Proširena Lagrangeova metoda

Rudec, Krešimir

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Krešimir Rudec

PROŠIRENA LAGRANGEOVA METODA

Diplomski rad

Voditelj rada:
dr. sc. Marko Vrdoljak

Zagreb, 2022

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem mentoru prof. dr. sc. Marku Vrdoljaku na velikoj podršci i pomoći pri izradi ovog diplomskog rada.
Posebno hvala mojoj djevojci, majki i obitelji na pomoći pri studiranju.

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu govorimo o proširenoj Lagrangeovoj funkciji, zaslužnoj za vrlo popularnu tehniku rješavanja zadaće uvjetne optimizacije. U sljedećim poglavljima uvodimo pojam kaznene funkcije. Dokazujemo osnovne teoreme o svođenju zadaće uvjetne minimizacije metodom kaznene funkcije na zadaću bezuvjetne minimizacije. Promatramo Lagrangeovo pravilo množitelja, te ustanovljujemo vezu bezuvjetne minimizacije kaznene funkcije s klasićnim rezultatom o Lagrangeovim multiplikatorima. Prikazat ćemo i praktičnu primjenu proširene Lagrangeove funkcije u numeričkom rješavanju zadaće uvjetne minimizacije. Rezultati, pojmovi i primjeri preuzeti su iz [1] i [2].

Poglavlje 1

Proširenje i Lagrangeovi množitelji

1.1 Uvod

Povremeno se susrećemo sa sljedećim izvodom Lagrangeovog pravila množitelja. Da bismo minimizirali funkciju $f(x)$ uz ograničenje $g(x) = 0$, minimizirajmo funkciju F oblika $F(x) = f(x) + \lambda g(x)$ bez ograničenja. To daje Lagrangeovo pravilo množitelja $\Delta F(x) = \Delta f(x) + \lambda \Delta g(x) = 0$ u točki minimuma uz izvorni uvjet $g(x) = 0$. Iako ovaj postupak može biti dobar način za pamćenje pravila množitelja prvog reda, on je nezadovoljavajući jer je klasa problema na koje se može primijeniti ograničena. Na primjer, u xy -ravnini, ne može se primijeniti na problem minimizacije funkcije $f(x, y) = x^2 - 3y - y^2$ uz uvjet $g(x, y) = y = 0$. Ishodište je rješenje ovog problema. Odgovarajući Lagrangian, $F(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^2 + (\lambda - 3)y - y^2$, ne poprima minimum niti za jedan λ. Međutim, $\Delta F = 0$ u ishodištu kada je λ ispravan Lagrangeov množitelj, $\lambda = 3$. Postupak ne uspjeva jer ne postoji odredba za konveksiranje funkcije F. Općenito, konveksnost je određena članovima drugog reda. Uvjeti drugog reda mogu se mijenjati korištenjem proširene funkcije $H = f + \lambda g + (\sigma/2)g^2$. U gore navedenom primjeru,

$$H(x, y) = x^2 + (\lambda - 3)y + \left(\frac{\sigma - 2}{2}\right)y^2.$$

Gradijent funkcije H se poništava u ishodištu, a za $\sigma = 2$ funkcija je konveksna. Izbor $\sigma > 2$ konveksira proširenu funkciju H.

Prethodne napomene sugeriraju da, ako je x_0 točka lokalnog minimuma funkcije f uz uvjet $g(x) = 0$, tada postoji konstanta λ i σ takvi da x_0 daje bezuvjetni lokalni minimum funkciji $H = f + \lambda g + (\sigma/2)g^2$. Ako je to slučaj, za problem uvjetne minimizacije kažemo da se može proširiti. Osim u iznimnim slučajevima, ograničeni minimalni problem se može povećati. Posebno, to vrijedi u slučaju da su ispunjeni dovoljni uvjeti za minimum funkcije f uz uvjet $g(x) = 0$.

Ovo će poglavlje uglavnom biti posvećeno proučavanju mogućnosti proširenja. Pokazat će se da je Lagrangeovo pravilo množitelja posljedica proširenosti, a da je proširenje posljedica ojačanog pravila Lagrangeovog množitelja. Kao i prije, prvo ćemo razmotriti slučaj uvjeta tipa jednakosti, a zatim proširiti naše rezultate na slučaj uvjeta tipa nejednakosti.

Problem može biti običan, a da se ne može proširiti, a problem može biti proširen, a da nije običan. Stoga su mogućnost proširenja i običnosti alternativni, ali ne i ekvivalentni uvjeti za postojanje odgovarajućih Lagrangeovih množitelja.

U proučavanju mogućnosti povećanja prikladno je koristiti teoriju kaznenih funkcija. Kaznena funkcija može se koristiti u računskom postupku za pronalaženje rješenja ograničenog problema minimuma. Također se može koristiti za dobivanje pravila proširenog množitelja koji je neovisan o pretpostavkama je li problem proširen i običan.

1.2 Kaznene funkcije

Obično se rješenje problema uvjetne minimizacije može dobiti kao limes rješenja prikladno odabranih problema bezuvjetne minimizacije. To se može učiniti na više načina. Postupak koji čemo koristiti može se ukratko opisati na sljedeći način. Prvo konstruiramo nenegativnu funkciju $G(x)$ tako da su točke koje zadovoljavaju naša ograničenja dane rješenjima $G(x) = 0$. Zatim dodamo *kazneni član* $\sigma G(x)$ funkciji $F(x)$ i dobivamo točku minimuma $x(\sigma)$ *proširene funkcije* $H(x, \sigma) = F(x) + \sigma G(x)$. U normalnim okolnostima granica $x_0 = \lim_{\sigma\to\infty} x(\sigma)$ postoji i točka je minimuma od F uz dana ograničenja. U većini slučajeva uvjetujemo točke x tako da se nalaze unutar zatvorenog skupa N. Ovaj postupak ilustriramo sljedećim jednostavnim primjerimja.

Primjer 1.2.1. *Točka* (x_0, y_0) *daje minimum funkciji* $F(x, y) = x^2 - y^2 - 4y$ *uz uvjet* $g(x, y) = y = 0$. *Ako stavimo*

$$G(x, y) = \frac{1}{2}[g(x, y)]^2 = \frac{1}{2}y^2$$

i na F *dodamo kazneni parametar* σG, *dobivamo proširenu funkciju*

$$H(x, y; \sigma) = F(x, y) + \sigma G(x, y) = x^2 - 4y + \left(\frac{\sigma - 2}{2}\right)y^2.$$

Za svaki $\sigma > 2$ *točka* $[x(\sigma), y(\sigma)] = [0, 4/(\sigma - 2)]$ *je minimum od* H. *Kako* σ *postaje beskonačna, točka minimuma* $[0, 4/(\sigma - 2)]$ *od* H *konvergira prema točki minimuma* $(0, 0)$ *od* F *gdje je* $g = 0$.

Zapazite da, ako zamijenimo F *s* $F(x, y) = x[^2 - y^2 - 4y - y^3/3$, *tada* $H = F + \sigma G$ *ne uspijeva imati minimum u* xy*-ravnini. Međutim, ako ograničimo točke* (x, y) *da leže u* *zatvorenoj kugli N polumjera r oko ishodišta, točka minimuma* $[x(\sigma), y(\sigma)]$ *od* $H(x, y; \sigma)$ *na N će konvergirati prema* $(x_0, y_0) = (0, 0)$ *kako* σ *postaje beskonačan. Ako je* $\sigma > 2 + 8/r + 2r/3$*, imamo*

$$x(\sigma) = 0, \qquad y(\sigma) = \frac{8}{\sigma - 2 + \sqrt{\sigma^2 - 4\sigma - 12}}$$

kao točka minimuma od H u N. Očito je $\lim_{\sigma\to\infty} y(\sigma) = 0$.

Primjer 1.2.2. *Točka* $(0, 0)$ *minimiriza funkciju* $F(x, y) = x^2 - y - y^3$ *uz uvjet* $g(x, y) = y \leq 0$. *Neka je*

$$g^+(x, y) = \max[0, g(x, y)] = \max(0, y), \quad G(x, y) = \frac{1}{2}[g^+(x, y)]^2.$$

Tada je ograničenje $G(x, y) = 0$ *ekvivalentno ograničenju* $g(x, y) \leq 0$. *Formiramo proširenu funkciju*

$$H(x, y; \sigma) = F(x, y) + \sigma G(x, y) = x^2 - y - y^3 + \frac{\sigma}{2}[\max(0, y)]^2.$$

Ova funkcija ne uspijeva imati minimum u xy-ravnini. Međutim, na zatvorenoj kugli N polumjera r oko ishodišta, H ima točku minimuma $[x(\sigma), y(\sigma)]$. *Očito je* $x(\sigma) = 0$. *Ako je* $\sigma > 3r + 1/r$, *točka* $[0, y(\sigma)]$ *će biti u unutrašnjosti od N i*

$$y(\sigma) = \frac{2}{\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 12}}.$$

Opet točka $[x(\sigma), y(\sigma)]$ *konvergira točki minimuma* $(0, 0)$ *od F uz uvjet* $g \leq 0$.

Pomalo degeneriran problem daje

Primjer 1.2.3. *Ishodište* $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ *minimizira funkciju* $F(x, y, z) = x + yz^2$ *uz ograničenja*

$$g(x, y, z) = x + y^2 \leq 0, \qquad h(x, y, z) = -x \leq 0.$$

Ova ograničenja nam na neprirodan način govore da je $x = 0$, $y = 0$. *U tom smislu naš problem nije regularan. Postupajući kao u Primjeru 1.2.2, konstruiramo pomoćnu funkciju*

$$G(x, y, z) = \frac{1}{2}\left\{\left[\max(0, x + y^2)\right]^2 + [\max(0, -x)]^2\right\}$$

tako da se gornji uvjeti ekvivalentno zapisuju kao $G = 0$. *Za velike vrijednosti* σ *točka minimuma* $[x(\sigma), y(\sigma), z(\sigma)]$ *od* $H = F + \sigma G$ *leži u skupu točaka za koje vrijedi* $x < 0$, $y < 0$, *te* $\sigma(x + y^2) = \upsilon > 0$. *Koristeći ovu činjenicu, uočimo da za*

$$x(\sigma) = -\frac{1 + \upsilon}{\sigma}, \quad y(\sigma) = -\frac{1}{\upsilon}, \quad z(\sigma) = 0,$$

υ rješava jednadžbu $2\upsilon^3 - \upsilon^2 = \sigma$. Ako je σ vrlo velik, $(\sigma/2)^{1/3}$ je izvrsna procjena za υ. Stoga

$$\lim_{\sigma\to\infty} \upsilon(\sigma) = +\infty, \quad \lim_{\sigma\to\infty} x(\sigma) = 0, \quad \lim_{\sigma\to\infty} y(\sigma) = 0.$$

Kako σ ide u beskonačnost, točka minimuma H konvergira prema točki minimuma od F s uz uvjete $g \leq 0$, $h \leq 0$.

Gore navedeni rezultati dovode nas do proučavanja problema miniimizacije funkcije $F(x)$ na kompaktnom skupu N uz uvjet oblika $G(x) = 0$. Pretpostavlja se da su funkcije F i G neprekidne na N. Pretpostavljamo da je $G(x) \geq 0$ na N i da skup S točaka x u N, gdje je $G(x) = 0$, nije prazan. Prema Weierstrasseovom teoremu za svako gomilište niza, ove pretpostavke impliciraju da postoji točka x_0 u N koja minimizira F na skupu S. Pretpostavljamo da je x_0 jedinstven.

Sljedeća lema će biti korisna.

Lema 1.2.4. *Neka je $\{\sigma_k\}$ niz brojeva i $\{x_k\}$ niz točaka u N tako da je*

$$\lim_k \sigma_k = 0, \quad \limsup_k \left[F(x_q) + \sigma_k G(x_k)\right] \leq F(x_0). \tag{1.1}$$

Tada,

$$\lim_k x_k = x_0.$$

Dokaz. Ukoliko je $G(x) \geq 0$, relacija (1.1) nam govori da je

$$\limsup_k F(x_k) \leq F(x_0), \qquad \lim_k G(x_k) = 0.$$

Iz toga slijedi da za svako gomilište niza $\{x_k\}$ mora vrijediti $F(\overline{x}) \leq F(x_0)$, $G(\overline{x}) = 0$. Štoviše, nalazi se u N zbog zatvorenosti skupa N. Budući da je x_0 jedinstvena točka minimuma od F na N uz uvjet $G = 0$, imamo $\overline{x} = x_0$. Posljedično, svaki konvergentni podniz od $\{x_k\}$ konvergira u x_0. Budući da je $\{x_k\}$ ograničen, to je moguće samo ako je $x_0 = \lim_k x_k$, kao što je i trebalo dokazati. □

Sljedeći rezultat je jednostavan.

Teorem 1.2.5. *Neka je $x(\sigma)$ točka minimuma proširene funkcije*

$$H(x, \sigma) = F(x) + \sigma G(x) \tag{1.2}$$

na N. Tada je

$$\lim_{\sigma\to\infty} x(\sigma) = x_0, \qquad \lim_{\sigma\to\infty} \sigma G\left[x(\sigma)\right] = 0, \tag{1.3}$$

gdje je x_0 točka minimuma of F na S. Ako je $0 \leq \sigma < \overline{\sigma}$, imamo

$$
\begin{gathered}
H\left[x(\sigma), \sigma\right] \leq H\left[x(\overline{\sigma}, \overline{\sigma}\right] \leq F(x_0), \\
F\left[x(\sigma)\right] \leq F\left[x(\overline{\sigma}\right] \leq F(x_0), \qquad G\left[x(\sigma)\right] \geq G\left[x(\overline{\sigma})\right] \geq 0.
\end{gathered} \tag{1.4}
$$

Dokaz. Budući da $G(x_0) = 0$ i $x(\sigma)$ minimizira $H(x, \sigma)$, imamo nejednakosti

$$
\begin{aligned}
H\left[x(\sigma), \sigma\right] = F\left[x(\sigma)\right] + \sigma G\left[x(\sigma)\right] \leq H(x_0, \sigma) = F(x_0), \\
F\left[x(\sigma)\right] \leq F(x_0).
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

Pretpostavimo da je $\sigma < \overline{\sigma}$. Privremeno postavljajući $\overline{x} = x(\overline{\sigma})$ i $x = x(\sigma)$, imamo nejednakosti

$$
\begin{aligned}
0 \leq H(\overline{x}, \sigma) - H(x, \sigma) = F(\overline{x}) - F(x) + \sigma\left[G(\overline{x}) - G(x)\right], \\
0 \leq H(x, \overline{\sigma}) - H(\overline{x}, \overline{\sigma}) = F(x) - F(\overline{x}) + \sigma\left[G(x) - G(\overline{x})\right],
\end{aligned}
$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti dobijemo da je

$$
0 \leq (\overline{\sigma} - \sigma)\left[G(x) - G(\overline{x})\right]
$$

Pa stoga i $G(x) \geq G(\overline{x})$. Koristeći ovu činjenicu u prvoj od ovih nejednakosti, vidimo da je $F(x) \leq F(\overline{x})$. Stoga (1.4) vrijedi kada je $\sigma < \overline{\sigma}$.

Razmotrimo niz $\{\sigma_q\}$ koji teži k $+\infty$ i postavimo $x_q = x(\sigma_q)$. Na temelju (1.5) relacija (1.1) vrijedi za nizove $\{\sigma_q\}$ i $\{x_q\}$. Prema Lemi 1.2.4 imamo

$$
\lim_{q \to \infty} x_q = \lim_{q \to \infty} x(\sigma_q) = x_0.
$$

Iz te činjenice proizlazi da je $\lim_{\sigma} x(\sigma) = x_0$. Time je dovršen dokaz Teorema 1.2.5. □

Korolar 1.2.6. *Ako postoji broj σ_0 takva da je jedan od uvjeta $F\left[x(\sigma_0)\right] = F(x_0)$, $G\left[x(\sigma_0)\right] = 0$ zadovoljen, tada za svaki $\sigma \geq \sigma_0$ točka x_0 minimizira H na N.*

Dokaz. Ako je $F\left[x(\sigma_0)\right] = F(x_0)$, tada je $G\left[x(\sigma_0)\right] = 0$ prema (1.5). Ako je $G\left[x(\sigma_0)\right] = 0$, tada je $G\left[x(\sigma)\right] = 0$ prema (1.4). Ukoliko je $F\left[x(\sigma)\right] \leq F(x_0)$ i $G\left[x(\sigma)\right] = 0$ $(\sigma \geq \sigma_0)$, imamo $x(\sigma) = x_0$ $(\sigma \geq \sigma_0)$ na temelju jedinstvenosti x_0 kao točke minimuma F na N uz uvjet $G = 0$. □

Korolar 1.2.7. *Ako x_0 daje lokalni minimum za F, tada postoji broj σ_0 takav da x_0 daje strogi minimum za $H(x, \sigma)$ kad god je $\sigma \geq \sigma_0$.*

Dokaz. Neka je N_0 skup oko x_0 takav da relacija $F(x) \geq F(x_0)$ vrijedi na N_0. Budući da je $\lim_{\sigma \to \infty} x(\sigma) = x_0$, postoji broj σ_0 takav da je $x(\sigma_0)$ u N_0. Tada imamo $F\left[x(\sigma_0)\right] \geq F(x_0)$, kao i $F\left[x(\sigma_0)\right] \leq F(x_0)$. Iz čega slijedi $F\left[x(\sigma_0)\right] = F(x_0)$. S obzirom na Korolar 1.2.6, imamo $x(\sigma) = x_0$ ako je $\sigma \geq \sigma_0$. Iz toga slijedi da x_0 daje strogi minimum za $H(x, \sigma)$ kad god je $\sigma \geq \sigma_0$, što je trebalo i dokazati. □

Kao neposrednu posljedicu Teorema 1.2.5 imamo

Teorem 1.2.8. *Neka su $f, g_1, ..., g_m$ neprekidne funkcije na kompaktnom skupu N. Pretpostavimo da točka x_0 daje strogi minimum za f na N uz uvjet*

$$g_\alpha(x) = 0 \qquad (\alpha = 1, ..., m). \tag{1.6}$$

Tada je $\lim_{\sigma\to\infty} x(\sigma) = x_0$ gdje je $x(\sigma)$ točka minimuma proširene funkcije $H(x,\sigma)$ definirane formulama

$$H(x,\sigma) = f(x) + \sigma G(x), \qquad G(x) = \frac{1}{2}\left[g_1(x)^2 + ... + g_m(x)^2\right]. \tag{1.7}$$

te

$$\begin{aligned} H\left[x(\sigma),\sigma\right] \le H\left[x(\overline{\sigma}),\overline{\sigma}\right] \le f(x_0) \qquad \sigma < \overline{\sigma}, \\ f\left[x(\sigma)\right] \le f\left[x(\overline{\sigma})\right] \le f(x_0), \quad G\left[x(\sigma)\right] \ge G\left[x(\overline{\sigma}\right] \ge 0 \qquad \sigma < \overline{\sigma}. \end{aligned} \tag{1.8}$$

S obzirom na Korolar 1.2.7 i Teorem 1.2.5 imamo sljedeće

Korolar 1.2.9. *Ako uz pretpostavke Teorema 1.2.8 x_0 daje lokalni minimum f tada postoji broj σ_0 takav da x_0 daje strogi minimum na N proširenoj funkciji $H(x,\sigma)$ kad god je $\sigma \ge \sigma_0$.*

Imamo sljedeće proširenje Teorema 1.2.8 koje uključuje proširenu Lagrangeovu funkciju

$$H(x,\mu,\sigma) = f(x) + \sum_{\alpha=1}^{m} \mu_\alpha g_\alpha(x) + \sigma G(x), \qquad G(x) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{m}\left[g_\alpha(x)\right]^2. \tag{1.9}$$

Teorem 1.2.10. *Pretpostavimo da vrijede pretpostavke Teorema 1.2.8. Neka je $x(\mu,\sigma)$ minimum na N funkcije $H(x,\mu,\sigma)$ definirane fomulom (1.9). Ako je M ograničen skup množitelja $\mu = (\mu_1, ..., \mu_m)$, tada je*

$$\lim_{\sigma\to\infty} x(\mu,\sigma) = x_0, \qquad \lim_{\sigma\to\infty} \sigma G\left[x(x(\mu,\sigma)\right] = 0 \tag{1.10}$$

uniformno po $\mu \in M$.

Dokaz. U dokazu izražavamo nejednakost

$$H\left[x(\mu,\sigma),\mu,\sigma\right] \le H(x_0,,\mu,\sigma) = f(x_0)$$

u obliku

$$f\left[x(\mu,\sigma)\right] + \sum_{\alpha=1}^{m} \mu_\alpha g_\alpha\left[x(\mu,\sigma\right] + \sigma G\left[x(\mu,\sigma)\right] \le f(x_0). \tag{1.11}$$

Uzimajući μ iz skupa M, iz ove nejednakosti zaključujemo da je

$$\lim_{\sigma\to\infty} G\left[x(\mu,\sigma)\right] = \lim_{\sigma\to\infty} \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{m}\{g_\alpha\left[x(\mu,\sigma)\right]\}^2 = 0.$$

Stoga

$$\lim_{\sigma\to\infty} g_\alpha\left[x(\mu,\sigma)\right] = 0 \qquad (\alpha = 1,...,m). \tag{1.12}$$

Razmotrimo sada okolinu N_0 od x_0. Postoji pozitivan broj σ_0 takav da ako je $\sigma \geq \sigma_0$ onda je $x(\mu,\sigma)$ u N_0 za sve μ u M. Inače postoji za svaki cijeli broj q broj $\sigma_q \geq q$ i množitelj μ_q u M takav da $x_q = x(\mu_q,\sigma_q)$ nije u N_0. Prema (1.12) imamo $\lim_{q\to\infty} g_\alpha(x_q) = 0$, i prema (1.11) imamo

$$\limsup_{q\to\infty}\left[f(x_q) + \sigma_q G(x_q)\right] \leq f(x_0).$$

S obzirom na Lemu 1.2.4 imamo $\lim_{q\to\infty} x_q = x_0$, suprotno našem izboru x_q kao točke izvan N_0. Iz ove kontradikcije zaključujemo da je $x(\mu,\sigma)$ u N_0 kad god je μ u M i $\sigma \geq \sigma_0$. Budući da je N_0 proizvoljan, imamo $\lim_{\sigma\to\infty} x(\mu,\sigma) = x_0$ jednoliko za svaki μ u M. Kombinirajući ovaj rezultat s (1.11), dobivamo drugu granicu u (1.10). □

Teorem 1.2.5 ima zanimljivu primjenu na kvadratne forme. U tu svrhu podsjetimo da konus ξ definiramo kao skup vektora x sa svojstvom da ako je x u ξ, tada je i ax za sve skalare $a \geq 0$. Uočimo kako je $x = 0$ u ξ.

Teorem 1.2.11. *Neka je ξ zatvoreni konus i neka su $P(x)$ i $Q(x)$ dvije kvadratne forme sa svojstvom da je $P(x) > 0$ za sve $x \neq 0$ u ξ tako da je $Q(x) = 0$. Pretpostavimo da je $Q(x) \geq 0$ na ξ. Tada postoji pozitivna konstanta σ_0 takva da za $\sigma \geq \sigma_0$ je $P(x) + \sigma Q(x)$ pozitivno za sve $x \neq 0$ u ξ.*

Dokaz. Neka je N skup svih vektora u ξ kojima je $|x| \leq 1$. Jasno je da je N kompaktan. Neka je $x(\sigma)$ točka minimuma od $H(x,\sigma) = P(x) + \sigma Q(x)$ na N. Tada je $H\left[x(\sigma),\sigma\right] \leq H(0,\sigma) = 0$. Ako je $x(\sigma) \neq 0$ i $b = |x(\sigma)|$, tada je $x(\sigma)/b$ je jedinični vektor u N, i

$$H\left[x(\sigma),\sigma\right] \leq H\left[\frac{x(\sigma)}{b},\sigma\right] = \frac{H\left[x(\sigma),\sigma\right]}{b^2} \leq 0, \quad b \leq 1.$$

Iz toga slijedi da ako $H\left[x(\sigma),\sigma\right] < 0$, imamo $b = 1$. Ako je $H\left[x(\sigma),\sigma\right] = 0$ i $b < 1$, možemo $x(\sigma)$ zamijeniti sa $x(\sigma)/b$. Dakle, ili je $x(\sigma)$ jedinični vektor, ili je $x(\sigma) = 0$. Prema Teoremu 1.2.5 s $F(x) = P(x)$ i $G(x) = Q(x)$ imamo $\lim_{\sigma\to\infty} x(\sigma) = 0$. Budući da je $|x(\sigma)| = 1$ osim ako je $x(\sigma) = 0$, a to je moguće samo ako je $x(\sigma) = 0$ za velike vrijednosti

σ. Prema tome postoji konstantma σ_0 takva da je $x(\sigma) = 0$ ($\sigma \geq \sigma_0$), a time i takva da je $H(x, \sigma) > 0$ za sve $x \neq 0$ u N. Za bilo koji $x \neq 0$ u ξ točka $x/|x|$ je u N i

$$H(x, \sigma) = |x|^2 H\left(\frac{x}{|x|}, \sigma\right) > 0.$$

Time je dokazan Teorem 1.2.11. □

1.3 Uklanjanje ograničenja

Nastavimo proučavanje problema minimizacije funkcije $F(x)$ uz uvjet $G(x) = 0$, gdje je $G(x)$ nenegativna funkcija. Pretpostavimo da je x_0 rješenje problema. Tada x_0 također minimizira proširenu funkciju $H(x) = F(x) + \sigma G(x)$ uz uvjet $G(x) = 0$. U povoljnim slučajevima konstanta σ može se odabrati tako da funkcija $H(x)$ ima barem lokalni bezuvjetni minimum u x_0. U ovom slučaju kažemo da se ograničenje $G(x) = 0$ može ukloniti dodavanjem $\sigma G(x)$ na $F(x)$. Ovo je jednostavna vrsta proširenja polazne funkcije cilja. Svrha ovog odjeljka je pronaći kriterije za F i G koji će nam omogućiti da na ovaj način uklonimo ograničenje $G(x) = 0$.

Primjer 1.3.1. *Rezultat Teorema 1.2.11 jednostavan je primjer ove vrste proširenja. Kao daljnji primjer u* $xy-$*ravnini razmotrimo funkciju* $F(x, y) = x^2 + xy + y^3$*, koja ima minimum u ishodištu uz uvjet* $G(x, y) = y^2 = 0$*. U tom slučaju proširena funkcija* $H(x, y) = F(x, y) + G(x, y) = x^2 + xy + y^2 + y^3$ *ima lokalni minimum na ishodištu. Međutim, ako odaberemo* $G(x, y) = y^4$*, ishodište i dalje minimizira* F *sa* $G = 0$*, ali ne pruža lokalni minimum za* $H = F + \sigma G = x^2 + xy + y^3 + \sigma y^4$*, bez obzira na to kako je* σ *odabrana.*

U sljedečem teoremu pretpostavljamo da je $H(x)$ dva puta diferencijabilan za x_0.

Teorem 1.3.2. *Ako* x_0 *daje lokalni minimum za* $H(x)$*, tada*

$$\nabla H(x_0) = 0, \qquad H''(x_0, h) \geq 0 \qquad \textit{za svaki } h \neq 0. \tag{1.13}$$

obrnuto, ako

$$\nabla H(x_0) = 0, \qquad H''(x_0, h) > 0 \qquad \textit{za svaki } h \neq 0. \tag{1.14}$$

tada postoji okolina N_0 *oko* x_0 *i konstanta* $\tau > 0$ *takva da nejednakost*

$$H(x) \geq H(x_0) + \tau |x - x_0|^2 \tag{1.15}$$

vrijedi za sve x *u* N_0*.*

Ovaj teorem je utvrđen pod pretpostavkama da je $H(x)$ klase C^2 u okolini x_0. Međutim, u dokazu se koristi činjenica da je $H(x)$ dva puta diferencijabilna u x_0 u smislu da Taylorova formula

$$H(x_0 + h) = H(x_0) + H'(x_0, h) + \frac{1}{2}H''(x_0, h) + R(x_0, h)$$

vrijedi na N_0 sa

$$\lim_{h \to 0} \frac{R(x_0, h)}{|h|^2} = 0.$$

Vraćajući se na problem minimizacije F uz uvjet $G(x) = 0$, pretpostavljamo da su funkcije F i G dvaput diferencijabilne u točki x_0 u kojoj je $G(x_0) = 0$. Uz pretpostavku $G(x) \geq 0$, točka x_0 minimizira $G(x)$. Posljedično, prema Teoremu 1.3.2.

$$\nabla G(x_0) = 0, \qquad G''(x_0, h) \geq 0 \qquad \text{za svaki } h \neq 0. \tag{1.16}$$

Općenito, postoji vektor $h \neq 0$ takav da je $G''(x_0, h) = 0$, ali ne inzistiramo da je to slučaj.

Pretpostavimo da postoji konstanta σ takva da x_0 daje lokalni minimum funkciji H oblika

$$H(x) = F(x) + \sigma G(x).$$

Opet po Teoremu 1.3.2 imamo

$$\nabla H(x_0) = \nabla F(x_0) + \sigma \nabla G(x_0) = \nabla F(x_0) = 0,$$

$$H''(x_0, h) = F''(x_0, h) + \sigma G''(x_0, h) \geq 0 \qquad \text{za svaki } h \neq 0.$$

Posljednji uvjet implicira da je $F''(x_0, h) \geq 0$ kad god je $G''(x_0, h) = 0$. Time je dokazan sljedeći rezultat.

Teorem 1.3.3. *Pretpostavimo da postoji konstanta σ takva da x_0 daje lokalni minimum za*

$$H(x) = F(x) + \sigma G(x).$$

Tada x_0 daje lokalni minimum uz uvjet $G(x) = 0$. Štoviše

$$\nabla F(x_0) = 0, \qquad F''(x_0, h) \geq 0 \qquad \textit{kad god vrijedi } h \neq 0 \textit{ i } G''(x_0, h) = 0. \tag{1.17}$$

Za obrat ovog rezultata imamo

Teorem 1.3.4. *Pretpostavimo da je*

$$\nabla F(x_0) = 0, \qquad F''(x_0, h) \geq 0 \qquad \textit{kad god vrijedi } \; h \neq 0 \textit{ i } G''(x_0, h) = 0. \tag{1.18}$$

Tada postoje pozitivne konstante σ_0, τ i okolina N_0 od x_0 takve da, za $\sigma \geq \sigma_0$ i funkciju

$$H(x) = F(x) + \sigma G(x)$$

vrijedi nejedakost

$$H(x) \geq H(x_0) + \tau|x - x_0|^2 = F(x_0) + \tau|x - x_0|^2 \tag{1.19}$$

za sve x u N_0. Štoviše, nejednakost

$$F(x) \geq F(x_0) + \tau|x - x_0|^2 \tag{1.20}$$

vrijedi za sve x u N_0 za koje je $G(x) = 0$.

Dokaz. Da bismo dokazali ovaj rezultat, uočimo da prema (1.18) kvadratne forme $P(h) = F''(x_0, h)$ i $Q(h) = G''(x_0, h)$ zadovoljavaju pretpostavke Teorema 1.2.11. Stoga postoji konstanta σ_0 takva da

$$F''(x_0, h) + \sigma_0 G''(x_0, h) > 0 \qquad \text{za svaki } h \neq 0.$$

Posljedično funkcija $H(x) = F(x) + \sigma_0 G(x)$ ima svojstvo

$$\nabla H(x_0) = \nabla F(x_0) + \sigma_0 \nabla G(x_0) = 0,$$

$$H''(x_0, h) = F''(x_0, h) + \sigma_0 G''(x_0, h) > 0 \qquad (h \neq 0).$$

Iz Teorema 1.3.2 slijedi da postoje pozitivna konstanta τ i okolina N_0 od x_0 takve da (1.19) vrijedi za sve x u N_0. Budući da je $G(x) \geq 0$, ova nejednakost vrijedi i ako σ_0 zamijenimo bilo kojim većim brojem σ. Nejednakost (1.19) se svodi na (1.20) kada je $G(x) = 0$. □

Upravo dobiveni rezultat je lokalni rezultat. Ako x_0 daje strogi minimum za F uz uvjet $G = 0$ na kompaktnom skupu N, može se dobiti globalni rezultat sljedeće prirode. Pretpostavljamo, naravno, da su F i G neoprekidne na N i da su dvaput diferencijabilne u x_0.

Teorem 1.3.5. *Pretpostavimo da x_0 daje strogi minimum za F na kompaktnom skupu N uz uvjet $G(x) = 0$. Pretpostavimo dalje da je*

$$\nabla F(x_0) = 0, \qquad F''(x_0, h) > 0 \qquad \text{kada je } h \neq 0 \text{ i } G''(h_0, h) = 0.$$

Tada postoje pozitivne konstante σ_0 i τ takve da nednakost

$$H(x) \geq H(x_0) + \tau|x - x_0|^2 = F(x_0) + \tau|x - x_0|^2 \tag{1.21}$$

vrijedi na N, gdje je $H = F + \sigma G$ i $\sigma \geq \sigma_0$. Posebno,

$$F(x) \geq F(x_0) + \tau|x - x_0|^2 \tag{1.22}$$

za svaki x u N za koji vrijedi $G(x) = 0$.

Dokaz. Dovoljno je dokazati tvrdnju za $\sigma = \sigma_0$. Prema Teoremu 1.3.4 postoje pozitivne konstante σ_0 i τ i okolina N_0 od x takve da nejednakost (1.21) vrijedi na N_0 uz $H = F + \sigma_0 G$. Budući da x_0 daje minimum za F na N gdje je $G = 0$, postoji konstanta τ_0 takva da

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{|x - x_0|^2} \geq \tau_0$$

za svaki x u $N - N_0$ gdje vrijedi $G(x) = 0$. Postavljajući $\tau_1 = \frac{1}{2}\min(\tau, \tau_0)$, vidimo da točka x_0 daje lokalni minimum funkciji

$$\hat{F}(x) = H(x) - \tau_1|x - x_0|^2$$

i strogi minimum za F na N gdje vrijedi $G = 0$. Iz Korolara 1.2.7 slijedi da postoji konstanta σ_1 takva da x_0 daje strogi minimum na N za

$$\hat{F}(x) + \sigma_1 G(x) = F(x) + (\sigma_0 + \sigma_1)G(x) - \tau_1|x - x_0|^2.$$

Stoga (1.21) vrijedi s τ zamijenjenim s τ_1 i $\sigma \geq \sigma_0 + \sigma_1$. Nazovimo $\sigma_0 + \sigma_1$ novim σ_0 i τ_1 novim τ, dobivamo rezultat naveden u Teoremu 1.3.5. □

1.4 Proširivanje i pravilo Lagrangeovog množitelja

Sada smo u poziciji da damo alternativu i izvod Lagrangeovog pravila množitelja. U tu svrhu razmatramo problem minimizacije funkcije $f(x)$ uz uvjet

$$g_\alpha(x) = 0 \qquad (\alpha = 1, ..., m). \tag{1.23}$$

Pretpostavljamo da su funkcije $f, g_1, ..., g_m$ klase C^2 u okolini točke x_0 koja zadovoljava ograničanje. Tražimo uvjete pod kojima postoje množitelji $\lambda_1, ..., \lambda_m$ i konstanta σ takvi da x_0 daje bezuvjetni lokalni minimum proširenoj funkciji oblika

$$H(x) = f(x) + \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha g_\alpha(x) + \frac{\sigma}{2} \sum_{\alpha=1} g_\alpha(x)^2. \tag{1.24}$$

Uočimo da je $H(x) = f(x)$ kada su zadovoljeni uvjeti (1.23). Prema tome, ako x_0 minimizira $H(x)$, tada x_0 minimizira $f(x)$ uz uvjet (1.23). Ako postoji funkcija H ovog tipa, reći ćemo da je naš problem proširiv u x_0. Ako je doista naš problem proširiv u x_0, zamjena f s H može se promatrati kao postupak koji nam dopušta da uklonimo uvjete (1.23).

Ovu pojavu ilustriramo na sljedeći način

Primjer 1.4.1. *Nastavljamo s Primjerom 1.2.1., u kojemu se točka* $(x_0, y_0) = (0, 0)$ *minimizira*

$$f(x, y) = x^2 - y^2 - 4y \qquad \textit{uz uvjet } g(x, y) = y = 0,$$

uočavamo da funkcija

$$H(x, y; \sigma) = f + \lambda g + \frac{\sigma}{2} g^2 = x^2 + \left(\frac{\sigma - 2}{2}\right) y^2 + (\lambda - 4)y$$

ima strogi minimum u $(0, 0)$*, ako je* $\lambda = 4$ *i* $\sigma > 2$*. Isto vrijedi i ako odaberemo npr.* $\lambda = 4 + 2y$ *i* $\sigma \geq 0$*. Zapazimo da je to Lagrangeov množitelj za naš problem. Zamijenimo li* f *sa* $f(x, y) = x^2 - y^2 - 4y - y^3/3$ *i ograničimo li* y *uvjetom* $|y| \leq r$ $(r > 0)$*, funkcija*

$$H(x, y; \lambda, \sigma) = x^2 + \frac{\sigma - 2}{2} y^2 + (\lambda - 4)y - \frac{y^3}{3}$$

imat će strogi minimum na $(0, 0)$ *ako je* $\lambda = 4$ *i* $\sigma \geq 2 + r$ *ili ako je* $\lambda = 4 + 2y$ *i* $\sigma \geq 4$*. Zapazimo da, ako je* $\lambda = 4$ *i* $\sigma = 4 + 2y^2$*, ograničenje na* y *može biti odbačeno. Konačno, ako postavimo* $g(x, y) = y^2$ *i* $f(x, y) = x^2 - y^2 - 4y$*, tada* $H = x^2 - 4y + (\lambda - 1)y^2 + (\sigma/2)y^4$ *ne može imati minimum na* $(0, 0)$ *za bilo koje* λ *i* σ*, iako ishodište minimizira* f *uz uvjet* $g = 0$*. Međutim, ako je* $g = y^2$ *i* $f = x^2 - y^4 - 4y^2$ *odgovarajuća funkcija* H *s* $\lambda = 4$ *i* $\sigma > 2$ *je minimizirana u ishodištu.*

Primjer 1.4.2. *Jasno je da funkcija* $f(x, y) = x^2 + 2x + y^4$ *ima strogi lokalni minimum u točki* $(x_0, y_0) = (0, 0)$ *uz uvjet* $g(x, y) = xy - x = 0$*. Budući da je* $\nabla g \neq 0$ *u* $(0, 0)$*, problem je normalan u* $(0, 0)$*. Međutim, ovaj se problem ne može proširiti, razmotrimo funkciju*

$$H = f + \lambda g + \frac{\sigma}{2} g^2 = x^2 \left[1 + \frac{\sigma}{2}(y - 1)^2\right] + (2 - \lambda)x + \lambda xy + y^4.$$

Ako je $\nabla H = 0$ *u* $(0,0)$*, moramo imati* $\lambda = 2$*. Stoga* H *mora biti oblika* $H = x^2[1+(\sigma/2)(y-1)^2]+2xy+y^4$*. Možemo pretpostaviti da je* $\sigma \geq 0$*. Ako je* $y^2 < 1/(1+2\sigma)$ *i* $x = -[y/(1+2\sigma)]$*, vidimo da*

$$H(x,y) \leq y^2\left(y^2 - \frac{1}{1+2\sigma}\right) < 0 = H(0,0).$$

Iz toga slijedi da naš problem nije proširiv u (0,0). Međutim, može se proširiti ako ograničenje $xy - x = 0$ zamijenimo ekvivalentnim lokalnim ograničenjem $x = 0$.

Sada se vraćamo na opći problem i pretpostavljamo da postoji funkcija $H(x)$ oblika (1.24) koja ima lokalni minimum u točki x_0 koja zadovoljava ograničenja (1.23). Postavljanjem

$$F = f + \lambda_1 g_1 + ... + \lambda_m g_m, \qquad G = \frac{1}{2}(g_1^2 + ... + g_m^2),$$

vidimo da je H tipa

$$H(x) = F(x) + \sigma G(x)$$

o kojem smo raspravili u Poglavlju 1.3. Imamo

$$\nabla G(x_0) = 0, \qquad G''(x_0,h) = \sum_{\alpha=1}^{m} \left[g'_\alpha(x_0,h)\right]^2.$$

Budući da x_0 minimizira $H(x)$, iz Teorema 1.3.3 slijedi da

$$\nabla F(x_0) = 0, \qquad F''(x_0,h) \geq 0 \qquad \text{kada je } G''(x_0,h) = \sum_{\alpha=1}^{m} \left[g'_\alpha(x_0,h)\right]^2 = 0$$

ili ekvivalentno

$$\nabla F(x_0) = 0, \qquad F''(x_0,h) \geq 0 \qquad \text{kada je } g'_\alpha(x_0,h) = 0 \qquad (\alpha = 1,...,m). \tag{1.25}$$

Time se utvrđuje sljedeća posljedica proširenja.

Teorem 1.4.3. *Ako* x_0 *daje lokalni minimum funkciji* H *oblika*

$$H(x) = f(x) + \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha g_\alpha(x) + \frac{\sigma}{2}\sum_{\alpha=1}^{m} \left[g_\alpha(x)\right]^2,$$

onda funkcija F *mora biti Lagrangeova funkcija u smislu da vrijedi pravilo Lagrangeovog množenja (1.25). Osim toga,* x_0 *daje lokalni minimum za* $f(x)$ *uz uvjet* $g_\alpha(x) = 0$ $(\alpha = 1,...,m)$*.*

Lagrangeovo pravilo množitelja (1.25) ustanovljeno je u Teoremu 1.2.8, pod alternativnom hipotezom da su gradijenti $\nabla g_1(x_0), ..., \nabla g_m(x_0)$ linearno neovisni. Kao u 3. odjeljku, jačamo pravilo množenja (1.25) isključivanjem jednakosti u (1.25) kada je $h \neq 0$. Ojačano pravilo množitelja Lagrangea tada poprima oblik

$$\nabla F(x_0) = 0, \qquad \text{gdje je } F = f + \lambda_1 g_1 + ... + \lambda_1 g_1,$$

$$F''(x_0, h) > 0 \qquad \text{ako je } h \neq 0 \ i \ g'_\alpha(x_0, h) = 0 \qquad (\alpha = 1, ..., m). \tag{1.26}$$

Prisjetimo se kako je

$$G''(x_0, h) = \sum_{\alpha=1}^{m} [g'_\alpha(x_0, h)]^2 .$$

Vidimo da je $g'_\alpha(x_0, h) = 0$ $(\alpha = 1, ..., m)$ ako i samo ako je $G''(x_0, h) = 0$. iz toga slijedi da se relacija (1.26) može zapisati u obliku

$$F''(x_0, h) > 0 \qquad \text{ako je } h \neq 0 \ i \ G''(x_0, h) = 0.$$

Prema tome, pretpostavke dane u Teoremu 1.3.4 su zadovoljene. Primjenjujući Teorem 1.3.4 na slučaj koji se ovdje razmatra, dobivamo obratnu tvrdnju Teorema 1.4.3 Ovdje i drugdje podrazumijeva se da x_0 zadovoljava uvjete (1.23).

Teorem 1.4.4. *Ako ojačano pravilo množitelja Lagrangea (1.26) vrijedi na x_0 s množiteljima $\lambda_1, ..., \lambda_m$ tada postoje pozitivni brojevi σ_0 i τ i okolina N_0 od x_0 takvi da nejednakost*

$$H(x) \geq H(x_0) + \tau|x - x_0|^2 = f(x_0) + \tau|x - x_0|^2 \tag{1.27}$$

vrijedi za sve x u N_0, gdje

$$H(x) = f(x) + \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha g_\alpha(x) + \frac{\sigma}{2} \sum_{\alpha=1}^{m} [g_\alpha(x)]^2 . \tag{1.28}$$

Konkretno, ako točka x u N_0 zadovoljava uvjete $g_\alpha(x) = 0$ $(\alpha = 1, ..., m)$, tada je

$$f(x) \geq f(x_0) + \tau|x - x_0|^2. \tag{1.29}$$

Imamo sljedeće proširenje našeg posljednjeg rezultata.

Teorem 1.4.5. *Tvrdnja Teorema 1.4.4 i dalje vrijedi ako funkciju $H(x)$ definiranu s (1.28) zamijenimo općenitijom funkcijom*

$$H(x) = f(x) + \sum_{\alpha=1}^{m} \mu_\alpha(x) g_\alpha(x) + \frac{\sigma}{2} \sum_{\alpha=1}^{m} [g_\alpha(x)]^2 \qquad (\sigma \geq \sigma_0), \tag{1.30}$$

gdje su $\mu_1(x), ..., \mu_m(x)$ funkcije klase C^1 na N za koje vrijedi

$$\mu_\alpha(x_0) = \lambda_\alpha \qquad (\alpha = 1, ..., m). \tag{1.31}$$

U ovom slučaju H ima oblik

$$H(x) = \hat{F}(x) + \sigma G(x),$$

gdje su

$$\hat{F}(x) = F(x) + K(x), \qquad K(x) = \sum_{\alpha=1}^{m} [\mu_\alpha(x) - \lambda_\alpha]\, g_\alpha(x), \qquad F(x) = f(x) + \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\alpha g_\alpha(x).$$

Na temelju sljedeće leme, $K(x)$ je dvaput diferencijabilna u x_0. Štoviše, prema (1.32) vrijedi da je

$$\nabla K(x_0) = 0, \qquad K''(x_0, h) = 2 \sum_{\alpha=1}^{m} \mu'_\alpha(x_0, h) g'_\alpha(x_0, h).$$

Stoga $K''(x_0, h) = 0$, $\hat{F}''(x_0, h) = F''(x_0, h)$, čim je

$$G''(x_0, h) = \sum_{\alpha=1}^{m} [g'_\alpha(x_0, h)]^2 = 0.$$

Iz (1.26) slijedi da je

$$\nabla \hat{F}(x_0) = 0, \qquad \hat{F}''(x_0, h) > 0 \qquad \text{čim je } h \neq 0 \quad i \quad G''(x_0, h) = 0.$$

Primjenom Teorema 1.3.4 na $H = \hat{F} + \sigma G$ dobivamo tvrdnju Teorema 1.4.5.

Činjenica da je gore opisana funkcija $K(x)$ dvaput diferencijabilna u x_0 slijedi iz sljedeće leme.

Lema 1.4.6. *Neka su $u(x)$ i $v(x)$ funkcije za koje vrijedi $u(x_0) = v(x_0) = 0$. Ako su u i v diferencijabilne u x_0, tada je umnožak $u(x)v(x)$ dvaput diferencijabilan u x_0. Štoviše,*

$$w''(x_0, h) = 2u'(x_0, h)v'(x_0, h). \tag{1.32}$$

Dokaz. Očito je $w(x_0) = 0$ i $\nabla w(x_0) = u(x_0)\nabla v(x_0) + \nabla u(x_0)v(x_0) = 0$. Budući da su u i v diferencijabilne u x_0, imamo

$$u(x_0 + h) = u'(x_0, h) + r(h), \qquad v(x_0 + h) = v'(x_0, h) + s(h),$$

gdje su

$$\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0, \qquad \lim_{h\to 0} \frac{s(h)}{|h|} = 0.$$

Stoga je

$$w(x_0 + h) = u'(x_0, h)v'(x_0, h) + R(h)$$

uz

$$\frac{R(h)}{|h|^2} = u'\left(x_0, \frac{h}{|h|}\right)\frac{s(h)}{|h|} + \frac{r(h)}{|h|}v'\left(x_0, \frac{h}{|h|}\right) + \frac{r(h)}{|h|}\frac{s(h)}{|h|}.$$

Jasno je

$$\lim_{h\to 0} \frac{R(h)}{|h|^2} = 0.$$

Prema tome, w je dvaput diferencijabilna u x_0, i vrijedi (1.32).

Za svaki α funkcije $u(x) = \mu_\alpha(x) - \lambda_\alpha$ i $v(x) = g_\alpha(x)$ zadovoljavaju pretpostavke ove leme. Stoga $K(x) = \sum_{\alpha=1}^m [\mu_\alpha(x) - \lambda_\alpha]g_\alpha(x)$ je dvaput diferencijabilna u x_0, i $K''(x_0, h) = 2\sum_{\alpha=1}^m \mu'_\alpha(x_0, h)g'_\alpha(x_0, h)$, kao što je navedeno u dokazu Teorema 1.3.4. □

Gore navedeni rezultati su lokalnog karaktera. Globalni rezultat se dobiva kada x_0 daje strogi minimum za f uz uvjet (1.23) na kompaktnom skupu N. Pretpostavljamo da su funkcije $f, g_1, ..., g_m$ klase C^2 na N.

Teorem 1.4.7. *Ako uz pretpostavke Teorema 1.4.5 pretpostavljamo da x_0 daje strogi minimum za $f(x)$ na N uz uvjet $g_\alpha(x) = 0$ ($\alpha = 1, ..., m$), tada konstante σ_0 i τ opisane u Teoremu 1.4.5 mogu biti odabrane tako da nejednakost*

$$H(x) \geq H(x_0) + \tau|x - x_0|^2 = f(x_0) + \tau|x - x_0|^2$$

vrijedi za sve x u N, gdje je H definirana formulom (1.30).

Prirodan izbor funkcija $\mu_1(x), ..., \mu_m(x)$ koje se pojavljuju u Teoremima 1.4.5 i 1.4.7 je $\mu_\alpha(x) = \lambda_\alpha$ ($\alpha = 1, ..., m$).

1.5 Minimizacija uz jednostavna ograničenja tipa nejednakosti

Na prethodnim stranicama temeljili smo našu teoriju na minimizaciji funkcije $H(x)$ u unutarnjoj točki x_0 razmatrane domene. To nas je dovelo do pravila množitelja Lagrangea za ograničenja jednakosti. Sada ćemo razmotriti slučaj u kojem je točka minimuma na granici naše domene minimizacije. Naša će granica biti jednostavnog tipa. Da bismo opisali ovu situaciju, bit će prikladno uzeti u obzir naše funkcije definirane na otvorenom skupu u $(n+p)$-dimenzionalnom prostoru točaka $(x,y) = (x^1, ..., x^1, y^1, ..., y^p)$. Nastojimo minimizirati funkciju $H(x,y)$ uz uvjete oblika

$$y^\alpha \leq 0 \qquad (\alpha = 1, ..., p). \tag{1.33}$$

Dobiveni rezultati mogu se koristiti za izvođenje Lagrangeovog pravila množitelja za ograničenja tipa nejednakosti.

Pretpostavimo da nam je dana točka (x_0, y_0) koja zadovoljava uvjete (1.33). Prešutno ćemo pretpostaviti da je barem jedna od komponenti $y_0^1, ..., y_0^p$ nula. Međutim, dobiveni rezultati su valjani ako su svi negativni. S teorijske točke gledišta mogli bismo pretpostaviti da su sve te komponente nula, budući da se negativna y-komponenta može smatrati x-komponentom. Međutim, kako bi se olakšale primjene, bit će prikladno promotriti slučaj u kojem su neke od y-komponenti iz (x_0, y_0) negativne. Prema tome kažemo da je indeks α aktivan u (x_0, y_0) ako je $y_0^\alpha = 0$ i neaktivan ako je $y_0^\alpha < 0$.

Pretpostavit ćemo da je funkcija $H(x,y)$ neprekidna u okolini točke (x_0, y_0) i da je dvaput diferencijabilna u (x_0, y_0). Prvi i drugi diferencijali od H u (x_0, y_0) bit će označeni s

$$H'(x_0, y_0; h, k), \qquad H''(x_0, y_0; h, k),$$

gdje je $(h,k) = (h^1, ..., h^n, k^1, ..., k^p)$. Za dopustive vektore smjera uvodimo uvjete

$$k^\alpha < 0 \qquad \text{kada je} \qquad y_0^\alpha = 0. \tag{1.34}$$

Zapazimo da je k^α proizvoljan kada je $y_0^\alpha < 0$. Vektori (h,k) koji zadovoljavaju uvjete (1.34) tvore konveksni konus ζ_0. Ako je (h,k) u ζ_0 tada za malu vrijednost δ, točke

$$x = x_0 + th \qquad y = y_0 + tk \qquad (0 \leq t \leq \delta)$$

zadovoljavaju uvjete (1.33). Podkonus ζ konusa ζ_0 definairan relacijama

$$k^\alpha \leq 0 \;\; ; \;\; \text{ako je } y_0^\alpha = 0,$$

$$; \;\; k^\alpha = 0 \;\; ; \quad \text{ako je } \frac{\partial H}{\partial y^\alpha}(x_0, y_0) < 0$$

igra značajnu ulogu u uvjetima drugog reda opisanim u sljedećem teoremu.

Teorem 1.5.1. *Ako točka* (x_0, y_0) *daje lokalni minimum za* $H(x, y)$ *uz uvjet* $y^\alpha \leq 0$ $(\alpha = 1, ..., p)$*, tada je*

$$\frac{\partial H}{\partial x^i}(x_0, y_0) = 0, \quad \frac{\partial H}{\partial y^\alpha}(x_0, y_0) \leq 0, \quad \text{pri čemu vrijedi jednakost ako je } y_0^\alpha < 0. \tag{1.35a}$$

Štoviše

$$H''(x_0, y_0; h, k) \geq 0, \qquad \text{čim je } (h, k) \in \zeta, \tag{1.35b}$$

gdje je ζ *konus vektora* (h, k) *za koje vrijedi*

$$k^\alpha \leq 0 \qquad \text{ako je } y_0^\alpha = 0, \qquad k^\alpha = 0 \qquad \text{ako je } \frac{\partial H}{\partial y^\alpha}(x_0, y_0) < 0. \tag{1.36}$$

Obratno, ako vrijede uvjeti (1.35) sa strogom nejednakosti u (1.35b) za netrivijalne (h,k), tada postoji okolina $\hat{N}_0$ *od* (x_0, y_0) *i konstanta* $\tau > 0$ *takva da nejednakost*

$$H(x, y) \geq H(x_0, y_0) + \tau \left[|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2\right] \tag{1.37}$$

vrijedi za sve (x, y) *u* $\hat{N}_0$ *kojima je* $y^\alpha \leq 0$ $(\alpha = 1, ..., p)$.

Dokaz. Pretpostavimo prvo da (x_0, y_0) daje lokalni minimmum za $H(x, y)$ uz uvjet (1.33). Tada očito vrijedi (1.35a), što se može vidjeti odgovarajućim variranjem svake komponente zasebno. Neka je (h, k) vektor u konusu ζ. Tada funkcija

$$w(t) = H(x_0 + th, y_0 + tk) \qquad (0 \leq t \leq \delta)$$

ima lokalni minimum za $t = 0$. Štoviše, prema (1.35a) i (1.36),

$$w'(t) = H(x_0, y_0; h, k) = 0.$$

Iz čega slijedi

$$w''(0) = H''(x_0, y_0; h, k) \geq 0.$$

Time se uspostavlja uvjet drugog reda (1.35b).

Da bismo dokazali posljednji zaključak u teoremu, pretpostavljamo suprotno. Tada za svaki prirodni broj q postoji točka (x_q, y_q) takva da

$$y_q^\alpha \leq 0 \quad (\alpha = 1, ..., p), \qquad t_q = \left[|x_q - x_0|^2 + |y_q - y_0|^2\right]^{1/2} < \frac{1}{q}, \tag{1.38a}$$

$$H(x_q, y_q) - H(x_0, y_0) < \frac{t_q^2}{q}. \tag{1.38b}$$

Jasno je $(x_q, y_q) \neq (x_0, y_0)$. Stoga je $t_q > 0$. Zamijenimo naš izvorni niz podnizom, koji je opet označen s $\{(x_q, y_q)\}$ tako da jedinični vektori (h_q, k_q) definirani relacijama

$$h_q = \frac{x_q - x_0}{t_q}, \qquad k_q = \frac{y_q - y_0}{t_q} \tag{1.39}$$

konvergiraju vektoru (h, k). Štoviše, relacije (1.38) su nepromijenjene ovom zamjenom. Ponovno numerirajmo indekse 1,...,p tako da jednadžbe (1.35a) postanu

$$\frac{\partial H}{\partial x^i}(x_0, y_0) = 0, \quad (i = 1, ..., n) \qquad \frac{\partial H}{\partial y^\alpha}(x_0, y_0) < 0, \quad \alpha = 1, ..., r, \tag{1.40a}$$

$$\frac{\partial H}{\partial y^\beta}(x_0, y_0) = 0, \quad \beta = r + 1, ..., p. \tag{1.40b}$$

Uočimo da je $k_q^\alpha = y_q^\alpha / t_q \leq 0$ ako je $y_0^\alpha = 0$. Stoga prema (1.40) imamo

$$H'(x_0, y_0; h_q, k_q) = \sum_{\alpha=1}^{r} \frac{\partial H}{\partial y^\alpha}(x_0, y_0) k_q^\alpha \geq 0. \tag{1.41}$$

Budući da je $x_q = x_0 + t_q h_q$,$y_q = y_0 + t_q k_q$, iz Taylorove formule slijedi da se nejednakost (1.38b) može zapisati u obliku

$$t_q H'(x_0, y_0; h_q, k_q) + \frac{t_q^2}{2} H''(x_0, y_0; h_q, k_q) + R_q < \frac{t_q^2}{q},$$

gdje je

$$\lim_{q \to \infty} \frac{R_q}{t_q^2} = 0. \tag{1.42}$$

Prepisivanje ove nejednakosti u obliku

$$\frac{H'(x_0, y_0; h_q, k_q)}{t_q} + \frac{1}{2} H''(x_0, y_0; h_q, k_q) + \frac{R_q}{t_q^2} < \frac{1}{q},$$

vidimo, prema (1.42), da

$$\limsup_{q \to \infty} \frac{H'(x_0, y_0; h_q, k_q)}{t_q} + \frac{1}{2} H''(x_0, y_0; h, k) \leq 0. \tag{1.43}$$

Prema (1.41) prvi član je nenegativan. Budući da je $\lim_{q\to\infty} t_q = 0$, slijedi da je

$$\lim_{q\to\infty} H'(x_0, y_0; h_q, k_q) = H'(x_0, y_0; h, k) = \sum_{\alpha=1}^{r} \frac{\partial H}{\partial y^\alpha}(x_0, y_0) k^\alpha = 0,$$

$$\lim_{q\to\infty} H''(x_0, y_0, h_q, k_q) = H''(x_0, y_0; h, k) \leq 0.$$

Budući da je $(\partial H/\partial y^\alpha)(x_0, y_0) < 0$ i $k^\alpha \leq 0$ $(\alpha = 1, ..., r)$, prva od ovih relacija implicira da je $k^\alpha = 0$ $(\alpha = 1, ..., r)$. Vektor (h, k) je stoga jedinični vektor u konusu ζ. Time dobivamo kontradikciju s pretpostavkom da je $H''(x_0, y_0; h, k) > 0$ za vektor $(h, k) \in \zeta$. □

Primjer 1.5.2. *U dvodimenzijalnom slučaju uočimo da točka* (0.0) *daje strogi minimum funkciji* $F(x, y) = x^2 - y - y^3$ *uz uvjet* $y \leq 0$*. Ovdje je* $F_x(0, 0) = 0$, $F_y(0, 0) = -1$*, i* $F''(0, 0; h, k) = 2h^2$*. Konus* ζ *definiran s (1.36) je pravac* $k = 0$*. Posljedično, uvjeti (1.35) vrijede sa strogom nejednakosti u (1.35b) za netrivijalne* (h, k)*. Ako je, s druge strane,* $F(x, y) = x^2 - y^3$*, tada opet ishodište daje strogi minimum* F *uz uvjet* $y \leq 0$*. Imamo da je* $F_x = F_y = 0$ *u* $(0, 0)$*. Opet* $F''(0, 0; h, k) = 2h^2$*. Međutim, u ovom slučaju konus* ζ *definiran sa (1.36) sastoji se od svih vektora* (h, k)*. Prema tome, jednakost vrijedi u (1.35b) ako su* h *i* k *proizvoljni.*

Rezultat dobiven u Teoremu 1.5.1 igra važnu ulogu u proučavanju problema minimiziranja funkcije $F(x, y)$ uz uvjete tipa

$$G(x, y) = 0, \qquad y^\alpha \leq 0 \qquad (\alpha = 1, ..., p), \tag{1.44}$$

gdje je $G(x, y) \geq 0$ na razmatranoj domeni. Tražimo uvjete koji impliciraju da rješenje (x_0, y_0) ovog problema također pruža lokalni minimum proširenoj funkciji oblika

$$H(x, y) = F(x, y) + \sigma G(x, y)$$

uz uvjet $y^\alpha \leq 0$ $(\alpha = 1, ..., p)$. Drugim riječima, nastojimo uklopiti ograničenje u (1.44) dodavanjem kaznenog člana σG na F. Da bismo izvršili našu analizu, pretpostavljamo da su F i G neprekidni u okolini (x_0, y_0) i da su dvaput diferencijabilni u (x_0, y_0). Budući da (x_0, y_0) minimizira $G(x, y)$, imamo

$$\frac{\partial G}{\partial x^i}(x_0, y_0) = 0, \qquad \frac{\partial G}{\partial y^\alpha}(x_0, y_0) = 0 \qquad (i = 1, ..., n; \alpha = 1, ..., p), \tag{1.45a}$$

$$G''(x_0, y_0; h, k) \geq 0 \qquad \textit{za svaki } (h, k). \tag{1.45b}$$

Ovim možemo utvrditi

Teorem 1.5.3. *Pretpostavimo da točka* (x_0, y_0) *koja zadovoljava ograničenja (1.44) daje lokalni minimum proširenoj funkciji tipa*

$$H(x, y) = F(x, y) + \sigma G(x, y)$$

uz uvjet $y^\alpha \leq 0$ $(\alpha = 1, ..., p)$. *Tada* (x_0, y_0) *daje lokalni minimum za* $F(x, y)$ *uz uvjete*

$$G(x, y) = 0, \quad y^\alpha \leq 0 \quad (\alpha = 1, ..., p).$$

Štoviše, u točki (x_0, y_0) *imamo*

$$\frac{\partial F}{\partial x^i} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y^\alpha} \leq 0 \quad \text{ako je } y_0^\alpha = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y^\alpha} = 0 \quad \text{ako je } y_0^\alpha = 0. \tag{1.46}$$

Zatim

$$F''(x_0, y_0; h, k) \geq 0, \quad (h, k) \neq (0, 0) \text{ u } \zeta \text{ takav da } G''(x_0, y_0; h, k) = 0, \tag{1.47}$$

gdje je ζ *konus vektora* (h, k) *definiranih relacijama*

$$k^\alpha \leq 0 \quad \text{ako je } y_0^\alpha = 0, \quad k^\alpha = 0 \quad \text{ako je } \frac{\partial F}{\partial y^\alpha}(x_0, y_0) < 0. \tag{1.48}$$

Dokaz. Ovaj rezultat je jednostavna posljedica Teorema 1.5.1. Prvi zaključak je neposredan. Na temelju (1.45a) uvjeti (1.46) za F su ekvivalentni uvjetima (1.35a) za $H = F + \sigma G$. Slijedi da uvjeti (1.36) i (1.48) definiranu isti konus ζ vektora (h, k). Isto kao

$$H''(x_0, y_0; h, k) = F''(x_0, y_0; h, k) + \sigma G''(x_0, y_0; h, k),$$

nejednakost (1.47) posljedica nejednakosti (1.35b). □

Pretpostavimo sada da točka (x_0, y_0) zadovoljava ograničenja (1.44) i uvjete prvog reda (1.46). Pretpostavimo nadalje da vrijedi uvjet drugog reda (1.47) uz isključenu jednakost. Tada kvadratne forme P i Q zadovoljavaju pretpostavke Teorema 1.2.11 o konusu ζ definiranom s (1.48). Prema tome postoji konstantan σ_0 takav da

$$F''(x_0, y_0; h, k) + \sigma_0 G''(x_0, y_0, h, k) > 0 \quad \text{za svaki } (h, k) \neq (0, 0) \text{ u } \zeta.$$

Slijedi da funkcija F zadovoljava uvjete (1.35) sa strogom nejednakosti u (1.35b). Kao posljedica zaključka Teorema 1.5.1, imamo sljedeći oblik Teorema 1.5.3 za $\sigma = \sigma_0$ i stoga za $\sigma \geq \sigma_0$.

Teorem 1.5.4. *Pretpostavimo da uvjeti (1.46) vrijede u točki (x_0, y_0) koja zadovoljava zadane uvjete (1.44). Ako uvjet drugog reda (1.47) vrijedi uz strogu nejednakost, tada postoje konstante σ_0, τ i okolina $\hat{N}_0$ od (x_0, y_0) takve da nejednakost*

$$H(x, y) \geq H(x_0, y_0) + \tau \left[|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 \right] \tag{1.49}$$

vrijedi za sve (x, y) u $\hat{N}_0$ kojima je $y^\alpha \leq 0$ $(\alpha = 1, ..., p)$, gdje je

$$H(x, y) = F(x, y) + \sigma G(x, y) \qquad (\sigma \geq \sigma_0). \tag{1.50}$$

Konkretno, ako točka (x, y) u $\hat{N}_0$ zadovoljava ograničenja (1.44), tada

$$F(x, y) \geq F(x_0, y_0) + \tau \left[|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 \right]. \tag{1.51}$$

Kombinirajući ovaj rezultat s Korolarom 1.2.7 i Teoremom 1.2.5, imamo slijedeće

Korolar 1.5.5. *Pretpostavimo da vrijede pretpostavke Teorema 1.5.4. Uz to pretpostavimo da (x_0, y_0) daje strogi minimum za F na kompaktnom skupu uz uvjete (1.44). Tada se σ_0 i τ mogu odabrati tako da (1.49) vrijedi za sve (x, y) u $\hat{N}$ uz $y^\alpha \leq 0$ $(\alpha = 1, ..., p)$.*

Sljedeći primjer pokazuje da točka (x_0, y_0) ne mora minimizirati funkciju oblika $H(x, y) = F(x, y) + \sigma G(x, y)$ $(\sigma > 0)$ čak i ako su uvjeti (1.46) i (1.47) zadovoljeni, a točka (x_0, y_0) daje strogi lokalni minimum za $F(x, y)$ uz uvjet $G(x, y) = 0$, $y^\alpha \leq 0$ $(\alpha = 1, ..., p)$. U ovom primjeru koristit ćemo simbol $(\delta x, \delta y)$ umjesto (h, k) za varijacije (x_0, y_0).

Primjer 1.5.6. *Neka je N skup točaka u xyz-prostoru gdje je $|x| < 1$ i $|y| < 1$. Lako se može provjeriti da točka $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ daje strogi minimum za $F(x, y, z) = x^2 + 2xy + y^4 - 2z$ na N uz uvjet $z \leq 0$. U $(0, 0, 0)$ imamo $F_x = F_y = 0$ i $F_z = -2 < 0$. Prema tome, vrijedi uvjet (1.46). Budući da je $F_z = -2 < 0$ konus ζ definiran s (1.48) se sastoji od svih vektora $(\delta x, \delta y, \delta z)$ gdje vrijedi $\delta z = 0$. Ograničenje $G''(0, 0, 0, \delta x, \delta y, \delta z) = (-\delta x - \delta z)^2 = 0$ govori nam da je $\delta x = -\delta z = 0$. Slijedi da je $F''(0, 0, 0; \delta x, \delta y, \delta z) = 2(\delta x)^2 + 4(\delta x)(\delta y) = 0$. Kao posljedica vrijedi i uvjet (1.47). Odaberimo $z \leq 0$ i izrazimo funkciju $H = F + \sigma G$ u obliku*

$$H(x, y, z) = x^2 \left[1 + \frac{\sigma}{2}(y - 1)^2 \right] + 2xy + y^4 - [2 + \sigma x(y - 1)] z + \frac{\sigma}{2} z^2.$$

Uočimo da, ako je $|y| < 1$, kao što smo pretpostavili, onda je

$$H(x, y, 0) \leq x^2(1 + 2\sigma) + 2xy + y^4.$$

Stoga, ako je

$$0 < y^2 < \frac{1}{1 + 2\sigma}, \qquad x = \frac{-y}{1 + 2\sigma}, \qquad z = 0,$$

imamo

$$H(x, y, z) \leq y^2 \left(y^2 - \frac{1}{1 + 2\sigma} \right) < 0.$$

Prema tome, za svaku $\sigma > 0$ točka $(0, 0, 0)$ ne uspijeva minimizirati $H(x, y, z)$ uz uvjet $z \leq 0$.

1.6 Proširivost u slučaju ograničenja tipa nejednakosti

Sada smo u poziciji da proučavamo problem minimiziranja funkcije $f(x)$ uz uvjete oblika

$$g_\alpha(x) \leq 0 \quad (\alpha = 1, ..., p), \quad g_\beta(x) = 0 \quad (\beta = p + 1, ..., m). \tag{1.52}$$

Slučaj $p = 0$ proučavan je u odjeljku ovog poglavlja. Neka je x_0 točka koja zadovoljava ove uvjete. Pretpostavljamo da su funkcije $f, g_1, ..., g_m$ neprekidne u okolini od x_0 i dvaput diferencijabilne u x_0.

Kao i u slučaju ograničenja nejednakosti, imamo Lagrangeovo pravilo množitelja povezano s našim problemom. Ako je točka x_0 rješenje našeg problema, tada pod određenim dodatnim pretpostavkama pravilo Lagrangeovog množitelja mora vrijediti u x_0. Suprotno tome, ako ojačani oblik ovog pravila množitelja vrijedi u x_0, tada x_0 daje strogi lokalni minimum za f uz naše uvjete.

Reći će se da pravilo množitelja Lagrangea vrijedi u x_0 ako (i) točka x_0 zadovoljava ograničenja (1.52), i (ii) postoje množitelji $\lambda_1, ..., \lambda_m$ takvi da

$$\lambda_\alpha \geq 0 \quad (\alpha = 1, ..., p), \quad \lambda_\alpha = 0 \quad \text{ako je } g_\alpha(x_0) < 0, \tag{1.53a}$$

$$\nabla F(x_0) = 0, \quad \text{gdje je } F = f + \lambda_1 g_1 + ... + \lambda_m g_m, \tag{1.53b}$$

$$F''(x_0, h) \geq 0 \quad \text{za svaki } h \neq 0 \; u \; \zeta. \tag{1.53c}$$

gdje je ζ skup svih vektora h tako da je

$$g'_\alpha(x_0, h) \leq 0 \quad \text{ako je } g_\alpha(x_0) = 0 \; i \; \alpha \leq p, \tag{1.54a}$$

$$g'_\alpha(x_0, h) = 0 \quad \text{ako je } \lambda_\alpha > 0 \quad i \quad \alpha \leq p, \quad g'_\beta(x_0, h) = 0 \quad (\beta = p + 1, ..., m). \tag{1.54b}$$

Zapazimo da, ako je α indeks takav da je $g_\alpha(x_0) < 0$, uvjet $g_\alpha(x) \leq 0$ vrijedi u okolini od x_0. Posljedično, takvo ograničenje ne igra nikakvu ulogu u lokalnim razmatranjima o x_0.

To se vidi u činjenici da je $\lambda_\alpha = 0$ za indeks ovog tipa. Štoviše, ovi indeksi su izostavljeni u uvjetima (1.54).

Ako je jednakost isključena u (1.53c), dobivamo ojačano pravilo Lagrangeovog množitelja za naš problem u x_0.

U nastavku, nastojimo pojednostaviti naš problem uklanjanjem ograničenja. U tu svrhu uvodimo slabe varijable $y^1, ..., y^p$ i zapisujemo ograničenja (1.52) u obliku

$$y^\alpha \leq 0, \quad g^\alpha(x) - y^\alpha = 0, \quad g_\beta(x) = 0 \quad (\alpha = 1, ..., p; \beta = p+1, ..., m). \tag{1.55}$$

Uvodimo proširenu funkciju

$$H(x, y) = f(x) + \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha \left[g_\alpha(x) - y^\alpha\right] + \sum_{\beta=p+1}^{m} \lambda_\beta g_\beta(x) + \sigma G(x, y), \tag{1.56}$$

gdje je

$$G(x, y) = \frac{1}{2}\{\sum_{\alpha=1}^{p} \left[g_\alpha(x) - y^\alpha\right]^2 + \sum_{\beta=p+1}^{m} \left[g_\beta(x)\right]^2\}. \tag{1.57}$$

tako da

$$y_0^\alpha = g_\alpha(x_0) \quad (\alpha = 1, ..., p). \tag{1.58}$$

Zapazimo da je $H(x, y) = f(x)$ uz uvjete (1.55). Posljedično (x_0, y_0) minimizira H uz uvjete (1.55) ako i samo ako je x_0 rješenje našeg izvornog problema. Reći ćemo da se naš problem može proširiti u x_0 ako se množitelji $\lambda_1, ..., \lambda_m$ i konstanta σ u H mogu odabrati tako da (x_0, y_0) daje minimum za $H(x, y)$ uz jednostavniji uvjet $y^\alpha \leq 0$. Pokazat ćemo da postoji uska veza između pravila Lagrangeovog množitelja i mogućnosti proširenja. Ali prvo razmotrimo sljedeće primjere.

Primjer 1.6.1. *U xy-ravnini točka* $(0, 0)$ *daje lokalni minimum za* $f(x, y) = -x^2 + 4y + xy$ *uz uvjet* $g(x, y) = x^2 - y \leq 0$*. U ovom slučaju gradijent od* $F = f + \lambda g = (\lambda - 1)x^2 + (4 - \lambda)y + xy$ *nestaje u* $(0, 0)$ *samo ako je* $\lambda = 4$*. Posljedično* $\lambda = 4$ *je odgovarajući Lagrangeov množitelj. Uočimo da* $F = 3x^2 + xy$ *ne uspijeva imati bezuvjetni lokalni minimum u* $(0, 0)$*. Međutim, ako je* $\sigma \geq 2$*, proširena funkcija*

$$H(x, y, z) = f + \lambda(g - z) + \frac{\sigma}{2}(g - z)^2 = 3x^2 + xy - 4z + \frac{\sigma}{2}(x^2 - y - z)^2$$

ima minimum u $(0, 0, 0)$ *uz uvjet* $z \leq 0$*, te* $|x| \leq 1$ *i* $|y| \leq 1$*, što se lako provjerava. Konkretno, ako postavimo* $z = 0$ *vidimo da* $(x, y) = (0, 0)$ *minimizira funkciju*

$$H(x, y, 0) = f + \lambda g + \frac{\sigma}{2}g^2 = 3x^2 + xy + \frac{\sigma}{2}(x^2 - y)^2$$

na kvadratu $|x| \leq 1, |y| \leq 1$. Ako odaberemo $z = x^2 - y$ kada je $x^2 - y < 0$ i $z = 0$ kada je $x^2 - y \geq 0$, tada je $x^2 - y - z = \max(0, x^2 - y)$. Stoga $(x, y) = (0, 0)$ daje strogi minimum funkciji

$$\hat{H}(x, y) = -x^2 + 4y + xy + 4\max(0, x^2 - y) + \frac{\sigma}{2}\left[\max(0, x^2 - y)\right]^2$$

za $\sigma \geq 2$ na jediničnom kvadratu $|x| \leq 1$, $|y| \leq 1$.

Primjer 1.6.2. *Ishodište $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ daje minimum za $f(x, y, z) = 2x - y + z^2$ uz uvjete $x + y^2 \leq 0$, $-x \leq 0$. Postavljanjem*

$$F(x, y, z) = 2x - y + z^2 + \lambda(x + y^2) + \mu(-x),$$

vidimo da u $(0, 0, 0)$ $F_x = 2 + \lambda - \mu$, $F_y = -1$, $F_z = 0$. Ne postoji vrijednost λ,μ za koju bismo dobili da je $F_x = F_y = F_z = 0$ u $(0, 0, 0)$. Lagrangeovo pravilo množitelja stoga ne vrijedi iako ishodište daje globalni strogi minimum našem problemu. To slijedi jer uvjeti $x + y^2 \leq 0$, $-x \leq 0$ predstavljaju neprirodan način da se kaže da je $x = y = 0$. Ako originalna ograničenja zamijenimo ograničenjima $x = 0$, $y = 0$ ili s četiri ograničenja $x \leq 0$, $-x \leq 0$, $y \leq 0$, $-y \leq 0$, pravilo Lagrangeovog množitelja vrijedi u $(0, 0, 0)$ i naš je problem proširiv.

Sada ćemo vidjeti da je Lagrangeovo pravilo množitelja (1.53) posljedica proširenja. Štoviše, pokazat ćemo da ojačano pravilo Lagrangeovih množitelja implicira mogućnost proširenja. Sljedeći primjer pokazuje da točka x_0 može biti točka strogog minimuma za naš izvorni problem i da pravilo množenja (1.53) može vrijediti u x_0 bez mogućnosti proširenja našeg problema u x_0. Ovaj problem ima dodatnu značajku da imamo reguralnost u x_0 u smislu da su gradijenti $\nabla g_\gamma(x_0)$ $(\gamma = \gamma_1, ..., \gamma_r)$ linearno neovisni, gdje su $\gamma_1, ..., \gamma_r$ indeksi takvi da je $g_\gamma(x_0) = 0$. Može se pokazati da uz pretpostavku regularnosti točka lokalnog minimuma zadovoljava uvjete (1.53).x_0 na naše izvorne probleme podrazumijeva pravilo množitelja (1.53). Posljedično, navedeni uvjet regularnosti (ali i neke druge varijante) i mogućnost proširenja su alternativni uvjeti koji daju pravilo Lagrangeova množitelja.

Primjer 1.6.3. *Neka je N unutrašnjost jediničnog kvadrata $|x| < 1$, $|y| < 1$. Točka $(x_0, y_0) = (0, 0)$ daje strogi minimum funkciji $f(x, y) = x^2 + 2x + y^4$ na N uz uvjet $g(x, y) = xy - x \leq 0$. Uočimo kako je $\nabla g(0, 0) \neq 0$. Lagranžijan $F = f + \lambda g$ sa $\lambda = 2$ poprima oblik $F(x, y) = x^2 + 2xy + y^4$. Imamo $F_x = F_y = 0$ u $(0, 0)$ i $F''(0, 0; h, k) = 2h^2 + 4hk$. Budući da je $\lambda = 2 > 0$, vektor (h, k) uz uvjet jednakosti $g'(0, 0; h, k) = -h = 0$. Stoga je $F''(0, 0; h, k) = 0$. Prema tome, vrijedi uvjet drugog reda (1.53b). Međutim, naš problem se ne može proširiti. U tu svrhu razmotrimo funkcije $\hat{F} = F + \lambda(g - z)$ i $G = \frac{1}{2}(g - z)^2$. Imamo sa, $\lambda = 2$, da je*

$$\hat{F}(x, y, z) = x^2 + 2xy + y^4 - 2z, \qquad G(x, y, z) = \frac{1}{2}(xy - x - z)^2.$$

Točka $(0,0,0)$ *daje strogi minimum za* F *uz uvjete* $z \leq 0$, $G(x,y,z) = 0$ *ako ograničimo* (x,y) *da bude u jediničnom kvadratu* N. *Ako bi naš problem bio proširiv, tada bi za neke* $\sigma > 0$ *ishodište* $(0,0,0)$ *priuštilo lokalni minimum za* H *uz uvjet* $z \leq 0$, *suprotno rezultatu dobivenom u Primjeru 1.5.6. Prema tome, problem koji je ovdje dat nije proširiv u točki* $(x_0, y_0) = (0,0)$.

Kao prvi rezultat imamo

Teorem 1.6.4. *Ako se problem minimizacije* f *uz uvjete (1.52) može proširiti u* x_0, *pravilo Lagrangeovog množitelja vrijedi u* x_0.

Dokaz. Prema našim pretpostavkama postoji funkcija H oblika (1.56) koja ima lokalni minimum u (x_0, y_0) uz uvjet $y \leq 0$. Ovdje je y_0 zadan s (1.58). Uočimo da je funkcija H oblika

$$H(x,y) = \hat{F}(x,y) + \sigma G(x,y),$$

gdje je G dan pomoću (1.57) i

$$\hat{F}(x,y) = F(x) - \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha y^\alpha, \qquad F(x) = f(x) + \sum_{\gamma=1}^{m} \lambda_\gamma g_\gamma(x). \tag{1.59}$$

Prema Teoremu 1.5.3 imamo u (x_0, y_0)

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial x^i} = \frac{\partial F}{\partial x^i} = 0, \qquad \frac{\partial \hat{F}}{\partial y^\alpha} = -\lambda_\alpha \leq 0 \quad \text{ako je } y_0^\alpha = 0,$$

$$\frac{\partial \hat{F}}{\partial y^\alpha} = -\lambda_\alpha = 0 \quad \text{ako je } y_0^\alpha < 0, \tag{1.60a}$$

$$\hat{F}''(x_0, y_0; h, k) = F''(x_0, h) \geq 0 \quad \text{ako je } (h,k) \text{ u } \hat{\zeta}$$

$$i \quad G''(x_0, y_0; h, k) = 0, \tag{1.60b}$$

Gdje je ζ skup vektora (h,k) tako da

$$k^\alpha \leq 0 \quad \textit{ako je } y_0^\alpha = 0, \qquad k^\alpha = 0 \quad \text{ako je } \frac{\partial \hat{F}}{\partial y^\alpha} = -\lambda_\alpha < 0. \tag{1.61}$$

Teorem je stoga dokazan, ako su uvjeti (1.60) ekvivalentni uvjetima (1.53). Uvjeti (1.60a) vrijede ako i samo ako je $\nabla F(x_0) = 0$ i $\lambda_\alpha \geq 0$ $(\alpha = 1, ..., p)$, uz $\lambda_\alpha = 0$ ako je $g_\alpha(x_0) < 0$. Stoga je (1.60a) ekvivalentan uvjetima (1.53a) i (1.53b). Uvjet

$$G''(x_0, y_0; h, k) = \sum_{\alpha=1}^{p} [g'_\alpha(x_0, h) - k^\alpha]^2 + \sum_{\beta=p+1}^{m} g'_\beta(x_0, h)^2 = 0$$

vrijedi ako i samo ako

$$k^\alpha = g'_\alpha(x_0, h) \quad (\alpha = 1, ..., p), \quad g'_\beta(x_0, h) = 0 \quad (\beta = p + 1, ..., m). \tag{1.62}$$

Prema tome, ako vrijede (1.61) i (1.62), imamo

$$g'_\alpha(x_0, h) \leq 0 \quad \text{ako je } g_\alpha(x_0) = 0, \quad g'_\alpha(x_0, h) = 0 \quad \text{ako je } \lambda_\alpha > 0, \quad g'_\beta(x_0, h) = 0.$$

To su uvjeti (1.54) koji definiraju konus ζ u uvjetu (1.53c). Obrnuto, ako je h u ζ, tada ako postavimo $k^\alpha = g'_\alpha(x_0, h)$, vektor (h, k) je u $\hat{\zeta}$ i vrijedi $G''(x_0, y_0; h, k) = 0$. Ova činjenica utvrđuje jednakost uvjeta (1.53c) i (1.60b). □

Iz upravo navedenih argumenata jasno je da je ojačano pravilo Lagrangeovog množitelja u x_0 ekvivalentno uvjetu (1.60) u (x_0, y_0), ojačano tako da isključi jednakost u (1.60b) kada je $(h, k) \neq (0, 0)$. Kada se koristi ova činjenica, iz Teorema 1.5.4 slijedi da postoji okolina N_0 od (x_0, y_0) i pozitivne konstante σ_0 i τ takve da, ako je $\sigma \geq \sigma_0$,

$$H(x, y) \geq H(x_0, y_0) + 2\tau \left[|x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 \right] \tag{1.63}$$

kad god je (x, y) u N_0 i $y^\alpha \leq 0$ $(\alpha = 1, ..., p)$. Pokazat ćemo da postoji okolina N_0 od x_0 u x-prostoru takva da, ako je σ_0 dovoljno velik, onda za $\sigma \geq \sigma_0$, imamo

$$H(x, y) \geq H(x_0, y_0) + \tau |x - x_0|^2 = f(x_0) + \tau |x - x_0|^2 \tag{1.64}$$

za sve (x, y) s x u N_0 i $y^\alpha \leq 0$ $(\alpha = 1, ..., p)$. U tu svrhu odaberimo zatvorenu kuglu $\overline{N_0}$ oko x_0 polumjera r i konstantu δ tako da je skup $\hat{N}$ točaka (x, y) kojima je x u $\overline{N_0}$ i $|g_\alpha(x) - y^\alpha| \leq (2\delta)^{1/2}$ $(\alpha = 1, ..., p)$ je podskup $\hat{N}_0$. Neka je M minimum od $F(x)$ na $\overline{N_0}$. Povećajmo gore odabranu konstantu σ_0 tako da

$$M + \sigma_0 \delta \geq f(x_0) + \tau r^2. \tag{1.65}$$

Razmotrimo sada točku (x, y) kojoj je x u $\overline{N_0}$ i $y^\alpha \leq 0$ $(\alpha = 1, ..., p)$. Ako je (x, y) u $\hat{N}$, tada je (x, y) u $\hat{N}_0$. U ovom slučaju vrijedi (1.63) i stoga (1.64). Ako (x, y) nije u $\hat{N}$, tada je $G(x, y) \geq \delta$, $y^\alpha \leq 0$, i

$$H(x, y) = F(x) - \sum_{\alpha=1}^{p} \lambda_\alpha y^\alpha + \sigma G(x, y) \geq M + \sigma_0 \delta \geq f(x_0) + \tau r^2.$$

Budući da $|x - x_0| \leq r$, nejednakost (1.64) vrijedi i u ovom slučaju. To dokazuje

Teorem 1.6.5. *Pretpostavimo da ojačano pravilo Lagrangeovog množitelja vrijedi u x_0 s množiteljima $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Neka je $y_0^\alpha = g_\alpha(x_0)$ $(\alpha = 1, ..., p)$. Tada postoje konstante σ_0 i τ te okolina N_0 od x_0 u x-prostoru takvi da, ako je $\sigma \geq \sigma_0$ i $H(x, y)$ definiran s (1.56), onda nejednakost*

$$H(x, y) \geq H(x_0, y_0) + \tau|x - x_0|^2 = f(x_0) + \tau|x - x_0|^2 \tag{1.66}$$

vrijedi za sve (x, y) takve da je x u N_0 i $y^\alpha \leq 0$ $(\alpha = 1, ..., p)$.

Ograničenja $y^\alpha \leq 0$ $(\alpha = 1, ..., p)$ sa $y^\alpha = -(z^\alpha)^2$, gdje su $z^1, ..., z^p$ nove varijable. Podsjetimo da, ako točka (x, y) zadovoljava ograničenja (1.55), $H(x, y) = f(x)$ i točka x zadovoljava izvorna ograničenja

$$g_\alpha(x) \leq 0 \quad (\alpha = 1, ..., p), \quad g_\beta(x) = 0 \quad (\beta = p + 1, ..., m). \tag{1.67}$$

Kao posljedica te činjenice iz Teorema 1.6.5 dobivamo sljedeći teorem dovoljnosti za naš izvorni problem.

Teorem 1.6.6. *Ako ojačano pravilo Lagrangeovog množitelja vrijedi u x_0, tada postoje konstanta $\tau > 0$ i okolina N_0 od x_0 takvi da nejednakost*

$$f(x) \geq f(x_0) + \tau|x - x_0|^2 \tag{1.68}$$

vrijedi za svaki x u N_0 koji zadovoljava ograničenja (1.67). Ako dodatno vrijedi da su $f, g_1, ..., g_m$ neprekidni na kompaktnom skupu N i da x_0 daje strogi minimum za f na N uz ograničenja (1.67), tada se τ može modificirati tako da nejednakost (1.68) vrijedi na N uz ograničenja (1.67).

Posljednji zaključak u teoremu slijedi iz prvog jednostavnim argumentom neprekidnosti. Na sličan način, dat u Teoremu 1.6.5, može se N_0 zamijeniti većim kompaktnim skupom N kojem su $f, g_1, ..., g_m$ neprekidne ako x_0 daje strogi minimum za f na N uz uvjet (1.66). Ovaj rezultat slijedi iz Korolara 1.5.5. Kako bismo eliminirali uvjete na $y^1, ..., y^p$, možemo koristiti uređaj korišten u dokazu Teorema 1.6.5.

Daljnja posljedica Teorema 1.6.5 dobiva se odabirom $y^\alpha = 0$ a kad god je $g_\alpha(x) > 0$ a $y^\alpha = g_\alpha(x)$ inače. Uz ovaj odabir imamo

$$g_\alpha(x) - y^\alpha = \max [0, g_\alpha(x)] \quad (\alpha = 1, ..., p). \tag{1.69}$$

Odgovarajuća vrijednost $H(x, y)$ je

$$\hat{H}(x) = f(x) + \sum_{\alpha=1}^{m} \lambda_\gamma \hat{g}_\gamma(x) + \frac{\sigma}{2} \sum_{\gamma=1}^{m} \left[\hat{g}_\gamma(x)\right]^2, \tag{1.70}$$

gdje je

$$\hat{g}_\alpha(x) = \max\left[0, g_\alpha(x)\right] \qquad (\alpha = 1, ..., p),$$

$$\hat{g}_\beta(x) = g_\beta(x) \qquad (\beta = p + 1, ..., m). \tag{1.71}$$

Zapazimo da su ograničenja (1.67) ekvivalentna ograničenjima jednakosti

$$\hat{g}_\gamma(x) = 0 \qquad (\gamma = 1, ..., m). \tag{1.72}$$

S obzirom na Teorem 1.6.5 imamo

Teorem 1.6.7. *Pretpostavimo da pravilo ojačanog množitelja vrijedi u x_0 s množiteljima $\lambda_1, ..., \lambda_m$. Tada postoji okolina N_0 od x_0 i pozitivne konstante σ_0 i τ takve da za $\sigma \geq \sigma_0$ i $H(x)$ definirane s (1.70) imamo*

$$\hat{H}(x) \geq \hat{H}_0(x) + \tau|x - x_0|^2 = f(x_0) + \tau|x - x_0|^2 \tag{1.73}$$

za svaki x u N_0. Ako uz to x_0 daje strogi minimum za f na kompaktnom skupu N uz uvjet $g_\gamma(x) = 0$ $(\gamma = 1, ..., m)$, tada se σ_0 i τ mogu odabrati tako da (1.73) vrijedi za N.

Dokaz. U posljednjem zaključku pretpostavljamo, naravno, da su funkcije f neprekidne na N.

Razmotrimo funkciju $H(x, y)$ definiranu formulom (1.55) sa $\sigma > 0$ i $\lambda_\alpha \geq 0$ $(\alpha = 1, ..., p)$. Neka je

$$\tilde{H}(x) = \min H(x, y) \text{ tako da je } y^\alpha \leq 0. \tag{1.74}$$

Isto kao

$$\frac{\partial H}{\partial y^\alpha} = -\lambda_\alpha - \sigma\left[g_\alpha(x) - y^\alpha\right],$$

ovaj minimum se postiže kada je

$$y^\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{\sigma} + g_\alpha(x) \quad \text{ ako je } \frac{\lambda_\alpha}{\sigma} + g_\alpha(x) \leq 0, \qquad y^\alpha = 0 \text{ inače.}$$

Za ove vrijednosti y^α imamo

$$g_\alpha(x) - y^\alpha = \max\left[-\frac{\lambda_\alpha}{\sigma}, g_\alpha(x)\right].$$

Zatim slijedi

$$\tilde{H}(x) = f(x) + \sum_{\gamma=1}^{m} \lambda_\alpha \tilde{g}_\alpha(x) + \frac{\sigma}{2} \sum_{\gamma=1}^{m} \left[\tilde{g}_\gamma(x)\right]^2 \tag{1.75}$$

gdje je

$$\tilde{g}_\alpha(x) = \max\left[-\frac{\lambda_\alpha}{\sigma}, g_\alpha(x)\right] \qquad (\alpha = 1, ..., p),$$

$$\tilde{g}_\beta(x) = g_\beta(x) \qquad (\beta = p + 1, ..., m).$$

□

Iz ovog rezultata vidimo da, ako ojačano pravilo Lagrangeova množitelja vrijedi s množiteljima $\lambda_1, ..., \lambda_m$, postoji konstanta σ_0 takva da za $\sigma \geq \sigma_0$ točka x_0 daje strogi minimum funkciji $\tilde{H}(x)$ definiranoj formulom (1.75).

Poglavlje 2

Numerička metoda zasnovana na proširenoj Lagrangeovoj funkciji

2.1 Uvod

Promatrat ćemo problem optimizacije definiran na slijedeći način:

$$\begin{aligned} f(x) &\to \min, \\ h(x) &= 0, \\ g(x) &\leq 0, \\ x &\in \Omega \end{aligned} \tag{2.1}$$

gdje su $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ neprekidne i $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ je zatvoren (no nije nužno konveksan). U ovom poglavlju nećemo zahtijevati postojanje derivacija.

Lagrangeovu funkciju L ćemo definirati kao:

$$L(x, \lambda, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i h_i(x) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i g_i(x) \tag{2.2}$$

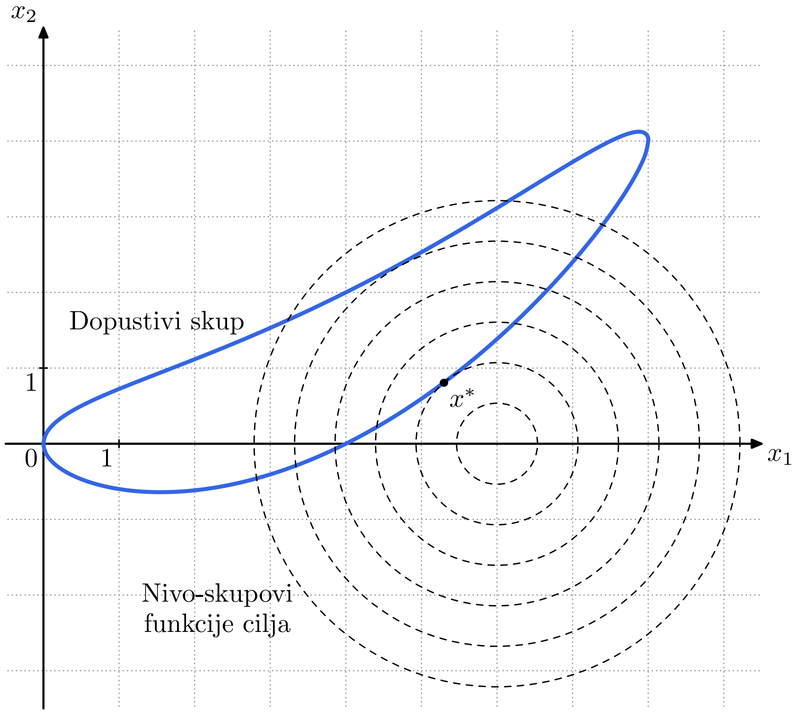
za svaki $x \in \Omega$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$, te $\mu \in \mathbb{R}^p_+$, a proširenu Lagrangeovu funkciju s

$$L_\rho(x, \lambda, \mu) = f(x) + \frac{\rho}{2} \sum_{i=1}^{m} \left[h_i(x) + \frac{\lambda_i}{\rho} \right]^2 + \sum_{i=1}^{p} \left[\max\left(0, g_i(x) + \frac{\mu_i}{\rho}\right) \right]^2 \tag{2.3}$$

za svaki $\rho > 0$, $x \in \Omega$, $\lambda \in \mathbb{R}^m$, te $\mu \in \mathbb{R}^p_+$.

Kako bismo razumjeli značenje definicije (2.3), prvo promotrimo slučaj kada je $\lambda = 0$ i $\mu = 0$. Tada je,

$$L_\rho(x, 0, 0) = f(x) + \frac{\rho}{2} \left(\|h(x)\|_2^2 + \|g(x)_+\|_2^2 \right) \tag{2.4}$$



Slika 2.1: *Skupovi funkcije problema (5)*

Stoga, $L_\rho(x, 0, 0)$ je takozvana vanjska kaznena funkcija koja se podudara s $f(x)$ unutar izvedivog skupa i kažnjava nedostatak dopustivosti pomoću izraza

$$\frac{\rho}{2}\left(||h(x)||_2^2 + ||g(x)_+||_2^2\right).$$

Primjer 2.1.1. *Razmotrimo problem*

$$f(x) \to \min, h(x) = 0 \tag{2.5}$$

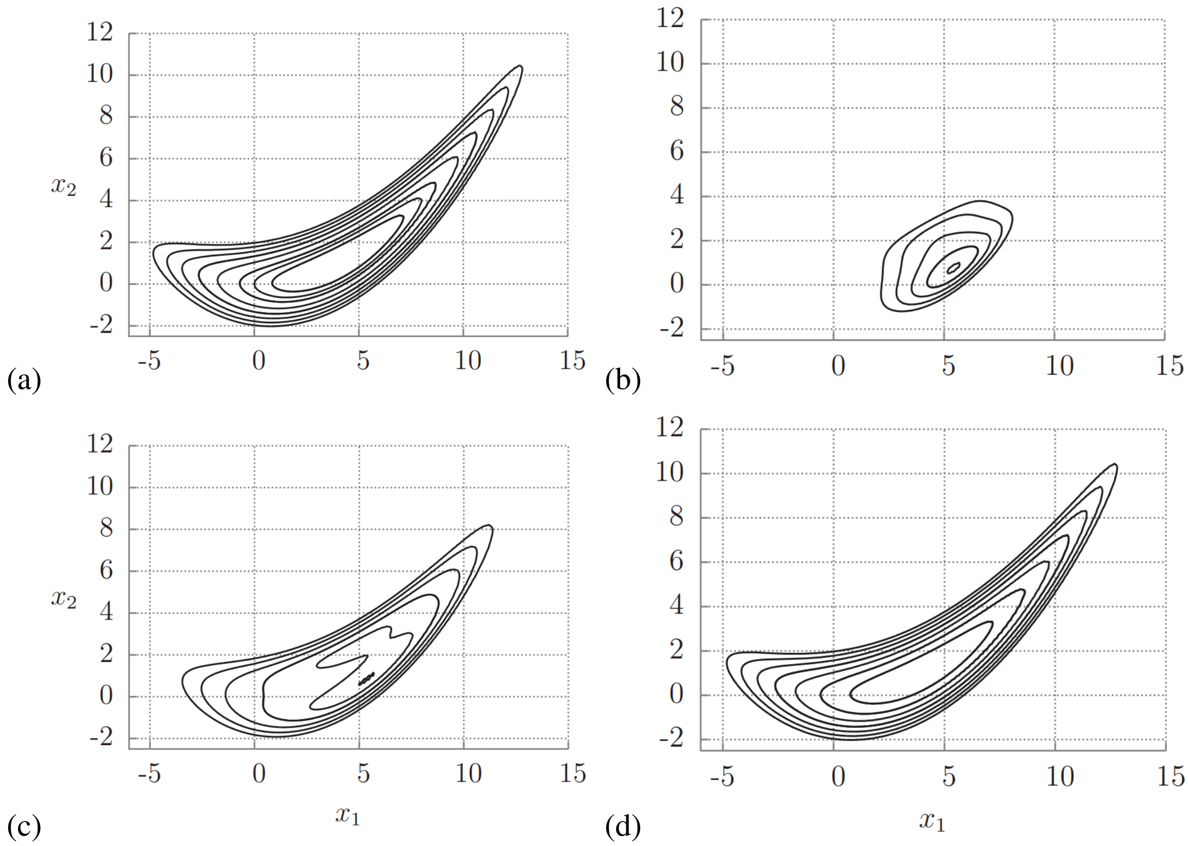
gdje je

$$f(x) = (x_1 - 6)^2 + x_2^2$$

i

$$h(x) = (x_2 - (x_1/4)^2)^2 + (x_1/4 - 1)^2 - 1,$$

čije je geometrijsko rješenje predstavljeno na Slici 2.1. Nivo-skupovi funkcije $h(x)^2$ su prikazani na Slici 2.2(a), dok Slike 2.2(b)-2.2(d) prokazuju skupove od $L_\rho(x, 0, 0)$ za $\rho \in \{1, 100, 1000\}$. Lako je vidjeti kako je za $\rho = 1000$, kazneni izraz $\rho h(x)^2$ dominira $f(x)$ u $L_\rho(x, 0, 0)$ pa su stoga skupovi prikazani u Slici 2.2(a) i 2.2(d) vrlo slični.



Slika 2.2: *Skupovi od (a) $h(x)$ i (b)-(d) skupovi od $L_p(x, 0, 0)$ za $\rho \in \{1, 100, 1000\}$*

To znači da vanjska kaznena funkcija (2.4) daje malo informacija o našoj funkciji ako je ρ jako velik.

2.2 Algoritam

Sljedeći algoritam je osnovni prošireni Lagrangeov algoritam za rješavanje (2.1). Algoritam nastavlja minimiziranjem proširene Lagrangeove funkcije pri svakoj iteraciji i ažuriranjem Lagrangeovih množitelja i kaznenih parametara između iteracija. Njegova općenitost će nam omogućiti da analiziramo nekoliko posebnih slučajeva koji se bave problemom (2.1) pod različutim uvjetima.

Algoritam 1

Neka su $\lambda_{min} < \lambda_{max}$, $\mu_{max} > 0$, $\gamma > 1$, te $0 < \tau < 1$. Netka su još $\overline{\lambda^1} \in [\lambda_{min}, \lambda_{max}]^m$, $\overline{\mu}^1 \in [0, \mu_{max}]^p$, te $\rho_1 > 0$. Inicijaliziramo $k \leftarrow 1$.

Korak 1.

Pronađimo $x^k \in \mathbb{R}$ kao aproksimaciju točke minimuma zadaće

$$L_{\rho_k}(x, \overline{\lambda^k}, \overline{\mu}^k) \to \min, x \in \Omega \tag{2.6}$$

Korak 2.

Izračunajmo nove aproksimacije Lagrangeovih množitelja

$$\lambda^{k+1} = \overline{\lambda^k} + \rho_k h(x^k) \tag{2.7}$$

i

$$\mu^{k+1} = \left(\overline{\mu}^k + \rho_k g(x^k)\right)_+ . \tag{2.8}$$

Korak 3.

Definiramo

$$V_i^k = \min\{-g_i(x^k), \overline{\mu}_i^k \rho_k\}, i = 1, ..., p.$$

ako je $k = 1$ ili

$$\max\{\|h(x^k)\|, \|V^k\|\} \leq \tau \max\{\|h(x^{k-1})\|, \|V^{k-1}\|\}, \tag{2.9}$$

biramo $\rho_{k+1} \geq \rho_k$. Inače, definiramo $\rho_{k+1} = \gamma \rho_k$.

Korak 4.

Izračunamo $\overline{\lambda}^{k+1} \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]^m$ i $\overline{\mu}_i^{k+1} \in [0, \mu_{\max}]^p$.

Korak 5.

Postavimo $k \leftarrow k$ i vrati se na Korak 1.

Imajmo na umu kako se λ^{k+1} i μ^{k+1} ne koriste u ovom algoritmu, ali će se koristiti u specifičnijim verzijama kako bih definirali $\overline{\lambda}^{k+1}$ i $\overline{\mu}^{k+1}$.

Za algoritam 0.1. se kaže da je konceptualan jer je Korak 1, koji utvrđuje da bi iteracija x_k trebala biti "približni minimizator" podproblema (2.6), namjerno definiran na dvosmislen način. (Strogo govoreći, bilo koja točka $x^k \in \mathbb{R}^n$ može se prihvatiti kao "približni minimizator"). Za ograničenja definirana s $x \in \Omega$ ćemo reći da su "teška", "jednostavna" ili "neopuštajuća". Izraz "teško" samo se čini kontradiktornim od "jednostavnog". Ograničenja su općenito jednostavna u smislu da ih nije teško zadovoljiti. Međutim, ona su teška (ili neopuštajuća) u smislu da nije dopušteno ne zadovoljiti ih.

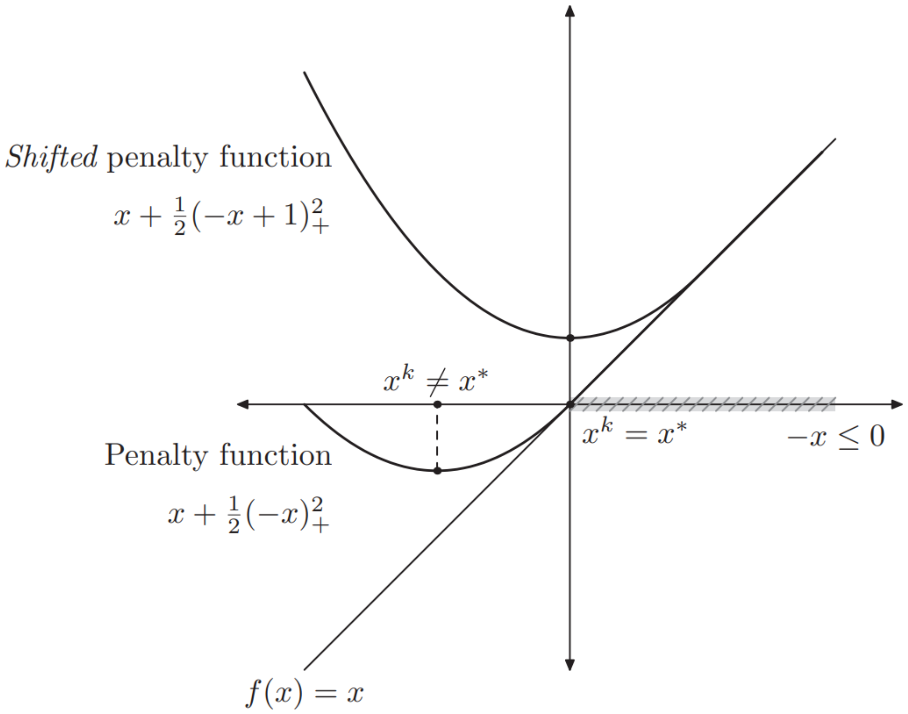
Za ρ_k se kaže da su "kazneni parametri". U idealnom slučaju, na svakoj "vanjskoj iteraciji" rješava se podproblem (2.6) i ako je postignut dovoljan napredak u smislu poboljšanja dopustivosti i komplementarnosti, može se koristiti isti kazneni parametar na sljedećoj vanjskoj iteraciji ($\rho_{k+1} \geq \rho_k$), dok se kazneni parametar mora povećati ako napredak nije zadovoljavajući.

Vrijednosti $\overline{\lambda}_i^k/\rho_k \in \mathbb{R}$ i $\overline{\mu}_i^k/\rho_k \in \mathbb{R}$ mogu se tumačiti kao "pomaci". U zadaći (2.6), ne kažnjava se samo kršenje nedopustivosti (to bi bio slučaj ako bi pomaci bili nule), nego i nedopustivosti uzrokovane pomacima $\overline{\lambda}_i^k/\rho_k$ i $\overline{\mu}_i^k/\rho_k$. Ideja je da čak i s kaznenim parametrom umjerene vrijednosti, razuman odabir pomaka čini moguću podudarnost ili skoru podudarnost rješenja podproblema (2.6) s željenim minimizatorom (2.1). Pogledajmo sliku 3, gdje uspoređujemo rješenje problema

$$x \rightarrow \max, -x \leq 0$$

sa rješenjem podproblema sa $\rho_k = 1$ i nultog pomaka $\left(\overline{\mu}^k = 0\right)$ i rješenjem podproblema sa $\rho_k = 1$ i "točnim" pomakom $\left(\overline{\mu}^k = 1\right)$.

Pomaci se korigiraju prema formulama (2.7) i (2.8). Ideja je sljedeća. Pretpostavimo da je x^k proizašao iz rješavanja (6) s pomacima $\overline{\lambda}_k/\rho_k$ i $\overline{\mu}_k/\rho_k$. Nakon ovog procesa, ako je $g_i(x^k) > 0$, razumno je misliti da pomak treba povećati za iznos te veličine. To dovodi do formule $\mu^{k+1}/\rho_k = \overline{\mu}^k/\rho_k + g_i(x^k)$ ili jednakosti $\mu^{k+1}/\rho_k = \overline{\mu}^k/\rho_k + g_i(x^k)$. Štoviše, ako dopustivost nije narušena i $-\mu^k/\rho_k < g_i(x^k) \leq 0$, izgleda da je pomak bio pretjerano velik i da je potrebno smanjenje kako bih se omogućilo $g_i(x) = 0$ u novoj iteraciji, uz moguće poboljšanje funkcije cilja. Stoga se u idućem koraku uzima $\mu^{k+1}/\rho_k = \overline{\mu}^k/\rho_k + g_i(x^k)$. Konačno, ako je $g_i(x^k) < -\mu^k/\rho_k$, pretpostavljamo da pomak nije bio potreban i da bi trebao biti nula odsada pa nadalje. Slično se razmišljanje može izvesti s obzirom na formulu (2.7), koja popravlja pomake koji odgovaraju ograničenjima tipa jednakosti.



Slika 2.3: *Usporedba rezultata problema* $x \to \max, -x \leq 0$ *i (a) rješenja podproblema sa* $\rho_k = 1$ *bez pomaka* ($\overline{\mu}^k = 0$) *i (b) rješenja podproblema sa* $\rho_k = 1$ *i "točnim" pomakom* ($\overline{\mu}^k = 1$)

Zamislivi su algoritmi u kojima kazneni parametri postaju fiksni i samo se pomaci mijenjaju. Ovi se algoritmi mogu tumačiti, pod pretpostavkama konveksnosti, kao metode proksimalne točke za dualnu zadaću.

U Algoritmu 0.1. ne mijenjaju se samo pomaci, već se mijenjaju i kazneni parametri prema testu (2.9). U (2.9) razmatra se napredak dviju različitih veličina. S jedne strane, potreban je napredak u smislu izvedivosti ograničenja tipa jednakosti, mjereno s $\|h(x^k)\|$. U nedostatku poboljšanja ove mjere nedopustivosti, povećavamo kazneni parametar. S druge strane, kroz (2.9), također je potrebno smanjiti $\min\{-g_i(x^k), \overline{\mu}_i^k/\rho_k\}$. Imajmo na umu da $\overline{\mu}_i^k/\rho_k$, pomak koji je već korišten u (2.6), je nenegativan. Stoga kroz razmatranja $min\{-g_i(x^k), \overline{\mu}_i^k/\rho_k\}$ implicitno testiramo napredak u smislu ispujenja ograničenja nejednakosti $g_i(x) \leq 0$. Zapravo, ako $g_i(x^k)$ teži nuli, poboljšanje $min\{-g_i(x^k), \overline{\mu}_i^k/\rho_k\}$ se vrlo vjerojatno javlja, neovisno o pomacima $\overline{\mu}_i^k/\rho_k$. Zanimljivo je pitanje zašto je potrebno ovo poboljšanje čak i u slučaju da je $g_i(x^k) \ll 0$ i x^k vjerojatno konvergira do točke u kojoj je $g_i(x)$ neaktivan.

Odgovor je sljedeći. Ako je $g_i(x^k)$ "vrlo dopustiv" i pomak $\overline{\mu}_i^k/\rho_k$ je velik, vrlo je vjerojatno pomak natjerao $g_i(x^k)$ da bude vrlo negativan u rješenju (6), budući da podproblem kažnjava odstupanja ograničenja od pomaka, umjesto puke nedopustivosti. Međutim, iako dobivamo dopustivu točku, možda ćemo dobiti i dopustivu točku na granici, budući da se izvediv skup u ovom slučaju nepotrebno smanjuje, malo je vjerojatno da bi se na ovaj način mogao dobiti optimum. Stoga moramo smanjiti pomak povećanjem kaznenog parametra.

Prema gornjim argumentima, razumno je odabrati nove Lagrangeove množitelje $\overline{\lambda}^{k+1}$ i $\overline{\mu}^{k+1}$ kao λ^{k+1} i μ^{k+1}. Općenito, to je ono što se radi u praksi,ali važno je pripaziti na ograničenost $\{\overline{\lambda}^k\}$ i $\{\overline{\mu}^k\}$, jer to osigurava prirodno svojstvo: pomaci bi trebali težiti nuli kada kazneni parametar teži beskonačnosti. Jasno, ako nas navede da kažnjavamo kršenja ograničenja s vrlo velikim ρ_k, nema smisla koristiti pomake daleko od nule jer bismo u tom slučaju jako kažnjavali dopustive točke. Dakle, kada ρ_k teži beskonačnosti, zdrav razum nalaže da pomaci trebaju težiti nuli, a najjednostavniji način da se to jamči je nametanje granica množiteljima. Stoga možemo misliti na $\overline{\mu}^k$ i $\overline{\lambda}^k$ kao na zaštićene množitelje.

U kontekstu proširene Lagrangeove funkcije, neki autori preferiraju, na svakoj vanjskoj iteraciji, mijenjanje množitelja ili kaznenog parametara, ali ne oboje istovremeno. Naša formulacija u Algoritmu 0.1. dopušta tu mogućnost, iako u praksi radije mijenjamo kazneni parametar i množitelje istovremeno.

Možemo primijetiti da se u gornjem algoritmu ne poziva na diferencijabilnost funkcije cilja niti ograničenja. Kazna i Proširene Lagrangeove ideje su neovisne o stupnju glatkoće funkcija koje definiraju problem. Ova karakteristika omogućuje primjenu proširene Lagrangeove tehnike za mnoge nestandardne probleme optimizacije.

2.3 Množitelji i neaktivna ograničenja

Unatoč općenitosti Algoritma 1, moguće je dokazati korisno svojstvo: množitelji koji odgovaraju neaktivnim ograničenjima tipa nejednakosti teže nuli, neovisno o dopustivosti gomilišta. Imajte na umu da u iskazu teorema 2.3.1 pretpostavlja se postojanje gomilišta x^*.

Teorem 2.3.1. *Pretpostavimo da je niz* $\{x^k\}$ *generiran Algoritmom 1. takav da (eventualnim prelaskom na podniz)* $\lim_k x_k = x^*$. *Tada je za dovoljno velik k*

$$\mu_i^{k+1} = 0 \text{ za svaki } i = 1, ..., p \text{ takav da je } g_i(x^*) < 0. \tag{2.10}$$

Dokaz. Prema (2.8), $\mu^{k+1} \in \mathbb{R}_+^p$ za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Pretpostavimo da je $g_i(x^k) < 0$ i neka je $k_1 \in \mathbb{N}$ i $c < 0$ tako da je

$$g_i(x^k) < c < 0 \text{ za svaki } k \geq k_1.$$

Razmatramo dva slučaja:

1. Niz $\{\rho_k\}$ teži k beskonačnosti.

2. Niz $\{\rho_k\}$ je ograničen.

U prvom slučaju, budući da je $\{\overline{\mu}_i^k\}$ je ograničen, postoji $k_2 \geq k_1$ takav da za svaki $k \in K$, $k \geq k_2$,

$$\overline{\mu}_i^k + \rho_k g_i(x^k) < 0.$$

Prema (2.8), to implicira da je

$$\mu_i^{k+1} = 0 \text{ za svaki } k \in K,\ k \geq k_2.$$

Razmotrimo sada slučaj u kojem je $\{\rho_k\}$ ograničen. Tada (2.9) vrijedi za dovoljno velike k, te je,

$$\lim_{k\to\infty} V_i^k = 0.$$

Prema tome,

$$\lim_{k\to\infty} \left|\min\{-g_i(x^k), \overline{\mu}_i^k/\rho_k\}\right| = 0.$$

Budući da je $g_i(x_k) < c < 0$ za dovoljno velik k, imamo da je

$$\lim_{k\in K} \overline{\mu}_i^k/\rho_k = 0.$$

Dakle, budući da je niz $\{\rho_k\}$ ograničen,

$$\lim_{k\in K} \overline{\mu}_i^k = 0.$$

Stoga, za dovoljno velik $k \in K$,

$$\overline{\mu}_i^k + \rho_k g_i(x^k) < 0.$$

Prema definiciji od μ^{k+1} iz (2.8), ovo implicira da je $\mu_i^{k+1} = 0$ za dovoljno velik $k \in K$, kao što smo htjeli dokazati. □

Bibliografija

[1] J.M. Martinez E.G.Birgin, *Practical Agumented Lagrangain Methods for Constrained Optimization*, SIAM, 2014.

[2] Magnus R. Hestenes, *Optimization Theory, The finite dimensional case*, John Wiley and Sons, 1975.

Sažetak

U radu se proučava proširena Lagrangeova funkcija. Za zadaće minimizacije uz uvjete tipa nejednakosti i jednakosti uvodi se pojam kaznene funkcije. Dokazuju se osnovni teoremi o svođenju zadaće uvjetne minimizacije metodom kaznene funkcije na zadaću bezuvjetne minimizacije.

Proširena Lagrangeova funkcija se predstavlja u vidu kaznene funkcije. Ustanovljuje se veza bezuvjetne minimizacije ove funkcije s klasičnim rezultatom o Lagrangeovim množiteljima. Prikazana je i praktična primjena proširene Lagrangeove funkcije u numeričkom rješavanju zadaće uvjetne minimizacije.

Summary

The thesis studies the augmented Lagrange function. For minimization problems with presence of equality and inequality constraints the concept of penalty function is introduced. The basic results on the reduction of constrained minimization problem to the unconditional minimization problem by the method of penalty function are proved.

The augmented Lagrangian function is represented as a penalty function. The relation of the unconstrained minimization of this function with the classical results on Lagrange multipliers is established.

The practical application of the augmented Lagrangian function for the numerical solution of the constrained minimization problem is also presented.

Životopis

Rođen sam u Zagrebu, 23. lipnja 1995. godine. Završio sam matematički smjer III. Gimnazije, te sam 2014. godine upisao Preddiplomski sveučilišni studij Matematika na Prirodoslovno-Matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Zatim na istom fakultetu 2018. godine upisujem Diplomski sveučilišni studij Financijska i poslovna matematika.