

# Minimalne plohe

---

**Đanović, Maro**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:310462>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-11**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Maro Đanović

**MINIMALNE PLOHE**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
dr.sc. Marija Galić

Zagreb, veljača, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Mojim roditeljima*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Osnovne definicije i pojmovi</b>	<b>3</b>
1.1 O krivuljama . . . . .	3
1.2 O plohama . . . . .	6
<b>2 Minimalne plohe</b>	<b>16</b>
2.1 Normalna varijacija i površina plohe . . . . .	16
2.2 Weierstrass – Enneperova reprezentacija . . . . .	19
<b>3 Helikoid i katenoid</b>	<b>23</b>
3.1 Helikoid . . . . .	23
3.2 Katenoid . . . . .	27
3.3 Heltocat . . . . .	30
3.4 Primjene u arhitekturi . . . . .	32
<b>4 Ostale minimalne plohe</b>	<b>35</b>
4.1 Enneperova minimalna ploha . . . . .	35
4.2 Hennebergova minimalna ploha . . . . .	36
4.3 Bourova minimalna ploha . . . . .	38
4.4 Catalanova minimalna ploha . . . . .	40
4.5 Scherkova minimalna ploha . . . . .	40
<b>Bibliografija</b>	<b>43</b>

# Uvod

U matematici je kroz povijest postojao niz problema, a jedan s kojim su se mnogi susreli u svom obrazovanju je problem najkraćeg puta. To je problem kojim su se matematičari bavili u dvodimenzionalnom prostoru, međutim, postoji sličan problem u trodimenzionalnom prostoru koji također nije ostao nezapažen. Radi se o problemu najmanje površine. Pri rješavanju tog problema svjetski matematičari tražili su plohe koje bi imale najmanju površinu za iste uvjete kao i druge plohe. Tu dolazimo do pojma minimalnih ploha. Povijest minimalnih ploha seže iz 1760.-ih kada je talijansko-francuski matematičar Joseph-Louis Lagrange tražio plohe koje su graf funkcije i na dijelu omeđenom zadanom zatvorenom krivuljom imaju najmanju površinu. Pritom je izveo Euler-Lagrangeovu jednadžbu koju svaka minimalna ploha zadovoljava, ali ipak nije uspio naći rješenja. Minimalna ploha parametrizirana je u obliku  $(x, y, f(x, y))$ , a spomenuta nelinearna parcijalna diferencijalna jednadžba glasi:

$$(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0$$

Osim njega, u to vrijeme mnogi matematičari su pokušali naći rješenje, ali nisu uspjeli. Nakon toga, 1776. francuski matematičar Jean Baptiste Meusnier otkrio je katenoid i helikoid kao netrivialna rješenja. Kao trivijalno rješenje dobivena je ravnina. Zatim je sredinom 19. stoljeća belgijski fizičar Joseph Antoine Ferdinand Plateau proveo veliki broj opsežnih pokusa koristeći opnu od sapunice razapetu na žicu savijenu u zadanu prostornu krivulju. Kasnije je mjerenja koja je vršio pri pokusima iskoristio kao provjeru svojih teorijskih rezultata. Jedno od važnijih otkrića bila je pretpostavka da sve zatvorene krivulje koje ne presijecaju niti diraju samu sebe, mogu biti sadržane u minimalnoj plohi. Iako se Lagrange prvi iskušao u pronalasku spomenutih ploha, taj problem dobio je ime upravo po belgijskom fizičaru čiji je rad bio najznačajniji na tom polju, te je nazvan Plateauov problem. Danas se mnogi odvojeni problemi svrstavaju pod "Plateauov problem" iako se Plateau zapravo bavio samo traženjem ploha minimalne površine koje imaju zadanu krivulju kao rubni uvjet. Nakon dugog niza godina pokušaja rješavanja problema, 1931. godine do rješenja dolaze američki i mađarski matematičari Jesse Douglas i Tibor Rado. Oni su do rješenja došli neovisno jedan o drugome i to različitim metodama. Rado je svoju metodu temeljio na radu francuskog matematičara Renea Garniera, dok je Douglas do svojih rezultata došao samostalno. Za te iste rezultate, 1936. godine Douglas dobiva Fieldsovu

medalju, to jest iste godine kada se i počela dodijeljivati. Fieldsova medalja najprestižnija je nagrada u matematici te ju se uspoređuje s Nobelovom nagradom. Rado i Douglas su pokazali matematičku egzistenciju minimalne plohe omeđene zadanom krivuljom, ali su vrlo malo rekli o njenim geometrijskim svojstvima.

U ovom radu naglasak je stavljen na teoriju minimalnih ploha, a govori se i o njihovim primjenama. Rad je raspoređen u četiri poglavlja. U prvom ćemo se upoznati s bitnim teoremima i definicijama vezanim za krivulje i plohe kako bi bili upoznati sa svim pojmovima ulazeći u drugo poglavlje. U tom poglavlju saznat ćemo ponešto o teoriji minimalnih ploha, njevoj poveznici s kompleksnom analizom, a ujedno i o Weierstrass–Enneperovoj reprezentaciji. U trećem poglavlju fokusiramo se na dvije najpoznatije minimalne plohe, helikoid i katenoid, na njihova svojstva te primjenu u arhitekturi. Četvrti dio rada rezerviran je za ostale minimalne plohe, izuzev helikoida i katenoida. Sve vizualizacije u prvom, trećem i četvrtom poglavlju napravljene su u Mathematici.

# Poglavlje 1

## Osnovne definicije i pojmovi

### 1.1 O krivuljama

**Definicija 1.1.1.** Glatko preslikavanje s otvorenog intervala  $I = \langle a, b \rangle \subset \mathbb{R}$  u  $\mathbb{R}^n$

$$c : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$$

*nazivamo* (parametrizirana) krivulja  $c$  u  $\mathbb{R}^n$ .

Za krivulje u  $\mathbb{R}^3$  pišemo  $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$  pri čemu su  $x(t), y(t), z(t)$  koordinate krivulje. Prve dvije derivacije krivulje po  $t$  su

$$\frac{dc}{dt}(t) = \dot{c}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)),$$

$$\frac{d^2c}{dt^2}(t) = \ddot{c}(t) = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)).$$

**Definicija 1.1.2.** Ako vrijedi

$$\dot{c}(t) \neq 0, \quad t \in I,$$

tada krivulju  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  nazivamo regularnom. Ako za točku krivulje vrijedi  $\dot{c}(t) = 0$ , tada je nazivamo singularnom.

Iz ove definicije možemo zaključiti da regularna krivulja ima tangentu u svakoj točki što će nam biti korisno za iduću definiciju.

**Definicija 1.1.3.** Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  regularna krivulja. Tangencijalni vektor ili vektor brzine krivulje  $c$  u točki  $c(t)$  je vektor  $\dot{c}(t)$ , dok funkciju  $\|\dot{c}(t)\|$  zovemo brzinom krivulje  $c$  u točki  $c(t)$ . Ukoliko vrijedi

$$\|\dot{c}(t)\| = 1, \quad t \in I,$$



tada za krivulju kažemo da je jedinične brzine ili da je parametrizirana duljinom luka. Pravac koji prolazi točkom  $c(t)$  i kojemu je  $\dot{c}(t)$  vektor smjera nazivamo tangentom krivulje  $c$  u točki  $c(t)$ .

Kada promatramo razne krivulje, nije uvijek lako izračunati udaljenost dvije točke na krivulji po toj istoj krivulji. Početna ideja bi bila između te dvije točke dodati još točaka, spojiti ih te izračunati zbroj duljina dužina. Naravno, u tom slučaju dobili bismo aproksimaciju koja bi bila točnija s većim brojem točaka. Analogno dolazimo do pojma određenog integrala, a to će nam koristiti za iduću definiciju.

**Definicija 1.1.4.** Funkcija duljine luka krivulje  $c$  od točke  $c(t_0)$  je funkcija  $s$

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{c}(u)\| du, \quad t_0 \in I.$$

Realan broj

$$s = \int_a^b \|\dot{c}(u)\| du$$

naziva se duljina luka krivulje  $c : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$

**Definicija 1.1.5.** Ako postoji glatki difeomorfizam  $\phi : \tilde{I} \rightarrow I$  za koji vrijedi

$$\tilde{c} = c \circ \phi,$$

tada (parametriziranu) krivulju  $\tilde{c} : \tilde{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$  nazivamo reparametrizacijom (parametrizirane) krivulje  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  tj.  $\tilde{c}(\tilde{t}) = c(\phi(\tilde{t})) = c(t)$ ,  $\tilde{t} \in \tilde{I}$ ,  $t \in I$ .

Kada pokušavamo shvatiti pojam zakrivljenosti krivulje, onda nam je za početak intuitivno da je pravac krivulja zakrivljenosti 0. Isto tako, laički rečeno, zakrivljenost bismo mogli opisati kao veličinu koja nam govori koliko pravac ne sadrži neku krivulju.

**Definicija 1.1.6.** Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  krivulja parametrizirana duljinom luka  $s$ . Definiramo zakrivljenost (fleksiju) krivulje  $c$  u točki  $c(s)$  kao  $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\kappa(s) = \|c''(s)\|$ .

**Propozicija 1.1.7.** Neka je  $c$  regularna krivulja u  $\mathbb{R}^3$  parametrizirana općim parametrom  $t$ . Njena zakrivljenost je dana sljedećim izrazom:

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{c}(t) \times \ddot{c}(t)\|}{\|\dot{c}(t)\|^3}.$$

**Definicija 1.1.8.** Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  krivulja parametrizirana duljinom luka. Polje  $T(s) = c'(s)$  zovemo jedinično tangencijalno polje od  $c$ . Polje vektora glavnih normala je

$$N(s) = \frac{c''(s)}{\|c''(s)\|}, \quad c''(s) \neq 0,$$

dok polje binormala definiramo kao

$$B(s) = T(s) \times N(s).$$

U tom slučaju  $(T(s), N(s), B(s))$  je desna ortonormirana baza od  $\mathbb{R}_{c(s)}^3$  te je poznata pod nazivom Frenet-ov trobrid krivulje  $c$ .

$T$  i  $N$  su okomiti te ćemo to i pokazati. S obzirom da je  $c$  parametrizirana duljinom luka, znači da vrijedi

$$c'(s) \cdot c'(s) = \|c'(s)\|^2 = 1,$$

iz čega nakon deriviranja imamo  $2c'(s) \cdot c''(s) = 0$  pa tvrdnja slijedi. Potrebno je pokazati i da je polje  $B$  jedinično. Znamo da su (jedinična) polja  $T$  i  $N$  okomita pa slijedi

$$\|B(s)\| = \|T(s) \times N(s)\| = \|T(s)\| \|N(s)\| \sin \angle(T(s), N(s)) = 1.$$

**Napomena.** Polje  $N$  definirano je samo za krivulje koje zadovoljavaju  $c''(s) \neq 0$ . Takve krivulje nazivamo dopustivima.

**Definicija 1.1.9.** Definiramo torziju krivulje  $c$  parametrizirane duljinom luka u točki  $c(s)$  kao funkciju  $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}$  za koju vrijedi

$$\tau(s) = -N(s) \cdot B'(s)$$

**Definicija 1.1.10.** Regularna krivulja  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  je zatvorena ako postoji pozitivna konstanta  $a \in \mathbb{R}$  za koju je  $c(t + a) = c(t)$ , za sve  $t \in \mathbb{R}$ . Najmanja konstanta za koju to vrijedi naziva se periodom krivulje  $c$ .

**Definicija 1.1.11.** Zatvorena krivulja  $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  s periodom  $a$  za koju vrijedi  $c(t) = c(t')$  je jednostavna ako i samo ako je  $t' - t = ka$ , za neki  $k \in \mathbb{Z}$ .

Kao netrivialni rezultat topologije imamo *teorem o Jordanovoj krivulji* koji kaže da svaka jednostavna zatvorena krivulja u ravnini ima unutrašnjost i vanjštinu. To jest, skup točaka koje nisu točke krivulje je disjunktna unija dva podskupa od  $\mathbb{R}^2$  sa svojstvima:

1. unutrašnjost  $int(c)$  je ograničen skup,
2. vanjštinu  $ext(c)$  je neograničen skup,
3. unutrašnjost  $int(c)$  i vanjštinu  $ext(c)$  su povezani skupovi, što znači da svake dvije točke iz istog skupa se mogu povezati krivuljom koja je cijela sadržana u tom skupu.

## 1.2 O plohama

**Definicija 1.2.1.** Ako za svaku točku  $p \in S$  postoji otvorena okolina  $V \in \mathbb{R}^3$  i preslikavanje  $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$  s otvorenog skupa  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  koje je

- homeomorfizam otvorenih skupova,
- glatko preslikavanje

tada za podskup  $S \subset \mathbb{R}^3$  kažemo da je ploha. U slučaju da je i diferencijal preslikavanja  $\mathbf{x}$  injektivan, za plohu kažemo da je regularna (tj. da je  $\mathbf{x}$  regularno).

Preslikavanje  $\mathbf{x} : U \rightarrow V \cap S$  zadano s

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad (u, v) \in U$$

nazivamo lokalna parametrizacija.

Naziv za lokalnu parametrizaciju koji također koristimo je koordinatna karta. Pogledajmo sada primjere nekih ploha.

### Ravnina

Neka su  $a, b \in \mathbb{R}^3$  nekolinearni vektori. Ravnina je parametrizirana s  $\mathbf{x}(u, v) = au + bv + c$ ,  $u, v \in \mathbb{R}$ , gdje je  $c$  konstantni vektor u  $\mathbb{R}^3$ .

### Sfera

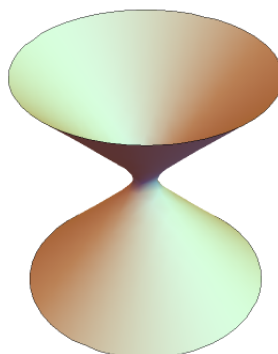
(Jedinična) sfera zadana je s:  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ , i primjer je regularne plohe.

### Rotacijske plohe

Ako zarotiramo neku ravninsku krivulju oko pravca koji ne siječe krivulju u toj ravnini dobit ćemo plohu. Tu plohu nazivamo *rotacijskom plohom*. Krivulju koju smo rotirali nazivamo *generatrisom* plohe, a pravac oko kojeg krivulja rotira *osi rotacije*.

Primjerice, ako zarotiramo hiperbolu  $y^2 - z^2 = 1$  oko  $z$ -osi dobit ćemo **jednoplošni rotacijski hiperboloid** čija jednadžba glasi

$$f(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$



Slika 1.1: Jednoplešni rotacijski hiperboloid

## Pravčaste plohe

Neka je  $c : I \rightarrow \mathbb{R}$  regularna krivulja, dok je  $e = e(u)$  jedinično polje duž  $c$ . Jednostavna ploha koja je parametrizirana s

$$\mathbf{x}(u, v) = c(u) + ve(u), \quad u \in I, \quad v \in \mathbb{R},$$

naziva se *pravčastom plohom*.

Jedan primjer pravčaste plohe je **jednoplešni hiperboloid**. Kada bi zarotirali neki pravac oko njemu mimosmjerne osi dobili bismo upravo ovu pravčastu plohu. Ona ima parametrizaciju:

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \cos u - av \sin u, bv \cos u + b \sin u, cv)$$

koju možemo zapisati i ovako

$$\mathbf{x}(u, v) = (a \cos u, b \sin u, 0) + v(-a \sin u, b \cos u, c).$$

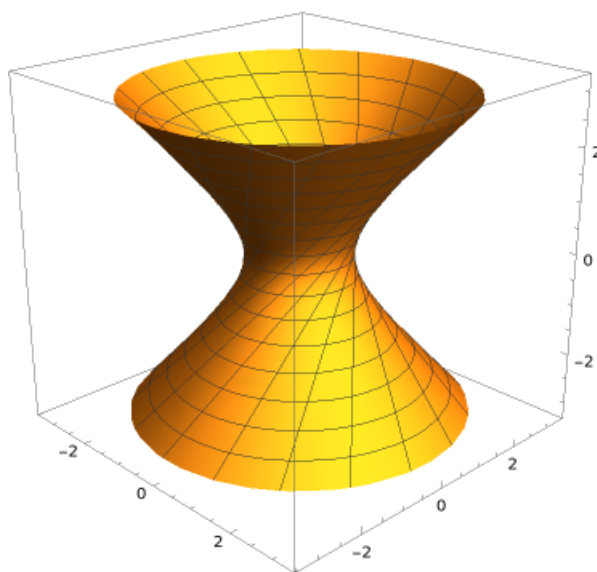
**Möbiusova traka** je pravčasta ploha definirana jednadžbom

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u + v \cos(u/2) \cos u, \sin u + v \cos(u/2) \sin u, v \sin(u/2)) \quad (1.1)$$

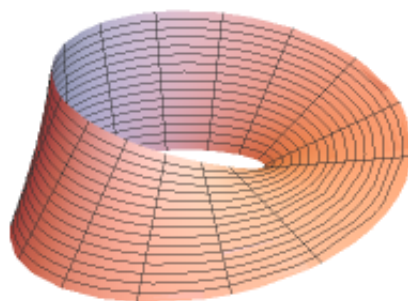
što se može vidjeti na Slici 1.3.

**Cilindrične plohe** su plohe koje opisuju pravci (zvani izvodnice ili generatriše) kada klize duž zadane krivulje (zvane ravnalica ili direktrisa), a da pritom ostaju stalno istog smjera. Zadane su s

$$\mathbf{x}(u, v) = c(u) + ve,$$

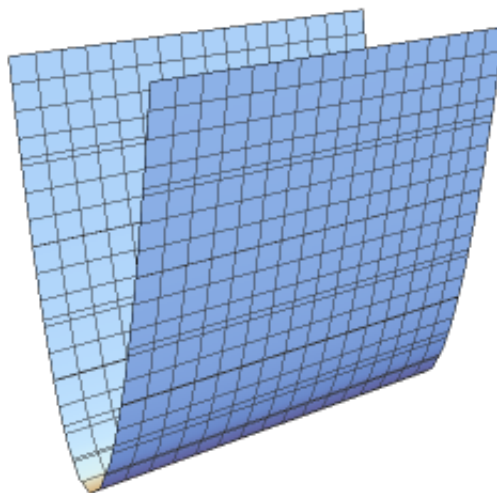


Slika 1.2: Jednoplášni hiperboloid



Slika 1.3: Möbiusova traka

pri čemu je  $c$  regularna krivulja, a  $e$  konstantno jedinično polje duž  $c$ .



Slika 1.4: Cilindrična ploha

**Konusne plohe** parametrizirane su s:

$$\mathbf{x}(u, v) = p + ve(u)$$

pri čemu je  $p$  fiksna točka. Napomenimo da točka  $p$  ne pripada konusu.

**Tangentna ploha** je ploha zadana s:

$$\mathbf{x}(u, v) = c(u) + vc'(u),$$

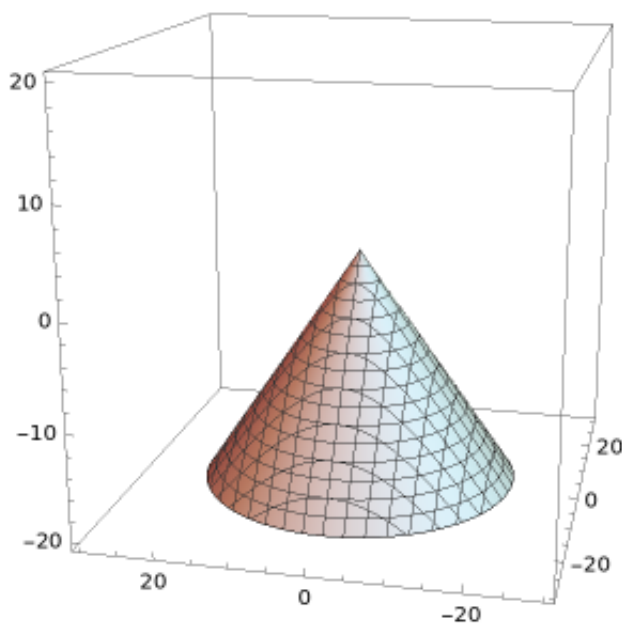
pri čemu je  $c$  regularna krivulja parametrizirana duljinom luka.

### **Translacijske plohe**

Translacijske plohe nastaju gibanjem jedne krivulje po drugoj. Preciznije, neka su  $c_1(u)$  i  $c_2(v)$  dvije regularne krivulje. *Translacijska ploha* je jednostavna ploha koja dopušta parametrizaciju

$$x(u, v) = c_1(u) + c_2(v).$$

Krivulje  $c_1(u)$  i  $c_2(v)$  nazivamo *generatrisama* plohe.



Slika 1.5: Konusna ploha

Na primjer, **kružni cilindar** je translacijska ploha koja nastaje gibanjem pravca po kružnici ili obrnuto.

Kada govorimo o glatkim krivuljama na plohi, govorimo o krivuljama kojima je kodomena ploha, a ne otvoreni podskup od  $\mathbb{R}^3$ .

**Definicija 1.2.2.** *Glatko preslikavanje  $c : I \rightarrow S, I \subset \mathbb{R}$ , nazivamo glatkom krivuljom na plohi. Također, za preslikavanje  $c : I \rightarrow S$  kažemo da je glatko u slučaju da je preslikavanje  $\mathbf{x}^{-1} \circ c : I \rightarrow U$  glatko, za neku kartu  $\mathbf{x} : U \rightarrow S, c(I) \subset \mathbf{x}(U)$ .*

Glatke krivulje pomažu nam u proučavanju ploha, a samim time i u proučavanju tangencijalnog vektora na plohu i tangencijalne ravnine.

**Definicija 1.2.3.** *Neka je  $S$  regularna ploha i  $p \in S$ . Definiramo tangencijalni vektor u točki  $p$  kao vektor  $v_p \in T_p\mathbb{R}^3$  za koji postoji krivulja  $c : I \rightarrow S$ , takva da je*

$$c(0) = p, \quad c'(0) = v_p.$$

*Skup  $T_pS$  je skup svih tangencijalnih vektora u  $p$ .*

Taj skup  $T_pS$  dimenzije je 2 i potprostor je skupa  $T_p\mathbb{R}^3$ . Potprostor  $T_pS$  nazivamo i *tangencijalnom ravninom plohe  $S$  u točki  $p$ .*

**Definicija 1.2.4.** Bilinearan funkcional  $I : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  koji je simetričan i definiran s

$$I(v_p, w_p) = v_p \cdot w_p$$

nazivamo prva fundamentalna forma plohe  $S$  u točki  $p \in S$ . Isto tako, pridruženu kvadratnu formu  $I : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$

$$I(v_p) = v_p \cdot v_p$$

nazivamo prvom fundamentalnom formom.

Definirat ćemo fundamentalne veličine prvog reda plohe  $S$ . Zapisujemo prvu fundamentalnu formu u karti  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset S$ . Neka je  $v_p \in T_p S$ . U tom slučaju postoji krivulja  $c : I \rightarrow S$  takva da za nju vrijedi  $c(0) = p$ ,  $c'(0) = v_p$ . Neka je  $p = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ . Krivulju  $c$  možemo prikazati u karti

$$c(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t)),$$

te možemo pisati

$$v_p = c'(0) = \mathbf{x}_u(u_0, v_0)u'(0) + \mathbf{x}_v(u_0, v_0)v'(0).$$

To znači da vrijedi

$$I(v_p) = v_p \cdot v_p = \mathbf{x}_u^2(u_0, v_0)(u'(0))^2 + 2\mathbf{x}_u(u_0, v_0) \cdot \mathbf{x}_v(u_0, v_0)u'(0)v'(0) + \mathbf{x}_v^2(u_0, v_0)(v'(0))^2.$$

Na kraju definiramo funkcije  $E, F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$

$$E = \mathbf{x}_u^2, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v^2.$$

Te funkcije s oznakama  $E, F, G$  nazivamo fundamentalnim veličinama prvog reda plohe  $S$  u karti  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ .

Neka je  $S$  regularna ploha i  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  karta. Znamo da je tangencijalna ravnina  $T_p S$  plohe  $S$  u točki  $p$  ravnina koja je razapeta vektorima  $\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v$ . Definiramo jedinični vektor normale te ravnine kao vektor za koji vrijedi:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}.$$

Taj vektor nazivamo *standardnim jediničnim vektorom normale* karte  $\mathbf{x}$ .

**Definicija 1.2.5.** Ako za svaku funkciju prijelaza između različitih karata vrijedi  $\det(J) > 0$ , onda kažemo da je ploha orijentabilna.

Za takvu plohu postoji standardni (kanonski) izbor jedinične normale u svakoj točki. Njega možemo dobiti preko jediničnog vektora normale karata od  $S$ . Tako na  $S$  definiramo glatko, jedinično normalno polje i tada za  $S$  kažemo da je orijentirana.



**Definicija 1.2.6.** Neka je  $S$  regularna ploha parametrizirana s  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Gaussovo preslikavanje je preslikavanje koje definiramo kao

$$\mathbf{n} : U \rightarrow S^2, \mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}.$$

Gaussovo preslikavanje je na orijentiranoj plohi neprekidno i definirano na cijeloj plohi. Sada ćemo proučiti promjenu jediničnog normalnog polja plohe.

**Definicija 1.2.7.** Operator oblika plohe  $S$  u točki  $p$  je preslikavanje  $S_p : T_p S \rightarrow T_p \mathbb{R}^3$  definirano s

$$S_p(v_p) = -D_{v_p} \mathbf{n}(p).$$

Njega nazivamo i Weingartenovim preslikavanjem.

**Napomena.** Neka je  $f$  glatka funkcija takva da  $f : U \rightarrow \mathbb{R}, U \subset \mathbb{R}^3$  otvoren i  $p, v \in \mathbb{R}^3$ . Realan broj

$$D_v f(p) = \left( \frac{d}{dt} f(p + tv) \right)(0)$$

zovemo usmjerena derivacija funkcije  $f$  u smjeru vektora  $v$  u točki  $p$ .

Imamo da je  $S$  (orijentirana) ploha i da je  $S_p : T_p S \rightarrow T_p S$  operator oblika plohe od  $S$ .

**Definicija 1.2.8.** Funkciju  $K : S \rightarrow \mathbb{R}$  definiranu s

$$K(p) = \det S_p$$

nazivamo Gaussova zakrivljenost plohe  $S$  u točki  $p$ , dok funkciju  $H : S \rightarrow \mathbb{R}$  definiranu s

$$H(p) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} S_p$$

nazivamo srednja zakrivljenost plohe  $S$  u točki  $p$ .

Operator oblika plohe je simetričan što znači da za njega vrijedi:

$$S_p(v) \cdot w = v \cdot S_p(w), v, w \in T_p S.$$

S obzirom da je  $S_p$  simetričan operator, to znači da postoji ortonormirana baza od  $T_p S$  u kojoj  $S_p$  ima dijagonalnu matricu kao matrični prikaz. Označimo tu bazu s  $e_1, e_2$ . U tom slučaju vrijedi

$$S_p(e_1) = k_1(p)e_1, S_p(e_2) = k_2(p)e_2,$$

$$S_p = \begin{pmatrix} k_1(p) & 0 \\ 0 & k_2(p) \end{pmatrix}.$$

Glavne zakrivljenosti plohe  $S$  u točki  $p$  su svojstvene vrijednosti  $k_1(p), k_2(p)$  operatora  $S_p$ , dok vektore  $e_1, e_2$  nazivamo (jediničnim) glavnim vektorima.

Jasno je da vrijedi

$$K(p) = k_1(p)k_2(p), \quad H(p) = \frac{1}{2}(k_1(p) + k_2(p)).$$

Kasnije ćemo vidjeti da za minimalne plohe ( $H = 0$ ) vrijedi da je  $k_1 = -k_2$ .

Predznak Gaussove zakrivljenosti daje nam informaciju o točkama plohe. Zato nam je bitna sljedeća klasifikacija točaka plohe:

1. Točka  $p \in S$  je *eliptička* ako za nju vrijedi da je  $K(p) > 0$ . Glavne zakrivljenosti  $k_1, k_2$  u toj točki su istog predznaka. Posebno za točke plohe za koje je  $k_1 = k_2$  kažemo da su pupčaste. Za pupčaste točke vrijedi:  $H^2 = K$ .
2. Točka  $p \in S$  je *hiperbolička* ako za nju vrijedi  $K(p) < 0$ . Tada su glavne zakrivljenosti  $k_1, k_2$  različitih predznaka. Primjerice, svaka točka jednoplošnog hiperboloida i helikoida je hiperbolička.
3. Točka  $p \in S$  je *parabolička* ako za nju vrijedi  $K(p) = 0$ . Barem jedna glavna zakrivljenost  $k_1, k_2$  je u tom slučaju jednaka 0. Sada imamo dva slučaja:
  - a) Točno jedna glavna zakrivljenost je jednaka 0. Primjer takve točke je svaka točka kružnog cilindra.
  - b) U slučaju da su obje glavne zakrivljenosti jednake 0, takvu točku nazivamo ravninskom ili točkom spljoštenosti. Primjer takve točke je svaka točka ravnine.

**Definicija 1.2.9.** Ploha  $S$  je plosnata ako za svaku točku  $p$  plohe  $S$  vrijedi da je  $K(p) = 0$ . Ako za svaku točku  $p$  plohe  $S$  vrijedi  $H(p) = 0$ , onda za plohu  $S$  kažemo da je minimalna. Ploha  $S$  je konstantne zakrivljenosti ako vrijedi da je  $K(p) = \text{const.}$  za svaku točku  $p$  plohe.

Plosnate plohe reprezentiraju ravnina, cilindrična ploha i tangentna ploha. Poznati primjeri minimalnih ploha su helikoid i katenoid, a malo manje poznate primjere upoznat ćemo u posljednjem poglavlju. Sfera i pseudosfera su primjeri ploha konstante zakrivljenosti.

**Definicija 1.2.10.** Bilinearan funkcional  $II : T_p S \times T_p S \rightarrow \mathbb{R}$  koji je simetričan i definiran

$$II(v_p, w_p) = S_p(v_p) \cdot w_p$$

naziva se druga fundamentalna forma plohe  $S$  u točki  $p \in S$ . Pridružena kvadratna forma  $II : T_p S \rightarrow \mathbb{R}$

$$II(v_p) = S_p(v_p) \cdot v_p$$

isto tako se naziva drugom fundamentalnom formom.

Zapisujemo drugu fundamentalnu formu u karti  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Neka je  $v_p \in T_p S$ . Tada postoji krivulja  $c : I \rightarrow S$  takva da za nju vrijedi da je  $c(0) = p, c'(0) = v_p$ . Neka je  $p = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ . Krivulju  $c$  možemo prikazati u karti kao

$$c(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t)).$$

S obzirom da vrijedi

$$v_p = c'(0) = \mathbf{x}_u(u_0, v_0)u'(0) + \mathbf{x}_v(u_0, v_0)v'(0),$$

možemo pisati

$$\begin{aligned} II(v_p) &= S(v_p) \cdot v_p \\ &= S_p(\mathbf{x}_u(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{x}_u(u_0, v_0)(u'(0))^2 + S_p(\mathbf{x}_u(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{x}_v(u_0, v_0)u'(0)v'(0) \\ &\quad + \mathbf{x}_u(u_0, v_0) \cdot S_p(\mathbf{x}_v(u_0, v_0))u'(0)v'(0) + S_p(\mathbf{x}_v(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{x}_v(u_0, v_0)(v'(0))^2. \end{aligned}$$

Definiramo funkcije  $L, M, N : U \rightarrow \mathbb{R}$  kao

$$\begin{aligned} L &= S_p(\mathbf{x}_u(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{x}_u(u_0, v_0), \\ M &= S_p(\mathbf{x}_u(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{x}_v(u_0, v_0) = \mathbf{x}_u(u_0, v_0) \cdot S_p(\mathbf{x}_v(u_0, v_0)), \\ N &= S_p(\mathbf{x}_v(u_0, v_0)) \cdot \mathbf{x}_v(u_0, v_0). \end{aligned}$$

Te funkcije  $L, M, N$  se nazivaju fundamentalnim veličinama drugog reda plohe  $S$  u karti  $\mathbf{x}$ .

**Propozicija 1.2.11.** *Imamo da je  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  karta za plohu  $S$ , i  $E; F; G; L; M; N$  fundamentalne veličine prvog i drugog reda s obzirom na kartu  $\mathbf{x}$ . Formule*

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad (1.2)$$

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} \quad (1.3)$$

tada vrijede za Gaussovu i srednju zakrivljenost.

**Napomena.** U nazivniku gornjih formula nalazi se izraz

$$W^2 := EG - F^2 \quad (1.4)$$

koji nazivamo Weingartenova funkcija.

Neka je  $\mathbf{n}(u, v)$  jedinični vektor normale i neka su  $(E, F, G)$  te  $(L, M, N)$  fundamentalne veličine prvog odnosno drugog reda. *Weingartenove jednačbe* nam daju prvu derivaciju jediničnog vektora normale u točki  $P$  izraženu preko tangencijalnih vektora  $\mathbf{x}_u$  i  $\mathbf{x}_v$ :

$$\begin{aligned} n_u &= \frac{FM - GL}{EG - F^2} \mathbf{x}_u + \frac{FL - EM}{EG - F^2} \mathbf{x}_v, \\ n_v &= \frac{FN - GM}{EG - F^2} \mathbf{x}_u + \frac{FM - EN}{EG - F^2} \mathbf{x}_v. \end{aligned} \quad (1.5)$$

**Definicija 1.2.12.** *Realan broj*

$$k(v_p) = \frac{S_p(v_p) \cdot v_p}{v_p \cdot v_p}$$

*nazivamo normalnom zakrivljenošću plohe  $S$  u točki  $p$  u smjeru tangencijalnog vektora  $v_p$ .*

Ako su vektori  $v_p, w_p$  kolinearni, onda imamo da su normalne zakrivljenosti plohe u smjeru tih vektora jednake. Zaista, ako je  $v_p = \lambda w_p$ , tada je

$$k(w_p) = \frac{S_p(w_p) \cdot w_p}{w_p \cdot w_p} = \frac{S_p(\lambda v_p) \cdot \lambda v_p}{\lambda v_p \cdot \lambda v_p} = \frac{\lambda^2 S_p(v_p) \cdot v_p}{\lambda^2 v_p \cdot v_p} = k(v_p).$$

## Poglavlje 2

# Minimalne plohe

Kao što smo već vidjeli u uvodnom poglavlju, Plateauov problem postavlja pitanje pronalaska plohe minimalne površine ako imamo zadanu (zatvorenu) krivulju koja omeđuje tu plohu. S druge strane, u Definiciji 1.2.9 smo vidjeli da za neku plohu kažemo da je minimalna ako je njena srednja zakrivljenost u svakoj točki jednaka nuli. Sada ćemo pokazati da su plohe čija je srednja zakrivljenost jednake nuli upravo plohe koje rješavaju Plateauov problem, tj. plohe minimalne površine.

### 2.1 Normalna varijacija i površina plohe

Prisjetimo se definicije površine plohe (ili dijela plohe) pomoću plošnog integrala.

**Definicija 2.1.1.** *Neka je  $S$  regularna ploha u  $\mathbb{R}^3$  i  $\mathbf{x} : U \rightarrow S$  regularna karta. Ako je  $Q$  ograničen podskup od  $U$ , tada je površina od  $\mathbf{x}(Q)$  dana s:*

$$A(\mathbf{x}(Q)) = \iint_Q \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| \, dudv. \quad (2.1)$$

Koristeći definiciju koeficijenata prve fundamentalne forme, formulu za površinu možemo zapisati i na sljedeći način:

$$\begin{aligned} A(\mathbf{x}(Q)) &= \iint_Q \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| \, dudv \\ &= \iint_Q \sqrt{(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)} \, dudv \\ &= \iint_Q \sqrt{(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v) - (\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)^2} \, dudv \\ &= \iint_Q \sqrt{EG - F^2} \, dudv. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Želimo istražiti kako se površina plohe mijenja s obzirom na male perturbacije, a najjednostavnije perturbacije su perturbacije u smjeru okomitom na plohu, odnosno u normalnom smjeru. Odatle dolazi motivacija za sljedeću definiciju.

**Definicija 2.1.2.** Neka je  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  regularna karta i  $Q \subset U$  ograničen skup. Neka je  $h : Q \rightarrow \mathbb{R}$  diferencijabilna funkcija i  $\varepsilon > 0$ . Nadalje, neka  $\mathbf{n}$  označava jedinično vektorsko polje takvo da je  $\mathbf{n}(u, v)$  okomito na  $\mathbf{x}(u, v)$ , za sve  $(u, v) \in U$ . Tada je normalna varijacija od  $\mathbf{x}$  i  $Q$ , određena s  $h$ , preslikavanje

$$\mathbf{X} : (-\varepsilon, \varepsilon) \times Q \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

zadano s

$$\mathbf{X}^t(u, v) = \mathbf{x}(u, v) + th(u, v)\mathbf{n}(u, v), \quad (2.3)$$

za  $(u, v) \in Q$  i  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ .

Iz prethodne definicije slijedi da je  $\mathbf{X}^t$  karta za svaki  $t$  takav da je  $-\varepsilon < t < \varepsilon$  za dovoljno mali  $\varepsilon$ .

Neka su

$$\begin{cases} E(t) = \mathbf{X}_u^t \cdot \mathbf{X}_u^t, \\ F(t) = \mathbf{X}_u^t \cdot \mathbf{X}_v^t, \\ G(t) = \mathbf{X}_v^t \cdot \mathbf{X}_v^t, \end{cases}$$

fundamentalne veličine prvog reda za  $\mathbf{X}^t$ . Jasno je da vrijedi

$$E = E(0), \quad F = F(0) \quad \text{i} \quad G = G(0),$$

dok je površina od  $\mathbf{X}^t(Q)$  dana s

$$A(t) = \iint_Q \sqrt{E(t)G(t) - F(t)^2} \, dudv. \quad (2.4)$$

**Lema 2.1.3.** Vrijedi

$$A'(0) = -2 \iint hH \sqrt{EG - F^2} \, dudv, \quad (2.5)$$

pri čemu  $H$  označava srednju zakrivljenost plohe  $S$ .

*Dokaz.* Deriviranjem (2.3) po  $u$  i  $v$  dobivamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_u^t &= \mathbf{x}_u + th_u \mathbf{n} + th \mathbf{n}_u, \\ \mathbf{X}_v^t &= \mathbf{x}_v + th_v \mathbf{n} + th \mathbf{n}_v. \end{aligned}$$

Računamo,

$$\begin{aligned}
 E(t) &= \mathbf{X}_u^t \cdot \mathbf{X}_v^t \\
 &= (\mathbf{x}_u + th_u \mathbf{n} + th \mathbf{n}_u) \cdot (\mathbf{x}_v + th_v \mathbf{n} + th \mathbf{n}_v) \\
 &= E + 2th \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{n}_u + O(t^2) \\
 &= E - 2thL + O(t^2),
 \end{aligned}$$

gdje smo koristili da je

$$L = -\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{n}_u.$$

Slično se dobije da je

$$\begin{aligned}
 F(t) &= F - 2thM + O(t^2), \\
 G(t) &= G - 2thN + O(t^2).
 \end{aligned}$$

Koristeći gornje izraze imamo:

$$\begin{aligned}
 E(t)G(t) - F(t)^2 &= (E - 2thL + O(t^2))(G - 2thN + O(t^2)) - (F - 2thM + O(t^2))^2 \\
 &= EG - F^2 - 2th(EN - 2FM + GL) + O(t^2) \\
 &= (EG - F^2)(1 - 4thH) + O(t^2),
 \end{aligned}$$

gdje smo u zadnjoj jednakosti koristili (1.3). Stoga je

$$\begin{aligned}
 \sqrt{E(t)G(t) - F(t)^2} &= \sqrt{(EG - F^2)(1 - 4thH) + O(t^2)} \\
 &= \sqrt{EG - F^2} \sqrt{(1 - 4thH) + O(t^2)} \\
 &= \sqrt{EG - F^2}(1 - 2thH) + O(t^2).
 \end{aligned}$$

Uvrštavanjem prethodno dobivenog u (2.2), slijedi da je

$$\begin{aligned}
 A(t) &= \iint_Q \sqrt{EG - F^2}(1 - 2thH) + O(t^2) \, dudv \\
 &= \iint_Q \sqrt{EG - F^2} \, dudv - 2t \iint_Q hH \sqrt{EG - F^2} \, dudv + O(t^2).
 \end{aligned}$$

Deriviranjem po  $t$  te uvrštavanjem  $t = 0$ , dobivamo da je

$$A'(0) = -2 \iint_Q hH \sqrt{EG - F^2} \, dudv. \quad (2.6)$$

□

**Teorem 2.1.4.** *Neka je  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  i  $Q \subset U$  ograničen skup. Tada je  $\mathbf{x}(Q)$  minimalna ploha ako i samo ako je  $A'(0) = 0$  za normalnu varijaciju od  $\mathbf{x}$  i  $Q$  s obzirom na  $h : Q \rightarrow \mathbb{R}$ .*

*Dokaz.*  $\boxed{\Rightarrow}$  Neka je ploha minimalna. Tada je po definiciji  $H = 0$  pa uvrštavanjem u (2.6) slijedi da je  $A'(0) = 0$  za svaki  $h$ .

$\boxed{\Leftarrow}$  Obratno, neka je  $A'(0) = 0$  za svaku derivabilnu funkciju  $h : Q \rightarrow \mathbb{R}$  i pretpostavimo da postoji  $p \in Q$  takav da vrijedi  $H(p) \neq 0$ . Odaberimo funkciju  $h$  takvu da je  $h(p) = H(p)$ , s tim da je  $h$  jednaka nuli izvan okoline od  $p$  na kojoj je  $hH \geq 0$ . No, sada iz (2.6) slijedi da je  $A'(0) < 0$  što je kontradikcija s pretpostavkom. S obzirom da je  $p$  proizvoljna, dio plohe parametriziran s  $\mathbf{x}$  je minimalan. □

## 2.2 Weierstrass – Enneperova reprezentacija

Kada razmišljamo o proučavanju ploha, najčešće to povezujemo s diferencijalnom geometrijom. Međutim, ploha se možemo baviti koristeći i kompleksnu analizu. Weierstrass–Enneperova reprezentacija nam kaže da se bilo koja minimalna ploha može prikazati pomoću kompleksne holomorfne funkcije.

Za početak se prisjetimo pojmova iz kompleksne analize koji će nam biti potrebni.

**Definicija 2.2.1.** *Za funkciju  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  kažemo da je holomorfna ako je derivabilna i ako je njena derivacija  $f'$  neprekidna na  $\Omega$ . Za funkciju kažemo da je holomorfna u točki  $z_0$  ako postoji okolina točke  $z_0$  na kojoj je  $f$  holomorfna.*

**Definicija 2.2.2.** *Neka je  $\Omega \subset \mathbb{C}$  otvoren skup, a  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  funkcija. Kažemo da je točka  $z_0 \in \text{Int } \bar{\Omega} = \Omega / \partial \bar{\Omega}$  singularitet funkcije  $f$  ili da funkcija  $f$  ima u točki  $z_0$  singularitet, ako u točki  $z_0$  funkcija  $f$  nije holomorfna ili uopće nije definirana u toj točki.*

**Definicija 2.2.3.** *Za funkciju kažemo da je meromorfna na otvorenom skupu  $\Omega \subset \mathbb{C}$  ako skup singulariteta nema gomilište u  $\Omega$  i ako su svi singulariteti ili uklonjivi ili polovi.*

Sada ćemo uvesti pojam izotermne parametrizacije.

**Definicija 2.2.4.** *Neka je  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  otvoren skup. Za parametrizaciju  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  kažemo da je izotermna ako vrijedi*

$$\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v \quad \text{i} \quad \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0.$$

Vidimo da kod izotermne parametrizacije zapravo vrijedi

$$E = G \quad \text{i} \quad F = 0$$



stoga nije teško vidjeti (koristeći formulu (1.3)) da je u tom slučaju srednja zakrivljenost jednaka

$$H = \frac{N + L}{2E}.$$

**Teorem 2.2.5.** *Ako je parametrizacija  $\mathbf{x}$  izotermna, tada je*

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = (2EH)\mathbf{n}.$$

*Dokaz.* Koristeći rastave od  $\mathbf{x}_{uu}$  i  $\mathbf{x}_{vv}$  po bazi  $\{\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v, \mathbf{n}\}$  računamo:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} &= \left( \frac{E_u}{2E} \mathbf{x}_u - \frac{E_v}{2G} \mathbf{x}_v + L\mathbf{n} \right) + \left( \frac{G_u}{2E} \mathbf{x}_u - \frac{G_v}{2G} \mathbf{x}_v + N\mathbf{n} \right) \\ &= (L + N)\mathbf{n} \\ &= 2E \left( \frac{L + N}{2E} \right) \mathbf{n} \\ &= 2EH\mathbf{n}. \end{aligned}$$

□

**Korolar 2.2.6.** *Ploha  $M$  sa izotermnom parametrizacijom  $\mathbf{x}$*

$$\mathbf{x}(u, v) = (x^1(u, v), x^2(u, v), x^3(u, v))$$

*je minimalna ako i samo ako su  $x^1$ ,  $x^2$  i  $x^3$  harmonijske funkcije.*

*Dokaz.* Ako je  $M$  minimalna ploha, tada je  $H = 0$  pa prema Teoremu 2.2.5 vrijedi

$$\Delta \mathbf{x} = (2EH)\mathbf{n} = 0,$$

tj.  $x^1$ ,  $x^2$  i  $x^3$  su harmonijske funkcije. Obratno, ako su  $x^1$ ,  $x^2$  i  $x^3$  harmonijske funkcije, tada je

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$$

pa je prema Teoremu 2.2.5

$$(2EH)\mathbf{n} = 0.$$

S obzirom da je  $\mathbf{n}$  normalni jedinični vektor i  $E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u \neq 0$ , tada mora vrijediti da je  $H = 0$  pa je  $M$  minimalna ploha. □

Korisno je prebaciti se iz standardnih koordinata  $u, v \in \mathbb{R}^2$  u kompleksne koordinate  $z$  i  $\bar{z}$ . Njihova veza dana je sljedećim formulama:

$$\begin{cases} z = u + iv, \\ \bar{z} = u - iv, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u = \frac{z + \bar{z}}{2}, \\ v = \frac{z - \bar{z}}{2i}. \end{cases}$$

Nadalje možemo definirati i kompleksne derivacije

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} - i \frac{\partial}{\partial v} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial u} + i \frac{\partial}{\partial v} \right),$$

**Definicija 2.2.7.** Kompleksna derivacija parametrizacije  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  je dana s

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_u - i\mathbf{x}_v). \quad (2.7)$$

Definiramo funkciju

$$\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3) := \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}. \quad (2.8)$$

Nije teško za vidjeti da vrijedi

$$4(\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2) = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u - \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v - 2i\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = E - G - 2iF. \quad (2.9)$$

**Propozicija 2.2.8.** Parametrizacija  $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  je izotermna ako i samo ako vrijedi

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0. \quad (2.10)$$

*Dokaz.* Znamo da je parametrizacija izotermna ako vrijedi  $E = G$  i  $F = 0$  pa tvrdnja propozicije slijedi iz (2.9).  $\square$

**Korolar 2.2.9.** Neka je  $\mathbf{x}$  parametrizacija plohe  $M$  i neka je  $\boldsymbol{\phi} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z}$  takva da je  $\boldsymbol{\phi}^2 = 0$ . Tada je ploha  $M$  minimalna ako i samo ako je  $\boldsymbol{\phi}$  holomorfna funkcija.

Dakle, zaključujemo da svaku minimalnu plohu možemo opisati holomorfnom funkcijom  $\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$  za koju vrijedi  $\boldsymbol{\phi}^2 = 0$ . Jedan od načina da konstruiramo takvu funkciju  $\boldsymbol{\phi}$  je da uzmemo holomorfnu funkciju  $f$  i meromorfnu funkciju  $g$  za koje vrijedi da je  $fg^2$  holomorfna i definiramo:

$$\phi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2), \quad \phi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2), \quad \phi_3 = fg.$$

**Teorem 2.2.10** (Weierstrass-Enneperova reprezentacija). *Ako je  $f$  holomorfna na domeni  $D$ ,  $g$  meromorfna na  $D$  i  $fg^2$  holomorfna na  $D$ , onda je minimalna ploha definirana parametrizacijom*

$$\mathbf{x}(z, \bar{z}) = (x^1(z, \bar{z}), x^2(z, \bar{z}), x^3(z, \bar{z}))$$

gdje je

$$\begin{aligned}x^1(z, \bar{z}) &= \operatorname{Re} \int f(1 - g^2) dz, \\x^2(z, \bar{z}) &= \operatorname{Re} \int if(1 + g^2) dz, \\x^3(z, \bar{z}) &= \operatorname{Re} \int 2fg dz.\end{aligned}\tag{2.11}$$

## Poglavlje 3

# Helikoid i katenoid

Iako su matematičari otkrili niz minimalnih ploha, dva imena ipak najviše iskaču: helikoid i katenoid. Osim što imaju neka posebna svojstva, one se koriste i u arhitekturi.

### 3.1 Helikoid

Helikoid je uspravna pravčasta ploha koju generira pravac koji ortogonalno siječe neku os, jednoliko rotira oko te osi te se istovremeno jednoliko giba u smjeru te osi. Uz ravninu, helikoid je jedina pravčasta minimalna ploha koja je parametarski određena jednadžbama koje glase:

$$\begin{aligned}x(u, v) &= av \cos u, \\y(u, v) &= av \sin u, \\z(u, v) &= bu, \\(u, v) &\in \mathbb{R}^2, a > 0, b \neq 0.\end{aligned}\tag{3.1}$$

**Napomena.** *Krivulja dana parametarskim jednadžbama*

$$x(u) = a \cos u, y(u) = a \sin u, z(u) = bu, u \in \mathbb{R}, a > 0, b \neq 0$$

*zove se kružna zavojnica polumjera  $a$  i parametra  $b$ . Tu krivulju opisuje točka na uspravnom kružnom valjku koja jednoliko kruži oko njegove osi i istovremeno se jednoliko giba u smjeru te osi.*

Pokazat ćemo da je srednja zakrivljenost helikoida jednaka nuli. Kako bi to pokazali, prvo trebamo izračunati fundamentalne veličine prvog i drugog reda.

Fundamentalne veličine prvog reda su

$$\begin{aligned} E &= a^2 v^2 + b^2, \\ F &= 0, \\ G &= a^2, \end{aligned}$$

dok su fundamentalne veličine drugog reda

$$\begin{aligned} L &= 0, \\ M &= \frac{ab}{\sqrt{a^2 v^2 + b^2}}, \\ N &= 0. \end{aligned}$$

Znamo da vrijedi (formula (1.3))

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}$$

i da je  $EG - F^2 \neq 0$  pa je dovoljno pokazati da je  $EN - 2FM + GL = 0$ . Iz dobivenih veličina vidimo da je uistinu  $H = 0$ .

Glavne zakrivljenosti  $k_1$  i  $k_2$  helikoida u točki  $T(u, v)$  su

$$k_{1,2} = \pm \frac{a}{a^2 + u^2}.$$

**Teorem 3.1.1.** *Osim ravnine, jedina pravčasta minimalna ploha u  $\mathbb{R}^3$  je helikoid.*

*Dokaz.* Neka je  $\mathbf{x}(u, v) = \alpha(u) + vw(u)$  parametrizacija pravčaste plohe u  $\mathbb{R}^3$  gdje je  $\alpha(u)$  diferencijabilna krivulja, a  $w(u)$  diferencijabilno vektorsko polje jedinične duljine, tj.  $\|w(u)\| = 1$ . Nadalje, izaberimo  $u$  tako da je  $\|w'(u)\| = 1$ . Funkcija

$$u \mapsto \left\| \frac{d\mathbf{x}(u, v)}{du} \right\|^2 = \|\alpha'(u) + ww'(u)\|^2$$

poprima minimum u točki  $u = -\alpha'(u) \cdot w'(u)$ . Ako definiramo

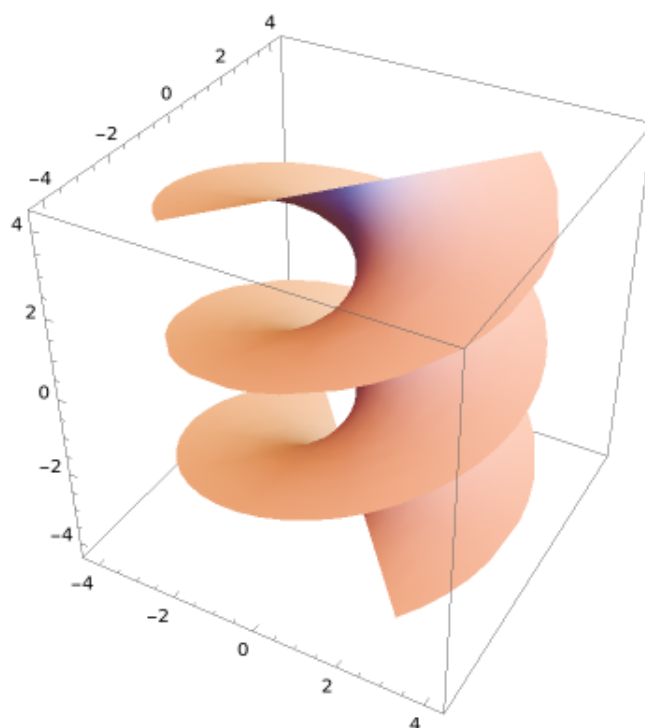
$$\beta(u) := \alpha(u) - (\alpha'(u) \cdot w'(u))w(u),$$

slijedi da

$$\mathbf{y}(u, v) = \beta(u) + vw(u)$$

zapravo još jedna parametrizacija zadane pravčaste plohe  $\mathbf{x}(t, u)$ . Lako se vidi da vrijedi da je

$$\beta'(u) \cdot w'(u) = 0.$$



Slika 3.1: Helikoid

Uočimo da je tangencijalna ravnina u točkama koje pripadaju krivulji  $\beta$ , razapeta s  $\beta'(u)$  i  $w(u)$ , dok je  $w'(u)$  jedinična normala na tu ravninu. Fundamentalne veličine prvog i drugog reda za  $\mathbf{y}$  su:

$$\begin{aligned}
 E &= (\beta' + vw') \cdot (\beta' + vw') = \beta' \cdot \beta' + v^2, \\
 F &= \beta' \cdot w, \\
 G &= 1, \\
 L &= \frac{1}{D} (\beta'' \cdot \beta' \times w + v(\beta'' \cdot w' \times w + w'' \cdot \beta' \times w) + v^2(w'' \cdot w' \times w)), \\
 M &= \frac{1}{D} w' \cdot \beta' \times w, \\
 N &= 0,
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

gdje je  $D = \|\mathbf{y}_u \times \mathbf{y}_v\|$ .

Sada ćemo pretpostaviti da je pravčasta ploha minimalna. Iz jednakosti  $H = 0$ , odnosno

$$\frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} = 0 \text{ imamo}$$

$$\beta'' \cdot \beta' \times w - 2(\beta' \cdot w)(w' \cdot \beta' \times w) + v(\beta'' \cdot w' \times w + w'' \cdot \beta' \times w) + v^2(w'' \cdot w' \times w) = 0.$$

S obzirom da ova jednadžba vrijedi za svaki  $v$ , postoje tri rješenja:

$$\beta'' \cdot \beta' \times w - 2(\beta' \cdot w)(w' \cdot \beta' \times w) = 0, \quad (3.3)$$

$$\beta'' \cdot w' \times w + w'' \cdot \beta' \times w = 0, \quad (3.4)$$

$$w'' \cdot w' \times w = 0. \quad (3.5)$$

Kako znamo da  $\beta'$  i  $w$  razapinju tangencijalni prostor, identitet (3.3) povlači da je normalna komponenta vektora  $\beta''$  zapravo  $2(\beta' \cdot w)w'$  i onda možemo zapisati

$$\beta'' = a_1\beta' + a_2w + 2(\beta' \cdot w)w', \quad (3.6)$$

pri čemu su  $a_1$  i  $a_2$  skalarne funkcije. Kako je  $w' \cdot w' = 1$ , slijedi da je  $w'' \cdot w' = 0$ , što znači da je  $w''$  tangencijalni vektor pa ga zapisujemo kao

$$w'' = a_3\beta' + a_4w,$$

gdje su  $a_3$  i  $a_4$  skalarne funkcije. Nadalje, imamo  $\beta \cdot w' \times w \neq 0$  pa (3.5) povlači da je  $a_3 = 0$  i  $w'' = a_4w$ . Štoviše, s obzirom da je  $w' \cdot w = 0$ , deriviranjem dobivamo

$$0 = w'' \cdot w + w' \cdot w' = w'' \cdot w + 1,$$

iz čega slijedi

$$w'' = -w. \quad (3.7)$$

Ako ubacimo (3.6) i (3.7) u (3.4), dobit ćemo da je  $a_1 = 0$  i  $\beta'' = a_2w + 2(\beta' \cdot w)w'$ . Deriviranjem izraza  $\beta' \cdot w = 0$ , dobivamo

$$0 = (\beta' \cdot w)' = \beta'' \cdot w + \beta' \cdot w' = a_2$$

nakon čega se dobije  $\beta'' = 0$ .

Sažetak cijelog računa nam govori:

- Krivulja  $\beta$  je pravac jer je  $\beta'' = 0$  pa možemo postaviti  $\beta(u) = (0, 0, au + b)$  za konstante  $a, b$ .
- Kako je  $\beta' \cdot w = 0$ , možemo staviti  $w(u) = (\cos \phi(u), \sin \phi(u), 0)$  gdje je  $\phi$  glatka funkcija. Primijetimo ovdje da je  $w \cdot w = 1$ .

- Krivulja  $w$  rotira konstantnom brzinom jer je  $w' \cdot w' = 1$ . Stoga možemo uzeti  $\phi(u) = \pm u + c$ , gdje je  $c$  konstanta.

Dakle,

$$\mathbf{y}(u, v) = \beta(u) + vw(u) = (v \cos(\pm u + c), v \sin(\pm u + c), au + b).$$

Kako je  $a \neq 0$  (jer smo pretpostavili da ploha nije ravna), zaključak je da smo dobili parametrizaciju helikoida.  $\square$

## 3.2 Katenoid

Katenoid je minimalna ploha koja nastaje rotacijom lančanice. Osim ravnine, to je jedina rotacijska minimalna ploha. U ravnini  $yz$  lančanica je zadana parametarskim jednadžbama:

$$y(v) = a \cosh \frac{v}{a}, z(v) = v, v \in \mathbb{R}, a \neq 0,$$

te se ona rotira oko  $z$  osi i tako nastaje katenoid. On je parametarski određen s jednadžbama koje glase:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= a \cosh \frac{v}{a} \cos u, \\ y(u, v) &= a \cosh \frac{v}{a} \sin u, \\ z(u, v) &= v, \\ (u, v) &\in [-\pi, \pi] \times \mathbb{R}, a \neq 0. \end{aligned} \tag{3.8}$$

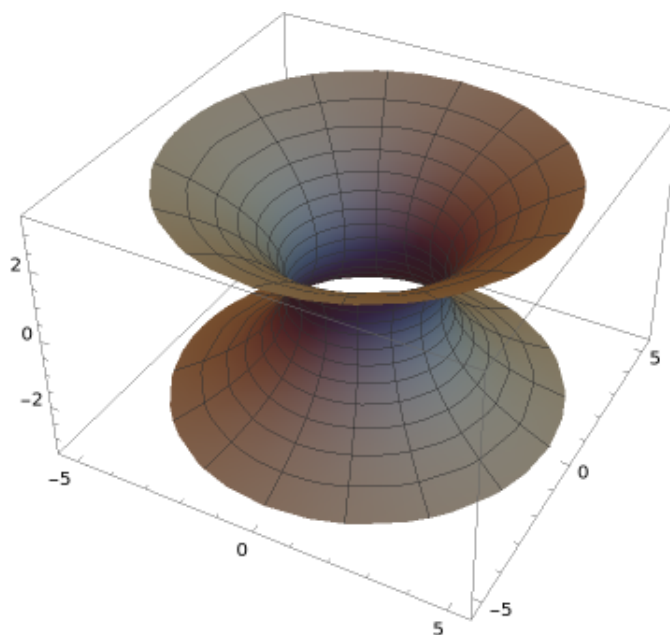
Pokažimo sada da je srednja zakrivljenost katenoida jednaka 0. Za fundamentalne veličine prvog reda vrijedi

$$\begin{aligned} E &= a^2 \cosh^2 \left( \frac{v}{a} \right), \\ F &= 0, \\ G &= \cosh^2 \left( \frac{v}{a} \right), \end{aligned}$$

a za fundamentalne veličine drugog reda

$$\begin{aligned} L &= -a, \\ M &= 0, \\ N &= \frac{1}{a}. \end{aligned}$$





Slika 3.2: Katenoid

Isto kao što smo pokazali za helikoid, pokazat ćemo i za katenoid, to jest ako vrijedi da je  $EN - 2FM + GL = 0$  tada vrijedi i  $H = 0$ . Kada uvrstimo dobivene veličine, vidimo da je zaista  $H = 0$ .

Glavne zakrivljenosti  $k_1$  i  $k_2$  katenoida u točki  $T(u, v)$  su

$$k_{1,2} = \pm \frac{(\operatorname{sech} \frac{v}{a})^2}{a}.$$

**Teorem 3.2.1.** *Rotacijska ploha  $M$  koja je minimalna, leži u ravnini ili u katenoidu.*

*Dokaz.* Neka je  $\mathbf{x}$  karta čija je slika sadržana u  $M$  i neka je  $\alpha = (\phi, \psi)$  generatrisa. Tada je  $\mathbf{x}$  zadano kao

$$\mathbf{x}(u, v) = (\phi(v) \cos u, \phi(v) \sin u, \psi(v)),$$

pri čemu vrijedi da je  $\mathbf{x} : (0, 2\pi) \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Postoje 3 slučaja:

1. Funkcija  $\psi'$  je uvijek nula. To znači da je  $\psi$  konstanta što povlači da je  $\alpha$  horizontalni pravac te da je  $M$  dio ravnine koja je okomita na os rotacije.
2. Funkcija  $\psi'$  nikad nije 0. Tada po teoremu o inverznoj funkciji  $\psi$  ima inverz  $\psi^{-1}$ . Definiramo

$$\tilde{\alpha}(t) = \alpha(\psi^{-1}(t)) = (h(t), t)$$

gdje je  $h = \phi \circ \psi^{-1}$  i novu kartu  $\mathbf{y}$  zadanu kao

$$\mathbf{y}(u, v) = (h(v) \cos u, h(v) \sin u, v).$$

S obzirom da je  $\tilde{\alpha}$  reparametrizacija od  $\alpha$ , slijedi da  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{y}$  imaju istu sliku. Sada je dovoljno pokazati da je rotacijska ploha  $\mathbf{y}$  dio katenoida. Iz formula za glavne zakrivljenosti plohe dobijemo:

$$\begin{cases} k_1 = \frac{L}{E} = -\frac{1}{h\sqrt{h^2+1}}, \\ k_2 = \frac{N}{G} = \frac{h''}{(h^2+1)^{3/2}}. \end{cases} \quad (3.9)$$

Iz pretpostavke da je  $H = 0$  i (3.9), slijedi da  $h$  mora zadovoljavati diferencijalnu jednadžbu

$$h''h = 1 + h'^2.$$

Da bi riješili tu diferencijalnu jednadžbu, moramo je prvo zapisati kao

$$\frac{2h'h''}{1+h'^2} = \frac{2h'}{h}.$$

Integriranjem obje strana dobivamo

$$\log(1+h'^2) = \log(h^2) - \log(c^2)$$

za neki  $c \neq 0$ . Primjenom eksponencijalne funkcije dobivamo

$$1+h'^2 = \left(\frac{h}{c}\right)^2,$$

a ovakve diferencijalne jednadžbe prvog reda mogu se zapisati i kao

$$\frac{h'/c}{\sqrt{(h/c)^2-1}} = \frac{1}{c}.$$

Sada možemo integrirati obje strane i dobiti

$$\operatorname{arccosh} \frac{h}{c} = \frac{v}{c} + b.$$

To znači da je rješenje diferencijalne jednadžbe

$$h(v) = c \cosh \frac{v}{c} + b,$$

pa je  $\mathcal{M}$  dio katenoida.

3. U nekim točkama vrijedi da je  $\psi' = 0$ , a u nekim vrijedi suprotno. Ovaj slučaj je zapravo nemoguć. Pretpostavimo da je  $\psi'(v_0) = 0$ , ali  $\psi'(v) > 0$  za  $v < v_0$ . Prema 2. slučaju generatrisa je lančanica za  $v < v_0$  čiji je nagib  $\frac{\phi'}{\psi'}$ . Također,  $\psi'(v_0) = 0$  implicira da je nagib beskonačan u  $v_0$ . To je nemoguće jer je generatrisa graf funkcije  $\cosh$ .

□

### 3.3 Heltocat

Heltocat je uređena familija minimalnih ploha  $\mathcal{H}(t)$ ,  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$  koje čine izometričnu deformaciju od helikoida do katenoida odakle je i dobila ime (HELicoid TO CATenoid). Heltocatove parametarske jednačbe glase:

$$\begin{aligned} x(u, v) &= \sin t \cosh v \cos u + \cos t \sinh v \sin u, \\ y(u, v) &= \sin t \cosh v \sin u - \cos t \sinh v \cos u, \\ z(u, v) &= u \cos t + v \sin t, \\ (u, v) &\in [-\pi, \pi] \times \mathbb{R}, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Za  $t = 0$ , funkcija daje helikoid koji je definiran izrazom (3.1) ( $a = 1, b = 1$ ), a za  $t = \frac{\pi}{2}$  funkcija prelazi u katenoid koji je zadan izrazom (3.8) ( $a = 1$ ). Fundamentalne veličine prvog reda za  $\mathcal{H}(t)$  su:

$$\begin{aligned} E &= \cosh^2 v, \\ F &= 0, \\ G &= \cosh^2 v. \end{aligned}$$

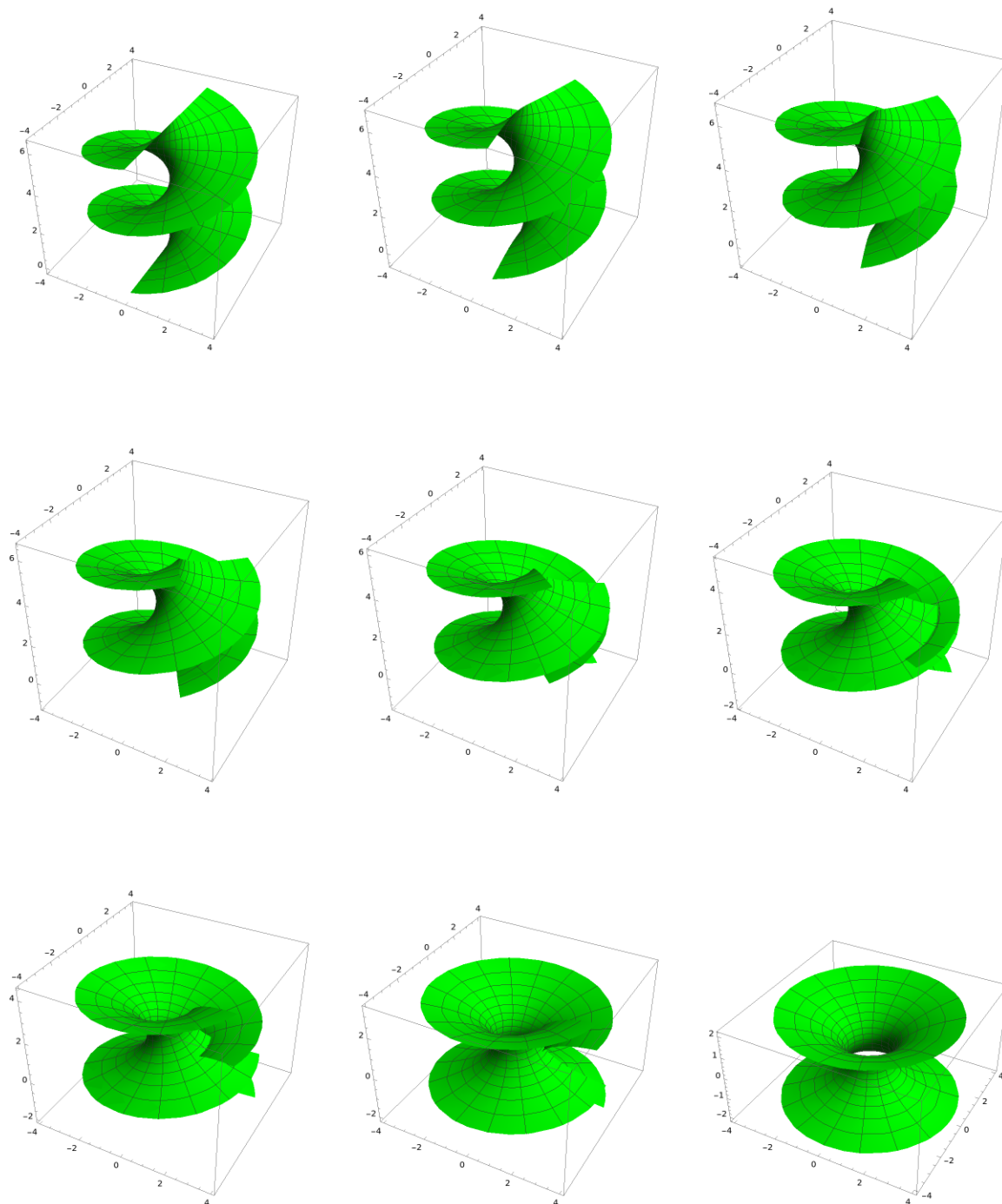
Glavne zakrivljenosti ove familije minimalnih ploha  $k_1$  i  $k_2$  u točki  $T(u, v)$  su

$$k_{1,2} = \pm \operatorname{sech}^2 v.$$

Za Heltocat nam je važan i jedan teorem koji nam govori o vezi između helikoida i katenoida. Naime, lokalna izometrija je preslikavanje među plohama koje čuva mjerenja na ploham. Takvo preslikavanje će savijati plohe, ali će unutarnja udaljenost među točkama ostati ista.

**Lema 3.3.1.** Neka je  $\mathbf{x} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  regularna injektivna karta i neka je  $\mathbf{y} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  bilo koja karta. Tada

$$ds_x^2 = E_x du^2 + 2F_x dudv + G_x dv^2$$



Slika 3.5: Deformacija iz helikoida u katenoid

*i*

$$ds_y^2 = E_y du^2 + 2F_y dudv + G_y dv^2$$

označavaju induciranu Riemannovu metriku na  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{y}$ . Tada je preslikavanje

$$\phi = \mathbf{y} \circ \mathbf{x}^{-1} : \mathbf{x}(\mathcal{U}) \rightarrow \mathbf{y}(\mathcal{U})$$

lokalna izometrija ako i samo ako

$$ds_x^2 = ds_y^2.$$

**Teorem 3.3.2.** *Helikoid i katenoid su lokalno izometrični.*

*Dokaz.* Neka su  $E(t)$ ,  $F(t)$  i  $G(t)$  fundamentalne veličine prvog reda od  $\mathcal{H}(t)$ . Kao što smo već napisali, znamo da vrijedi:

$$E(t) = \cosh^2 v = G(t), \quad F(t) = 0.$$

Funkcije  $E(t)$ ,  $F(t)$  i  $G(t)$  su konstantne po  $t$ . Rezultat sada slijedi iz Leme 3.3.1. □

Helikoid i katenoid nemaju samopresijecanja, ali svaka ploha  $\mathcal{H}(t)$  za koju je  $t$  takav da  $0 < t < \pi/2$  ima. Pri deformaciji helikoida u katenoid, asimptotske krivulje helikoida postupno postaju krivulje zakrivljenosti katenoida. Isto tako, helikoid i katenoid zadani su dvjema krivuljama; helikoid je zadan spiralom, a katenoid kružnicom. Neka je  $\alpha$  parametrizacija zavojnice, a  $\gamma$  parametrizacija kružnice:

$$\alpha(u) = (\sinh 1 \sin u, -\sinh 1 \cos u, u), \quad 0 \leq u \leq 2\pi$$

$$\gamma(u) = (\cosh 1 \cos u, \cosh 1 \sin u, 1), \quad 0 \leq u \leq 2\pi$$

Sada imamo da je duljina zavojnice

$$\int_0^{2\pi} \|\alpha'(u)\| du = 2\pi \sqrt{\sinh^2 1 + 1},$$

dok je duljina kružnice

$$\int_0^{2\pi} \|\gamma'(u)\| du = 2\pi \cosh 1.$$

S obzirom da su iste duljine, zaključujemo da je preslikavanje zavojnice u kružnicu izometrično.

### 3.4 Primjene u arhitekturi

Iako se na prvu možda ne čini tako, minimalne plohe su neizostavni dio arhitekture diljem svijeta. Ono što je njihova najveća prednost jest jedinstven dizajn popraćen uštedom materijala budući da će njihova površina biti manja nego od neke druge plohe. Vrijedi napomenuti i da minimalne plohe nisu najčešći pojam u arhitekturi s obzirom na to koliko mogu biti nepraktične za izgradnju krova ili fasade neke građevine.

## Helikoid

Helikoid je vjerojatno najpoznatija minimalna ploha, a i najrasprostranjenija u arhitekturi. Svakakve varijacije helikoida možemo vidjeti svakodnevno, a najčešće u obliku stubišta. Spiralne stepenice, kako bi ih neki nazvali, imaju prednost u odnosu nad običnim stepenicama po tome što se može uštedjeti više prostora u prostoriji u kojoj se nalaze takve stepenice.



Slika 3.6: Stepenice u obliku helikoida

## Minimalne mreže

Kada govorimo o natkrivanju građevina, minimalne plohe su svakako nešto što mnogi moderni arhitekti razmatraju i to iz više razloga. Kao što je navedeno, osim uštede materijala koju građevinska tvrtka troši na izgradnju krova, isto tako imamo primjere krovova gdje se koriste minimalne mreže kako bi se smanjila naprezanja. Minimalna mreža je koncept koji služi kao aproksimacija minimalne plohe. Budući da je gotovo nemoguće natkriti dvoranu, stadion ili nekakav sličan objekt koristeći pravu minimalnu plohu (srednja zakrivljenost joj je jednaka nuli), arhitekti koriste minimalne mreže kako bi minimizirali naprezanje i duljinu užadi mreže. Takav koncept koristi se za natkrivanje mnogih stadiona i građevina, a neki od njih su i Olimpijski stadion u Münchenu i bivša Kongresshalle u Berlinu.



Slika 3.7: Olimpijski stadion u Münchenu

## Poglavlje 4

### Ostale minimalne plohe

Osim helikoida i katenoida, postoji niz minimalnih ploha koje se otkrivaju i dan-danas. U ovom poglavlju upoznat ćemo se s nekim od njih.

#### 4.1 Enneperova minimalna ploha

Enneperova minimalna ploha je samopresijecajuća ploha koju je otkrio Alfred Enneper 1864. godine. Ona je parametarski zadana s:

$$\begin{aligned}x(u, v) &= u - \frac{u^3}{3} + uv^2, \\y(u, v) &= v - \frac{v^3}{3} + u^2v, \\z(u, v) &= u^2 - v^2, \\(u, v) &\in \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

Strogo govoreći, ovo nije parametrizacija jer nije injektivna. Postoje samopresijecanja, ali ako restringiramo  $(u, v)$  tako da leže u dovoljno malim otvorenim skupovima, tada će  $\mathbf{x}$  biti injektivna.

Lako se dobije da su fundamentalne veličine prvog reda:

$$\begin{aligned}E &= (1 - u^2 + v^2)^2, \\F &= 0, \\G &= (1 - u^2 + v^2)^2.\end{aligned}$$



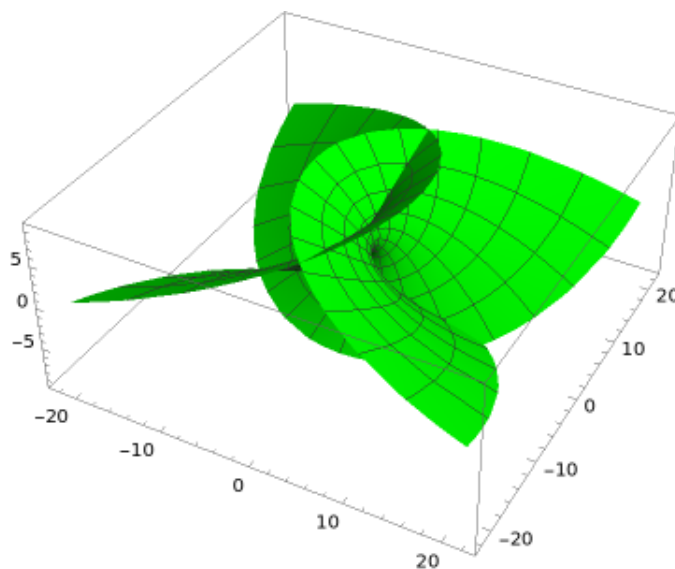
Fundamentalne veličine drugog reda Enneperove plohe su:

$$\begin{aligned} L &= (1 + r^2)^2, \\ M &= 0, \\ N &= r^2(1 + r^2)^2. \end{aligned}$$

Glavne zakrivljenosti  $k_1$  i  $k_2$  u točki  $T(u, v)$  su

$$k_{1,2} = \pm \frac{2}{1 + u^2 + v^2}.$$

Parametriziramo li Enneperovu minimalnu plohu kao u (2.11), dobit ćemo da je  $f(z) = 1, g(z) = z$ .



Slika 4.1: Enneperova minimalna ploha

## 4.2 Hennebergova minimalna ploha

Hennebergova minimalna ploha je neorijentabilna minimalna ploha za koju se smatra da ju je otkrio Lebrecht Henneberg 1875. (po kome je i dobila ime), ali kasnije se ispostavilo

da je Catalan već znao za tu minimalnu plohu. Parametarske jednadžbe te plohe su:

$$\begin{aligned}x(u, v) &= 2 \sinh u \cos v - \frac{2}{3} \sinh 3u \cos 3v, \\y(u, v) &= 2 \sinh u \sin v + \frac{2}{3} \sinh 3u \sin 3v, \quad (u, v), \\z(u, v) &= 2 \cosh 2u \cos 2v, \\(u, v) &\in [0, +\infty) \times [-\pi, \pi].\end{aligned}$$

Fundamentalne veličine prvog reda Hennebergove minimalne plohe zadane su s:

$$\begin{aligned}E &= 8 \cosh^2 u [\cosh(4u) - \cos(4v)], \\F &= 0, \\G &= 8 \cosh^2 u [\cosh(4u) - \cos(4v)],\end{aligned}$$

dok su fundamentalne veličine drugog reda:

$$\begin{aligned}L &= -4 \cos 2v \sinh 2u, \\M &= 4 \cosh 2u \sin 2v, \\N &= 4 \sinh 2u \cos 2u.\end{aligned}$$

Glavne zakrivljenosti Hennebergove minimalne plohe  $k_1$  i  $k_2$  u točki  $T(u, v)$  su

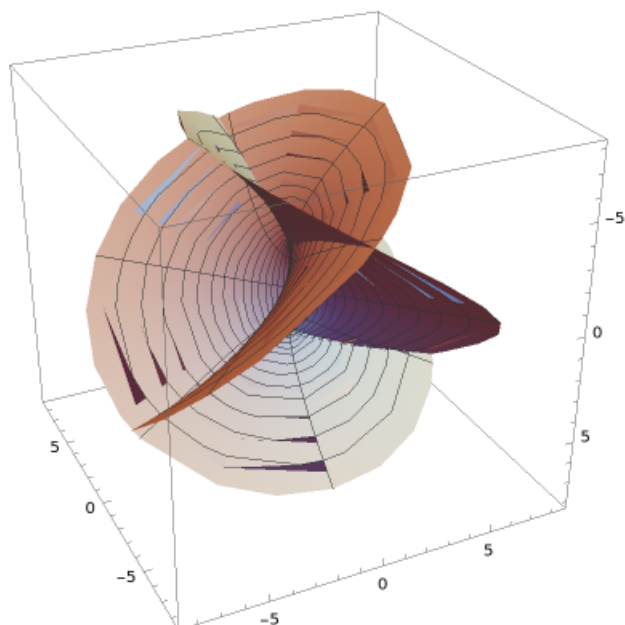
$$k_{1,2} = \pm \frac{\operatorname{sech}^2 u}{2 \sqrt{2}(\cosh 4u - \cos 4v)}.$$

Weierstrass–Enneperova reprezentacija za ovu plohu iznosi:

$$f(z) = 2(1 - z^{-4}), g(z) = z.$$

**Napomena.** *Sekans i sekans hiperbolni su funkcije za koje vrijedi:*

$$\begin{aligned}\sec \alpha &= \frac{1}{\cos \alpha}, \\ \operatorname{sech} \alpha &= \frac{1}{\cosh \alpha}.\end{aligned}$$



Slika 4.2: Hennebergova minimalna ploha

### 4.3 Bourova minimalna ploha

Bourova minimalna ploha trećeg reda dana je parametarskim jednađbama:

$$\begin{aligned}x(u, v) &= u \cos v - \frac{1}{2}u^2 \cos 2u, \\y(u, v) &= -u \sin v - \frac{1}{2}u^2 \sin 2v, \\z(u, v) &= \frac{4}{3}u^{3/2} \cos \frac{3}{2}v, \\(u, v) &\in [0, 1] \times [-2\pi, 2\pi].\end{aligned}$$

Fundamentalne veličine prvog reda ove minimalne plohe su:

$$\begin{aligned}E &= 1 + u^2, \\F &= 0, \\G &= u^2(u^2 + 1).\end{aligned}$$

Zapisać ćemo i fundamentalne veličine drugog reda:

$$L = -r^{-1/2} \cos \frac{3}{2}\phi,$$

$$M = \sqrt{r} \sin \frac{3}{2}\phi,$$

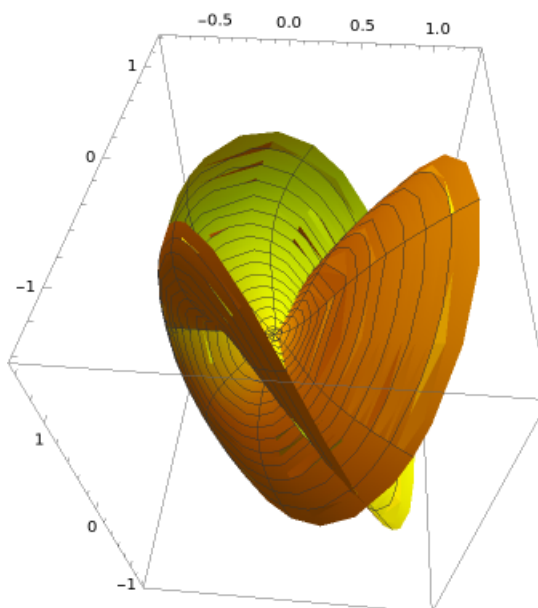
$$N = r^{3/2} \cos \frac{3}{2}\phi.$$

Glavne zakrivljenosti Bourove minimalne plohe  $k_1$  i  $k_2$  u točki  $T(u, v)$  su

$$k_{1,2} = \pm \frac{1}{(1+u)^2 \sqrt{u}}.$$

Prema (2.11) funkcije  $f$  i  $g$  su:

$$f(z) = 1, g(z) = \sqrt{z}.$$



Slika 4.3: Bourova minimalna ploha

## 4.4 Catalanova minimalna ploha

Ovu minimalnu plohu 1855. proučavao je francusko-belgijski matematičar Eugene Catalan, a njeno posebno svojstvo je da joj je cikloida geodezijska krivulja (krivulja koja najkraćim putem povezuje dvije točke na plohi). Catalanova minimalna ploha parametrizirana je s:

$$\begin{aligned}x(u, v) &= u - \sin u \cosh v, \\y(u, v) &= 1 - \cos u \cosh v, \\z(u, v) &= 4 \sin\left(\frac{u}{2}\right) \sinh\left(\frac{v}{2}\right), \\(u, v) &\in \mathbb{R}^2.\end{aligned}$$

Lako se dobije da su fundamentalne veličine prvog reda Catalanove minimalne plohe:

$$\begin{aligned}E &= 2 \cosh^2\left(\frac{v}{2}\right) (\cosh v - \cos u), \\F &= 0, \\G &= 2 \cosh^2\left(\frac{v}{2}\right) (\cosh v - \cos u).\end{aligned}$$

Fundamentalne veličine drugog reda iznose:

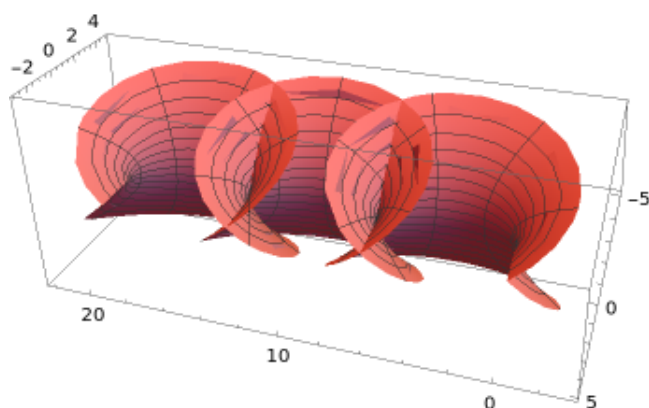
$$\begin{aligned}L &= -\cosh\frac{1}{2}v \sin\frac{1}{2}u, \\M &= \cos\frac{1}{2}u \sinh\frac{1}{2}v, \\N &= \cosh\frac{1}{2}v \sin\frac{1}{2}u.\end{aligned}$$

Glavne zakrivljenosti Catalanove minimalne plohe  $k_1$  i  $k_2$  u točki  $T(u, v)$  su

$$k_{1,2} = \pm \frac{\operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}v\right)}{2\sqrt{2 \cosh v - 2 \cos u}}.$$

## 4.5 Scherkova minimalna ploha

Scherkova minimalna ploha otkrivena je 1834. godine i jedine poznate minimalne plohe prije njenog otkrića bile su helikoid i katenoid. Ona je ujedno i jedina minimalna ploha koja



Slika 4.4: Catalanova minimalna ploha

je translacijska (može se prikazati kao  $z = f(u) + g(v)$ ) te je parametrizirana jednažbama:

$$\begin{aligned}x(u, v) &= u, \\y(u, v) &= v, \\z(u, v) &= \ln \frac{\cos u}{\cos v}, \\ \mathcal{U} &= \{(u, v) \mid \cos u \cos v > 0\}.\end{aligned}$$

Fundamentalne veličine prvog reda Scherkove minimalne plohe su:

$$\begin{aligned}E &= \tan^2 u + 1, \\F &= -\tan u \tan v, \\G &= \tan^2 v + 1.\end{aligned}$$

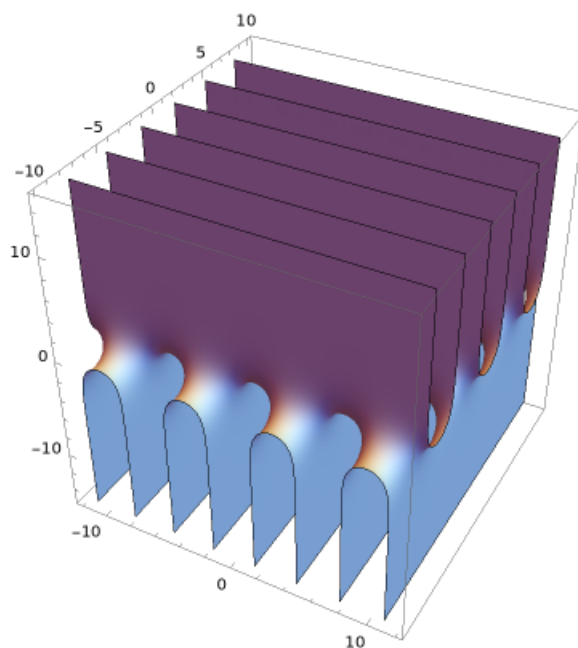
Fundamentalne veličine drugog reda Scherkove minimalne plohe iznose:

$$\begin{aligned}L &= -\frac{1}{\cos^2 u \sqrt{1 + \tan^2 u + \tan^2 v}}, \\M &= 0, \\N &= \frac{1}{\cos^2 v \sqrt{1 + \tan^2 u + \tan^2 v}}.\end{aligned}$$

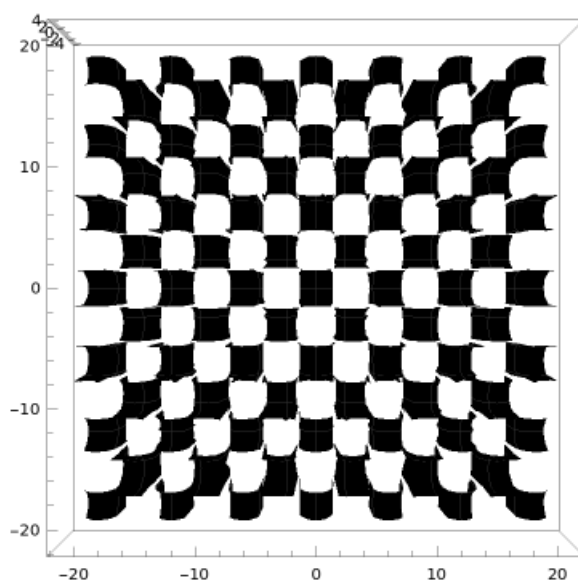
Glavne zakrivljenosti ove minimalne plohe  $k_1$  i  $k_2$  u točki  $T(u, v)$  su

$$k_{1,2} = \pm \frac{\sec u \sec v}{\sec^2 u + \tan^2 v}.$$

Ako promatramo Scherkovu minimalnu plohu odozgo, vidjet ćemo da ona zapravo izgleda kao šahovska ploča s beskonačno mnogo polja.



Slika 4.5: Scherkova minimalna ploha



Slika 4.6: Scherkova minimalna ploha – "pogled odozgo"

# Bibliografija

- [1] Alfred Gray, Elsa Abenna, Simon Salamon. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*. Chapman and Hall/CRC, 2006.
- [2] Sanja Hak, Mario Uroš. *Gaussova i srednja zakrivljenost ploha, vizualizacije u programu Mathematica*. Građevinski fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2004.
- [3] Hermann Karcher, Konrad Polthier. *An Introduction to Minimal Surfaces*. <http://page.mi.fu-berlin.de/polthier/booklet/intro.html>
- [4] Sung-Eun Koh. *An elementary proof of Catalan theorem*. <https://www.koreascience.or.kr/article/JAK0202121061547454.pdf>
- [5] Željka Milin Šipuš, Stipe Vidak. *Uvod u diferencijalnu geometriju*. Skripta PMF-MO, verzija 2.4.
- [6] Johannes C.C. Nitsche. *Lectures on Minimal Surfaces: Volume 1, Introduction, Fundamentals, Geometry and Basic Boundary Value Problems*, Cambridge University Press, 1989.
- [7] Andrew Pressley. *Elementary Differential Geometry*. Springer-Verlag London, Second edition, 2010.
- [8] Ivana Protrka. *Plohe konstantne srednje zakrivljenosti i njima pridružene fokalne krivulje i plohe u Minkowskijevom prostoru*. PMF-MO, doktorski rad, 2019.
- [9] *Minimal surfaces*. <https://mathworld.wolfram.com/MinimalSurface.html>



# Sažetak

Kao što i sam naslov diplomskog rada kaže, minimalne plohe ključni su pojam ovog rada. Taj pojam ne obrađuje se temeljito u sklopu većine matematičkih programa diljem Hrvatske, ali itekako ima svoju važnost kroz povijest matematike. U ovom diplomskom radu, najprije smo uveli osnovne pojmove iz teorije krivulja i ploha, a zatim smo se posvetili minimalnim plohama i njihovim svojstvima, tj. pokazali smo da su minimalne plohe (one čija je srednja zakrivljenost jednaka nuli) upravo plohe minimalne površine. Također, uveli smo i pojam izotermnih koordinata te smo izveli Weierstrass–Enneperovu reprezentaciju minimalnih ploha. Navedena reprezentacija nam omogućuje generiranje minimalnih ploha iz holomorfnih funkcija. Na kraju smo dali pregled nekih poznatijih minimalnih ploha, a najveću pažnju smo posvetili helikoidu i katenoidu.

# Summary

As we can see in the title, the key word of this thesis is minimal surfaces. That term is not too thoroughly studied in the majority of mathematics programs in Croatia but it has been very important throughout the history of mathematics. In the first part of this thesis, we recalled most important definitions and results from the theory of curves and surfaces and then we pointed out important properties regarding minimal surfaces. In another words, it was proven that minimal surfaces (mean curvature is equal to zero) are surfaces with the least area. We also introduced isothermal coordinates into our thesis after which we derived Weierstras–Enneper representation of minimal surfaces. Mentioned representation allows us to generate minimal surfaces from holomorphic functions. In the end, we gave an overview of some well-known minimal surfaces with emphasis on the two most famous minimal surfaces, helicoid and catenoid.

# Životopis

Maro Đanović rođen je 17. ožujka 1997. godine u Dubrovniku gdje je završio svoje osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje. Nakon pohađanja Osnovne škole Marina Getaldića, 2012. godine upisao je Pomorsko-tehničku školu, smjer Elektrotehničar. Svoje akademsko obrazovanje započinje 2015. godine u Zagrebu, na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu. Te godine upisuje preddiplomski studij Matematika da bi godinu nakon toga promijenio svoj put upisavši preddiplomski studij Matematika; smjer: nastavnički. Titulu sveučilišnog prvostupnika stekao je 2019. godine. U listopadu iste godine upisuje diplomski studij Matematika; smjer: nastavnički.