SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Judita Motočić

CHRISTOFFELOVE RIJEČI

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Tomislav Pejković

Zagreb, prosinac 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svom mentoru, doc.dr.sc. Tomislavu Pejkoviću na uloženom vremenu, strpljenju, stručnoj pomoći i vodstvu pri izradi ovog diplomskog rada.

Posebno zahvaljujem svojim roditeljima, bratu i sestri, baki Nadi, baki Zdenki, djedu Dragi i stricu Antunu koji su mi omogućili studiranje i uvijek bili podrška tijekom cijelog studija.

Od srca se zahvaljujem i svojim kolegama, posebno svom zaručniku koji mi je studiranje učinio ljepšim.

Hvala Bogu na svim milostima i uslišanim molitvama.

Ovaj rad posvećujem svojoj sestri.

Sadržaj

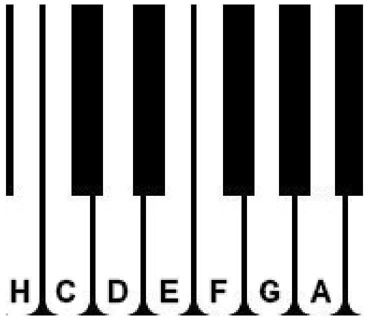
Uvod

Kombinatorika je grana diskretne matematike. Bavi se diskretnim strukturama, problemima rasporeda, prebrojavanjem elemenata konačnih skupova. Početci kombinatorike sežu u daleku povijest, spominje se u Kini i Indiji, kod židova gdje se ističu Rabbi ben Ezra i Josip Flavije te kasnije uz razvoj teorije vjerojatnosti. Tada se ističu poznati matematičari Blaise Pascal i Pierre de Fermat.

Kombinatorika na riječima grana je kombinatorike koja proučava riječi i formalne jezike. Formalni jezik je bilo koji skup simbola i kombinacija tih simbola. Tijekom posljednjih desetljeća raste interes za kombinatoriku na riječima. Iako je važnih doprinosa bilo i ranije, bili su raštrkani i obično potrebni kao alat za postizanje nekog drugog cilja u matematici. Njemački matematičar Elwin Bruno Christoffel 1875. godine predstavio je klasu riječi na binarnom alfabetu, danas poznatu kao Christoffelove riječi.

Ovaj rad se sastoji od pet poglavlja. U prvom poglavlju uvode se osnovni pojmovi i definicije te definira Christoffelov put i Christoffelova riječ koja diskretizira Christoffelov put. Drugo poglavlje obrađuje pojam rezne riječi, palindrome i rezultate vezane uz iste. Primjerice, prava donja, odnosno gornja, Christoffelova riječ nagiba r je oblika amb, odnosno bma, za neki palindrom m koji je rezna riječ pridružena r. U trećem poglavlju opisuje se standardna faktorizacija Christoffelovih riječi i dokazuje teorem koji govori da se svaka prava Christoffelova riječ (različita od riječi a i b) može na jedinstven način prikazati kao produkt dviju Christoffelovih riječi. Nakon toga, u četvrtom poglavlju predstavljenja su stabla Christoffelovih parova i Christoffelovih riječi s opisanim pripadnim konstrukcijama te su dani prikazi početnih dijelova stabala. U zadnjem poglavlju predstavljene su funkcije u programskom jeziku Python koje provjeravaju je li upisana riječ Christoffelova, odnosno za zadani nagib traži pripadne Christoffelove riječi.

Budući da Christoffelove riječi daju dobru diskretnu aproksimaciju kose dužine u koordinatnom sustavu (one koja nije paralelna nijednoj osi), pojavljuju se i u glazbi. Tako, primjerice, donja Christoffelova riječ duljine 12 i nagiba $\frac{5}{7}$, *aababaababab*, predstavlja tipke na klaviru od tona H do idućeg višeg tona H (gdje je a oznaka za bijelu i b oznaka za crnu tipku) [6].



Slika 0.1: Tipke na klaviru koje predstavlja Christoffelova riječ *aababaababab*

Diplomski rad napravljen je u sklopu aktivnosti Projekta KK.01.1.1.01.0004 - Znanstveni centar izvrsnosti za kvantne i kompleksne sustave te reprezentacije Liejevih algebri.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi i definicije

Najprije uvodimo neke pojmove. Ravnina je Kartezijeva ravnina $\mathbb{R}^2$.
Skup A nazivamo alfabet.
Slovo je element alfabeta.
Riječ je konačan niz slova. Prazan niz zovemo prazna riječ.
Duljina riječi w definira se kao duljina niza, u oznaci $|w|$.
Obratna riječ riječi $w = a_1 ... a_n, \ \ a_i \in A$ je $\widetilde{w} = a_n ... a_1$.

Definicija 1.1. *Slobodni monoid na* A *je skup svih riječi na* A*. Označavamo ga* A^*.

Definicija 1.2. *Cjelobrojna rešetka je skup točaka u ravnini s cjelobrojnim koordinatama, tj.* $\mathbb{Z}^2$*. Njezine elemente nazivamo cjelobrojnim točkama i cjelobrojnim vektorima.*

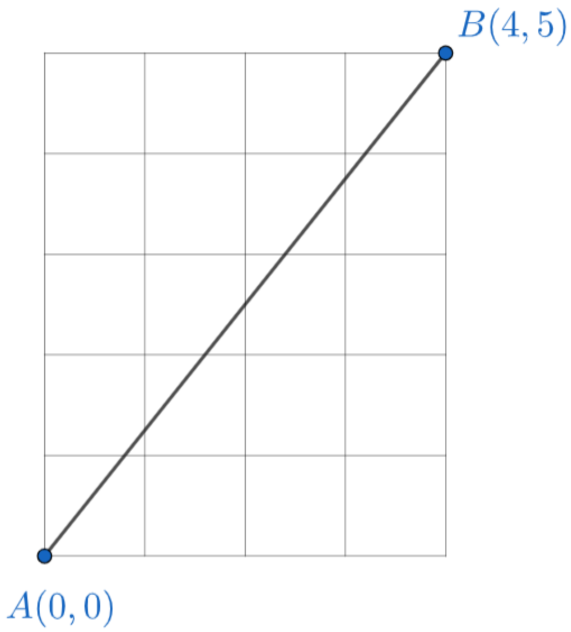
Definicija 1.3. *Osnovni korak u cjelobrojnoj rešetki je dužina* $[(x, y), (x + 1, y)]$ *ili* $[(x, y), (x, y + 1)]$ *pri čemu su* x, y *cijeli brojevi. Pri tome prvi tip pomaka nazivamo horizontalnim, a drugi vertikalnim.*

Definicija 1.4. *Put u rešetki je niz uzastopnih osnovnih koraka u ravnini.*

Neka su p i q nenegativni relativno prosti brojevi. Neka je $\overline{AB}$ dužina takva da točka A ima cjelobrojne koordinate, a točka B je jednaka $B = A+(p, q)$. Promotrimo put u rešetki od točke A do točke B ispod te dužine.

Definicija 1.5. *Donji Christoffelov put nagiba* $\frac{q}{p}$ *je put u rešetki od točke A do točke* $B = A + (p, q)$ *koji zadovoljava sljedeća dva svojstva:*

1. *taj put u rešetki leži ispod dužine* $\overline{AB}$ *te počinje u točki A, a završava u točki B.*



Slika 1.1: Dužina $\overline{AB}$, pri čemu je $A = (0,0)$, $p = 4$, $q = 5$

2. *poligon omeđen dužinom $\overline{AB}$ i tim putem u rešetki od točke A do točke B u nutrini ne sadrži točke s cjelobrojnim koordinatama.*

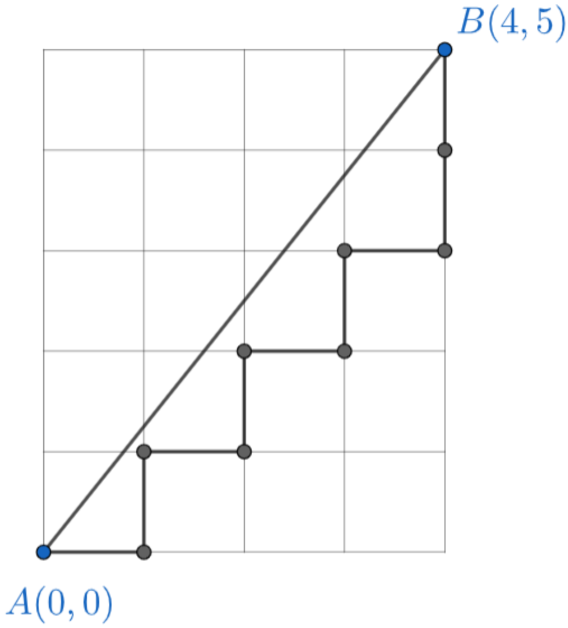
Na analogan način definiramo gornji Christoffelov put.

Definicija 1.6. *Gornji Christoffelov put nagiba $\frac{q}{p}$ je put u rešetki od točke A do točke $B = A + (p,q)$ koji zadovoljava sljedeća dva svojstva:*

1. *taj put u rešetki leži iznad dužine $\overline{AB}$ te počinje u točki A, a završava u točki B.*

2. *poligon omeđen dužinom AB i tim putem u rešetki od točke A do točke B u nutrini ne sadrži točke s cjelobrojnim koordinatama.*

Definicija 1.7. *Donja Christoffelova riječ nagiba $\frac{q}{p}$ je riječ u slobodnom monoidu $\{a,b\}^*$ koja kodira donji Christoffelov put nagiba $\frac{q}{p}$, pri čemu a predstavlja horizontalni te b vertikalni pomak.*



Slika 1.2: Donji Christoffelov put nagiba $\frac{5}{4}$

Primjer 1.8. *Neka je zadano* $p = 4$, $q = 5$ *i točka* $A(0,0)$. *Tada je*

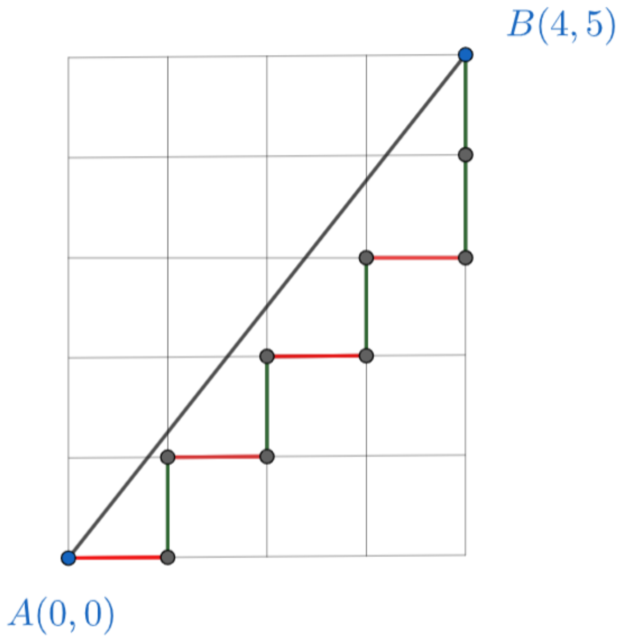
$$B = A + (4,5) = (4,5).$$

Dužinu $\overline{AB}$ *možemo diskretizirati odozdo pomoću horizontalnih i vertikalnih koraka tako da poligon omeđen dužinom* $\overline{AB}$ *i provedenim koracima u nutrini ne sadrži točke s cjelobrojnim koordinatama.*

Crvenom bojom prikazani su horizontalni, a zelenom bojom vertikalni koraci. Pripadna Christoffelova donja riječ za nagib $\frac{5}{4}$ je *abababab b*. Primijetimo da se riječ sastoji od 4 horizontalna i 5 vertikalnih koraka. Dakle, broj slova a u donjoj Christoffelovoj riječi jednak je p, a broj slova b jednak je q.

Na analogan način definiramo gornju Christoffelovu riječ.

Definicija 1.9. *Gornja Christoffelova riječ nagiba* $\frac{q}{p}$ *je riječ u slobodnom monoidu* $\{a,b\}^*$ *koja kodira gornji Christoffelov put nagiba* $\frac{q}{p}$, *pri čemu a predstavlja horizontalni te b vertikalni pomak.*



Slika 1.3: Donja Christoffelova riječ nagiba $\frac{5}{4}$ je *ababababb*

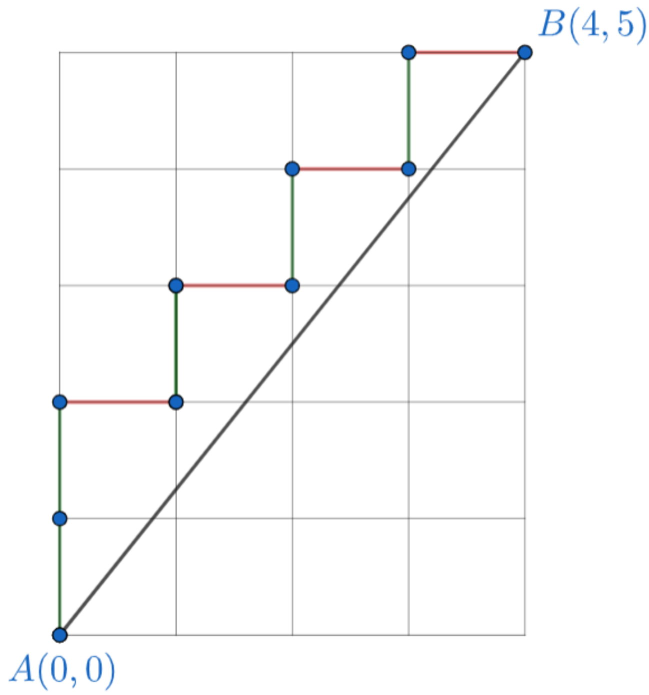
Diskretizirajmo dužinu $\overline{AB}$ iz primjera odozgo.

Pripadna gornja Christoffelova riječ je bbabababa. Ona je obratna riječ donje Christoffelove riječi istog nagiba.

Ako konstruiramo pravokutnik $ACBD$ takav da mu je dužina $\overline{AB}$ dijagonala, a stranice paralelne s koordinatnim osima, tada je polovište dužine $\overline{AB}$, točka S, središte centralne simetrije pravokutnika. Zbog toga vrijedi da je gornja Christoffelova riječ obratna riječ donje Christoffelove riječi istog nagiba.

Definicija 1.10. *Christoffelova riječ je riječ koja je donja ili gornja Christoffelova riječ.*

Neka je E automorfizam slobodnog monoida $\{a,b\}^*$ koji zamjenjuje a i b. Taj automorfizam zamjenjuje gornje i donje Christoffelove riječi. U već prikazanom primjeru donja Christoffelova riječ nagiba $\frac{5}{4}$ je *ababababb*. Spomenutom bijekcijom pridružimo joj riječ *babababaa*. Dobivena riječ je gornja Christoffelova riječ nagiba $\frac{4}{5}$. Općetino, takav automorfizam šalje donje Christoffelove riječi nagiba $\frac{q}{p}$



Slika 1.4: Gornja Christoffelova riječ nagiba $\frac{5}{4}$ je *bbabababa*

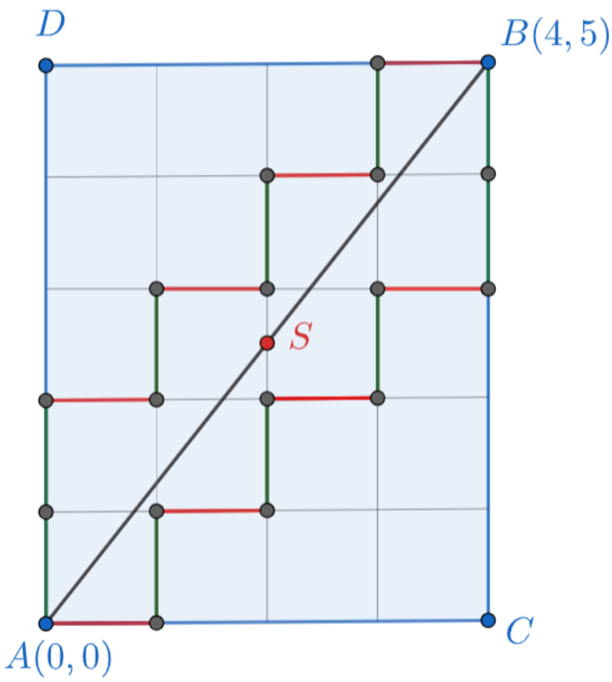
u gornje Christoffelove riječi nagiba $\frac{p}{q}$. To možemo lako provjeriti - uzmimo istu početnu točku A i napravimo osno simetričnu sliku donje Christoffelove riječi s obzirom na pravac $y = x$, kao na Slici 1.6.

Primjer 1.11. *Slovo a je donja i gornja Christoffelova riječ nagiba* 0*. Tada je* $p = 0$ *te* $q = 1$*. Slovo b je donja i gornja Christoffelova riječ nagiba* 0*. Tada je* $p = 1$ *te* $q = 0$*.*

Definicija 1.12. *Christoffelove riječi koje nisu jednake a ili b nazivamo pravim.*

Primjer 1.13. *Riječi* $a^n b$ *i* ab^n *su donje Christoffelove riječi za svaki* $n \in \mathbb{N}_0$*.*

Definicija 1.14. *Neka je* $x \in \mathbb{R}$*. Tada broj* $\lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z} : m \leq x\}$ *zovemo najveći cijeli dio ili najveće cijelo od x.*



Slika 1.5: Donji Christoffelov put centralno je simetričnan gornjem Christoffelovom putu istog nagiba s obzirom na središte pravokutnika $ACBD$.

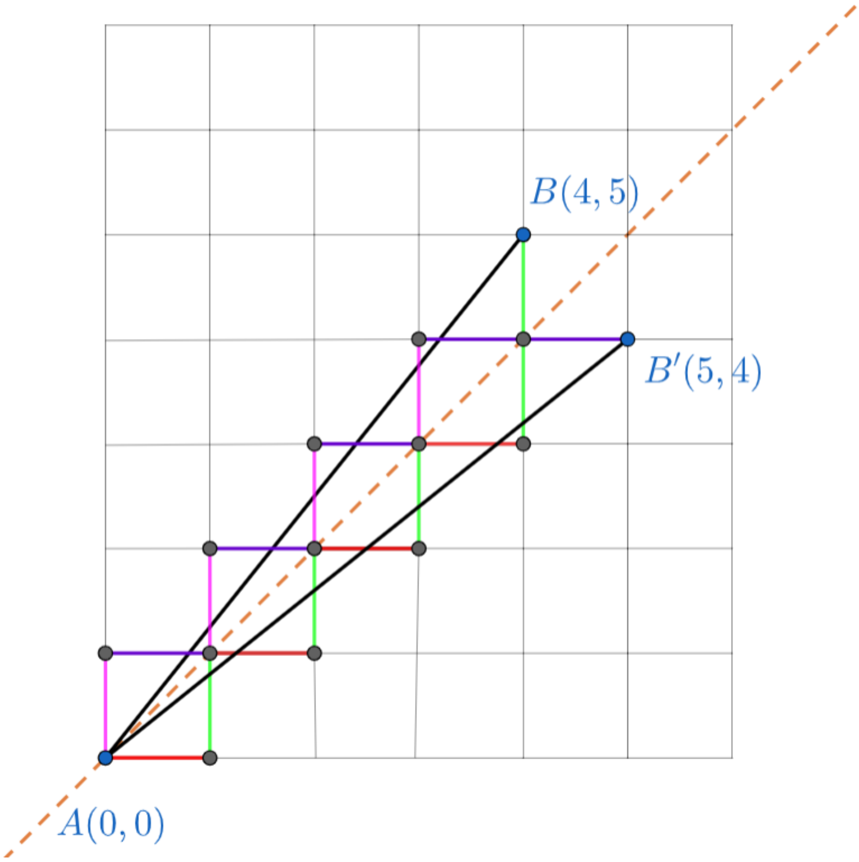
Teorem 1.15. *Neka je $w = a_1a_2...a_{p+q}$ donja Christoffelova riječ nagiba $\frac{q}{p}$. Neka je $i \in \mathbb{N}_0$, $k(i) = \left\lfloor \frac{q}{p+q} i \right\rfloor$. Tada je*

$$a_i = \begin{cases} a, & \textit{ako je } k(i) - k(i-1) = 0, \\ b, & \textit{ako je } k(i) - k(i-1) = 1, \end{cases} \tag{1.1}$$

za sve $i \in \{1, ..., p + q\}$.

Dokaz. Za riječ $w = a$ vrijedi

$$k(1) = \left\lfloor \frac{q}{p+q} \cdot 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{0}{1+0} \right\rfloor = 0$$
$$k(0) = \left\lfloor \frac{q}{p+q} \cdot 0 \right\rfloor = 0$$
$$\Rightarrow \quad k(1) - k(0) = 0.$$



Slika 1.6: E šalje donju Christoffelovu riječ nagiba $\frac{5}{4}$ u gornju Christoffelovu riječ nagiba $\frac{4}{5}$.

Dakle, $w = a_1 = a$.
Analogno, za riječ $w = b$ vrijedi

$$\begin{aligned} k(1) &= \left\lfloor \frac{q}{p+q} \cdot 1 \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{0+1} \right\rfloor = 1 \\ k(0) &= \left\lfloor \frac{q}{p+q} \cdot 0 \right\rfloor = 0 \\ \Rightarrow \quad & k(1) - k(0) = 1. \end{aligned}$$

Dakle, $w = a_1 = b$.
Pretpostavimo da je w prava donja Christoffelova riječ. Neka je v riječ definirana s (1.1).

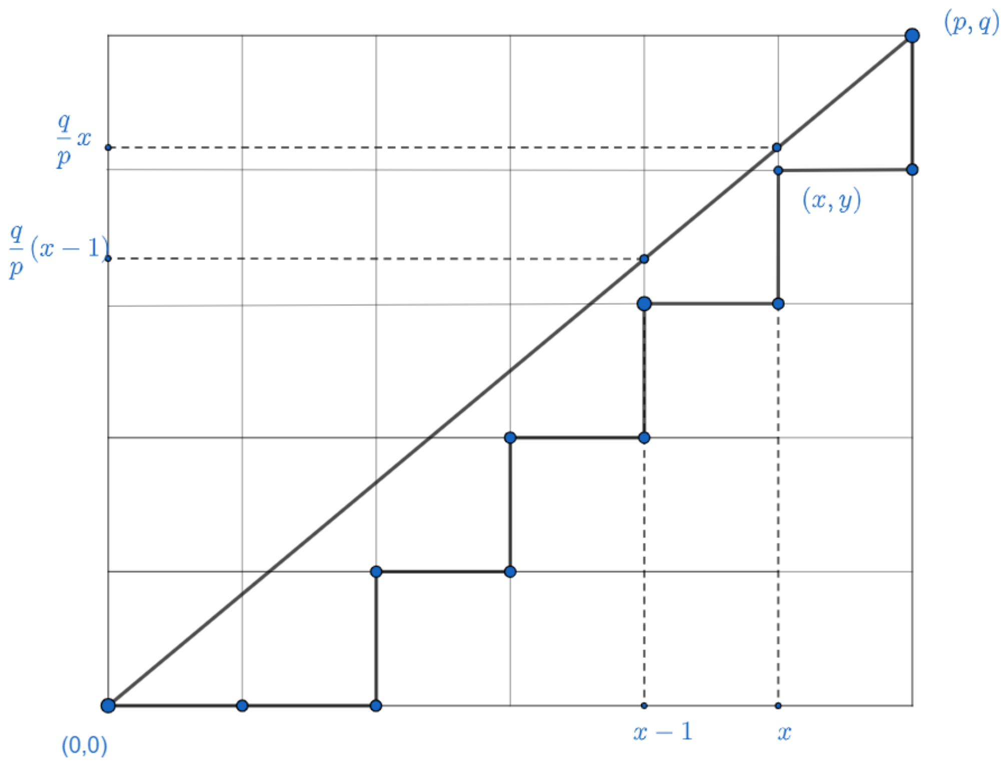
U prvih n slova riječi v ima

$$\sum_{i=1}^{n}(k(i)-k(i-1)) = k(n)-k(0) = \left\lfloor \frac{q}{p+q}n \right\rfloor$$

slova b.
Označimo s x broj slova a i s y broj slova b u prvih n slova riječi w. Tada iz definicije Christoffelove riječi slijedi

$$x+y=n, \quad \left\lfloor \frac{q}{p}(x-1) \right\rfloor \leq y \leq \left\lfloor \frac{q}{p}x \right\rfloor.$$

Budući da su x i y nenegativni cijeli brojevi, a p i q relativno prosti prirodni brojevi,



Slika 1.7: $\left\lfloor \frac{q}{p}(x-1) \right\rfloor \leq y \leq \left\lfloor \frac{q}{p}x \right\rfloor$

vrijedi

$$
\begin{aligned}
\Big\lfloor \frac{q}{p}(x-1) \Big\rfloor \leq y \leq \Big\lfloor \frac{q}{p}x \Big\rfloor \\
\frac{q}{p}(n-y-1)-1 < \Big\lfloor \frac{q}{p}(x-1) \Big\rfloor \leq y \leq \Big\lfloor \frac{q}{p}x \Big\rfloor \leq \frac{q}{p}(n-y) \\
qn-qy-q-p < py \leq qn-qy \\
qn-q-p < py+qy \leq qn \\
qn-q-p < (p+q)y \leq qn \\
\frac{q}{p+q}n-1 < y \leq \frac{q}{p+q}n < y+1 \\
\Rightarrow y = \Big\lfloor \frac{q}{p+q}n \Big\rfloor
\end{aligned}
$$

Budući da za svaki $n \in \{1, ..., p+q\}$ među prvih n slova u riječima v i w ima jednak broj slova b, slijedi $v = w$. □

Neka je C *konjugator* – preslikavanje koje svakoj riječi $a_1 a_2 ... a_n$ duljine n pridružuje riječ $a_2 ... a_n a_1$. Na taj način definiramo djelovanje cikličke grupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ na skup riječi duljine n. Neka je w riječ duljine n. Sve njoj konjugirane riječi su $C^i(w),\ i = 0, ..., n-1$.

Propozicija 1.16. *Neka je w Christoffelova riječ. Tada w nije potencija nijedne druge riječi. Ako je w duljine n, sve riječi $\mathrm{C}^i(w),\ i = 0, ..., n-1$ su različite.*

Dokaz. Broj slova a u donjoj ili gornjoj Christoffelovoj riječi nagiba $\frac{q}{p}$ jednak je p, a broj slova b jednak je q. Budući da su p i q relativno prosti brojevi, vrijedi da su i brojevi $|w|_a$ i $|w|_b$ relativno prosti. Zbog toga w ne može biti potencija neke druge riječi, tj. oblika $w = u^k$ za $k > 1$.

Neka je riječ w duljine n. Pretpostavimo da sve navedene riječi nisu različite. Tada je $C^d(w) = w$ za neki pravi djelitelj d broja n. No, tada je w potencija riječi duljine d što je u kontradikciji s upravo dokazanom tvrdnjom. □

Poglavlje 2

Rezna riječ

Definirajmo *reznu riječ*.

Neka su p i q relativno prosti brojevi. Reznu riječ m pridruženu $\frac{q}{p}$ dobivamo tako da promatramo sjecišta otvorene dužine AB s pravcima cjelobrojne rešetke, pri čemu su A i B cjelobrojne točke takve da je $\overrightarrow{AB} = (p, q)$. Sjecišta s vertikalnim pravcima rešetke označimo s a, a sjecišta s horizontalnim pravcima rešetke označimo s b. Riječ m dobivamo čitanjem zapisanih slova s lijeva nadesno.

Za reznu riječ m pridruženu $\frac{q}{p}$ vrijedi da je $|m|_a = p - 1$ te $|m|_b = q - 1$.

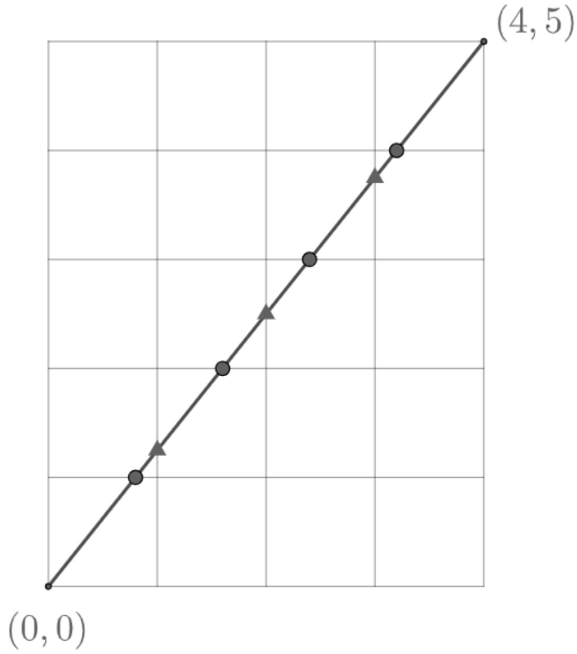
Definicija 2.1. *Riječ w je* palindrom *ako je $w = \widetilde{w}$, tj. ako je jednaka svojoj obratnoj riječi.*

Svaka rezna riječ je palindrom. Promotrimo pravokutnik s dijagonalom $\overline{AB}$. Pri centralnoj simetriji s obzirom na njegovo središte dijagonala $\overline{AB}$ preslikava se sama u sebe. Također, vertikalni pravci rešetke preslikavaju se u vertikalne, a horizontalni pravci u horizontalne pravce rešetke. Iz toga slijedi da se rezna riječ podudara sa njoj obratnom riječi.

Teorem 2.2. *Prava donja Christoffelova riječ nagiba r je oblika amb za neki palindrom m koji je rezna riječ pridružena r.*

Dokaz. Prava donja Christoffelova riječ počinje s a, a završava s b. Ako izbacimo prvi i zadnji korak, dobivamo bijekciju prikazanu na Slici 2.3 između koraka puta koji definira donju Christoffelovu riječ i sjecišta koja definiraju reznu riječ. Na Slici 2.4 je prikazana donja Christoffelova riječ nagiba $\frac{5}{4}$ i pridružena rezna riječ. $\square$

Teorem 2.3. *Prava gornja Christoffelova riječ nagiba r je oblika bma za neki palindrom m koji je rezna riječ pridružena r.*

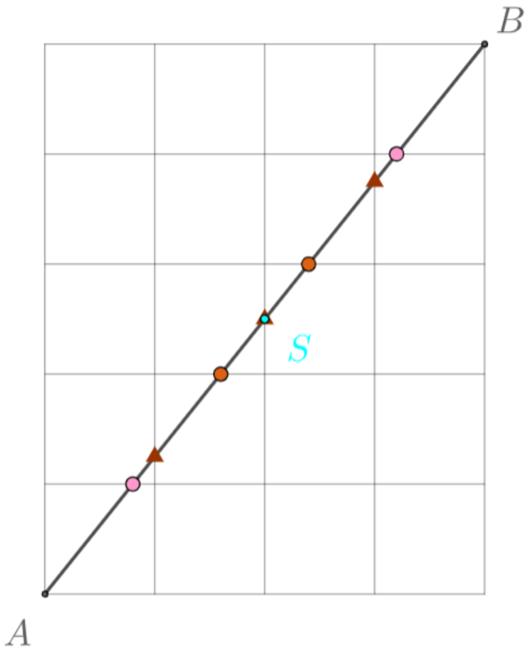


Slika 2.1: Rezna riječ *bababab* pridružena $\frac{5}{4}$

Dokaz. Prava gornja Christoffelova riječ počinje s b, a završava s a. Na analogan način kao u prethodnom dokazu, ako izbacimo prvi i zadnji korak, dobivamo bijekciju prikazanu na Slici 2.5 između koraka puta koji definira gornju Christoffelovu riječ i sjecišta koja definiraju reznu riječ. Na Slici 2.6 je prikazana gornja Christoffelova riječ nagiba $\frac{5}{4}$ i pridružena rezna riječ. □

Teorem 2.4. *Neka su p i q relativno prosti prirodni brojevi. Definirajmo skupove P i Q na sljedeći način: $P = \{ip : 0 < i < q\}$ te $Q = \{jq : 0 < j < p\}$. Skupovi P i Q su disjunktni. Neka je $P \cup Q = \{r_1 < r_2 < ... < r_{p+q-2}\}$. Definirajmo riječ $m = a_1a_2...a_{p+q-2}$ na alfabetu $\{a < b\}$ uvjetima $a_i = a$ ako je $r_i \in Q$ i $a_i = b$ ako je $r_i \in P$. Tada je m rezna riječ pridružena $\frac{q}{p}$. Svaka rezna riječ može se dobiti na ovaj način.*

Dokaz. Neka je w rezna riječ pridružena $\frac{q}{p}$. Sjecište otvorene dužina AB s vertikalnim pravcem cjelobrojne rešetke predstavlja slovo a u riječi w. Označimo to sjecište s (x, y). Vrijedi $x \in \{1, ..., p-1\}$ te $y = \frac{q}{p}x$. Budući da su p i q međusobno relativni

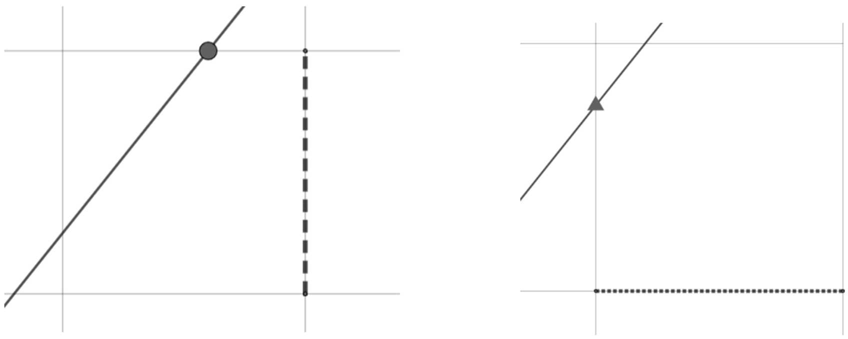


Slika 2.2: Rezna riječ je palindrom

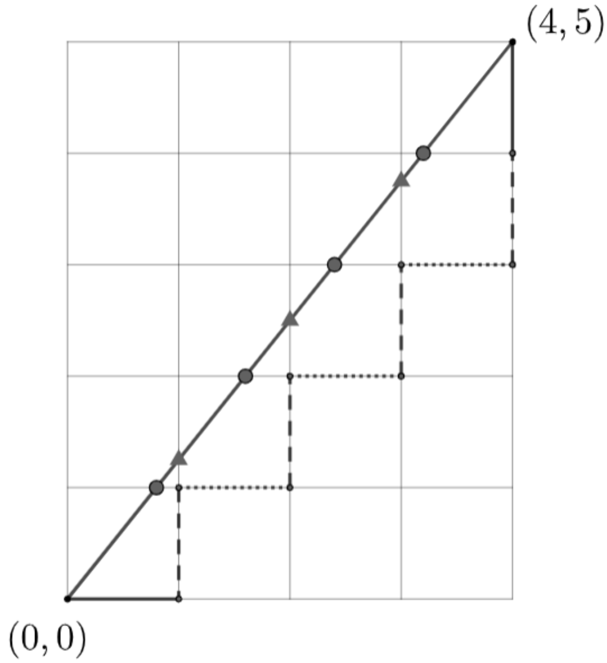
prosti brojevi, y ne može biti cijeli broj. Prije odgovarajućeg slova a u riječi w ima točno $x - 1$ slova a, a slova b točno $\lfloor y \rfloor$. Dakle, promatrano slovo a je $x + \lfloor y \rfloor$ po redu slovo u riječi w. Vrijedi

$$\lfloor y \rfloor < \frac{q}{p} x < \lfloor y \rfloor + 1$$
$$\lfloor y \rfloor p < xq < (\lfloor y \rfloor + 1)\, p.$$

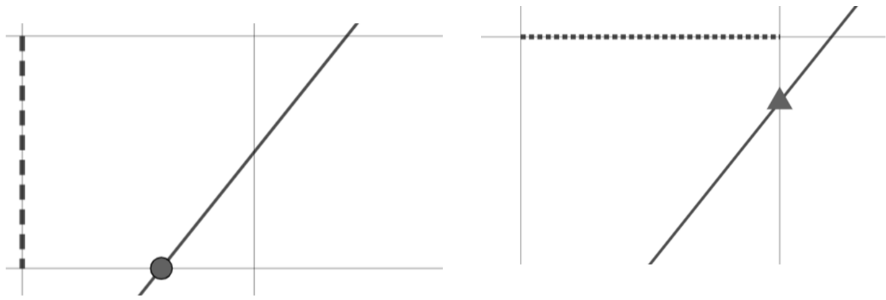
Zbog toga vrijedi da su od $xq \in Q$ manji točno elementi $p, 2p, ..., \lfloor y \rfloor p \in P$ i $q, 2q, ..., (x-1)q \in Q$. Dakle, u riječi m slovo a se također nalazi na mjestu $x + \lfloor y \rfloor$. Slovo a se pojavljuje na istim mjestima u riječima w i m. Budući da riječi w i m imaju jednak broj slova a i jednak broj slova b, riječi w i m su jednake. □



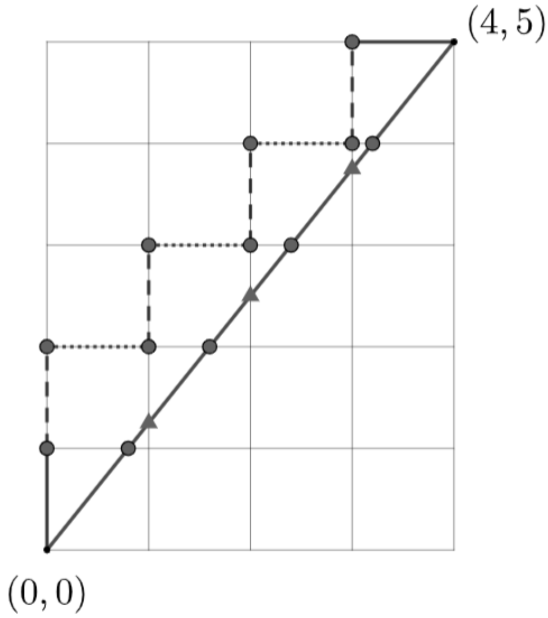
Slika 2.3: Bijekcije između koraka i sjecišta



Slika 2.4: Donja Christoffelova riječ te rezna riječ



Slika 2.5: Bijekcije između koraka i sjecišta



Slika 2.6: Gornja Christoffelova riječ te rezna riječ

Poglavlje 3

Standardna faktorizacija

Moguće je rekurzivno konstruirati Christoffelove riječi. Najprije ćemo navesti pojmove i rezultate koji će nam poslužiti za te konstrukcije.

Definicija 3.1. *Primitivni trokut je proizvoljan trokut kojemu su vrhovi cjelobrojne točke, a ne sadrži niti jednu drugu cjelobrojnu točku, gledajući i stranice trokuta.*

Definicija 3.2. *Primitivni paralelogram je proizvoljan paralelogram kojemu su vrhovi cjelobrojne točke, a ne sadrži niti jednu drugu cjelobrojnu točku, gledajući i stranice paralelograma.*

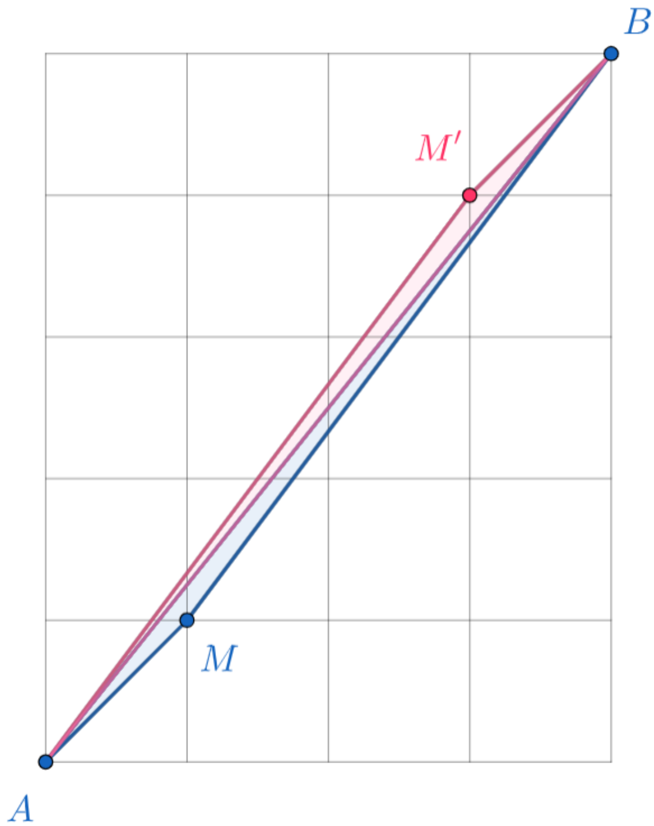
Definicija 3.3. *Baza cjelobrojne rešetke, tj. baza od $\mathbb{Z}^2$, je par cjelobrojnih vektora u i v takvih da je svaki vektor $z \in \mathbb{Z}^2$ jedinstvena linearna kombinacija s koeficijentima iz $\mathbb{Z}$ tih dvaju vektora, tj. $z = Au + Bv$, $A, B \in \mathbb{Z}$.*

Definicija 3.4. *Vektor stranice paralelograma je bilo koji od četiri moguća vektora koje dobivamo izabirući stranicu paralelograma i jednu od orijentacija.*

Definicija 3.5. *Vektor stranice trokuta je bilo koji od šest mogućih vektora koje dobivamo izabirući stranicu trokuta i jednu od orijentacija.*

Definicija 3.6. *Unimodularna matrica je kvadratna matrica s cjelobrojnim elementima čija je determinanta jednaka* ± 1.

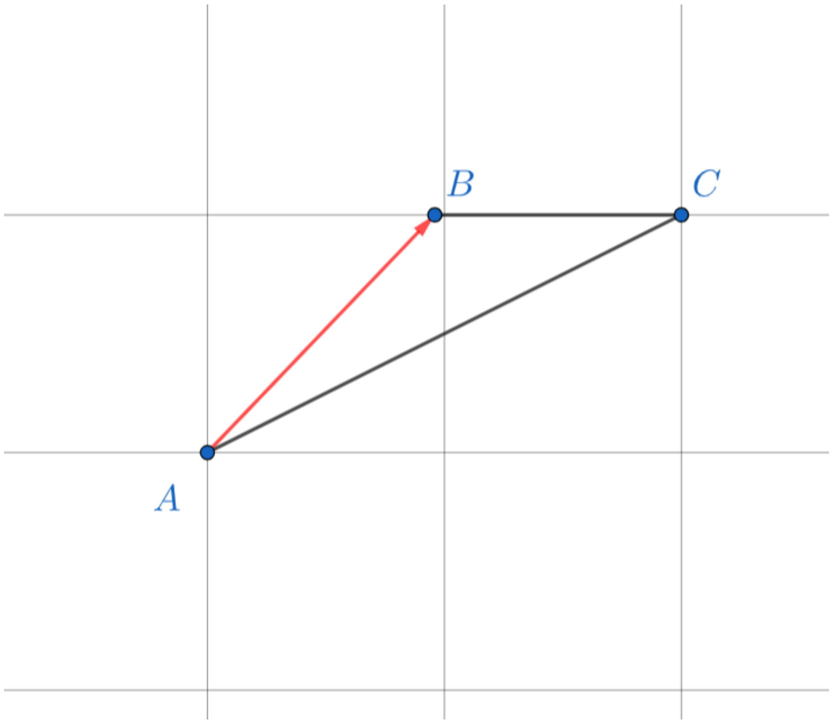
Skup svih invertibilnih matrica reda n s koeficijentima iz prstena R označava se s $\mathrm{GL}(n, R)$. Mi ćemo promatrati kvadratne matrice reda 2 s cjelobrojnim koeficijentima, tj. skup $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$. Iz Binet-Cauchyjevog teorema slijedi da je $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ upravo grupa svih unimodularnih matrica.



Slika 3.1: Primitivni trokuti AMB i $AM'B$ te primitivni paralelogram $AMBM'$

Pokazat ćemo uskoro da dva cjelobrojna vektora $u = (a, b)$ i $v = (c, d)$ čine bazu od $\mathbb{Z}^2$ ako i samo ako je matrica $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ iz $GL(2, \mathbb{Z})$. Svaka dva vektora stranica trokuta ili svaka dva vektora susjednih stranica paralelograma čine bazu od $\mathbb{R}^2$ promatranog kao realni vektorski prostor. Popločavanje ravnine određeno je paralelogramom tako da ga uzastopno translatiramo za vektor stranica. Neka je jedan od vrhova paralelograma u ishodištu. Tada je aditivna podgrupa od $\mathbb{R}^2$ generirana stranicama tog paralelograma zapravo skup svih vrhova svih paralelograma u popločavanju ravnine.

Uzmimo neki paralelogram s cjelobrojnim vrhovima. Paralelogram je primitivan ako i samo ako bilo koja dva vektora njegovih susjednih stranica čine bazu od $\mathbb{Z}^2$. Dokažimo ovu tvrdnju geometrijski. Promotrimo popločavanje ravnine paralelogramom na ranije spomenut način. Vrijedi da su svi paralelogrami u tom popločavanju primitivni ako i samo ako je jedan od njih primitivan. U tom slučaju



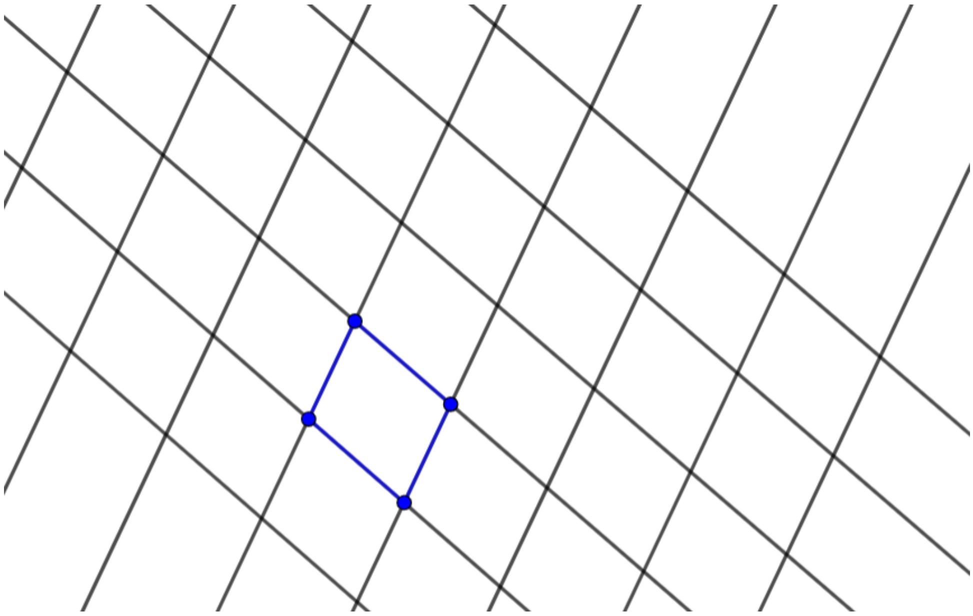
Slika 3.2: Vektor $\overrightarrow{AB}$ stranice primitivnog trokuta ABC

ne postoje cjelobrojne točke izvan skupa vrhova svih tih paralelograma. Dakle, podgrupa generirana vektorima susjednih stranica takvog paralelograma jednaka je $\mathbb{Z}^2$ ako i samo ako je taj paralelogram primitivan. U tom slučaju ta dva vektora su linearno nezavisna te čine bazu za $\mathbb{Z}^2$ i razapinju čitavu cjelobrojnu rešetku.

Iz ovoga slijedi da je trokut s cjelobrojnim vrhovima primitivan ako i samo ako bilo koja dva vektora njegovih stranica čine bazu od $\mathbb{Z}^2$.

Neka su $u = (a, b)$ i $v = (c, d)$ cjelobrojni vektori. Promatramo paralelogram s vrhovima $0, u, v, u + v$. Možemo zaključiti da je takav paralelogram primitivan ako i samo ako je $\det(u, v) = \pm 1$. Pretpostavimo da se u i v nalaze u prvom kvadrantu. Zbog $u = (a, b) = (a, \frac{b}{a} \cdot a) = (a, \alpha a)$ slijedi da je vektor u pozitivno proporcionalan vektoru $(1, \alpha)$. Analogno vrijedi da je vektor v pozitivno proporcionalan vektoru $(1, \beta)$. Zbog toga je $\det(u, v) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ pozitivno proporcionalna $\det \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \beta \end{bmatrix} = \beta - \alpha$. Stoga je $\det(u, v) > 0$ ako i samo ako je nagib $\alpha = \frac{b}{a}$ vektora u manji od nagiba $\beta = \frac{d}{c}$ vektora v.

Pokažimo sada karakterizaciju baze od $\mathbb{Z}^2$ koju smo spomenuli. Pretpostavimo



Slika 3.3: Popločavanje ravnine paralelogramom

da vektori u, v čine bazu od $\mathbb{Z}^2$. To znači da postoje $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ takvi da je

$$\alpha u + \beta v = (1, 0) = e_1$$

i $\gamma, \delta \in \mathbb{Z}$ takvi da je

$$\gamma u + \delta v = (0, 1) = e_2.$$

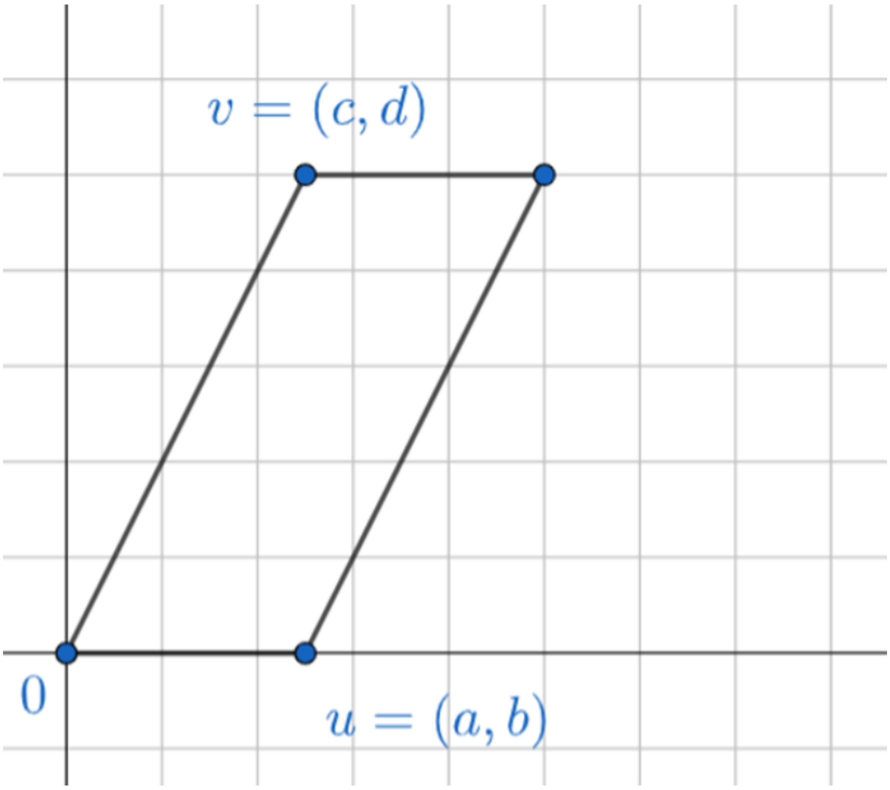
Tada je pripadna matrica prijelaza iz baze (u, v) u bazu (e_1, e_2) jednaka $\left[\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right]$ te vrijedi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Determinanta jedinične matrice jednaka je 1. Zbog Binet-Cauchyjevog teorema vrijedi da je

$$1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

Budući da matrica prijelaza i matrica sastavljena od vektora u i v sadrže samo cjelobrojne koeficijente, slijedi da je $\det(u, v) = \pm 1$.



Slika 3.4: Paralelogram s vrhovima $0, u, v, u + v$

Pretpostavimo da vrijedi $\det(u, v) = \pm 1$. Kako je $\det(u, v) \neq 0$, to je matrica $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ regularna pa je

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},$$

za neke $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$. Pokažimo da su to zapravo cijeli brojevi. Imamo

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} &= \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \\ &= \pm \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{2x2}. \end{aligned}$$

Slijedi da se (e_1, e_2) mogu prikazati kao cjelobrojne linearne kombinacije vektora u i v pa je (u, v) baza za $\mathbb{Z}^2$.

Teorem 3.7. *Neka su A i B dvije cjelobrojne točke takve da je $B = A + (p, q)$, pri čemu su p, q relativno prosti prirodni brojevi. Postoji jedinstvena točka M koja leži unutar pravokutnika s dijagonalom $\overline{AB}$, ali ispod te dijagonale, takva da je AMB primitivni trokut.*

Dokaz. Neka je M cjelobrojna točka u pravokutniku ispod dijagonale $\overline{AB}$ i najbliža toj dijagonali. Takva točka ne leži na otvorenoj dužini AB budući da su p i q relativno prosti. Takav trokut AMB mora biti primitivan.

Pretpostavimo da postoji još jedna točka M' takva da je trokut $AM'B$ primitivan. Zbog činjenice da je trokut AMB primitivan, slijedi da vektori $\overrightarrow{AM}$ i $\overrightarrow{AB}$ čine bazu od $\mathbb{Z}^2$. Zbog toga vrijedi da je njihova determinantna ± 1, odnosno jednaka je 1 jer je nagib od $\overrightarrow{AM}$ manji od nagiba $\overrightarrow{AB}$. Također, za $\det(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AB})$ vrijedi da je jednaka 1 jer je također nagib od $\overrightarrow{AM'}$ manji od nagiba $\overrightarrow{AB}$. Dakle, vrijedi

$$\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 1 = \det(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{AB}).$$

Uzevši razliku slijedi da je $\det(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{AB}) = 0$. To povlači da su ti vektori linearno zavisni, tj. paralelni. Dužina $\overline{MM'}$ je kraća od dužine $\overline{AB}$ jer se nalazi strogo ispod nje. Stoga se točka $A + \overrightarrow{MM'}$ nalazi na otvorenoj dužini $\overline{AB}$, što je u kontradikciji s već spomenutom tvrdnjom. Rezultat je prikazan na slici 3.5. □

Skup A^* je monoid pri čemu je množenje zapravo *spajanje* riječi. Na primjer, produkt riječi u i v jednak je uv, a dobivamo ga tako da najprije napišemo riječ u, a zatim odmah riječ v.

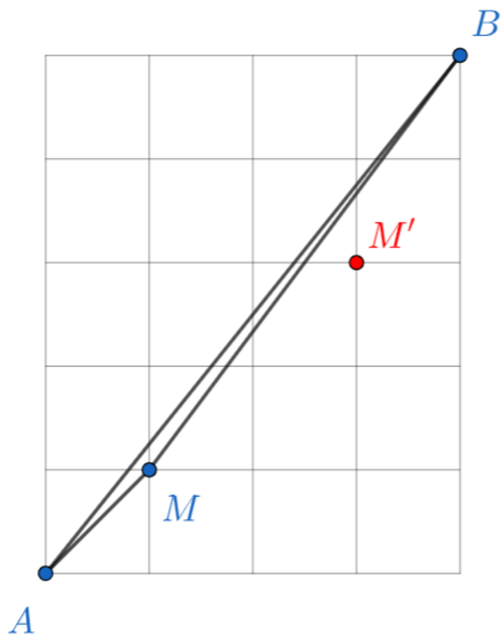
Definicija 3.8. *Neka su w, u, v takve riječi da je $w = uv$. Tada je uv faktorizacija riječi w.*

Faktorizacija $w = uv$ je netrivijalna ako su obje riječi u i v neprazne.

Neka su m, u, v, w riječi takve da je $w = umv$. Kažemo da je u *prefiks* riječi w, a v *sufiks* od w. Riječ m nazivamo *faktorom* od w i za njega kažemo da je pravi ako je različit od riječi w.

Definicija 3.9. *Par riječi (u, v) je Christoffelov ako su sve tri riječi u, v, uv donje Christoffelove riječi.*

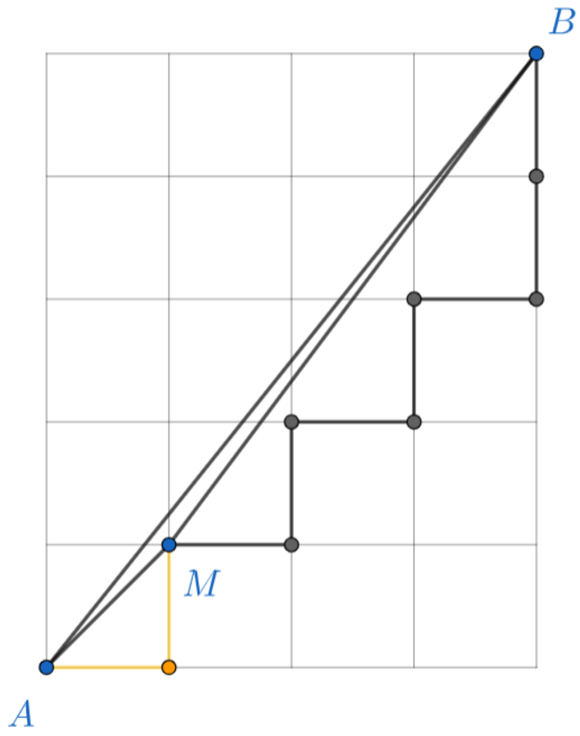
Teorem 3.10. *Svaka prava Christoffelova riječ može se na jedinstven način prikazati kao produkt dviju Christoffelovih riječi.*



Slika 3.5: Jedinstvena točka M takva da je trokut AMB primitivan

Dokaz. Prava Christoffelova riječ je donja ako i samo ako počinje slovom a i ako i samo ako završava slovom b. Neka je w prava donja Christoffelova riječ. Neka su A i B cjelobrojne točke pri čemu je $B = A+(p, q)$, a $\frac{q}{p}$ nagib riječi w. Odaberimo točku M u pravokutniku kojemu je dijagonala dužina $\overline{AB}$ kao u Teoremu 3.7. Trokut AMB tada je primitivan te iz toga slijedi da na otvorenoj dužini AM ne postoji cjelobrojna točka. Dakle, vrijedi da je $\overrightarrow{AM} = (i, j)$, pri čemu su i, j relativno prosti. Također, za otvorenu dužinu BM vrijedi da ne sadrži cjelobrojnu točku. Zbog toga vrijedi da je $\overrightarrow{MB} = (k, l)$, pri čemu su k, l relativno prosti. Donja Christoffelova riječ nagiba $\frac{q}{p}$ nastaje spajanjem donjih Christoffelovih riječi nagiba $\frac{j}{i}$ te $\frac{l}{k}$.

Obratno, neka je w donja Christoffelova riječ koja je produkt dviju takvih riječi, tj. $w = uv$. Tada u definirajućem pravokutniku za riječ w s dijagonalom $\overline{AB}$ na putu u rešetki kodiranom riječju w postoji točka M koja odgovara faktorizaciji $w = uv$.Tada je trokut AMB primitivan. Naime, put koji odgovara riječi u nalazi se ispod dužine AM, a put koji odgovara riječi v nalazi se ispod dužine MB. Dakle, trokut AMB se nalazi u poligonu omeđenom dužinom AB i putom koji odgovara riječi w. Taj poligon u nutrini ne sadrži cjelobrojne točke pa ih ne sadrži niti trokut AMB. Točka M je prema Teoremu 3.7 jedinstvena te su zbog toga riječi u i v jedinstvene.



Slika 3.6: Donja Christoffelova riječ nagiba $\frac{q}{p}$ dobivena kao produkt donjih Christoffelovih riječi od točke A do M te od točke M do točke B

Gornje Christoffelove riječi dobivene su obrtanjem donjih Christoffelovih riječi. Ako je donja Christoffelova riječ produkt dviju Christoffelovih riječi, onda su one također donje Christoffelove riječi. □

Na Slici 3.6 prikazana je standardna faktorizacija donje Christoffelove riječi nagiba $\frac{5}{4}$. Točka M je jednaka $A + (1, 1)$. Stoga je standardna faktorizacija pripadne Christoffelove riječi $(ab)\,(abababb)$.

Sa $F(a, b)$ označavamo *slobodnu grupu* s dva generatora a, b. Svaki njezin element može se prikazati kao *reducirana riječ*, tj produkt generatora i njihovih inverza, ali bez faktora xx^{-1} i $x^{-1}x$, pri čemu je $x \in \{a, b\}$. Slobodni monoid $\{a, b\}^*$ je podmonoid od $F(a, b)$ jer je u $\{a, b\}^*$ svaka riječ nužno reducirana.

Definicija 3.11. *Komutativna slika riječi w na abecedi* A *je A-torka* $(|w|_a)_{a \in A}$ *tj. slika od w s obzirom na kanonski homomorfizam monoida sa slobodnog monoida*

A^* *na slobodni komutativni monoid* $\mathbb{N}_0{}^A$.

Dakle, riječi $u \in \{a, b\}^*$ je komutativna slika (i, j) ako je i broj slova a te j broj slova b u toj riječi

Korolar 3.12. *Neka su u i v donje Christoffelove riječi s komutativnim slikama* (i, j) *i* (k, l) *tim redom. Tada su sljedeći uvjeti ekvivalentni:*

(i) uv je donja Christoffelova riječ;

(ii) $det[\begin{smallmatrix} i & j \\ k & l \end{smallmatrix}] = 1$*;*

(iii) Paralelogram kojemu su stranice vektori (i, j) *i* (k, l) *je primitivan i nagib od* (i, j) *je manji nego nagib od* (k, l)*.*

Ako ovi uvjeti vrijede, w = uv je standardna faktorizacija od w.

Dokaz. (i) povlači (ii):

Uz oznake kao u Teoremu 3.7 i zadnjem dijelu dokaza Teorema 3.10 vrijedi $(i, j) = \overrightarrow{AM}$, $(k, l) = \overrightarrow{MB}$. Također, $\overrightarrow{AB} = (p, q)$ te zbog toga što je AMB primitivan, vrijedi

$$1 = \begin{vmatrix} i & j \\ p & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j \\ (i+k) & (j+l) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j \\ k & l \end{vmatrix}.$$

(ii) povlači (iii):

Tvrdnja slijedi iz diskusije prije Teorema 3.7.

(iii) povlači (i) :

Neka su $\overrightarrow{AM} = (i, j)$, $\overrightarrow{MB} = (k, l)$, $\overrightarrow{AN} = (k, l)$ te neka je točka A ishodište. Paralelogram iz uvjeta (iii) je paralelogram $AMBN$. Budući da je nagib od (i, j) manji od nagiba (k, l), točka M se nalazi ispod dužine $\overline{AB}$. Na Slici 3.6 u je diskretizacija odozdo dužine $\overline{AM}$, a v je diskretizacija odozdo dužine $\overrightarrow{MB}$. Budući da je paralelogram $AMBN$ primitivan, diskretizacija dužine $\overline{AB}$ je uv, što mora biti donja Christoffelova riječ, a to slijedi iz Teorema 3.10. □

Teorem 3.13. *Neka je* $w = uv$ *donja Christoffelova riječ sa svojom standardnom faktorizacijom.*

(i) Tada su $u(uv)$ *i* $(uv)v$ *donje Christoffelove riječi s naznačenom standardnom faktorizacijom*

(ii) *Ako je w duljine barem 3, onda je ili u pravi prefiks od v te je $v = uv'$ standardna faktorizacija od v ili v pravi sufiks od u te je $u = u'v$ standardna faktorizacija od u.*

Dokaz. Označimo s (i, j) komutativnu sliku riječi u i s (k, l) komutativnu sliku riječi v. Prema (ii) u prethodnom korolaru vrijedi $il - jk = 1$.

(i) Komutativna slika riječi uv je $(i+k, j+l)$. Budući da je uv donja Christoffelova riječ, slijedi da su i riječi u i v također donje Christoffelove riječi. Imamo

$$\begin{vmatrix} i+k & j+l \\ k & l \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j \\ k & l \end{vmatrix} = 1,$$

pa prema (i) u Korolaru 3 slijedi da je $(uv)v$ donja Christoffelova riječ te da ona ima naznačenu standardnu faktorizaciju.

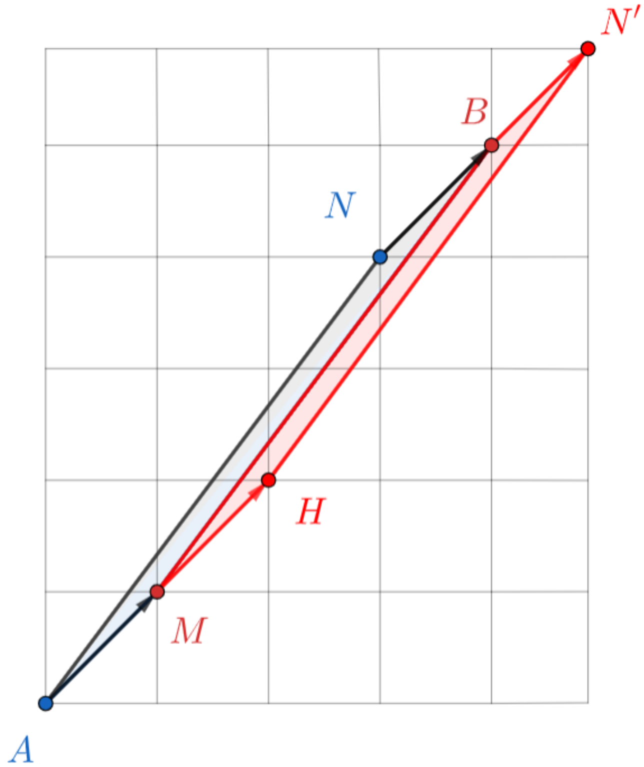
Slično vrijedi za riječ $u(uv)$. Naime,

$$\begin{vmatrix} i & j \\ (i+k) & (j+l) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j \\ k & l \end{vmatrix} = 1,$$

te prema (i) u Korolaru 3 vrijedi da je $u(uv)$ donja Christoffelova riječ s naznačenom standardnom faktorizacijom.

(ii) Neka je duljina riječi w barem 3, tj. da vrijedi $i + j + k + l \geq 3$. Ako bi vrijedilo $j + k \leq 0$, tada je $j = k = 0$ i $1 = il - jk = il$ iz čega slijedi da je $i = l = 1$, tj. dobivamo $i + j + k + l = 2$, što dovodi do kontradikcije. Dakle, vrijedi da je $j + k > 0$. Prema Teoremu 3.10 dovoljno je dokazati $v = uv'$ ili $u = u'v$, pri čemu je v', odnosno u', donja Christoffelova riječ.

(ii.a) Pretpostavimo da je $i \leq k$. Promatramo cjelobrojne točke $A, M = A+(i, j)$, $N = A+(k, l)$, $B = A+(i+k, j+l) = M+(k, l) = N+(i, j)$, kao na Slici 3.6. Znamo da vrijedi $il - jk = 1$ pa je $\frac{l}{k} - \frac{j}{i} > 0$. Budući da je nagib $\frac{l}{k}$ od $\overrightarrow{MB}$ veći nego $\frac{j}{i}$ od $\overrightarrow{AM}$, točka M nalazi se ispod dijagonale AB. Translatirajmo paralelogram $AMBN'$ za vektor $\overrightarrow{AM}$. Dobiveni paralelogram označimo s $MHN'B$. Zbog uvjeta $i \leq k$ vrijedi da prva koordinata točke $H = A + (2i, 2j)$ nije veća nego prva koordinata točke B (vidi



Slika 3.7: Translatirani paralelogram $AMBM'$

Sliku 3.7). Paralelogrami $AMBN'$ i $MHN'B$ su primitivni. Zbog toga su A, M, H, N', B, N jedine cjelobrojne točke u njihovoj uniji. Štoviše, u nutrini trokuta AHB nema cjelobrojne točke. Zbog toga vrijedi da je diskretizacija odozdo dužine $\overline{AB}$ jednaka diskretizaciji dužine $\overline{AM}$ za kojom slijedi diskretizacija dužine $\overline{MH}$ i diskretizacija dužine $\overline{HB}$. Prve dvije diskretizacije su jednake budući da je $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MH}$. To znači da je u prefiks od v. Također vrijedi da je $v = uv'$, pri čemu je v' diskretizacija dužine $\overline{HB}$ iz čega slijedi da je v' donja Christoffelova riječ.

(ii.b) Pretpostavimo da je $i > k$. Znamo da vrijedi $il - jk = 1$. Ako bi bilo $l > j$, tada bi vrijedilo $il \geq (k + 1)(j + 1) = jk + j + k + 1 > jk + 1$ zbog $j + k > 0$ kako je pokazano u (*ii*). Iz toga bi slijedilo $il - jk > 1$, što je nemoguće. Zbog toga mora vrijediti $l \leq j$.

Obrtanje zamjenjuje donje i gornje Christoffelove riječi. Također, involutorni automorfizam E slobodnog monoida $\{a,b\}^*$ koji zamjenjuje a i b, zamjenjuje donje i gornje Christoffelove riječi. Iz pretpostavke teorema imamo $w = uv$. Prema jedinstvenosti u Teoremu 3.10 riječ $E(\widetilde{w})$ ima standardnu faktorizaciju $E(\widetilde{v})\,E(\widetilde{u})$. Komutativna slika od $E(\widetilde{v})$ jednaka je (l,k), a komutativna slika od $E(\widetilde{u})$ jednaka je (j,i). Zbog $l \leq j$ argument iz (ii.a) pokazuje da je $E(\widetilde{u}) = E(\widetilde{v})\,m$ te stoga vrijedi $u = u'v$ pri čemu je $u' = E(\widetilde{m})$ donja Christoffelova riječ. □

Definicija 3.14. *Faktorizacija riječi u produkt dvaju palindroma naziva se palindromska faktorizacija.*

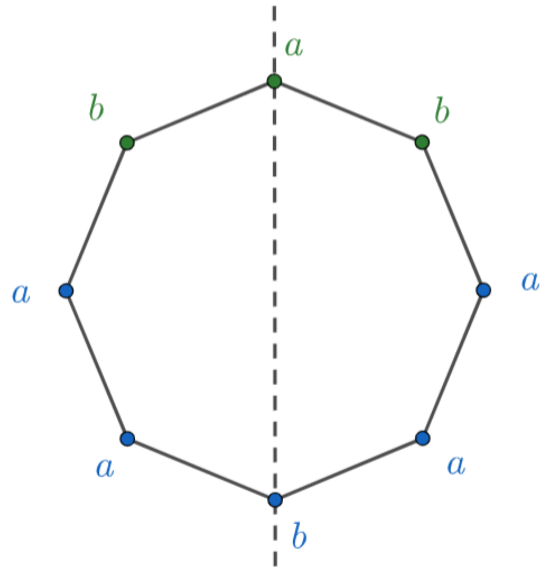
Primjer 3.15. *Neka je dana riječ $w = (aab)(aabaabab) = uv$ s pripradnom standardnom faktorizacijom. Njezina palindromska faktorizacija jednaka je $W = (aabaabaa)(bab)$ dobivena izmjenom dva njezina faktora u i v i zamjenom prvog slova riječi u sa zadnjim slovom riječi v. Tako je $u' = bab$, $v' = aabaabaa$.*

Teorem 3.16. *Svaka prava donja Christoffelova riječ $w = uv$ sa standardnom faktorizacijom ima jedinstvenu faktorizaciju $w = v'u'$ pri čemu su u' i v' palindromi. Vrijedi $|u| = |u'|$, $|v| = |v'|$. u' počinje i završava s b, a v' počinje i završava s a. Štoviše, ako je u prava Christoffelova riječ, tada je $u = amb$ i $u' = bmb$. Slično vrijedi za v, ako je prava, tada je $v = anb$ i $v' = ana$.*

Lema 3.17. *Ako je riječ w produkt dva palindroma v' i u', a sama riječ w nije potencija nijedne druge riječi, tada je palindromska faktorizacija $w = v'u'$ jedinstvena.*

Dokaz. Pridružimo slova riječi w redom vrhovima pravilnog mnogokuta s $|w|$ vrhova. Pretpostavimo da taj mnogokut ima dvije različite osi simetrije. Tada je kompozicija te dvije simetrije netrivijalna rotacija koja preslikava mnogokut u sebe samoga. Stoga je riječ w potencija kraće riječi. No, to je u kontradikciji s pretpostavkom leme. Zbog toga slijedi da postoji najviše jedna os simetrije. Postojanje palindromske faktorizacije implicira postojanje takve simetrije. Njezina os je pravac na kojem leži dužina nastala spajanjem središta palindroma iz faktorizacije kako je ilustrirano na Slici 3.8. Iz toga slijedi da postoji samo jedna takva faktorizacija. □

Dokaz za Teorem 3.16. Pretpostavimo sa su u, v prave Christoffelove riječi. Prema Teoremu 2.2 $w = apb$, $u = amb$, $v = anb$ pri čemu su p, m, n palindromi. Tada je $w = ambanb$, $p = mban$, $p = \widetilde{p} = nabm$ i zato $w = anabmb = v'u'$ pri čemu je $v' = ana$, $u' = bmb$, iz čega se jasno vidi da su u' i v' palindromi. Ako u nije prava Christoffelova riječ, tada je $u = a$, stoga je $w = a^k b$, $k \geq 1$, $v = a^{k-1}b$, $v' = k^n$, $u' = b$. Ako v nije prava Christoffelova riječ, onda je $v = b$, stoga $w = ab^k$, $k \geq 1$, $u = ab^{k-1}$, $u' = b^k$, $v' = a$.



Slika 3.8: Palindromska faktorizacija $(aabaa)(bab)$ i pripadna osna simetrija

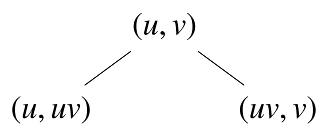
Jedinstvenost slijedi iz činjenice da w nije potencija nijedne druge riječi, budući da su brojevi slova a i slova b u Christoffelovoj riječi relativno prosti. Sada možemo primijeniti Lemu 3.17. $\square$

Poglavlje 4

Stabla

4.1 Stablo Christoffelovih parova

Neka je (u, v) Christoffelov par. Tada iz Korolara 3.13 slijedi da su također i (u, uv), (uv, v) Christoffelovi parovi. Na Slici 4.1 prikazano je pravilo konstrukcije stabla Christoffelovih parova.



Slika 4.1: Pravilo konstrukcije stabla Christoffelovih parova

Par (a, b) je Christoffelov jer su a, b, ab donje Christoffelove riječi. Kada bismo konstruirali beskonačno binarno stablo s korijenom (a, b) prateći pravilo konstruiranja stabla Christoffelovih parova, tada bi svi čvorovi tog stabla bili Christoffelovi parovi.

Iz drugog dijela Teorema 3.13 slijedi da se svaki Christoffelov par pojavljuje u ovom stablu te da su svi Christoffelovi parovi na stablu različiti. U Christoffelovom stablu čvorovi koji nisu korijen su ili lijeva ili desna djeca. No, pojedini čvor može biti samo desno ili samo lijevo dijete zato što se uvjeti "u je pravi prefiks od v" i "v je pravi sufiks od u" međusobno isključuju te dalje rekurzivno zaključimo.

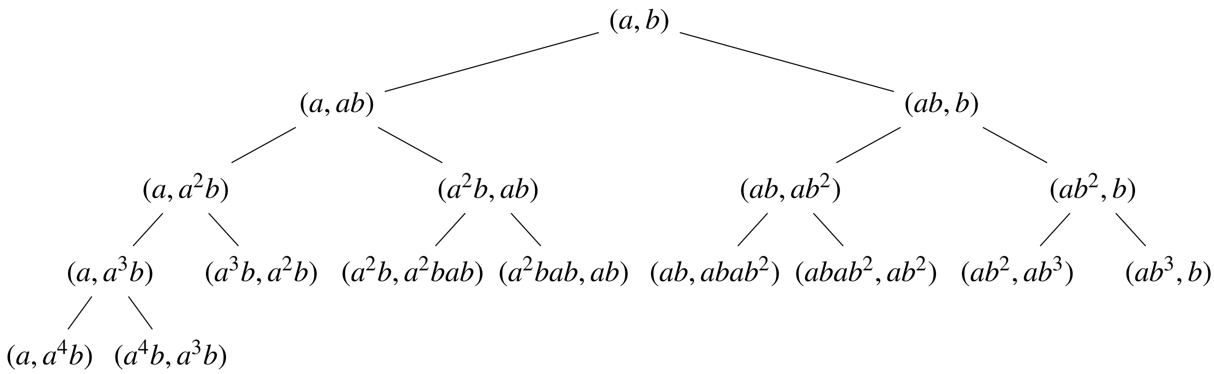
Prisjetimo se Definicije 3.9 iz koje zaključujemo da ako se (u, v) pojavljuje u stablu Christoffelovih parova, uv je također donja Christoffelova riječ. Svaka prava donja Christoffelova riječ pojavljuje se točno jednom kao je produkt elementa nekog uređenog para u stablu Christoffelovih parova zbog jedinstvenosti standardne faktorizacije.

Sljedeći korolar slijedi iz ranije opisanog pravila konstrukcije svih Christoffelovih parova.

Korolar 4.1. *Skup parova* $(|u|, |v|)$ *za sve Christoffelove parove* (u, v) *jednak je skupu svih parova relativno prostih prirodnih brojeva.*

Primjerice, znamo da je $(5, 8) = (|u|, |v|)$ za par koji je u stablu Christoffelovih parova lijevo dijete od (u, w) sa $(|u|, |w|) = (5, 8 - 5) = (5, 3)$. Nastavljajući tako dalje prema korijenu, dobivamo parove $(2, 3)$, $(2, 1)$ i konačno $(1, 1)$ koji odgovara (a, b), pa vraćajući se nazad dobivamo Christoffelove parove (ab, b), $\left(ab, ab^2\right)$, $\left(abab^2, ab^2\right)$ i na kraju $(u, v) = \left(abab^2, abab^2ab^2\right)$

Neka je riječ $w = uv$ prava donja Christoffelova riječ s naznačenom standardnom faktorizacijom. Tada barem jedna od riječi u ili v nije prava ako i samo ako je riječ w oblika $w = a^n b$ ili $w = ab^n$, pri čemu je n prirodan broj. U slučaju da je $w = a^n b$, tada je njezina standardna faktorizacija $a\left(a^{n-1}b\right)$. U slučaju da je $w = ab^n$, tada je njezina standardna faktorizacija $\left(ab^{n-1}\right)b$.



Slika 4.2: Početni dio stabla Christoffelovih parova

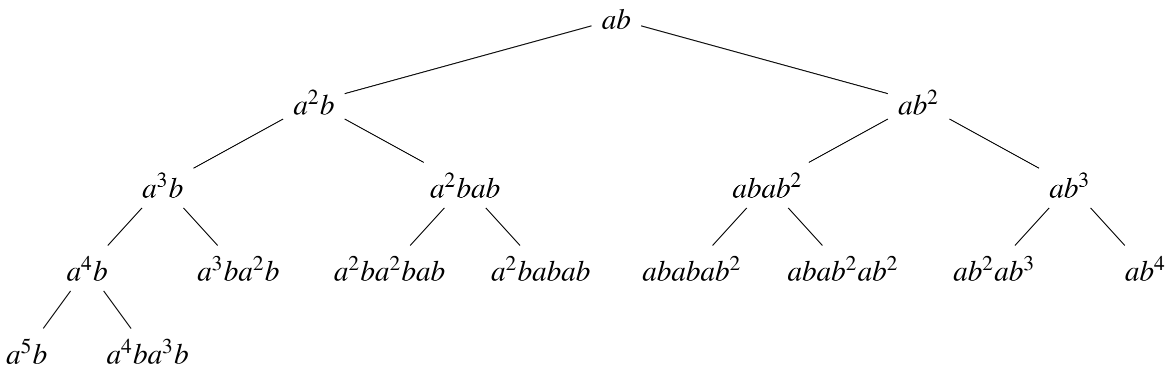
4.2 Stablo Christoffelovih riječi

Zamijenimo li u stablu Christoffelovih parova svaki čvor (u, v) sa $w = uv$, dobivamo stablo Christoffelovih riječi. Ovo su dva stabla ekvivalentna jer uvijek možemo dobiti (u, v) iz w uzevši standardnu faktorizaciju od w.

Teorem 4.2. *Konstrukcija stabla Christoffelovih parova se dobiva izravno na sljedeći način: neka je w bilo koji čvor različit od korijena stabla. Promotrimo put od w prema korijenu.*

(i) Pretpostavimo da w nije na krajnje lijevoj i krajnje desnoj grani stabla. Tada taj put ima sjeverozapadne i sjerevoistočne korake. Neka je u čvor nakon prvog sjeverozapadnog koraka, a v čvor nakon prvog sjeveroistočnog koraka. Tada je $w = uv$.

(ii) Ako je w na krajnjoj lijevoj grani stabla, tada ne postoje sjeverozapadni koraci. Stavimo $u = a$ i v kao u (i). Ako je w na krajnjoj desnoj grani stabla, tada ne postoje sjeveroistočni koraci. Stavimo $v = b$ i u kao u (i).



Slika 4.3: Početak stabla Christoffelovih riječi

Na primjer, na Slici 4.3 neka je $w = a^2babab$. Tada je $u = a^2bab$ i $v = ab$.

Dokaz. Valjanost konstrukcije induktivno slijedi iz pravila konstrukcije stabla Christoffelovih parova. □

Poglavlje 5

Christoffelove riječi u Pythonu

Možemo pronaći odgovarajuće Christoffelove riječi za zadani par točaka (ili za zadani nagib) pomoću funkcija napisanih u programskom jeziku Python. Također, za zadanu riječ možemo provjeriti je li ona Christoffelova, i ako je, odrediti je li gornja ili donja Chirstoffelova riječ i kojem nagibu odgovara.
Definirajmo najprije funkcije "coprime" i "gcd". Ulazni parametri su dva nenegativna cijela broja x i y. Funkcija "coprime" poziva funkciju "gcd" koja je zapravo Euklidov algoritam. Funkcija "gcd" vraća vrijednost najvećeg zajedničkog djelitelja. Ako su x i y relativno prosti brojevi (povratna vrijednost funkcije "gcd" jednaka je 1), funkcija "coprime" vraća istinu, tj. "True". Inače vraća vrijednost "False".

```
def gcd(x, y):
    while y != 0:
        temp=y
        y=x%y
        x=temp
    return x

def coprime(x, y):
    return gcd(x, y) == 1
```

Također, koristit ćemo funkciju "line_through". Ulazni parametri ove funkcije su koordinate točaka A i B za koje tražimo odgovarajuću Christoffelovu riječ. Funkcija vraća vrijednosti koeficijenata k i h pravca $y = kx + h$ koji prolazi točkama A i B.

```
def line_through(x_1,y_1,x_2,y_2):
    if x_1==x_2:
        return False
    else:
```

```
        k=(y_2-y_1)/(x_2-x_1)
        h=y_1-k*x_1
        return k,h
```

Definirajmo funkciju "lower_Christoffel_word".

```
def lower_Christoffel_word(A_x,A_y,B_x,B_y):
    p=B_x-A_x
    q=B_y-A_y
    if (p<0) or (q<0):
        return 'p i q nisu nenegativni!'
    if coprime(p,q)==False:
        return 'p i q nisu relativno prosti!'
    else:
        w=0
        right=A_x
        up=A_y
        lower_Christoffel=''
        if (A_x==B_x) and (B_y-A_y==1):
            return('b')
        elif line_through(A_x,A_y,B_x,B_y)==False:
            return("Ne postoji donja Christoffelova 
               rijec za dane tocke!")
        else:
            k=line_through(A_x,A_y,B_x,B_y)[0]
            h=line_through(A_x,A_y,B_x,B_y)[1]
            while w==0:
                if ((right==B_x) and (up==B_y)):
                    w=1
                if (w==0):
                    if ((up+1)<=k*right+h):
                        up=up+1
                        lower_Christoffel=
                           lower_Christoffel+'b'
                    else:
                        right=right+1
                        lower_Christoffel=
                           lower_Christoffel+'a'
            return lower_Christoffel
```

Funkcija kao ulazne parametre prima koordinate točaka za koje tražimo donju Christoffelovu riječ. Ako pripadne vrijednosti p i q nisu relativno proste, funkcija vraća obavijest 'p i q nisu relativno prosti'. Provjera se vrši korištenjem ranije spomenute funkcije "coprime". Također, u slučaju da p i q nisu nenegativni, funkcija vraća obavijest 'p i q nisu nenegativni!'. U slučaju da je $p = 0$ i $q = 1$, funkcija vraća riječ 'b'. Ako su p i q relativno prosti nenegativni brojevi, tražimo pripadnu donju Christoffelovu riječ. Pomoću funkcije "line_through" izračunamo koeficijente k i l. Varijabla "right" označava horizontalne korake, tj. trenutnu poziciju u smjeru x-osi, a varijabla "up" označava vertikalne pomake, tj. trenutnu poziciju u smjeru y-osi. Početne vrijedosti varijabli "right" i "up" jednake su x i y koordinatama točke A. Donju Christoffelovu riječ tražimo na sljedeći način - ukoliko se "ne možemo" pomaknuti za jedan korak prema gore, radimo korak desno. Točka u koju bismo se htjeli pomaknuti mora pripadati pravcu $y = kx + l$ s dobivenim koeficijentima k i l ili se nalaziti ispod tog pravca. Ukoliko radimo korak desno, Christoffelovoj riječi dodajemo slovo 'a' te varijablu "right" povećavamo za 1. Ako radimo korak prema gore, varijablu "up" povećavamo za 1, Christoffelovoj riječi dodajemo slovo 'b' i na taj način krojimo pripadnu donju Christoffelovu riječ. Stajemo kada su vrijednosti varijabli "right" i "up" jednake "x" i "y" koordinatama točke B. Funkcija vraća pripadnu Christoffelovu riječ.

Na sličan način definirajmo funkciju "upper_Christoffel_word" pomoću koje tražimo pripadnu gornju Christoffelovu riječ.

```
def upper_Christoffel_word(A_x,A_y,B_x,B_y):
    p=B_x-A_x
    q=B_y-A_y
    if (p<0) or (q<0):
        return 'p i q nisu nenegativni!'
    if coprime(p,q)==False:
        return 'p i q nisu relativno prosti!'
    else:
        w=0
        right=A_x
        up=A_y
        upper_Christoffel=''
        if (A_x==B_x) and (B_y-A_y==1):
            return('b')
        elif line_through(A_x,A_y,B_x,B_y)==False:
            return("Ne postoji gornja Christoffelova 
                rijec za dane tocke!")
        else:
```

```
        k=line_through(A_x,A_y,B_x,B_y)[0]
        h=line_through(A_x,A_y,B_x,B_y)[1]
        while w==0:
            if ((right==B_x) and (up==B_y)):
                w=1
            if (w==0):
                if (up>=k*(right+1)+h):
                    right=right+1
                    upper_Christoffel=
                      upper_Christoffel+'a'
                else:
                    up=up+1
                    upper_Christoffel=
                      upper_Christoffel+'b'
        return upper_Christoffel
```

Slično kao i kod funkcije "lower_Christoffel_word", najprije provjerimo vrijednosti p i q.
U slučaju da je $p = 0$ i $q = 1$, funkcija vraća riječ 'b'. U ovom slučaju, kada tražimo gornju Christoffelovu riječ, pomičemo se na sljedeći način: ukoliko se ne možemo pomaknuti desno, radimo korak prema gore. Točka u koju se želimo pomaknuti mora pripadati pravcu $y = kx + l$ ili biti iznad njega. Za svaki pomak prema gore, Christoffelovoj riječi dodajemo 'b' te vrijednost varijable "up" povećavamo za 1. Za svaki pomak prema desno, Christoffelovoj riječi dodajemo 'a' te vrijednost varijable "right" povećavamo za 1. Stajemo kada su vrijednosti varijabli "right" i "up" jednake "x" i "y" koordinatama točke B. Funkcija vraća pripadnu Christoffelovu riječ.
Definirajmo još funkciju "is_Christoffel" koja provjerava je li zadana riječ Christoffelova, i, ako jest, vraća pripadni nagib.

```
def is_Christoffel(word):
    up=0
    right=0
    i=0
    for letter in word:
        if letter=='a':
            right=right+1
        elif letter=='b':
            up=up+1
        else:
```

```
            return('Upisana rijec nije Christoffelova!')
    if coprime(right,up)==False:
        return('Upisana rijec nije Christoffelova!')
    else:
        if len(word)==1:
            if word=='a':
                return('Upisana rijec je donja i gornja Christoffelova rijec nagiba 0/1!')
            if word=='b':
                return('Upisana rijec je donja i gornja Christoffelova rijec nagiba 1/0!')
            else:
                return('Upisana rijec nije Christoffelova!')
        elif word[0]=='a':
            if word==lower_Christoffel_word(0,0,right,up):
                return('Upisana rijec je donja Christoffelova rijec nagiba {}/{}!'.format(up,right))
            else:
                return('Upisana rijec nije Christoffelova!')
        else :
            if word==upper_Christoffel_word(0,0,right,up):
                return('Upisana rijec je gornja Christoffelova rijec nagiba {}/{}!'.format(up,right))
            else:
                return('Upisana rijec nije Christoffelova!')
```

Najprije zbrojimo koliko u zadanoj riječi ima slova 'a' (horizontalnih pomaka), a koliko riječi 'b' (vertikalnih pomaka). Te vrijednosti odgovaraju brojevima p i q. Ako oni nisu relativno prosti, upisana riječ nije Christoffelova.
Ako su relativno prosti, provjeru provodimo na sljedeći način. Donja Christoffelova riječ počinje slovom 'a'. Pomoću već definirane funkcije "lower_Christoffel_word" pronađemo pripadnu donju Christoffelovu riječ za dobiveni nagib. Ukoliko je ona

jednaka upisanoj riječi, upisana riječ je donja Christoffelova riječ nagiba $\frac{q}{p}$. Ako se riječi ne poklapaju, upisana riječ nije Christoffelova riječ.
Gornja Christoffelova riječ počinje slovom 'b'. Pomoću već definirane funkcije "upper_Christoffel_word" pronađemo pripadnu gornju Christoffelovu riječ za dobiveni nagib. Ukoliko je ona jednaka upisanoj riječi, upisana riječ je gornja Christoffelova riječ nagiba $\frac{q}{p}$. Ako se riječi ne poklapaju, upisana riječ nije Christoffelova riječ.

Bibliografija

[1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] J. Berstel, J. Karhumaki, *Combinatorics on Words - A Tutorial*, 2014., dostupno na http://www-igm.univ-mlv.fr/~berstel/Articles/2003TutorialCoWdec03.pdf (studenti 2021.)

[3] J. Berstel, A. Lauve, C. Reutenauer, F. Saliola, *Combinatorics on Words: Christoffel Words and Repetitions in Words*, American Mathematical Society, 2008.

[4] Vladimir Kadum, *Funkcije "najveće cijelo" i "razlomljeni dio"*, Stručni rad, Metodički obzori 4 (2009) 1-2, 2008.

[5] T. Pejković, *Lagrangeov i Markovljev spektar*, poslijediplomski kolegij 2018/2019. dostupno na https://web.math.pmf.unizg.hr/ pejkovic/files/lm.pdf (srpanj 2021.)

[6] C. Reutenauer, *From Christoffel words to Markoff numbers*, Oxford University Press, Oxford, 2019.

[7] "Hrvatska enciklopedija", mrežno izdanje. Leksikografski zavod Miroslav Krleža, 2021. dostupno na http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=32549 (studeni 2021.)

Izvori slika

- Slika 0.1, dostupna na http://www.harmonika.ba/cms/index.php/bs/harmonika/klavijatura.html
- Ostale slike nacrtane su u programu GeoGebra

Sažetak

Neka su p i q nenegativni relativno prosti brojevi i neka je dužina $\overline{AB}$ takva da točka A ima cjelobrojne koordinate te $B = A + (p, q)$. Christoffelova riječ nagiba $\frac{q}{p}$ je riječ u slobodnom monoidu $\{a, b\}^*$ koja kodira Christoffelov put istog nagiba, odnosno put u rešetki od točke A do točke B takav da poligon omeđen dužinom $\overline{AB}$ i tim putem u nutrini ne sadrži cjelobrojne točke. Reznu riječ dobivamo tako da promatramo sjecišta otvorene dužine AB s pravcima cjelobrojne rešetke. Christoffelove riječi moguće je rekurzivno konstruirati. Svaka prava Christoffelova riječ može se na jedinstven način prikazati kao produkt dviju Christoffelovih riječi.

U ovom radu proučavamo neka svojstva Christoffelovih riječi, njihovu vezu s reznim riječima te faktorizacijom tih riječi. Također definiramo odgovarajuća binarna stabla koja sadrže Christoffelove riječi ili njihove parove. Na kraju su izloženi osnovni algoritmi za konstrukciju i prepoznavanje Christoffelovih riječi.

Summary

Let p and q be non-negative, relatively prime integers and $\overline{AB}$ a segment with integral point A and $B = A + (p, q)$. The Christoffel word of slope $\frac{q}{p}$ is the word in the free monoid $\{a, b\}^*$ coding the Christoffel path of the same slope, that is, the lattice path from point A to point B such that the polygon delimited by segment $\overline{AB}$ and the path has no interior integer points. The cutting word is obtained by considering intersections of the open segment AB with the coordinate lines. Christoffel words can be constructed recursively. Each proper Christoffel word is uniquely the product of two Christoffel words.

We study some properties of Christoffel words, their connection with cutting words as well as the factorization of those words. We also define binary trees containing Christoffel words and pairs of such words. At the end we give basic algorithms for construction and identification of Christoffel words.

Životopis

Rođena sam 05.01.1996. u Zagrebu. Osnovnu školu Oroslavje pohađala sam do 2010. kada upisujem Gimnaziju Antuna Gustava Matoša u Zaboku, prirodoslovno-matematički smjer. Nakon završetka srednje škole, 2014. godine upisujem preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2016. prebacujem se na nastavnički smjer preddiplomskog studija na istom fakultetu. Preddiplomski studij završila sam 2019. godine. Iste godine upisujem diplomski studij matematika, smjer nastavnički. Tijekom studija bila sam član pjevačkog zbora PMF-a "Cantus Naturae".