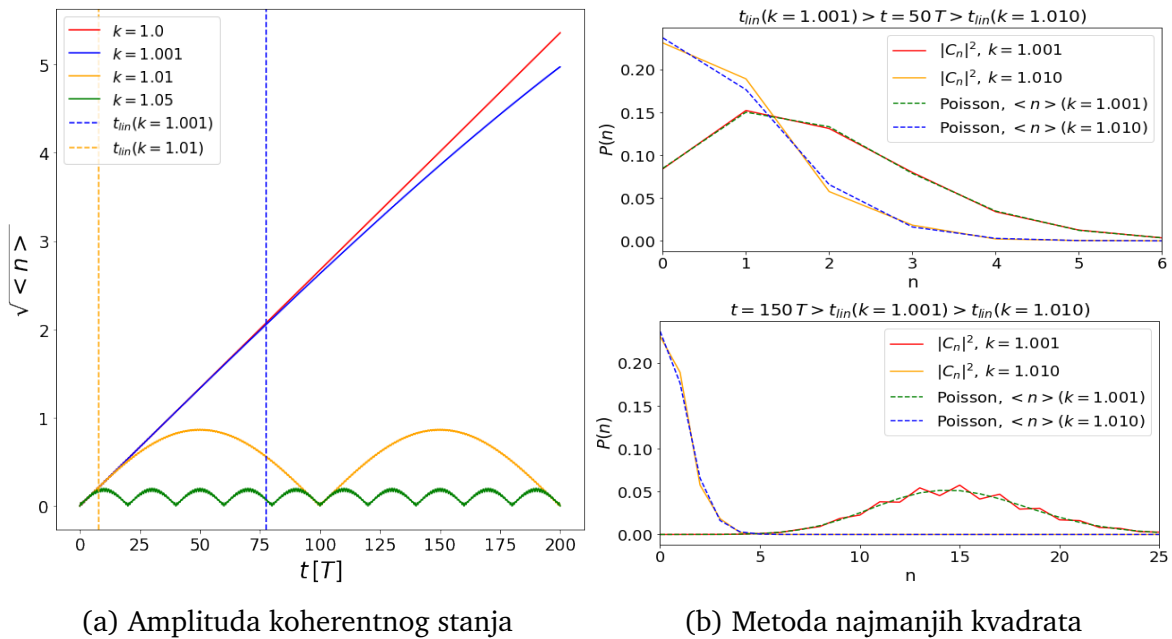
(a) U rezonantnom slučaju ( $k=1$ ) (plava linija). Narančasta linija prikazuje linearni rast amplitude.

(b) U nerezonantnom slučaju ( $k = 1.05$ ,  $T_{long} = 20T$ ). Pojavljuju se udari (plava linija). Narančasta linija prikazuje linearni rast amplitude.

## 4.6 Odstupanje od rezonancije - Numeričko rješenje

U ovom potpoglavlju numerički je izračunata evolucija sustava u nerezonantnom slučaju ( $k \notin \mathbb{N}$ ). Provjerit ćemo je li uvjet (4.86) dobra procjena trenutka do kojeg evolucija sustava vodi na stvaranje koherentnih stanja čija amplituda raste linearno u slučaju nerezonancije.

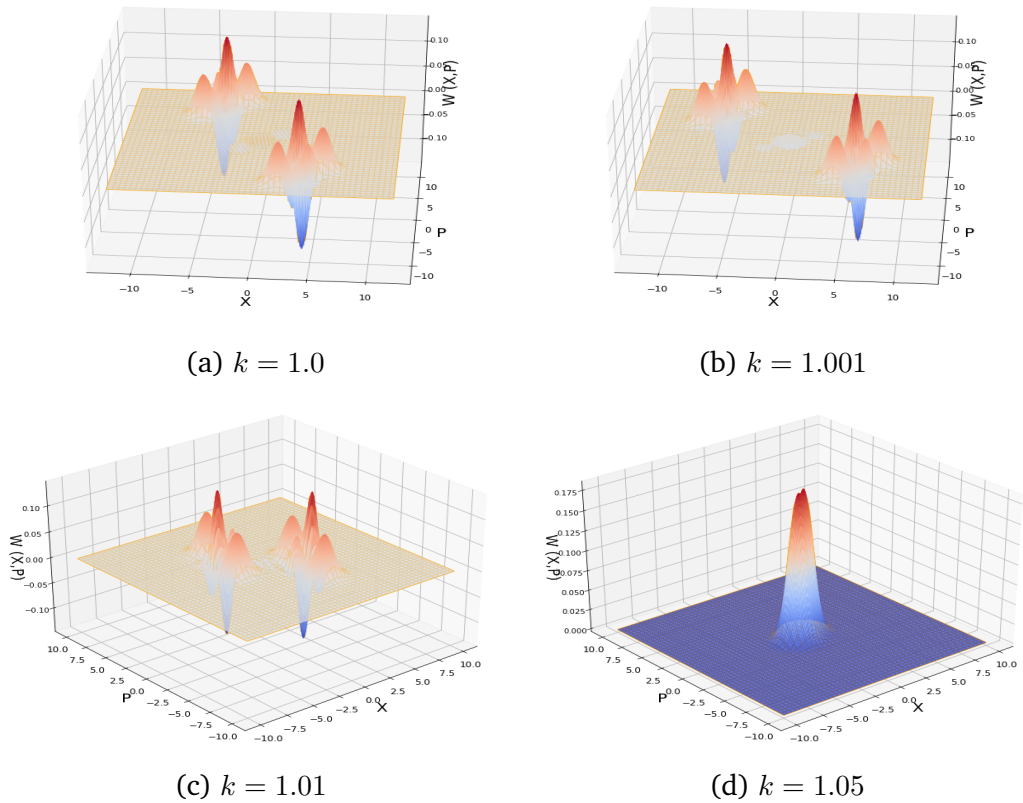
Analizu koherentnosti stanja provest ćemo na sličan način kao u potpoglavlju 4.2. Najprije ćemo pogledati kako se korijen srednjeg broja fonona mijenja u vremenu za različita odstupanja od rezonancije. Promatramo korijen srednjeg broja fonona jer ta veličina odgovara iznosu amplitude koherentnog stanja. Na Slici 4.11a vidljivo je da amplituda koherentnih stanja prati rješenje klasične jednadžbe gibanja. Amplituda raste linearno u vremenu (4.82) u slučaju rezonancije, dok se u slučaju nerezonancije pojavljuju udari (4.83) s periodom  $T_{long}$ .



Slika 4.11: Koherentnost u nerezonantnom slučaju:

(a) Amplituda koherentnih stanja u rezonantnom (crveno) i nerezonantnim slučajevima:  $T_{long} = 1000T$  (plavo),  $T_{long} = 100T$  (narančasto),  $T_{long} = 20T$  (zeleno). Crtkane linije predstavljaju vremena  $t_{lin}$  iz izraza (4.86).

(b) Prikaz distribucije  $|C_n|^2$  u nerezonantnom slučaju za  $k = 1.001$  (crvena linija) i  $k = 1.01$  (narančasta linija) u trenucima  $t = 50T$  (gornja slika) i  $t = 150T$  (donja slika). Crtkane linije predstavljaju Poissonovu distribuciju sa srednjom vrijednosti  $\langle n \rangle$  od distribucije  $|C_n|^2$  s  $k = 1.001$  (zeleno) i distribucije s  $k = 1.01$  (plavo). Vrijeme  $t = 150T$  veće je od vremena  $t_{lin}$  (4.86) za obje vrijednosti  $k$ , dok za  $t = 50T$  vrijedi:  $t_{lin}(k = 1.001) > 50T > t_{lin}(k = 1.01)$



Slika 4.12: Wignerova funkcija mehaničkog podsustava u rezonantnom i nerezonantnim slučajevima u trenutku  $t = 90 T$  i uz okretanja predznaka napona u trenutku  $t_1 = 20.23 T$

Na grafu su također naznačena vremena  $t_{lin}$  iz semiklasičnog računa koja procjenjuju do kojeg trenutka amplituda koherentnih stanja raste (približno) linearno u vremenu u nerezonantnom slučaju. Iz navedenog grafa vidljivo je da semiklasična procjena daje dobar uvid u ponašanje sustava u nerezonantnom slučaju. Analiza koherentnosti stanja provedena je grafičkim prikazivanjem (Slika 4.11b) ovisnosti koeficijenta  $|C_n|^2$  o  $n$  u usporedbi s Poissonovom distribucijom (4.74) sa srednjom vrijednosti  $\langle n \rangle$  distribucije  $|C_n|^2$  čiji je korijen prikazan na Slici 4.11a.

Sa Slike 4.11b vidljivo je da za veća vremena (dobra procjena je  $t > t_{lin}$ ) stanja lošije prate Poissonovu distribuciju. Za vremena  $t < t_{lin}$  čak i u slučaju nerezonance stanja približno prate Poissonovu raspodjelu što se vidi na gornjem grafu Slike 4.11b. Također, kako je već zaključeno sa Slike 4.11a, amplitude koherentnih stanja u rezonantnom slučaju rastu linearno u vremenu dok amplituda stanja u nerezonantnom slučaju oscilira u vremenu periodom  $T_{long}$ . Zbog toga za velika odstupanja od rezonancije, ne samo da nastala stanja ne prate egzaktno Poissonovu raspodjelu, nego će i "razmak" u faznom prostoru između dobivenih stanja biti malen. Okretanjem

predznaka napona stoga neće nastati superpozicija koherentnih stanja te superpozicija koja nastane neće biti superpozicija razlučivih makroskopskih stanja ako je to odstupanje preveliko.

#### **4.7 Odstupanje od rezonancije - "c-stanja"**

Kako bi se ispitalo stvaranje "c-stanja" u nerezonantnom slučaju, prikazane su Wignerove funkcije za različita odstupanja od rezonancije u različitim trenucima. Na Slici 4.12 vidljivo je da se simetrične superpozicije generiraju i u nerezonantnom slučaju. Razlika u odnosu na rezonantni slučaj je ta što udaljenost između stanja prije okretanja napona ne raste linearno u vremenu kao u rezonantnom slučaju nego oscilira u vremenu. Zbog toga postoji mogućnost da se odabere trenutak  $t_1$  u kojem su stanja jako bliska u faznom prostoru te okretanjem napona ne dobijemo superpoziciju razlučivih makroskopskih stanja. Takav problem javlja se u slučaju  $k = 1.05$ , budući da su čak i maksimalne amplitude (a time i udaljenost u faznom prostoru) stanja relativno male. Za vrijednosti  $k \approx 1$  ovakvi problemi se lako izbjegnu pogodnim odabirom trenutka  $t_1$ . Dobivena stanja nisu superpozicija egzaktnih koherentnih stanja kako je i opisano u prethodnom potpoglavlju, no za dovoljno malo odstupanje od rezonancije i dovoljno rano okretanje prednapona, dobivaju se uistinu "c-stanja".

## 4.8 Modeliranje okretanja napona

Protokol za stvaranje "c-stanja" iznesen u ovom radu pretpostavlja trenutačno okretanje predznaka prednapona. Takva pretpostavka fizikalno je nerealna jer bi za stvarnu izvedbu ovog protokola trebalo neko konačno vrijeme  $T_{sw}$  da se napon promijeni s vrijednosti  $V_0$  na vrijednost  $-V_0$ . U ovom potpoglavlju protokol prednapona za stvaranje "c-stanja" modeliran je kao (Slika 4.13):

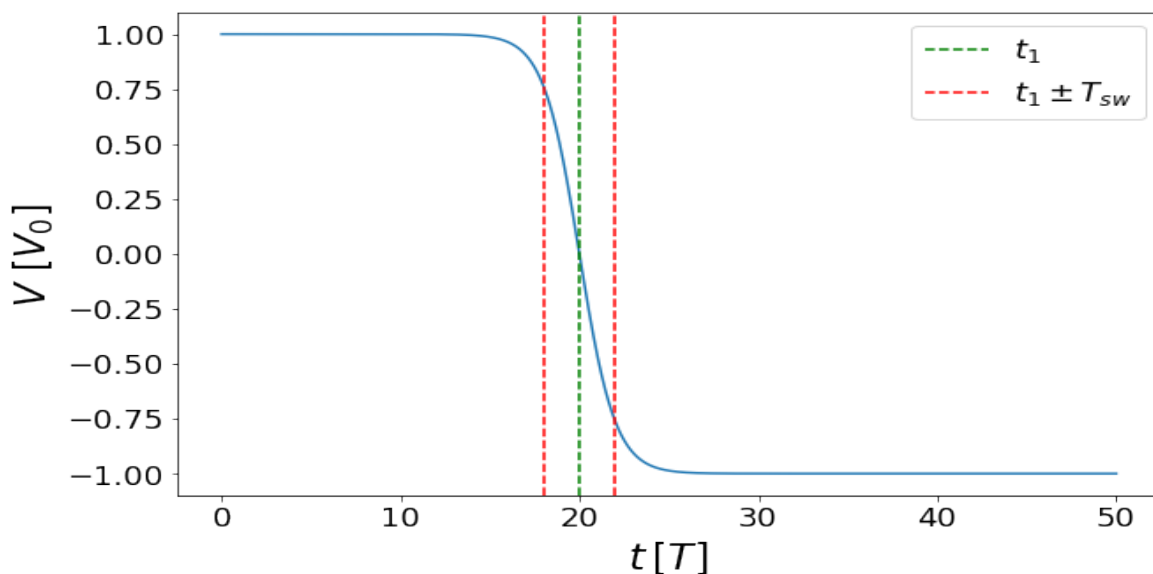
$$V(t) = -V_0 \tanh\left(\frac{t - t_1}{T_{sw}}\right). \quad (4.87)$$

U slučaju ovakve vremenske ovisnosti napona, razlika faza između supravodljivih kontakata poprima oblik:

$$\phi(t) = -\phi_0 - \nu T_{sw} \ln\left(\cosh\left(\frac{t - t_1}{T_{sw}}\right)\right) + \nu T_{sw} \ln\left(\cosh\left(\frac{t_1}{T_{sw}}\right)\right). \quad (4.88)$$

Izraz za hamiltonijan (4.66) nije moguće napisati u zatvorenoj formi, ali numerički je moguće odrediti funkciju (4.61e), a time i hamiltonijan sustava. Poznavajući hamiltonijan sustava, numerički je izračunata evolucija sustava uz protokol (4.87).

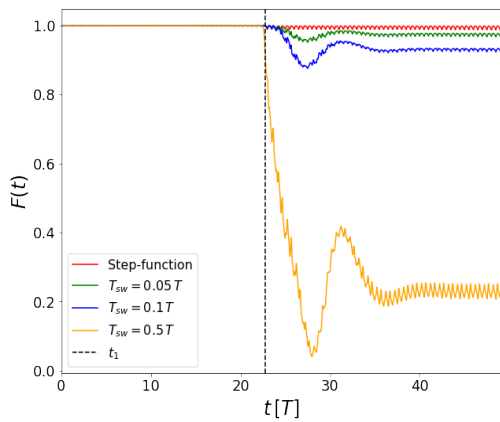
Na Slici 4.14a prikazan je fidelity stanja dobivenog protokolom (4.87) i stanja dobivenog RWA aproksimacijom (3.45).



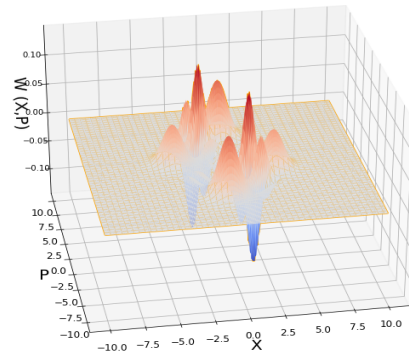
Slika 4.13: Realistični protokol prednapona  $V(t)$  (4.87) za stvaranje "c-stanja"

Fidelity je veći za kraća vremena okretanja  $T_{sw}$  budući da u limesu  $T_{sw} \rightarrow 0$  funkcija  $\tanh$  postaje step-funkcija (trenutno okretanje napona). Fidelity je do trenutka  $t_1$  praktički jednak jedan budući da je prije okretanja funkcija  $V(t)$  praktički konstantna kao i u protokolu trenutnog okretanja napona.

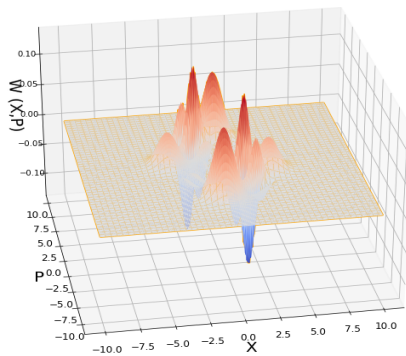
Na Slici 4.14 prikazane su Wignerove funkcije za različite duljine okretanja predznaka prednapona  $T_{sw}$ . Dobivene Wignerove funkcije imaju oblik "c-stanja", no koherentna stanja unutar superpozicije nisu simetrična. Asimetrija je veća za veća vremena  $T_{sw}$ , no možemo zaključiti da je uz ovakav realističan protokol moguće ostvariti kvantnu superpoziciju makroskopskih stanja.



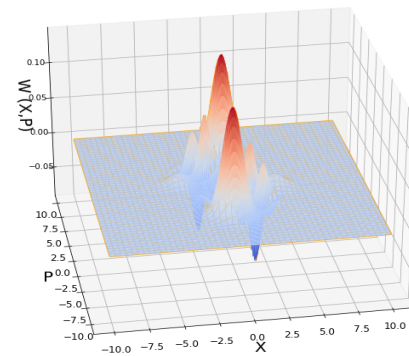
(a) Fidelity



(b)  $T_{sw} = 0.05 T$



(c)  $T_{sw} = 0.1 T$



(d)  $T_{sw} = 0.5 T$

**Slika 4.14: Realistični protokol napona  $V(t)$  (4.87) za stvaranje "c-stanja":**

(a) Fidelity između "c-stanja" dobivenih RWA aproksimacijom i numeričkim izračunom za protokol (4.87) za različita vremena trajanja okretanja predznaka prednapona  $T_{sw} = 0.05 T, 0.1 T, 0.5 T$ . Crvenom linijom prikazan je fidelity između stanja izračunatih RWA aproksimacijom i numerički za protokol trenutnog okretanja napona ( $T_{sw} = 0$ )

(b)-(d) Wignerove funkcije "c-stanja" dobivenih protokolom (4.87) za vremena  $T_{sw} = 0.05 T, 0.1 T, 0.5 T$  u trenutku  $t = 50 T$  uz okretanje predznaka napona u trenutku  $t_1 = 22.7 T$



## 5 Eksperimentalna izvedba

U ovom poglavlju kratko iznosimo vrijednosti parametara za eksperimentalnu izvedbu sustava opisanog u ovom radu. Uzimamo tipičnu vrijednost Josephsonove energije za qubitni sustav supravodljive kvantne točke u režimu  $E_j \ll \frac{e^2}{2C}$  (tzv. Cooper Pair Box, CPB)  $E_j \approx 10 - 100 \mu\text{eV}$ . Za ovakvu vrijednost  $E_j$ , Josephsonova frekvencija je  $\nu \approx 1 - 10 \text{ GHz}$ . Za takvu vrijednost  $\nu$  potreban je prednapon iznosa  $V_0 \approx 1 - 10 \mu\text{V}$ .

U slučaju rezonancije  $\omega = \nu$  te je period titranja  $T \approx 1 \text{ ns}$ . Period  $T$  prirodna je vremenska skala evolucije ovog sustava. Vrijeme dekoherencije ovakvog qubita (CPBa) iznosi  $T_{dec} \approx 1 \mu\text{s}$  [16], [17]. Uz takve vrijednosti  $T$  i  $T_{dec}$  interakcija s okolinom, tj. dekoherencija ne bi trebala utjecati na uspješnost stvaranja "c-stanja" protokolom iznesenim u ovom radu.

Masa supravodljive kvantne točke je  $m \approx 10^{-22} - 10^{-21} \text{ kg}$  [18]. U kombinaciji s iznosom frekvencije  $\omega$  dobivamo iznos amplitude gibanja osnovnog stanja harmoničkog oscilatora (zero-point motion)  $x_0 \approx 10^{-3} - 10^{-2} \text{ nm}$ . Duljina tuneliranja iznosi  $\lambda \approx 0.1 \text{ nm}$ . Ove dvije prostorne skale daju vrijednost malog parametra  $\epsilon \approx 0.01 - 0.1$ .

Napomenimo još da je eksperimentalno predznak napona moguće okrenuti u vremenu  $T_{sw} \approx 0.1 - 1 \text{ ns}$  te su stoga modeli prikazani u prethodnom potpoglavlju (uzimajući  $T \approx 1 \text{ ns}$ ) realistični.

## 6 Zaključak

U ovom radu prikazano je kako u nanoelektromehaničkom sustavu, u kojem supravodljiva kvantna točka harmonički titra između dva supravodljiva kontakta spojena na izvor prednapona  $V$ , koherentnim tuneliranjem Cooperovih parova s kontakata na kvantnu točku dolazi do ispreplitanja električnih i mehaničkih stupnjeva slobode kvantne točke. U prvom dijelu rada izveden je hamiltonijan ovog sustava te je pokazano kako se posebnim odabirom napona vrata, može postići da se populacija Cooperovih parova na kvantnoj točki može opisati kao dvorazinski kvantni sustav, tj. kao qubit.

Zatim je analitički, u okviru aproksimacije stacionarne faze, pokazano kako evolucija ovakvog sustava, iz osnovnog produktnog stanja (produkt osnovnog stanja harmoničkog oscilatora i osnovnog stanja električnog dijela hamiltonijana), uz konstantni napon između kontaktnih supravodiča vodi k pojavi isprepletenog stanja qubitnih stupnjeva slobode s mehaničkim koherentnim stanjima. U nastavku je ispitan protokol u kojem je faza supravodiča prije uključivanja napona različita od nule te se u određenom trenutku  $t_1$  okrene predznak prednapona  $V$ . Pokazano je da za posebne odabire vrijednosti napona  $V$  i trenutka  $t_1$ , dolazi do formiranja isprepletenog stanja qubitnih stupnjeva slobode sa superpozicijom koherentnih stanja - *cat-stateom* ("c-stanjem"). Dobivena stanja okarakterizirana su Wignerovom funkcijom. Wignerova funkcija "c-stanja" poprima negativne vrijednosti što je potpis neklasičnog ponašanja tipičnog za "c-stanja". Naposljetku je izračunata entropija sprezanja za dobivena stanja u ovisnosti o vremenu za različite vanjske parametre sustava.

U središnjem dijelu prikazano je numeričko rješenje sustava. Pokazano je da RWA aproksimacija postaje lošija za veća vremena te da se za veća vremena gubi koherentnost stanja. Numerički je pokazano da okretanje napona u specifičnim trenutcima neće stvoriti "c-stanja", no za većinu nasumično odabranih trenutaka okretanja predznaka prednapona, stvaraju se asimetrična "c-stanja". Također je ispitano što se događa s evolucijom sustava u slučaju odstupanja od rezonancije Josephsonove i mehaničke frekvencije. Pokazano je da u tom slučaju amplituda koherentnih stanja ne raste linearno u vremenu, nego oscilira sporom frekvencijom koja je proporcionalna razlici mehaničke i Josephsonove frekvencije te je ispitano za koja se vremena sustav ponaša približno kao u rezonantnom slučaju. Naposljetku je prikazan realističniji

protokol stvaranja "c-stanja" koji ne pretpostavlja trenutačnu promjenu predznaka prednapona. Pokazano da se i s takvim protokolom generiraju "c-stanja", no dobivena "c-stanja" nisu simetrična te asimetrija raste s porastom vremena potrebnog da se promijeni predznak prednapona.

Dobivena "c-stanja" nisu važna samo s akademskog stajališta kao kvantna superpozicija makroskopskih stanja, nego bi mogla imati i potencijalnu primjenu u kvantnoj komunikaciji ukoliko bi se u njih uspjela ukodirati informacija. Nadalje, ostaje prostor za ispitivanje interakcije ovog sustava s okolinom i dekoherencije. Dekoherencija je kratko komentirana u ovom radu, no potrebna je detaljnija analiza, primjerice u okviru rješavanja "master-jednadžbe" s Lindbladovim članom, kako bi se vidjelo kako interakcija s okolinom utječe na evoluciju ovog sustava.

# Dodatci

## Dodatak A Svojstva Wignerove funkcije

U ovom dodatku opisana su svojstva Wignerove funkcije i Weylove transformacije [15]. Wignerove funkcije i Weylove transformacije kvantnih operatora ekvivalentna su formulacija kvantne mehanike kao i Schrödingerova valna mehanika koja se bazira na Schrödingerovoj jednažbi. Motivacija za drugu formulaciju kvantne mehanike pronalaženje je kvantne distribucije  $W(x, p)$  u faznom prostoru koja bi odgovarala klasičnoj gustoći stanja u faznom prostoru. Cilj je pronaći distribuciju koja ima svojstvo da usrednjavanjem neke opservable  $A(x, p)$  s njom po faznom prostoru dobivamo očekivanu vrijednost te opservable:

$$\langle A \rangle = \int W(x, p) A(x, p) dx dp. \quad (\text{A.1})$$

Također, željeli bismo da ovakva distribucija bude nenegativna i normalizirana, tj. da je njezin integral po faznom prostoru jednak 1.

U kvantnoj mehanici, kvadrat amplitude valne funkcije  $\rho(x) = |\psi(x)|^2$  u  $x$  reprezentaciji možemo promatrati kao distribuciju koja ima svojstvo da usrednjavanje nekog operatora po direktnom prostoru s  $\rho(x)$  daje očekivanje tog operatora. Također veličina:

$$P(x) = \rho(x) dx \quad (\text{A.2})$$

odgovara vjerojatnosti pronalaska sustava u volumenu  $dx$  oko točke  $x$ . Isto vrijedi za kvadrat amplitude valne funkcije  $\tilde{\rho}(p) = |\tilde{\psi}(p)|^2$  u  $p$  reprezentaciji.

Problem za pronalazak objedinjene distribucije  $W(x, p)$  dolazi od činjenice da opservable položaja i impulsa ne komutiraju, tj. položaj i impuls nije moguće znati istovremeno. Stoga nije moguće definirati distribuciju vjerojatnosti koja bi sadržavala svojstvo slično onome u izrazu (A.2). Također ćemo ustvrditi da zbog nekompatibilnosti položaja i impulsa distribucija  $W(x, p)$  nije nenegativna, no pokazat ćemo da ostala željena svojstva mogu biti zadovoljena.

## A.1 Weylova transformacija

Weylova transformacija operatora  $\hat{A}$  definira se kao:

$$\tilde{A}(x, p) = \int e^{-\frac{ipy}{\hbar}} \langle x + \frac{y}{2} | \hat{A} | x - \frac{y}{2} \rangle dy. \quad (\text{A.3})$$

Lako se pokaže da je trag umnoška dvaju operatora jednak integralu Weylovih transformata tih operatora po faznom prostoru:

$$\text{Tr}[\hat{A}\hat{B}] = \frac{1}{h} \int \tilde{A}(x, p)\tilde{B}(x, p)dx dp. \quad (\text{A.4})$$

Ako poznajemo matricu gustoće  $\hat{\rho}$ , možemo izračunati očekivanje operatora bilo koje opservable u tom stanju pomoću izraza:

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}[\hat{\rho}\hat{A}]. \quad (\text{A.5})$$

Kombinirajući izraze (A.4) i (A.5) zaključujemo:

$$\langle \hat{A} \rangle = \frac{1}{h} \int \tilde{A}(x, p)\tilde{\rho}(x, p)dx dp. \quad (\text{A.6})$$

Iz dobivenog izraza vidimo da Weylov transformat matrice gustoće  $\tilde{\rho}(x, p)$  zadovoljava željeno svojstvo (A.1) kvantne distribucije u faznom prostoru. Stoga definiramo Wignerovu funkciju (distribuciju) kao:

$$W(x, p) = \frac{1}{h}\tilde{\rho}(x, p) = \frac{1}{h} \int e^{-\frac{ipy}{\hbar}} \langle x + \frac{y}{2} | \hat{\rho} | x - \frac{y}{2} \rangle dy. \quad (\text{A.7})$$

## A.2 Svojstva Wignerove funkcije

Očekivanje bilo koje opservable računamo kao:

$$\langle \hat{A} \rangle = \int \tilde{A}(x, p)W(x, p)dx dp. \quad (\text{A.8})$$

Budući da vrijedi:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\rho \mathbb{I}] &= \text{Tr}[\rho] = 1, \\ \tilde{\mathbb{I}} &= 1, \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

zaključujemo da je Wignerova funkcija normirana:

$$\int W(x, p) dx dp = 1. \quad (\text{A.10})$$

Za dva stanja  $|\psi_a\rangle, |\psi_b\rangle$  vrijedi  $\text{Tr}[\rho_a \rho_b] = |\langle \psi_a | \psi_b \rangle|^2$  iz čega slijedi:

$$\int W_a(x, p) W_b(x, p) dx dp = \frac{1}{h} |\langle \psi_a | \psi_b \rangle|^2. \quad (\text{A.11})$$

Stoga je iz samog grafičkog prikaza Wignerovih funkcija lako ocijeniti njihov preklap.

### A.3 Miješana i čista stanja

Pretpostavimo da imamo superpoziciju dva stanja  $|\psi\rangle = |\psi_a\rangle + |\psi_b\rangle$ . Iz definicije Wignerove funkcije jasno je da Wignerova funkcija stanja  $|\psi\rangle$  neće biti samo zbroj Wignerovih funkcija stanja koja čine superpoziciju:  $W_\psi \neq W_a + W_b$ . Stoga zaključujemo da čista kvantna stanja ne posjeduju linearnost u faznom prostoru. U tome uviđamo nekласično ponašanje Wignerove distribucije kvantne superpozicije budući da klasični sustavi posjeduju svojstvo linearnosti u faznom prostoru.

Za miješana stanja situacija je drugačija:

$$\begin{aligned} \hat{\rho} &= \sum_j p_j \hat{\rho}_j, \\ W(x, p) &= \sum_j p_j W_j(x, p). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Iz gornjeg izraza zaključujemo da miješana stanja posjeduju svojstvo linearnosti u faznom prostoru.

Primjer ovdje iznesenih svojstava vrlo se jasno vidi u Wignerovim funkcijama stanja prikazanih u ovom radu na Slici 3.2. Wignerova funkcija miješanog stanja dvaju koherentnih stanja zbroj je Wignerovih funkcija pojedinih koherentnih stanja (klasično, linearno ponašanje). S druge strane, Wignerova funkcija superpozicije koherentnih stanja ("c-stanja") nije samo zbroj Wignerovih funkcija koherentnih stanja koje tvore superpoziciju, već u prostoru između koherentnih stanja pokazuje znakove nekласičnog ponašanja tako što poprima pozitivne i negativne vrijednosti.

## Dodatak B Koeficijenti u razvoju

Koeficijenti u hamiltonijanu (3.36a) su:

$$b_{01} = \cos(\phi_0) \cos(A \sin(\phi_0)) I_1(\phi_0) - \sin(\phi_0) \cos(A \sin(\phi_0)) I_2(\phi_0), \quad (\text{B.13a})$$

$$b_{02} = \cos(\phi_0) \cos(A \sin(\phi_0)) I_3(\phi_0) - \sin(\phi_0) \cos(A \sin(\phi_0)) I_4(\phi_0), \quad (\text{B.13b})$$

$$b_{03} = \cos(\phi_0) \sin(A \sin(\phi_0)) I_1(\phi_0) - \sin(\phi_0) \sin(A \sin(\phi_0)) I_2(\phi_0), \quad (\text{B.13c})$$

$$b_{04} = \cos(\phi_0) \sin(A \sin(\phi_0)) I_3(\phi_0) - \sin(\phi_0) \sin(A \sin(\phi_0)) I_4(\phi_0) \quad (\text{B.13d})$$

, pri čemu su:

$$I_1(\phi_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(lx) \sin(x) \sin(A \sin(x) \cos(\phi_0)) \sin(A \cos(x) \sin(\phi_0)) dx, \quad (\text{B.14a})$$

$$I_2(\phi_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(lx) \cos(x) \cos(A \sin(x) \cos(\phi_0)) \cos(A \cos(x) \sin(\phi_0)) dx, \quad (\text{B.14b})$$

$$I_3(\phi_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(lx) \sin(x) \cos(A \sin(x) \cos(\phi_0)) \cos(A \cos(x) \sin(\phi_0)) dx, \quad (\text{B.14c})$$

$$I_4(\phi_0) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(lx) \cos(x) \sin(A \sin(x) \sin(\phi_0)) \cos(A \cos(x) \sin(\phi_0)) dx. \quad (\text{B.14d})$$

Izrazi za  $c_{0i}$  dobivaju se zamjenom  $\cos(\phi_0)$  s  $\cos(\nu t_1 - \phi_0)$  (isto vrijedi i za sinus), zamjenom  $\cos(A \sin \phi_0)$  s  $\cos(A(2 \sin(\nu t_1 - \phi_0) + \sin(\phi_0)))$  (isto vrijedi za sinus) te zamjenom  $I_i(\phi_0)$  s  $I_i(\nu t_1 - \phi_0)$ . Iz navedenih izraza vrlo jednostavno slijede uvjeti za željeni protokol (3.37a) i (3.37b).

## Dodatak C Transformacija baze

Operator  $\hat{O}_z$  se prelaskom iz baze  $|\pm z\rangle$  u bazu  $|\pm y\rangle$  transformiraju kao:

$$\hat{O}_y = U^\dagger \hat{O}_z U, \quad (\text{C.15})$$

pri čemu je  $U$  unitarna transformacija koja povezuje ove dvije baze. Za svaki vektor  $v$  zapisan u bazi  $|\pm z\rangle$  ( $v_z$ ) i bazi  $|\pm y\rangle$  ( $v_y$ ) vrijedi:

$$v_z = U v_y, \quad v_y = U^\dagger v_z. \quad (\text{C.16})$$

U slučaju prelaska iz baze  $|\pm z\rangle$  u  $|\pm y\rangle$  unitarna transformacija  $U$  poprima oblik:

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}. \quad (\text{C.17})$$

Primjenjujući transformaciju (C.15), (C.17) na Paulijeve matrice prikazane u bazi  $|\pm z\rangle$  dobiva se njihova reprezentacija u  $|\pm y\rangle$  bazi:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &\rightarrow \sigma_2, \\ \sigma_2 &\rightarrow \sigma_3, \\ \sigma_3 &\rightarrow \sigma_1. \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$



## Bibliography

- [1] Schrödinger, E. Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik. // Die Naturwissenschaften. Vol. 23, 48 (1935), str. 807–812.
- [2] Nielsen, M. A.; Chuang, I. L. Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition. 10th ed. USA : Cambridge University Press, 2011.
- [3] Liao, J.-Q.; Huang, J.-F.; Tian, L. Generation of macroscopic Schrödinger-cat states in qubit-oscillator systems. // Phys. Rev. A. Vol. 93 (2016), str. 033853.
- [4] Hacker, B.; Welte, S.; Daiss, S. et al. Deterministic creation of entangled atom–light Schrödinger-cat states. // Nature Photonics. Vol. 13, 2 (2019), str. 110–115.
- [5] Gorelik, L. Y.; Isacsson, A.; Voinova, M. V. et al. Shuttle mechanism for charge transfer in Coulomb blockade nanostructures. // Physical Review Letters. Vol. 80, 20 (1998), str. 4526–4529.
- [6] Park, H.; Park, J.; Lim, A. K. L. et al. Nanomechanical oscillations in a single-C60 transistor. // Nature. Vol. 407, 6800 (2000), str. 57–60.
- [7] Gorelik, L. Y.; Isacsson, A.; Galperin, Y. M. et al. Coherent transfer of Cooper pairs by a movable grain. // Nature. Vol. 411, 6836 (2001), str. 454–457.
- [8] Isacsson, A.; Gorelik, L. Y.; Shekhter, R. I. et al. Mechanical Cooper pair transportation as a source of long-distance superconducting phase coherence. // Physical Review Letters. Vol. 89, 27.
- [9] Padurariu, C.; Keijzers, C. J. H.; Nazarov, Y. V. Effect of mechanical resonance on Josephson dynamics. // Physical Review B. Vol. 86, 15.
- [10] Kittel, C. Introduction to Solid State Physics. 8th ed. Wiley, 2004.
- [11] You, J. Q.; Nori, F. Atomic physics and quantum optics using superconducting circuits. // Nature. Vol. 474, 7353 (2011), str. 589–597.
- [12] Eriksson, A.; Vikström, A. Zero-phase-difference Josephson current based on spontaneous symmetry breaking via parametric excitation of a movable superconducting dot. // Physical Review Letters. Vol. 118, 19.

- [13] Matveev, K. A.; Gisselält, M.; Glazman, L. I. et al. Parity-induced suppression of the Coulomb blockade of Josephson tunneling. // *Physical Review Letters*. Vol. 70, 19 (1993), str. 2940–2943.
- [14] D. Radić, S. J. C.; Park, H. C.; Suh, J. et al. Nanomechanical cat states generated by a dc voltage-driven Cooper pair box qubit. // To be published (2021).
- [15] Case, W. B. Wigner functions and Weyl transforms for pedestrians. // *American Journal of Physics*. Vol. 76, 10 (2008), str. 937–946.
- [16] Houck, A. A.; Koch, J.; Devoret, M. H. et al. Life after charge noise: recent results with transmon qubits. // *Quantum Information Processing*. Vol. 8, 2-3 (2009), str. 105–115.
- [17] Kalashnikov, K.; Hsieh, W. T.; Zhang, W. et al. Bifluxon: Fluxon-parity-protected superconducting qubit. // *PRX Quantum*. Vol. 1, 1.
- [18] Peng, H. B.; Chang, C. W.; Aloni, S. et al. Ultrahigh frequency nanotube resonators. // *Physical Review Letters*. Vol. 97, 8.