Luzinov teorem za kapacitet

Zlatunić, Toni

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Toni Zlatunić

LUZINOV TEOREM ZA KAPACITET

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Zoran Vondraček

Zagreb, studeni, 2021.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Svojim roditeljima

Sadržaj

Uvod

Jedan od važnih teorema u teoriji mjere jest Luzinov teorem. Njegov općeniti iskaz glasi ([2], Teorem 7.4.4)

> Neka je X lokalno kompaktan Hausdorffov prostor te neka je $\mathcal{F}$ σ-algebra na X koja sadrži Borelovu σ-algebru $\mathcal{B}$ na X. Također, neka je μ regularna mjera na $(X, \mathcal{F})$ te neka je $f\colon X \to \mathbb{R}$ $\mathcal{F}$-izmjeriva funkcija i $\varepsilon > 0$. Ako je $F \in \mathcal{F}$ takav da $\mu(F) < +\infty$, tada postoji kompaktan podskup K od F takav da vrijedi $\mu(F \setminus K) < \varepsilon$ te takav da je restrikcija $f|_K$ neprekidna.

Teorem nosi ime po ruskom matematičaru Nikolaju Nikolajeviču Luzinu koji ga je i dokazao u malo manje općenitoj formi od navedene. Drugim riječima, ovaj teorem nam govori da za svaku izmjerivu funkciju na nekom konačnom izmjerivom prostoru možemo pronaći kompaktan skup koji je gotovo jednako „velik” kao cijeli prostor i to takav da je dana funkcija neprekidna na tom skupu. Godine 1944. britanski matematičar J. E. Littlewood u svom djelu *Lectures on the Theory of Functions* ([5]) iznosi tri načela koja čine osnovu razumijevanja teorije mjere i matematičke analize. Prvo načelo govori da je svaki izmjerivi skup približno konačna unija intervala, drugo načelo govori da je svaka izmjeriva funkcija približno neprekidna, dok treće načelo govori da svaki konvergentni niz funkcija konvergira približno uniformno. Dakle, Littlewoodova načela zapravo govore da izmjerive funkcije i izmjerivi skupovi ne mogu biti „bilo kakvi”, već im je „ponašanje” približno određeno. Luzinov teorem je zapravo precizna matematička verzija Littlewoodovog drugog načela koje govori da je svaka izmjeriva funkcija približno neprekidna.

U zadnjih nekoliko godina mnogi matematičari su dokazali ili pokušali dokazati ovaj teorem zamjenjujući mjeru s nekom drugom skupovnom funkcijom. Primjer jedne takve funkcije je kapacitet. Kapacitet je funkcija slična mjeri koja zadovoljava malo slabija svojstva od mjere. U [3] i [4] možemo vidjeti kako izgleda analogon Luzinovog teorema u slučaju takozvanih nejasnih mjera (*fuzzy measures*), dok je u [10] Luzinov teorem pokazan u kontekstu g-očekivanja. Također, u [1] je opisan Luzinov teorem za klasu supermodularnih Dempsterovih kapaciteta, no prema definiciji iz [9] koju ćemo i mi koristiti u ovom radu, vidjet ćemo da to odgovara submodularnim Dempsterovim kapacitetima. U listopadu 2020. godine, Johannes Wiesel objavljuje članak [9] u kojem su dani nužni i dovoljni uvjeti da bi Luzinov teorem vrijedio za klasu subaditivnih kapaciteta čime je u potpunosti razriješeno pitanje Luzinovog teorema za tu klasu kapaciteta. Također, u istom članku Wiesel pronalazi grešku u [1] tako da pitanje Luzinovog teorema za submodularne Dempstrerove kapacitete ostaje nerazriješeno. S obzirom da su submodularni Dempsterovi kapaciteti poseban slučaj subaditivnih kapaciteta, Wieselov rezultat se može primijeniti i na njih.

Glavni cilj ovog diplomskog rada je pronaći nužne i dovoljne uvjete da bi vrijedio analogon Luzinovog teorema za subditivan kapacitet te dokazati spomenuti rezultat. Rad je najvećim dijelom upravo baziran na [9].

Rad je podijeljen u tri poglavlja. U prvom poglavlju uvodimo neke osnovne pojmove i rezultate vezane uz metričke prostore koji će nam biti potrebni za daljnje rezultate. Također, definiramo pojam kapaciteta i navodimo neke primjere istih. Zatim pokazujemo neka osnovna svojstva subaditivnih kapaciteta te uvodimo pojam regularnog kapaciteta. Na kraju prvog poglavlja uvodimo i pojam uniformne konvegencije niza funkcija te navodimo neke zanimljive rezultate koji se tiču uniformne konvergencije, a bit će nam potrebni za dokaz glavnog rezultata.

U drugom poglavlju dolazimo do glavnog cilja i rezultata ovog rada. Iskazujemo Luzinov teorem za (subaditivan) kapacitet, odnosno dajemo i nužan i dovoljan uvjet da bi Luzinov teorem vrijedio u slučaju subaditivnih kapaciteta. Zatim navodimo nekoliko primjera kapaciteta za koje vrijedi ili ne vrijedi Luzinov teorem.

Treće poglavlje se sastoji od nekoliko različitih primjena Luzinovog teorema za kapacitet. Prva od njih je vezana uz ograničenost izmjerivih funkcija te ju na neki način možemo smatrati kao još jedno Littlewoodovo načelo. U drugom dijelu trećeg poglavlja ćemo pokazati kako Luzinov teorem možemo primijeniti za aproksimaciju dane izmjerive funkcije neprekidnom funkcijom, a posljedica toga će biti jedna zanimljiva karakterizacija izmjerivih funkcija.

Poglavlje 1

Osnovne definicije i pripremni rezultati

1.1 Osnovne definicije i rezultati iz metričkih prostora

U ovom potpoglavlju ćemo uvesti neke osnovne pojmove i rezultate vezane uz metričke prostore koji će nam biti potrebni za razumijevanje i dokazivanje glavnog rezultata.

Definicija 1.1.1. *Neka je dan skup X.* Metrika *na skupu X jest funkcija $d\colon X\times X \to [0, +\infty)$ koja zadovoljava sljedeća tri svojstva: za svaki $x, y, z \in X$ vrijedi*

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$ *(Nerazlučivost)*
2. $d(x, y) = d(y, x),$ *(Simetričnost)*
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y).$ *(Nejednakost trokuta)*

Uređeni par (X, d) nazivamo metrićki prostor.

Iz Definicije 1.1.1 vidimo da je metrika zapravo neka mjera udaljenosti između točaka u prostoru X.

Definicija 1.1.2. *Neka je (X, d) metrički prostor. Za točku $x \in X$ i broj $r > 0$ definiramo* otvorenu kuglu oko x radijusa r *kao skup*

$$B_r(x) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

Definicija 1.1.3. *Neka je (X, d) metrički prostor. Za skup $A \subseteq X$ kažemo da je* otvoren u (X, d) *ako za svaki $a \in A$ postoji $r > 0$ takav da $B_r(a) \subseteq A$. Nadalje, za skup $F \subseteq X$ kažemo da je* zatvoren u (X, d) *ako je komplement $F^c = X \setminus F$ otvoren u (X, d).*

Definicija 1.1.4. *Neka je* (X, d) *metrički prostor. Za familiju otvorenih skupova* $\{U_i : U_i \subseteq X, i \in I\}$ *kažemo da je* otvoreni pokrivač *od* $Y \subseteq X$ *ako vrijedi* $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$. *Nadalje, familija* $\{U_j : j \in J\}$ *je* potpokrivač *od* $\{U_i : i \in I\}$ *ako* $J \subseteq I$ *i ako je* $\{U_j : j \in J\}$ *i dalje pokrivač od* Y. *Također, ako je* J *konačan skup, kažemo da je* $\{U_j : j \in J\}$ konačan potpokrivač *od* Y.

Definicija 1.1.5. *Za metrički prostor* (X, d) *kažemo da je* kompaktan metrički prostor *ako svaki otvoreni pokrivač od* X *ima konačan potpokrivač. Za podskup* $Y \subseteq X$ *kažemo da je* kompaktan u (X, d) *ako svaki pokrivač od* Y *ima konačan potpokrivač.*

U sljedećih nekoliko propozicija ćemo navesti (bez dokaza) neka osnovna svojstva otvorenih, zatvorenih i kompaktnih skupova u metričkom prostoru (X, d). Dokazi se mogu naći u [6].

Propozicija 1.1.6. *Proizvoljna unija otvorenih skupova je otvoren skup. Nadalje, konačan presjek otvorenih skupova je otvoren skup.*

Propozicija 1.1.7. *Proizvoljni presjek zatvorenih skupova je zatvoren skup. Nadalje, konačna unija zatvorenih skupova je zatvoren skup.*

Propozicija 1.1.8. *Ako je* Y *zatvoren podskup kompaktnog metričkog prostora* (X, d)*, tada je* Y *kompaktan u* (X, d).

Propozicija 1.1.9. *Neka je* U *otvoren te neka je* F *zatvoren podskup od* (X, d)*. Tada je* $U \setminus F$ *otvoren skup.*

Propozicija 1.1.10. *Skup* F *je zatvoren ako i samo ako svaki konvergentan niz* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *u* F *ima limes u* F.

Propozicija 1.1.11. *Neka je dan niz kompaktnih skupova* $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *takav da* $K_n \supseteq K_{n+1}$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *i takav da* $K_n \neq \emptyset$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$*. Tada vrijedi*

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n \neq \emptyset.$$

Definicija 1.1.12. *Neka je* (X, d) *metrički prostor te neka je* $A \subseteq X$ *podskup od* X. Interior *skupa* A*, u oznaci* $\mathrm{Int}(A)$*, je skup*

$$\mathrm{Int}(A) = \bigcup_{\substack{U \subseteq A \\ U \text{ otvoren}}} U.$$

Nadalje, definiramo i zatvarač *skupa* A*, u oznaci* $\overline{A}$*, kao skup*

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{F \supseteq A \\ F \text{ zatvoren}}} F.$$

Definicija 1.1.13. *Neka je dan metrički prostor (X, d). Nadalje, neka je $\delta > 0$ te neka je $A \subseteq X$ proizvoljan podskup od X. Definiramo* otvorenu δ-okolinu *skupa A, u oznaci A^δ, kao skup*

$$A^\delta = \Big\{x \in X : \inf_{y \in A} d(x, y) < \delta\Big\}.$$

Slično, definiramo i zatvorenu δ-okolinu *skupa A, u oznaci $A^{\overline{\delta}}$, kao skup*

$$A^{\overline{\delta}} = \Big\{x \in X : \inf_{y \in A} d(x, y) \leq \delta\Big\}.$$

Propozicija 1.1.14. *Neka je dan podskup A metričkog prostora (X, d). Tada je otvorena δ-okolina od A otvoren skup, a zatvorena δ-okolina zatvoren skup za svaki $\delta > 0$.*

Dokaz. Pokažimo da vrijedi

$$A^\delta = \bigcup_{y \in A} B_\delta(y). \tag{1.1}$$

Neka je $x \in A^\delta$. Tada vrijedi

$$\inf_{y \in A} d(x, y) < \delta.$$

Pretpostavimo da $x \notin \bigcup_{y \in A} B_\delta(y)$. Tada za svaki $y \in A$ vrijedi $x \notin B_\delta(y)$, odnosno $d(x, y) \geq \delta$ za svaki $y \in A$. Stoga imamo

$$\inf_{y \in A} d(x, y) \geq \delta$$

pa slijedi $x \notin A^\delta$, što je kontradikcija s početnom pretpostavkom. Dakle, vrijedi

$$A^\delta \subseteq \bigcup_{y \in A} B_\delta(y).$$

Pokažimo i obratnu inkluziju. Neka je $x \in \bigcup_{y \in A} B_\delta(y)$. Tada postoji $y \in A$ takav da $x \in B_\delta(y)$, odnosno takav da $d(x, y) < \delta$. No, tada vrijedi i

$$\inf_{z \in A} d(x, z) \leq d(x, y) < \delta.$$

Dakle, $x \in A^\delta$ pa smo dobili i obratnu inkluziju. Dakle, vrijedi jednakost (1.1). Budući da je A^δ unija otvorenih skupova, prema propoziciji 1.1.6 slijedi da je A^δ otvoren skup.

Pokažimo sada da je $A^{\overline{\delta}}$ zatvoren skup. Neka je $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz u $A^{\overline{\delta}}$ koji konvergira prema $x \in X$ te neka je $\varepsilon > 0$. Prema definiciji limesa, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $d(x, x_n) < \varepsilon$. Sada zbog nejednakosti trokuta te činjenice da je $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A^{\overline{\delta}}$, za svaki $n \geq n_0$ imamo

$$\inf_{y \in A} d(x, y) \leq d(x, x_n) + \inf_{y \in A} d(x_n, y) < \varepsilon + \delta, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Budući da lijeva strana gornje nejednakosti ne ovisi o ε, zaključujemo

$$\inf_{y\in A} d(x,y) \leq \delta,$$

što nam daje $x \in A^{\overline{\delta}}$. Konačno, koristeći propoziciju 1.1.10 zaključujemo da je $A^{\overline{\delta}}$ zatvoren skup. □

1.2 Kapacitet

Neka je dan metrički prostor (X,d). Također, neka je $(X,\mathcal{B})$ izmjeriv prostor, gdje $\mathcal{B}$ označava Borelovu σ-algebru, tj. σ-algebru koja je generirana svim otvorenim/zatvorenim skupovima u (X,d). Od prije već znamo da uz izmjeriv prostor $(X,\mathcal{B})$ promatramo i neku mjeru μ na tom prostoru. Mjera μ na izmjerivom prostoru je funkcija $\mu\colon \mathcal{B} \to [0,+\infty)$ koja je σ-aditivna i za koju vrijedi $\mu(\emptyset) = 0$. Nadalje, ako je $\mu(X) = 1$, mjeru nazivamo vjerojatnosnom mjerom. Znamo da (vjerojatnosna) mjera zadovoljava neka svojstva kao što su monotonost, neprekidnost odozdo i neprekidnost odozgo (ne nužno svaka, ali vjerojatnosna da). Kapacitet na prostoru $(X,\mathcal{B})$ je također funkcija $\nu\colon \mathcal{B} \to [0,+\infty)$ koja zadovoljava slična svojstva kao (vjerojatnosna) mjera, ali malo slabija. U ovom potpoglavlju ćemo uvesti definiciju kapaciteta, navesti neke primjere istih te navesti neka njegova svojstva.

Definicija 1.2.1. *Neka je dan metrički prostor (X,d) te neka $\mathcal{B}$ označava Borelovu σ-algebru na tom prostoru.* Kapacitet *je funkcija $\nu\colon \mathcal{B} \to [0,+\infty)$ koja zadovoljava sljedeća tri svojstva:*

(K1) $\nu(\emptyset) = 0, \quad \nu(X) = 1,$

(K2) za svaki $A, B \in \mathcal{B}$ vrijedi

$$A \subseteq B \Rightarrow \nu(A) \leq \nu(B),$$

(K3) za svaki niz skupova $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$, vrijedi

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \subseteq A := \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \nu(A_n) = \nu(A).$$

Svojstvo $(K2)$ zovemo monotonost, a svojstvo $(K3)$ zovemo neprekidnost odozdo. Dakle, vidimo da je kapacitet funkcija koja je monotona i neprekidna odozdo te je kapacitet cijelog prostora X jednak 1 kao kod vjerojatnosne mjere.

Od sada nadalje, kratica $A_n \uparrow A$ označava da je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz Borelovih skupova koji teži prema A. Slično, $A_n \downarrow A$ označava padajući niz Borelovih skupova koji teži prema A.

Definicija 1.2.2. *Za kapacitet v na prostoru $(X, \mathcal{B})$ kažemo da je* subaditivan *ako za svaki $A, B \in \mathcal{B}$ vrijedi*

$$v(A \cup B) \leq v(A) + v(B).$$

Definicija 1.2.3. *Za kapacitet v na prostoru $(X, \mathcal{B})$ kažemo da je* 2-alternirajući *ili* submodularan *ako za svaki $A, B \in \mathcal{B}$ vrijedi*

$$v(A \cup B) + v(A \cap B) \leq v(A) + v(B).$$

Napomena 1.2.4. *Očito je svaki submodularni kapacitet ujedno i subaditivni kapacitet. Obrat općenito ne vrijedi što ćemo vidjeti u Primjeru 1.2.8.*

Primjer 1.2.5. *Svaka vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}$ na metričkom prostoru (X, d), odnosno izmjerivom prostoru $(X, \mathcal{B})$, je 2-alternirajući kapacitet. Zaista, budući da je svaka mjera monotona i neprekidna odozdo, vrijede $(K2)$ i $(K3)$. Također, budući da je mjera praznog skupa uvijek jednaka 0 te jer je $\mathbb{P}$ vjerojatnosna, vrijedi i $(K1)$. Nadalje, zbog formule uključivanja-isključivanja*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

slijedi da je $\mathbb{P}$ 2-alternirajući kapacitet.

Primjer 1.2.6. *Neka je (X, d) metrički prostor. Nadalje, za proizvoljni $m \in \mathbb{N}$ neka su $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \ldots, \mathbb{P}_m$ vjerojatnosne mjere na $(X, \mathcal{B})$. Tada je funkcija $v \colon \mathcal{B} \to [0, +\infty)$ definirana s*

$$v(A) := \sup_{k=1:m} \mathbb{P}_k(A)$$

subaditivni kapacitet.

Zaista, jer $\mathbb{P}_k(\emptyset) = 0$ i $\mathbb{P}_k(X) = 1$, za svaki $k = 1, 2, \ldots, m$, vrijedi $(K1)$. Neka su $A, B \in \mathcal{B}$ takvi da $A \subseteq B$. Budući da je vjerojatnosna mjera monotona, za svaki $k = 1, 2, \ldots, m$ imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_k(A) &\leq \mathbb{P}_k(B), \\ \Rightarrow \sup_{k=1:m} \mathbb{P}_k(A) &\leq \sup_{k=1:m} \mathbb{P}_k(B), \\ \Rightarrow v(A) &\leq v(B). \end{aligned}$$

Dakle, vrijedi $(K2)$. Ako je $A_n \uparrow A$, zbog neprekidnosti odozdo vjerojatnosne mjere, za svaki $k = 1, 2, \ldots, m$ vrijedi

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_k(A_n) = \mathbb{P}_k(A),\\
\Rightarrow\ &\sup_{k=1:m} \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}_k(A_n) = \sup_{k=1:m} \mathbb{P}_k(A),\\
\Rightarrow\ &\lim_{n\to+\infty} \sup_{k=1:m} \mathbb{P}_k(A_n) = v(A),\\
\Rightarrow\ &\lim_{n\to+\infty} v(A_n) = v(A),
\end{aligned}$$

gdje u trećoj jednakosti limes i supremum mogu zamijeniti mjesta jer je m konačan. Dakle, vrijedi i $(K3)$ *pa je* v *kapacitet. Nadalje, za* $A, B \in \mathcal{B}$ *imamo*

$$\begin{aligned}
v(A \cup B) &= \sup_{k=1:m} \mathbb{P}_k(A \cup B)\\
&\leq \sup_{k=1:m} \left(\mathbb{P}_k(A) + \mathbb{P}_k(B)\right)\\
&\leq \sup_{k=1:m} \mathbb{P}_k(A) + \sup_{k=1:m} \mathbb{P}_k(B)\\
&= v(A) + v(B).
\end{aligned}$$

Stoga, v *je subaditivni kapacitet.*

Napomena 1.2.7. *Nije nužno svaki kapacitet ujedno i subaditivan. Na primjer,* logaritamski kapacitet *u [7] je primjer kapaciteta (i to Choquetovog) koji nije subaditivan.*

Primjer 1.2.8. *Neka je* $X = \{1, 2, 3, 4\}$ *te neka je* d *diskretna metrika na tom prostoru, tj.*

$$d(x, y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases} .$$

Tada je svaki podskup od X *otvoren skup. Stoga vrijedi* $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$. *Neka su* $\mathbb{P}_1$ *i* $\mathbb{P}_2$ *vjerojatnosne mjere na* $(X, \mathcal{B})$ *zadane na elementarnim događajima kao*

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{P}_1(\{1\}), \mathbb{P}_1(\{2\}), \mathbb{P}_1(\{3\}), \mathbb{P}_1(\{4\})\right) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{16}, \frac{3}{16}, \frac{1}{8}\right),\\
\left(\mathbb{P}_2(\{1\}), \mathbb{P}_2(\{2\}), \mathbb{P}_2(\{3\}), \mathbb{P}_2(\{4\})\right) &= \left(\frac{5}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{3}{16}\right).
\end{aligned}$$

Iz Primjera 1.2.6 slijedi da je

$$v(A) = \sup\left\{\mathbb{P}_1(A), \mathbb{P}_2(A)\right\}, \quad A \in \mathcal{B},$$

subaditivni kapacitet. No, ako uzmemo $A = \{1,2\}$ *i* $B = \{1,3\}$*, imamo*

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \sup\left\{\frac{11}{16}, \frac{11}{16}\right\} = \frac{11}{16}, \\ \nu(B) &= \sup\left\{\frac{11}{16}, \frac{12}{16}\right\} = \frac{12}{16}, \\ \nu(A \cup B) &= \sup\left\{\frac{14}{16}, \frac{13}{16}\right\} = \frac{14}{16}, \\ \nu(A \cap B) &= \sup\left\{\frac{8}{16}, \frac{10}{16}\right\} = \frac{10}{16}. \end{aligned}$$

Iz toga slijedi

$$\nu(A \cup B) + \nu(A \cap B) = \frac{14}{16} + \frac{10}{16} = \frac{24}{16} > \frac{23}{16} = \frac{11}{16} + \frac{12}{16} = \nu(A) + \nu(B).$$

Dakle, vidimo da je ν *subaditivni kapacitet koji nije 2-alternirajući.*

Primjer 1.2.9. *Neka je dan* $\varepsilon \in (0,1)$ *te neka je* $(X, \mathcal{B}, \mu)$ *vjerojatnosni prostor na metričkom prostoru* (X, d)*. Definirajmo funkciju* $\nu\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ *kao* $\nu(\emptyset) = 0$*, a za* $A \in \mathcal{B}$*,* $A \neq \emptyset$ *stavimo*

$$\nu(A) := \min(\mu(A) + \varepsilon, 1).$$

Tada je ν *subaditivni kapacitet. Zaista, jer je* μ *vjerojatnosna mjera, imamo*

$$\nu(X) = \min(\mu(X) + \varepsilon, 1) = \min(1 + \varepsilon, 1) = 1.$$

Za $A \subseteq B$*,* $A, B \in \mathcal{B}$ *zbog monotonosti vjerojatnosti imamo* $\mu(A) \leq \mu(B)$*. Stoga, ako je* $\nu(B) = 1$*, očito imamo*

$$\nu(A) = \min(\mu(A) + \varepsilon, 1) \leq 1 = \nu(B).$$

U slučaju da je $\nu(B) = \mu(B) + \varepsilon$*, slijedi* $\mu(A) + \varepsilon \leq \mu(B) + \varepsilon$ *pa stoga*

$$\nu(A) = \min(\mu(A) + \varepsilon, 1) \leq \mu(A) + \varepsilon \leq \mu(B) + \varepsilon = \nu(B).$$

Dakle, ν *je monoton. Neka vrijedi* $A_n \uparrow A$*. Zbog neprekidnosti odozdo od* μ *vrijedi*

$$\lim_{n \to +\infty} \mu(A_n) = \mu(A).$$

Stoga

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} \nu(A_n) &= \lim_{n \to +\infty} \min(\mu(A_n) + \varepsilon, 1) \\ &= \min\left(\lim_{n \to +\infty} \mu(A_n) + \varepsilon, 1\right) \\ &= \min(\mu(A) + \varepsilon, 1) \\ &= \nu(A). \end{aligned}$$

Dakle, ν je kapacitet. Nadalje, za $A, B \in \mathcal{B}$ zbog formule uključivanja-isključivanja imamo

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \leq \mu(A) + \mu(B).$$

Ako je barem jedan od $\nu(A)$ i $\nu(B)$ jednak 1, tada imamo

$$\nu(A) + \nu(B) \geq 1 \geq \min(\mu(A \cup B) + \varepsilon, 1) = \nu(A \cup B).$$

S druge strane, ako je $\nu(A) = \mu(A) + \varepsilon$ i $\nu(B) = \mu(B) + \varepsilon$, slijedi

$$\begin{aligned} \nu(A \cup B) &= \min(\mu(A \cup B) + \varepsilon, 1) \\ &\leq \mu(A \cup B) + \varepsilon \\ &\leq \mu(A) + \mu(B) + \varepsilon \\ &\leq \mu(A) + \mu(B) + 2\varepsilon \\ &= \big(\mu(A) + \varepsilon\big) + \big(\mu(B) + \varepsilon\big) \\ &= \nu(A) + \nu(B). \end{aligned}$$

Dakle, ν je zaista subaditivan kapacitet.

Definicija 1.2.10. *Za funkciju $f : \mathcal{B} \to [0, +\infty)$ na metričkom prostoru (X, d) kažemo da je σ-*subaditivna *ako za svaki niz Borelovih skupova $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vrijedi*

$$f\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{+\infty} f(A_n)$$

Propozicija 1.2.11. *Kapacitet ν na prostoru (X, d) je subaditivan ako i samo ako je σ-subaditivan.*

Dokaz. S obzirom da obrat trivijalno vrijedi, dovoljno je pokazati da subaditivnost kapaciteta implicira σ-subaditivnost. Stoga, neka je ν subaditivan kapacitet na (X, d) te neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan niz Borelovih skupova na (X, d). Za $N \in \mathbb{N}$ definiramo skupove B_N kao

$$B_N := \bigcup_{n=1}^{N} A_n.$$

Niz $(B_N)_{N\in\mathbb{N}}$ je rastući niz i vrijedi

$$B_N \uparrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n =: A.$$

Iz svojstva $(K3)$ slijedi

$$\lim_{N\to+\infty} \nu(B_N) = \nu(A). \tag{1.2}$$

Nadalje, zbog subaditivnosti za svaki $N \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{N} \nu(A_n).$$

Puštanjem limesa $N \to +\infty$ u gornjoj nejednakosti te koristeći jednakost (1.2) zaključujemo

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \nu(A) = \lim_{N\to+\infty} \nu(B_N) = \lim_{N\to+\infty} \nu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) \leq \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \nu(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} \nu(A_n).$$

Dakle, ν je σ-subaditivan. □

1.3 Regularnost i neprekidnost odozgo

Prisjetimo se iskaza klasičnog Luzinovog teorema za vjerojatnosnu mjeru.

Teorem 1.3.1. *Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor, neka je μ vjerojatnosna mjera na $(X, \mathcal{B})$ te neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Tada za svaku Borel-izmjerivu funkciju $u\colon (X, \mathcal{B}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ postoji kompaktan skup $K = K(u, \varepsilon) \subseteq X$ takav da $\mu(X \setminus K) \leq \varepsilon$ te je restrikcija $u|_K$ neprekidna.*

Kao što smo već rekli, glavni cilj ovog rada je pronaći nužne i dovoljne uvjete da bi analogon ovog teorema vrijedio i za određenu klasu kapaciteta na prostoru $(X, \mathcal{B})$. Ono što ćemo zahtjevati je da kapacitet bude subaditivan. Dakle, tražimo nužne i dovoljne uvjete koje mora zadovoljavati subaditivan kapacitet ν na $(X, \mathcal{B})$ da bi vrijedio analogon Teorema 1.3.1. Prije toga, uvodimo novu definiciju.

Definicija 1.3.2. *Za kapacitet ν na metričkom prostoru (X, d) kažemo da je* regularan *ako za svaki Borelov skup A i za svaki $\varepsilon > 0$ postoje otvoren skup $O = O(A, \varepsilon)$ i zatvoren skup $F = F(A, \varepsilon)$ takvi da vrijedi $F \subseteq A \subseteq O$ i $\nu(O \setminus F) < \varepsilon$.*

Dakle, vidimo da je kapacitet regularan ako svaki Borelov skup možemo proizvoljno dobro aproksimirati iznutra nekim zatvorenim skupom, a izvana otvorenim skupom.

Prema Definiciji 1.2.1, uvjet $(K3)$, vidimo da je svaki kapacitet neprekidan odozdo na rastuće nizove skupova. Ono što će se pokazati ključnim da bi vrijedio Luzinov teorem za kapacitet je upravo neprekidnost odozgo na padajuće nizove skupova koju nemamo zagarantiranu za proizvoljni subaditivni kapacitet. U Propoziciji 1.3.4 ćemo pokazati da neprekidnost odozgo za (proizvoljne) padajuće nizove skupova vrijedi čim vrijedi neprekidnost odozgo za padajuće nizove otvorenih skupova. No, prije toga slijedi jedan rezultat koji će nam biti potreban.

Lema 1.3.3. *Neka je ν subaditivan kapacitet na metričkom prostoru (X, d) koji je neprekidan odozgo na padajuće nizove otvorenih skupova, tj. neka vrijedi*

$$O_n \text{ otvoren } \forall n \in \mathbb{N}, \quad O_n \downarrow O \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \nu(O_n) = \nu(O). \tag{1.3}$$

Tada je ν regularan kapacitet.

Dokaz. Definirajmo skup $\mathcal{M}$ kao

$$\mathcal{M} = \Big\{ A \in \mathcal{B} : (\forall \varepsilon > 0)(\exists\, O \text{ otvoren i } F \text{ zatvoren}) \left(F \subseteq A \subseteq O \text{ i } \nu(O \setminus F) < \varepsilon \right) \Big\}.$$

Dakle, $\mathcal{M}$ je skup svih Borelovih skupova koji zadovoljavaju Definiciju 1.3.2. Mi želimo pokazati $\mathcal{M} = \mathcal{B}$. Očito vrijedi $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}$. Pokažimo i obratnu inkluziju. Prvo ćemo pokazati da je $\mathcal{M}$ σ-algebra. Budući da su $\emptyset$ i X i otvoreni i zatvoreni, za svaki $\varepsilon > 0$ imamo

$$\emptyset \subseteq \emptyset \subseteq \emptyset \text{ i } \nu(\emptyset \setminus \emptyset) = 0 < \varepsilon$$

te analogno za X. Dakle, $\emptyset \in \mathcal{M}$ i $X \in \mathcal{M}$. Neka je $A \in \mathcal{M}$. Tada postoje O otvoren i F zatvoren takvi da $F \subseteq A \subseteq O$ i $\nu(O \setminus F) < \varepsilon$. No, tada je O^c zatvoren i F^c otvoren i vrijedi $O^c \subseteq A^c \subseteq F^c$. Također, imamo i

$$\nu(F^c \setminus O^c) = \nu(F^c \cap O) = \nu(O \cap F^c) = \nu(O \setminus F) < \varepsilon.$$

Dakle, imamo $A^c \in \mathcal{M}$. Neka je $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ niz skupova u $\mathcal{M}$ te neka je $\varepsilon > 0$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje otvoreni skupovi O_n i zatvoreni skupovi F_n takvi da $F_n \subseteq A_n \subseteq O_n$ te $\nu(O_n \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Iz Propozicije 1.1.6 slijedi da je $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n$ otvoren skup, a iz Propozicije 1.1.7 slijedi da je $\bigcap_{n=1}^{N} F_n$ zatvoren skup za svaki $N \in \mathbb{N}$. Prema Propoziciji 1.1.9 je onda

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} O_n \setminus \bigcap_{n=1}^{N} F_n$$

otvoren skup za svaki $N \in \mathbb{N}$. Budući da vrijedi

$$\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} O_n \setminus \bigcup_{n=1}^{N} F_n \right) \downarrow \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} O_n \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n \right),$$

kada $N \to +\infty$, prema (1.3) zaključujemo

$$\lim_{N \to +\infty} \nu \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} O_n \setminus \bigcup_{n=1}^{N} F_n \right) = \nu \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} O_n \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n \right). \tag{1.4}$$

S druge strane, zbog subaditivnosti i monotonosti slijedi

$$\begin{aligned}\nu\left(\bigcup_{n=1}^{N} O_n \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n\right) &\leq \sum_{n=1}^{N} \nu\left(O_n \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n\right)\\ &\leq \sum_{n=1}^{N} \nu(O_n \setminus F_n)\\ &\leq \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}},\end{aligned}$$

gdje smo u drugoj nejednakosti koristili $O_n \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \subseteq O_n \setminus F_n$. Nadalje, primijetimo da kada $N \to +\infty$ imamo

$$\bigcup_{n=1}^{N} O_n \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n \uparrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} O_n \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$$

pa zbog neprekidnosti odozdo slijedi

$$\begin{aligned}\nu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} O_n \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n\right) &= \lim_{N\to+\infty} \nu\left(\bigcup_{n=1}^{N} O_n \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n\right)\\ &\leq \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\\ &= \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned} \tag{1.5}$$

Sada, zbog jednakosti (1.4) i nejednakosti (1.5) slijedi da postoji dovoljno veliki $N_0 \in \mathbb{N}$ takav da

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} O_n \setminus \bigcup_{n=1}^{N_0} F_n\right) < \varepsilon. \tag{1.6}$$

Dakle, pronašli smo otvoren skup $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n$ i zatvoren skup $\bigcup_{n=1}^{N_0} F_n$ takve da vrijedi (1.6) i imamo

$$\bigcup_{n=1}^{N_0} F_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} O_n.$$

Dakle, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$ pa zaključujemo da je $\mathcal{M}$ σ-algebra na (X, d).

Pokažimo sada da $\mathcal{M}$ sadrži sve zatvorene skupove. Neka je F proizvoljan zatvoren skup i neka je $\varepsilon > 0$. Budući da je otvorena δ-okolina od F otvoren skup (Propozicija 1.1.14), iz Propozicije 1.1.9 slijedi da je $F^\delta \setminus F$ otvoren skup za svaki $\delta > 0$. Ako stavimo $\delta_n = \frac{1}{n}$, imamo

$$(F^{\delta_n} \setminus F) \downarrow \bigcap_{n=1}^{+\infty} (F^{\delta_n} \setminus F) = \emptyset$$

pa zbog (1.3) zaključujemo

$$\lim_{n\to+\infty} v(F^{\delta_n} \setminus F) = v(\emptyset) = 0.$$

Stoga, postoji $N \in \mathbb{N}$ dovoljno velik takav da $v(F^{\delta_N} \setminus F) < \varepsilon$. Dakle, pronašli smo otvoren skup F^{δ_N} i imamo zatvoren skup F takve da vrijedi $F \subseteq F \subseteq F^{\delta_N}$ i $v(F^{\delta_N} \setminus F) < \varepsilon$. Zaključujemo $F \in \mathcal{M}$.

Dakle, $\mathcal{M}$ je σ-algebra koja sadrži sve zatvorene skupove pa budući da je $\mathcal{B}$ najmanja σ-algebra koja sadrži sve zatvorene skupove, zaključujemo $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{M}$ te stoga $\mathcal{M} = \mathcal{B}$. Dakle, v je regularan kapacitet. $\square$

Propozicija 1.3.4. *Neka je v subaditivan kapacitet na metričkom prostoru (X, d). Tada neprekidnost odozgo na nizove otvorenih skupova, odnosno svojstvo*

$$O_n \text{ otvoren } \forall n \in \mathbb{N}, \quad O_n \downarrow O \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} v(O_n) = v(O), \tag{1.7}$$

vrijedi ako i samo ako vrijedi neprekidnost odozgo, odnosno svojstvo

$$A_n \downarrow A \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} v(A_n) = v(A). \tag{1.8}$$

Dokaz. Budući da je obratna implikacija trivijalna, dovoljno je pokazati da implikacija (1.7) povlači implikaciju (1.8). Stoga, pretpostavimo da vrijedi (1.7). Neka je $A_n \downarrow A$ proizvoljan padajući niz Borelovih skupova te neka je $\varepsilon > 0$. Iz Leme 1.3.3 slijedi da je v regularan. Stoga za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje otvoreni skupovi O_n i zatvoreni skupovi F_n takvi da $F_n \subseteq A_n \subseteq O_n$ te vrijedi $v(O_n \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Jer $O_n \setminus A_n \subseteq O_n \setminus F_n$, zbog monotonosti zaključujemo

$$v(O_n \setminus A_n) \leq v(O_n \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}. \tag{1.9}$$

Stavimo $O := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$. Očito je $O \subseteq O_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Stoga, koristeći σ-subaditivnost

(Propozicija 1.2.11), monotonost i nejednakost (1.9) zaključujemo

$$\begin{aligned}
v(O \setminus A) &= v\left(O \setminus \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = v\left(O \cap \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right)^c\right) = v\left(O \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^c\right)\right) \\
&= v\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (O \cap A_n^c)\right) = v\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (O \setminus A_n)\right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty} v(O \setminus A_n) \\
&\leq \sum_{n=1}^{+\infty} v(O_n \setminus A_n) \\
&< \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \\
&= \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Sada definirajmo skupove O'_n kao

$$O'_n := \bigcap_{m=1}^{n} O_m.$$

Niz $(O'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je očito padajući i vrijedi $O'_n \downarrow O$, a zbog Propozicije 1.1.6 je skup O'_n otvoren za svaki $n \in \mathbb{N}$. Stoga, zbog pretpostavke (1.7) možemo zaključiti

$$\lim_{n\to+\infty} v(O'_n) = v(O). \tag{1.11}$$

Sada, zbog monotonosti i jednakosti (1.11) možemo zaključiti da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$v(O'_n) - v(O) = |v(O'_n) - v(O)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.12}$$

Budući da je niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajući, zbog $A_n \subseteq O_n$ zaključujemo

$$A_n \subseteq A_m \subseteq O_m, \quad \forall m = 1, 2, \ldots, n.$$

Stoga imamo

$$A \subseteq A_n \subseteq \bigcap_{m=1}^{n} O_m = O'_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

što nam daje

$$A \subseteq \bigcap_{n=1}^{+\infty} O'_n = O \subseteq O'_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.13}$$

Pretpostavimo prvo da $A = O$. U tom slučaju, koristeći monotonost i nejednakost (1.12) zaključujemo da za svaki $n \geq n_0$ imamo

$$\begin{aligned} \nu(A_n) - \nu(A) &= \nu(A_n) - \nu(O) \\ &\leq \nu(O_n') - \nu(O) \\ &< \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Stoga u ovom slučaju vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} \nu(A_n) = \nu(A).$$

Sada pretpostavimo $A \subset O$. Pokažimo da u tom slučaju postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da $A_{n_1} \subseteq O$ pa zbog toga za svaki $n \geq n_1$ vrijedi $A_n \subseteq O$. Pretpostavimo suprotno, tj. da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $A_n \supset O$. Tada imamo

$$O \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A,$$

što je kontradikcija s pretpostavkom $A \subset O$. Dakle, za svaki $n \geq n_1$ imamo $A_n \subseteq O$ pa zbog monotonosti vrijedi $O_n' \setminus O \subseteq O_n' \setminus A_n$. Sada, koristeći nejednakost (1.9) zaključujemo da za svaki $n \geq n_1$ vrijedi

$$\nu(O_n' \setminus O) \leq \nu(O_n' \setminus A_n) \leq \nu(O_n \setminus A_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.14}$$

Konačno, zbog relacije (1.13) slijedi

$$O_n' \setminus A = ((O_n' \setminus A) \setminus O) \cup ((O_n' \setminus A) \cap O) = (O_n' \setminus O) \cup (O \setminus A),$$

pa zbog subaditivnosti, monotonosti te nejednakosti (1.10) i (1.14) za svaki $n \geq n_1$ imamo

$$\begin{aligned} \nu(A_n) - \nu(A) &\leq \nu(A_n \setminus A) \leq \nu(O_n' \setminus A) \\ &\leq \nu(O_n' \setminus O) + \nu(O \setminus A) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Budući da zbog monotonosti vrijedi $\nu(A_n) \geq \nu(A)$, slijedi $|\nu(A_n) - \nu(A)| = \nu(A_n) - \nu(A)$ pa zaključujemo

$$\lim_{n\to+\infty} \nu(A_n) = \nu(A).$$

□

1.4 Uniformna neprekidnost

U ovom potpoglavlju ćemo dokazati nekoliko rezultata koji su vezani uz uniformnu konvergenciju niza izmjerivih funkcija na metričkom prostoru (X, d) koji će nam biti potrebni za dokaz Luzinovog teorema za kapacitet.

Definicija 1.4.1. *Neka je $A \subseteq X$ podskup metričkog prostora (X, d). Kažemo da niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdje je $f_n \colon A \to \mathbb{R}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$,* konvergira uniformno na *A prema $f \colon A \to \mathbb{R}$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ i za svaki $x \in A$ vrijedi*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Lema 1.4.2. *Neka je dan podskup A metričkog prostora (X, d). Također, neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, gdje je $f_n \colon A \to \mathbb{R}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, niz neprekidnih funkcija na A koji uniformno konvergira prema funkciji $f \colon A \to \mathbb{R}$. Tada je funkcija f neprekidna na A.*

Dokaz. Neka su $c \in A$ i $\varepsilon > 0$ prizvoljni. Jer $f_n \to f$ uniformno na A, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ i za svaki $x \in A$ vrijedi

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.15}$$

Posebno, budući da (1.15) vrijedi za svaki $x \in A$, ako uzmemo $x = c$, imamo

$$|f_n(c) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.16}$$

Nadalje, jer je f_{n_0} neprekidna u c, postoji $\delta > 0$ takav da

$$d(x, c) < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(c)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1.17}$$

Sada smo našli $\delta > 0$ takav da za $x \in A$ takav da za $d(x, c) < \delta$ vrijedi

$$\begin{aligned} |f(x) - f(c)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(c)| + |f_{n_0}(c) - f(c)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

gdje smo u prvoj nejednakosti iskoristili nejednakost trokuta. Po definiciji neprekidnosti funkcije u točki zaključujemo da je f neprekidna u c. S obzirom da je c bio proizvoljan, zaključujemo da je f neprekidna na A. □

Definicija 1.4.3. *Neka je dan niz realnih brojeva $(a_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ te neka je $(A_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ particija metričkog prostora prostora (X, d) takva da su svi A_m Borelovi skupovi, tj. vrijedi*

- $A_m \in \mathcal{B}, \forall m \in \mathbb{Z}$,
- $\bigcup\limits_{m\in\mathbb{Z}} A_m = X$,
- $A_m \cap A_n = \emptyset, \forall m \neq n$.

Kažemo da je funkcija $f\colon X \to \mathbb{R}$ jednostavna prebrojiva *ako je oblika*

$$f(x) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m \mathbb{1}_{A_m}(x),$$

gdje $\mathbb{1}_A$ *označava karakterističnu funkciju skupa* A.

Napomena 1.4.4. *Budući da su* $\mathbb{N}$ *i* $\mathbb{Z}$ *oba prebrojivi skupovi, očito smo mogli zamijeniti skup* $\mathbb{Z}$ *u Definiciji 1.4.3 sa skupom* $\mathbb{N}$.

Dakle, funkcija je jednostavna prebrojiva ako poprima najviše prebrojivo mnogo vrijednosti s time da zahtijevamo da f bude izmjeriva (zbog toga dodajemo uvjet da su svi A_m Borelovi skupovi).

Lema 1.4.5. *Za svaku izmjerivu funkciju* $f\colon X \to \mathbb{R}$ *na metričkom prostoru* (X, d) *postoji niz jednostavnih prebrojivih funkcija* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, f_n\colon X \to \mathbb{R}$ *koji konvergira uniformno prema* f *na* X.

Dokaz. Neka je $f\colon X \to \mathbb{R}$ proizvoljna izmjeriva funkcija i neka je $\varepsilon > 0$. Fiksirajmo $n \in \mathbb{N}$. Sada za $m \in \mathbb{Z}$ definiramo skupove $A_{m,n}$ kao

$$A_{m,n} := f^{-1}\left(\left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n}\right\rangle\right) = \left\{\frac{m}{n} \leq f < \frac{m+1}{n}\right\} = \left\{x \in X : \frac{m}{n} \leq f(x) < \frac{m+1}{n}\right\}.$$

Budući da je f izmjeriva, slijedi $A_{m,n} \in \mathcal{B}$ za svaki $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$. Nadalje, zbog svojstava praslike, zaključujemo da su za fiksni $n \in \mathbb{N}$ skupovi $A_{m,n}$ disjunktni te u uniji daju cijeli X. Dakle, $(A_{m,n})_{m\in\mathbb{Z}}$ je particija skupa X. Definirajmo i niz $(a_{m,n})_{m\in\mathbb{Z}}$ kao

$$a_{m,n} := \frac{m}{n}.$$

Sada definiramo niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}, f_n\colon X \to \mathbb{R}$ kao

$$f_n(x) := \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{m,n} \mathbb{1}_{A_{m,n}}(x).$$

Očito su funkcije f_n jednostavne prebrojive. Neka je $x \in X$ prozvoljan. Tada se x nalazi u točno jednom od skupova $A_{m,n}$ (za fiksni n). Pretpostavimo $x \in A_{m',n}$ za neki $m' \in \mathbb{Z}$. Tada je

$$f_n(x) = \frac{m'}{n}$$

te prema definiciji skupova $A_{m,n}$ vrijedi i

$$f(x) \in \left[\frac{m'}{n}, \frac{m'+1}{n}\right).$$

Dakle, za bilo koji $x \in X$ vrijedi

$$|f(x) - f_n(x)| = \left|f(x) - \frac{m'}{n}\right| \leq \left|\frac{m'+1}{n} - \frac{m'}{n}\right| = \frac{1}{n}. \tag{1.18}$$

Pokažimo sada da niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uniformno konvergira prema f na X. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Koristeći nejednakost (1.18), zaključujemo da za svaki $n \geq n_0$ te za svaki $x \in X$ vrijedi

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_n(x)| &= \left|f(x) - \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{m,n} \mathbb{1}_{A_{m,n}}(x)\right| \\
&= \left|f(x) - \frac{m'}{n}\right| \\
&\leq \left|\frac{m'+1}{n} - \frac{m'}{n}\right| \\
&= \frac{1}{n} \\
&\leq \frac{1}{n_0} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Dakle, $f_n \to f$ uniformno na X. □

Poglavlje 2

Luzinov teorem za kapacitet

Sada imamo sve potrebno da bismo dokazali nužne i dovoljne uvjete da bi vrijedio analogon Teorema 1.3.1 za klasu subaditivnih kapaciteta.

2.1 Luzinov teorem za kapacitet

Teorem 2.1.1 (Luzinov teorem za kapacitet)**.** *Neka je v subaditivan kapacitet na kompaktnom metričkom prostoru (X, d). Tada neprekidnost odozgo na nizove otvorenih skupova, odnosno svojstvo*

$$O_n \text{ otvoren } \forall n \in \mathbb{N}, \quad O_n \downarrow O \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} v(O_n) = v(O) \tag{2.1}$$

vrijedi ako i samo ako vrijedi Luzinov teorem za kapacitet, odnosno

> *za svaku Borel-izmjerivu funkciju $u\colon X \to \mathbb{R}$ i za svaki $\varepsilon > 0$ postoji kompaktan skup $K \subseteq X$ takav da $v(X \setminus K) < \varepsilon$ te je restrikcija $u|_K$ neprekidna.* (2.2)

Dokaz. Prvo dokazujemo dovoljnost uvjeta (2.1). Stoga, pretpostavimo da je v neprekidan odozgo na padajuće nizove otvorenih skupova. Neka je $u\colon X \to \mathbb{R}$ Borel-izmjeriva funkcija i neka je $\varepsilon > 0$. Prvo pretpostavimo da je u jednostavna prebrojiva funkcija. Zbog Napomene 1.4.4, možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je u oblika

$$u(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \mathbb{1}_{A_n}(x),$$

gdje je $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ i $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ je particija skupa X. Prema Lemi 1.3.3, slijedi da je v regularan kapacitet. Stoga, za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje otvoreni skupovi O_n i zatvoreni skupovi F_n takvi da vrijedi $F_n \subseteq A_n \subseteq O_n$ i $v(O_n \setminus F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Budući da je $A_n \subseteq O_n$ za svaki $n \in \mathbb{N}$

te jer je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ particija, zaključujemo

$$X = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=1}^{+\infty} O_n \subseteq X.$$

Stoga,

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} O_n = X. \tag{2.3}$$

S obzirom da je prema propoziciji 1.1.6 skup $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n$ otvoren, a prema Propoziciji 1.1.7 skup $\bigcup\limits_{n=1}^{N} F_n$ zatvoren za svaki $N \in \mathbb{N}$, iz Propozicije 1.1.9 zaključujemo da je $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} O_n \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{N} F_n$ otvoren za svaki $N \in \mathbb{N}$. S obzirom da je to padajući niz (kada N raste), pretpostavka (2.1) nam daje

$$\lim_{N\to+\infty} v\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} O_n \setminus \bigcup_{n=1}^{N} F_n\right) = v\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} O_n \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n\right). \tag{2.4}$$

S druge strane, zbog subaditivnosti i monotonosti imamo

$$\begin{aligned} v\left(\bigcup_{n=1}^{N} O_n \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n\right) &\leq \sum_{n=1}^{N} v\left(O_n \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{N} v(O_n \setminus F_n) \\ &< \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Također, zbog neprekidnosti odozdo i činjenice da

$$\bigcup_{n=1}^{N} O_n \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n \uparrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} O_n \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n,$$

koristeći (2.5) možemo zaključiti

$$\begin{aligned} \nu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} O_n \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n\right) &= \lim_{N\to+\infty} \nu\left(\bigcup_{n=1}^{N} O_n \setminus \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n\right) \\ &\leq \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \\ &= \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Sada, iz (2.4) i (2.6) možemo zaključiti da postoji $N_0 \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi

$$\nu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} O_n \setminus \bigcup_{n=1}^{N_0} F_n\right) < \varepsilon. \tag{2.7}$$

Sada definirajmo skup K kao

$$K := \bigcup_{n=1}^{N_0} F_n.$$

Budući da je K konačna unija zatvorenih skupova, iz Propozicije 1.1.7 slijedi da je K zatvoren skup. No, jer je X kompaktan metrički prostor, iz Propozicije 1.1.8 slijedi da je K kompaktan skup. Nadalje, s obzirom da su A_n disjunktni, tada su i F_n disjunktni jer $F_n \subseteq A_n$. Funkcija u je konstanta na svakom od skupova F_n pa je neprekidna na svakom F_n. S obzirom da su to zatvoreni i disjunktni skupovi, slijedi da je u neprekidna na K. Primijetimo da je bitna zatvorenost od F_n da bismo mogli zaključiti da je u neprekidna na uniji $\bigcup_{n=1}^{N_0} F_n = K$. Dakle, pronašli smo kompaktan skup K na kojem je u neprekidna te zbog (2.7) imamo

$$\nu(X \setminus K) = \nu\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} O_n \setminus \bigcup_{n=1}^{N_0} F_n\right) < \varepsilon.$$

Dakle, vrijedi Luzinov teorem u ovom slučaju.

Neka je sada u proizvoljna izmjeriva funkcija. Po Lemi 1.4.5 postoji niz $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jednostavnih prebrojivih funkcija koji uniformno konvergira prema u na X. Po prethodno dokazanom, za svaku od funkcija u_n postoji kompaktan skup K_n takav da vrijedi $\nu(X \setminus K_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ te je restrikcija $u_n|_{K_n}$ neprekidna za svaki $n \in \mathbb{N}$. Sada definiramo skup K kao

$$K := \bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n.$$

Ponovno, po Propoziciji 1.1.7 zaključujemo da je K zatvoren skup pa po Propoziciji 1.1.8 zaključujemo da je K kompaktan skup. Sada zbog σ-subaditivnosti (Propozicija 1.2.11) imamo

$$\begin{aligned} v(X \setminus K) &= v\left(X \setminus \bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n\right) = v\left(X \cap \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} K_n\right)^c\right) = v\left(X \cap \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n^c\right)\right) \\ &= v\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (X \cap K_n^c)\right) = v\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} (X \setminus K_n)\right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} v(X \setminus K_n) \\ &< \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

S obzirom da su u_n neprekidne na K_n, onda su neprekidne i na K. Nadalje, budući da je konvergencija uniformna, prema Lemi 1.4.2 možemo zaključiti i da je limes, odnosno u, neprekidna funkcija na K. Time smo dokazali da vrijedi Luzinov teorem, odnosno (2.2).

Pokažimo sada i nužnost uvjeta (2.1). Pretpostavimo da vrijedi Luzinov teorem za kapacitet, odnosno (2.2). Neka je $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ proizvoljan padajući niz otvorenih skupova takav da $O_n \downarrow O = \cap_{n\in\mathbb{N}} O_n$. Ako $v(X \setminus O) = 0$, tada zbog subaditivnosti imamo

$$0 = v(X \setminus O) \geq v(X) - v(O) \geq 0$$

te jer je $v(X) = 1$, slijedi

$$v(X) - v(O) = 0 \Rightarrow v(O) = v(X) = 1.$$

Nadalje, zbog $O \subseteq O_n \subseteq X$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, zbog monotonosti slijedi

$$1 = v(O) \leq v(O_n) \leq v(X) = 1.$$

Dakle, $v(O_n) = 1$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ pa očito vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} v(O_n) = v(O).$$

Stoga, pretpostavimo $v(X \setminus O) > 0$. Definirajmo funkciju $\tilde{v} \colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ kao

$$\tilde{v}(A) := \frac{v(A \setminus O)}{v(X \setminus O)}.$$

Budući da je v kapacitet, očito vrijedi

$$\tilde{v}(\emptyset) = \frac{v(\emptyset \setminus O)}{v(X \setminus O)} = 0 \tag{2.8}$$

te također

$$\tilde{v}(X) = \frac{v(X \setminus O)}{v(X \setminus O)} = 1. \tag{2.9}$$

Nadalje, za $A \subseteq B$ je $A \setminus O \subseteq B \setminus O$ pa zbog monotonosti od v slijedi

$$\tilde{v}(A) = \frac{v(A \setminus O)}{v(X \setminus O)} \leq \frac{v(B \setminus O)}{v(X \setminus O)} = \tilde{v}(B). \tag{2.10}$$

Konačno, neka je A_n niz Borelovih skupova takav da $A_n \uparrow A$. Tada očito vrijedi i $A_n \setminus O \uparrow A \setminus O$. Ponovno, jer je v kapacitet, zbog neprekidnosti odozdo zaključujemo

$$\lim_{n\to+\infty} \tilde{v}(A_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{v(A_n \setminus O)}{v(X \setminus O)} = \frac{v(A \setminus O)}{v(X \setminus O)} = \tilde{v}(A). \tag{2.11}$$

Dakle, $\tilde{v}$ je također kapacitet. Nadalje, za proizvoljne $A, B \in \mathcal{B}$ vrijedi $(A \cup B) \setminus O = (A \setminus O) \cup (B \setminus O)$ pa jer je v subaditivan slijedi

$$\begin{aligned}
\tilde{v}(A \cup B) &= \frac{v((A \cup B) \setminus O)}{v(X \setminus O)} \\
&= \frac{v((A \setminus O) \cup (B \setminus O))}{v(X \setminus O)} \\
&\leq \frac{v(A \setminus O) + v(B \setminus O)}{v(X \setminus O)} \\
&= \tilde{v}(A) + \tilde{v}(B).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Dakle, $\tilde{v}$ je subaditivan kapacitet.
Neka je sada $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Želimo pokazati da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $|v(O_n) - v(O)| < \varepsilon$. No, zbog monotonosti od v imamo $v(O_n) \geq v(O)$ pa slijedi

$$|v(O_n) - v(O)| = v(O_n) - v(O).$$

Dakle, dovoljno je pokazati $v(O_n) - v(O) < \varepsilon$ za $n \geq n_0$.
Definirajmo $\tilde{\varepsilon}$ kao

$$\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{v(X \setminus O)}. \tag{2.13}$$

Sada definirajmo niz funkcija $u_n \colon X \to \mathbb{R}$ kao

$$u_n(x) := \mathbb{1}_{O_n \setminus O}(x) = \begin{cases} 1, & x \in O_n \setminus O, \\ 0, & \text{inače}. \end{cases}$$

Budući da je $O_n \setminus O$ izmjeriv skup za svaki $n \in \mathbb{N}$, onda je i u_n izmjeriva funkcija za svaki $n \in \mathbb{N}$. Stoga, prema (2.2) za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji kompaktan skup $K_n \subseteq X$ takav da

$\nu(X \setminus K_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$ i restrikcija $u_n|_{K_n}$ je neprekidna. Svaka od funkcija u_n je prekidna na rubu skupa $O_n \setminus O$, odnosno na skupu $\overline{O_n \setminus O} \cap \overline{(O_n \setminus O)^c}$, a neprekidna na ostatku domene. Iz monotonosti od ν slijedi

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}(X \setminus K_n) &= \frac{\nu((X \setminus K_n) \setminus O)}{\nu(X \setminus O)} \\ &\leq \frac{\nu(X \setminus K_n)}{\nu(X \setminus O)} \\ &< \frac{\varepsilon}{\nu(X \setminus O)2^n} \\ &= \frac{\tilde{\varepsilon}}{2^n}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Nadalje, vrijedi

$$K_n \cap \left(\overline{O_n \setminus O} \cap \overline{(O_n \setminus O)^c}\right) = \emptyset \tag{2.15}$$

jer je u_n neprekidna na K_n, a prekidna na $\overline{O_n \setminus O} \cap \overline{(O_n \setminus O)^c}$.
Pokažimo sada da vrijedi

$$\inf\left\{d(x, y) : x \in K_n \cap (O_n \setminus O), y \in K_n \cap (O_n \setminus O)^c\right\} > 0. \tag{2.16}$$

Pretpostavimo suprotno, tj. da je infimum u (2.16) jednak 0. Tada mora postojati x koji se nalazi u presjeku zatvarača skupova $K_n \cap (O_n \setminus O)$ i $K_n \cap (O_n \setminus O)^c$, odnosno postoji $x \in \overline{K_n \cap (O_n \setminus O)} \cap \overline{K_n \cap (O_n \setminus O)^c}$. Tada je očito $x \in K_n$. No, jer je

$$\overline{K_n \cap (O_n \setminus O)} \cap \overline{K_n \cap (O_n \setminus O)^c} \subseteq \overline{O_n \setminus O} \cap \overline{(O_n \setminus O)^c},$$

slijedi $x \in \overline{O_n \setminus O} \cap \overline{(O_n \setminus O)^c}$. Dakle,

$$x \in K_n \cap \left(\overline{O_n \setminus O} \cap \overline{(O_n \setminus O)^c}\right) = \emptyset,$$

što je očito kontradikcija. Dakle, vrijedi (2.16).
Pokažimo sada da je $K_n \cap (O_n \setminus O)$ zatvoren. Pretpostavimo suprotno, tj. da $K_n \cap (O_n \setminus O)$ nije zatvoren. Prema Propoziciji 1.1.10, tada postoji konvergentan niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq K_n \cap (O_n \cap O)$ takav da $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$ i vrijedi

$$x \notin K_n \cap (O_n \setminus O). \tag{2.17}$$

No, zbog (2.16) vidimo da je udaljenost između $K_n \cap (O_n \setminus O)$ i $K_n \cap (O_n \setminus O)^c$ pozitivna pa vrijedi i

$$x \notin K_n \cap (O_n \setminus O)^c. \tag{2.18}$$

Obzirom da je $K_n = (K_n \cap (O_n \setminus O)) \cup (K_n \cap (O_n \setminus O)^c)$, iz (2.17) i (2.18) zaključujemo $x \notin K_n$. Dakle, našli smo konvergentan niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u K_n čiji limes nije u K_n. To znači da K_n

nije zatvoren. No, to je kontradikcija s činjenicom da je K_n kompaktan jer je u metričkom prostoru svaki kompaktan skup ujedno i zatvoren. Dakle, zaključujemo da je $K_n \cap (O_n \setminus O)$ zatvoren. Zbog toga, iz Propozicije 1.1.8 slijedi da je $K_n \cap (O_n \setminus O)$ i kompaktan.
Sada definiramo skupove $\tilde{K_n}$ kao

$$\tilde{K_n} := \bigcap_{m=1}^{n} K_m.$$

Očito je $\tilde{K_n} \subseteq K_n$ te je to padajući niz skupova. Također, iz Propozicija 1.1.7 i 1.1.8 slijedi da je $\tilde{K_n}$ kompaktan skup za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz istih propozicija zatim slijedi da je i $\tilde{K_n} \cap (O_n \setminus O)$ kompaktan za svaki $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, imamo

$$\begin{aligned}
\tilde{\nu}((O_n \setminus O) \setminus \tilde{K_n}) &\leq \tilde{\nu}(X \setminus \tilde{K_n}) \\
&= \tilde{\nu}\left(X \setminus \bigcap_{m=1}^{n} K_m\right) \\
&= \tilde{\nu}\left(\bigcup_{m=1}^{n} (X \setminus K_m)\right) \\
&\leq \sum_{m=1}^{n} \tilde{\nu}(X \setminus K_m) \\
&\leq \sum_{m=1}^{n} \frac{\tilde{\varepsilon}}{2^m} \\
&< \tilde{\varepsilon},
\end{aligned} \tag{2.19}$$

gdje smo u prvoj nejednakosti koristili monotonost od $\tilde{\nu}$, u drugoj subaditivnost od $\tilde{\nu}$, a u trećoj (2.14).
Sada, zbog $O_n \downarrow O$ slijedi

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} (O_n \setminus O) = \bigcap_{n=1}^{+\infty} (O_n \cap O^c) = O^c \cap \left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n\right) = O^c \cap O = \emptyset.$$

Dakle, $O_n \setminus O \downarrow \emptyset$. Koristeći to i činjenicu da je $\tilde{K_n} \cap (O_n \setminus O) \subseteq O_n \setminus O$, zaključujemo $\tilde{K_n} \cap (O_n \setminus O) \downarrow \emptyset$. Dakle, niz $\tilde{K_n} \cap (O_n \setminus O)$ je padajući niz kompaktnih skupova koji je u presjeku prazan. Iz toga slijedi da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\tilde{K_n} \cap (O_n \setminus O) = \emptyset$$

za svaki $n \geq n_0$. Zaista, ako bi svi $\tilde{K_n} \cap (O_n \setminus O)$ bili neprazni, prema Propoziciji 1.1.11 bi i presjek bio neprazan skup. No, to je kontradikcija s činjenicom da $\tilde{K_n} \cap (O_n \setminus O) \downarrow \emptyset$. Dakle, za svaki $n \geq n_0$ imamo

$$\tilde{\nu}(\tilde{K_n} \cap (O_n \setminus O)) = \tilde{\nu}(\emptyset) = 0. \tag{2.20}$$

Stoga, koristeći subaditivnost od $\tilde{\nu}$, nejednakost (2.19) te jednakost (2.20) zaključujemo da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi

$$\begin{aligned} \tilde{\nu}(O_n \setminus O) &= \tilde{\nu}\Big((\tilde{K}_n \cap (O_n \setminus O)) \cup ((O_n \setminus O) \setminus \tilde{K}_n)\Big) \\ &\leq \tilde{\nu}(\tilde{K}_n \cap (O_n \setminus O)) + \tilde{\nu}((O_n \setminus O) \setminus \tilde{K}_n) \\ &= 0 + \tilde{\nu}((O_n \setminus O) \setminus \tilde{K}_n) \\ &< \tilde{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Konačno, zbog subaditivnosti, (2.13) i (2.21) za $n \geq n_0$ imamo

$$\begin{aligned} \nu(O_n) - \nu(O) &\leq \nu(O_n \setminus O) \\ &= \tilde{\nu}(O_n \setminus O) \cdot \nu(X \setminus O) \\ &< \tilde{\varepsilon} \cdot \nu(X \setminus O) \\ &= \frac{\varepsilon}{\nu(X \setminus O)} \cdot \nu(X \setminus O) \\ &= \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Po definiciji limesa zaključujemo

$$\lim_{n \to +\infty} \nu(O_n) = \nu(O). \tag{2.23}$$

Dakle, vrijedi (2.1). Time je dokaz gotov. □

Korolar 2.1.2. *Neka je ν subaditivan kapacitet na kompaktnom metričkom prostoru (X, d). Tada neprekidnost odozgo, odnosno svojstvo*

$$A_n \in \mathcal{B}, \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \downarrow A \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \nu(A_n) = \nu(A) \tag{2.24}$$

vrijedi ako i samo ako vrijedi Luzinov teorem za kapacitet, odnosno

> *za svaku Borel-izmjerivu funkciju $u \colon X \to \mathbb{R}$ i za svaki $\varepsilon > 0$ postoji kompaktan skup $K \subseteq X$ takav da $\nu(X \setminus K) < \varepsilon$ te je restrikcija $u|_K$ neprekidna.* (2.25)

Dokaz. Prema Propoziciji 1.3.4 znamo da je za subaditivan kapacitet neprekidnost odozgo ekvivalentna s neprekidnošću odozgo na nizove otvorenih skupova. Sada iz Teorema 2.1.1 slijedi tvrdnja. □

Dakle, vidimo da je Luzinov teorem za klasu subaditivnih kapaciteta ekvivalentan neprekidnošću odozgo. Loša strana toga je što ako zahtjevamo „samo" neprekidnost odozgo na otvorene skupove, zbog Propozicije 1.3.4 zahtjevamo zapravo neprekidnost odozgo na bilo kakve (Borelove) padajuće skupove. Stoga, iako se čini da s tim zahtjevom tražimo malo, ipak tražimo puno. S druge strane, prednost toga je što želimo li provjeriti vrijedi li Luzinov teorem za dani kapacitet, moramo provjeriti neprekidnost odozgo samo za nizove otvorenih skupova.

Pokazali smo da su kapaciteti iz Primjera 1.2.5, 1.2.6 i 1.2.8 subaditivni. Nadalje, s obzirom da je prostor (X, d) iz Primjera 1.2.8 kompaktan, lako možemo zaključiti da za njega vrijedi Luzinov teorem. Dodatno, ako u Primjerima 1.2.5 i 1.2.6 pretpostavimo da je prostor (X, d) kompaktan, zaključujemo da u tom slučaju vrijedi Luzinov teorem.

Primjer 2.1.3. *Neka je dan vjerojatnosni prostor* $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]}, \lambda)$*, gdje* $\mathcal{B}_{[0,1]}$ *označava Borelovu* σ*-algebru na* $[0, 1]$ *uz standardnu metriku* $|\cdot|$ *(apsolutna vrijednost), a* λ *označava Lebesgueovu mjeru definiranu na poluotvorenim intervalima kao*

$$\lambda(\langle a, b]) = b - a, \quad a \leq b, a, b \in [0, 1].$$

Iz Primjera 1.2.9 znamo da je za $\varepsilon \in (0, 1)$ *funkcija* ν *definirana kao*

$$\nu(A) := \min(\lambda(A) + \varepsilon, 1), \quad A \in \mathcal{B}_{[0,1]}, A \neq \emptyset,$$

subaditivan kapacitet. Također, primijetimo i da se radi o kompaktnom metričkom prostoru $([0, 1], |\cdot|)$*. Neka je* $u\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana kao*

$$u(x) := \mathbb{1}_0(x) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & \textit{inače}. \end{cases}$$

Budući da je $\{0\}$ *izmjeriv skup,* u *je izmjeriva funkcija. Uzmimo* $\tilde{\varepsilon} < \varepsilon$ *i neka je* $K \subseteq [0, 1]$ *proizvoljan kompaktan skup. Pretpostavimo da je restrikcija* $u|_K$ *neprekidna. Budući da* u *ima prekid u točki* 0*, tada očito* $0 \notin K$*, odnosno* $0 \in [0, 1] \setminus K$ *pa je*

$$[0, 1] \setminus K \neq \emptyset. \tag{2.26}$$

Ako je $\nu([0, 1]\setminus K) = 1$*, očito vrijedi* $\nu([0, 1]\setminus K) \geq \tilde{\varepsilon}$*. S druge strane, ako je* $\nu([0, 1]\setminus K) < 1$*, zbog* (2.26) *opet imamo*

$$\nu([0, 1] \setminus K) = \lambda([0, 1] \setminus K) + \varepsilon \geq \varepsilon > \tilde{\varepsilon}.$$

Dakle, za proizvoljni kompaktan skup K *je* $\nu([0, 1] \setminus K) \geq \tilde{\varepsilon}$ *ili je restrikcija* $u|_K$ *prekidna. Stoga, ne vrijedi Luzinov teorem u ovom slučaju. Iz Teorema 2.1.1 zaključujemo da onda* ν *nije neprekidan odozgo na nizove otvorenih skupova.*

Mogli smo ići i obratnim smjerom. Definirajmo niz $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *kao*

$$O_n := \left(0, \frac{1}{n}\right).$$

Očito su skupovi O_n otvoreni u $[0, 1]$ *i vrijedi* $O_n \downarrow \emptyset$. *No, za dovoljno veliki* $n \in \mathbb{N}$ *imamo*

$$\nu(O_n) = \min(\lambda(O_n) + \varepsilon, 1) = \min\left(\frac{1}{n} + \varepsilon, 1\right) = \frac{1}{n} + \varepsilon.$$

Stoga zaključujemo

$$\lim_{n\to+\infty} \nu(O_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + \varepsilon = \varepsilon \neq 0 = \nu(\emptyset).$$

Dakle, ne vrijedi neprekidnost odozgo na nizove otvorenih skupova pa iz Teorema 2.1.1 zaključujemo da ne vrijedi ni Luzinov teorem.

Poglavlje 3

Primjene

U ovom poglavlju ćemo pokazati dvije primjene Luzinovog teorema za kapacitet. Prva od njih nam govori da je svaka izmjeriva funkcija približno ograničena (do na skup proizvoljno malog kapaciteta), dok nam druga govori da svaku izmjerivu funkciju možemo aproksimirati neprekidnom funkcijom (do na skup proizvoljno malog kapaciteta).

3.1 Ograničenost izmjerivih funkcija

Sada slijedi tvrdnja o približnoj ograničenosti izmjerivih funkcija koja je gotovo direktna posljedica Luzinovog teorema za kapacitet.

Teorem 3.1.1. *Neka je v subaditivan kapacitet na kompaktnom metričkom prostoru (X, d) koji je neprekidan odozgo. Tada je svaka izmjeriva funkcija $u\colon X \to \mathbb{R}$ ograničena do na skup proizvoljno malog kapaciteta. Preciznije, za svaku izmjerivu funkciju $u\colon X \to \mathbb{R}$ i za svaki $\varepsilon > 0$ postoji (kompaktan) skup $K \subseteq X$ takav da $v(X \setminus K) < \varepsilon$ te je restrikcija $u|_K$ ograničena.*

Dokaz. Neka je $u\colon X \to \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija te neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Prema Luzinovom teoremu za kapacitet znamo da postoji kompaktan skup $K \subseteq X$ takav da $v(X \setminus K) < \varepsilon$ te takav da je restrikcija $u|_K$ neprekidna. Pokažimo da je skup $u(K)$ kompaktan. Neka je $\{U_i : U_i \subseteq u(K), i \in I\}$ proizvoljni otvoreni pokrivač od $u(K)$. Budući da je $u|_K$ neprekidna, praslika $u^{-1}(U_i) \subseteq K$ je otvoren skup za svaki $i \in I$. Dakle, familija $\{u^{-1}(U_i) : i \in I\}$ je otvoren pokrivač od K. S obzirom da je to kompaktan skup, postoji konačno mnogo skupova $u^{-1}(U_1), u^{-1}(U_2), \ldots, u^{-1}(U_n)$ koji i dalje čine otvoreni pokrivač od K. Neka je sada $y \in u(K)$ proizvoljan. Tada postoji $x \in K$ takav da $u(x) = y$. Sada zaključujemo da postoji $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takav da $x \in u^{-1}(U_i)$. Prema definiciji praslike, to znači da je $y = u(x) \in U_i$.

Dakle, pokazali smo
$$u(K) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$
Drugim riječima, našli smo konačan otvoren potpokrivač za $u(K)$. Dakle, $u(K)$ je kompaktan skup. Sada zaključujemo da je $u(K)$ i ograničen skup jer je svaki kompaktan skup ujedno i ograničen. Stoga zaključujemo da je $u\colon K \to \mathbb{R}$ ograničena funkcija. □

Primijetimo da na Korolar 3.1.1 možemo gledati također kao na neku vrstu Littlewoodovih principa. Striktno govoreći, tvrdnja nije instanca nijednog od Littlewoodovih principa, ali je u sličnom duhu jer govori da je svaka izmjeriva funkcija (na kompaktnom metričkom prostoru) približno ograničena.

3.2 Aproksimacija neprekidnom funkcijom

U ovom potpoglavlju ćemo pokazati da se svaka izmjeriva funkcija na kompaktnom metričkom prostoru može aproksimirati neprekidnom funkcijom, a kao posljedicu toga ćemo dati i jednu karakterizaciju izmjerivih funkcija.

Definicija 3.2.1. *Neka je v kapacitet na metričkom prostoru (X, d). Kažemo da niz funkcija $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $f_n\colon X \to \mathbb{R}$,* konvergira gotovo svuda u odnosu na *v prema funkciji $f\colon X \to \mathbb{R}$ ako postoji skup E takav da $v(E) = 0$ te niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvegira prema f na skupu $X \setminus E$.*

Napomena 3.2.2. *Od sada ćemo činjenicu da niz $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira prema f gotovo svuda u odnosu na kapacitet v označavati kao $f_n \overset{g.s.}{\to} f$ s time da podrazumijevamo o kojem se kapacitetu v točno radi.*

Dakle, niz funkcija konvergira gotovo svuda u odnosu na kapacitet v prema nekoj funkciji ako konvergira obično (po točkama) svuda osim na nekom skupu čiji je kapacitet jednak nula. Sada ćemo dokazati jednu tehničku lemu koja će nam biti potrebna za dokaz teorema o aproksimaciji neprekidnom funkcijom.

Lema 3.2.3. *Neka je v kapacitet na metričkom prostoru (X, d) koji je neprekidan odozgo te neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz funkcija na X. Tada $f_n \overset{g.s.}{\to} f$ ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi*
$$\lim_{n\to+\infty} v\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty}\Big\{x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\Big\}\right) = 0. \tag{3.1}$$

Dokaz. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Za $n \in \mathbb{N}$ definiramo skupove $A_n(\varepsilon)$ kao
$$A_n(\varepsilon) := \Big\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\Big\}.$$

Također, definirajmo i skup $A(\varepsilon)$ kao

$$A(\varepsilon) := \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k(\varepsilon).$$

Budući da vrijedi $\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k(\varepsilon) \downarrow A(\varepsilon)$ kada $n \to +\infty$, zbog neprekidnosti odozgo imamo

$$v(A(\varepsilon)) = \lim_{n\to+\infty} v\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k(\varepsilon)\right). \tag{3.2}$$

Sada definirajmo skup D kao

$$D := \left\{x \in X : \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \neq f(x)\right\}.$$

Dakle, D je skup točaka iz X u kojima niz $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ne konvergira prema $f(x)$ (ili uopće ne konvergira). Nadalje, budući da za $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > 0$ vrijedi $A(\varepsilon_1) \subseteq A(\varepsilon_2)$, slijedi

$$D = \bigcup_{\varepsilon>0} A(\varepsilon) = \bigcup_{m=1}^{+\infty} A\left(\frac{1}{m}\right). \tag{3.3}$$

Stoga imamo sljedeći niz ekvivalentnih tvrdnji. Vrijedit će $f_n \xrightarrow{g.s.} f$ ako i samo ako je $v(D) = 0$. Zbog relacije (3.3), monotonosti i neprekidnosti odozdo, to će vrijediti ako i samo ako je $v(A(\varepsilon)) = 0$ za svaki $\varepsilon > 0$. Nadalje, zbog jednakosti (3.2), to će vrijediti ako i samo ako je

$$\lim_{n\to+\infty} v\left(\bigcup_{k=n}^{+\infty}\left\{x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\right\}\right) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

odnosno ako i samo ako vrijedi (3.1). □

Prije nego iskažemo teorem o aproksimaciji neprekidnom funkcijom (Teorem 3.2.5) ćemo još iskazati i jedan poznati rezultat iz topologije koji će nam biti potreban. Dokaz se može pronaći u [8].

Teorem 3.2.4 (Tietzeov teorem proširenja)**.** *Neka je (X, d) metrički prostor te neka je F neprazan zatvoren podskup od X. Također, neka je $f\colon F \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada postoji neprekidna funkcija $g\colon X \to \mathbb{R}$ takva da*

$$g(x) = f(x), \quad \forall x \in F.$$

Teorem 3.2.5. *Neka je dan subaditivan kapacitet v na kompaktnom metričkom prostoru (X, d) koji je neprekidan odozgo. Također, neka je $u\colon X \to \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija. Tada postoji niz neprekidnih funkcija $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_n\colon X \to \mathbb{R}$ takav da vrijedi $u_n \overset{g.s.}{\to} u$.*

Dokaz. Prema Luzinovom teoremu za kapacitet za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji kompaktan skup K_n takav da vrijedi $v(X \setminus K_n) < \frac{1}{n}$ te je restrikcija $u|_{K_n}$ neprekidna za svaki $n \in \mathbb{N}$. Budući da je svaki skup K_n ujedno i zatvoren, prema Tietzeovom teoremu proširenja (Teorem 3.2.4) postoje neprekidne funkcije $g_n\colon X \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$g_n(x) = u(x), \quad \forall x \in K_n. \tag{3.4}$$

Stoga, za svaki $\varepsilon > 0$ vrijedi

$$\{x \in X : |g_n(x) - u(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq X \setminus K_n \tag{3.5}$$

pa zbog monotonosti imamo

$$v\Big(\{x \in X : |g_n(x) - u(x)| \geq \varepsilon\}\Big) \leq v(X \setminus K_n) < \frac{1}{n}. \tag{3.6}$$

Puštanjem limesa u relaciji (3.6) dobivamo

$$\lim_{n\to+\infty} v\Big(\{x \in X : |g_n(x) - u(x)| \geq \varepsilon\}\Big) = 0. \tag{3.7}$$

Promotrimo jednakost (3.7) za $\varepsilon = \frac{1}{2} = \frac{1}{2^1}$. Budući da je limes u (3.7) jednak 0, postoji $n_1 \in \mathbb{N}$ takav da

$$v\left(\left\{x \in X : |g_{n_1}(x) - u(x)| \geq \frac{1}{2}\right\}\right) < \frac{1}{2}.$$

Sada promatramo istu jednakost za $\varepsilon = \frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$. Ponovno, budući da je dani limes jednak nula, možemo naći $n_2 > n_1$ takav da vrijedi

$$v\left(\left\{x \in X : |g_{n_2}(x) - u(x)| \geq \frac{1}{4}\right\}\right) < \frac{1}{4}.$$

Nastavimo dalje induktivno i dobili smo podniz $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ od $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ takav da vrijedi

$$v\left(\left\{x \in X : |g_{n_k}(x) - u(x)| \geq \frac{1}{2^k}\right\}\right) < \frac{1}{2^k}. \tag{3.8}$$

Definirajmo sada $u_k := g_{n_k}$. Očito su funkcije u_k neprekidne jer su sve funkcije g_n neprekidne. Također, definirajmo i skupove E_k kao

$$E_k := \left\{x \in X : |u_k(x) - u(x)| \geq \frac{1}{2^k}\right\}.$$

Zbog nejednakosti (3.8) vrijedi

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \nu(E_k) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} < +\infty. \tag{3.9}$$

Pokažimo sada da vrijedi $u_k \overset{g.s.}{\to} u$. Neka je $\varepsilon > 0$. Tada postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $k \geq k_0$ vrijedi $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$. Koristeći neprekidnost odozgo, monotonost te σ-subaditivnost zaključujemo

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to+\infty} \nu\left(\bigcup_{j=k}^{+\infty}\Big\{x \in X : |u_k(x) - u(x)| \geq \varepsilon\Big\}\right) &= \nu\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}\bigcup_{j=k}^{+\infty}\Big\{x \in X : |u_k(x) - u(x)| \geq \varepsilon\Big\}\right) \\
&\leq \nu\left(\bigcup_{j=k_0}^{+\infty}\Big\{x \in X : |u_{k_0}(x) - u(x)| \geq \varepsilon\Big\}\right) \\
&\leq \sum_{j=k_0}^{+\infty} \nu\left(\Big\{x \in X : |u_{k_0}(x) - u(x)| \geq \varepsilon\Big\}\right) \qquad (3.10) \\
&\leq \sum_{j=k_0}^{+\infty} \nu\left(\left\{x \in X : |u_{k_0}(x) - u(x)| \geq \frac{1}{2^{k_0}}\right\}\right) \\
&= \sum_{j=k_0}^{+\infty} \nu(E_j).
\end{aligned}$$

Primijetimo da na desnoj strani umjesto k_0 možemo staviti bilo koji $k \geq k_0$. Stoga, puštanjem limesa $k \to +\infty$ dobivamo

$$\lim_{k\to+\infty} \nu\left(\bigcup_{j=k}^{+\infty}\Big\{x \in X : |u_k(x) - u(x)| \geq \varepsilon\Big\}\right) = \lim_{k\to+\infty} \sum_{j=k}^{+\infty} \nu(E_j) = 0, \tag{3.11}$$

gdje smo u posljednjoj jednakosti koristili jednakost (3.9), odnosno činjenicu da je to rep konvergentnog reda. Konačno, s obzirom da vrijedi (3.11), iz Leme 3.2.3 zaključujemo $u_k \overset{g.s.}{\to} u$. □

Dakle, Teorem 3.2.5 nam govori da svaku izmjerivu funkciju možemo po volji dobro arpoksimirati nekom neprekidnom funkcijom na cijelom prostoru X, osim na nekom „malom" skupu čiji je kapacitet jednak nula. Također, primijetimo da smo neprekidnost odozgo koristili nekoliko puta. Naime, bila nam je potrebna da bismo mogli primijeniti Luzinov teorem za kapacitet, zatim u nejednakosti (3.10) te na kraju da bismo mogli primijeniti Lemu 3.2.3. Stoga još jednom vidimo kolika je važnost tog svojstva.

Na samom kraju ovog rada pokazujemo jednu posljedicu teorema 3.2.5 koja nam daje zanimljivu karakterizaciju izmjerivih funkcija. Prije toga ćemo uvesti pojam potpunog kapaciteta koji je analogan pojmu potpune mjere.

Definicija 3.2.6. *Za kapacitet v na izmjerivom prostoru $(X, \mathcal{B})$ kažemo da je* potpun *ako za svaki $A \in \mathcal{B}$ takav da $v(A) = 0$ vrijedi*

$$B \subseteq A \Rightarrow B \in \mathcal{B}.$$

Napomena 3.2.7. *Primijetimo da zbog monotonosti kapaciteta za skup B iz definicije 3.2.6 odmah slijedi $v(B) = 0$.*

Korolar 3.2.8. *Neka je (X, d) kompaktan metrički prostor te neka je v potpun i subaditivan kapacitet na X koji je neprekidan odozogo. Također, neka je $u\colon X \to \mathbb{R}$ funkcija. Funkcija u je izmjeriva ako i samo ako postoji niz neprekidnih funkcija $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_n\colon X \to \mathbb{R}$, takav da $u_n \xrightarrow{g.s.} u$ u odnosu na v.*

Dokaz. Ako je u izmjeriva, prema teoremu 3.2.5 slijedi da postoji niz neprekidnih funkcija $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $u_n\colon X \to \mathbb{R}$ takav da $u_n \xrightarrow{g.s.} u$ u odnosu na v.

S druge strane, pretpostavimo da je u takva da postoji niz neprekidnih funkcija $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ koji konvergira gotovo svuda prema u. Tada postoji skup $E \in \mathcal{B}$ takav da $v(E) = 0$ i vrijedi $u_n \to u$ na $X \setminus E$ (po točakama). Definirajmo sada funkciju $f\colon X \to \mathbb{R}$ kao

$$f(x) := \liminf_{n\to+\infty} u_n(x).$$

Budući da su u_n neprekidne, one su i izmjerive pa je f izmjeriva kao limes inferior izmjerivih funkcija. Pokažimo sada da je u izmjeriva. Neka je $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ proizvoljan. Zbog $u^{-1}(A) \cap E \subseteq E \in \mathcal{B}$ i potpunosti slijedi

$$u^{-1}(A) \cap E \in \mathcal{B}. \tag{3.12}$$

Nadalje, zbog $f|_{X\setminus E} = \lim_{n\to+\infty} u_n = u|_{X\setminus E}$ te budući da je f izmjeriva, vrijedi i

$$u^{-1}(A) \cap X \setminus E = f^{-1}(A) \cap X \setminus E \in \mathcal{B}. \tag{3.13}$$

Sada koristeći (3.12) i (3.13) zaključujemo

$$u^{-1}(A) = (u^{-1}(A) \cap E) \cup (u^{-1}(A) \cap X \setminus E) \in \mathcal{B}.$$

Dakle, u je izmjeriva funkcija. □

Bibliografija

[1] A. Castaldo i M. Marinacci, *A Lusin theorem for a class of Choquet capacities*, Statistical Papers **43** (2002), 137–142.

[2] D. L. Cohn, *Measure Theory: Second Edition*, Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher, Springer New York, 2013.

[3] W. Congxin i H. Minghu, *On the regularity of the fuzzy measure on metric fuzzy measure spaces*, Fuzzy Sets and Systems **66** (1994), br. 3, 373–379.

[4] J. Li i M. Yasuda, *Lusin's theorem on fuzzy measure spaces*, Fuzzy Sets and Systems **146** (2004), br. 1, 121–133, Selected Papers from EUSFLAT 2001.

[5] J. E. Littlewood, *Lectures on the theory of functions*, London: Oxford University Press, 1944.

[6] S. Mardešić, *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru. Prvi dio: Brojevi, konvergencija, neprekidnost*, Školska knjiga Zagreb, 1974.

[7] P. Pyrih, *Logarithmic capacity is not subadditive — a fine topology approach*, Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae **33** (1992).

[8] H. L. Royden, *Real analysis*, 4th ed.., Macmillan, 1968.

[9] J. Wiesel, *On a Lusin theorem for capacities*, 2021, arXiv: 2010.09491.

[10] Z. Zong, F. Hu, i X. Tian, *Egoroff's Theorem and Lusin's Theorem for Capacities in the Framework of g-Expectation*, Mathematical Problems in Engineering **2020** (2020), 1–7.

Sažetak

Cilj ovog diplomskog rada bio je dati nužne i dovoljne uvjete da bi vrijedio Luzinov teorem za kapacitet. Luzinov teorem je važan teorem iz teorije mjere, no u ovom radu mjeru zamjenjujemo kapacitetom. Riječ je o funkciji koja ima svojstva slična mjeri, ali malo slabija. Na početku uvodimo sam pojam kapaciteta te navodimo neka njegova svojstva te primjere istih. Nakon toga dokazujemo nekoliko rezultata iz matematičke analize, metričkih prostora i teorije mjere koji su nam potrebni za dokaz glavnog rezultata. Također, uvodimo i važan pojam regularnog kapaciteta te pokazujemo u kakvoj je vezi taj pojam s neprekidnošću odozgo na nizove otvorenih skupova. U glavnom dijelu ovog rada dokazujemo da je upravo neprekidnost odozgo na nizove otvorenih skupova ključno svojstvo koje subaditivan kapacitet na kompaktnom metričkom prostoru mora posjedovati da bi vrijedio Luzinov teorem za tu klasu kapaciteta. Zapravo pokazujemo i više, odnosno da je to i nužan i dovoljan uvjet za Luzinov teorem. Na kraju ovog rada pokazujemo dvije posljedice Luzinovog teorema za kapacitet koje govore o ograničenosti izmjerivih funkcija te o aproksimaciji proizvoljne izmjerive funkcije neprekidnom funkcijom.

Summary

The aim of this master's thesis was to give necessary and sufficient conditions for Lusin's theorem for capacity. Lusin's theorem is an important theorem of measure theory, but in this thesis, we replace the measure with capacity. The capacity is a function that has properties similar to the measure, but slightly weaker. In the introductory part, we define the concept of the capacity, present some of its properties and give some examples of capacities. After that, we prove several results from mathematical analysis, metric spaces and measure theory that we need for the proof of the main result. Also, we define an important concept of regular capacity and show in what relation is the regularity with the continuity from above on the sequences of open sets. In the main part of the thesis, we prove that the continuity from above on the sequences of open sets is the crucial property that subadditive capacity on the compact metric space must possess for Lusin's theorem to hold true for this class of capacities. In fact, we show even more, that is, we show that it is a necessary and sufficient condition for Lusin's theorem. Lastly, we show two consequences of Lusin's theorem for capacity concerning the boundness of measurable functions and approximation of an arbitrary measurable function with a continuous function.

Životopis

Rođen sam 23. svibnja 1997. godine u mjestu Nova Bila (Bosna i Hercegovina). Prva četiri razreda osnovne škole sam završio u Osnovnoj školi fra Marijana Šunjića u Stojkovićima, nakon čega se 2008. godine selim u Hrvatsku u mjesto Velika Ludina gdje sam pohađao preostala četiri razreda u Osnovnoj školi Ludina. Upravo u toj školi, zahvaljujući nastavniku Damiru Belaviću, se razvija moja ljubav prema matematici i želja za daljnjim školovanjem u tom području.

Godine 2012. upisujem matematičku gimnaziju u Srednjoj školi Tina Ujevića u Kutini, u kojoj sam sudjelovao na natjecanjima iz matematike, fizike, biologije i latinskog jezika.

Nakon toga, godine 2016. upisujem preddiplomski studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, a zatim 2019. godine i diplomski studij Matematička statistika na istom fakultetu. Tijekom studiranja sam držao demonstrature iz kolegija Teorija skupova. U slobodno vrijeme se bavim sviranjem gitare i tamburaških instrumenata te nogometom.