

# Parrondov paradoks za homeomorfizme

---

Rabar, Luka

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:296463>

Rights / Prava: [In copyright](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2022-11-27**



Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Luka Rabar

**PARRONDOV PARADOKS ZA**  
**HOMEOMORFIZME**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Sonja Štimac

Zagreb, Veljača 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Hvala mojim najbližima, kolegama i prijateljima. Najviše hvala majci Mirjani i ocu Eliu koji su od početka vjerovali u mene i pružili mi potporu i ljubav s kojim je sve moguće. Na kraju, posebna zahvala mentorici prof. dr. sc. Sonji Štimac na uloženom trudu i savjetima tijekom pisanja ovog rada.*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Parrondov paradoks</b>	<b>2</b>
1.1 Konstrukcija igara . . . . .	2
1.2 Slučajna šetnja na periodičnom okruženju . . . . .	6
1.3 Parrondov paradoks . . . . .	11
1.4 Uvjeti na Parrondov paradoks . . . . .	14
<b>2 Parrondov paradoks za homeomorfizme</b>	<b>18</b>
2.1 Osnovne diskretnih dinamičkih sustava . . . . .	18
2.2 Parrondov paradoks za homeomorfizme . . . . .	23
<b>Bibliografija</b>	<b>31</b>

# Uvod

Jedna od najjednostavnijih "igara šanse" je bacanje pristranog novčića. S Parrondovim igrama, koje možemo konstruirati bacanjem pristranog novčića, možemo stvoriti pozitivno pristranu igru kombinacijom dvije negativno pristrane igre. Ovakav fenomen nije nemoguć i postoji u više disciplina, a mi ga nazivamo Parrondov paradoks. Na primjer, u Teoriji upravljanja kombinacija dva nestabilna sistema može uzrokovati da postanu stabilni. U novije vrijeme, problemi u evolucijskoj biologiji i ekologiji mogu se modelirati i objasniti u kontekstu ovog paradoksa. Inspiraciju za Parrondove igre predstavio je 1996. godine španjolski fizičar Juan M.R. Parrondo.

U ovom radu ćemo kroz dva poglavlja proučiti ovaj kontra-intuitivni fenomen. U prvom poglavlju konstruiramo Parrondove igre i modeliramo kretanje kapitala igrajući igre uzastopno kao slučajnu šetnju na periodičnom okruženju. Na intuitivan način definiramo poštenost igre pomoću graničnog ponašanja kapitala. Cilj nam je pokazati da se za Parrondove igre ostvaruje Parrondov paradoks.

U drugom poglavlju proučavamo Parrondov paradoks u dinamičkom kontekstu. U rječniku dinamičkih sustava, dok proučavamo stabilnost fiksne točke, ulogu dobitne i gubitne strategije preuzimaju odbojna i privlačna fiksna točka. Dokazat ćemo da je za klasu  $C$  homeomorfnih preslikavanja na  $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  moguće postići Parrondov paradoks kada je  $k \geq 2$ . Suprotno, dokazat ćemo da se u jednodimenzionalnom slučaju paradoks ne pojavljuje.

# Poglavlje 1

## Parrondov paradoks

### 1.1 Konstrukcija igara

Parrondov paradoks tvrdi da *postoje parovi igara, svaka s većom vjerojatnošću gubitka nego pobjede* (gubitne igre), za koje je moguće konstruirati igru, s većom vjerojatnosti dobitka nego gubitka (dobitna igra), igrajući igre naizmjenično.

Igre koje promatramo jednostavne su naravi. Pri konstrukciji koristimo se ili odlukom ili slučajnim događajem. Slučajan događaj možemo opisati bacanjem pristranog novčića s vjerojatnošću dobitka  $p$ , odnosno s vjerojatnošću gubitka  $1-p$ . U slučaju dobitka osvajamo jedan novčić, a u slučaju gubitka gubimo jedan novčić.

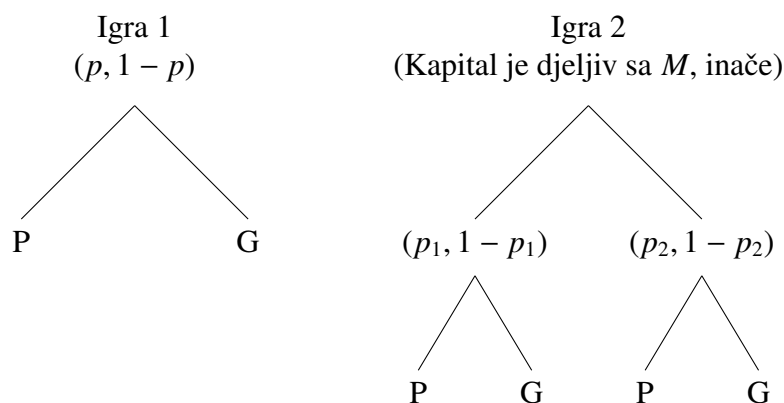
Konstruiramo dvije igre s dva igrača. Dobitak prvog igrača ujedno je gubitak drugog i obratno. Igre promatramo iz perspektive prvog igrača.

Igre  $A$  i  $B$  prikazane su na slici (1.1). Možemo primijetimo da se igra  $A$  sastoji isključivo od slučajnog događaja kojeg možemo opisati slučajnom varijablom s razdiobom

$$A \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

Igra  $B$  malo je kompleksnija, prvo odlučujemo hoćemo li igrati igru  $B_1$  ili  $B_2$  ovisno o tome je li naš kapital djeljiv s  $M$ . Zatim igramo jednu od igra  $B_1$  ili  $B_2$  koje također možemo opisati slučajnim varijablama s razdiobama

$$B_1 \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1-p_1 & p_1 \end{pmatrix}, \quad B_2 \sim \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1-p_2 & p_2 \end{pmatrix}$$



Slika 1.1: Konstrukcija Parronдовih igara.

**Napomena 1.1.1.** *Primjetimo da je igra A zapravo podtip igre B. Kad u igri B stavimo  $p_1 = p_2 = p$  zapravo je riječ o igri A. Ovakav pogled na igru A kasnije će nam biti potreban u konstrukciji mješovite igre.*

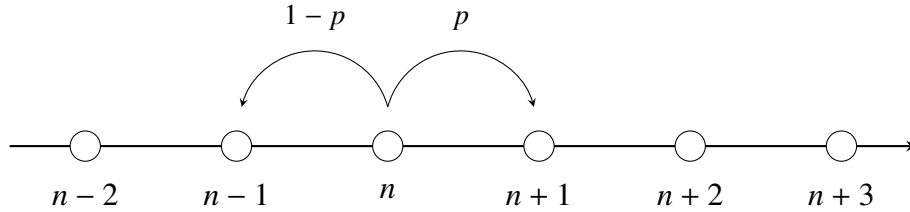
Uočimo da ovako konsturirane igre nisu nalik klasičnim strateškim igrama u smislu Teorije igara. U našim igrama igrači nemaju slobodnu volju izbora strategija, već svaku odluku određuju pravila igre. Prema tome igrači su isključivo promatrači igre šansi.

**Definicija 1.1.2.** *Neka je  $S$  skup. Slučajan proces s diskretnim vremenom i skupom stanja  $S$  je familija  $X = (X_n : n \geq 0)$  slučajnih varijabli (ili elemenata) definiranih na nekom vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  s vrijednostima u  $S$ . Dakle,  $X_n : \Omega \rightarrow S$  je slučajna varijabla, za svaki  $n \geq 0$ .*

Kada bi igre igrali uzastopno jednu za drugom i u svakom koraku bilježili vrijednost kapitala tada kapital možemo opisati kao slučajan proces. Neka je  $(A_n : n \in \mathbb{N})$  niz nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih varijabli i neka  $A_1$  ima razdiobu kao  $A$ . Neka su  $C_{A,0} = n_A \in \mathbb{Z}$ ,  $C_{A,n+1} = C_{A,n} + A_n$  i  $C_A = (C_{A,n} : n \in \mathbb{N}_0)$  je slučajan proces sa skupom stanja  $\mathbb{Z}$  prikazan na slici (1.2). Na  $C_A$  možemo gledati kao na pristranu slučajnu šetnju koja u



svakom koraku napravi pomak u desno s vjerojatnošću  $p$  i korak u lijevo s vjerojatnošću  $1 - p$ .

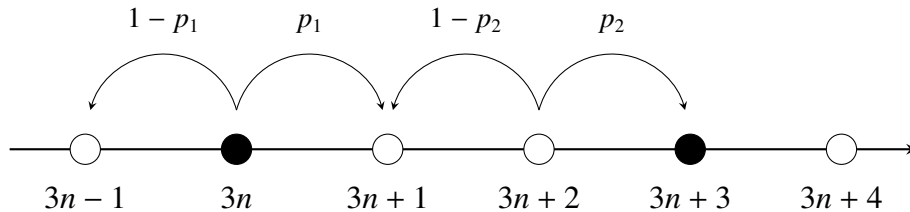


Slika 1.2: Igra A prikazana na brojevnom pravcu. U svakoj točki igramo igru A. Iznad točke prikazane su vjerojatnosti dobitka igre A.

Neka su  $(B_{1,n} : n \in \mathbb{N})$  i  $(B_{2,n} : n \in \mathbb{N})$  nizovi nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli i neka je  $B_{1,1}$  distribuiran kao  $B_1$ , a  $B_{2,1}$  distribuiran kao  $B_2$ . Neka su  $C_{B,0} = n_B \in \mathbb{Z}$ ,

$$C_{B,n+1} = \begin{cases} C_{B,n} + B_{1,n} & C_{B,n} \bmod M = 0, \\ C_{B,n} + B_{2,n} & C_{B,n} \bmod M \neq 0 \end{cases}$$

i  $C_B = (C_{B,n} : n \in \mathbb{N}_0)$  je slučajan proces sa skupom stanja  $\mathbb{Z}$  prikazan na slici (1.3).  $C_B$  možemo promatrati kao uvjetnu slučajnu šetnju, u svakom koraku pomičemo se jedan korak u lijevo ili u desno s vjerojatnostima prikazanim kao na slici (1.3) koje ovise o stanju u kojem se trenutno nalazimo.



Slika 1.3: Igra B prikazana na brojevnom pravcu za  $M = 3$ . Crne točke su djeljive sa tri, stoga igramo igru  $B_1$ , iznad točke prikazane su vjerojatnosti dobitka za igru  $B_1$ . Prazne točke nisu djeljive s 3, prema tome igramo igru  $B_2$ , iznad točke prikazane su vjerojatnosti dobitka za igru  $B_2$ .

**Primjer 1.1.3** (Parrondove igre). *Igre koje je predstavio J.M.R. Parrondo u radu [8], konstruirane su kao i naše igre A i B za  $M = 3$  uz parametere:*

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{2} - \epsilon, \\ p_1 &= \frac{1}{10} - \epsilon, \\ p_2 &= \frac{3}{4} - \epsilon. \end{aligned}$$

*Parrondo u svom radu tvrdi da su igre poštene za  $\epsilon = 0$  dok su za  $\epsilon = 0.005$  igre gubitne (što ćemo kasnije i pokazati). Štoviše, pokazat ćemo da igranjem igre A dvaput, zatim igre B dvaput i tako uzastopno ovim redoslijedom možemo uočiti Parrondov paradoks. Također možemo u svakom koraku na slučajan način odabrati koju ćemo igru igrati i to s vjerojatnošću 0.5 za obje igre. Pokazat ćemo da se Parrondov paradoks pojavljuje gotovo sigurno i za ovakve nizove.*

U primjeru (1.1.3) po prvi put tvrdimo da je igra poštena odnosno gubitna. Intuitivno rekli bismo da je igra poštena ako je vjerojatnost dobitka jednaka vjerojatnosti gubitka pa je tako igra dobitna (odnosno gubitna) ako je vjerojatnost pobjede (gubitka) veća od vjerojatnosti gubitka (pobjede). Ovakvu definiciju poštene igre lako je provjeriti za igru A, no za igru B to ovisi o vjerojatnostima  $p_1$  i  $p_2$  i o stanju u kojem se nalazimo. Tako je igra B iz primjera (1.1.3) gubitna kada je naš kapital djeljiv s 3, a dobitna kada naš kapital nije djeljiv s 3.

Neka je  $C = (C_n : n \in \mathbb{N})$  slučajan proces koji prati naš kapital uzastopnim igranjem proizvoljne igre X. Tada najčešće kažemo da je igra fer ako vrijedi

$$\mathbb{E}[C_{n+1} | C_0, \dots, C_n] = C_n + \mathbb{E}[X] = C_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

odnosno, ako je slučajan proces C martingal. Međutim, ni u ovom slučaju ne bismo mogli odrediti poštenost igre B. Uočimo, ako je  $C_{B,0}$  djeljiv s 3 vrijedi  $\mathbb{E}[C_{B,1} | C_{B,0}] < C_{B,0}$ , s druge strane ako  $C_{B,0}$  nije djeljiv s 3 vrijedi  $\mathbb{E}[C_{B,1} | C_{B,0}] > C_{B,0}$ .

Zbog definicije igre B nije lako definirati poštenost igre tako da tvrdnja Parrondovog paradoksa vrijedi, no u idućem dijelu argumentirat ćemo kada igru smatramo gubitnom, poštenom i dobitnom.

**Napomena 1.1.4.** *Primjer Parronдовых igara u suštini prati što se događa s kapitalom igrača dugoročnim igranjem igara. U daljnjem tekstu kad govorimo o igrama A i B zapravo mislimo na slučajne procese  $C_A$  i  $C_B$  koji opisuju kapital igrača uzastopnim igranjem igara.*

## 1.2 Slučajna šetnja na periodičnom okruženju

**Definicija 1.2.1.** *Neka je  $S$  prebrojiv skup. Slučajni proces  $X = (X_n : n \geq 0)$  definiran na vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  s vrijednostima u skupu  $S$  je **Markovljev lanac** ako vrijedi*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \quad (1.1)$$

za svaki  $n \geq 0$  i za sve  $i_0, \dots, i_{n-1}, i, j \in S$  za koje su obje uvjetne vjerojatnosti dobro definirane.

U odjeljku (1.1) već smo spomenuli da slučajne procese  $C_A$  i  $C_B$  možemo usporediti sa slučajnom šetnjom koja je specifični slučaj Markovljevog lanca. Pokažimo da za  $C_A$  i  $C_B$  vrijedi Markovljevo svojstvo (1.1). Ako je uvjetna vjerojatnost

$$\mathbb{P}(C_{B,n+1} = j \mid C_{B,n} = i, C_{B,n-1} = i_{n-1}, \dots, C_{B,0} = i_0)$$

dobro definirana tada imamo

$$C_{B,n+1} = \begin{cases} i + B_{1,n} & \text{za } i \bmod M = 0, \\ i + B_{2,n} & \text{za } i \bmod M \neq 0, \end{cases}$$

pa je  $C_{B,n+1} \in \{i - 1, i + 1\}$  i vrijedi

$$\mathbb{P}(C_{B,n+1} = j \mid C_{B,n} = i, C_{B,n-1} = i_{n-1}, \dots, C_{B,0} = i_0) = \mathbb{P}(C_{B,n+1} = j \mid C_{B,n} = i).$$

Slično se pokaže da svojstvo (1.1) vrijedi i za  $C_A$ . Prema tome,  $C_A$  i  $C_B$  jesu Markovljevi lanci sa skupom stanja  $\mathbb{Z}$ . Napomena (1.1.1) nam govori kako je igra A podtip igre B stoga u daljnjem tekstu tvrdnje koje dokazujemo odnosit će se na igru B.

**Definicija 1.2.2.** *Matrica  $P = (p_{ij} : i, j \in S)$  naziva se **stohastičkom matricom** ako je  $p_{ij} \geq 0$  za sve  $i, j \in S$  te*

$$\sum_{j \in S} p_{ij} = 1, \text{ za sve } i \in S.$$

**Definicija 1.2.3.** *Neka je  $\lambda = (\lambda_i : i \in S)$  vjerojatnosna distribucija na  $S$  te neka je  $P = (p_{ij} : i, j \in S)$  stohastička matrica. Slučajan proces  $X = (X_n : n \geq 0)$  definiran na vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  s prostorom stanja  $S$  je **homogen Markovljev lanac** s početnom distribucijom  $\lambda$  i prijelaznom matricom  $P$  ako vrijedi*

(i)  $\mathbb{P}(X_0 = i) = \lambda_i$ , za sve  $i \in S$ ,

(ii)  $\mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0) = p_{ij}$  za svaki  $n \geq 0$  i za sve  $i_0, \dots, i_{n-1}, i, j \in S$ .

Zbog jednostavnosti uzmimo da je  $C_{B,0} = 0$ ,  $C_B$  je homogen Markovljev lanac s početnom distribucijom  $\lambda = (\lambda_0 = 1)$  i prijelaznom matricom

$$P_B = \begin{bmatrix} \ddots & \ddots & & & & & & & \\ \ddots & 0 & 1 - p_2 & & & & & & \\ & p_1 & 0 & \ddots & & & & & \\ & & p_2 & \ddots & 1 - p_2 & & & & \\ & & & \ddots & 0 & 1 - p_1 & & & \\ & & & & p_2 & 0 & 1 - p_2 & & \\ & & & & & p_1 & 0 & \ddots & \\ & & & & & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Razmotrimo slučajan proces s diskretnim vremenom  $X = (X_n : n \in \mathbb{N}_0)$  i skupom stanja  $\mathbb{Z}$ . Neka su  $R$  i  $L$  pozitivni cijeli brojevi i neka je  $G$  skup svih vjerojatnosnih mjera na  $\{-L, \dots, R\}$ . Neka je  $(e(z; *))_{z \in \mathbb{Z}}$  niz nezavisnih jednako distribuiranih  $(G, \mathcal{F})^1$ -izmjerivih slučajnih varijabli. Za svaku realizaciju niza  $(e(z; *))_{z \in \mathbb{Z}}$  neka je  $X$  Markovljev lanac,  $X_0 = 0$  i prijelaznom matricom  $P$ ,

$$P_{i,j} = \begin{cases} e(i; i + j) & \text{za } -L \leq j \leq R, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Vektor  $(e(z; *))$  određuje distribuciju skokova iz stanja  $z \in \mathbb{Z}$  za proces  $X$ . Niz  $(e(z; *))_{z \in \mathbb{Z}}$  zovemo *slučajno okruženje*, a realizaciju niza zovemo *okruženje*. Slučajan proces  $X$ , gore opisan, zovemo *općenita slučajna šetnja na slučajnom okruženju* s

---

<sup>1</sup>Gdje je  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra na  $G$ , definirana kao u [6]

ograničenim veličinama skokova. Kada je  $R = L = 1$  i  $e(z; z - 1) + e(z; z + 1) = 1$ , slučajni proces  $X$  zovemo *slučajna šetnja na slučajnom okruženju*. Ako je pri tome realizacija niza  $(e(z; *))_{z \in \mathbb{Z}}$  periodična tada je  $X$  *slučajna šetnja na periodičnom okruženju* (kraće pišemo **RWPE**).

**Napomena 1.2.4.** *Konkretna realizacija slučajnog okruženja je niz vjerojatnosnih mjera na  $\{z - L, \dots, z + R\}$  za svaki  $z \in \mathbb{Z}$ , a onda je  $(e(z, *))_{z \in \mathbb{Z}}$  distribucija skokova iz stanja  $z$ . Ovako definiran proces dobro opisuje uvjetnu šetnju koja ima različite vjerojatnosti prijelaza za različite  $z \in \mathbb{Z}$ .*

**Definicija 1.2.5.** *Neka je  $P$  proizvoljna igra čiji kapital možemo opisati kao slučajnu šetnju na periodičnom okruženju perioda  $N$ . Neka su  $P_1, \dots, P_N$  podigre igre  $P$  za svaki element iz perioda, igru  $P = (P_1, \dots, P_N)$  nazivamo  **$N$ -periodičnom igrom**.*

Uočimo kako je  $C_B$  slučajna šetnja na periodičnom okruženju, perioda tri. Za  $z \bmod 3 = 0$  vrijedi  $e(z, z + 1) = p_1$ , u protivnom je  $e(z, z + 1) = p_2$ . Odnosno, igra  $B = (B_1, B_2, B_2)$  je 3-periodična igra.

Nadalje, razmotrimo vremenski homogenu slučajnu šetnju,  $X = (X_n : n \in \mathbb{N}_0)$ , na  $N$ -periodičnom okruženju. Kao i do sada  $R$  označava najveći korak u desno, a  $L$  najveći korak u lijevo i vrijedi

$$\mathbb{P}(X_{n+1} \in \{z - L, \dots, z + R\} \mid X_n = z) = 1 \quad \forall z \in \mathbb{Z}. \quad (1.2)$$

Štoviše, neka su za svaki  $z \in \mathbb{Z}$  najveći koraci u lijevo i u desno uvijek mogući, tj.

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = z - L \mid X_n = z) \cdot \mathbb{P}(X_{n+1} = z + R \mid X_n = z) > 0. \quad (1.3)$$

Uz fiksno okruženje za slučajnu šetnju  $X$  vrijedi jednadžba unatrag

$$\mathbb{P}(\cdot \mid X_n = z) = \sum_{j=-L}^R e(z; j) \mathbb{P}(\cdot \mid X_{n+1} = j + z), \quad (1.4)$$

gdje je  $e(z; j) \equiv \mathbb{P}(X_{n+1} = j + z \mid X_n = z)$  vjerojatnost prelaska iz  $z$  u  $j$  u jednom koraku. Označimo sa  $f_{z-i} \equiv \mathbb{P}(\cdot \mid X_{n+1} = z - i)$ . Zbog toga što je  $X$  vremenski homogen,  $f$  ne ovisi

o  $n$ . Zapišimo sustav (1.4) za vektor  $[f_{z-L}, \dots, f_{z+R-1}]^T$  matricom  $A_z$ ,

$$A_z[i, j] = \begin{cases} -e(z, -L + j)/e(z, -L) & \text{za } i = 1, \quad j \neq L, \\ (1 - e(z, 0))/e(z, -L) & \text{za } i = 1, \quad j = L, \\ 1 & \text{za } i \geq 2, \quad j = i - 1, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

Neka je  $M = A_1 \cdot A_2 \cdots A_N$ . Definiramo konstante  $d_i, i = 1, 2, \dots, R + L$  na sljedeći način. Za svaku svojstvenu vrijednost  $\lambda_i$  matrice  $M$ , stavimo  $d_i = \log(|\lambda_i|)$  i uredimo ih po veličini tako da je

$$d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_{R+L}. \quad (1.5)$$

Matrice  $A_z$  definirane su za svaki  $z \in \mathbb{Z}$ . Međutim,  $(A_z)_{z \in \mathbb{Z}^+}$  je periodičan niz matrica pa je

$$M = A_{Nz+1} \cdot A_{Nz+2} \cdots A_{N(z+1)} = A_1 \cdots A_N,$$

za svaki  $z \in \mathbb{Z}^+$ , stoga je  $M$  dobro definirana.

Neka je  $X = (X_n : n \in \mathbb{N}_0)$  Markovljev lanac sa skupom stanja  $S$  i prijelaznom matricom  $P$ . Za stanje  $i \in S$  stavimo

$$T_i = T_i^{(1)} = \min \{n > 0 : X_n = i\} \quad (1.6)$$

uz konvenciju  $\min \emptyset = +\infty$

**Definicija 1.2.6.** Stanje  $i \in S$  je **povratno** ako vrijedi  $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) = 1$ . Stanje  $i \in S$  je **prolazno** ako vrijedi  $\mathbb{P}_i(T_i < \infty) < 1$ .

**Teorem 1.2.7** (Key, Kriteriji povratnosti i prolaznosti za RWPE sa skupom stanja  $Z$ ). Neka je  $X = (X_n : n \in \mathbb{N}_0)$  slučajna šetnja na periodičnom okruženju perioda  $N$ . Pretpostavimo da vrijedi (1.2) i (1.3). Nadalje, pretpostavimo da postoje dva relativno prosta prirodna broja,  $a$  i  $b$ , takvi da za svaki  $z \in \mathbb{Z}$  vrijedi

$$e(z, a) > 0 \quad \text{i} \quad e(z, -b) > 0.$$

Neka su  $(d_i)_{1 \leq i \leq R+L}$  definirani kao u (1.5). Tada vrijedi

$$\text{Ako je } d_R + d_{R+1} > 0 \text{ tada je } \mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty) = 1 \quad (1.7)$$

$$\text{Ako je } d_R + d_{R+1} = 0 \text{ tada je } \mathbb{P}(-\infty = \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n < \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty) = 1 \quad (1.8)$$

$$\text{Ako je } d_R + d_{R+1} < 0 \text{ tada je } \mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = -\infty) = 1 \quad (1.9)$$

Osim toga tvrdnje (1.7)-(1.9) međusobno su isključive.

*Dokaz.* Pogledajte [6, Teorem 35]. □

Pokazali smo da su igre  $A$  i  $B$   $N$ -periodične igre pa poštenost igara možemo definirati u smislu graničnog ponašanja njihovih kapitala. U slučaju gubitne igre htjeli bismo da naš kapital gotovo sigurno teži ka  $-\infty$ . U slučaju dobitne igre htjeli bismo da kapital teži ka  $+\infty$  gotovo sigurno. Bitne su nam ove dvije tvrdnje, a kako bi upotpunili definiciju, poštene igre smatramo onima za koje ne možemo utvrditi jesu li dobitne ili gubitne.

**Definicija 1.2.8.** *Kažemo da je  $N$ -periodična igra poštena, dobitna ili gubitna, ako je slučajna varijabla šetnja kapitala  $X = (X_n : n \in \mathbb{N}_0)$ , povratna, prolazna i teži ka  $+\infty$ , prolazna i teži ka  $-\infty$ , respektivno. Odnosno, ako za Markovljev lanac  $X$  vrijedi*

$$\text{povratan (poštena) i vrijedi } \mathbb{P}(-\infty = \liminf_{n \rightarrow \infty} X_n < \limsup_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty) = 1$$

$$\text{prolazan i teži ka } \infty \text{ (dobitna) i vrijedi } \mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \infty) = 1$$

$$\text{prolazan i teži ka } -\infty \text{ (gubitna) i vrijedi } \mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = -\infty) = 1$$

Proučimo 3-periodičnu igru  $P = (P_1, P_2, P_0)$ , s maksimalnim skokovima  $R = L = 1$  i njoj pridružimo RWPE  $X = (X_n : n \in \mathbb{N}_0)$  s vjerojatnostima prelaska

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x + 1 \mid X_n = x) = \begin{cases} p_1 & \text{za } x \bmod 3 = 1 \\ p_2 & \text{za } x \bmod 3 = 2 \\ p_3 & \text{za } x \bmod 3 = 0, \end{cases}$$

uz pretpostavku da su  $p_0, p_1, p_2 \in \langle 0, 1 \rangle$ . Prema teoremu (1.2.7), poštenost igre  $P$  možemo odrediti kao produkt svojstvenih vrijednosti matrice  $M = A_1 A_2 A_0$ . Kako je  $R = L = 1$  onda su

$$A_i = \begin{bmatrix} 1 & -p_i \\ 1-p_i & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 0, 1, 2.$$

$M$  je dvodimenzionalna matrica pa su prema tome  $d_R$  i  $d_{R+1}$  jedine dvije svojstvene vrijednosti i vrijedi

$$d_1 + d_2 = \log(|\lambda_1|) + \log(|\lambda_2|) = \log(|\lambda_1| \cdot |\lambda_2|) = \log(|\det(M)|).$$

Zbog svojstva logaritamske funkcije vrijedi

$$d_1 + d_2 = (<)(>)0 \iff \frac{p_0 p_1 p_2}{(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)} = (<)(>)1$$

Odnosno igra  $P$  je poštena (gubitna) (dobitna) ako vrijedi

$$p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 = (<)(>)(1-p_0) \cdot (1-p_1) \cdot (1-p_2). \quad (1.10)$$

Ako za igru  $B = (B_1, B_2, B_3)$  u formulu (1.10) uvrstimo vjerojatnosti dobitka, vrijedi da je igra  $B$  poštena za  $\epsilon = 0$  i da je gubitna za  $\epsilon > 0$ .

### 1.3 Parrondov paradoks

U prethodnom odjeljku igru  $B$  opisali smo pomoću RWPE Markovljevog lanca. Periodična priroda ovakvog slučajnog procesa dozvoljava nam da izvučemo subsistem perioda. Neka je

$$Y_n \equiv C_{B,n} \text{ mod } 3.$$

Neka je  $Y = (Y_n : n \in \mathbb{N}_0)$  također Markovljev lanac s prijelaznom matricom

$$P_B = \begin{bmatrix} 0 & p_1 & 1-p_1 \\ 1-p_2 & 0 & p_2 \\ p_2 & 1-p_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sada poštenost igre lako možemo provjeriti (ne)jednadžbom (1.10). Kao što je prikazano na slici (1.4) dovoljno je usporediti umnoške vjerojatnosti prelaska u smjeru kazaljke na satu (vjerojatnosti dobitka) i umnoške vjerojatnosti prelaska u smjeru obrnutom od kazaljke na satu (vjerojatnosti gubitka).

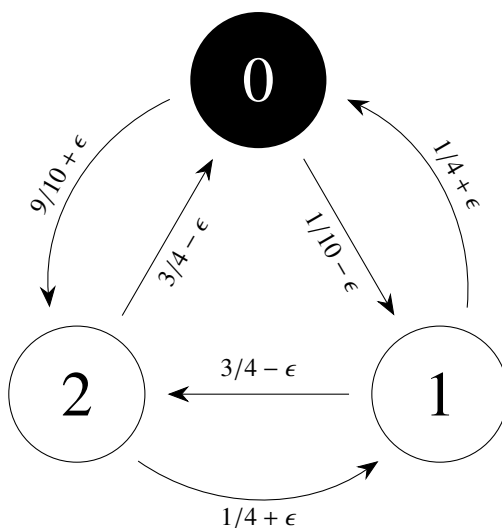
Promotrimo sada mješovitu igru iz primjera (1.1.3). Neka je  $\gamma \in \langle 0, 1 \rangle$  i u svakom koraku igramo igru  $A$  s vjerojatnošću  $\gamma$  i igru  $B$  s vjerojatnošću  $1 - \gamma$ . Ako je kapital djeljiv s 3 tada je vjerojatnost dobitka

$$q_1 = \gamma \cdot p + (1 - \gamma) \cdot p_1 \quad (\text{g.s.}).$$

Suprotno, ako kapital nije djeljiv s 3 tada je vjerojatnost dobitka

$$q_2 = \gamma \cdot p + (1 - \gamma) \cdot p_2 \quad (\text{g.s.}).$$





Slika 1.4: Markovljev lanac igre B sa 3 stanja. Stanje 0 predstavljeno je crnom bojom i u njemu igramo igru  $B_1$ . Stanja 1 i 2 predstavljena su bijelom bojom i u njima igramo igru  $B_2$ . Za svako stanje označene su vjerojatnosti prelaska u ostala stanja.

Kapital mješovite igre možemo modelirati s RWPE. Neka je  $Q = (Q_1, Q_2, Q_2)$  3-periodična igra s vjerojatnostima dobitka  $q_1$  za igru  $Q_1$  i vjerojatnosti dobitka  $q_2$  za  $Q_2$  i neka je  $C_M = (C_{M,n} : n \in \mathbb{N}_0)$  RWPE mješovite igre  $Q$ . Nadalje, neka je

$$X_n \equiv C_{M,n} \pmod{3}$$

Markovljev lanac sustema mješovite igre s prijelaznom matricom

$$P_B = \begin{bmatrix} 0 & q_1 & 1 - q_1 \\ 1 - q_2 & 0 & q_2 \\ q_2 & 1 - q_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Neka su dani parametri  $\epsilon = 0.005$  i  $\gamma = 0.5$  kao u primjeru (1.1.3). Tada je prijelazna matrica od  $X$

$$P_B = \begin{bmatrix} 0 & 0.295 & 0.705 \\ 0.38 & 0 & 0.62 \\ 0.62 & 0.38 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

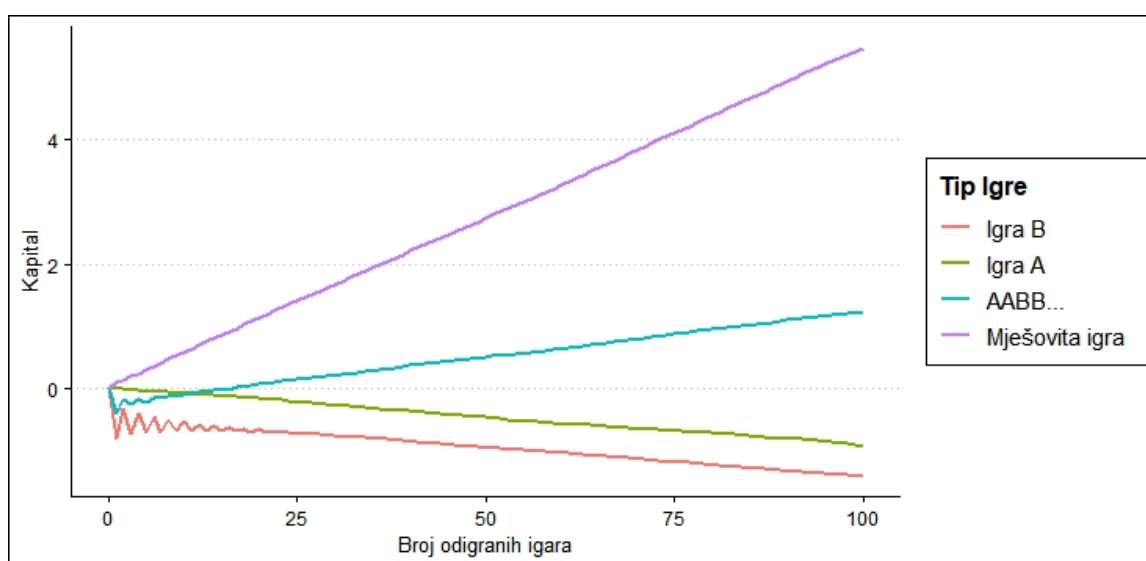
Sada lako provjerimo poštenost igre  $Q$  formulom (1.10)

$$q_1 \cdot q_2^2 > (1 - q_1)(1 - q_2)^2$$

$$0.113398 > 0.101802,$$

što znači da je mješovita igra dobitna i vrijedi Parronov paradoks.

Igrajmo sada igre deterministički, prvo igru  $A$  dva puta, a zatim igru  $B$  dva puta. Neka je  $C = C_{AABB} = (C_n : n \in \mathbb{N}_0)$  slučajan proces koji opisuje kapital igranjem igara ovim redosljedom. Ovoga puta  $C$  nije RWPE, ali proces  $X_n \equiv C_{4n}$  je RWPE. Odmah možemo uočiti da su skokovi za  $X = (X_n : n \in \mathbb{N}_0)$  iz skupa  $\{-4, -2, 0, 2, 4\}$  tj.  $R = L = 4$ . Zbog toga je malo teže provjeriti tvrdnju teorema (1.2.7). Ipak, pokazat ćemo, kompjutorskom analizom, da je ovakav deterministički niz igranja također dobitan.



Slika 1.5: Kapital tokom igranja igre  $A$  i igre  $B$ . Zelenom bojom označeno je igranje isključivo igre  $A$ . Ružičastom bojom označeno je igranje isključivo igre  $B$ . Plavom bojom označeno je igranje igre  $A$  2 puta, zatim igre  $B$  2 puta. Ljubičastom bojom je označeno igranje igre  $A$  i  $B$  na slučajan način s jednakim vjerojatnostima odabira. Rezultat prikazan na grafu je prosjek od 1 000 000 simuliranih uzoraka od 100 igara.

Na uzorku veličine 1 000 000 promatramo ponašanje kapitala u prvih 100 koraka igranja igre  $A$ , igre  $B$ , determinističkim igranjem  $AABB\dots$  i igranjem igre  $A$  i igre  $B$  na slučajno odabran način s jednakom vjerojatnošću odabira. Slika 1.5 prikazuje graf na kojem možemo vidjeti dugoročno ponašanje kapitala u svakom koraku. Uzeli smo prosjek svih uzoraka za svaku igru u svakom koraku. Uočljivo je da igre  $A$  i  $B$  imaju negativan trend, a da mješovita igra ima pozitivan trend, što je bilo i za očekivati. Štoviše, ovom

analizom možemo zaključiti da je determinističkim igranjem  $AABB \dots$  ostvaren pozitivan trend iz čega možemo naslutiti da je igra  $AABB$  dobitna.

## 1.4 Uvjeti na Parrondov paradoks

Kako bi Parrondov paradoks vrijedio za igru  $A$ , igru  $B$  i mješovitu igru  $Q$  moraju vrijediti sljedeće nejednakosti

$$\frac{p}{1-p} < 1, \quad (1.12)$$

$$\frac{p_1 p_2^2}{(1-p_1)(1-p_2)^2} < 1 \quad \text{i} \quad (1.13)$$

$$\frac{q_1 q_2^2}{(1-q_1)(1-q_2)^2} > 1. \quad (1.14)$$

Iz nejednadžbe (1.13) možemo izraziti  $p_1$  preko  $p_2$

$$p_1 < \frac{(1-p_2)^2}{(1-p_2)^2 + p_2^2}. \quad (1.15)$$

Cilj nam je pronaći trojike  $(p, p_1, p_2)$  za koje vrijedi Parrondov paradoks. Na slici 1.6 prikazan je prostor  $[0, 1]^2$ . Za igru  $A$  vrijedi  $p = p_1 = p_2$  prema tome crvena linija predstavlja mogući izbor  $(p_1, p_2)$  za igru  $A$ . Za igru  $B$  možemo uzeti bilo koju  $(p_1, p_2) \in \langle 0, 1 \rangle^2$ , iz nejednakosti (1.15) vidimo da je igra  $B$  gubitna za sve  $(p_1, p_2)$  ispod krivulje

$$p_1 = \frac{(1-p_2)^2}{(1-p_2)^2 + p_2^2} \quad (1.16)$$

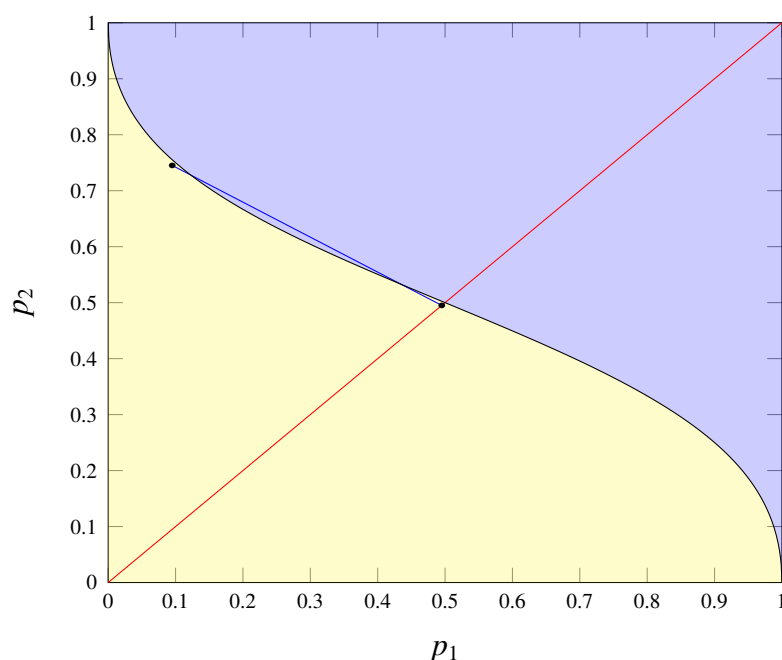
### Ograničenja za $\epsilon$ i $\gamma$

Za  $\gamma = 0.5$  imamo mješovitu igru s matricom prijelaza (1.11), kako bi uvjeti (1.12)-(1.14) bili zadovoljeni, mora vrijediti

$$\epsilon > 0$$

$$\epsilon(80\epsilon^2 - 8\epsilon + 49) > 0$$

$$320\epsilon^3 - 16\epsilon^2 + 229\epsilon - 3 < 0.$$



Slika 1.6: Slika prikazuje uređene parove  $(p_1, p_2)$  za 3-periodičnu igru. Žutom bojom označeni su parovi za koje je igra gubitna, plavom bojom označeni su parovi za koje je igra dobitna. Igra  $A$  za koju vrijedi  $p_1 = p_2$  označena je crvenom bojom. Krivulja  $p_1 p_2^2 = (1 - p_1)(1 - p_2)^2$  označuje parove za koje je igra poštena.

Iz prve dvije nejednakosti slijedi  $\epsilon > 0$ , a iz treće nejednakosti dobijemo  $\epsilon_{max} \approx 0.0131$ . Odnosno, uz  $\gamma = 0.5$  Parrondov paradoks se ostvaruje za  $0 < \epsilon < 0.0131$ .

Neka je sada  $\epsilon = 0.005$ , na slici (1.6) označene su točke  $(0.495, 0.495)$  i  $(0.095, 0.745)$ , parovi  $(p_1, p_2)$  za igre  $A$  i  $B$ . Na mješovitu igru s parametrom  $\gamma$  možemo gledati kao na linearnu kombinaciju igara  $A$  i  $B$ . Krivulja (1.16) je lokalno konveksna pa ju linija koja spaja točke  $(0.495, 0.495)$  i  $(0.095, 0.745)$  siječe. Za približno  $0.1247 < \gamma < 0.4298$ , linearna kombinacija  $(q_1, q_2)$  nalazi se iznad krivulje, odnosno igra  $Q$  je dobitna.

### Stopa pobjeđivanja

**Definicija 1.4.1.** Neka je  $X = (X_n : n \geq 0)$  Markovljev lanac s prebrojivim skupom stanja  $S$  i prijelaznom matricom  $P$ . Vjerojatnosna distribucija  $\pi = (\pi_i : i \in S)$  na  $S$  je **stacionarna**

*distribucija* Markovljevog lanca  $X$  (odnosno prijalzne matrice  $P$ ) ako vrijedi

$$\pi = \pi P, \quad (1.17)$$

odnosno po komponentama

$$\pi_j = \sum_{k \in S} \pi_k p_{kj}, \text{ za sve } j \in S. \quad (1.18)$$

**Teorem 1.4.2** (Ergodski teorem). *Pretpostavimo da je Markovljev lanac  $X = (X_n : n \geq 0)$  ireducibilan i pozitivno povratan te neka je  $\pi$  njegova jedinstvena stacionarna distribucija. Pretpostavimo da je  $f$  nenegativna ili ograničena realna funkcija definirana na  $S$ , tada vrijedi*

$$\mathbb{P} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k) = \sum_{j \in S} f(j) \pi_j \right) = 1. \quad (1.19)$$

**Napomena 1.4.3.** (i) *O izrazu  $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(X_k)$  razmišljamo kao o vremenskom usrednjenju funkcije  $f$  po putu Markovljevog lanca  $X$ . S druge strane,  $\pi(f)$  je prostorno usrednjenje funkcije  $f$  po distribuciji  $\pi$  na  $S$ . Ergodski teorem tvrdi da je za gotovo sve putove Markovljevog lanca granično vremensko usrednjenje jednako prostornom usrednjenju (njegove stacionarne distribucije).*

(ii) *Da je Markovljev lanac sa prijelaznom matricom  $P_B$  ireducibilan vidimo iz same matrice, sva stanja međusobno komuniciraju (što se lako vidi iz  $p_{01} \cdot p_{12} \cdot p_{20} > 0$ ).*

(iii) *U radu [12, teorem 7.14] pokazano je da za ireducibilan Markovljev lanac vrijedi da su sva stanja pozitivno povratna ako i samo ako ima stacionarnu distribuciju.*

Kada su pretpostavke Ergodskog teorema zadovoljene, na stacionarnu distribuciju gledamo kao na prosječno vrijeme provedeno u stanju  $i \in S$ . Neka je  $f_X : S \rightarrow [0, 1]$  i  $f_X(i) = p_i$  funkcija, koja ima vrijednosti vjerojatnosti pobjede za igru  $X$  u stanju  $i \in S$ . Kada su pretpostavke Ergodskog teorema zadovoljene, definiramo *stopu pobjeđivanja*

$$r \equiv \sum_{i=0}^3 2 \cdot \pi_i p_i - 1 \quad (1.20)$$

za 3-periodičnu igru, gdje je  $\pi = (\pi_i : i = 1, 2, 3)$  stacionarna distribucija Markovljevog lanca sustava perioda. Neka je

$$P_B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{10} - \epsilon & \frac{9}{10} + \epsilon \\ \frac{1}{4} + \epsilon & 0 & \frac{3}{4} - \epsilon \\ \frac{3}{4} - \epsilon & \frac{1}{4} + \epsilon & 0 \end{bmatrix}$$

prijelazna matrica sustava perioda igre  $B$ . Računajući stacionarnu distribuciju,  $\pi_B = \pi_B P_B$ , stopu pobjeđivanja igre  $B$  možemo ocijeniti sa  $r_B = -1.74\epsilon + 0.119\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3)$ , što je negativno za male  $\epsilon > 0$ . Slična kalkulacija može se sprovesti i za mješovitu igru  $Q$ , dobijemo  $r_Q = 0.0254 - 1.937\epsilon + 0.0136\epsilon^2 + \mathcal{O}(\epsilon^3)$ , što je pozitivno za male  $\epsilon > 0$ , ali je negativno za veće  $\epsilon$ .

Predznak stope pobjeđivanja može naslutiti poštenost igre, što više veća stopa pobjeđivanja daje veći nagib grafu na slici 1.5.

## Poglavlje 2

# Parrondov paradoks za homeomorfizme

### 2.1 Osnovne diskretnih dinamičkih sustava

**Definicija 2.1.1.** *Diskretni dinamički sustav  $(X, f)$  sastoji se od nepraznog skupa  $X$  i preslikavanja  $f : X \rightarrow X$ . Skup  $X$  nazivamo fazni prostor, a preslikavanje  $f$  fazno preslikavanje.*

Teorija dinamičkih sustava bavi se proučavanjem dugoročnog ponašanja točaka skupa  $X$  pod djelovanjem iteracija od  $f$ . Iteracije od  $f$  definiraju se induktivno:  $f^0 = Id$ , dok za sve ostale  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^n = f \circ f^{n-1}$ .

**Definicija 2.1.2.** *Neka je  $X$  neprazan skup i  $f : X \rightarrow X$  preslikavanje. Za  $x \in X$ , **orbita naprijed** točke  $x$  je skup*

$$O_f^+(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}_0\}.$$

*Ako je  $k$  tome  $f$  invertibilna, možemo definirati **orbitu unatrag** i (punu) **orbitu***

$$O_f^-(x) = \{f^{-n}(x) : n \in \mathbb{N}_0\}$$

$$O_f(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}.$$

**Definicija 2.1.3.** *Točka  $x \in X$  zove se **fiksna točka** od  $f$  ako je  $f(x) = x$ .*

**Definicija 2.1.4.** *Neka je  $x \in X$  fiksna točka preslikavanja  $f : X \rightarrow X$ . Točka  $y \in X$  je **naprijed** ili **pozitivno asimptotična** s  $x$  ako je  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = x$ . **Stabilni skup** od  $x \in X$ , u oznaci  $W^s(x)$ , sastoji se od svih točaka naprijed asimptotičnih s  $x$ .*

Ukoliko je  $f$  invertibilna, točka  $y \in X$  je **nazad ili negativno asimptotična** s  $x$  ako je  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{-n}(y) = x$ . **Nestabilan skup** od  $x \in X$ , u oznaci  $W^u(x)$ , sastoji se od svih točaka nazad asimptotičnih s  $x$ .

**Definicija 2.1.5.** Neka je  $x \in \mathbb{R}^k$  fiksna točka preslikavanja  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ , kažemo da je  $x$  **stabilna fiksna točka** ako za svaki  $\epsilon > 0$  postoji  $\delta > 0$  takav da  $\|y - x\| < \delta$  povlači  $\|f^n(y) - x\| < \epsilon$  za sve  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Definicija 2.1.6.** Neka je  $x \in \mathbb{R}^k$  fiksna točka preslikavanja  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ , kažemo da je  $x$  **lokalno privlačna** ako postoji  $\eta > 0$  takav da  $\|x - y\| < \eta$  povlači  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = x$ . Štoviše, ako  $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(y) = x$  vrijedi za sve  $y \in \mathbb{R}^k$  tada je  $x$  **globalno privlačna točka**.

Ukoliko je  $f$  invertibilna tada je  $x$  **lokalno ( globalno) odbojna** ako je lokalno ( globalno) privlačna za preslikavanje  $f^{-1}$ .

**Definicija 2.1.7.** Neka je  $x \in \mathbb{R}^k$  fiksna točka preslikavanja  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ , kažemo da je  $x$  **lokalno asimptotski stabilna** ili kraće pišemo LAS, ako je stabilna i lokalno privlačna.

Štoviše, ako je  $x$  globalno privlačna i stabilna, tada je  $x$  **globalno asimptotski stabilna** ili kraće GAS.

**Napomena 2.1.8.** U ovom radu koristimo izraz privlačna točka (ili atraktor) odnosno odbojna točka (ili izvor) kao sinonime za asimptotski stabilne točke za preslikavanje odnosno njegov inverz.

**Definicija 2.1.9.** Preslikavanje  $f : X \rightarrow Y$  je **homeomorfizam** ako je neprekidna bijekcija i ako je njen inverz također neprekidan.

Definicija dinamičkih sustava dosta je širok pojam, potreban nam je bilo koji neprazan skup  $X$  i preslikavanje  $f : X \rightarrow X$  kako bi imali dinamiku. Često se u teoriji dinamičkih sustava postavlja pitanje možemo li poistovjetiti dva dinamička sustava iako nisu definirani na istim skupovima ili nemaju isto pravilo preslikavanja.

**Definicija 2.1.10.** Neka su  $f : X \rightarrow X$  i  $g : Y \rightarrow Y$  dva preslikavanja. Za  $f$  i  $g$  kažemo da su **topološki konjugirana** ako postoji homeomorfizam  $h : X \rightarrow Y$  takav da je  $h \circ f = g \circ h$ . Homeomorfizam  $h$  zovemo topološka konjugacija.



Topološki konjugirana preslikavanja ekvivalentna su u smislu njihove dinamike. Na primjer, ako su  $f$  i  $g$  konjugirana preslikavanja s konjugacijom  $h$ , tada ako je  $x \in X$  fiksna točka za  $f$  onda je i  $h(x) \in Y$  fiksna točka i za  $g$  jer  $h(x) = h \circ f(x) = g \circ h(x)$ . Dodatno,  $h$  injektivno preslikava skup periodičnih točaka od  $f$  na skup periodičnih točaka od  $g$  (periodična točka  $x \in X$  je takva da postoji  $n \in \mathbb{N}$  za koji je  $f^n(x) = x$ ). Također, asimptotične orbite od  $f$  preslikavaju se u asimptotične orbite od  $g$ .

Često se topološkom konjugacijom može objasniti dinamika nekog sustava  $(X, f)$  pomoću sustava  $(Y, g)$  kojeg možemo na lakši način analizirati. Kako u ovom radu spominjemo isključivo skupove  $\mathbb{R}^k$ , topološku konjugaciju koristimo kako bi lakše definirali preslikavanja s istom dinamikom i različitim pravilom preslikavanja.

**Definicija 2.1.11.** *Neka je  $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  klase  $C^1$ . Za fiksnu točku  $p \in \mathbb{R}^k$  preslikavanja  $f$  kažemo da je **hiperbolična** ako  $Df(p)$  nema svojstvene vrijednosti na jediničnoj kružnici, gdje je  $Df(p)$  Jacobijeva matrica od  $f$  u točki  $p$ .*

**Teorem 2.1.12.** *Neka je  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  klase  $C^1$ . Neka  $f$  ima hiperboličnu fiksnu točku  $p \in \mathbb{R}^2$  takvu da su sve apsolutne vrijednosti svojstvenih vrijednosti  $Df(p)$  manje od jedan. Tada postoji otvoreni skup koji sadrži točku  $p$ , čije sve točke konvergiraju prema  $p$  pod iteracijama naprijed od  $f$ . Odnosno  $p$  je lokalno privlačna.*

*Dokaz.* Konjugiranjem preslikavanja  $f$  s translacijom  $T(x) = x + p$ , bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je  $p$  ishodište, tj.  $p = (0, 0)$ .

Tada  $Df(p)$  ima jedan od sljedeća tri oblika :

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}, & |\lambda|, |\mu| < 1, \\ & \begin{bmatrix} \lambda & \epsilon \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, & |\lambda|, \text{ uz } \epsilon > 0 \text{ proizvoljno mali,} \\ & \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, & a^2 + b^2 < 1. \end{aligned}$$

Zato za  $x \neq p$  vrijedi  $\|Df(p)x\| < \|x\|$ . Radi neprekidnosti od  $Df$ , postoji okolina  $U$  točke  $p$  takva da za svaki  $q \in U$  ta nejednakost vrijedi za jedinične vektore  $e_1$  i  $e_2$ , posebno vrijedi i za svaku točku  $x \neq p$ , to jest  $\|Df(q)x\| < \|x\|$  za svaki  $q \in U$ .

Izaberimo sada  $\delta > 0$  takav da ako je  $\|q\| < \delta$  tada je  $q \in U$ . Želimo dokazati da za sve takve  $q \neq p$  vrijedi  $\|f(q)\| < \|q\|$ .

Neka je  $\gamma(t) = t \cdot q$ , prema tome je  $f(\gamma(0)) = p = (0, 0)$ ,  $f(\gamma(1)) = f(q)$  i  $\gamma(t) \in U$  za  $0 \leq t \leq 1$ . Zato vrijedi

$$\begin{aligned} \|f(q)\| &= \left| \int_0^1 (f \circ \gamma)'(t) dt \right| \leq \int_0^1 |(f \circ \gamma)'(t)| dt = \int_0^1 |Df(\gamma(t))\gamma'(t)| dt \\ &< \int_0^1 |\gamma'(t)| dt = \|q\|, \end{aligned}$$

jer je  $\gamma'(t) \neq (0, 0)$ . Dakle  $\|f(q)\| < \|q\|$  pa je  $f^n(q) \rightarrow p$  kada  $n \rightarrow \infty$  □

Dokaz generalizacije teorema 2.1.12 nešto je komliciraniji, ali tehnike koje smo koristili vrijede i za  $k \geq 3$ . Iz teorema zaključujemo da je hiperboličnost fiksnih točaka jako svojstvo i možemo ga povezati s lokalnom privlačnošću fiksne točke. Ako je  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  iz teorema invertibilna slijedi korolar.

**Korolar 2.1.13.** *Pretpostavimo da  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ima hiperboličnu fiksnu točku  $p \in \mathbb{R}^2$  takvu da su sve apsolutne vrijednosti svojstvenih vrijednosti  $Df(p)$  veće od jedan. Tada postoji otvoreni skup koji sadrži točku  $p$ , čije sve točke kovergiraju prema  $p$  pod iteracijama nazad od  $f$ . Odnosno  $p$  je lokalno odbojna.*

## Parrondov paradoks u dinamičkim sustavima

Pokazali smo primjerom kako se postiže Parrondov paradoks u teoriji igara. Vidjeli smo da je moguće kombiniranjem gubitnih igara stvoriti dobitnu igru. U kontekstu dinamičkih sustava, dok proučavamo stabilnost fiksnih točaka, gubitne i dobitne igre možemo poistovjetiti s privlačnim, odnosno odbojnim fiksnim točkama.

Za određenu klasu preslikavanja  $C$  na  $\mathbb{R}^k$  ( $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ ), reći ćemo da preslikavanja  $f, g \in C$  zadovoljavaju *dinamički Parrondov paradoks* ako imaju zajedničku fiksnu točku u kojoj su oba preslikavanja lokalno invertibilna i fiksna točka je lokalno asimptotski stabilna za  $f$  i  $g$ , ali je odbojna fiksna točka za kompozicije  $f \circ g$  i  $g \circ f$ .

**Napomena 2.1.14.** *Uočimo pritom, za klasu homeomorfizama,  $g \circ f$  i  $f \circ g$  su topološki konjugirana preslikavanja u okolini fiksne točke, zato što je  $f \circ g = g^{-1} \circ g \circ f \circ g$*

Valja uočiti da paradoks ne postoji kada je  $C$  klasa funkcija za koje je zajednička fiksna točka hiperbolična. Uistinu, neka su dane dvije  $k \times k$  matrice,  $A$  i  $B$ , s absolutnim vrijednostima svojstvenih vrijednosti manjih od jedan. Vrijedi  $|\det(A)| < 1$  i  $|\det(B)| < 1$  zbog

toga je  $|\det(AB)| < 1$ . Prema tome, nije moguće da sve apsolutne vrijednosti svojstvenih vrijednosti matrice  $AB$  budu veće od jedan. Kao posljedicu imamo: za dva preslikavanja  $f, g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  koja imaju zajedničku hiperboličnu fiksnu točku  $x \in \mathbb{R}^k$ , koja je lokalno privlačna za oba preslikavanja, tada je za  $g \circ f$  i  $f \circ g$  točka  $x$  ili lokalno privlačna ili sedlasta<sup>1</sup> fiksna točka. Zbog toga ne možemo uočiti dinamički Parrondov paradoks u tom slučaju.

Štoviše, autori u djelu [1] proučavaju stabilnost nehiperboličnih fiksnih točaka. Jedan od glavnih rezultata je sljedeći teorem.

**Teorem 2.1.15.** *Sljedeće tvrdnje vrijede*

- (i) *Za sve  $n \geq 1$  postoji  $k \geq 3$  i polinomijalna preslikavanja  $f_i : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ , za  $i \in \{1, \dots, k\}$ , koja imaju zajedničku fiksnu točku  $p \in \mathbb{R}^n$  koja je LAS (odbojna) za svako preslikavanje, takva da je  $p$  odbojna (LAS) za kompoziciju  $p_{k,k-1,\dots,1}$ . Štoviše, za jednodimenzionalna preslikavanja ( $n = 1$ ),  $k$  je optimalan, odnosno nije moguće pronaći dva preslikavanja takva da kompozicija  $f_{2,1}$  zadovoljava dana svojstva.*
- (ii) *Za sve  $n = 2m \geq 2$  postoje dva polinomijalna preslikavanja  $f_1, f_2 : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  koja imaju zajedničku fiksnu točku  $p$  koja je LAS (odbojna) za oba preslikavanja i takva da je  $p$  odbojna (LAS) za kompoziciju  $f_{2,1}$ .*

*Dokaz.* Pogledajte [1, Teorem C]. □

Iz teorema 2.1.15 vidimo da je moguće ostvariti dinamički Parrondov paradoks za polinomijalna preslikavanja kada je dimenzija  $n = 2m$  parna. U protivnom, potrebna su nam minimalno tri preslikavanja kako bi promijenili stabilnost fiksne točke. U nastavku ćemo pokazati gdje se postiže Parrondov paradoks kada je  $C$  klasa homeomorfizama na  $\mathbb{R}^k$ . Valja imati na umu da dokazu teorema 2.2.1 pristupamo kvalitativno. Štoviše, ponašanje naših preslikavanja u okolini fiksne točke nije isključivo rotacijskog tipa i ne postoji jasan način da ih učinimo glatkima ili analitičkima.

---

<sup>1</sup>U smislu hiperboličnih fiksnih točaka, matrica  $Df(x)$ , za sedlastu točku  $x$ , ima neke apsolutne vrijednosti svojstvenih vrijednosti veće od jedan, a preostale su manje od jedan.

## 2.2 Parrondov paradoks za homeomorfizme

**Teorem 2.2.1.** *Za  $k \geq 2$  postoji par homeomorfnih preslikavanja  $f, g : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  takvih da zadovoljavaju dinamički Parrondov paradoks. Suprotno, za  $k = 1$  ne postoji niti jedan par homeomorfnih preslikavanja  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  koji zadovoljavaju Parrondov paradoks.*

Teorem dokazujemo u tri koraka, u slučajevima kada je  $k = 1$ ,  $k = 2$ ,  $k \geq 3$ .

**Napomena 2.2.2.** *Kako su homeomorfizmi neprekidne bijekcije na  $\mathbb{R}$  ( $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ), vrijedi da su strogo monotona preslikavanja.*

### Dokaz teorema 2.2.1 za $k = 1$

*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno, odnosno neka postoje homeomorfizmi  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takvi da vrijedi dinamički Parrondov paradoks. Bez smanjenja općenitosti proučavamo slučajeve kada je 0 fiksna točka za naša preslikavanja, u protivnom postoji topološki konjugirano preslikavanje kojemu je 0 fiksna točka. Neka je 0 lokalno privlačna fiksna točka za  $f$  i  $g$  te neka je 0 lokalno odbojna fiksna točka za  $f \circ g$  i  $g \circ f$ . Imamo tri slučaja,  $f$  i  $g$  ne mijenjaju predznak, odnosno strogo su rastuće,  $f$  ne mijenja predznak i  $g$  mijenja,  $f$  i  $g$  mijenjaju predznak. Pretpostavimo da  $f$  i  $g$  mijenjaju predznak, odnosno za  $x > 0$  je  $f(x) < 0$  i  $g(x) < 0$  i obratno za  $x < 0$  je  $f(x) > 0$  i  $g(x) > 0$  (ostali slučajevi dokazuju se na sličan način). Tada vrijedi :

(i)  $g$  je monotono padajuća, odnosno za  $y < x < 0$  slijedi  $0 < g(x) < g(y)$

(ii) Kako je 0 lokalno privlačna točka, za  $y < 0 < x$  dovoljno blizu 0 vrijedi :

$$y < f \circ f(y) < 0 < g \circ g(x) < x$$

(iii) Kako je 0 lokalno odbojna točka za  $f \circ g$  i  $g \circ f$  tada za bilo koje  $x, y > 0$  dovoljno blizu 0 imamo  $x < f \circ g(x)$  i  $y < g \circ f(y)$

Iz ove tri tvrdnje slijedi da za dovoljno mali  $u > 0$  vrijedi :

$$u < f \circ g(u) < g \circ f(f \circ g(u)) = g(f \circ f(g(u))) < g(g(u)) < u,$$

što je kontradikcija, pri čemu smo u prve dvije nejednakosti koristili (iii) za  $u > 0$  i  $f \circ g(u) > 0$ , a u zadnje dvije nejednakosti smo koristili (i) i (ii) za  $g(u) < 0$  je  $f \circ f(g(u)) > g(u)$ . Kako  $g$  mijenja predznak od  $u$  tada je  $g(f \circ f(g(u))) < g(g(u))$  i konačno iz (ii) je  $g(g(u)) < u$ .  $\square$

### Dokaz teorema 2.2.1 za $k = 2$

*Dokaz.* Tvrdnju dokazujemo tako što konstruiramo  $f$  i  $g$  za koje vrijedi Parrondov paradoks. U našem primjeru  $f$  i  $g$  su konjugirani, odnosno imat će istu dinamiku, a  $g$  ćemo definirati pomoću  $f$ .

Definirajmo  $f$  pomoću polarnih koordinata. Ideja je da se za općenitu točku prvih nekoliko članova orbite udaljuju od ishodišta, a zatim orbita pada u dio ravnine u kojem ostaje zauvijek i postepeno teži ka ishodištu.

Želimo da dinamika kutne koordinate ne ovisi o radijalnoj koordinati, što nam omogućuje da orbitu svake točke dovedemo u dio ravnine u kojem se radijalna koordinata smanjuje.

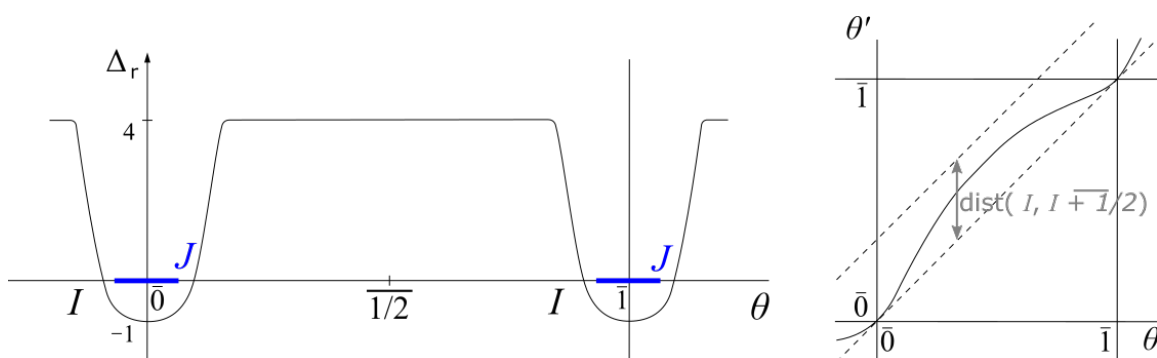
Također, želimo da se  $f$  puno brže širi na dijelovima gdje se udaljuje od ishodišta, nego što se sažima na dijelovima gdje se približava ishodištu.

Identificirajmo  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  s cilindrom  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ , gdje za polarne koordinate koristimo  $(r, \theta)$ , gdje je  $r \in \mathbb{R}$  i  $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ . Ishodište možemo poistovjetiti sa "dnom" cilindra (kada je  $r = -\infty$ ). Koristimo ovu vrstu radijalnih koordinata kako bi olakšali račun u kasnijem dijelu dokaza.

Uzmimo sada  $I \subset \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  interval centiran u  $\bar{0}$  ( $\bar{0}$  je neutralan element u  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ) takav da je  $I \cap (I + 1/2) = \emptyset$ . Neka je  $f(r, \theta) = (r', \theta')$  homeomorfizam na cilindru koji zadovoljava sljedeća svojstva :

- (i)  $\Delta_r = r' - r$  i  $\Delta_\theta = \theta' - \theta$  ovise isključivo o  $\theta$
- (ii)  $\Delta_r = 4$  za  $\theta \notin I$ ,  $\Delta_r \in [-1, 1)$  kada je  $\theta \in J \subset I$  i  $\bar{0} \in J$ ,  $\Delta_r = -1$  za  $\theta = \bar{0}$ , vidi sliku 2.1
- (iii)  $\Delta_\theta$  je nenegativan i  $\Delta_\theta \leq \text{dist}(I, I + \frac{1}{2})$  i  $\Delta_\theta = 0$  ako i samo ako je  $\theta = \bar{0}$

Svojstvo (iii) određuje dinamiku u kutnoj koordinati odnosno svaka orbita kutne koordinate  $\theta$  teži ka  $\bar{0}$ . Iz (ii) slijedi da se radijalna koordinata smanjuje jednom kada je  $\theta$



Slika 2.1: Graf  $\Delta_r$  (lijevo) i  $\theta'$  (desno) kao funkcije od  $\theta$  po definiciji funkcije  $f$ .

dovoljno blizu  $\bar{0}$ . Konačno iz (ii) i (i) sljedi da je  $\Delta_r$  uniformno ograničen, stoga  $f$  možemo proširiti na homeomorfizam u  $\mathbb{R}^2$ , kojeg također označujemo sa  $f$  i vrijedi  $f(0, 0) = (0, 0)$ .

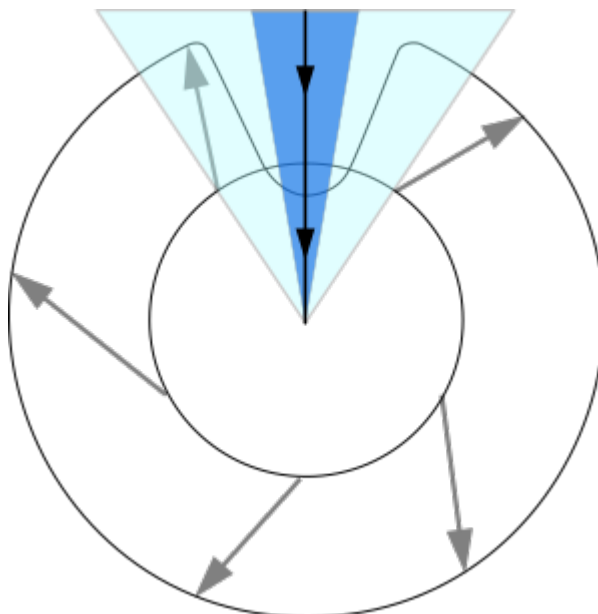
Kutni interval  $J$  određuje beskonačni konus  $\widehat{J}$  u  $\mathbb{R}^2$  u kojem se točke približavaju ishodištu djelovanjem  $f$ . Unutar  $\widehat{J}$  nalazi se dio ravnine, kojeg smo ranije spomenuli, u kojemu orbita (točke unutar tog dijela) ostaje "zatočena" i teži ka ishodištu, kao što je prikazano na slici 2.2. Uočimo također da je brzina privlačenja unutar  $\widehat{J}$  ( $\Delta_r \in [-1, 0)$ ) puno manja od brzine širanja ( $\Delta_r = 4$ ) u vanjštini konusa  $\widehat{I}$  koji je određen intervalom  $I$ .

Definirajmo sada preslikavanje  $g$  koje je kopija od  $f$  zarotirana za određeni kut. Neka je  $\tau(r, \theta) = (r, \theta + \overline{1/2})$  polukružna rotacija i  $g = \tau^{-1} \circ f \circ \tau = \tau \circ f \circ \tau$ . Uočimo da  $g$  zadovoljava svojstva (i)-(iii) (ako umjesto  $\theta$  stavimo  $\theta + \overline{1/2}$ ).

Ključno je uočiti, zbog svojstva (iii),  $f(\widehat{I}) \cap \tau(\widehat{I}) = \{0\}$  i  $g(\tau(\widehat{I})) \cap \widehat{I} = \{0\}$ . To nam omogućuje da, ako se radijalna koordinata proizvoljne točke  $x \in \mathbb{R}^2$  smanji djelovanjem  $f$ , tada se ne može smanjiti radijalna koordinata točke  $f(x)$  djelovanjem  $g$  (vrijedi i obratno, ako prvo djelujemo sa  $g$ , a zatim sa  $f$ ).

Zbog (ii) možemo vidjeti da se radijalna koordinata povećava djelovanjem  $g \circ f$ , odnosno  $f \circ g$  na  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Konačno, dokažimo da za  $f$  i  $g$  vrijedi dinamički Parronov paradoks.

Dokažimo da je ishodište globalno privlačna fiksna točka za  $f$  i  $g$ . Neka je  $\{(r_n, \theta_n)\}_{n \geq 1}$  orbita točke  $(r, \theta)$  djelovanjem  $f$ . Uočimo da orbita kutne koordinate  $\{\theta_n\}_{n \geq 1}$  teži ka  $\bar{0}$ . Uistinu, kako  $\theta_{n+1}$  ovisi samo o  $\theta_n$ , za  $\theta = \bar{0}$  vrijedi  $\theta_n = \bar{0}$  za sve  $n$ , dok za  $\theta \neq \bar{0}$  iz svojstva prostora  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$  i svojstva (iii) znamo da  $(\theta_n)_{n \geq 1}$  teži ka nekom konačnom  $\theta_0$ . S obzirom na to da je  $\Delta_\theta \geq 0$  i  $\Delta_\theta = 0$  ako i samo ako je  $\theta = \bar{0}$  zaključujemo da je  $\theta_0 = \bar{0}$ . Stoga  $\theta_n \rightarrow \bar{0}$



Slika 2.2: Ponašanje funkcije  $f$  na kružnici radiusa  $r$ , shematski prikazano pomoću strelica. Konus  $\widehat{I}$  (svijetlo plava) i konus  $\widehat{J}$  (tamnoplava) su zasjenčani. Invarijantna zraka s obzirom na preslikavanje  $f$ ,  $\theta = \bar{0}$ , prikazana je vertikalno.

pa postoji  $n_0 \in \mathbb{N}$  za koji  $n > n_0$  povlači  $\theta_n \in J$  što povlači da za svaki  $n \in \mathbb{N}$  takav da je  $n > n_0$  slijedi  $r_{n+1} < r_n$ , dodatno vrijedi i  $r_{n+1} - r_n \rightarrow -1$ , a zbog toga vrijedi  $r_n \rightarrow -\infty$ . Slijedi da orbita proizvoljne točke teži ka ishodištu. Slično se dokaže i za  $g$ .

Dokažimo da je ishodište globalno odbojna točka za  $f \circ g$  i  $g \circ f$ . Prisjetimo se,  $f \circ g = f \circ \tau \circ f \circ \tau$  je konjugirano preslikavanju  $g \circ f = \tau \circ f \circ \tau \circ f$  ( $\tau^2 = id$ ), dovoljno je dokazati tvrdnju za  $g \circ f$ .

Iz (ii) slijedi da se radijalna koordinata točke iz vanjšine  $\widehat{I}$  povećava za 4 djelovanjem  $f$  pa za  $(r', \theta') = g \circ f(r, \theta)$  imamo da je  $r' - r \geq 3$  za  $\theta \notin I$ . Ista nejednakost vrijedi i ako  $f(r, \theta)$  ne pripada  $\tau(\widehat{I})$ , a kako  $\widehat{I} \cap f^{-1}(\tau(\widehat{I})) = \emptyset$  zaključujemo da se radijalna koordinata uvijek povećava minimalno za 3 kada djelujemo sa  $g \circ f$ . Očigledno je ishodište odbojna točka za  $g \circ f$  što dokazuje tvrdnju teorema za  $k = 2$ .  $\square$

**Dokaz teorema 2.2.1 za  $k \geq 3$** 

*Dokaz.* Prvo, izmijenimo dinamiku preslikavanja u ravnini koju smo definirali u dokazu za  $k = 2$ , na način da novo preslikavanje bude simetrično u odnosu na vertikalnu os.

Definiramo  $h(r, \theta) = f(r, 2\theta)$  za  $\theta \in [\bar{0}, \bar{1/2}]$  i  $h(r, \theta) = f(r, 1 - 2\theta)$  za  $\theta \in [\bar{1/2}, \bar{1}]$ . Sada imamo dva invarijantna polupravca za preslikavanje  $h$ , odnosno polupravac  $\theta = \bar{0}$  koji djeluje odbojno i polupravac  $\theta = \bar{1/2}$  koji djeluje privlačno. Dinamika od  $h$  zapravo replicira dinamiku od  $f$  u dvije simetrične poluravnine na način da oba invarijantna polupravca zajedno predstavljaju invarijantan polupravac  $\theta = \bar{0}$  za  $f$ .

Sada možemo prijeći na više-dimenzionalni slučaj koristeći uobičajne sferične koordinate  $(r, \theta, \varphi_1, \dots, \varphi_{k-2})$  za  $\mathbb{R}^k$  i definiramo preslikavanje  $h_k : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  na način da  $h$  transformira radijalnu i polarnu koordinatu poput  $h$ ,  $(r', \theta') = h(r, \theta)$ , dok preostale koordinate ostaju iste, odnosno  $(\varphi'_1, \dots, \varphi'_{k-2}) = (\varphi_1, \dots, \varphi_{k-2})$ .

Preslikavanje  $h_k$  ima dva invarijantna polupravca na kojima se točke približavaju ishodištu. Štoviše, radijalna koordinata se drastično povećava djelovanjem  $h_k$  na točku različitu od ishodišta koja se ne nalazi u dvostrukom konusu  $C$  oko tih osi (konus  $C$  možemo odrediti i ovisi o intervalu  $I$ ).

Također, kako svaka orbita ili pripada invarijantnim poluosima ili u konačnici uđe i zauvijek ostaje u konusu  $C$  oko privlačne osi, zaključujemo da je ishodište globalno privlačna fiksna točka za  $h_k$ .

Analogno konstruiramo i preslikavanje  $j_k$  kao i u slučaju za  $k = 2$ . Neka je  $\tau_k$  rotacija za  $\bar{1/4}$  polarne koordinate u  $\mathbb{R}^k$  i definiramo  $j_k = \tau_k^{-1} \circ h_k \circ \tau_k$ . Uočimo da

$$h_k(C) \cap \tau_k(C) = \{\mathbb{O}\} \text{ i } j_k(\tau_k(C)) \cap C = \{\mathbb{O}\} \quad (2.1)$$

Očigledno je ishodište globalno privlačna točka i za  $j_k$ , jer je  $j_k$  konjugirano  $h_k$ .

Također, očigledno se radijalna koordinata proizvoljne točke različite od ishodišta povećava primijenimo li jedno od preslikavanja  $h_k \circ j_k$  ili  $j_k \circ h_k$  zbog (2.1). Stoga je ishodište globalno odbojna fiksna točka za kompoziciju preslikavanja  $h_k$  i  $j_k$ .  $\square$

Razmotrimo prostor  $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  opremljen vjerojatnosnom mjerom  $\mu$  definiranu kao produkt Bernoullijevih vjerojatnosnih mjera,  $\mu_B$  na  $\{0, 1\}$ . Za Bernoullijevu slučajnu varijablu  $B(p)$  vrijedi  $\mu_B(1) = p$  i  $\mu_B(0) = 1 - p$  za parametar  $p \in [0, 1]$ .

**Teorem 2.2.3.** *Za  $k \geq 2$  i  $0 < p < 1$  postoje homeomorfizmi  $f_0, f_1 : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  takvi da:*



- (i) Ishodište je fiksna globalno asimptotska stabilna točka za  $f_0$  i  $f_1$ .
- (ii) Za  $\mu$ -gotovo sve  $(a_n) \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$  i  $\odot \neq x \in \mathbb{R}^k$ , orbita točke  $x$ ,  $\{F_{a_n, a_{n-1}, \dots, a_0}(x)\}_{n \geq 1}$  odbija se od ishodišta, gdje je  $F_{a_n, a_{n-1}, \dots, a_0} = f_{a_n} \circ \dots \circ f_{a_1} \circ f_{a_0}$  za  $n \geq 1$  te se  $f_0$  pojavljuje s vjerojatnošću  $p$  i  $f_1$  s vjerojatnošću  $1 - p$ .

Za dokaz teorema 2.2.3 potreban nam je rezultat sljedećeg teorema.

**Teorem 2.2.4** (Jaki zakon velikih brojeva). *Neka je  $(X_n, n \in \mathbb{N})$  niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Tada niz  $(1/n \sum_{j=1}^n X_j, n \in \mathbb{N})$  konvergira (g.s.) ako i samo ako  $\mathbb{E} X_1$  postoji i u tom slučaju je*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \stackrel{g.s.}{=} \mathbb{E} X_1. \quad (2.2)$$

*Dokaz.* Pogledati [9, str. 416, teorem 12.15] □

**Dokaz za  $k = 2$**

*Dokaz.* Ideja je da promatramo  $f_0$  i  $f_1$  kao  $f$  i  $g$  iz dokaza teorama 2.2.1 za slučaj  $k = 2$ , uz malu promjenu; koristimo se definicijom od  $f$  i  $g$ , ali drugo pravilo mijenjamo na način

- (ii)  $\Delta_r = a - 1$ , za neki fiksni  $a > 4$ , ako je  $\theta \notin I$ ,  $\Delta_r \in [-1, 0 >$  za  $\theta \in J \subset I$ ,  $\bar{0} \in J$  i vrijedi  $\Delta_r = -1$  za  $\theta = \bar{0}$

Uočimo, u dokazu teorema 2.2.3 za  $k = 2$  koristimo  $a = 5$ . Kasnije možemo odrediti  $a$  u ovisnosti koliko želimo da se točka udaljuje od ishodišta ovisno o vjerojatnosti  $p$ . Označimo sa  $f_0$  izmijenjeni  $f$  i sa  $f_1$  izmijenjeni  $g$ , na način da vrijedi  $f_1 = \tau^{-1} \circ f_0 \circ \tau$ .

Uzmimo proizvoljnu točku ravnine  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , različitu od ishodišta i na nju djelujemo na slučajno odabran način, s  $f_0$  te  $f_1$  s time da djelujemo s  $f_1$  s vjerojatnošću  $p$  i djelujemo s  $f_0$  s vjerojatnošću  $q = 1 - p$ .

Tvrdimo da se orbita točke  $x$  odbija od ishodišta gotovo sigurno, odnosno s vjerojatnošću 1. Ovu tvrdnju dokazujemo u dva dijela.

Promotrimo prvo četiri preslikavanja:  $f_0 \circ f_0$ ,  $f_0 \circ f_1$ ,  $f_1 \circ f_0$ ,  $f_1 \circ f_1$ . Djelujemo li njima na proizvoljno točku, znamo donje granice promjene radialne koordinate slike u odnosu na početnu točku, odnosno,  $\Delta_r^{f_0 \circ f_0} \geq -2$ ,  $\Delta_r^{f_0 \circ f_1} \geq a - 2$ ,  $\Delta_r^{f_1 \circ f_0} \geq a - 2$ ,  $\Delta_r^{f_1 \circ f_1} \geq -2$ . Štoviše,

znamo da se preslikavanje  $f_0 \circ f_0$  pojavljuje s vjerojatnošću  $p^2$ , preslikavanja  $f_0 \circ f_1$  i  $f_1 \circ f_0$  s vjerojatnošću  $pq$  te preslikavanje  $f_1 \circ f_1$  s vjerojatnošću  $q^2$ . Sada možemo postaviti uvjete na  $a$  tako da očekivanje promjene radialne koordinate bude pozitivno.

Preciznije rečeno, ako sa  $\Delta^n$  označimo slučajnu varijablu koja mjeri najmanju promjenu radialne koordinate između točke (različite od ishodišta) i njene slike, pod utjecajem  $F_{a_n, \dots, a_1, a_0}$ , tada imamo :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\Delta^{2m+2}] &\geq \mathbb{E}[\Delta^{2m}] + p^2 \min \Delta_r^{f_0 \circ f_0} + pq \min \Delta_r^{f_0 \circ f_1} + qp \min \Delta_r^{f_1 \circ f_0} + q^2 \min \Delta_r^{f_1 \circ f_1} \\ &\geq \mathbb{E}[\Delta^{2m}] + 2(a-2)pq - 2(p^2 + q^2) \\ &= \mathbb{E}[\Delta^{2m}] + 2(ap(1-p) - 1). \end{aligned}$$

Stoga možemo uzeti  $a$  takav da je  $ap(1-p) - 1 > 0$ . Zbog toga imamo da je  $\mathbb{E}[\Delta^{2m+2}] \geq \mathbb{E}[\Delta^{2m}] + K$ , za  $K = 2(ap(1-p) - 1) > 0$  pa indukcijom zaključujemo da je  $\mathbb{E}[\Delta^{2m}] \geq 2Km$ , iz čega zaključujemo da očekivanje od  $\Delta^n$  raste linearno sa  $n$ . Ovaj zaključak možemo protumačiti na način da se u prosjeku neka slučajna iteracija proizvoljne točke različite od ishodišta udaljuje od ishodišta, odnosno da se njena radialna koordinata povećava u odnosu na radialnu koordinatu početne točke.

Ovaj zaključak trebamo proširiti na podskup binarnih nizova vjerojatnosti 1 za koje ova tvrdnja mora vrijediti.

Uočimo,  $2(ap(1-p) - 1) > 0 \implies a > \frac{1}{p(1-p)} \geq 4$ . Također, za zadani niz  $(a_n)_n$  možemo ograničiti  $\Delta^{2m}$  na način:

$$\begin{aligned} \Delta^{2m} &\geq \Delta_r^{f_{a_1} \circ f_{a_0}} + \Delta_r^{f_{a_3} \circ f_{a_2}} + \dots + \Delta_r^{f_{a_{2m}} \circ f_{a_{2m-1}}} \\ &\geq (a-2)k_m - 2(m-k_m) = ak_m - 2m, \end{aligned}$$

gdje s  $k_n$  označujemo koliko su se puta pojavila preslikavanja  $f_0 \circ f_1$  ili  $f_1 \circ f_0$  unutar  $f_{a_1} \circ f_{a_0}, f_{a_3} \circ f_{a_2}, \dots, f_{a_{2n}} \circ f_{a_{2n-1}}$ . Također, ako promatramo  $k_n$ , iz njegove definicije zaključujemo da je slučajna varijabla, točnije zbroj  $n$  nezavisnih Bernoullijevih slučajnih varijabli s parametrom  $2pq$ , zato što je  $2pq$  upravo vjerojatnost da se pojavi  $f_0 \circ f_1$  ili  $f_1 \circ f_0$ .

Stoga imamo, ako vrijedi  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} = l > \frac{2}{a}$ , tada je asimptotski rast slučajne varijable  $\Delta^{2n}$  ograničen odozdo sa  $(l - \frac{2}{a})n$  (što ide u  $+\infty$  za  $n \rightarrow \infty$ ), što znači da  $\Delta^{2n} \rightarrow \infty$ , dakle svaka točka različita od ishodišta udaljuje se od ishodišta iterativnom primjenom preslikavanja  $f_{a_n}, n \geq 1$ .

Preostaje dokazati da podskup nizova  $(a_n)_n$ , sa svojstvom  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} > \frac{2}{a}$ , ima vjerovatnost 1. To slijedi iz jakog zakona velikih brojeva. Štoviše, ako uzmemo niz nezavisnih slučajnih varijabli s distribucijom  $X_n \sim \mathcal{B}(2pq)$  iz jakog zakona velikih brojeva slijedi :

$$\begin{aligned} l = \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{n} &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n X_j}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n X_j}{n} \stackrel{g.s.}{=} 2pq = 2p(1-p). \end{aligned}$$

Za te nizove imamo

$$l - \frac{2}{a} = 2p(1-p) - \frac{2}{a} = \frac{2(ap(1-p) - 1)}{a} > 0,$$

što smo željeli i pokazati. □

# Bibliografija

- [1] Cima, Anna, Armengol Gasull i Víctor Mañosa: *Parrondo's dynamic paradox for the stability of non-hyperbolic fixed points*. arXiv preprint arXiv:1701.05816, 2017.
- [2] Costa, Andre, Mark Fackrell i Peter G Taylor: *Two issues surrounding Parrondo's paradox*. U *Advances in Dynamic Games*, stranice 599–609. Springer, 2005.
- [3] Dannan, Fozi M, Saber N Elaydi i Vadim Ponomarenko: *Stability of hyperbolic and nonhyperbolic fixed points of one-dimensional maps*. *Journal of Difference Equations and Applications*, 9(5):449–457, 2003.
- [4] Gasull, Armengol, Luis Hernández-Corbato i FR Ruiz del Portal: *Parrondo's paradox for homoeomorphisms*. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics*, stranice 1–9, 2020.
- [5] Harmer, Gregory P i Derek Abbott: *A review of Parrondo's paradox*. *Fluctuation and Noise Letters*, 2(02):R71–R107, 2002.
- [6] Key, Eric S: *Recurrence and transience criteria for random walk in a random environment*. *The Annals of Probability*, 12(2):529–560, 1984.
- [7] Key, Eric S, MM Kłosek i Derek Abbott: *On Parrondo's paradox: How to construct unfair games by composing fair games*. *The ANZIAM Journal*, 47(4):495–511, 2006.
- [8] Parrondo, J.M.R.: *How to cheat a bad mathematician*. <http://seneca.fis.ucm.es/parr/GAMES/cheat.pdf>, posljednji pristup 13. veljače 2022.
- [9] Sarapa, N.: *Teorija vjerojatnosti*. Školska Knjiga, 2002.

- [10] Shu, Jian Jun i Qi Wen Wang: *Beyond Parrondo's paradox*. Scientific reports, 4(1):1–9, 2014.
- [11] Solomon, Fred: *Random walks in a random environment*. The annals of probability, 3(1):1–31, 1975.
- [12] Vondraček, Zoran: *Markovljevi lanci predavanja*. Prirodoslovno-matematički fakultet, 2008. <https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/ml12-predavanja.html>, posljednji pristup 15. veljače 2022.
- [13] Štimac, Sonja: *Diskretni dinamički sustavi predavanja*. Prirodoslovno-matematički fakultet. <https://web.math.pmf.unizg.hr/~sonja/DDS.pdf>, posljednji pristup 15. veljače 2022.

# Sažetak

U ovom radu opisan je Parrondov paradoks i njegova dinamička inačica. U prvom dijelu konstruiramo Parrondove igre. Ponašanje kapitala uzastopnim igranjem igara modelirano je pomoću slučajnih šetnji na slučajnom okruženju. Poštenost igre definirana je pomoću graničnog ponašanja kapitala. Pokazano je da je moguće konstruirati dvije gubitničke igre za koje je mješovita igra tih igara dobitna. Dodatno, pokazujemo uz koje je uvjete moguće postići Parrondov paradoks.

U drugom dijelu definiran je Parrondov paradoks u kontekstu dinamičkih sustava, na način da na privlačne odnosno odbojne fiksne točke gledamo kao na gubitne odnosno dobitne igre. Pokazano je da u slučaju kada je  $C$  klasa funkcija sa zajedničkom hiperboličnom fiksnom točkom nije moguće postići Parrondov paradoks. U glavnom dijelu rada pokazano je da se dinamički Parrondov paradoks može ostvariti kada je  $C$  klasa homeomorfnih preslikavanja na  $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  za  $k \geq 2$ , dok za  $k = 1$  nije moguće ostvariti paradoks.

# Summary

This paper describes Parrondo's paradox and its dynamic version. In the first part of the paper, we construct Parrondo's games. The behaviour of capital is modelled by successively playing games using random walks in a random environment. We define the fairness of the game by the marginal behaviour of capital. We show that it is possible to construct two losing games for which the mixed game is a winning game. In addition, we show under which conditions Parrondo's paradox is achievable.

In the second part of the paper, we define Parrondo's paradox in the context of dynamic systems by looking at attractive or repellent fixed points as losing or winning games. We also show that when there is a class of functions  $C$  with a common hyperbolic fixed point, it is not possible to carry out Parrondo's paradox. In the central part of the paper, we show that the dynamic Parrondo's paradox is realized when  $C$  is the class of homeomorphisms on  $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  for  $k \geq 2$ . On the contrary, paradox does not appear when  $k = 1$ .

# Životopis

Rođen sam 24.5.1997. u Puli. Još kao dijete pokazivao sam velik interes za matematiku i prirodne znanosti te sam tijekom školovanja sudjelovao na raznim županijskim i državnim natjecanjima, na kojima sam među ostalim osvojio prvo mjesto na Regionalnom natjecanju iz matematike u petom razredu osnovne škole, školske godine 2007. /2008. Nakon završene gimnazije „Zvane Črnje“ u Rovinju, godine 2015. upisujem preddiplomski sveučilišni studij Matematike; smjer: nastavnički na Prirodoslovno–matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, kojeg završavam 2018. godine. Godine 2019. upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematička statistika na istom fakultetu. Ovim diplomskim radom bi taj studij trebao uspješno završiti. Tijekom školovanja i studiranja aktivno sam se bavio sportovima i to vaterpolom i plivanjem. Za vrijeme studija kao član vaterpolo ekipe PMF-a sudjelovao sam na sveučilišnim natjecanjima. Tečno govorim engleski jezik i služim se talijanskim jezikom.