Društvene igre u nastavi matematike

Tomičić, Lana

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lana Tomičić

DRUŠTVENE IGRE U NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Franka Miriam Brückler

Zagreb, studeni 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

„Reci mi, zaboravit ću. Pokaži mi, upamtit ću. Uključi me, razumjet ću.”

kineska poslovica

Sadržaj

Uvod

Učenici često izjavljuju da se zabavljaju i uživaju igrajući društvene igre, no ne vide matematiku u njima. Jesu li u pravu? Jesu li igre samo zabavan način popunjavanja vremena na kraju polugodišta i nastavne godine ili se mogu iskoristiti za poučavanje matematike?

Među važnijim i težim zadacima učitelja je motiviranje učenika. Ono se može postići aktivnostima koje zanimaju učenike, a time će se povećati i njihov interes za predmet, bolje će pratiti i imat će više volje za učenjem. Bez dovoljno interesa učenici se udaljavaju od procesa učenja, postaje im strano.

Korist igara u obrazovanju djece prepoznata je već u antičkoj Grčkoj. Po Platonu i Aristotelu igre su predstavljale glavni oblik edukacije djece u dobi od tri do sedam godina [43]. Društvene igre imaju potencijal stvoriti zabavno okruženje usmjereno na učenje matematike. Igranje društvenih igara na nastavi matematike kod djece potiče interes, motivira ih te pridonosi njihovom zadovoljstvu i razvoju pozitivnog stava prema matematici kao nastavnom predmetu [15].

Za uspješno savladavanje novih matematičkih pojmova i koncepata važna je uključenost učenika. Djeca najbolje uče matematiku aktivnim sudjelovanjem u nastavnom procesu [16]. Igranje društvenih igara od njih zahtjeva aktivnost, nije moguće pasivno sudjelovati u njima, posebice ako pokušavaju pobijediti.

Društvene igre po svojoj prirodi potiču učenike na razgovor o svojim i tuđim potezima[1]. Učenici stvaraju i komentiraju strategije, pokušavaju optimizirati svoje poteze, procjenjuju i analiziraju. To doprinosi njihovoj socijalizaciji i razvoju logičkog mišljenja.

Društvene igre mogu se koristiti da bi njima uveli nove pojmove ili koncepte. Učenici će lakše usvojiti novitet ako svjedoče njegovoj primjeni u igri. Također, upotreba društvenih igara sate uvježbavanja može učiniti ugodnijima i uspješnijima. Igranje smanjuje dosadu učenika, prekida jednoličnost, a uspjeh potiče učenike na daljnji trud.

Uloga učitelja može biti moderiranje, postavljanje ključnih pitanja i poticanje na diskusiju. Međutim, učitelj također treba paziti da ne pretjera sa sudjelovanjem u aktivnosti orijentiranoj na učenike. Ponekad je dovoljno samo promatrati igru učenika, njihov tijek

[1]Segment igre koji obuhvaća samo jednu odluku jednog igrača [13].

misli i zaključke. Time se stječe i uvid o njihovom razumijevanju učinjenog ili razlozima za pojedine odluke.

Iako postoje matematičke igre čija je primjena u nastavi očigledna i koje su napravljene sa svrhom uvježbavanja određenog sadržaja, u ovom se radu nećemo baviti njima, nego komercijalnim društvenim igrama, većinom onima koje imaju razrađenu temu, priču, radnju ili likove. Upravo takve igre privlače svojom kreativnom izradom te je cilj ovog rada pokazati da su koristan alat u poučavanju matematike i dobar izvor za istraživanje ili uvježbavanje konkretnih matematičkih koncepata.

U prvom dijelu rada opisan je razvoj društvenih igara tijekom ljudske povijesti, od prapovijesti do modernih društvenih igara. Istaknute su značajnije igre iz različitih dijelova svijeta za koje postoje arheološki ili pisani tragovi.

U drugom, ujedno i glavnom dijelu, pomno su odabrane društvene igre pogodne za nastavu matematike. Opisana su njihova osnovna pravila te su izdvojeni dijelovi igre u kojima se koriste matematički koncepti, bilo očigledno bilo neprimjetno.

Poglavlje 1

Povijest društvenih igara

Najraniji tragovi društvenih igara sežu u prapovijest. Arheolozi su na području današnjih Jordana, Sirije i Irana pronašli desetak kamenih i gipsanih ploča starih između 6000 i 10000 godina. U njima su redovi pravilnih udubljenja pa se vjeruje da su ti pronalasci prvi primjerci ploča za igranje [38]. Drugi arheolozi su u grobovima iz brončanog doba na području današnje Turske na jednom mjestu pronašli 49 figurica različitih oblika i boja — prve igraće komponente [10, 30, 18].

Najstarija poznata društvena igra nastala je u Egiptu. Hijeroglifi kojima je prikazana datiraju oko 3100. g. pr. Kr. Njen naziv, „Senet", prevodi se kao Prolazak te se povezuje s putovanjem u zagrobni život, a spomenuta je i u Knjizi smrti. Vjerovalo se da je igrač kojeg je pratila sreća u toj igri pod zaštitom nekog od egipatskih bogova [23, 10].

Slika 1.1: Primjerak igre „Senet" (© Benoît Prieur / Wikimedia Commons / CC BY-SA 4.0)

Iako nam točna pravila nisu poznata, znamo da je „Senet” igra utrke za dva igrača, a umjesto danas korištenih kocaka igrači su bacali štapiće obojene s jedne strane (slika 1.1). Broj štapića koji pokazuju obojenu stranu određuje za koliko mjesta se figurica mogla pomaknuti. Zanimljivo je da „Senet” sadrži i moderne elemente poput teme putovanja u zagrobni život i spremnika za igraće komponente. „Senet” se u Egiptu zadržao oko 3000 godina, no popularnost mu je pala dolaskom Rimljana i njihovih igara. Zadnji tragovi „Seneta” nestali su oko 100. g. n. e. [39].

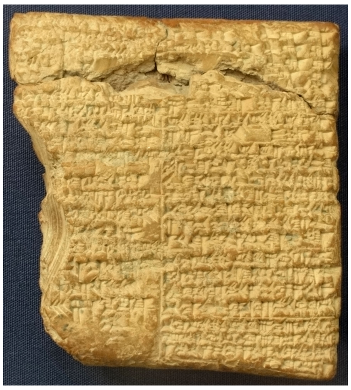
„Backgammon” („Tavla”) je najstarija igra koju nije pregazio tijek vremena. Na arheološkom nalazištu Shahr-e Sukhteh (Spaljeni grad) u Iranu pronađena je ploča za igranje stara barem 5000 godina, zajedno s 60 figura za igranje i dvije igraće kocke — najstarije ikad pronađene. Ploče nastale oko 1500. g. pr. Kr. pronađene su u Tutankhamonovoj grobnici, što je dokaz da se igra proširila izvan Mezopotamije. Rimskim osvajanjem Egipta pojavljuju se prve ploče igre „Ludus duodecim scriptorum” (slika 1.2), kasnije nazvane „Tabulae” [33, 27].

Slika 1.2: „Ludus duodecim scriptorum” (© wneuheisel / flickr / CC BY 2.0)

U vrijeme Bizantskog carstva igra se zvala „$T\acute{\alpha}\beta\lambda\eta$”, a na turskom njen naziv je „Tavla” te se to ime često koristi i danas u Hrvatskoj. Naziv „Backgammon” pojavljuje se tek u 17. stoljeću u Engleskoj (kao *baggammon*, spoj riječi unazad i igra) [27]. „Backgammon” se nije puno mijenjao od svojih početaka. Osnovna pravila su ostala ista, a promjene se odnose na početni položaj figura, broj igraćih kocki te 1920-ih uvođenje kocke za dupliranje koja smanjuje utjecaj sreće na igru te ju ponovno popularizira. Tijekom povijesti „Backgammon” je postao iznimno popularna igra diljem svijeta, a igrali su ju i mnoga poznata imena: car Neron, Thomas Jefferson, Charles Darwin i drugi [23, 27].

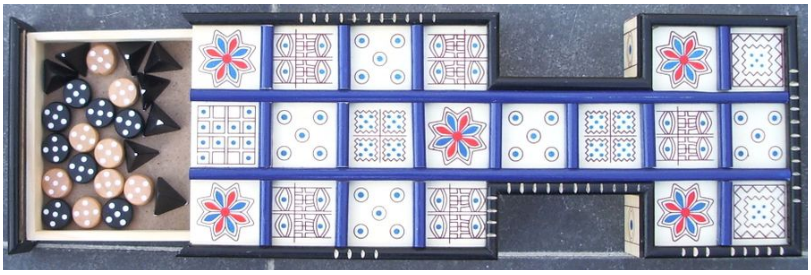
Iako se ne radi o igri s razrađenom osnovnom temom, zbog njene raširenosti, u prvom odjeljku sljedećeg poglavlja opisat ćemo njezine poveznice sa školskom matematikom.

Još jedna stara igra za koju su poznata pravila je „Kraljevska igra iz Ura” ili „Igra dvadeset kvadrata”. Primjerci ove igre stari barem 4500 godina pronađeni su u kraljevskim grobnicama sumerskog grada Ura, na području današnjeg Iraka, a potpuna pravila pronađena su na glinenoj pločici (slika 1.3) iz 177. g. pr. Kr. To su ujedno najstarija pronađena pravila za neku igru [33, 23, 41].



Slika 1.3: Glinena pločica s pravilima (© Fæ / Wikimedia Commons / CC BY-SA 3.0)

Ova igra je prilično slična svima poznatoj igri „Čovječe, ne ljuti se!”. Svaki igrač ima sedam figurica koje treba *izvesti* na ploču, prijeći zadani put te ih *pospremiti* dobivanjem točnog broja koraka. Također je moguće *pojesti* protivničke figurice, čime ih se izbaci s ploče te ih je potrebno ponovno vratiti u igru. Figurice se pomiču bacanjem četiri igraće kocke oblika tetraedra kojima su dva vrha obojena bijelo — broj dobivenih bijelih vrhova odgovara broju koraka za koliko je potrebno pomaknuti figuricu (slika 1.4). Zanimljivo je da su u Tutankhamonovoj grobnici pronađene kutije za igru koje su s jedne strane imale ploču za „Senet”, a s druge ploču za „Igru dvadeset kvadrata” [14]. Takve dvostrane kutije koristimo i danas, primjerice za šah i „Backgammon”. I ova igra je odoljela zubu vremena: iako joj je s vremenom popularnost pala, židovski trgovci su je donijeli u Indiju te se igra održala do danas pod nazivom „Aasha” [36].



Slika 1.4: „Kraljevska igra iz Ura” s igraćim kockama u obliku tetraedra (preuzeto s boardgamegeek, CC0 1.0)

Slika 1.5: Igra „Go" (© zizou man / flickr / CC BY 2.0)

Društvene igre s Dalekog istoka od svojih početaka drugačije su od ostalih. Jedna od najstarijih je i danas popularna igra „Go", prikazana na slici 1.5. Nastala je prije 3–4 tisuće godina u Kini kao „Wei Qi" ili kraće „Yi" [13, 45]. Ne zna se točno kako i kada je nastala, no legenda kaže da je car Yao Di htio prosvijetliti svog razigranog sina Dan Zhu te je osmislio ovu igru. Iako je Dan Zhu ubrzo naučio igrati te čak pobijedio oca, „Wei Qi" je bilo jedino u čemu je bio dobar te ga stoga otac nije imenovao nasljednikom [45]. Najraniji zapisi o ovoj igri pojavljuju se u povijesnim zapisima u 4. stoljeću pr. Kr., a o njoj je pisao i Konfucije [41, 6].

Usprkos nastanku u Kini, igra je doživjela svoj uzlet u Japanu gdje se pojavila najkasnije u 8. stoljeću n. e. pod nazivom „Go" te postala dio japanske kulture. Početkom 17. stoljeća osnovane su četiri velike škole (Honinbo, Hayashi, Inoue i Yasue) koje su se 250 godina međusobno natjecale. Kao rezultat toga „Go" je postao iznimno popularna, a uveden je i sistem rangiranja igrača u devet *dana*, od kojih je najviši, *Meijin*, mogao pripadati samo jednoj osobi [17].

Iako je „Go" bio raširen diljem istočne Azije, svoju popularnost u Europi stekao je tek krajem 19. stoljeća [13], a prvo europsko prvenstvo organizirano je tek 1957. Danas je „Go" raširen diljem svijeta, a mnogi igrači ga čak igraju i profesionalno [17].

Povijest šaha počinje u Indiji u 6. stoljeću. U to je vrijeme širom Indije bila popularna igra „Chaturanga”, čiji naziv možemo prevesti kao „četiri divizije” ili „četiri vojske”: pješadija (pijuni), konjica (skakači ili konji), vojni slonovi (lovci) i bojna kola (topovi ili kule) [33, 3]. „Chaturanga” je prva poznata igra koja sadrži dvije ključne karakteristike današnjeg šaha: različite figure imaju različite načine kretanja te pobjeda ovisi o sudbini jedne figure (kralja) [5].

Do 7. stoljeća igra se proširila u Perzijsko carstvo (današnji Iran), gdje su igrači uzvikivali „Shāh!” prilikom napadanja kralja te „Shāh Māt!” (doslovno: kralj je nemoćan) prilikom pobjede, od kuda dolazi i današnji naziv šah [41, 5].

Arapskim osvajanjem Perzije šah je našao svoj put do Europe, gdje se kroz stoljeća udomaćio na kraljevskim dvorovima. Upravo tamo je u 15. stoljeću doživjela svoju najveću promjenu: Pojavom većeg broja moćnih kraljica diljem Europe, figura savjetnika koja se mogla kretati samo jedno polje dijagonalno zamijenjena je figurom kraljice (dame) koja se može neograničeno kretati u svim smjerovima. Ta promjena je značajno ubrzala tijek igre, a nova vrsta šaha je ponekad nazvana „šah lude kraljice” [41, 5, 35].

Prvi turnir u šahu održan je 1575. u Madridu, 1861. uvedeno je vremensko ograničenje za svakog igrača, a prvo svjetsko prvenstvo održano je 1886. u SAD-u [35]. Danas mnoge svjetske države i Međunarodni olimpijski odbor smatraju šah sportom, iako nema atletske (fizičke) elemente sporta. Čak je predložen kao sport na Olimpijskim igrama 2024., no prijedlog nije prihvaćen. Usprkos tome, mnogi šahovski prvaci postanu poznate ličnosti i široj javnosti, poput Garija Kasparova i Magnusa Carlsena.

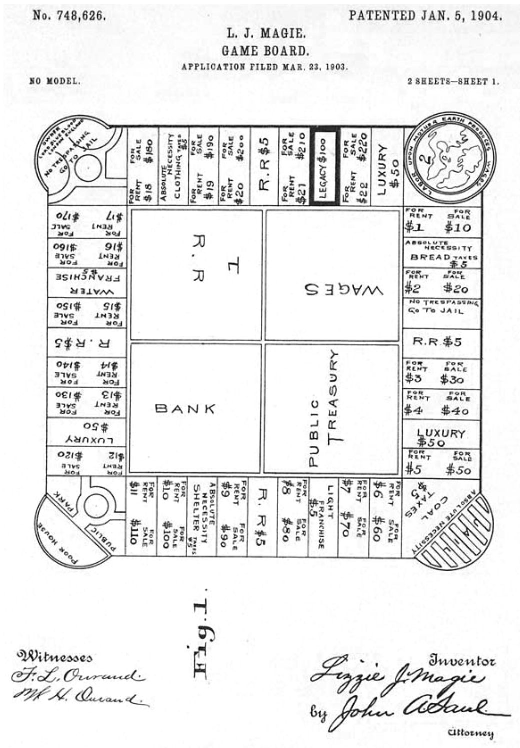
Slika 1.6: Ploča za „Mancalu” (© Ministerio de Ciencia / flickr / CC BY-ND 2.0)

„Mancala” je zajednički naziv igara na ploči za dva igrača koje potječu iz Afrike. Arheološki nalasci glinenih posuda i kamenih ploča sugeriraju da se „Mancala” igrala između 6. i 7. stoljeća, no zbog svoje jednostavnosti vjeruje se da je nastala mnogo ranije. Štoviše, izgledom se može povezati s ranije spomenutom igraćom pločom iz Jordana starom 8 000 godina [10, 18].

Sve „Mancale” povezuje jednaka mehanika. Na početku svaka rupa sadrži određeni broj zrna. Na svom potezu igrač uzima sva zrna iz neke od rupa na njegovoj strani te ih *sije* jedno po jedno u uzastopne rupe, čineći slične pokrete kao i kod stvarnog sijanja sjemena (slika 1.6). Cilj igre je sakupiti više zrna od protivnika, najčešće završavajući svoj potez u praznoj rupi nasuprot protivničke koja sadrži zrna, čime ih osvaja.

Priča o društvenim igrama 20. stoljeća započinje posve neočekivano. Godine 1903. Lizzie Maggie patentira igru „The Landlord’s Game” (slika 1.7) kako bi neupućenima na konkretnom primjeru pokazala da najamnine obogaćuju vlasnike, a osiromašuju stanare. To je prva igra neprekidnog puta, bez jasno određenog početnog i krajnjeg polja. Druga inovacija je mehanika vlasništva polja, kojom igrač koji prvi kupi polje zarađuje od igrača koji naknadno stanu na to polje [10, 7].

Igra nije doživjela veliku popularnost, no širila se među profesorima i studentima ekonomskih fakulteta. Tijekom idućih 30-ak godina mnogi rade vlastite verzije s izmijenjenim pravilima, da bi 1933. Charles Darrow izdao svoju verziju pod nazivom „Monopoly”.



Slika 1.7: Patent za igru „The Landlord’s Game”
(© Lizzie Maggie / Wikimedia Commons gdje je deklarirana kao public domain)

Iako je Darrow ubrzo htio prodati igru velikim tvrtkama, one su ga odbile. Tek nakon što je zabilježio značajnu prodaju na lokalnom tržištu, 1935., tvrtka Parker Brothers (danas Hasbro) kupuje prava i patent na „Monopoly" te uz uspješnu marketinšku kampanju uspijeva prodati 20 000 primjeraka igre mjesečno već u prvoj godini. Time je tvrtka doživjela strelovit uzlet u vrijeme Velike depresije, a Charles Darrow je postao prvi milijunaš koji se obogatio izradom društvene igre [2].

„Monopoly" je postao najprodavanija licencirana društvena igra, izdana u više od 103 država te prevedena na više od 37 jezika [8]. No, iako je sveprisutna u domovima širom svijeta, omražena je u krugovima entuzijasta društvenih igara zbog dugog trajanja, ispadanja igrača tijekom igre, manjka strategije i velikog utjecaja sreće.

Osamdesetih te posebice devedesetih godina 20. stoljeća društvene igre su preplavile Njemačku. Radilo se o novoj dinamičnoj vrsti igara koje smanjuju utjecaj sreće (često ne koriste igraće kocke) te je njihovo trajanje najviše 60–90 minuta. Iako imaju jednostavna i jasna pravila, zahtijevaju strateško razmišljanje, planiranje više poteza unaprijed te prilagođavanje novim okolnostima tijekom igranja.

Takve igre danas prevladavaju tržištem, a nazivaju se euroigrama (engl. *eurogames*). Poraz u euroigrama rezultira iz neučinkovitih poteza i stvaranja neoptimalnih strateških i taktičkih izbora. Iako posjeduju element kompetitivnosti, ove igre često izbjegavaju direktan sukob među igračima. Umjesto toga, igrači pokušavaju maksimizirati vlastite performanse, bez ili uz minimalnu interakciju s drugim igračima [4, 22, 44].

Kako bi se pomoglo popularizaciji i poboljšanju modernih društvenih igara u Njemačkoj, od 1979. najboljim društvenim igrama dodjeljuje se prestižna nagrada *Spiel des Jahres* (Igra godine). Nagradu dodjeljuje stručni žiri sastavljen od novinara i kritičara društvenih igara. Od 1989. dodjeljuje se i posebna nagrada za dječju igru godine (njem. *Kinderspiel des Jahres*), a od 2011. i nagrada *znalaca* za kompleksnije društvene igre (njem. *Kennerspiel des Jahres*). Danas je *Spiel des Jahres* najprestižnija svjetska nagrada u rastućoj industriji društvenih igara. Naime, sama nominacija za tu nagradu utječe na porast prodaje s par tisuća primjeraka na desetke tisuća, a pobjednička igra može očekivati 300 do 500 tisuća prodanih primjeraka [44, 10].

Popularizacija euroigara izvan Njemačke i Europe trajala je desetljećima, no svakako joj je pridonio uspjeh jedne igre. Nezadovoljan svojim poslom u zubarskom laboratoriju, Nijemac Klaus Teuber počeo se baviti hobijem izrade društvenih igara. Čak tri igre su bile izrazito popularne u Njemačkoj pa je 1988., 1990. i 1991. osvojio nagrade *Spiel des Jahres* za njih [37].

Tek 1995. je napravio prvu euroigru koja je postigla popularnost izvan Europe te je zaslužna za nagli rast popularnosti euroigara u SAD-u i diljem svijeta: „Naseljenici otoka Catan", danas znana samo kao „Catan" (slika 1.8). U ovoj igri igrači pokušavaju razviti svoju civilizaciju na izmišljenom otoku Catan proizvodnjom i razmjenom žita, ovaca, drva,

Slika 1.8: Društvena igra Catan (© Yonghokim / Wikimedia Commons / CC BY-SA 4.0)

cigle i rude. Vještim raspolaganjem resursima i trgovinom s ostalim suigračima, igrači grade ceste, naselja i gradove da bi osvojili bodove. Prvi igrač koji postigne deset bodova je najbolji naseljenik Catana.

„Catan” je 1995. osvojio *Spiel des Jahres*, a već 1996. igra je izdana i u SAD-u. Od igre za *štrebere* proširila se u šire društvo i brojne domove diljem svijeta, a svojom pozornošću plijeni i danas. Prevedena je na više od 40 jezika i prodana u više od 30 milijuna primjeraka, što je čini najprodavanijom svjetskom euroigrom. Njen autor, Klaus Teuber, vodi višemilijunsku tvrtku Catan GmbH sa svojom obitelji te više ne radi u zubarskom laboratoriju [10, 37]. „Catan” ima mnoge poveznice s matematikom te smo njemu posvetili šesti, najdulji, odjeljak drugog poglavlja ovog rada.

Današnje društvene igre značajno su drugačije od igara nastalih prije 20, 50 ili više godina. Teško ih je svrstati u samo jednu kategoriju, a neke čak i nazvati *društvenima*. Naime, postoje igre samo za jednog igrača (tzv. *sologames*), no i igre za osam ili više igrača (tzv. *party games*). Neke igre traju 15–20 minuta, dok postoje i one koje se igraju cijeli dan. Već spomenute euroigre teže jednostavnosti i eleganciji pa imaju pravila na nekoliko strana i apstraktne figurice (*meeples*), dok s druge strane tzv. *ameritrash* igre imaju komplicirana pravila na više desetaka stranica, stotine plastičnih figurica i velike ploče za igranje koje zauzimaju cijele stolove. Nisu sve igre kompetitivne, postoje i one kooperativne u kojima suigrači zajedničkim snagama pokušavaju pobijediti samu igru.

Industrija društvenih igara svake godine značajno raste te su godišnji prihodi 2020. iznosili 11 milijardi dolara, s očekivanim rastom od oko milijarde dolara godišnje [28]! Najpoznatija crowdfunding platforma Kickstarter tijekom 2020. zabilježila je gotovo 234 milijuna dolara uloženih u razvoj budućih društvenih igara, od kojih će neke zaživjeti tek idućih godina [24]. Na internet stranici BoardGameGeek (IMDB za društvene igre) evidentirano je više od 130 000 društvenih igara, od kojih za većinu niti najzagriženiji entuzijasti neće nikada čuti, od čega je oko 5000 izdano tijekom 2020.

Naravno, igrači društvenih igara vole se družiti i izvan svojih domova. Najveći sajam društvenih igara održava se svake godine u Essenu u Njemačkoj, a 2019. mu je prisustvovalo čak 209 tisuća posjetitelja [9]. Također raste popularnost kafića za društvene igre (engl. *board game cafe*) i udruga za promidžbu društvenih igara, kako u svijetu tako i kod nas. Digitalizacija nije zaobišla ni društvene igre pa se tako danas brojni naslovi mogu odigrati na računalu ili mobitelu, iako se time gubi aspekt socijalizacije tijekom igranja.

S obzirom na sve veću prisutnost društvenih igara u domovima, ali i šire, nije čudno što su svoje mjesto pronašle i u školama.

Poglavlje 2

Društvene igre u nastavi matematike

U ovom poglavlju opisujemo neke igre koje se mogu primijeniti u nastavi matematike — koje se lako mogu povezati sa sadržajem osnovne i srednje škole. Uz njih učenici imaju priliku na drugačiji, ponekad skriveni način učiti i raditi matematiku. Zadobivanjem interesa putem igranja, bilo zbog teme igre ili želje za pobjedom, suradnjom ili osjećajem koji se stvara tijekom igranja, otvara se put prema analizi strategije, mogućim potezima i daljnjim istraživanjima nekog matematičkog sadržaja.

2.1 Backgammon

Prigodno je pregled društvenih igara započeti jednom tradicionalnom društvenom igrom, koja nema toliku popularnost kao šah.

Kao što je već rečeno, „Backgammon" je jedna od najstarijih društvenih igara čija pravila su se minimalno mijenjala u proteklih 1500 godina [1]. Promatrajući pravila i igrajući „Backgammon" pronalazimo vezu s matematikom koja se može predočiti učenicima, a obuhvaća osnove aritmetike i vjerojatnosti. Budući da ćemo se u više sljedećih igara susresti s vjerojatnosnim temama, u ovom odjeljku se koncentriramo na aritmetičke aspekte „Backgammona", a za vjerojatnost vezanu za tu igru upućujemo na [29].

Pravila „Backgammona" su jednostavna i lako shvatljiva učenicima. Cilj igre je prvi izvesti svih 15 figura s ploče. Svaka strana ploče ima 12 polja, ponekad označenih brojevima od 1 do 24. Početne pozicije figura prikazane su na slici 2.1[1].

Igrač na potezu baca dvije igraće kocke te pomiče svoje figure dobiveni broj polja. Moguće je po jednom pomaknuti dvije figure ili dva puta pomaknuti istu figuru. Primjerice, ako su na kockama dobiveni brojevi 6 i 2 moguće je pomaknuti jednu figuru šest polja

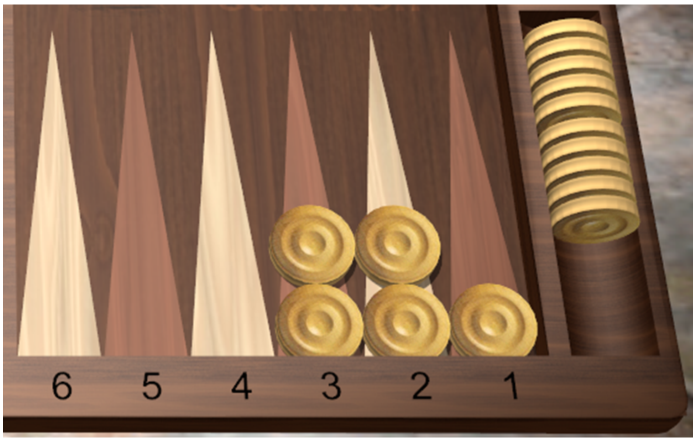
[1]Slike u ovom poglavlju izrađene su pomoću programa eXtreme Gammon 2.

Slika 2.1: Početne pozicije figura u „Backgammonu"

i drugu dva polja ili jednu figuru za osam polja (6 + 2). Figure se kreću po ploči u smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu, od broja 24 prema broju 1 (protivničke figure se kreću u obratnom smjeru). Ako su dobiveni brojevi na kockama jednaki, igrač na raspolaganju ima četiri pomicanja umjesto samo dva.

Svoju figuru igrač može pomaknuti na prazno polje, polje na kojem se nalaze njegove figure ili polje na kojem se nalazi samo jedna protivnička figura. U posljednjem slučaju protivnička figura se privremeno izbacuje iz igre i postavlja na sredinu ploče. Na svom potezu protivnički igrač prije pomicanja ostalih figura mora vratiti izbačenu figuru u igru tako da iskoristi jedan od dobivenih brojeva za ponovni ulazak na ploču (u donjem, odnosno gornjem, desnom uglu ploče), ako je to moguće prema opisanim pravilima pomicanja. Ako igrač ne može vratiti figuru u igru, propušta svoj red.

Da bi igrač mogao izvesti svoje figure s ploče, prvo ih sve mora pomaknuti u donji desni dio ploče (tzv. *home board*), označen brojevima 1–6 (odnosno u gornji desni, polja 19–24). Zatim može izvesti figure odgovarajućim brojem s kocke, npr. figuru s polja 3 će izvesti ako na kocki dobije broj 3. Međutim, ako igrač više nema figura na polju koje odgovara broju na kocki ni poljima veće vrijednosti, mora izvesti figuru na prvom polju manje vrijednosti. Primjerice, ako u situaciji sa slike 2.2 igrač na kockama dobije brojeve 3 i 5, iz igre mora izvesti obje figure s polja 3.



Slika 2.2: Bijele figure pred izlazom

Pobjeđuje prvi igrač koji izvede sve svoje figure. Ako je to uspio učiniti bez da je protivnik izveo barem jednu svoju figuru, osvaja *gammon* i dvostruki broj bodova. Ako uz to protivnički igrač ima ijednu figuru na sredini ploče ili u pobjednikovom *home boardu*, pobjednik osvaja *backgammon* i trostruke bodove. Budući da je „Backgammon" relativno brza igra, često se kao konačni pobjednik uzima igrač koji prvi sakupi 3, 5 ili 7 bodova.

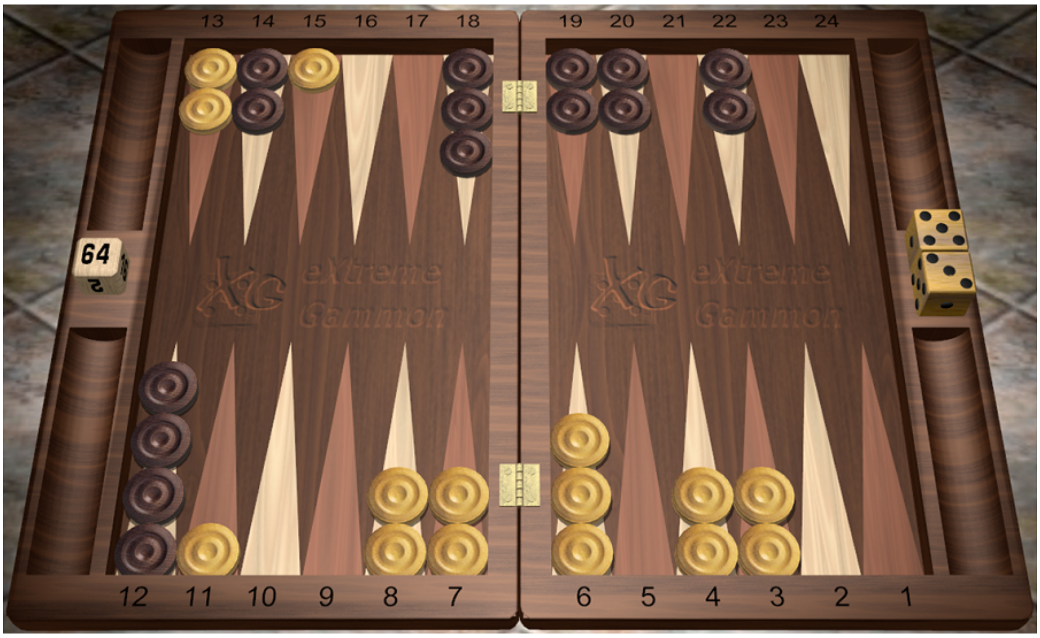
„Backgammon" je igra utrke pa je strateški bitno znati koji igrač je trenutno u prednosti jer o tome ovisi i odabir strategije. Tijekom godina osmišljene su mnoge metode koje mogu pomoći u tome, a u nastavku ćemo opisati neke od njih.

Brojanje preostalih pomaka figura (engl. *pip count*)

Pip count je najmanji ukupni broj pomaka svih figura potreban da bi se igra završila. Na samom početku igre, dok su sve figure na početnim pozicijama (kao na slici 2.1), *pip count* je 167. Naime, pet figura je na polju 6 ($5 \cdot 6 = 30$), tri figure su na polju 8 ($3 \cdot 8 = 24$), pet figura je na polju 13 ($5 \cdot 13 = 65$) i dvije figure su na polju 24 ($2 \cdot 24 = 48$). Zbrojimo li te umnoške dobivamo 167 [21].

Na jednoj ploči prikazat ćemo tri metode *pip counta*. Na metodama koje daju trenutni *pip count* koristit ćemo isti raspored figura na ploči, a isto bismo učinili s učenicima kako bi mogli usporediti strategije.

Učenicima možemo dati zadatak da samostalno odrede *pip count* u konkretnoj situaciji iz igre, prikazanoj na slici 2.3.



Slika 2.3: Situacija iz igre

Račun za bijelog igrača je:

$$2\cdot3+2\cdot4+3\cdot6+2\cdot7+2\cdot8+1\cdot11+2\cdot13+1\cdot15 = 6+8+18+14+16+11+26+15 = 114,$$

a za crnog igrača:

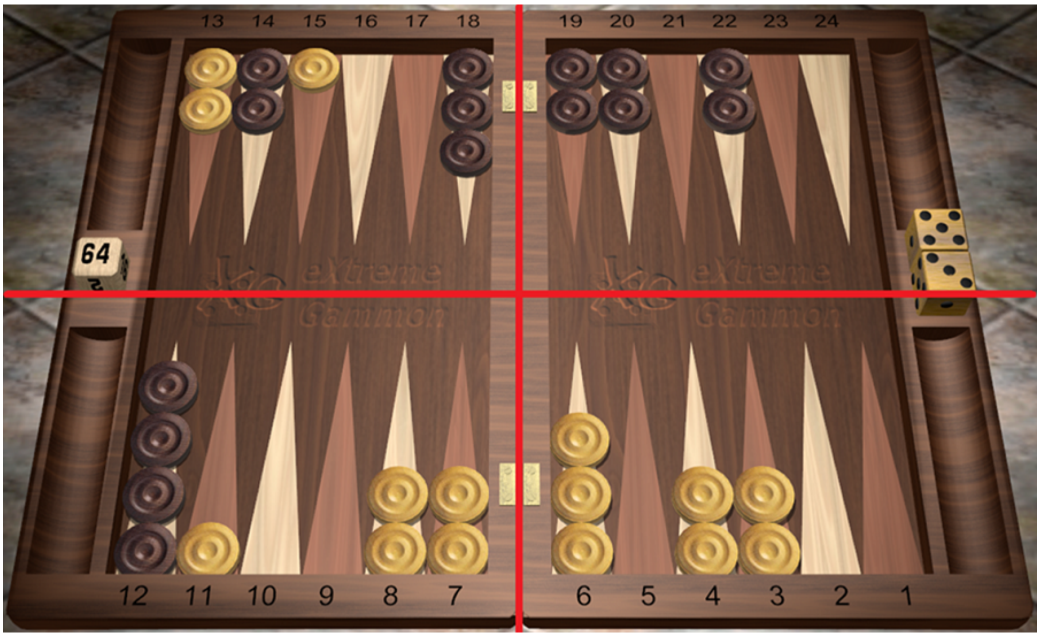
$$2\cdot3+2\cdot5+2\cdot6+3\cdot7+2\cdot11+4\cdot13 = 6+10+12+21+22+52 = 123.$$

Bijelom igraču je potrebno manje pomaka figura da bi izveo svoje figure, stoga je u prednosti za $123 - 114 = 9$ pomaka.

Očito, ova metoda uključuje dosta množenja i zbrajanja. Iako se ne radi o velikim brojevima te je račun moguće pojednostaviti koristeći distributivnost, metoda nije optimalna te često zahtjeva previše vremena. Kako svaka metoda prebrojavanja ne odgovara svim tipovima igrača, otkrivene su mnoge alternativne metode, od kojih su neke više vizualne, dok su druge strogo računske. Mi ćemo opisati njih tri.

Crossover (metoda prijelaza)

Metoda je pogodna za početnike čije učenje se može podijeliti u tri koraka. Svaki od koraka je koristan i zasebno jer pruža okviran uvid u situaciju na ploči [21].



Slika 2.4: Situacija iz igre uz podjelu ploče ne kvadrante

1. Promatraju se samo figure izvan *home boarda*. Broji se svaki prijelaz figure u sljedeći kvadrant (vidi sliku 2.4).

    - Bijeli igrač: Pet figura (na poljima 7, 8 i 11) treba napraviti jedan prijelaz do *home boarda*, a tri figure (na poljima 13 i 15) trebaju napraviti dva prijelaza. To je ukupno $5 + 3 \cdot 2 = 11$ prijelaza. Kako je za svaki prijelaz potrebno približno šest pomaka, okviran *pip count* je 66.
    - Crni igrač: Četiri figure trebaju napraviti dva prijelaza, a pet figura treba napraviti samo jedan prijelaz. To je ukupno 13 prijelaza, odnosno približno 78 pomaka.

    Dakle, bijeli igrač je u prednosti za približno $78 - 66 = 12$ pomaka.

2. Za precizniji *pip count* razmatra se sljedeće: Budući da je s *home boarda* najteže izvesti figure koje su najdalje od izlaza (na poljima 6 za bijelog i 19 za crnog igrača), i one se broje kao prijelazi. Iz prvog koraka je poznato da bijeli igrač treba napraviti 11 prijelaza pa sada tome pridodamo i tri figure s polja 6, što je ukupno 14 prijelaza ili 84 pomaka. Analogno, crni igrač ima 13 prijelaza i dvije figure na polju 19, što je ukupno 15 prijelaza ili 90 pomaka. Ovom metodom prednost bijelog igrača se smanjila na približno šest pomaka.

3. Konačno, za točan *pip count* potrebno je vizualno odrediti gdje bi se figure nalazile nakon svih potrebnih prijelaza (po šest pomaka) u *home board*. Bijeli igrač bi tada imao tri figure na polju 6 (njih smo već uračunali u drugom koraku), jednu figuru na polju 5, dvije figure na polju 4, tri figure na polju 3, dvije figure na polju 2 i četiri figure na polju 1. Budući da je $1 \cdot 5 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 5 + 8 + 9 + 4 + 4 = 30$, uz prethodnih 84 pomaka dobiva se točan *pip count* 84 + 30 = 114.

   Crni igrač bi nakon svih prijelaza imao četiri figure na njegovom polju 5, dvije figure na polju 3 te sedam figura na polju 1, što odgovara 33 pomaka. Uz prethodnih 90 dobiva se točan *pip count* od 123 pomaka te je bijeli igrač u prednosti za devet pomaka.

Primijetimo da je greška u izračunu nakon prvog koraka bila samo tri pomaka, te se već prvi korak ove metode čini kao korisna zamjena za klasični *pip count*. Nadalje, u trenucima kad je potreban precizan izračun iskusan igrač lako dobije točan *pip count* samo uz vizualno pomicanje figura i množenje brojem 6, a preostali račun uključuje izrazito male brojeve.

Metoda simetrije

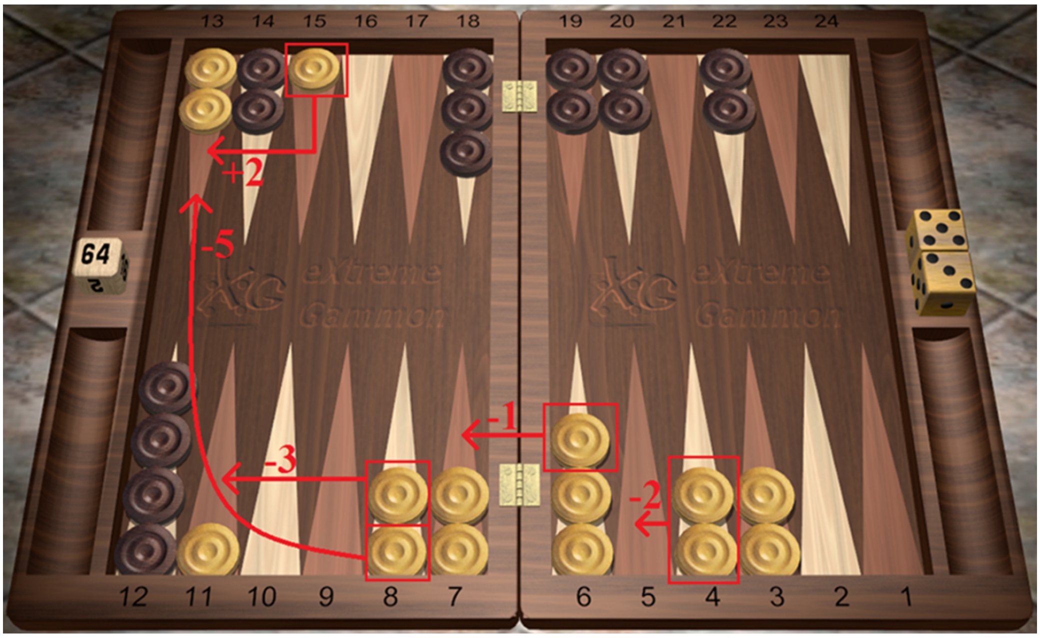
Tijekom igre većinom je dovoljno znati koji igrač je u prednosti te za koliko pomaka, točan *pip count* nije toliko bitan za donošenje odluke o daljnjoj strategiji igranja. Sljedeća metoda služi upravo tome — omogućuje određivanje prednosti i to na vizualan način koji uključuje jako malo računanja [34].

Promotrimo ploču sa slike 2.4. Uočimo da su figure na poljima 3 i 22 međusobno simetrične (s obzirom na vodoravni crveni pravac). Kad bi to bile jedine figure na ploči, niti jedan igrač ne bi bio u prednosti.

Promotrimo sad figure na poljima 4 i 20. Uočimo da su bijele figure bliže izlazu za jedno polje, odnosno morali bi ih vratiti jedno polje unatrag kako bi bile simetrične crnim figurama. Dakle, kad bi to bile jedine figure na ploči, bijeli igrač bi bio u prednosti dva pomaka, po jedan pomak za svaku figuru.

Na sličan način možemo vizualno, u glavi, grupirati sve preostale figure da bismo utvrdili tko je u prednosti. Jedna od mogućnosti prikazana je na slici 2.5.

Da bi se postigla simetrija, potrebno je pomaknuti šest figura označenih crvenim kvadratima. Pomaci unatrag označeni su negativnim brojevima, a pomaci unaprijed pozitivnim. Zbrojimo li sve brojeve dobivamo -9, dakle bijeli igrač je u prednosti devet pomaka.



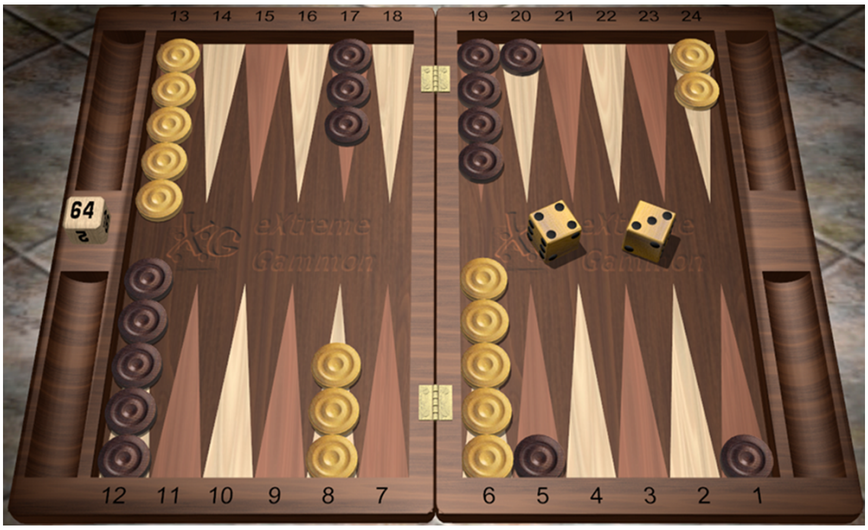
Slika 2.5: Primjena metode simetrije

Metoda kontinuiranog brojanja

Posljednja metoda skreće fokus s ploče na kocke [26]. Budući da se figure pomiču onoliko polja koliko su dobiveni brojevi na kockama, moguće je pratiti samo te brojeve. Primjerice, ako je nakon svog poteza bijeli igrač u prednosti devet pomaka te crni igrač na kockama dobije 4 i 4, svoje figure će pomaknuti ukupno 16 pomaka (četiri puta po četiri pomaka) te će nova razlika biti $-9 + 16 = +7$, tj. crni igrač će biti u prednosti sedam pomaka.

U obzir treba uzeti i situaciju kad igrač svoju figuru postavi na polje na kojem je samo jedna protivnička figura, koja se potom privremeno izbacuje iz igre. Tada je potrebno uračunati koliko polja je ta figura bila udaljena od mjesta ulaska na ploču. Prikažimo to konkretnom situacijom s početka igre.

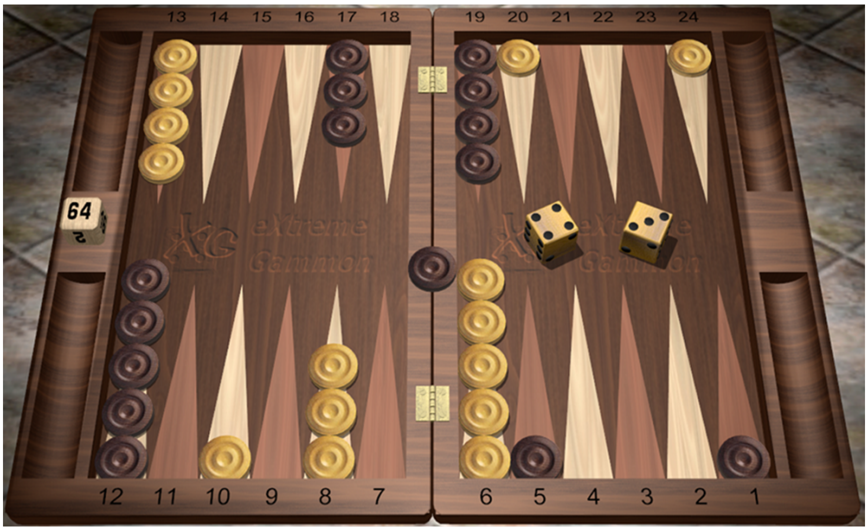
Crni igrač je igrao prvi te je na kockama dobio 4 i 1, stoga je crni igrač u prednosti pet pomaka. Svoje figure je pomaknuo kao što je prikazano na slici 2.6.



Slika 2.6: Situacija nakon poteza crnog igrača

Bijeli igrač zatim na kockama dobije 4 i 3. Budući da je $4 + 3 = 7$, a $5 - 7 = -2$ bijeli igrač je sad u prednosti dva pomaka. Međutim, broj 4 želi iskoristiti tako da pomakne figuru s polja 24 na polje 20, na kojem se nalazi jedna crna figura, čime ju privremeno izbacuje iz igre. S obzirom na to da se crna figura nalazila na polju 20, potrebno je pridodati 20 pomaka na *pip count* pa je bijeli igrač sad u prednosti čak 22 pomaka.

Ploča nakon poteza bijelog igrača prikazana je na slici 2.7.



Slika 2.7: Situacija nakon poteza bijelog igrača

2.2 City of Zombies

„City of Zombies" je kooperativna igra preživljavanja s igraćim kockama. Igrači kombiniraju brojeve dobivene na kockama da bi uklonili šaljivo ilustrirane zombije iz stalno napredujuće horde prije nego njihove barikade budu pregažene. Igra je pogodna za sve školarce, bez obzira na razred ili njihovo matematičko predznanje, te se može odigrati u samo 15 minuta (u kraćoj verziji).

Glavna mehanika igre uključuje manipulaciju dobivenih brojeva na tri bačene kocke kombinacijom računskih operacija (od osnovnog zbrajanja i oduzimanja do kvadriranja i korjenovanja) da bi se dobili brojevi na zombi-kartama — potreban je točan rezultat da bismo ih se riješili. Kad se to dogodi, pogođeni zombi uklanja se iz igre. Sve tri kocke moraju biti iskorištene. Primjerice, kao što je prikazano na slici 2.8, kocka s brojem 1 iskorištena je za zombija jačine 1, a kocke s brojevima 3 i 2 iskorištene su kvadriranjem njihovog zbroja: $(3 + 2)^2 = 25$.

Nakon što su svi igrači bili na redu, svi zombiji koji su ostali na ploči napreduju i pojavljuje se novi red zombija. Igrači mogu steći dodatne bodove spašavanjem preživjelih. Svaki spašeni preživjeli vrijedi jedan bod, no zombiji koji dođu do barikade jedu preživjele. Igra započinje sa šest karata preživjelih u Sigurnoj zoni, a još preživjelih se može dodavati kako se ploča čisti od zombija.

Slika 2.8: Primjer dvaju točnih pogodaka (1 i 25)
(© Matthew Tidbury / cityofzombies.com / objavljeno uz dozvolu autora)

Slika 2.9: Moguće kombinacije kocki
(© Matthew Tidbury / cityofzombies.com / objavljeno uz dozvolu autora)

Snalažljivim korištenjem igraćih kocki može se ukloniti i više od jednog zombija. Primjerice (slika 2.9), ako igrač na kockama dobije brojeve 2, 3 i 6 može ih zbrojiti da izbaci zombija jačine 11 ili ih iskoristiti kombinacijom $3 - 2 + 6$ da izbaci zombija jačine 7. Međutim, ako iskoristi kocku s brojem 3 za zombija jačine 3, oduzimanjem ostalih dviju vrijednosti $(6 - 2)$ izbacit će i zombija jačine 4, dakle ukupno dva zombija. Slično, manipulacijom $3^2 + 2$ izbacit će zombija jačine 11, a preostala kocka je dovoljna za zombija jačine 6. Konačno, moguće je iskoristiti i svaku kocku za jednog zombija: kvadriranjem broja 2 izbacit će se zombi jačine 4, a preostale dvije kocke odgovaraju zombijima jačina 3 i 6.

Ponekad je teško iskoristiti sve tri kocke ili pogoditi više zombija. Primjer prikazan na slici 2.10 pokazuje kako je trebalo biti dosjetljiv. Kocke pokazuju 6, 5 i 5, a potrebno je ciljati zombije jačine 11, 10 ili 7. Jedna moguća kombinacija je $5^2 : 5 + 6$ što je jednako 11, točno koliko je potrebno za uklanjanje lijevog zombija.

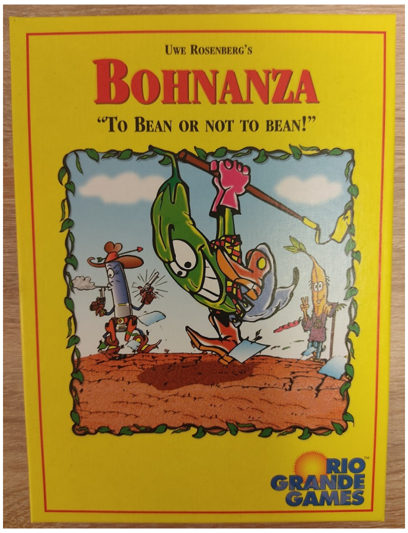
Slika 2.10: Primjer težeg iskorištavanja sve tri kocke
(© Matthew Tidbury / cityofzombies.com / objavljeno uz dozvolu autora)

Prvotno razvijena kako bi pomogla autorovoj kćeri s matematikom, igra ima fantastične potencijale za učenje. Nudi indirektnu manipulaciju brojeva, za razliku od tradicionalnih obrazovnih igara.

Djeca vole ovu igru jer ima mnogo razina, a uključena matematika nije prezahtjevna te je naglasak na brzoj primjeni aritmetike prirodnih brojeva. Može se igrati koristeći jednostavne operacije kao što su zbrajanje i oduzimanje, kombinirati s množenjem i dijeljenjem ili čak kompleksnijim operacijama poput kvadriranja, potenciranja i korjenovanja, ovisno o dobi učenika.

Igra je brza i zabavna, a igračima se matematičke vještine neprimjetno poboljšavaju. Učenici različitih matematičkih vještina mogu igrati zajedno u isto vrijeme i učiti nove matematičke vještine kooperativnom igrom. Moguće je da će pojedini učenici doći do složenije ideje za iskoristivost brojeva, dok će im drugi ukazati jednostavniji način. Učenici neizbježno matematički komuniciraju i uspoređuju ideje pa igra potiče komunikaciju i raspravu o širokom spektru strategija računanja te je istovremeno resurs za učenje i moćan alat vrednovanja za učitelje. Primjenjiva je u dopunskoj nastavi matematike te motivira učenike za učenje i vježbanje mentalne aritmetike [42].

2.3 Bohnanza



Slika 2.11: Društvena igra „Bohnanza” (vlastita fotografija)

„Bohnanza” je simpatična igra uzgoja graha (slika 2.11). Njen naziv je spoj njemačke riječi *Bohne* (grah) i engleske riječi *bonanza* (situacija iz koje se ostvaruje velika zarada, velika količina nečeg dobrog).

Cilj igre je sakupiti što više zlatnika sadnjom, razmjenom, branjem i prodajom šarolikih vrsta graha. U osnovnoj igri za tri do pet igrača postoji osam vrsta graha: 6 karata jedne vrste, 8 karata druge vrste te tako redom do 20 karata osme vrste graha (slika 2.12).

Na početku igre svaki igrač vuče pet karata, čiji redoslijed ne smije mijenjati. Preostale karte čine komplet iz kojeg se vuku buduće karte. Na svom potezu igrač mora posaditi grah kojeg drži na prvom mjestu u ruci te može posaditi grah s drugog mjesta. Pri tome mora pripaziti na ograničen broj polja za sadnju — na raspolaganju su mu samo dva ili tri polja (ovisno o broju igrača). Zatim otkriva dvije karte graha iz špila koje može iskoristiti

Slika 2.12: Vrste graha u igri „Bohnanza” (vlastita fotografija)

za daljnju sadnju ili za razmjenu s drugim igračima. Razmjenjivati može i preostale karte iz ruke. Konačno, na kraju svog poteza vuče još tri karte koje smješta na kraj redoslijeda u ruci.

U bilo kojem trenutku tijekom igre svaki se igrač može odlučiti na berbu graha s jednog polja. O količini graha ovisi zarada pri njihovoj prodaji. Rjeđe vrste graha zahtijevaju manji broj posađenih karata za istu zaradu u odnosu na češće vrste. Primjerice, za jedan zlatnik potrebno je četiri karte plavog graha (najčešća vrsta s 20 karata), no samo dvije karte crvenog graha (rijetka vrsta s 8 karata). Slično, za maksimalnih četiri zlatnika treba ubrati čak deset karata plavog graha, no za istu zaradu dovoljno je svega pet karti crvenog graha.

Zanimljivo je da zlatnike ne predstavljaju posebni žetoni, kako je uobičajeno u mnogim igrama, već poleđine samih karata. Primjerice, ako igrač ima posađeno osam karata plavog graha te se odluči na berbu, zaradit će tri zlatnika. Stoga okreće tri karte plavog graha pozadinom prema gore te ih stavlja sa strane, a preostalih pet karata stavlja na kup za odbacivanje. To je bitno jer će se špil za vučenje s vremenom potrošiti, nakon čega se odbačene karte miješaju i postaju novi špil za vučenje, čime neke od već iskorištenih karata postaju ponovno dostupne. Igra završava nakon što se špil potroši po treći put, nakon čega svi igrači imaju posljednje berbe te je pobjednik onaj igrač koji je sakupio najviše zlatnika.

Nakon što se učenici upoznaju s pravilima igre trebali bi moći samostalno izračunati koliko ima karata u špilu. Za očekivati je različite strategije rješavanja ovog naoko jednostavnog zadatka:

1. Očita strategija je zbrojiti $6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 = 104$. Bez korištenja svojstava zbrajanja to bi moglo potrajati, ovisno o dobi i vještini učenika, no uz korištenje svojstava komutativnosti i asocijativnosti dobiva se lagani račun
$$(14 + 16) + (12 + 18) + (10 + 20) + (6 + 8) = 30 + 30 + 30 + 14 = 104.$$
2. Također je moguće primijeniti Gaußovu dosjetku te zbrojiti prvi i zadnji pribrojnik, drugi i predzadnji itd. Time se dobiva sljedeći račun:
$$(6 + 20) + (8 + 18) + (10 + 16) + (12 + 14) = 4 \cdot 26 = 104.$$
3. Snalažljivi učenici bi mogli uvidjeti da je aritmetička sredina svih pribrojnika (koji su uzastopni parni brojevi) broj 13, a kako ih je 8 onda zbroj mora biti $8 \cdot 13 = 104$.

Tijekom igranja igrači trebaju odrediti koje vrste graha im se isplate saditi, relativne vrijednosti karata prilikom razmjene te dobar trenutak za branje, bilo zbog zarade ili oslobađanja polja za sadnju nove vrste graha. Iako je subjektivna procjena ponekad valjana, postavlja se pitanje je li na neki način moguće odrediti vrijednost pojedine vrste graha [25].

Razmotrimo najčešću vrstu, plavi grah. Postoji 20 karata plavog graha, od kojih je potrebno 4 za 1 zlatnik, 6 za 2 zlatnika, 8 za 3 zlatnika i 10 za 4 zlatnika. Učenicima možemo postaviti zadatak da odrede koji udio karata te vrste je potrebno za određeni broj zlatnika. Učenike također možemo podijeliti tako da različiti učenici ili grupe učenika računaju udjele različitih vrsta graha.

Za plavi grah udjeli su sljedeći: za 1 zlatnik potrebno je $\frac{4}{20} = 20\%$ karata, za 2 zlatnika $\frac{6}{20} = 30\%$ karata, za 3 zlatnika $\frac{8}{20} = 40\%$ karata, a za 4 zlatnika $\frac{10}{20} = 50\%$ karata. U tablici 2.1 prikazani su rezultati izračuna za sve vrste karata.

Vrsta graha	Plavi	Čili	Smrdljivi	Zeleni	Soja	Crnooki	Crveni	Vrtni
Ukupna količina	20	18	16	14	12	10	8	6
Karti za 1 zlatnik	4	3	3	3	2	2	2	-
Udio za 1 zlatnik	20%	16.67%	18.75%	21.43%	16.67%	20%	25%	
Karti za 2 zlatnika	6	6	5	5	4	4	3	2
Udio za 2 zlatnika	30%	33.33%	31.25%	35.71%	33.33%	40%	37.5%	33.33%
Karti za 3 zlatnika	8	8	7	6	6	5	4	3
Udio za 3 zlatnika	40%	44.44%	43.75%	42.86%	50%	50%	50%	50%
Karti za 4 zlatnika	10	9	8	7	7	6	5	-
Udio za 4 zlatnika	50%	50%	50%	50%	58.33%	60%	62.5%	

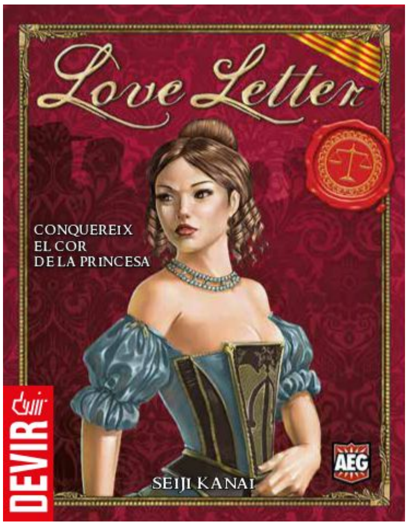
Tablica 2.1: Broj i udio karata potrebnih za 1/2/3/4 *zlatnika*

S učenicima se može provesti diskusija koji grah je najbolje iskoristiti za jedan zlatnik, koji za dva zlatnika itd. Iz tablice je vidljivo da čili i soja najbrže daju jedan zlatnik, plavi i smrdljivi dva zlatnika, plavi i zeleni tri zlatnika, a plavi, čili, smrdljivi i zeleni četiri zlatnika.

Učenici tijekom cijele igre prebrojavaju svoje i tuđe karte te ih igra poziva na razmišljanje o vjerojatnosti nabavke još karata iste vrste kako bi im berba bila profitabilnija te se stoga ova igra može iskoristiti za uvođenje osnovnih principa vjerojatnosti na zanimljivijem primjeru od uobičajenog bacanja novčića ili kocke. Time na neprimjetan način uče i o zakonu ponude i potražnje. Pri tome također razvijaju vještine komunikacije i trgovanja s drugim učenicima.

„Bohnanza" je u osnovi jednostavna igra s tri etape: Sadnja graha; berba graha; skupljanje zlatnika. Donošenje odluka pojednostavljeno je tako da igrač ne osjeća teret preispitivanja svoje pozicije pa se igra čini puno lakšom od mnogih drugih. Međutim, bilo bi površno pretpostaviti da ova igra nema dubine. Već nakon nekoliko odigranih partija, otvaraju se razna pitanja onima koji su spremni ovu igru dublje proučavati u svrhu uspješnije igre ili analize donesenih odluka.

2.4 Love Letter



Slika 2.13: Društvena igra „Love Letter" (© Marc Figueras / boardgamegeek / CC BY-NC-SA 3.0)

U svjetlu uhićenja kraljice Marianne zbog veleizdaje najteže je pogođena njezina kći, princeza Annette (slika 2.13). Prosci diljem grada-države Tempest pokušavali su umanjiti Annettinu tugu udvarajući joj kako bi unijeli malo veselja u njen život.

Svaki igrač je jedan od tih prosaca i pokušava dostaviti svoje ljubavno pismo princezi. Na žalost, ona se zaključala u palaču pa se prosci moraju osloniti na posrednike koji bi mogli predati njihovu ljubavnu poruku.

„Love Letter" (Ljubavno pismo) se igra u više krugova. Svaki krug predstavlja jedan dan. Na kraju svakog kruga, pismo jednog igrača stiže do princeze. Kad princeza pročita dovoljno pisama jednog prosca (ovisno o broju igrača) postaje zaljubljena, a taj igrač osvaja princezino srce i igru. Ovo je kartaška igra koja se može igrati u dva do četiri igrača koristeći komplet od 16 karata. Karte koje se koriste za igru nisu standardne igrače karte, već su osmišljene specifično za ovu igru. Cilj svakog igrača je da njihovo ljubavno pismo stigne do princeze, usput pokušavajući eliminirati druge igrače. To mogu postići koristeći različite efekte odabranih karata.

Na početku svakog kruga igre karte se promiješaju, a jedna se karta stavlja sa strane; ona će ostati nepoznata svim igračima. Zatim svi igrači izvlače po jednu kartu koja predstavlja osobu koja trenutno nosi njihovu ljubavnu poruku za princezu.

Igrač koji je na potezu (aktivni igrač) vuče još jednu kartu. On uvijek ima dvije opcije jer ima dvije karte u ruci. Odbacuje jednu od tih karata otkrivenu ispred sebe i primjenjuje

Slika 2.14: Osam različitih karata s njihovim vrijednostima (vlastita fotografija)

njen efekt. Sve odbačene (odigrane) karte ostaju otkrivene ispred igrača koji su ih odbacili do kraja kruga. Zatim sljedeći igrač postaje aktivni igrač.

Krug završava ako su svi osim jednog igrača ispali ili ako ponestane karata — u tom slučaju svi igrači koji nisu ispali otkrivaju svoju kartu, a pobjednik kruga je igrač čija karta ima najveću vrijednost (ta osoba je najbliža princezi pa joj predaje ljubavno pismo).

Pobjednik kruga osvaja oznaku naklonosti (♥ = 1 bod) te će biti prvi aktivni igrač u sljedećem krugu. Igra se nastavlja dok jedan igrač ne skupi određeni broj bodova, ovisno o ukupnom broju igrača: 4 boda za 4 igrača, 5 bodova za 3 igrača ili 7 bodova za 2 igrača.

Igraći komplet sastoji se od 16 karata koje predstavljaju osobe na dvoru. Postoji osam različitih vrsta karata, svaka sa svojom vrijednošću od 1 do 8. Različite karte mogu se vidjeti na slici 2.14.

U nastavku su opisani efekti pojedinih karata:

1. Stražar (5 karata) – odaberi jednog igrača i imenuj kartu koja nije Stražar. Ako taj igrač ima imenovanu kartu, on ispada iz ovog kruga.
2. Svećenik (2 karte) – odaberi jednog igrača i potajno pogledaj kartu koju ima u ruci.
3. Barun (2 karte) – odaberi jednog igrača i usporedi vrijednost preostale karte u svojoj ruci i karte u ruci odabranog igrača; igrač s kartom manje vrijednosti ispada.
4. Sluškinja (2 karte) – nakon igranja ove karte do tvog sljedećeg poteza drugi igrači ne mogu te odabrati prilikom igranja svojih karata.
5. Princ (2 karte) – odaberi jednog igrača (možeš i sebe); taj igrač mora odbaciti kartu u svojoj ruci (bez primjene efekta) i povući novu.
6. Kralj (1 karta) – zamijeni preostalu kartu u ruci s kartom odabranog igrača.
7. Grofica (1 karta) – igranje ove karte ne donosi ništa, međutim prisiljen si odbaciti ovu kartu ako također imaš Baruna ili Kralja u svojoj ruci.
8. Princeza (1 karta) – ako iz bilo kojeg razloga odbaciš Princezu, ona će baciti pismo u vatru; ispadaš iz ovog kruga.

Opisat ćemo tijek jednog kruga igre za tri igrača. Pritom ćemo komentirati vjerojatnosti određenih događaja računom primjerenim učenicima viših razreda osnovne škole.

Na početku svi igraču vuku jednu kartu. Recimo da prvi igrač vuče Princa, drugi igrač Stražara, a treći Princezu.

Prvi igrač postaje aktivni igrač te vuče još jednu kartu, npr. Stražara. Odlučuje se odigrati kartu Stražara te odabire drugog igrača, imenujući Baruna. S obzirom na to da drugi igrač u ruci ima Stražara, izjavljuje da nema Baruna te postaje aktivni igrač.

Vjerojatnost da je prvi igrač Stražarom izbacio Princa, Sluškinju, Baruna ili Svećenika iznosi $\frac{2}{14} = \frac{1}{7} \approx 14.3\%$. Naime, u kompletu su po dvije kopije svake od tih karata, a prvom igraču su poznate samo dvije karte u njegovoj ruci, stoga mu je preostalih 14 karata nepoznato. Analogno, vjerojatnost da istom kartom izbaci Princezu, Groficu ili Kralja je $\frac{1}{14} \approx 7.1\%$. Prema tome, pokušaj prvog igrača je bio optimalan.

Drugi igrač vuče Groficu, no također se odlučuje odigrati kartu Stražara. Odabire prvog igrača, imenuje Svećenika s vjerojatnošću $\frac{2}{13} \approx 15.4\%$ i promašuje. Broj mogućih događaja sad je 13 jer su drugom igraču vidljive dvije karte u njegovoj ruci, no i odigrana karta Stražara prvog igrača. Dakle, preostalih karata je $16 - 3 = 13$.

Slika 2.15: Prikaz odigranih karata na kraju kruga (vlastita fotografija)

Treći igrač postaje aktivan, vuče i igra kartu Baruna. Odabire drugog igrača te s njim uspoređuje vrijednosti karata Princeze i Grofice. Budući da drugi igrač ima kartu manje vrijednosti, on ispada iz ovog kruga.

Prvi igrač postaje aktivan i vuče kartu Sluškinje. Zna da je treći igrač Barunom izbacio drugog igrača koji je u ruci imao Groficu pa logično zaključuje da treći igrač u svojoj ruci mora imati kartu Princeze. Stoga igra Princa te je treći igrač primoran odbaciti kartu Princeze, time ispadajući iz ovog kruga (situacija je prikazana na slici 2.15). Prvi igrač je jedini preostali igrač u igri te pobjeđuje ovaj krug i osvaja oznaku naklonosti (1 bod).

Nadalje, izdvojit ćemo situaciju u kojoj prvi igrač na svom prvom potezu odluči igrati kartu Baruna. Ovisno o drugoj karti u ruci u tablici 2.2 izračunate su vjerojatnosti za pobjedu, poraz i neriješen ishod prilikom usporedbe s vrijednosti karte drugog igrača.

Druga karta u ruci	Stražar	Svećenik	Barun	Sluškinja	Princ	Kralj	Grofica	Princeza
Vrijednost druge karte	1	2	3	4	5	6	7	8
Brojnost drugih karata	5	2	1	2	2	1	1	1
Pobjeda	0%	35.7%	50%	57.1%	71.4%	85.7%	92.9%	100%
Neriješeno	28.6%	7.1%	0%	7.1%	7.1%	0%	0%	0%
Poraz	71.4%	57.1%	50%	35.7%	21.4%	14.3%	7.1%	0%

Tablica 2.2: Vjerojatnosti prilikom igranja karte Baruna na prvom potezu

Primjećujemo da je vjerojatnost za pobjedu prilikom usporedbe vrijednosti karata veća od 50% ako je vrijednost druge karte u ruci 4 ili više. Ako je druga karta također Barun, igrač nema izbora nego odigrati kartu Baruna te ima 50% šanse za pobjedu, odnosno 50% da će ispasti iz tog kruga. Igranje Baruna s drugom kartom Stražara ili Svećenika nije preporučljivo.

Učenici 7. i 8. razreda osnovne škole i srednjoškolci trebali bi moći objasniti kako su dobiveni brojevi u tablici. Primjerice, ako je druga karta u ruci Princ, igrač će pobijediti sve karte manje vrijednosti od nje, tj. karte Stražara, Svećenika, Baruna i Sluškinje. Tih karata ima $5 + 2 + 1 + 2 = 10$, nepoznatih karata općenito ima 14, pa je vjerojatnost za pobjedu $\frac{10}{14} = \frac{5}{7} \approx 71.4\%$. Neriješen ishod moguć je samo ako igrač s kojim uspoređujemo karte također ima Princa, za što je vjerojatnost $\frac{1}{14} \approx 7.1\%$.

„Love Letter" je brza igra s jednostavnim pravilima. Strateški nije zahtjevna, ali postoji na prvu neprimjetna matematika o kojoj se može diskutirati s učenicima. Potiče njihovo deduktivno razmišljanje i u različitim situacijama se može primijeniti osnovni račun vjerojatnosti kojeg učenici uče u osmoj godini učenja matematike. Analizom igre učenici mogu uvidjeti potrebu za primjenom računanja vjerojatnosti i donošenja odluka na temelju nje. Takav način pristupa kod učenika potiče logično razmišljanje i sposobnost analize problema, umjesto stavljanja naglaska na samu tehniku računanja vjerojatnosti. Cijena igre je pristupačna pa nije veliki trošak za cijeli razred, a postoji i verzija „Love Letter Premium" koja omogućuje igru do osam igrača.

Za one učenike koji žele znati više, daljnja analiza igre može se raditi na dodatnoj nastavi matematike u osnovnoj školi. U srednjoj školi proučavanje igre „Love Letter" može se uključiti u dodatnu nastavu [32].

2.5 Hanabi

Slika 2.16: Društvena igra Hanabi (vlastita fotografija)

Hanabi[2] je naoko jednostavna kooperativna igra u kojoj igrači preuzimaju uloge pirotehničara koji su zabunom pomiješali barute, fitilje i rakete velikog vatrometa. S obzirom na to da vatromet uskoro mora započeti, tim mora surađivati kako bi pravovremeno osigurao spektakl za gledatelje. Igra je 2013. osvojila prestižnu nagradu *Spiel des Jahres*.

Za igru se koristi 50 karata vatrometa, po deset u svakoj od pet boja. Skup karata iste bolje čine tri karte vrijednosti 1, po dvije karte vrijednosti 2, 3 i 4 te samo jedna karta vrijednosti 5. Cilj igre je složiti skupove u svih pet boja, redom od vrijednosti 1 do 5 (slika 2.17).

Ova igra je specifična po tome što igrači karte u ruci drže okrenute prema drugim suigračima, tako da ne vide vlastite karte, no vide sve karte svojih suigrača. Na svom potezu igrači mogu dati trag o boji ili vrijednosti karata drugom igraču (npr. „Ove dvije karte su ti crvene" ili „Ova karta ti je jedina vrijednosti 3"), odbaciti vlastitu kartu i vuči novu ili pokušati odigrati kartu (započeti novi niz kartom vrijednosti 1 ili nastaviti postojeći niz karata određene boje) te zatim vuči novu.

Na početku igre dostupno je osam žetona koje treba preokrenuti prilikom davanja tragova, no žetoni postaju ponovno dostupni odbacivanjem karata te uspješnim dovršetkom skupa karata u nekoj od pet boja.

[2] Japanska riječ za vatromet.

Slika 2.17: Potpun vatromet u svim bojama (vlastita fotografija)

Ako igrači tijekom igre tri puta pokušaju odigrati kartu koju ne mogu pridodati postojećem skupu ili započeti novi, odmah gube igru te je publika razočarana neuspjelim vatrometom. Uspiju li postići cilj igre i dovršiti svih pet skupova u svim bojama, publika je oduševljena te je vatromet potpuni uspjeh. Ako se pak povuku sve karte iz špila, igrači igraju još samo jedan krug te se njihov uspjeh mjeri zbrojem vrijednosti svih karata na vrhu pet skupova.

Kao kod „Bohnanze" i ovdje nakon objašnjavanja pravila možemo tražiti učenike da odrede koliko ukupno ima karata. Račun je jednostavan:

$$5 \cdot (3 + 3 \cdot 2 + 1) = 5 \cdot 10 = 50$$

Također im možemo zadati nekoliko zadataka iz vjerojatnosti:

1. Koja je vjerojatnost da iz punog špila izvučemo crvenu kartu?

   Budući da karata svake boje ima 10, tražena vjerojatnost je $\frac{10}{50} = \frac{1}{5} = 20\%$.

2. Koja je vjerojatnost da iz punog špila izvučemo kartu vrijednosti 1?

   Postoje tri karte vrijednosti 1 u svakoj od pet boja pa je ukupno 15 takvih karata. Stoga je tražena vjerojatnost $\frac{15}{50} = \frac{3}{10} = 30\%$.

3. Koja je vjerojatnost da iz punog špila izvučemo žutu kartu vrijednosti 4? Takvih karata je samo dvije pa je tražena vjerojatnost $\frac{2}{50} = \frac{1}{25} = 4\%$.

Pogađanje boje šešira

Osim standardnog načina igranja, učenike je moguće naučiti igrati i po unaprijed dogovorenoj strategiji koja u igri za pet igrača rezultira prosječnim uspjehom od 23 boda [19]. Prije nego objasnimo tu strategiju potrebno je shvatiti njenu matematičku pozadinu.

Učenicima se može zadati sljedeća zagonetka: Zamislimo petero ljudi na koje se nasumično stave plavi ili crveni šeširi. Nitko od njih ne može vidjeti boju svog šešira, no vide boje šešira ostalih četvero. Zatim redom pogađaju boju svog šešira. Jasno, ako svatko od njih nasumično pogađa boju svog šešira, vjerojatnost za točan pogodak je 50%. Drugim riječima, u prosjeku će 2.5 ljudi točno pogoditi boje svojih šešira. Može li se osmisliti strategija kojom bi povećali uspjeh pohađanja?

Srž te strategije leži u kodiranju odgovora prvog igrača. Ako na drugima vidi paran broj crvenih šešira reći će da je njegov šešir crven, no ako vidi neparan broj crvenih šešira reći će da je njegov šešir plav. Svi ostali igrači na temelju toga i šešira koje oni vide lako mogu zaključiti koje boje je njihov šešir.

Prikažimo jednu takvu situaciju slikom 2.18.

Slika 2.18: Moguća situacija iz zagonetke s plavim i crvenim šeširima

Prvi igrač vidi dva crvena šešira, što je paran broj, stoga pogađa da je njegov šešir crven. Iako je pogriješio, svojim odgovorom je osigurao da svi ostali igrači točno pogode njihove boje šešira. Drugi igrač vidi samo jedan crveni šešir pa zaključuje da njegov šešir mora biti crvene boje da bi ukupan broj crvenih šešira bio paran. Treći igrač vidi dva crvena šešira pa zaključuje da njegov šešir ne smije biti crven jer bi ih tada bio neparan broj, stoga mora biti plavi. Četvrti igrač prati istu logiku razmišljanja kao treći, a peti igrač kao drugi.

Prateći ovu strategiju prvi igrač će točno pogoditi boju svog šešira u 50% pokušaja, a svi ostali će uvijek biti točni. Dakle, prosječno će 4.5 osoba točno pogoditi boje svojih šešira, što je značajno poboljšanje u odnosu na nasumično pogađanje [19].

U dodatnoj nastavi prirodoslovno-matematičke gimnazije može se predstaviti poopćena zagonetka čija se strategija rješavanja može primijeniti u igri Hanabi. U ovoj verziji na svaku od pet osoba nasumično se stavi šešir u jednoj od osam boja.

Ideja strategije rješavanja slična je zagonetki sa samo dvije boje. Prvo označimo brojevima 0–7 moguće boje, npr. 0 je crvena, 1 je plava, 2 je žuta, 3 je ljubičasta, 4 je narančasta, 5 je zelena, 6 je smeđa i 7 je roza.

Prvi igrač zbroji oznake boja koje vidi na šeširima ostalih igrača te taj broj želi komunicirati ostalim igračima. Nastaje problem ako je dobiveni zbroj veći od 7 jer igrač jedino smije reći neku od mogućih boja.

Kako bi se ovaj problem zaobišao, koristi se kongruencija modulo 8, tj. prvi igrač odredi ostatak pri dijeljenju dobivenog zbroja brojem 8 te pogađa boju čija oznaka odgovara tako dobivenom broju. Oduzmu li ostali igrači od tog broja zbroj oznaka boja na šeširima koje oni vide (osim šešira prvog igrača), dobit će upravo boju njihovog šešira.

Prikažimo situaciju iz ove mozgalice slikom 2.19.

Slika 2.19: Moguća situacija iz zagonetke s osam mogućih boja šešira

Prvi igrač vidi zeleni (5), plavi (1), žuti (2) i ljubičasti (3) šešir. Zbroj tih oznaka je 11, što ne odgovara nekoj od boja. Stoga računa ostatak pri dijeljenju broja 11 brojem 8, što je 3. Kraće zapisano, vrijedi $11 \equiv 3 \pmod 8$. Oznaka 3 odgovara ljubičastoj boji pa (pogrešno) pogađa da je njegov šešir ljubičaste boje, no time poručuje ostalim igračima da je rezultat njegovog računa 3.

Drugi igrač na ostalima (osim prvog) vidi plavi, žuti i ljubičasti šešir, čiji je zbroj oznaka 6. Oduzme li od broja 3 dobiveni zbroj 6, dobit će -3. Budući da je to negativan broj, može mu pridodati 8 kako bi dobio 5, oznaku boje svog šešira. Drugačije zapisano, vrijedi $3 - 6 = -3 \equiv 5 \pmod 8$.

Analogni postupak provode i ostali igrači.

$$\begin{aligned} &3.\text{ igrač:} && 3 - 10 = -7 \equiv 1 \pmod 8 \\ &4.\text{ igrač:} && 3 - 9 = -6 \equiv 2 \pmod 8 \\ &5.\text{ igrač:} && 3 - 8 = -5 \equiv 3 \pmod 8 \end{aligned}$$

Primjenom ove strategije vjerojatnost da prvi igrač točno pogodi boju svog šešira iznosi samo $\frac{1}{8} = 0.125$, no svi ostali igrači će uvijek točno odrediti boje svojih šešira pa će prosječno 4.125 osoba dati točan odgovor (za razliku od samo 0.625 kad bi svi nasumično pogađali) [19].

Strategija preporučenog poteza

Generalnu ideju opisane strategije pogađanja boje šešira moguće je primijeniti prilikom igranja Hanabija. „Šeširi" su karte koje igrači drže, a njihov sadržaj je „boja". Postoji više takvih strategija, no većina je namijenjena za primjenu u računalnim programima te nije prikladna za ljudske igrače. Međutim, jedna strategija je relativno lagana za naučiti te se može iskoristiti već kod školaraca [19].

U ovoj strategiji za pet igrača, trag koji se daje nekom igraču o boji ili vrijednosti njegovih karata kodira se da bi se njime preporučio potez svim ostalim igračima. Označimo četiri karte u ruci igrača oznakama k_1, k_2, k_3, k_4. Kodiranje se odvija u dva koraka:

1. Preporučeni potez igraču označuje se brojem 0–7 na sljedeći način:

   0 odigraj kartu k_1,

   1 odigraj kartu k_2,

   2 odigraj kartu k_3,

   3 odigraj kartu k_4,

   4 odbaci kartu k_1,

   5 odbaci kartu k_2,

   6 odbaci kartu k_3,

   7 odbaci kartu k_4.

   Napomena: Odbacivanjem karte indeksi preostalih karata umanjuju se za 1, a novo vučena karta postaje k_4.

2. Kao kod strategije pogađanja boja šešira, brojevi koji odgovaraju preporukama za svakog suigrača se zbroje te se promatra ostatak pri dijeljenju brojem 8. Ovisno o dobivenom rezultatu aktivni igrač daje trag nekom od suigrača na sljedeći način:

   0 trag o boji karata igraču koji je prvi na potezu nakon aktivnog,

   1 trag o boji karata igraču koji je drugi na potezu nakon aktivnog,

   2 trag o boji karata igraču koji je treći na potezu nakon aktivnog,

   3 trag o boji karata igraču koji je četvrti na potezu nakon aktivnog,

   4 trag o vrijednosti karata igraču koji je prvi na potezu nakon aktivnog,

   5 trag o vrijednosti karata igraču koji je drugi na potezu nakon aktivnog,

   6 trag o vrijednosti karata igraču koji je treći na potezu nakon aktivnog,

   7 trag o vrijednosti karata igraču koji je četvrti na potezu nakon aktivnog.

Ovdje je bitno napomenuti kako sami kontekst traga (koja boja ili koja vrijednost karte) nema značenja na samu strategiju, već se trag koristi isključivo za potrebe kodiranja preporučenog poteza svim suigračima.

Da bi se objasnio algoritam biranja preporučenog poteza prvo ćemo definirati tri moguće vrste karata u određenom trenutku tijekom igre:

Igrive karte: Mogu se pridodati postojećim skupovima ili započeti novi skup.

Neiskoristive karte: Jednake su već odigranim kartama pa se mogu odbaciti.

Neophodne karte: Karte čije jednake kopije su odbačene te je bez njih nemoguće postići savršen rezultat; ne smiju se odbaciti.

Preporučeni potez određuje se prema sljedećem prioritetu:

1. Odigrati igrivu kartu vrijednosti 5, najmanjeg indeksa.
2. Odigrati igrivu kartu najmanje vrijednosti, najmanjeg indeksa.
3. Odbaciti neiskoristivu kartu najmanjeg indeksa.
4. Odbaciti kartu najveće vrijednosti koja nije neophodna, najmanjeg indeksa.
5. Odbaciti kartu k_1.

Da bi igrači znali trebaju li dati trag, odigrati ili odbaciti kartu, a pri tome izbjeći maksimalne tri pogreške ili odbacivanje neophodne karte, potrebno je koristiti sljedeći algoritam koji određuje kako aktivni igrač treba postupiti:

1. Odigrati kartu ako je zadnji preporučeni potez bio odigrati kartu, a od te preporuke nitko nije odigrao kartu.
2. Odigrati kartu ako je zadnji preporučeni potez bio odigrati kartu, od te preporuke je odigrana točno jedna karta te je napravljeno manje od dvije pogreške.
3. Dati trag ako ima dostupnih žetona za to.
4. Odbaciti kartu ako je zadnji preporučeni potez bio odbaciti kartu.
5. Odbaciti kartu k_1.

Slika 2.20: Moguća situacija tijekom igre

Na slici 2.20 prikazana je situacija iz igre. Aktivni igrač (u donjem dijelu slike) treba dati trag ostalim suigračima. Preporučeni potezi su sljedeći (u smjeru kretanja kazaljke na satu):

igrač 1: odigrati crvenu kartu vrijednosti 3, tj. kartu k_2 - kôd 1

igrač 2: odbaciti crvenu kartu vrijednosti 1, tj. kartu k_1 - kôd 4

igrač 3: odigrati bijelu kartu vrijednosti 2, tj. kartu k_3 - kôd 2

igrač 4: odigrati crvenu kartu vrijednosti 3, tj. kartu k_1 - kôd 0

Zbrajanjem kôdova dobiva se zbroj 7. Dakle, aktivni igrač treba dati trag o vrijednosti karata igraču 4, u donjem desnom uglu slike. Taj trag primjerice može biti „Karta k_3 ti je vrijednosti 5".

Ostali igrači dekodiranjem tog traga otkrivaju broj 7. Kao i pri strategiji pogađanja boja šešira, oduzimanjem zbroja kôdova ostalih igrača (osim aktivnog) od broja 7 dobivaju kôd s preporučenim potezom namijenjenim upravo njima:

igrač 1: $7 - 6 = 1$, treba odigrati k_2,

igrač 2: $7 - 3 = 4$, treba odbaciti k_1,

igrač 3: $7 - 5 = 2$, treba odigrati k_3,

igrač 4: $7 - 7 = 0$, treba odigrati k_1.

Pretpostavimo da su svi žetoni za davanje tragova iskorišteni te još nije bilo grešaka. Prateći algoritam postupanja, igra će se nastaviti na sljedeći način: igrač 1 će odigrati k_2, igrač 2 će odbaciti k_1 i preokrenuti jedan žeton za tragove, igrač 3 će odigrati k_3, a igrač 4 će iskoristiti nedugo preokrenuti žeton i dati novi trag.

Iako je na prvi pogled ova strategija komplicirana, uz malo vježbe dodaje novu dimenziju igranja Hanabija te pretvara kaos pamćenja danih i primljenih tragova u uređeni slijed koraka. Možda se time gubi element spontanosti, ali se dodaje izazov točnog praćenja koraka i oduševljenje učinkovitošću metode — naravno, onima koji imaju sklonost takvom analitičkom načinu razmišljanja.

2.6 Catan

Slika 2.21: Društvena igra „Catan" (vlastita fotografija)

Za razliku od prethodnih igara, „Catan" je složenija igra, no unatoč tome ubraja se u obiteljske igre te se preporučuje početnicima u svijetu društvenih igara. Što je „Monopoly" za klasične društvene igre, to je „Catan" za moderne društvene igre — klasik koji se igra već generacijama (slika 2.21). „Catan" je po svom izlasku bio inovativan u raznim pogledima: koristi se modularna ploča za igranje što uvelike doprinosi njenoj ponovljivosti, faktor sreće je umanjen, a plastične komponente zamijenjene su kvalitetno izrađenim drvenim.

Igraća ploča predstavlja otok Catan te je sastavljena od devetnaest šesterokutnih polja koja predstavljaju različite krajolike. Svaki krajolik proizvodi jednu vrstu resursa (sirovine) kao što je prikazano na slici 2.22: njiva — žito, brežuljci — glinu, gorje — rudu, šuma — drvo, pašnjak — vunu. Postoji i jedno polje pustinje koje ne proizvodi resurse.

Slika 2.22: Krajolici otoka Catana i resursi koje proizvode (preuzeto iz pravila igre)

Igrači koloniziraju nenaseljen otok gradnjom cesta, naselja i gradova. Na početku svakog poteza sakupljaju resurse koje im daje otok. U toj gradnji pomažu im i pregovaračke vještine pri trgovini s drugim igračima.

Naselja i gradovi predstavljaju bodove: svako naselje vrijedi 1 bod, a svaki grad 2 boda. Moguće je osvojiti po dva dodatna boda za najdužu neprekinutu cestu te za najveću vitešku moć. Pobjednik je prvi igrač koji tijekom svog kruga sakupi barem 10 bodova.

Objasnit ćemo pravila bitna za strategije igranja koje ćemo u nastavku razraditi.

Na samom početku igraća ploča je prazna. Svaki igrač na željeno mjesto postavlja jedno naselje i cestu koja dodiruje to naselje, počevši od prvog igrača te nastavljajući u smjeru kazaljke na satu. Pri tome treba paziti da su naselja međusobno udaljena barem za dvije stranice šesterokutnog polja. Zatim svi igrači ponovno čine isto, no ovaj put počevši od posljednjeg igrača te nastavljajući u smjeru suprotnom od kazaljke na satu.

Slika 2.23: Prikaz raspodjele naselja i cesta nakon početne postave (vlastita fotografija)

Svaki potez započinje sakupljanjem resursa. Igrač koji je na redu baca dvije igraće kocke i zbraja dobivene rezultate. Tako dobiveni zbroj određuje polja koja proizvode resurse. Zato se na svakom polju nalaze okrugli žetoni s brojevima od 2 do 12 (izuzev broja 7). Samo igrači koji imaju naselje uz polje na kojem je žeton s dobivenim zbrojem dobivaju karticu s odgovarajućim resursom.

Primjerice, ako bačene kocke u zbroju daju 8, onda na primjeru sa slike 2.23 bijeli igrač dobiva karticu rude, a crveni i plavi igrač dobivaju karticu drva. Ako pak bačene kocke u zbroju daju 4, onda će plavi igrač dobiti karticu žita, a narančasti igrač kartice žita i vune.

Igrač čiji je potez zatim ima mogućnost razmjene kartica resursa s drugim igračima ili bankom, kako bi sakupio potrebne resurse za gradnju. Potom, ako želi i ima dovoljno resursa može graditi ceste, naselja i gradove ili kupiti karticu razvoja (slika 2.24).

Slika 2.24: Cjenik građevina i kartica razvoja (preuzeto iz pravila igre)

Iako se tijekom igranja koriste dvije kocke, one ne služe za kretanje kao u mnogim drugim igrama, već određuju polja koja proizvode resurse. Zbroj rezultata bačenih kocaka ne ovisi o pukoj sreći, već prati model vjerojatnosti koji je pogodan za analizu s učenicima.

Iz tablice 2.25 jasno je vidljivo da postoji šest mogućnosti da dobiveni zbroj bude jednak broju 7, a samo po jedna mogućnost za zbrojeve 2 i 12. Prema tome, vjerojatnosti

		Druga kocka					
	+	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Prva kocka	**1**	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Slika 2.25: Mogući zbrojevi prilikom bacanja dviju kocaka

mogućih zbrojeva lagano se odrede kao omjer povoljnih i mogućih događaja [13]:

$$\begin{aligned} P(2) = P(12) &= \frac{1}{36}, \\ P(3) = P(11) &= \frac{2}{36}, \\ P(4) = P(10) &= \frac{3}{36}, \\ P(5) = P(9) &= \frac{4}{36}, \\ P(6) = P(8) &= \frac{5}{36}, \\ P(7) &= \frac{6}{36}. \end{aligned}$$

U kontekstu igre, izračunate vjerojatnosti ukazuju na to da će polja na kojima su žetoni bliži broju 7 češće proizvoditi resurse. Stoga je strateški dobro početna naselja graditi pored polja na kojima su žetoni 6 i 8, zbog čega su ti žetoni i naglašeni crvenom bojom.

A sad malo *Catanbinatorike* [11]: Prije samog početka igre potrebno je složiti igraću ploču postavljanjem 19 šesterokutnih polja: četiri pašnjaka, četiri šume, četiri njive, tri brežuljka, tri gorja i jedna pustinja. Polja se postavljaju unutar okvira koji predstavlja more, na čijem rubu su luke koje služe za povoljniju trgovinu resursa s bankom. Kako bi igra bila izazovna tijekom svakog ponovnog igranja, šesterokutna polja slažu se nasumičnom raspodjelom. Srednjoškolcima se može postaviti sljedeće pitanje:

Na koliko načina se unutar fiksirano postavljenog okvira mogu složiti šesterokutna polja s krajolicima (bez žetona s brojevima na njima)?

Učenici bi za rješenje mogli ponuditi odgovor 19!. Naime, za prvo polje postoji 19 mogućnosti, za drugo polje preostaje 18 mogućnosti, za treće 17... Stoga je račun:

$$19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 19! = 121\ 645\ 100\ 408\ 832\ 000.$$

Međutim, polja s jednakim krajolicima se u kontekstu igre ne razlikuju. Primjerice, sva četiri polja s pašnjacima na jednak način proizvode vunu pa je za lokaciju polja s pašnjakom svejedno koje od tih polja će tamo biti postavljeno. Stoga se postavljanje ploče može razmatrati ovako:

Prvo se odrede četiri lokacije za polja pašnjaka, što se može napraviti na $\binom{19}{4}$ načina. Potom se od preostalih 15 polja odrede četiri lokacije za polja šuma, što se može napraviti na $\binom{15}{4}$ načina. Zatim se na analogni način odrede lokacije za njive, brežuljke i gorja, a na preostalo mjesto se postavi polje pustinje. Stoga je račun:

$$\binom{19}{4}\binom{15}{4}\binom{11}{4}\binom{7}{3}\binom{4}{3} = 244\ 432\ 188\ 000.$$

Alternativno, do istog rezultata može se doći tako da 19! podijelimo s brojem mogućih raspodjela polja koja proizvode isti resurs. Tad je račun:

$$\frac{19!}{4!\,4!\,4!\,3!\,3!} = \frac{121\ 645\ 100\ 408\ 832\ 000}{497\ 664} = 244\ 432\ 188\ 000.$$

Dakle, postoji 244 432 188 000 načina da se postavi ploča za Catan (uz navedene uvjete)!

Odabir lokacija za početna naselja od odlučujuće je važnosti za uspjeh u ovoj igri. S obzirom na to da je izračunati broj mogućnosti na koji se igraća ploča može složiti u stotinama milijardi, važno je imati strategiju za postavljanje početnih naselja.

Razvoj takvih strategija predstavlja zanimljiv problem za analizu s učenicima. U nastavku ćemo pisati o strategijama koje su razumljive učenicima osnovne škole, a potom i složenijim strategijama primjerenim učenicima srednjih škola [12].

Za potrebe razvoja tih strategija koristit će se nasumično generirana ploča prikazana na slici 2.26 na kojoj su slovima označene sve moguće lokacije naselja. Parovi lokacija s istim nazivom imaju jednake vjerojatnosti proizvodnje resursa. Nadalje, polja koja proizvode resurse ćemo kraće označiti resursom kojeg proizvode i vrijednošću žetona na njima, npr. drvo-6.

Ako se svi resursi razmatraju kao jednako vrijedni, moguće je o lokacijama početnih naselja odlučiti isključivo na temelju broja susjednih polja koja proizvode resurse pa su lokacije pored tri polja bolje od lokacija pored dvaju ili samo jednog polja.

Strategija maksimalnog broja kartica resursa

Razrađenija strategija bi bila odabrati lokacije početnih naselja na temelju prosječnog broja kartica resursa koje igrač može očekivati prilikom svakog bacanja kocaka. Zbroje li se vjerojatnosti dobivanja resursa sa svake od susjednih polja, svakoj lokaciji moguće je pripisati njenu „vrijednost".

Na primjer, lokacija J dodiruje polja ruda-3, drvo-5 i glina-11. Stoga je vrijednost te lokacije:

$$P(3) + P(5) + P(11) = \frac{2}{36} + \frac{4}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36}.$$

Slika 2.26: Uzorak igraće ploče generiran na alexbeals.com/projects/catan

Zanimljivo, ova strategija otkriva da su određene lokacije koje dodiruju samo dva polja bolje od nekih lokacija koje dodiruju tri polja pa je tako lokacija u bolji izbor od lokacije Q. Vrijednosti svih lokacija prema ovoj strategiji prikazane su u prvom stupcu na slici 2.27.

Učenicima je bitno naglasiti razliku između vjerojatnosti da određena lokacija proizvede resurs i njene očekivane vrijednosti, koja je jasno vidljiva na lokacijama koje dodiruju dva polja s jednakim žetonima. Primjerice, vjerojatnost da se prilikom bacanja kocaka dobije resurs na lokaciji R iznosi $\frac{3}{36} + \frac{2}{36} = \frac{5}{36}$ (jer su oba polja pašnjaka označena istim žetonom), dok je očekivani broj kartica resursa na istoj lokaciji $2 \cdot \frac{3}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36}$.[3]

Strategija obilja resursa

Relativna vrijednost pojedine vrste resursa ipak ovisi o njegovoj dostupnosti na igraćoj ploči. Postoje četiri pašnjaka, četiri šume i četiri njive pa se svakom od tih polja može

[3]Kod diskretnih raspodjela s konačno mnogo mogućnosti, kao što je ova, očekivana vrijednost jednaka je zbroju (po svim mogućim ishodima) umnožaka vjerojatnosti ishoda s pripadnom vrijednošću dobitka.

pridružiti koeficijent $\frac{1}{4}$. Također, postoje tri brežuljka i tri gorja, stoga se svakom od tih polja može pridružiti koeficijent $\frac{1}{3}$.

Na primjer, vrijednost lokacije J sada se računa na sljedeći način:

$$V(J) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{36} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{36} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{36} \approx 0.065.$$

Primjenom ove strategije jasno se vidi da je lokacija o bolji izbor od lokacije k, iako se nalaze uz polja jednakih vjerojatnosti prinosa resursa. Međutim, lokacija o nalazi se uz polja resursa koji su općenito manje zastupljeni (ruda i glina).

$$V(o) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{36} + \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{36} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{36} \approx 0.102,$$

$$V(k) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{36} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{36} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{36} \approx 0.081.$$

Vrijednosti svih lokacija prema ovoj strategiji vidljive su u srednjem stupcu na slici 2.27.

Strategija rijetkosti resursa

Prethodnu strategiju moguće je dodatno razraditi razmatrajući koliko je određeni resurs (ne)dostupan u igri, ovisno o konfiguraciji ploče. Ako su na poljima pašnjaka žetoni 4, 6, 8 i 9, vune zasigurno neće manjkati, stoga polje vuna-9 nije od presudne važnosti. S druge strane, ako se na poljima pašnjaka nalaze žetoni 2, 3, 9 i 12, može se očekivati da će vuna biti rijedak resurs pa će i polje vuna-9 igračima biti od značajno većeg interesa.

Na promatranoj ploči sa slike 2.26 žito je najčešći resurs (proizvest će se u $\frac{16}{36}$ bacanja), a ruda i glina su najrjeđi resursi (proizvest će se u $\frac{9}{36}$, odnosno $\frac{8}{36}$ bacanja dviju kocaka).

Kako bi to postigli može se svakom polju dodijeliti koeficijent na temelju udjela tog resursa koje promatrano polje proizvede tijekom igre. Zatim se za svaku lokaciju njena vrijednost odredi kao zbroj koeficijenata polja koje dodiruje.

Primjena ove strategije na konkretnom primjeru lokacije J koja dodiruje polja ruda-3, drvo-5 i glina-11 izgleda ovako:

$$k(\text{ruda} - 3) = \frac{P(3)}{P(3) + P(11) + P(8)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{2}{36} + \frac{2}{36} + \frac{5}{36}} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{9}{36}} = \frac{2}{9},$$
$$k(\text{drvo} - 5) = \frac{P(5)}{P(5) + P(2) + P(6) + P(12)} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{4}{36} + \frac{1}{36} + \frac{5}{36} + \frac{1}{36}} = \frac{\frac{4}{36}}{\frac{11}{36}} = \frac{4}{11},$$
$$k(\text{glina} - 11) = \frac{P(11)}{P(11) + P(9) + P(3)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{2}{36} + \frac{4}{36} + \frac{2}{36}} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{8}{36}} = \frac{1}{4},$$
$$V(J) = \frac{2}{9} + \frac{4}{11} + \frac{1}{4} \approx 0.836.$$

Vrijednosti svih lokacija sa slike 2.26, rangirane po strategiji maksimalnog broja kartica resursa, strategiji obilja resursa i strategiji rijetkosti resursa prikazane su na slici 2.27.

Vidljivo je da određene lokacije značajno gube ili dobivaju na vrijednosti, ovisno o tome koja strategija se razmatra. Lokacije K i k izjednačene su po strategiji maksimalnog broja kartica resursa i strategiji obilja resursa, međutim lokacija K je čak četiri mjesta iznad lokacije k po strategiji rijetkosti resursa. Razlog tome su polja žito-6 i žito-5 uz lokaciju k, koja usprkos velikoj vjerojatnosti prinosa imaju manji koeficijent, što je posljedica obilja žita kao što je ranije naglašeno.

Svakom razrađenijom strategijom povećala se i diferencijacija vrijednosti pojedinih lokacija. Tako su strategijom maksimalnog broja kartica resursa lokacije razvrstane u 12 razina vrijednosti, strategijom obilja resursa taj broj se udvostručio, a strategijom rijetkosti resursa doseglo se 41 različitih vrijednosti, odnosno ima samo sedam izjednačenih parova.

Strategija prosječnih susjeda

Iako je iskoristivost početnih naselja izrazito bitna, tijekom nastavka igre potrebno je izgraditi nova naselja u blizini postojećih. Zato je logično razmisliti i o vrijednostima potencijalnih susjednih lokacija, udaljenih dvije stranice šesterokutnog polja od početne lokacije. Budući da će se susjedna naselja izgraditi tek tijekom igre, njihovu vrijednost (dobivenu strategijom rijetkosti resursa) ćemo upola umanjiti.

Nadalje, igrač nikada neće izgraditi naselja na svim mogućim susjednim lokacijama, stoga nema smisla razmatrati zbroj vrijednosti svih susjednih lokacija, već ćemo u obzir uzeti njihovu prosječnu vrijednost. Dobivena formula glasi:

$$V(\text{lokacije}) + \frac{1}{2}\,\overline{V}(\text{susjedi}).$$

Primjenom ove strategije vrijednost lokacije e porasla je za pet mjesta, zahvaljujući odličnim susjednim lokacijama poput o i g.

Lokacija	max broj kartica
L	12/36
V	12/36
K	11/36
f	11/36
k	11/36
n	11/36
o	11/36
g	10/36
l	10/36
m	10/36
U	9/36
W	9/36
a	9/36
p	9/36
u	9/36
H	8/36
J	8/36
M	8/36
R	8/36
b	8/36
D	7/36
e	7/36
j	7/36
I	7/36
Q	7/36
c	7/36
Z	6/36
G	6/36
T	6/36
d	6/36
s	6/36
B	5/36
E	5/36
S	5/36
h	5/36
i	5/36
v	5/36
P	4/36
X	4/36
q	4/36
t	4/36
A	3/36
F	3/36
N	3/36
C	2/36
r	2/36
O	1/36
Y	1/36

Lokacija	obilje
o	0,101852
n	0,092593
f	0,090278
L	0,083333
V	0,083333
p	0,083333
K	0,081019
k	0,081019
g	0,078704
l	0,074074
m	0,074074
u	0,074074
J	0,064815
U	0,062500
W	0,062500
a	0,062500
R	0,060185
H	0,060185
I	0,057870
M	0,055556
b	0,055556
D	0,053241
e	0,053241
j	0,053241
Q	0,048611
c	0,048611
T	0,046296
d	0,046296
s	0,046296
v	0,046296
h	0,043981
Z	0,041667
G	0,041667
B	0,039352
S	0,039352
q	0,037037
E	0,034722
i	0,034722
P	0,027778
X	0,027778
t	0,027778
A	0,020833
F	0,020833
N	0,020833
C	0,018519
r	0,018519
O	0,006944
Y	0,006944

Lokacija	rijetkost
o	1,277778
f	1,176768
p	1,055556
g	1,045455
V	1,032468
n	1,027778
K	0,943001
L	0,935065
J	0,835859
U	0,818182
k	0,812500
u	0,805556
W	0,759740
l	0,750000
m	0,722222
R	0,678571
e	0,676768
I	0,659722
H	0,651786
a	0,617695
T	0,613636
h	0,590909
D	0,579365
M	0,571429
v	0,555556
b	0,526786
Q	0,519481
q	0,500000
s	0,500000
d	0,472222
S	0,464286
c	0,464286
B	0,409722
Z	0,403409
G	0,401786
E	0,357143
i	0,312500
j	0,312500
P	0,305195
X	0,305195
r	0,250000
t	0,250000
C	0,222222
F	0,214286
N	0,214286
A	0,187500
O	0,090909
Y	0,090909

Slika 2.27: Vrijednosti lokacija koristeći opisane strategije

Strategija najboljeg susjeda

Igrač koji preferira razvijati postojeća naselja u gradove izgradit će samo poneko dodatno naselje tijekom cijele igre. Za takvog igrača bolja strategija je razmotriti samo najbolju susjednu lokaciju, što se može napraviti po sljedećoj formuli:

$$V(\text{lokacije}) + \frac{1}{2}\,V(\text{najbolja susjedna lokacija}).$$

Vrijednosti svih lokacija prema strategijama susjeda prikazane su na slici 2.28.

Razlika tih strategija jasno je vidljiva kod lokacije g. Iako je sâma lokacija g rangirana na odličnom 4. mjestu po strategiji rijetkosti resursa, pala je na (i dalje vrlo dobro) 6. mjesto po strategiji prosječnih susjeda. Naime, neki od njenih susjeda su na obali pa graniče s manjim brojem polja, dok je susjedna lokacija e uz pustinju koja ne daje resurse, stoga je i prosječna vrijednost susjednih lokacija mala. Međutim, njena najbolja susjedna lokacija je o, ujedno i najbolja lokacija na ploči, pa je po strategiji najboljeg susjeda lokacija g završila na izvrsnom 3. mjestu.

Razmatrati i kvalitetu susjednih lokacija je potencijalno odlučujući faktor prilikom izbora lokacije početnog naselja. Sve buduće ceste i naselja moraju biti povezane s početnim lokacijama pa se ploča ubrzo popuni, posebice ako ima četvero igrača. Upravo zbog toga je teško graditi nova naselja na većim udaljenostima od postojećih.

Primjenom različitih strategija moguće je razviti posve drugačiji dojam vrijednosti određenih lokacija. Ranije spomenuta lokacija k je po strategiji maksimalnog broja kartica resursa dijelila 2. mjesto, no svakom sljedećom strategijom je gubila na vrijednosti, sve dok nije završila na 18. mjestu po strategiji najboljeg susjeda.

Opisane strategije nisu savršene, niti potpuno izvedive u stvarnoj igri. Igrači razvijaju vlastite strategije na temelju prethodnog iskustva i osobnog stila igranja. Jedni pokušavaju imati naselja uz svih pet resursa, dok drugi traže lokacije koje će pokriti vrijednosti što više različitih zbrojeva. Neki igrači inzistiraju na poljima koja proizvode drvo i glinu da bi gradili ceste i naselja, dok će se pojedini igrači fokusirati na žito i kamen da bi što prije razvili naselja u gradove. Razne preferirane taktike mogu se jako razlikovati, no u primjeni svake od njih iskoristivi su elementi neke od strategija koje smo analizirali, barem prilikom procjene željenih lokacija. Izračune smo napravili proračunskim tablicama prikazanim slikom 2.29, no osnovne ideje primjenjive su snalažljivom mentalnom aritmetikom.

Lokacija	prosječni susjedi
o	1,636574
f	1,570467
p	1,474432
n	1,382786
V	1,378758
g	1,369048
L	1,232113
K	1,231053
U	1,205177
u	1,187500
J	1,157392
e	1,106421
m	1,100296
W	1,078583
k	1,051392
l	0,986607
v	0,986111
T	0,984871
h	0,976281
R	0,933765
I	0,913615
M	0,901154
D	0,896589
q	0,871212
H	0,871047
d	0,869205
a	0,839692
s	0,823785
c	0,807735
S	0,782979
b	0,770277
Q	0,715436
B	0,691536
X	0,647727
E	0,646585
G	0,630659
Z	0,584619
t	0,572917
j	0,553774
i	0,533888
P	0,528815
r	0,520833
C	0,490643
N	0,482143
A	0,401455
Y	0,399351
F	0,395495
O	0,296807

Lokacija	najbolji susjed
o	1,800505
f	1,704545
g	1,684343
p	1,643939
n	1,616162
V	1,555195
K	1,459235
u	1,444444
U	1,406566
m	1,361111
L	1,352994
W	1,348124
e	1,315657
J	1,303391
l	1,263889
v	1,194444
h	1,179293
k	1,173611
q	1,138889
I	1,131223
T	1,129870
M	1,087662
H	1,069715
d	1,060606
D	1,046898
a	1,023945
R	1,008433
s	0,906250
b	0,901786
S	0,882215
c	0,870536
Q	0,845373
E	0,828644
X	0,827922
B	0,827652
t	0,763889
G	0,741071
i	0,718750
C	0,693723
j	0,687500
N	0,681818
Z	0,666802
r	0,656250
P	0,644481
Y	0,613636
F	0,540179
A	0,517361
O	0,399756

	max broj kartica	obilje	rijetkost	prosječni susjedi	najbolji susjed
1.	L	o	o	o	o
2.	V	n	f	f	f
3.	K	f	p	p	g
4.	f	L	g	n	p
5.	k	V	V	V	n
6.	n	p	n	g	V
7.	o	K	K	L	K
8.	g	k	L	K	u
9.	l	g	J	U	U
10.	m	l	U	u	m
11.	U	m	k	J	L
12.	W	u	u	e	W
13.	a	J	W	m	e
14.	p	U	l	W	J
15.	u	W	m	k	l
16.	H	a	R	l	v
17.	J	R	e	v	h
18.	M	H	I	T	k
19.	R	I	H	h	q
20.	b	M	a	R	I
21.	D	b	T	I	T
22.	e	D	h	M	M
23.	j	e	D	D	H
24.	I	j	M	q	d
25.	Q	Q	v	H	D
26.	c	c	b	d	a
27.	Z	T	Q	a	R
28.	G	d	q	s	s
29.	T	s	s	c	b
30.	d	v	d	S	S
31.	s	h	S	b	c
32.	B	Z	c	Q	Q
33.	E	G	B	B	E
34.	S	B	Z	X	X
35.	h	S	G	E	B
36.	i	q	E	G	t
37.	v	E	i	Z	G
38.	P	i	j	t	i
39.	X	P	P	j	C
40.	q	X	X	i	j
41.	t	t	r	P	N
42.	A	A	t	r	Z
43.	F	F	C	C	r
44.	N	N	F	N	P
45.	C	C	N	A	Y
46.	r	r	A	Y	F
47.	O	O	O	F	A
48.	Y	Y	Y	O	O

Slika 2.28: Vrijednosti lokacija koristeći strategije susjeda i konačna ljestvica

„Catan" je naoko jednostavna obiteljska igra, no njen potencijal za matematičko istraživanje vidljiv je već prilikom razmatranja mogućnosti i strategija za prve dvije odluke. Odličan je primjer društvene igre koja se može iskoristiti za primjenu matematičkih načela kombinatorike, osnovne vjerojatnosti i očekivanih vrijednosti na različitim razinama obrazovanja. Vjerujemo da bi njeno uključivanje u nastavu matematike motiviralo učenike prilikom obrade i uvježbavanja odgovarajućeg gradiva te bi se napravio odmak od suhoparnih zadataka iz udžbenika.

Lokacija	Polje1	KoefObilje1	Žeton1	KoefRijetkost1	Vj1	Polje2	KoefObilje2	Žeton2	KoefRijetkost2	Vj2	Polje3	KoefObilje3	Žeton3	KoefRijetkost3	Vj3	max broj kartica	obilje	rijetkost	prosječni susjedi	najbolji susjed
A	žito	1/4	10	0,1875	3/36											3/36	0,020833	0,187500	0,401455	0,517361
B	žito	1/4	10	0,1875	3/36	ruda	1/3	3	0,2222	2/36						5/36	0,039352	0,409722	0,691536	0,827652
C	ruda	1/3	3	0,2222	2/36											2/36	0,018519	0,222222	0,490643	0,693723
D	ruda	1/3	3	0,2222	2/36	vuna	1/4	8	0,3571	5/36						7/36	0,053241	0,579365	0,896589	1,046898
E	vuna	1/4	8	0,3571	5/36											5/36	0,034722	0,357143	0,646585	0,828644
F	vuna	1/4	4	0,2143	3/36											3/36	0,020833	0,214286	0,395495	0,540179
G	vuna	1/4	4	0,2143	3/36	žito	1/4	10	0,1875	3/36						6/36	0,041667	0,401786	0,630659	0,741071
H	vuna	1/4	4	0,2143	3/36	glina	1/3	11	0,2500	2/36	žito	1/4	10	0,1875	3/36	8/36	0,060185	0,651786	0,871047	1,069715
I	ruda	1/3	3	0,2222	2/36	glina	1/3	11	0,2500	2/36	žito	1/4	10	0,1875	3/36	7/36	0,057870	0,659722	0,913615	1,131223
J	ruda	1/3	3	0,2222	2/36	glina	1/3	11	0,2500	2/36	drvo	1/4	5	0,3636	4/36	8/36	0,064815	0,835859	1,157392	1,303391
K	ruda	1/3	3	0,2222	2/36	vuna	1/4	8	0,3571	5/36	drvo	1/4	5	0,3636	4/36	11/36	0,081019	0,943001	1,231053	1,459235
L	vuna	1/4	8	0,3571	5/36	vuna	1/4	10	0,2143	3/36	drvo	1/4	5	0,3636	4/36	12/36	0,083333	0,935065	1,232113	1,352994
M	vuna	1/4	8	0,3571	5/36	vuna	1/4	10	0,2143	3/36						8/36	0,055556	0,571429	0,901154	1,087662
N	vuna	1/4	10	0,2143	3/36											3/36	0,020833	0,214286	0,482143	0,681818
O	drvo	1/4	2	0,0909	1/36											1/36	0,006944	0,090909	0,296807	0,399756
P	vuna	1/4	4	0,2143	3/36	drvo	1/4	2	0,0909	1/36						4/36	0,027778	0,305195	0,528815	0,644481
Q	vuna	1/4	4	0,2143	3/36	vuna	1/4	4	0,2143	3/36	drvo	1/4	2	0,0909	1/36	7/36	0,048611	0,519481	0,715436	0,845373
R	vuna	1/4	4	0,2143	3/36	vuna	1/4	4	0,2143	3/36	glina	1/3	11	0,2500	2/36	8/36	0,060185	0,678571	0,933765	1,008433
S	vuna	1/4	4	0,2143	3/36	glina	1/3	11	0,2500	2/36						5/36	0,039352	0,464286	0,782979	0,882215
T	glina	1/3	11	0,2500	2/36	drvo	1/4	5	0,3636	4/36						6/36	0,046296	0,613636	0,984871	1,129870
U	drvo	1/4	5	0,3636	4/36	drvo	1/4	6	0,4545	5/36						9/36	0,062500	0,818182	1,205177	1,406566
V	vuna	1/4	10	0,2143	3/36	drvo	1/4	5	0,3636	4/36	drvo	1/4	6	0,4545	5/36	12/36	0,083333	1,032468	1,378758	1,555195
W	vuna	1/4	10	0,2143	3/36	drvo	1/4	6	0,4545	5/36	drvo	1/4	12	0,0909	1/36	9/36	0,062500	0,759740	1,078583	1,348124
X	vuna	1/4	10	0,2143	3/36	drvo	1/4	12	0,0909	1/36						4/36	0,027778	0,305195	0,647727	0,827922
Y	drvo	1/4	12	0,0909	1/36											1/36	0,006944	0,090909	0,399351	0,613636
Z	žito	1/4	6	0,3125	5/36	drvo	1/4	2	0,0909	1/36						6/36	0,041667	0,403409	0,584619	0,666802
a	žito	1/4	6	0,3125	5/36	vuna	1/4	4	0,2143	3/36	drvo	1/4	2	0,0909	1/36	9/36	0,062500	0,617695	0,839692	1,023945
b	žito	1/4	6	0,3125	5/36	vuna	1/4	4	0,2143	3/36						8/36	0,055556	0,526786	0,770277	0,901786
c	žito	1/4	5	0,2500	4/36	vuna	1/4	4	0,2143	3/36						7/36	0,048611	0,464286	0,807735	0,870536
d	žito	1/4	5	0,2500	4/36	ruda	1/3	11	0,2222	2/36						6/36	0,046296	0,472222	0,869205	1,060606
e	ruda	1/3	11	0,2222	2/36	drvo	1/4	6	0,4545	5/36						7/36	0,053241	0,676768	1,106421	1,315657
f	ruda	1/3	11	0,2222	2/36	glina	1/3	9	0,5000	4/36	drvo	1/4	6	0,4545	5/36	11/36	0,090278	1,176768	1,570467	1,704545
g	glina	1/3	9	0,5000	4/36	drvo	1/4	6	0,4545	5/36	drvo	1/4	12	0,0909	1/36	10/36	0,078704	1,045455	1,369048	1,684343
h	glina	1/3	9	0,5000	4/36	drvo	1/4	12	0,0909	1/36						5/36	0,043981	0,590909	0,976281	1,179293
i	žito	1/4	6	0,3125	5/36											5/36	0,034722	0,312500	0,533888	0,718750
j	žito	1/4	6	0,3125	5/36	glina	1/3	3		2/36						7/36	0,053241	0,312500	0,553774	0,687500
k	žito	1/4	6	0,3125	5/36	žito	1/4	5	0,2500	4/36	glina	1/3	3	0,2500	2/36	11/36	0,081019	0,812500	1,051392	1,173611
l	žito	1/4	5	0,2500	4/36	žito	1/4	9	0,2500	4/36	glina	1/3	3	0,2500	2/36	10/36	0,074074	0,750000	0,986607	1,263889
m	žito	1/4	5	0,2500	4/36	žito	1/4	9	0,2500	4/36	ruda	1/3	11	0,2222	2/36	10/36	0,074074	0,722222	1,100296	1,361111
n	žito	1/4	9	0,2500	4/36	ruda	1/3	11	0,2222	2/36	ruda	1/3	8	0,5556	5/36	11/36	0,092593	1,027778	1,382786	1,616162
o	ruda	1/3	11	0,2222	2/36	ruda	1/3	8	0,5556	5/36	glina	1/3	9	0,5000	4/36	11/36	0,101852	1,277778	1,636574	1,800505
p	ruda	1/3	8	0,5556	5/36	glina	1/3	9	0,5000	4/36						9/36	0,083333	1,055556	1,474432	1,643939
q	glina	1/3	9	0,5000	4/36											4/36	0,037037	0,500000	0,871212	1,138889
r	glina	1/3	3	0,2500	2/36											2/36	0,018519	0,250000	0,520833	0,656250
s	žito	1/4	9	0,2500	4/36	glina	1/3	3	0,2500	2/36						6/36	0,046296	0,500000	0,823785	0,906250
t	žito	1/4	9	0,2500	4/36											4/36	0,027778	0,250000	0,572917	0,763889
u	žito	1/4	9	0,2500	4/36	ruda	1/3	8	0,5556	5/36						9/36	0,074074	0,805556	1,187500	1,444444
v	ruda	1/3	8	0,5556	5/36											5/36	0,046296	0,555556	0,986111	1,194444

Slika 2.29: Proračunske tablice korištene u istraživanju strategija

2.7 SET

Igra „SET” nastala je slučajno i prvobitno s drugačijim ciljem — genetičarka Marsha Jean Falco 1974. godine ispitivala je nasljednost epilepsije kod njemačkih ovčara te je veće količine jednakih informacija prikazala rukom crtanim simbolima na karticama, kako bi lakše uočila obrasce u podacima. Simboli s različitim obilježjima označivali su različite kombinacije gena. Uvidjevši potencijal kojeg su takve kartice pružale iz njih je razvila igru. Za put od znanstvene metode do društvene igre trebalo je čak 17 godina. Igra je izdana 1991. i od tada postaje sve popularnija među igračima, a količina matematičkih radova o njoj govori i o tome koliko je popularna baza za razna matematička istraživanja [20, 40].

„SET” (napisano velikim tiskanim slovima označava cijeli komplet karata, odnosno samu igru) je apstraktna kartaška igra u kojoj igrači moraju što brže prepoznavati određene uzorke među ponuđenim kartama. Najbrži igrač s najviše ispravnih uočavanja na kraju igre je pobjednik.

U igri „SET” svaka karta ima nacrtan 1–3 simbola, s time da svi simboli na karti imaju istu boju, isti oblik i istu ispunjenost bojom. Moguće su tri boje: zelena, ljubičasta i crvena. Moguća su tri oblika: romb, valoviti i ovalni, te mogu biti ispunjeni na tri načina: prazni, iscrtkani ili ispunjeni bojom.

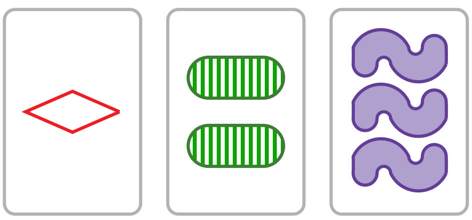
Svi igrači natječu se istovremeno u zadatku prepoznavanja seta među ponuđenih 12 karata.

Set čine tri karte koje su ili iste ili različite u sva četiri obilježja pojedinačno. Primjer jednog seta je na slici 2.30 gdje su karte različite u sva četiri obilježja.

Kad igrač uoči tri karte koje smatra da čine traženu cjelinu, kaže *„SET!”* i ostalim igračima dokaže svoju tvrdnju. Ako je u pravu, dobije te tri karte. Ako je pogriješio, ne može proglasiti novi set dok to ne napravi drugi igrač. Nakon micanja seta otkrivaju se tri nove karte, tako da ih ukupno bude 12.

U slučaju da niti jedan igrač među ponuđenim kartama ne može pronaći set otkrivaju se tri dodatne karte, no nakon pronalaska (i uklanjanja) seta ne otkrivaju se nove karte sve dok otkrivenih karata ne bude manje od 12.

Igra završava kad se potroše sve karte. Pobjeđuje igrač s najviše pronađenih setova.



Slika 2.30: Karte iz igre „SET”

Tijekom obrade cjelina iz kombinatorike i vjerojatnosti, učenicima se može predstaviti igra „SET". Primjenom na igri mogu se uvježbati razni sadržaji tih cjelina te ih potaknuti na logičko razmišljanje i primjenu matematike u rješavanju problema koristeći kombinatoriku.

Upoznajući učenike s igrom „SET" mogu im se postaviti razna matematička pitanja. Primjerice, mogu odrediti koliko karti ima u špilu bez da ih broje jednu po jednu. Time će uvježbati jedan od osnovnih principa prebrojavanja: načelo umnoška[4].

Za svaku kartu postoje tri različita oblika. Uz činjenicu da postoje tri vrste ispune dobijemo $3 \cdot 3 = 9$ kombinacija. Svaka od tih devet kombinacija može biti uparena s jednim od tri moguća broja simbola, što je $9 \cdot 3 = 27$ načina, koji dalje svaki može biti uparen s jednom od tri boje, što čini ukupno $27 \cdot 3 = 81$ kartu u špilu.

Drugim riječima, budući da postoje četiri različita obilježja (oblik, broj, ispuna i boja), a za svako od obilježja postoje tri različite mogućnosti, prema načelu umnoška špil sadrži $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4 = 81$ kartu. Sve moguće karte prikazane su na slici 2.32.

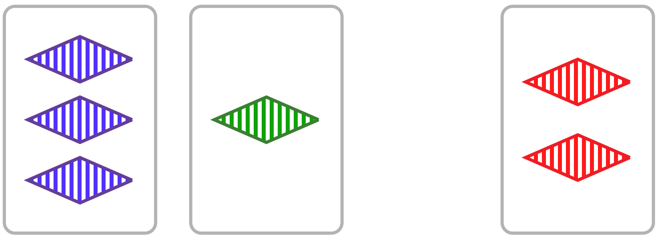
Učenici bi sami ili uz poticanje mogli doći do zaključka kako je brže prepoznati set ako se promatraju parovi karata jer za svake dvije karte postoji jedinstvena treća karta koja s njima čini set. Pokažimo to na primjeru sa slike 2.31.

Razmotrimo svako obilježje na prve dvije karte redom:

1. Na prvoj karti su tri simbola, a na drugoj samo jedan simbol. Broj simbola na prve dvije karte je različit, stoga se i na trećoj karti u setu mora nalaziti različiti broj: dva simbola.

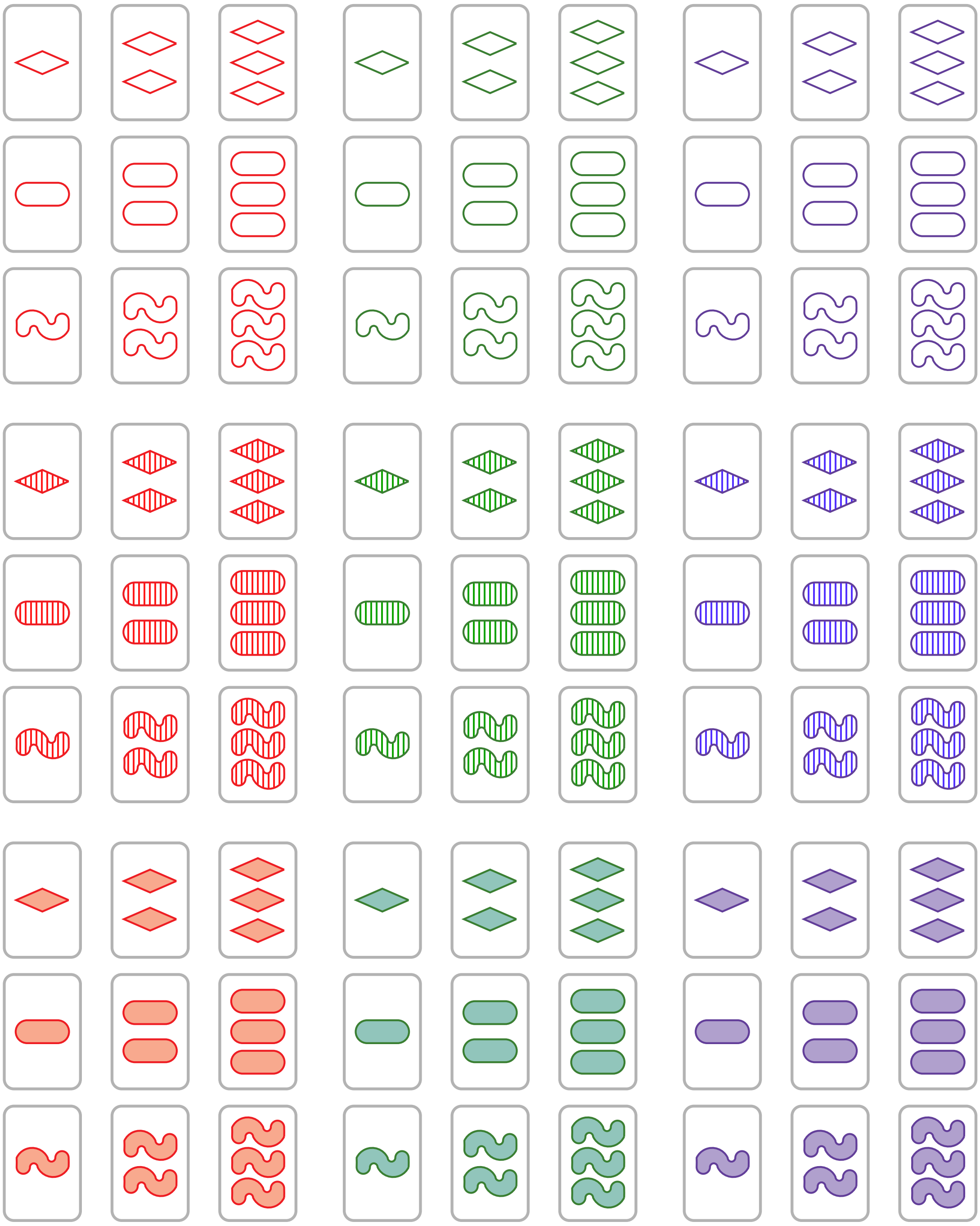
2. Na obje karte oblik simbola je romb. Budući da je na prve dvije karte oblik simbola jednak, i na trećoj karti mora biti jednak simbol: romb.

3. Boja simbola na prvoj karti je ljubičasta, a na drugoj zelena. Budući da su boje simbola na prve dvije karte različite, i na trećoj karti mora biti različita boja: crvena.



Slika 2.31: Jedinstvenost treće karte

[4]Načelo umnoška kaže da ako skup A sadrži m elemenata, a skup B sadrži n elemenata, onda je broj uređenih parova elemenata prvog i drugog skupa jednak $m \cdot n$.



Slika 2.32: Sve karte iz igre „SET”

4. Ispuna simbola na prve dvije karte je jednaka pa i na trećoj karti mora biti jednaka ispuna: iscrtkana.

Dakle, treća karta je jednoznačno određena te na njoj moraju biti dva crvena iscrtkana romba, kao što je i vidljivo na slici 2.31.

Učenicima se također može postaviti i pitanje koliko mogućih setova ukupno postoji.

S obzirom na to da redoslijed odabira karata nije važan, riječ je o kombinacijama bez ponavljanja gdje je broj različitih načina odabira dviju od 81 karata iz špila $\binom{81}{2} = 3\,240$. Budući da je treća karta jedinstvena i redoslijed karata u setu nije bitan, možemo ju *smjestiti* u set na tri načina pa ukupno ima $3\,240 : 3 = 1\,080$ različitih setova.

Učenici bi mogli razmišljati i na sljedeći način: prvu kartu možemo izvući između 81 ponuđene (cijeli špil), drugu od preostalih 80 karata, a treća je jedinstveno određena da bi upotpunila set. Stoga bi učenici mogli pomisliti da ukupno ima $81 \cdot 80 \cdot 1 = 6\,480$ različitih setova. Međutim, dodatan uvjet je to što za set nije bitan redoslijed karti: postoje tri izbora za prvu kartu, dva za drugu, a treća je preostala karta. To nam daje $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ kombinacija za raspored karti u setu. Konačno, ukupan broj setova u igri je

$$\frac{81 \cdot 80 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{6\,480}{6} = 1\,080.$$

Sad kad znamo koliko je mogućih setova, možemo se pitati koja je vjerojatnost da tri nasumične karte iz špila čine set. Zanimljivo bi bilo tražiti procjene učenika prije provođenja samog izračuna.

Broj setova smo izračunali i on je 1 080, a mogućih kombinacija bilo koje tri karte iz špila je $\binom{81}{3} = 85\,320$. Prema tome, tražena vjerojatnost je $\frac{1\,080}{85\,320} = \frac{1}{79} \approx 0.013$, tj. približno 1.3%.

Postoji još jedan zanimljiv i jednostavan način kako odrediti traženu vjerojatnost. Ako iz špila izvučemo bilo koje dvije karte, postoji samo jedna od preostalih 79 karata koja s prve dvije karte čini set. Budući da je vjerojatnost da izvučemo upravo tu kartu $\frac{1}{79}$ dobije se isto rješenje.

Sada rezultat možemo usporediti s učeničkim procjenama te provesti diskusiju o tome zašto su im procjene bile znatno veće ili čak manje od rezultata.

Nadovezujući se dalje na podatke koje smo izračunali, analiziranje igre s učenicima može se nastaviti pitanjem koliki je najvjerojatniji broj setova u 12 slučajno odabranih karti iz špila?

Iz iskustva igranja učenici bi mogli naslutiti da je odgovor između 2 i 3. Pretpostavka se provjerava matematički — vjerojatnost da tri slučajne karte izvučene iz špila tvore set pomnožimo s ukupnim brojem načina odabira tri karte od njih dvanaest.

$$\frac{1}{79} \cdot \binom{12}{3} = \frac{1}{79} \cdot 220 \approx 2.78,$$

pa vidimo da rezultat odgovara naslućenom odgovoru.

Izazovniji zadatak za srednjoškolce bi bilo pitanje koja je vrsta seta najvjerojatnija, tj. koliko setova ima 4, 3, 2 ili 1 obilježje različito.

Izračunajmo redom koliko setova svake vrste postoji u špilu od 81 karte. Zbroj svih vrsta setova čini ukupan broj setova u igri, a to je 1080.

Za set u kojemu karte imaju sva četiri obilježja različita, prva karta može biti bilo koja iz špila pa za njen odabir postoji 81 mogućnosti. Druga karta mora biti različita u svim obilježjima, što je po načelu umnoška $2^4 = 16$ mogućnosti (dvije mogućnosti za broj simbola, dvije za boju, dvije za oblik i dvije za ispunu). Za treću kartu nema izbora, ranije smo pokazali da je jedinstveno određena. Prema tome, primjenom načela umnoška broj načina za odabrati tri karte tako da ne dijele niti jedno obilježje je $81 \cdot 16 \cdot 1 = 1\,296$. Taj broj moramo reducirati s obzirom na činjenicu da redoslijed karata u setu nije bitan. Broj permutacija tri karte bez ponavljanja jednak je $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$ (prva karta može biti bilo koja od njih tri, za drugu ostaju na izbor dvije karte, a treća je jedina preostala). Dakle, postoji $1\,296 : 6 = 216$ setova te vrste.

Sljedeća vrsta seta koju promatramo ima tri obilježja različita, a jedno isto. Analogno kao prije, računamo i ovaj slučaj. Za prvu kartu ima 81 mogućnosti. Druga karta treba imati jedno obilježje isto kao i prva karta pa to obilježje možemo odabrati na četiri načina, preostala tri obilježja su različita za što ima $2^3 = 8$ mogućnosti; ukupno za drugu kartu ima $4 \cdot 2^3 = 32$ mogućnosti. Treća karta je jedinstvena. Prema tome ima $81 \cdot 4 \cdot 2^3 \cdot 1 = 2\,592$ načina za izabrati tri karte koje dijele zajedničko obilježje. Ne zaboravimo podijeliti sa 6 da bismo izbjegli ponavljanje istih setova. Sukladno tome, postoji 432 setova te vrste.

Primijenimo dalje istu ideju i ubrzajmo razmišljanje. Sljedeća vrsta seta sadrži dva ista i dva različita obilježja. Ponovno prva karta može biti jedna od 81 iz špila. Sad za drugu kartu biramo dva ista obilježja od četiri mogućnosti, što možemo napraviti na $\binom{4}{2}$ načina. Preostala dva obilježja moraju biti različita za što ima 2^2 mogućnosti. Dakle, drugu kartu možemo odabrati na $\binom{4}{2} \cdot 2^2 = 6 \cdot 4 = 24$ načina. Treća karta je jedinstveno određena. Zanemarimo redoslijed karata i dobijemo da je broj setova te vrste $(81 \cdot 24 \cdot 1) : 6 = 324$.

Nakon detaljnijih analiza prošlih vrsta setova, učenici će bez problema moći provesti račun za posljednju vrstu seta, s tri ista i jednim različitim obilježjem:

$$\frac{81 \cdot \binom{4}{3} \cdot 2}{3!} = \frac{81 \cdot 4 \cdot 2}{6} = 108$$

No pojedinci bi se mogli dosjetiti prečaca: $1\,080 - 216 - 432 - 324 = 108$ u kojem smo od ukupnog broja setova oduzeli brojeve izračunatih vrsta setova.

Sad se lako uoči da je vrsta seta koja ima tri različita i jedno isto obilježje najvjerojatnija. Sistematizirajmo podatke tablicom 2.3 u koju smo dodali i vjerojatnosti za pojedine vrste setova.

Vrsta seta	Količina	Omjer	Postotak
4 različita obilježja	216	$\frac{216}{1080}$	20%
3 različita obilježja	432	$\frac{432}{1080}$	40%
2 različita obilježja	324	$\frac{324}{1080}$	30%
1 različito obilježje	108	$\frac{108}{1080}$	10%

Tablica 2.3: Vjerojatnosti za pojedine vrste setova

Još poneka pitanja koja se mogu postaviti učenicima su primjerice da odrede koliko setova sadrži pojedinu kartu, na koliko načina se može podijeliti dvanaest karata ili može li na kraju igre ostati samo tri karte koje ne čine set? Sva ta pitanja i još mnogo složenija, ili jednostavnija, ali sa složenijim odgovorima, upućuju na to da je igra matematički potkovana. Pogodna je za istraživanja i analizu s učenicima različitih razina obrazovanja. Najopsežnija knjiga o igri je *The Joy of SET* koja može voditi znatiželjne na put otkrivanja matematike u igri ili profesore koji na drugačiji način žele pristupiti dijelovima matematike [31].

Zaključak

Opisane igre i analize u ovom diplomskom radu povezujemo s kurikulumom nastavnog predmeta Matematike za osnovne i srednje škole (NN 7/2019). Obuhvaćaju razne matematičke procese; prikazivanje i komuniciranje matematičkim jezikom, logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje, matematičko modeliranje i rješavanje problema te uporabu tehnologije. Učenici analiziranjem odabranih društvenih igara smisleno obrazlažu rezultate, objašnjavaju svoje ideje i bilježe postupke koje provode. Pritom se koriste različitim prikazima: riječima, crtežima, tablicama, brojevima, simbolima i slično. Razvijaju sposobnost komuniciranja u matematici i o matematici, slušaju i razumiju matematičke opise i objašnjenja drugih te razmjenjuju i sučeljavaju svoje ideje, mišljenja i stavove. Uspješna komunikacija doprinosi lakšem i bržem usvajanju novih sadržaja i kurikuluma nastavnog predmeta Matematike, ali i kurikuluma ostalih nastavnih predmeta.

Proučavanjem i igranjem odabranih društvenih igara u ovom diplomskom radu, učenici se suočavaju s izazovnim problemima koji ih potiču na promišljanje, argumentiranje i dokazivanje te donošenje samostalnih zaključaka. Učenici postavljaju matematici svojstvena pitanja te stvaraju i istražuju na njima zasnovane matematičke pretpostavke, uočene pravilnosti i odnose. Stvaraju i vrednuju lance matematičkih argumenata, zaključuju indukcijom i dedukcijom, analiziraju te primjenjuju analogiju, generalizaciju i specijalizaciju. Primjenjuju poznato u nepoznatim situacijama i prenose učenje iz jednog konteksta u drugi. Razvijaju kritičko mišljenje te prepoznaju utjecaj ljudskih čimbenika i vlastitih uvjerenja na zaključivanje.

Učenici analiziraju strategije igranja, efikasnost pojedinih odluka i planiraju pristup rješavanju problema odabirom odgovarajućih matematičkih pojmova i postupaka. Učenici primjenjujući matematiku u analizi društvenih igara razvijaju upornost, hrabrost i otvorenost u suočavanju s novim i nepoznatim situacijama. Korištenje tehnologijom (primjerice Excel kod Catana) pomaže učenicima pri obradi i razmjeni podataka i informacija te pri rješavanju problema i modeliranja.

U ovom diplomskom radu izdvojene društvene igre odabrane su iz vlastitog iskustva, razmišljajući o tradicionalnim i modernim igrama te gledajući imaju li temu ili su vizualno zanimljive. Uvođenje takvih igara u nastavu matematike pruža odmak od klasične nastave i omogućuje promjenu pristupa obrade sadržaja. Konkretni matematički sadržaji pokriveni u ovom radu proizlaze iz domena brojeva, podataka, statistike i vjerojatnosti, kombinatorike, osnovnog principa prebrojavanja, permutacije, kombinacije i varijacije te teorije brojeva.

Osim odabranih društvenih igara, za daljnja istraživanja s učenicima predlažemo sljedeće: „Spot it" („Dobble"), „Eleusis", „Monopoly", „Qwirkle", „Ticket to Ride", „Poker", „Lost Cities", „For Sale", „Munchkin", „Sushi Go!" i „Stone Age". U svakoj od njih bi se mogli pronaći različiti matematički sadržaji primjereni učenicima osnovnih i srednjih škola, ali i višim razinama obrazovanja.

Bibliografija

[1] *Backgammon*, https://en.wikipedia.org/wiki/Backgammon, pristupljeno u rujnu 2021.

[2] *Charles Darrow*, https://en.wikipedia.org/wiki/Charles_Darrow, pristupljeno u rujnu 2021.

[3] *Chaturanga*, https://en.wikipedia.org/wiki/Chaturanga, pristupljeno u rujnu 2021.

[4] *Eurogame*, https://en.wikipedia.org/wiki/Eurogame, pristupljeno u rujnu 2021.

[5] *History of Chess*, https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_chess, pristupljeno u rujnu 2021.

[6] *History of Go*, https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_Go, pristupljeno u rujnu 2021.

[7] *History of Monopoly*, https://en.wikipedia.org/wiki/History_of_Monopoly, pristupljeno u rujnu 2021.

[8] *Monopoly (game)*, https://en.wikipedia.org/wiki/Monopoly_(game), pristupljeno u rujnu 2021.

[9] *Spiel*, https://en.wikipedia.org/wiki/Spiel, pristupljeno u rujnu 2021.

[10] P. Attia, *The Full History of Board Games*, https://medium.com/@peterattia/the-full-history-of-board-games-5e622811ce89, 2016, pristupljeno u rujnu 2021.

[11] J. Austin, B.G. Kronenthal i S. Molitoris Miller, *The Settlers of „Catanbinatorics”*, Mathematics Magazine **92** (2019), br. 3, 187–198.

[12] J. Austin i S. Molitoris-Miller, *The Settlers of Catan: Using Settlement Placement Strategies in the Probability Classroom*, The College Mathematics Journal **46** (2015), br. 4, 275–282.

[13] J. Bewersdorff, *Luck, Logic, and White lies: The Mathematics of Games*, A K Peters, Wellesley, Massachusetts, 2005.

[14] J. Botermans i E.L. Fankbonner, *The Book of Games: Strategy, Tactics & History*, Sterling, New York, 2008.

[15] L. Bragg, *Children's perspectives on mathematics and game playing*, Mathematics education research: innovation, networking, opportunity: proceedings of the 26th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (Pymble, N.S.W), MERGA Inc., 2003, str. 160–167.

[16] B. Braun, P. Bremser, A. Duval, E. Lockwood i D. White, *What Does Active Learning Mean for Mathematicians?*, str. 169–178, Princeton University Press, 2018.

[17] British Go Association, *A Brief History of Go*, `https://www.britgo.org/intro/history`, 2020, pristupljeno u rujnu 2021.

[18] K. Bruning, *The History of Board Games: What Was the First/Oldest Board Game?*, `https://gamecows.com/history-of-board-games`, 2018, pristupljeno u rujnu 2021.

[19] C. Cox, J. De Silva, P. Deorsey, F. Kenter, T. Retter i J. Tobin, *How to Make the Perfect Fireworks Display: Two Strategies for Hanabi*, Mathematics Magazine **88** (2015), br. 5, 323–336.

[20] B.L. Davis i D. Maclagan, *The card game Set*, The Mathematical Intelligencer (2003), br. 25, 33–40, `http://homepages.warwick.ac.uk/staff/D.Maclagan/papers/set.pdf`.

[21] M. Driver, *Beginner's Guide to Counting Pips*, `https://bkgm.com/articles/Driver/GuideToCountingPips`, 2000, pristupljeno u rujnu 2021.

[22] J.R. Edwards, *Saving Families, One Game at a Time*, `https://web.archive.org/web/20160205071220/http://visionandvalues.org/docs/familymatters/Edwards_Jason.pdf`, 2016, pristupljeno u rujnu 2021.

[23] R. Groenewald, *An Epic Guide To The History of Board Games*, `https://www.fractuslearning.com/history-board-games-guide`, 2018, pristupljeno u rujnu 2021.

[24] C. Hall, *Games broke funding records on Kickstarter in 2020, despite the pandemic*, `https://www.polygon.com/2020/12/22/22195749`, 2020, pristupljeno u rujnu 2021.

[25] M. Herriott, *Bohn Math*, `https://boardgamegeek.com/filepage/1981/bohnmathtxt`, 2002, pristupljeno u rujnu 2021.

[26] G. Hoffman i J. Hoffman, *Dice Counting, an Alternative to Pip Counting*, `https://bkgm.com/articles/GOL/Jul01/grant.htm`, 2001, pristupljeno u rujnu 2021.

[27] H. Hübener, *Tabular History of Backgammon*, `http://www.hardyhuebener.de/engl/geschichte.html`, 2008, pristupljeno u rujnu 2021.

[28] M. Jarvis, *Free time during lockdown helped board game sales to jump in 2020 — report*, `https://www.dicebreaker.com/categories/board-game/news/games-and-puzzles-market-2020-2021`, 2021, pristupljeno u rujnu 2021.

[29] B. Koca, *Mathematics and Backgammon*, `https://bkgm.com/articles/Koca/bgtalkpaper2.html`, 2010, pristupljeno u studenom 2021.

[30] R. Lorenzi, *Oldest known gaming tokens dug up in Bronze Age Turkish graves*, `https://www.nbcnews.com/sciencemain/oldest-known-gaming-tokens-dug-bronze-age-turkish-graves-6C10920354`, 2013, pristupljeno u rujnu 2021.

[31] L. McMahon et al., *The Joy of SET: The Many Mathematical Dimensions of a Seemingly Simple Card Game*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2017.

[32] D. Mitchell, *Game Analysis: Love Letter*, `https://drdisc101.wordpress.com/2016/03/09/game-analysis-love-letter/`, 2016, pristupljeno u studenom 2021.

[33] S. Neil, *8 Oldest Board Games in the World*, `https://www.oldest.org/entertainment/board-games`, 2017, pristupljeno u rujnu 2021.

[34] M. Olsen, *Pip Counting Made Easy — The Secret to Fast and Precise Pip Counting*, `https://youtu.be/rv1DW1SbVw0`, 2021, pristupljeno u rujnu 2021.

[35] Pete, *The 10 Most Important Moments In Chess History*, `https://www.chess.com/article/view/the-10-most-important-moments-in-chess-history`, 2018, pristupljeno u rujnu 2021.

[36] S. Priyadershini, *Traditional board games: From Kochi to Iraq*, https://www.thehindu.com/features/metroplus/society/tradtional-board-games-from-kochi-to-iraq/article7711918.ece, 2015, pristupljeno u rujnu 2021.

[37] A. Raphel, *The Man Who Built Catan*, https://www.newyorker.com/business/currency/the-man-who-built-catan, 2014, pristupljeno u rujnu 2021.

[38] G.O. Rollefson, *A Neolithic Game Board from Ain Ghazal, Jordan*, Bulletin of the American Schools of Oriental Research (1992), br. 286, 1–5, http://www.jstor.org/stable/1357113, pristupljeno u rujnu 2021.

[39] M. Sebbane, *Board Games from Canaan in the Early and Intermediate Bronze Ages and the Origin of the Egyptian Senet Game*, Tel Aviv **28** (2001), 213 – 230.

[40] Set Enterprises Inc., *Marsha Jean Falco - The Creative Genius Behind Set*, https://web.archive.org/web/20061021101744/https://www.setgame.com/set/history.htm, 2004, pristupljeno u rujnu 2021.

[41] M. Solly, *The Best Board Games of the Ancient World*, https://www.smithsonianmag.com/science-nature/best-board-games-ancient-world-180974094, 2020, pristupljeno u rujnu 2021.

[42] C. Thompson-Wood, *Classroom Implementation: City of Zombies*, https://youtu.be/AHc1aGDocE4, 2020, pristupljeno u studenom 2021.

[43] P. Vankúš, *History and Present of Didactical Games as a Method of Mathematics' teaching*, Mathematics (2005), br. 5, 53–68.

[44] S. Woods, *Eurogames: The Design, Culture and Play of Modern European Board Games*, McFarland & Company, Inc., Publishers, Jefferson, North Carolina, 2012.

[45] Yutopian Enterprises, *History of Weiqi*, http://www.yutopian.com/go/misc/gohistory.html, 1999, pristupljeno u rujnu 2021.

Sažetak

U ovom diplomskom radu prvo opisujemo razvoj društvenih igara tijekom povijesti. Prikazani su primjeri prvih igraćih ploča i komponenata, razne zanimljivosti te su uvedeni termini tipova igara. Prikazujemo povijesni razvoj modernih društvenih igara predvođenih euroigrama poput Catana, jedne od igara koja je u drugom dijelu rada odabrana kao temelj za razna otvorena pitanja koja potiču matematička istraživanja.

U glavnom dijelu rada izdvajamo odabrane moderne društvene igre primjenjive u nastavi matematike: „Backgammon", „City of Zombies", „Bohnanza", „Love Letter", „Hanabi", „Catan", „SET". Navodimo njihova pravila i tijek igranja, a zatim analiziramo kako bi se pojedina igra ili njeni elementi mogli koristiti u radu s učenicima. U analizi navedenih igara susrećemo i opisujemo sljedeće matematičke teme: aritmetiku, osnove vjerojatnosti i kombinatorike, logičko zaključivanje.

Summary

This thesis begins with the description of the development of board games throughout history. We mention examples of first game boards and components, a variety of interesting facts, and we introduce board game types. We present the historical development of modern board games led by Eurogames like Catan, one of the games that features in the second part of the paper as a basis for various open-ended questions which encourage mathematical research.

In the main part of the paper, we present a selection of modern tabletop games applicable in teaching of mathematics: ”Backgammon”, ”City of Zombies”, ”Bohnanza”, ”Love Letter”, ”Hanabi”, ”Catan”, ”SET”. We state their rules and the course of play, and then analyze how a particular game or its elements could be used in working with students. In the analysis of these games we describe the following mathematical contents: arithmetics, basic probability and combinatorics, and logical reasoning.

Životopis

Rođena sam 23. rujna 1991. u Zagrebu, gdje sam pohađala OŠ Marije Jurić Zagorke i OŠ Žuti brijeg. Za srednju školu sam odabrala Geodetsku tehničku školu.

Tijekom srednje škole razvila sam interes za matematiku te sam se zbog toga odlučila upisati na studij matematike, nastavnički smjer, na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.

Od rujna 2016. radim ono što volim i poučavam u osnovnoj školi. Život mi nadopunjuje moj muž i kolega s kojim je prva poveznica bila upravo matematika.