Pascalov trokut

Marijanović, Katarina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Katarina Marijanović

PASCALOV TROKUT

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Ljiljana Arambašić

Zagreb, ožujak, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svojoj mentorici prof. dr. sc. Ljiljani Arambašić na vodstvu, strpljenju i pomoći pri izradi diplomskog rada. Hvala Vam što ste našli vremena za mene i svojim korisnim savjetima upotpunili ovaj rad.

Veliko hvala mojim roditeljima i cijeloj obitelji na ljubavi i podršci tijekom studiranja.

Od srca zahvaljujem suprugu Denisu i sinu Niki na bezuvjetnoj ljubavi, pažnji i strpljivosti.

Sadržaj

Uvod

Pascalov trokut je beskonačna trokutasta tablica prirodnih brojeva koja počinje brojem 1 na vrhu trokuta i koja se sastoji od horizontalnih nizova brojeva.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Horizontalni nizovi brojeva nazivaju se redovi, a početni red, koji sadrži samo jedinicu, označavamo kao nulti red. Ostale brojeve konstruiramo u odnosu na brojeve prethodnog reda, tako da sa svakim novim redom ostane "jednakostranična" trokutasta struktura brojeva. Svaki broj dobijemo kao zbroj brojeva dva susjedna broja iz prethodnog reda, uzevši u obzir da su svi brojevi izvan trokuta nule.

Konstrukcija Pascalovog trokuta je vrlo jednostavna, a zbog raznih zanimljivih svojstava može se koristiti u mnogim područjima matematike, na primjer, u kombinatorici, vjerojatnosti, algebri ili teoriji brojeva. Pascalov trokut dobio je ime po francuskom matematičaru Blaise Pascalu, iako su ovaj numerički trokut poznavali i koristili mnogi matematičari stotinama godina prije Pascalovog vremena.

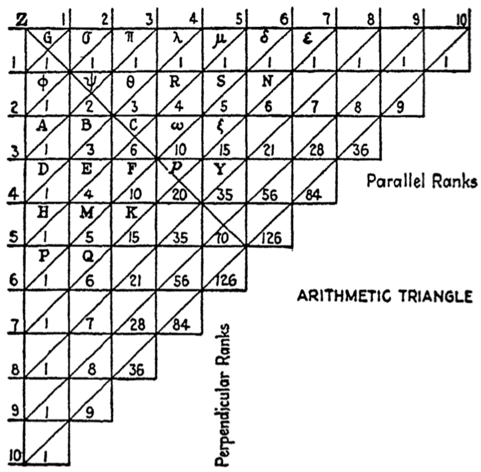
Najpoznatija primjena Pascalovog trokuta je određivanje binomnih koeficijenta $\binom{n}{k}$ u razvoju potencije binoma. Također, elementi Pascalovog trokuta određuju i broj kombinacija k-tog razreda u n-članom skupu. U ovom diplomskom radu bavili smo se proučavanjem svojstava Pascalovog trokuta. Promotrimo li zbrojeve elemenata svakog retka možemo uočiti potencije broja 2. Potencije broja 11 također uočavamo promatrajući redove Pascalovog trokuta. Uz redove, možemo promatrati i dijagonale Pascalovog trokuta, gdje uočavamo figurativne brojeve. Na drugoj dijagonali tako uočavamo trokutaste brojeve, a na trećoj dijagonali tetraedarne brojeve. Posebno je zanimljivo što se u ovom numeričkom trokutu mogu uočiti iracionalni brojevi. Eulerovu konstantu e nalazimo promatrajući produkte elemenata odgovarajućih redova, a broj π zbrojimo li recipročne vrijednosti druge dijagonale uz promjenu predznaka nakon svaka dva člana. Jedan od najpoznatijih nizova u matematici, Fibonaccijev niz, nalazimo promatrajući blage dijagonale Pascalovog trokuta, a obojimo li sve neparne brojeve u Pascalovom trokutu, dobit ćemo jedan od najpoznatijih fraktala, odnosno trokut Sierpinskog. Pascalov se trokut može primijeniti i za računanje niza racionalnih aproksimacija iracionalnih kvadratnih korijena. Osim raznih svojstava Pascalovog trokuta, naveli smo i primjer zadataka s matematičke olimpijade, u kojem se za rješavanje problema koristi Pascalov trokut.

Poglavlje 1

Pascalov trokut

1.1 Povijest Pascalovog trokuta

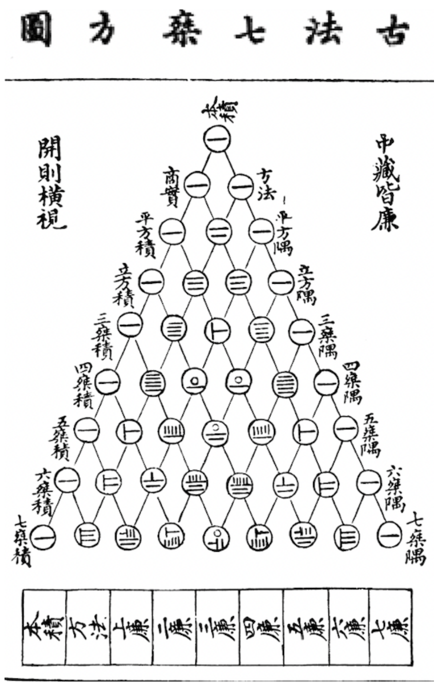
Pascalov trokut dobio je ime po francuskom filozofu, matematičaru, fizičaru, izumitelju i piscu Blaise Pascalu (1623-1662). U jednom od svojih najpoznatijih djela *Traité du triangle arithmétique* (1653), prvi je ujedinio i objasnio upotrebu numeričkog trokuta. Prikazao je trokut okrenut za 45° u odnosu na način kako ga danas prikazujemo, odnosno kao na sljedećoj slici.



Slika 1.1: Numerički trokut iz djela *Traité du triangle arithmétique*, slika preuzeta iz [17]

Djelo je objavljeno 1664. nakon njegove smrti, a francuski je matematičar Pierre Raymond de Montmort zaslužan što je Pascalov trokut imenovan po Pascalu. Montmort je 1708. u svojem djelu o primjeni ideja u vjerojatnosti, *Essay d'analyse sur les jeux de hazard (Analiza igara na sreću)*, upotrijebio izraz *"Table de M. Pascal pour les combinaisons"*, u prijevodu *tablica gospodina Pascala za kombinacije*. Nakon njega, De Moivre 1730. potvrđuje taj naziv u djelu *Miscellanea Analytica (Razna analitika)* i numerički trokut naziva *"Triangulum Arithmeticum Pascalianum"*, što u prijevodu znači *Pascalov aritmetički trokut*, a upravo je pod tim imenom poznat i danas.

Stotinama godina prije Pascalovog vremena mnogi su matematičari poznavali i koristili ovaj numerički trokut. Prvi je prikaz Pascalovog trokuta dao kineski matematičar Yang Hui u 13. stoljeću gdje navodi da je za njega saznao iz djela Jia Xiana iz 11. stoljeća.



Slika 1.2: Yanghuijev trokut, slika preuzeta iz [20]

Yang Hui ga je nazvao tabličnim sustavom za otključavanje binomnih koeficijenata. Na slici 1.2 prikazan je Yanghuijev trokut, koji je u Kini i danas zadržao taj naziv.

Također, u 11. stoljeću se Pascalov trokut pojavio i u Perziji, gdje je o njemu pisao perzijski matematičar Omar Khayyam, no zbog jednostavnosti numeričkog trokuta nije poznato jesu li ova otkrića neovisna.

U Europi se Pascalov trokut prvi put spominje u 13. stoljeću, u djelu *De arithmetica* Jordanusa de Nemorea. Najranije poznate verzije tog djela ne sadrže sliku numeričkog trokuta, stoga se smatra da se ipak prvi put, u tiskanom obliku, pojavljuje 1527. na naslovnoj stranici knjige o aritmetici njemačkog autora, matematičara Petrusa Apianusa. Zatim, redom se pojavljuje u nizu radova europskih matematičara; M. Stifel (1544.), J. Scheubel (1545.), M. Peletier (1549.), N. F. Tartaglia (1556.), R. Bombelli (1572.) i W. Oughtred (1631.), objavljenih prije Pascalove rasprave. Usprkos tome, ne može se osporiti da ovaj numerički trokut zaslužuje nositi Pascalovo ime jer je upravo on u svom djelu sistematizirao i dokazao različita svojstva trokuta koja su već bila poznata, često koristeći princip matematičke indukcije. Pri tome je otkrio nova svojstva, a u nekoliko dodataka pokazao je primjenu artimetičkog trokuta u proučavanju figurativnih brojeva, proširenju binomnih koeficijenata, kombinatorici i teoriji vjerojatnosti.

1.2 O Pascalovom trokutu

Neka je $n \in \mathbb{N}_0$ i $d_0, d_1, d_2, \ldots, d_n$ proizvoljan konačan niz realnih brojeva. Pomoću njega formiramo novi konačan niz brojeva $s_0, s_1, s_2, \ldots, s_n, s_{n+1}$ na sljedeći način

$$\begin{aligned} s_0 &= d_0, \\ s_k &= d_{k-1} + d_k, \quad (1 \leq k \leq n), \\ s_{n+1} &= d_n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Kažemo da je novi niz izveden od početnog niza prema *Pascalovom pravilu*. U nastavku ćemo često pojam „niz" koristiti za „konačan niz", bez spominjanja riječi „konačan". Na primjer, ako uzmemo da je početni niz $2, 0, -2$, tada je novi niz $2, 2, -2, -2$, iz kojeg možemo, ponovno koristeći prethodne relacije, formirati novi niz i tako nastaviti beskonačno puta čime dobivamo *tablicu* nizova

$$\begin{aligned} &2, 0, -2 \\ &2, 2, -2, -2 \\ &2, 4, 0, -4, -2 \\ &2, 6, 4, -4, -6, -2 \\ &2, 8, 10, 0, -10, -8, -2 \\ &2, 10, 18, 10, -10, -18, -10, -2 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Opisat ćemo i dokazati tri svojstva koja je Blaise Pascal otkrio i zapisao u svojoj raspravi. Prije toga ćemo spomenuti propoziciju i korolar koji daju karakteristike nizova formiranih pomoću jednadžbi (1.1).

Propozicija 1.2.1. *Neka je $n \in \mathbb{N}_0$. Neka je niz brojeva $s_0, s_1, \ldots, s_{n+1}$ dobiven iz nekog početnog niza brojeva $d_0, d_1, \ldots, d_n$ koristeći Pascalovo pravilo.*

1. *Zbroj elemenata dobivenog niza dvostruko je veći od zbroja elemenata početnog niza.*

2. *Ako je početni niz brojeva $d_0, d_1, \dots, d_n$ simetričan, tada je i niz $s_0, s_1, \dots, s_{n+1}$ simetričan.*

Napomena. *Neka je $n \in \mathbb{N}_0$. Kažemo da je niz brojeva $a_0, a_1, \dots, a_n$ simetričan ako za svaki k, $0 \leq k \leq n$, vrijedi*

$$a_k = a_{n-k}.$$

Dokaz.

1. Za niz brojeva $s_0, s_1, \dots, s_{n+1}$ prema jednadžbama (1.1), imamo sljedeće jednakosti:

$$\begin{aligned} s_0 + s_1 + s_2 + \ldots + s_n + s_{n+1} &= d_0 + (d_0 + d_1) + (d_1 + d_2) + \ldots + (d_{n-1} + d_n) + d_n = \\ &= 2 \cdot (d_0 + d_1 + \ldots + d_n). \end{aligned}$$

2. Trebamo pokazati da vrijedi

$$s_k = s_{(n+1)-k}$$

za svaki k, $0 \leq k \leq n+1$. Za $k = 0$ i $k = n+1$ jednakost slijedi direktno iz pretpostavke da je početni niz simetričan, odnosno $d_0 = d_n$ i jednadžbi (1.1) prema kojima je $s_0 = d_0$ i $s_{n+1} = d_n$ pa vrijedi jednakost $s_0 = s_{n+1}$. Za $1 \leq k \leq n$ dobivamo

$$s_k = d_{k-1} + d_k = d_{n-(k-1)} + d_{n-k} = d_{(n+1)-k} + d_{[(n+1)-k]-1} = d_{[(n+1)-k]-1} + d_{(n+1)-k} = s_{(n+1)-k}$$

što smo i tvrdili. □

Promotrimo sada niz koji se sastoji od jednog elementa, jedinice i nazovimo taj niz *nulti Pascalov niz*. Iz njega izvedemo novi niz pomoću jednadžbi (1.1) koji predstavlja *prvi Pascalov niz* tablice. Zatim na isti način dobijemo svaki sljedeći niz pomoću prethodnog. Ovakve transformacije svakom idućem nizu dodaju jedan element više, tako da *n-ti Pascalov niz* sadrži $n + 1$ elemenata. Primjenom propozicije 1.2.1 na ovaj slučaj imamo sljedeći korolar.

Korolar 1.2.2. *Za Pascalove nizove vrijedi:*

1. *Zbroj svih elemenata u n-tom Pascalovom nizu jednak je 2^n.*

2. *Svi Pascalovi nizovi su simetrični.*

Dokaz. Prema prvoj tvrdnji propozicije 1.2.1 zbroj je elemenata u svakom novom nizu duplo veći od prethodnog, a zbroj elemenata početnog niza je $1 = 2^0$. Sada matematičkom indukcijom slijedi prva tvrdnja. Druga tvrdnja proizlazi iz druge tvrdnje iste propozicije jer se simetričnost nasljeđuje iz prethodnog niza, a početni je niz, očito, simetričan niz. □

Počevši od nultog, Pascalove nizove stavimo u tablicu tako da se svaki element novog niza nalazi između elemenata prethodnog niza čiji zbroj daje upravo vrijednost tog elementa. Tako dobivenu beskonačnu tablicu brojeva, prikazanu na slici 1.3 nazivamo *Pascalov aritmetički trokut* ili kraće *Pascalov trokut*. Elementi upisani u tablicu vizualno čine jednakostraničan trokut jer sve tri stranice trokuta imaju jednak broj elemenata. Kažemo da je Pascalov trokut simetričan s obzirom na "simetralu" kuta iz vrha nultog reda, što je direktna posljedica druge tvrdnje da su svi redovi Pascalovog trokuta simetrični.

													1													
												1		1												
											1		2		1											
										1		3		3		1										
									1		4		6		4		1									
								1		5		10		10		5		1								
							1		6		15		20		15		6		1							
						1		7		21		35		35		21		7		1						
					1		8		28		56		70		56		28		8		1					
				1		9		36		84		126		126		84		36		9		1				
			1		10		45		120		210		252		210		120		45		10		1			
		1		11		55		165		330		462		462		330		165		55		11		1		
	1		12		66		220		495		792		924		792		495		220		66		12		1	
1		13		78		286		715		1287		1716		1716		1267		715		286		78		13		1

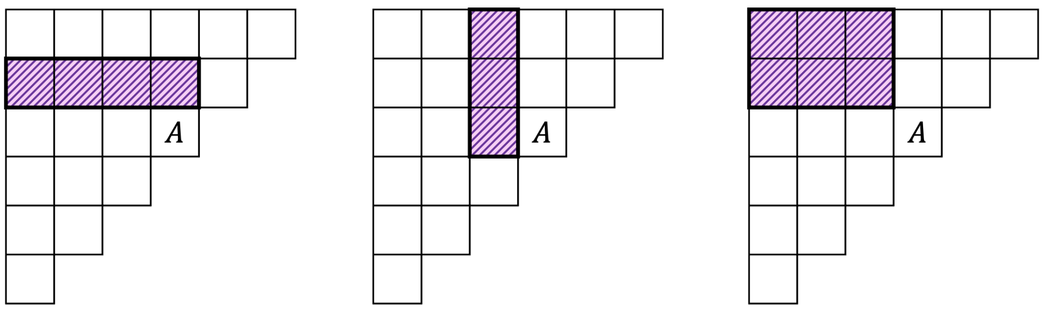
Slika 1.3: Pascalov aritmetički trokut

Konstruiranje Pascalovog trokuta moguće je i bez zasnivanja na jednadžbama (1.1). Pascalov trokut je jednostavno beskonačna numerička tablica trokutastog oblika, gdje dvije stranice sadrže jedinice, a ostali elementi su generirani kao zbroj dva najbliža elementa, lijevog i desnog, u nizu iznad. Za svojstva koja je Pascal u svom djelu naveo promatramo Pascalov trokut pravokutno, odnosno zarotiran ulijevo za 45°. Dakle, sadrži jednice u prvom retku i stupcu, a svi ostali elementi su nastali kao zbroj broja koji se nalazi u istom retku lijevo od njega i broja u prethodnom redu koji je direktno iznad njega. Tako zapisana tablica izgleda ovako

1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	
1	3	6	10	15		
1	4	10	20			
1	5	15				
1	6					
1						

Propozicija 1.2.3. *Za elemente u Pascalovom trokutu vrijedi*

1. *Svaki element A u tablici jednak je zbroju svih elemenata prethodnog reda, počevši od prvog broja pa sve do broja iznad elementa A. (Slika 1.4a)*
2. *Svaki element A u tablici jednak je zbroju svih elemenata prethodnog stupca, počevši od prvog broja pa sve do broja lijevo od elementa A. (Slika 1.4b)*
3. *Za svaki element A u tablici vrijedi da je broj A-1 jednak zbroju svih elemenata prethodnih redova i stupaca, ne uključujući stupac i red koji sadrže element A. Elementi tih stupaca i redova tvore pravokutnik, kao što je prikazano na slici 1.4c.*



(a) (b) (c)

Slika 1.4: Tri svojstva Pascalovog trokuta

Dokaz. Prvo svojstvo ćemo dokazati pomoću matematičke indukcije. Drugo svojstvo se dokazuje analogno, a dokaz trećeg svojstva slijedi iz prethodna dva. Redove i stupce u prikazanom trokutu počinjemo označavati u lijevom gornjem kutu, brojeći od nule. Vrijednost elementa u n-tom retku i m-tom stupcu označavamo s A_n^m.

Sada prvo svojstvo možemo zapisati kao

$$A_n^m = A_{n-1}^0 + A_{n-1}^1 + \ldots + A_{n-1}^m. \tag{1.2}$$

Za $m = 0$ imamo $A_n^0 = A_{n-1}^0$ jer su prema definiciji trokuta svi elementi prvog stupca jedinice, čime smo provjerili bazu indukcije. Pretpostavimo da za neki $k \in \mathbb{N}$ jednakost (1.2) vrijedi, to jest

$$A_n^k = A_{n-1}^0 + A_{n-1}^1 + \ldots + A_{n-1}^k. \tag{1.3}$$

Koristeći induktivnu pretpostavku pokažimo da tvrdnja vrijedi i za $k + 1$. Budući da je svaki element zbroj elemenata iznad i lijevo od njega, vrijedi $A_n^{k+1} = A_n^k + A_{n-1}^{k+1}$. Iz (1.3) dobivamo $A_n^{k+1} = A_n^k + A_{n-1}^{k+1} = A_{n-1}^0 + A_{n-1}^1 + \ldots + A_{n-1}^k + A_{n-1}^{k+1}$. Prema principu matematičke indukcije tvrdnja vrijedi za svaki $k \in \mathbb{N}$.

Drugo svojsto, to jest $A_n^m = A_0^{m-1} + A_1^{m-1} + \ldots + A_n^{m-1}$ dokazujemo analogno dokazu prvog svojstva, provodeći matematičku indukciju po n, odnosno retcima tablice.

Treće svojstvo možemo zapisati kao

$$\begin{aligned} A_n^m - 1 = {} & A_0^0 + A_0^1 + \ldots + A_0^{m-1} + \\ & + A_1^0 + A_1^1 + \ldots + A_1^{m-1} + \ldots + \\ & + A_{n-1}^0 + A_{n-1}^1 + \ldots + A_{n-1}^{m-1}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Prema prvom svojstvu vrijedi da je

$$\begin{aligned} A_0^0 + A_0^1 + \ldots + A_0^{m-1} &= A_1^{m-1}, \\ A_1^0 + A_1^1 + \ldots + A_1^{m-1} &= A_2^{m-1}, \\ &\vdots \\ A_{n-1}^0 + A_{n-1}^1 + \ldots + A_{n-1}^{m-1} &= A_n^{m-1}, \end{aligned} \tag{1.5}$$

a kad uvrstimo jednadžbe (1.5) u jednadžbu (1.4) dobivamo

$$A_n^m - 1 = A_1^{m-1} + A_2^{m-1} \ldots + A_n^{m-1}.$$

Prema drugom svojstvu je

$$A_1^{m-1} + A_2^{m-1} \ldots + A_n^{m-1} = A_n^m - A_0^{m-1} = A_n^m - 1,$$

čime smo dokazali i treće svojstvo. □

Poglavlje 2

Pascalova operacija

Pascalov trokut ćemo nastaviti promatrati u obliku kako ga danas poznajemo, odnosno u obliku jednakostranične trokutaste tablice prikazane na slici 1.3. U nastavku ćemo zato elemente Pascalovog trokuta označiti s $T_n^k,\ n \geq 0,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n$, pri čemu T_n^k predstavlja k-ti element u n-tom Pascalovom nizu.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & T_0^0 & & & \\
 & & T_1^0 & & T_1^1 & & \\
 & T_2^0 & & T_2^1 & & T_2^2 & \\
T_3^0 & & T_3^1 & & T_3^2 & & T_3^3 \\
 & & & \vdots & & &
\end{array}
$$

Na primjer, $T_0^0 = 1,\ T_5^2 = 10,\ T_{13}^6 = 1716$, što se razlikuje od dosadašnjih oznaka gdje je $A_0^0 = 1,\ A_5^2 = 21,\ A_{13}^6 = 27132$.

Fiksirajmo sada k te promatrajmo sljedeći niz

$$T_k^k, T_{k+1}^k, T_{k+2}^k, T_{k+3}^k, \ldots, T_n^k, \ldots$$

To je "dijagonalni niz" paralelan lijevoj stranici Pascalovog trokuta, a kako je Pascalov trokut simetričan, takav niz postoji i s druge strane koji je paralelan desnoj stranici trokuta. Taj niz brojeva u pravokutnom prikazu odgovara k-tom stupcu i k-tom retku, također brojeći od nule.

Koristeći ove oznake za elemente Pascalovog trokuta, definirat ćemo Pascalovu operaciju, koju ćemo kasnije primijeniti za rješavanje jednog zadatka koji se pojavio na matematičkog Olimpijadi. Ovako nazvana operacija ne spada u skupinu standardnih operacija poput zbrajanja, množenja, negacije i slično.

Za elemente T_n^k vrijedi

$$\begin{aligned} T_0^0 &= 1, \\ T_{n+1}^0 &= T_{n+1}^{n+1} = 1, \quad n \geq 0\dots, \\ T_{n+1}^k &= T_n^{k-1} + T_n^k, \quad n \geq 0,\ k = 1,2,3,\dots,n. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Nadalje, definiramo $T_n^k = 0$ za sve $k < 0$ i $k > n$, pa imamo sljedeći prošireni niz

$$\begin{aligned} T_0^0 &= 1, \\ T_0^k &= 0, \quad k \neq 0, \\ T_{n+1}^k &= T_n^{k-1} + T_n^k, \quad n \geq 0,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Navedeni odnosi omogućuju nam grafički prikaz generiranja Pascalovog trokuta. Razmotrimo beskonačnu tablicu nula raspoređenih u redove na sljedeći način

$$\begin{array}{c} \dots.\ 0\ 0\ 0\ 0\ \dots. \\ \dots.\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \dots. \\ \dots.\ 0\ 0\ 0\ 0\ \dots. \\ \dots.\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \dots. \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Pretpostavimo da sad jednu od nula u početnom redu zamijenimo jedinicom. Ovom promjenom ćemo dobiti Pascalov trokut koji počinje upravo iz vrha gdje smo stavili tu jedinicu. Dakle, sada imamo

$$\begin{array}{c} \dots.\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ \dots. \\ \dots.\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ \dots. \\ \dots.\ 0\ 1\ 2\ 1\ 0\ \dots. \\ \dots.\ 0\ 1\ 3\ 3\ 1\ 0\ \dots. \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}$$

Za proizvoljne n i k možemo odrediti T_n^k tako da zapisujemo tablicu dok ne dođemo do traženog retka i stupca. Budući da bi to dugo trajalo, možemo iskoristiti jednadžbe (2.1) te u konačno mnogo koraka izračunati traženi broj. Iako do rješenja dolazimo u konačnom broju koraka, taj broj koraka raste što su n i k veći što također ne bi bio brz izračun. Računanje broja T_n^k nazivamo Pascalovom operacijom. Pascalova operacije je definirana za sve $n \geq 0$, $0 \leq k \leq n$, odnosno ako proširimo definiciju po (2.2) tada je definirana za $n, k \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. U idućim odlomcima ćemo pokazati kako povezujemo Pascalovu operaciju s binomnim koeficijentima te s brojem kombinacija nekog skupa.

2.1 Binomni koeficijenti i Pascalov trokut

Promotrimo potencije binoma $1 + x$, počevši od eksponenta 0

$$\begin{aligned}(1+x)^0 &= 1,\\ (1+x)^1 &= 1+x,\\ (1+x)^2 &= 1+2x+x^2,\\ (1+x)^3 &= 1+3x+3x^2+x^3,\\ (1+x)^4 &= 1+4x+6x^2+4x^3+x^4\\ &\vdots\end{aligned}$$

Općenito, za bilo koji nenegativni cijeli broj n vrijedi

$$(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n,$$

gdje su koeficijenti $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ neki prirodni brojevi, pri čemu je $a_0 = a_n = 1$. S obzirom da ćemo promatrati različite n, koeficijenti polinoma trebaju imati i oznaku n, pa ćemo pisati

$$(1+x)^n = a_0^n + a_1^nx + a_2^nx^2 + a_3^nx^3 + \ldots + a_n^nx^n. \tag{2.3}$$

Koeficijente u razvoju polinoma $(1 + x)^n$, koji se nalaze uz x^k, nazivamo *binomnim koeficijentima*. Povećamo li eksponent za 1 imamo

$$(1+x)^{n+1} = a_0^{n+1} + a_1^{n+1}x + a_2^{n+1}x^2 + a_3^{n+1}x^3 + \ldots + a_n^{n+1}x^n + a_{n+1}^{n+1}x^{n+1}, \tag{2.4}$$

pri čemu je opet $a_0 = a_{n+1} = 1$. Sada $(1 + x)^{n+1}$ možemo zapisati kao

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x). \tag{2.5}$$

Kad raspišemo desnu stranu jednadžbe (2.5) imamo sljedeće jednakosti

$$\begin{aligned}(1+x)^n(1+x) &= (a_0^n + a_1^nx + a_2^nx^2 + a_3^nx^3 + \ldots + a_n^nx^n)(1+x)\\ &= a_0^n + a_1^nx + a_2^nx^2 + a_3^nx^3 + \ldots + a_n^nx^n +\\ &+ a_0^nx + a_1^nx^2 + a_2^nx^3 + \ldots + a_{n-1}^nx^n + a_n^nx^{n+1}\\ &= a_0^n + (a_0^n + a_1^n)x + (a_1^n + a_2^n)x^2 + \ldots + (a_{k-1}^n + a_k^n)x^k +\\ &+ \ldots + (a_{n-1}^n + a_n^n)x^n + a_n^nx^{n+1}.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Iz (2.4) i (2.6) slijedi

$$\begin{aligned}a_0^{n+1} &= a_0^n,\\ a_k^{n+1} &= a_{k-1}^n + a_k^n, \quad k = 1, 2, \ldots, n,\\ a_{n+1}^{n+1} &= a_n^n.\end{aligned}$$

Prema ovim jednadžbama uočavamo kako smo koeficijente razvoja polinoma za eksponent $n + 1$ zapravo dobili iz koeficijenata razvoja za eksponent n prema Pascalovoj operaciji. Budući da se koeficijenti za razvoj polinoma s eksponentom 0 podudara s nultim Pascalovim nizom, svi sljedeći koeficijenti u razvoju polinoma će se podudarati s pripadajućim Pascalovim nizovima. Stoga, možemo zaključiti da je a_k^n definiran samo za $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ te da vrijedi

$$a_k^n = T_n^k.$$

Dakle, binomni koeficijenti u rastavu izraza $(1 + x)^n$ grade Pascalov trokut. Jednadžbu (2.3) možemo zapisati kao

$$(1 + x)^n = T_n^0 + T_n^1 x + T_n^2 x^2 + \ldots + T_n^k x^k + \ldots + T_n^n x^n.$$

Binomne koeficijente a_k^n obično zapisujemo kao $\binom{n}{k}$, dakle

$$(1 + x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots + \binom{n}{n}x^n, \tag{2.7}$$

a za prvih nekoliko binomnih koeficijenata je

$$\begin{array}{c}
\binom{0}{0} = 1 \\
\binom{1}{0} = 1 \quad \binom{1}{1} = 1 \\
\binom{2}{0} = 1 \quad \binom{2}{1} = 2 \quad \binom{2}{2} = 1, \\
\binom{3}{0} = 1 \quad \binom{3}{1} = 3 \quad \binom{3}{2} = 3 \quad \binom{3}{3} = 1 \\
\binom{4}{0} = 1 \quad \binom{4}{1} = 4 \quad \binom{4}{2} = 6 \quad \binom{4}{3} = 6 \quad \binom{4}{4} = 1
\end{array}$$

Generaliziramo li gornji račun, imamo sljedeću jednakost

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}$ i $n \in \mathbb{N}_0$. Ovu jednakost nazivamo *binomni poučak* ili *binomni identitet*, a jednakost (2.7) jedna je od varijanti binomnog poučka.

2.2 Kombinacije i Pascalov trokut

Neka je zadan skup koji ima n elemenata. Promatramo njegove podskupove koji imaju k elemenata, pri čemu je $0 \leq k \leq n$. Svaki k-člani podskup skupa od n elemenata nazivamo *kombinacija k-tog razreda u n-članom skupu*. Ukupan broj svih kombinacija k-tog razreda u n-članom skupu označimo s C_n^k. Neka je C_n broj svih podskupova n-članog skupa, dakle

$$C_n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n.$$

Želimo odrediti brojeve C_n i C_n^k. Očito je

$$C_n^0 = C_n^n = 1, \tag{2.8}$$

to jest za bilo koji n-člani skup samo jedan njegov podskup ima 0 elemenata i samo jedan njegov podskup ima n elemenata. Nadalje, vrijedi

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \tag{2.9}$$

odnosno za svaki n-člani skup je broj njegovih k-članih podskupova jednak broju njegovih $(n-k)$-članih podskupova. To slijedi iz činjenice da je komplement k-članog skupa jedinstveno određen i ima $n-k$ elemenata. Također, dokazat ćemo da vrijedi

$$C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k. \tag{2.10}$$

Neka je M proizvoljni $(n+1)$-člani skup. Broj svih njegovih k-članih podskupova je C_{n+1}^k. Odaberimo jedan element skupa M i označimo ga s a. Zatim, označimo s X broj onih k-članih podskupova koji sadrže a, a s Y broj onih k-članih podskupova koji ne sadrže a. Vrijedi

$$C_{n+1}^k = X + Y.$$

Svaki $A \subseteq M$ takav da je $a \in A$ je u jednoznačnoj korespondenciji s $A \backslash \{a\} \subseteq M \backslash \{a\}$. Zato je $X = C_n^{k-1}$. Nadalje, za $A \subseteq M$ vrijedi da $a \notin A$ ako i samo ako je $A \subseteq M \backslash \{a\}$. Zato je $Y = C_n^k$. Iz (2.10) slijedi da se niz

$$C_{n+1}^0, C_{n+1}^1, C_{n+1}^2 \ldots, C_{n+1}^{n+1}$$

može dobiti iz niza

$$C_n^0, C_n^1, C_n^2 \ldots, C_n^n$$

prema Pascalovoj operaciji. Budući da za $n = 0$ vrijedi da je $C_0^0 = 1$, što se podudara s prvim uvjetom Pascalove operacije možemo zaključiti da je

$$C_n^k = T_n^k. \tag{2.11}$$

Dakle,

$$\begin{array}{c} C_0^0 = 1 \\ C_1^0 = 1 \quad C_1^1 = 1 \\ C_2^0 = 1 \quad C_2^1 = 2 \quad C_2^2 = 1, \\ C_3^0 = 1 \quad C_3^1 = 3 \quad C_3^2 = 3 \quad C_3^3 = 1 \\ C_4^0 = 1 \quad C_4^1 = 4 \quad C_4^2 = 6 \quad C_4^3 = 6 \quad C_4^4 = 1 \\ \vdots \end{array}$$

Budući da vrijedi $C_n^k = a_n^k$, odnosno $C_n^k = \binom{n}{k}$, binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ označava i broj kombinacija k-tog razreda u n-članom skupu.

Veza s faktorijelama

Izrazimo elemente Pascalovog trokuta pomoću faktorijela. Sjetimo se da je za $n \in \mathbb{N}_0$

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n,$$

a dogovorno je definirano $0! = 1$. Za $m \geq 0$ i $0 \leq q \leq m$ označimo

$$F_m^q = \frac{m!}{q! \cdot (m-q)!}. \tag{2.12}$$

Vrijedi

$$\begin{gathered} F_0^0 = \frac{0!}{0! \cdot 0!} = 1, \\ F_m^0 = \frac{m!}{0! \cdot m!} = 1, \quad F_m^m = \frac{m!}{m! \cdot 0!} = 1. \end{gathered} \tag{2.13}$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} F_n^{k-1} + F_n^k &= \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} + \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k)! \cdot (n-k+1)} + \frac{n!}{(k-1)! \cdot k \cdot (n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot \left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{n+1}{k \cdot (n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k! \cdot (n+1-k)!} \\ &= F_{n+1}^k. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Iz (2.13) i (2.14) zaključujemo da je $F_m^q = T_m^q$, to jest

$$T_m^q = \frac{m!}{q! \cdot (m-q)!}. \tag{2.15}$$

Jednadžbu (2.15) možemo skratiti s $(m-q)!$ pa dobivamo da je

$$T_m^q = \frac{m \cdot (m-1) \cdot \ldots \cdot (m-(q-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot q}. \tag{2.16}$$

Dakle, izraz za binomni koeficijent, ali i broj kombinacija k-tog razreda u n-članom skupu možemo računati kao

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot k}. \tag{2.17}$$

Poglavlje 3

Svojstva Pascalovog trokuta

Pascalov trokut ima razna zanimljiva svojstva, a neka od njih ćemo razmotriti u ovom poglavlju. Podijelit ćemo ih nekoliko skupina.

3.1 Osnovna svojstva

Pod osnovna svojstva ubrajamo i svojstva propozicije 1.2.3 koje je Pascal dokazao u svome djelu. Iako su svojstva prikazana za zarotirani Pascalov trokut nećemo ih posebno navoditi budući da smo ih već ranije dokazali. Slično bismo dokazali i za trokut kakav trenutno promatramo.

Osna simetrija

Među prvim pravilnostima koje se mogu uočiti na Pascalovom trokutu jest simetrija lijeve i desne strane trokuta. Pri tome srednji stupac trokutastog prikaza zamišljamo kao os simetrije. Ovo svojstvo vrijedi zbog korolara 1.2.2 u kojem smo dokazali da su svi Pascalovi nizovi simetrični pa je time i Pascalov trokut simetričan.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Prirodni brojevi

U Pascalovom trokutu odmah se može uočiti i niz prirodnih brojeva na prvoj dijagonali. Za svaki $k \in \mathbb{N}, k \geq 0$, k-ta dijagonala Pascalovog trokuta je niz $T_0^k, T_1^k, T_2^k, T_3^k, \ldots$ Uočimo da je nulta dijagonala konstantni niz $1, 1, 1, \ldots$, dok prva dijagonala predstavlja niz prirodnih brojeva. Prva dijagonala počinje jedinicom i povećava se za jedan u svakom novom redu te tako redom dobijemo prirodne brojeve.

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Potencije broja 2

Zbrajanjem elemenata u redovima Pascalovog trokuta dobivamo redom potencije broja 2. Ovo svojstvo Pascalovih nizova smo već spomenuli i dokazali u korolaru 1.2.2.

$$
\begin{array}{l}
1 = 2^0 \\
1 + 1 = 2^1 \\
1 + 2 + 1 = 2^2 \\
1 + 3 + 3 + 1 = 2^3 \\
1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 2^4 \\
1 + 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 2^5 \\
1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 2^6 \\
\vdots
\end{array}
$$

Potencije broja 11

Osim potencija broja 2, promatrajući redove vidimo uzorak potencija broja 11. Ako brojeve u prva četiri reda promotrimo kao znamenke nekog broja, uočavamo da se radi upravo o potencijama broja 11. Zaista,

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1 = 11^0 \\ 11 = 11^1 \\ 121 = 11^2 \\ 1331 = 11^3 \\ 14641 = 11^4 \end{array}$$

U sljedećim redovima imamo višeznamenkaste brojeve, pa ćemo ih interpretirati drugačije. To možemo na dva načina. Promotrimo peti redak Pascalovog trokuta

$$1\ 5\ 10\ 10\ 5\ 1$$

Prvi način je prenošenje znamenki jedno mjesto ulijevo ako je broj višeznamenkasti, pri čemu se prenošenje može dogoditi i nekoliko puta. Peti redak bi čitali $1(5+1)(0+1)051 = 161051 = 11^5$. Drugi način je mjesni zapis broja

$$1\cdot10^5+5\cdot10^4+10\cdot10^3+10\cdot10^2+5\cdot10^1+1\cdot10^0 = 100000+50000+10000+1000+50+1 = 161051.$$

Ovo svojstvo slijedi iz binomnog poučka, jer je

$$11^n = (10+1)^n = \binom{n}{0}10^n + \binom{n}{1}10^{n-1} + \binom{n}{2}10^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1}10^1 + \binom{n}{n}.$$

Za prvih nekoliko n-ova imamo

$$\begin{aligned}
(10+1)^0 &= 1 && = 1 \\
(10+1)^1 &= 1\cdot 10 + 1\cdot 1 && = 11 \\
(10+1)^2 &= 1\cdot 10^2 + 2\cdot 10 + 1 && = 121 \\
(10+1)^3 &= 1\cdot 10^3 + 3\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + 1 && = 1331 \\
(10+1)^4 &= 1\cdot 10^4 + 4\cdot 10^3 + 6\cdot 10^2 + 4\cdot 10 + 1 && = 14641 \\
(10+1)^5 &= 1\cdot 10^5 + 5\cdot 10^4 + 10\cdot 10^3 + 10\cdot 10^2 + 5\cdot 10 + 1 = \\
&= 100000 + 50000 + 10000 + 1000 + 50 + 1 && = 161051 \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Umjesto zapisa broja u dekadskom brojevnom sustavu možemo promatrati i zapise u nekom drugom brojevnom sustavu. Za svaki $b \in \mathbb{N}$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$(b+1)^n = \binom{n}{0}b^n + \binom{n}{1}b^{n-1} + \binom{n}{2}b^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1}b^1 + \binom{n}{n}.$$

Na primjer, promatrajmo bazu $b = 3$. Tada je

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & & 1 & \\ 1 & & 2 & & 1 \end{array} \qquad \begin{aligned} (1)_3 &= 1\cdot 3^0 = 1 = 4^0 \\ (11)_3 &= 1\cdot 3^1 + 1\cdot 3^0 = 3+1 = 4 = 4^1 \\ (121)_3 &= 1\cdot 3^2 + 2\cdot 3^1 + 1\cdot 3^0 = 9+6+1 = 16 = 4^2 \end{aligned}$$

U ovom slučaju, uz prijenos znamenaka, treba paziti i na odabranu bazu. Primjerice, promotrimo treći redak 1 3 3 1. Najprije članove prikažemo u sustavu s bazom 3 pa imamo 1 10 10 1. Sada prenosimo znamenke ulijevo pa dobijemo $(2101)_3$, a zatim računamo.

$$\begin{aligned} 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \qquad (2101)_3 &= 2\cdot 3^3 + 1\cdot 3^2 + 0\cdot 3^1 + 1\cdot 3^0 \\ &= 54+9+0+1 = 64 = 4^3 \\ 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \qquad (100111)_3 &= 1\cdot 3^5 + 0\cdot 3^4 + 0\cdot 3^3 + 1\cdot 3^2 + 1\cdot 3^1 + 1\cdot 3^0 \\ &= 243+0+0+9+3+1 = 256 = 4^4 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Omjer dvaju susjednih članova

Omjer bilo koja dva susjedna člana u Pascalovom trokutu jednak je omjeru broja članova do prvog i broja članova od drugog susjeda. Na primjer, za osmi red i neka dva para susjeda imamo

$$\underbrace{1 \quad 8 \quad 28 \quad 56}_{4} \; \underbrace{70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1}_{5} \qquad \frac{56}{70} = \frac{4}{5}$$

$$\underbrace{1 \quad 8 \quad 28}_{3} \; \underbrace{56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1}_{6} \qquad \frac{28}{56} = \frac{3}{6}$$

Iskažimo i dokažimo ovu tvrdnju.

Korolar 3.1.1. *Za sve $n, k \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$\frac{T_n^k}{T_n^{k+1}} = \frac{k+1}{n-k}.$$

Dokaz. Dokaz provodimo direktno,

$$\frac{T_n^k}{T_n^{k+1}} = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{\frac{n!}{k!(n-k)!}}{\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}} = \frac{k!(k+1)(n-k-1)!}{k!(n-k-1)!(n-k)} = \frac{k+1}{n-k}.$$

Dakle, tvrdnja vrijedi. □

Zbroj kvadrata članova *n*-tog reda

Zbroj kvadrata članova n-tog reda jednak je srednjem članu $2n$-tog reda. Promotrimo zbrojeve kvadrata nekoliko redova Pascalovog trokuta.

$$
\begin{array}{cc}
1 & \\
1 \quad 1 & \\
1 \quad 2 \quad 1 & 1^2+2^2+1^2=6 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 & 1^2+3^2+3^2+1^2=20 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 & \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 & 1^2+5^2+10^2+10^2+5^2+1^2=252 \\
1 \quad 6 \quad 15 \quad 20 \quad 15 \quad 6 \quad 1 & \vdots \\
1 \quad 7 \quad 21 \quad 35 \quad 35 \quad 21 \quad 7 \quad 1 & \\
1 \quad 8 \quad 28 \quad 56 \quad 70 \quad 56 \quad 28 \quad 8 \quad 1 & \\
1 \quad 9 \quad 36 \quad 84 \quad 126 \quad 126 \quad 84 \quad 36 \quad 9 \quad 1 & \\
1 \quad 10 \quad 45 \quad 120 \quad 210 \quad 252 \quad 210 \quad 120 \quad 45 \quad 10 \quad 1 & \\
\vdots &
\end{array}
$$

Dokažimo da ovo vrijedi i općenito.

Korolar 3.1.2. *Za sve $n, k \in \mathbb{N}_0$ vrijedi*

$$\sum_{k=0}^{n} (T_n^k)^2 = T_{2n}^n. \tag{3.1}$$

Dokaz. Kako je $T_n^k = \binom{n}{k}$ za sve $n, k \in \mathbb{N}_0$, trebamo dokazati da je

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}. \tag{3.2}$$

Zbog simetričnosti Pascalovog trokuta $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ ovo je ekvivalentno s

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}. \tag{3.3}$$

Zamislimo skup od $2n$ kuglica, koji se sastoji od n bijelih kuglica i n crnih kuglica. Biramo li njih n od ukupnog broja, broj takvih podskupova je $\binom{2n}{n}$, odnosno desna strana jednakosti. S druge strane, ako imamo k bijelih kuglica u podskupu od n odabranih kuglica, tada će biti $n-k$ crnih kuglica. Broj svih takvih mogućnosti je upravo lijeva strana jednakosti, tj. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$. □

Kvadrat kao zbroj susjeda

Ako odaberemo bilo koji broj s prve dijagonale, kvadrat tog broja bit će jednak zbroju susjeda koji se nalaze na drugoj dijagonali, desno od njega i ispod. Slikovito možemo zamisliti jednakostraničan trokut okrenut vrhom prema dolje, u kojem vrijedi kvadrat gornjeg lijevog vrha trokuta jednak je zbroju ostala dva vrha.

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 \\
 & & & & & & & \vdots & & & & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\\ \\
2^2 = 1 + 3 = 4 \\
\\
4^2 = 6 + 10 = 16 \\
\\
6^2 = 15 + 21 = 36 \\
\vdots
\end{array}
$$

Korolar 3.1.3. *Za sve $n \geq 2$ vrijedi*

$$\left(T_n^1\right)^2 = T_n^2 + T_{n+1}^2.$$

Dokaz. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$T_n^2 + T_{n+1}^2 = \binom{n}{2} + \binom{n+1}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} + \frac{(n+1) \cdot n}{1 \cdot 2} = \frac{(n^2 - n) + (n^2 + n)}{2}$$

$$= \frac{2n^2}{2} = n^2 = \binom{n}{1}^2 = \left(T_n^1\right)^2,$$

čime smo dokazali uočeno pravilo. □

Prosti broj i njegovi višekratnici

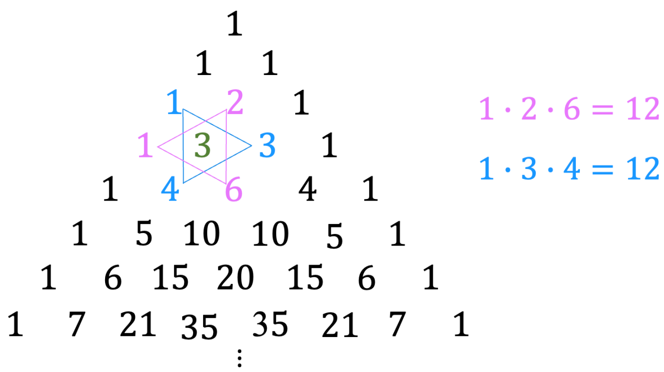
Ako je prvi član u redu, prost broj p, tada su svi članovi tog reda, osim prvog i zadnjeg, višekratnici broja p. Drugim riječima, ako je p prost broj, tada su svi T_p^k za $k = 1, 2, \ldots, p-1$ višekratnici broja p. Neka je p prost broj. Za $k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ vrijedi

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}.$$

Promotrimo posebno djeljivost brojnika i nazivnika. Budući da je $k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, a time i $p - k \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$, prosti faktori nazivnika $k!(p-k)!$ su najviše $p-1$, iz čega zaključujemo da nazivnik nije djeljiv s p. S druge strane, brojnik $p!$ je djeljiv s p pa je prema tome i cijeli razlomak djeljiv s p.

Davidova zvijezda

Oko bilo kojeg broja u Pascalovom trokutu, počevši od prve dijagonale, možemo označiti sve njegove susjede koji tvore Davidovu zvijezdu, odnosno dva trokuta, kao što je prikazano na sljedećoj slici. Za označene trokute vrijedi da je umnožak brojeva vrhova jednog trokuta jednak umnošku brojeva vrhova drugog trokuta.



Iskažimo i dokažimo ovu tvrdnju.

Teorem 3.1.4. *Za sve $n, k \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$T_{n-1}^{k-1} \cdot T_n^{k+1} \cdot T_{n+1}^{k} = T_{n-1}^{k} \cdot T_n^{k-1} \cdot T_{n+1}^{k+1}.$$

Dokaz. Dokaz provodimo direktno. Lijeva strana prethodne jednakosti je jednaka

$$\binom{n-1}{k-1} \cdot \binom{n}{k+1} \cdot \binom{n+1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)! \cdot (n-1-k+1)!} \cdot \frac{n!}{(k+1)! \cdot (n-k-1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{k! \cdot (n+1-k)!}$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot n! \cdot (n+1)!}{(k-1)! \cdot k! \cdot (k+1)! \cdot (n-k-1)! \cdot (n-k)! \cdot (n-k+1)!},$$

dok je desna strana jednaka

$$\binom{n-1}{k} \cdot \binom{n}{k-1} \cdot \binom{n+1}{k+1} = \frac{(n-1)!}{k! \cdot (n-1-k)!} \cdot \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k+1)!} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+1)! \cdot (n+1-k-1)!}$$

$$= \frac{(n-1)! \cdot n! \cdot (n+1)!}{(k-1)! \cdot k! \cdot (k+1)! \cdot (n-k-1)! \cdot (n-k)! \cdot (n-k+1)!}.$$

Dakle, tvrdnja vrijedi. □

Hokejaška palica

Pogledajmo još jedno vizualno zanimljivo svojstvo Pascalovog trokuta. Krenemo li od bilo koje jedinice s desnog ruba i spuštamo se po dijagonali do bilo kojeg mjesta u Pascalovom trokutu, a zatim 'skrenemo' dolje desno tako da dobijemo *hokejašku palicu*, zbroj elemenata do tog mjesta bit će jednak upravo broju na tom mjestu. U Pascalovom trokutu to izgleda ovako

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&1&&&&&&&&\\
&&&&&&&1&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&2&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&3&&3&&1&&&&&\\
&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&\\
&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&\\
&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&\\
&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1&\\
1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1\\
&&&&&&&&\vdots&&&&&&&&
\end{array}$$

$$1+3+6+10=20$$
$$T_2^2+T_3^2+T_4^2+T_5^2=T_6^3$$

$$1+6+21=28$$
$$T_5^5+T_6^5+T_7^5=T_8^6$$

Zbog simetričnosti Pascalovog trokuta, analogno vrijedi i ako krenemo s lijevog ruba Pascalovog trokuta.

Teorem 3.1.5. *Za sve $n, k \in \mathbb{N}_0, n \geq k$ vrijedi*

$$\sum_{i=k}^{n} T_i^k = T_{n+1}^{k+1}. \tag{3.4}$$

Dokaz. Ako članove Pascalovog trokuta prikažemo pomoću binomnih koeficijenata tada je jednakost (3.4) ekvivalentna s

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}. \tag{3.5}$$

Dokaz provodimo matematičkom indukcijom po n. Ako je $n = k$ tada vrijedi

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \sum_{i=k}^{k} \binom{i}{k} = \binom{k}{k} = 1 = \binom{k+1}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$

čime smo provjerili bazu indukcije. Pretpostavimo da (3.5) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ te dokažimo da vrijedi i za $n + 1$. Imamo

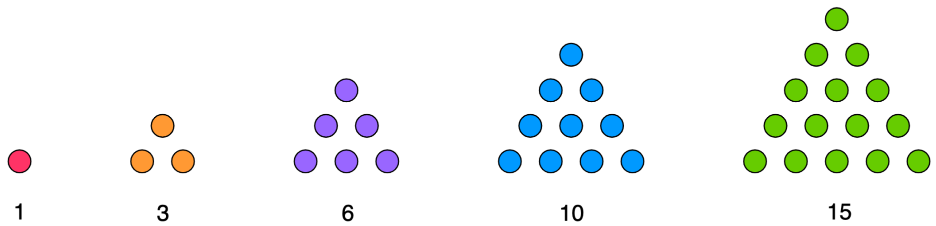
$$\sum_{i=k}^{n+1} \binom{i}{k} = \sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1}.$$

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja teorema vrijedi. $\square$

3.2 Geometrijska svojstva

Figurativni brojevi

U Pascalovom su trokutu posebno zanimljivi figurativni brojevi, to jest brojevi koji predstavljaju broj točaka koje se mogu pravilno rasporediti unutar pravilnih poligona, npr. trokutasti, četverokutni, peterokutni, šesterokutni i općenito n-terokutni brojevi. Promotrimo trokutaste brojeve, brojeve koji tvore jednakostraničan trokut. Krećemo od jedne točke, zatim ispod dodamo dvije točke, nakon toga tri točke u donji red i tako nastavljamo. Slika 3.1 prikazuje nekoliko prvih trokutastih brojeva. Možemo primijetiti kako se ovi



Slika 3.1: Trokutasti brojevi

brojevi nalaze na drugoj dijagonali Pascalovog trokuta.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}$$

Ako niz trokutastih brojeva označimo s T_n, tada je

$$\begin{aligned}
T_1 &= 1 \\
T_2 &= T_1 + 2 = 1 + 2 = 3 \\
T_3 &= T_2 + 3 = 1 + 2 + 3 = 6 \\
T_4 &= T_3 + 4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10 \\
&\vdots \\
T_n &= T_{n-1} + n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + n
\end{aligned}$$

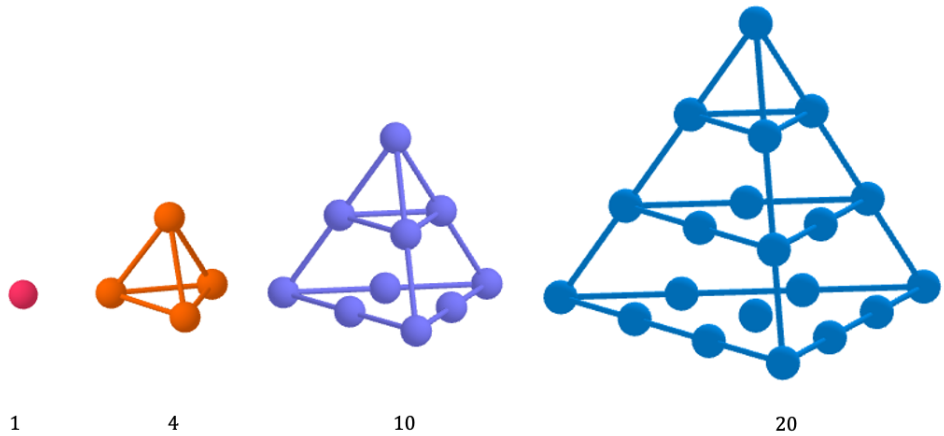
Zaključujemo da je n-ti trokutasti broj jednak zbroju prvih n prirodnih brojeva

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Dakle, trokutasti brojevi se podudaraju s drugom dijagonalom Pascalovog trokuta. Prema tome,

$$T_n = \binom{n+1}{2} = T^2_{n+1}.$$

Treća dijagonala sadrži tetraedarne brojeve, $1, 4, 10, 20, 35, \ldots$ Ti brojevi predstavljaju niz parcijalnih suma trokutastih brojeva. Geometrijski, oni predstavljaju pravilno raspoređene kugle po bridovima, stranama i unutrašnjosti tetraedra, kao na slici 3.2. Označimo



Slika 3.2: Tetraedarni brojevi

li tetraedarne brojeve s P_n, tada je

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} T_k.$$

Kada uvrstimo izraze za trokutaste brojeve, dobijemo opću formulu za računanje tetraedarnih brojeva.

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} T_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2+k}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \binom{n+2}{3} = T^3_{n+2}.$$

Nadalje, u Pascalovom trokutu možemo uočiti i šesterokutne brojeve, $1, 6, 15, 28, 45, \ldots$, koji se geometrijski mogu rasporediti po stranama i unutrašnjosti pravilnog šesterokuta. Svaki šesterokutni broj je ujedno i trokutasti pa ih nalazimo na dijagonali trokutastih brojeva. Svaki drugi član druge dijagonale je i šesterokutni broj. Opća formula za šesterokutne brojeve je $S_n = n(2n-1)$. Uočimo da je

$$T_{2n}^2 = \binom{2n}{2} = \frac{2n(2n-1)}{2} = \frac{4n^2-2n}{2} = 2n^2 - n = n(2n-1) = S_n.$$

Catalanovi brojevi

Catalanovi brojevi predstavljaju niz prirodnih brojeva koji se javljaju u mnogim kombinatornim problemima, primjerice problem rukovanja, problem putova u cjelobrojnoj mreži, problem zagrada, problem binarnih stabala i slično. Prvih nekoliko Catalanovih brojeva je

$$1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, \ldots$$

Označimo li Catalanove brojeve s C_n, opći član niza Catalanovih brojeva jednak je $C_n = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}$. Catalanovi brojevi u Pascalovom trokutu nisu odmah uočljivi, a možemo ih dobiti kao razliku susjednih elemenata u odabranim stupcima. Možemo promatrati razlike članova obojanih rozom ili plavom bojom.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
&&&&&&&&1&&&&&&&& \\
&&&&&&&1&&1&&&&&&& \\
&&&&&&1&&2&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&3&&3&&1&&&&& \\
&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&& \\
&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&& \\
&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&& \\
&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1& \\
1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1 \\
&&&&&&&&\vdots&&&&&&&&
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
C_0 &= 1 = 1 \\
C_1 &= 1 = 2 - 1 = 1 \\
C_2 &= 3 - 1 = 6 - 4 = 2 \\
C_3 &= 10 - 5 = 20 - 15 = 5 \\
C_4 &= 35 - 21 = 70 - 56 = 14 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Iskažimo i dokažimo tvrdnju.

Korolar 3.2.1. *Za $n \geq 0$ u Pascalovom trokutu vrijedi*

$$C_n = T_{2n}^n - T_{2n}^{n+1}.$$

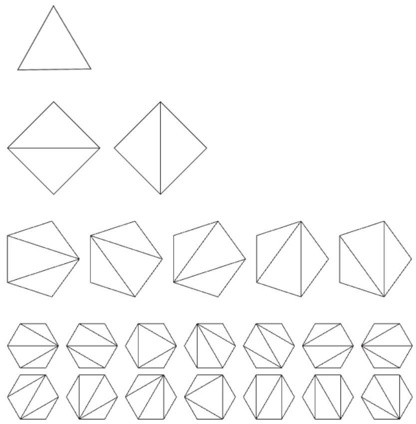
Dokaz. Dokaz provodimo direktno,

$$T_{2n}^n - T_{2n}^{n+1} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} \cdot \frac{1}{n(n+1)} = \frac{(2n)!}{n!n!} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{\binom{2n}{n}}{n+1}.$$

Dakle, tvrdnja vrijedi. □

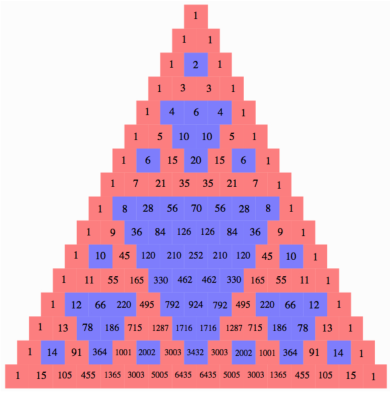
Zanimljivo je da je povijesno najstariji kombinatorni problem, koji je doveo do otkrića Catalanovih brojeva, geometrijski problem triangulacije konveksnog n-terokuta, odnosno broj načina na koje je moguća maksimalna dekompozicija koveksnog n-terokuta na $n-2$ trokuta. Lako zaključujemo da je potrebno povući $n-3$ dijagonale koje se ne sijeku da bismo n-terokut triangulirali. Za trokut, postoji samo jedan način triangulacije. Za četverokut, možemo povući jednu dijaganalu na dva načina pa postoje dva načina, za peterokut 5 načina, šesterokut 14 načina i tako dalje. Tada za svaki n-terokut, $n \geq 2$ vrijedi da je broj načina triangulacije jednak C_{n-2}, pri čemu je definirano da broj triangulacija za dužinu iznosi 1. Triangulacija nekoliko prvih n-terokuta je prikazana na slici 3.3.



Slika 3.3: Triangulacija n-terokuta za $n = 3, 4, 5, 6$

Trokut Sierpinskog

Obojimo li sve neparne brojeve u Pascalovom trokutu, dobit ćemo trokut Sierpinskog, jedan od najpoznatijih primjera fraktala. Tako obojani Pascalov trokut vidimo na slici 3.4 preuzetoj s [1]. Dokaz da Pascalov trokut modulo 2 zaista konvergira trokutu Sierpinskog izostavljamo zbog duljine i kompleksnosti. Dokaz za ovo svojstvo se može naći u [2] Općenito, ovu tvrdnju možemo generalizirati tako da promatramo Pascalov trokut modulo 3, modulo 4, odnosno, modulo r, $r \in \mathbb{N}$. Tada dobivamo razne oblike fraktala.



Slika 3.4: Trokut Sierpinskog u Pascalovom trokutu

3.3 Brojevi π, e, n^n

Broj π

Promotrimo ponovno drugu dijagonalu Pascalovog trokuta. Već smo spomenuli da ona sadrži trokutaste brojeve, a sada pokažimo da pomoću njih možemo dobiti broj π iz Pascalovog trokuta. Druga dijagonala sadrži brojeve $1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, \ldots$ Zbrojimo li njihove recipročne vrijednosti uz promjenu predznaka nakon svaka dva člana dobit ćemo $\pi - 2$, odnosno, vrijedi:

$$\pi - 2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} - \frac{1}{28} - \frac{1}{36} + \frac{1}{45} + \frac{1}{55} - \frac{1}{66} - \frac{1}{78} + \ldots$$

$$\pi = 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} - \frac{1}{28} - \frac{1}{36} + \frac{1}{45} + \frac{1}{55} - \frac{1}{66} - \frac{1}{78} + \ldots$$

Ovu tvrdnju ćemo dokazati.

Teorem 3.3.1. *Za elemente Pascalovog trokuta vrijedi*

$$\begin{aligned}\pi &= 2 + \frac{1}{T_2^2} + \frac{1}{T_3^2} - \frac{1}{T_4^2} - \frac{1}{T_5^2} + \frac{1}{T_6^2} + \frac{1}{T_7^2} - \frac{1}{T_8^2} - \frac{1}{T_9^2} + \frac{1}{T_{10}^2} + \ldots \\ &= 2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{1+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{T_n^2}.\end{aligned}$$

Dokaz. Prikažimo broj π pomoću Leibnizove formule, $\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$. Ovaj red ćemo transformirati do reda koji se pojavljuje u tvrdnji teorema. Kako bismo jasnije izložili ideju dokaza, transformacije ćemo provoditi na prvih nekoliko članova niza umjesto na općem članu, a precizni i potpuni dokaz se provodi na sličan način.

$$\begin{aligned}
\pi &= 4 \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \\
&= 4\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots\right) \\
&= 2 + 2\left(\frac{1}{1} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \frac{2}{9} - \frac{2}{11} + \dots\right) \\
&= 2 + 2\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8} + \dots\right) \\
&= 2 + 2\left(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) - \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) - \dots\right)
\end{aligned}$$

Primijenimo li jednakost $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$ dobijemo

$$\begin{aligned}
&= 2 + 2\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 7} - \dots\right) \\
&= 2 + \frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} - \frac{2}{3 \cdot 4} - \frac{2}{4 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 6} + \frac{2}{6 \cdot 7} - \dots \\
&= 2 + \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} - \dots \\
&= 2 + \frac{1}{T_2^2} + \frac{1}{T_3^2} - \frac{1}{T_4^2} - \frac{1}{T_5^2} + \frac{1}{T_6^2} + \frac{1}{T_7^2} - \dots \\
&= 2 + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{1+\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{T_n^2},
\end{aligned}$$

čime smo dokazali teorem. $\square$

Broj e

Promotrimo produkte svih elemenata u istom redu Pascalovog trokuta. Neka je P_n produkt članova n-tog reda. Za svaki $n \geq 0$ vrijedi

$$\begin{aligned} P_n &= \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \prod_{k=0}^{n} \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = (n!)^{n+1} \cdot \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} = \\ &= (n!)^{n+1} \cdot \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \cdot \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = (n!)^{n+1} \cdot \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{(k!)^2}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Tada je $P_{n+1} = ((n+1)!)^{n+2} \cdot \prod_{k=0}^{n+1} \frac{1}{(k!)^2}$ i $P_{n-1} = ((n-1)!)^{n} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k!)^2}$. Omjer produkata dvaju uzastopnih redova je

$$\begin{aligned} \frac{P_{n+1}}{P_n} &= \frac{((n+1)!)^{n+2} \prod_{k=0}^{n+1} \frac{1}{(k!)^2}}{(n!)^{n+1} \cdot \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{(k!)^2}} = \frac{((n+1)!)^{n+2} \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{(k!)^2} \cdot \frac{1}{((n+1)!)^2}}{(n!)^{n+1} \cdot \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{(k!)^2}} = \\ &= \frac{((n+1)!)^n}{(n!)^{n+1}} = \frac{(n!)^n \cdot (n+1)^n}{(n!)^n \cdot n!} = \frac{(n+1)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Tada je

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{n^{n-1} \cdot n}{(n-1)! \cdot n} = \frac{n^n}{n!}.$$

Promotrimo sada omjer ta dva omjera, to jest

$$\frac{\frac{P_{n+1}}{P_n}}{\frac{P_n}{P_{n-1}}} = \frac{\frac{(n+1)^n}{n!}}{\frac{n^n}{n!}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n.$$

Općenito, vrijedi da je

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Dakle, možemo zaključiti $\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n+1} \cdot P_{n-1}}{P_n^2} = e$, pri čemu su P_{n-1}, P_n, P_{n+1} produkti elemenata odgovarajućih redova.

Broj n^n

Promotrimo prvu dijagonalu, odnosno, spustimo se po prvoj dijagonali do nekog člana, recimo do četvrtog reda, tj. broja 4. Pomnožimo li brojeve s dijagonale i brojeve u tom redu počevši od odabranog člana te ako ih podijelimo s umnoškom elemenata prethodnog reda, dobit ćemo broj 4^4. U Pascalovom trokutu to izgleda ovako

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & \mathbf{1} & & & & & \\
 & & & & 1 & & \mathbf{2} & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & \mathbf{3} & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & \mathbf{4} & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{array}
\qquad
\frac{\mathbf{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot (4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 1)}{3 \cdot 3 \cdot 1} = \frac{\mathbf{4!} \cdot (4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 1)}{3 \cdot 3 \cdot 1} = 4^4$$

Teorem 3.3.2. *Za svaki prirodni broj $n > 1$ vrijedi da je*

$$\frac{n! \cdot \prod_{k=1}^{n} \binom{n}{k}}{\prod_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k}} = n^n.$$

Dokaz. Promotrimo prvo izraz $\prod_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$. Budući da je $\binom{n}{0} = 1$, vrijedi $\prod_{k=1}^{n} \binom{n}{k} = \prod_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$. Prema (3.6) sada imamo

$$P_n = (n!)^{n+1} \cdot \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{(k!)^2}$$

$$P_{n-1} = ((n-1)!)^n \cdot \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k!)^2}.$$

Uvrstimo li dobivene izraze u početnu jednadžbu dobijemo

$$\frac{n! \cdot \prod_{k=1}^{n} \binom{n}{k}}{\prod_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k}} = \frac{n! \cdot (n!)^{n+1} \cdot \prod_{k=0}^{n} \frac{1}{(k!)^2}}{((n-1)!)^n \cdot \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k!)^2}} = \frac{(n!)^{n+2} \cdot \frac{1}{(n!)^2} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k!)^2}}{((n-1)!)^n \cdot \prod_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k!)^2}}$$

$$= \frac{(n!)^n}{((n-1)!)^n} = \frac{((n-1)!)^n \cdot (n)^n}{((n-1)!)^n} = n^n.$$

□

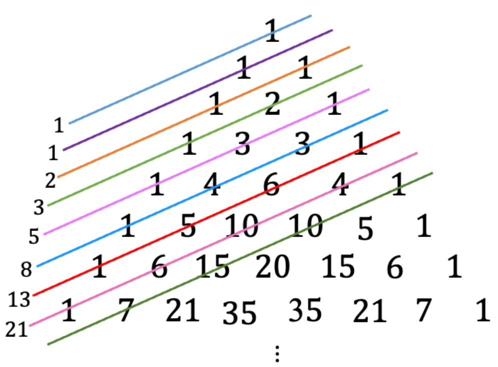
3.4 Daljnja svojstva

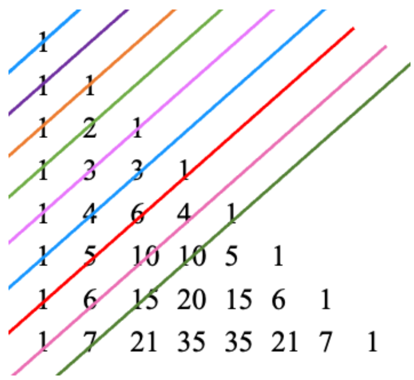
Fibonaccijevi brojevi

Fibonaccijev niz je jedan od najpoznatijih nizova u matematici. Prisjetimo se, ovaj niz započinje s dvije jedinice, a zatim ostale članove dobijemo zbrajanjem prethodna dva člana. Prema tome, ako je (F_n) Fibonaccijev niz, tada je

$$\begin{aligned} F_1 &= 1, \\ F_2 &= 1, \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 3. \end{aligned}$$

Fibonaccijev niz u Pascalovom trokutu dobivamo zbrajanjem članova na blagim dijagonalama. Blaga dijagonala kreće od T_n^0, a dalje se svaki put pomičemo jedan red iznad i jedan član udesno, sve dok ne dođemo do kraja trokuta. Drugi način je da Pascalov trokut zapišemo kao pravokutni trokut te zbrajamo članove na njegovim dijagonalama.





Želimo dokazati da su zbrojevi članova na blagim dijagonalama zaista Fibonaccijevi brojevi.

Teorem 3.4.1. *Zbroj elemenata na $(n-1)$-oj blagoj dijagonali Pascalovog trokuta jednak je n-tom Fibonaccijevom broju, odnosno vrijedi*

$$F_n = \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} T_{n-1-k}^k.$$

Dokaz. Članove Pascalovog trokuta zapisujemo kao binomne koeficijente, to jest

$$F_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-k}{k}. \tag{3.7}$$

Dokaz provodimo matematičkom indukcijom. Za $n = 1$ imamo

$$F_1 = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{0}{2} \rfloor} \binom{1-1-k}{k} = \binom{0}{0} = 1,$$

a za $n = 2$

$$F_2 = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{1}{2} \rfloor} \binom{2-1-k}{k} = \binom{1}{0} = 1,$$

čime smo provjerili bazu indukcije. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ jednakost (3.7) vrijedi za sve $k \leq n+1$. Posebno, vrijedi

$$F_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-k}{k}, \quad F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}.$$

Koristeći induktivnu pretpostavku pokažimo da tvrdnja vrijedi i za $n+2$. Kako je $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, trebamo dokazati da je

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} \binom{n+1-k}{k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-k}{k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}.$$

Razlikujemo slučajeve kada je n paran i kada je n neparan. Prvo pretpostavimo da je n paran. Tada je $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2}$ i $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor = \frac{n}{2} - 1$. Imamo da je

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n-1-k}{k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k} = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \binom{n-1-k}{k} + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n-k}{k}$$

$$= [\text{supstitucija: } k' = k+1] = \sum_{k'=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n-k'}{k'-1} + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n-k}{k}$$

$$= \sum_{k'=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n-k'}{k'-1} + \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n-k}{k} = 1 + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left[\binom{n-k}{k-1} + \binom{n-k}{k} \right]$$

$$= \left[\begin{matrix}\text{Svojstvo Pascalovog trokuta:} \\ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}\end{matrix}\right] = \binom{n+1}{0} + \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \binom{n-k+1}{k} = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \binom{n-k+1}{k}.$$

Pretpostavimo sada da je n neparan.Tada je $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2}$ i $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor = \frac{n+1}{2}$. Slično kao i u prvom slučaju imamo

$$\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor} \binom{n-1-k}{k} + \sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor} \binom{n-k}{k} = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-1-k}{k} + \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-k}{k}$$

$$= [\text{supstitucija: } k' = k+1] = \sum_{k'=1}^{\frac{n+1}{2}} \binom{n-k'}{k'-1} + \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-k}{k}$$

$$= \binom{\frac{n-1}{2}}{\frac{n-1}{2}} + \sum_{k'=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-k'}{k'-1} + \binom{n}{0} + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-k}{k}$$

$$= 1 + 1 + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\binom{n-k}{k-1} + \binom{n-k}{k}\right] = \left[\begin{matrix}\text{Svojstvo Pascalovog trokuta:} \\ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}\end{matrix}\right]$$

$$= \binom{n+1}{0} + \binom{\frac{n+1}{2}}{\frac{n+1}{2}} + \sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \binom{n-k+1}{k} = \sum_{k=0}^{\frac{n+1}{2}} \binom{n-k+1}{k}.$$

Prema principu matematičke indukcije tvrdnja teorema je dokazana. □

Zbroj parnih (neparnih) članova

Sada ćemo računati zbroj svih parnih članova u nekom redu te zbroj svih neparnih članova. Promotrimo prvo parne članove, a zatim i neparne članove sedmog reda.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & & & & & & & \vdots & & & & & & & \\ & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\ \mathbf{1} & & 7 & & \mathbf{21} & & 35 & & \mathbf{35} & & 21 & & \mathbf{7} & & 1 \\ & & & & & & & \vdots & & & & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccccccccc} & & & & & & & \vdots & & & & & & & \\ & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\ 1 & & \mathbf{7} & & 21 & & \mathbf{35} & & 35 & & \mathbf{21} & & 7 & & \mathbf{1} \\ & & & & & & & \vdots & & & & & & & \end{array}$$

Vizualno odmah možemo uočiti da je zbroj svih parnih članova, odnosno svih neparnih članova sedmog reda jednak zbroju svih članova prethodnog, odnosno šestog reda Pascalovog trokuta. Iskažimo i dokažimo tu tvrdnju.

Teorem 3.4.2. *Za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi*

$$\sum_{\substack{k\\ paran}} \binom{n+1}{k} = \sum_{\substack{k\\ neparan}} \binom{n+1}{k} = 2^n.$$

Dokaz. Budući da svaki član Pascalovog trokuta sudjeluje u nastanku dva člana sljedećeg reda, člana ispod sebe lijevo i člana ispod sebe desno, zaključujemo da će svi parni članovi, ali i svi neparni članovi biti sastavljeni od svih članova prethodnog reda. To znači da je zbroj svih parnih članova, odnosno svih neparnih članova jednak zbroju svih članova prethodnog reda. Razlikujemo dva slučaja.
1. slučaj: Ako je $n+1$ neparan, tada je

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{k\\ paran}} \binom{n+1}{k} &= \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{2} + \ldots + \binom{n+1}{n}\\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,\end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{k\\ neparan}} \binom{n+1}{k} &= \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{3} + \ldots + \binom{n+1}{n+1}\\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.\end{aligned}$$

2. slučaj: Ako je $n+1$ paran, tada je

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{k\\ paran}} \binom{n+1}{k} &= \binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{2} + \ldots + \binom{n+1}{n+1}\\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,\end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{k\\ neparan}} \binom{n+1}{k} &= \binom{n+1}{1} + \binom{n+1}{3} + \ldots + \binom{n+1}{n}\\ &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n. \qquad \square\end{aligned}$$

Pascalov trokut i Pellovi brojevi

Promotrimo tablicu brojeva sličnu Pascalovom trokutu. Započinjemo s brojem 1, a zatim popunjavamo redove tablice tako da je svaki član zbroj tri broja iznad njega, gdje su brojevi izvan trokuta nule. Za prvih nekoliko redova takav trokut izgleda ovako

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0: & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=1: & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=2: & & & & & 1 & & \mathbf{3} & & 1 & & & & \\
n=3: & & & & 1 & & 5 & & 5 & & 1 & & & \\
n=4: & & & 1 & & 7 & & 13 & & 7 & & 1 & & \\
n=5: & & 1 & & 9 & & 25 & & 25 & & \mathbf{9} & & 1 & \\
n=6: & 1 & & 11 & & \mathbf{41} & & 63 & & 41 & & 11 & & 1
\end{array}$$

Neka je a_n zbroj svih članova u n-tom redu ovog trokuta. Redom imamo

$$a_0 = 1,\ a_1 = 2,\ a_2 = 5,\ a_3 = 12,\ a_4 = 29,\ a_5 = 70,\ a_6 = 169, \dots$$

Ovaj niz čini upravo niz Pellovih brojeva, a prije nego to dokažemo, objasnit ćemo što su Pellovi brojevi.

Pellovi brojevi su članovi niza prirodnih brojeva koji predstavljaju redom nazivnike najbliže racionalne aproksimacije iracionalnog broja $\sqrt{2}$. Općenito, kažemo da je racionalni broj $\frac{p}{q}$ najbliža racionalna aproksimacija broja $\sqrt{2}$ ako za svaki racionalni broj $\frac{a}{b}$, čiji je nazivnik b manji ili jednak q, vrijedi $\left|\frac{p}{q} - \sqrt{2}\right| < \left|\frac{a}{b} - \sqrt{2}\right|$. Te aproksimacije započinju razlomcima $\frac{1}{1}, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \frac{41}{29}, \dots$, a Pellovi brojevi su $1, 2, 5, 12, 29, \dots$ Ovaj niz raste eksponencijalno i to proporcionalno srebrnom omjeru. Srebrni omjer je omjer u kojem dužinu dijelimo na tri dijela; na dva dulja dijela jednakih duljina i jedan kraći dio za koje vrijedi da je omjer duljine cijele dužine i duljeg dijela jednak omjeru duljeg i kraćeg dijela. Ova konstanta iznosi $1 + \sqrt{2} = 2.414213\dots$. Pellovi brojevi se koriste za formiranje Pitagorine trojke, odnosno duljine stranica pravokutnog trokuta sa stranicama čije su duljine prirodni brojevi. U tom slučaju pravokutni trokut je približno jednakokračan, to jest katete se razlikuju za 1, npr. $(3, 4, 5)$, $(20, 21, 29)$, $(119, 120, 169)$, $(696, 697, 985), \dots$, gdje su duljine hipotenuze Pellovi brojevi. Pellovi brojevi su definirani rekurzivnom relacijom

$$\begin{aligned}
P_0 &= 1, \\
P_1 &= 2, \\
P_n &= 2 \cdot P_{n-1} + P_{n-2}, \qquad n \geq 2.
\end{aligned}$$

Teorem 3.4.3. *Za svaki $n \geq 0$ vrijedi $a_n = P_n$.*

Dokaz. Ako promatramo n-ti red u trokutu konstruiranom na početku ovog pododjeljka, svaki član $(n-1)$-og reda je sudjelovao dva puta u nastanku članova promatranog n-tog reda: prvi put za član lijevo ispod sebe, a drugi put za član desno ispod sebe. Prema konstrukciji ovakvog trokuta, članovi $(n-2)$-og reda su sudjelovali jednom direktno za članove na mjestima ispod sebe. Neka su $A_n^0, A_n^1, \ldots, A_n^n$ elementi u n-tom redu ovog trokuta.

$$\begin{aligned}
a_n = \sum_{k=0}^{n} A_n^k &= A_n^0 + A_n^1 + A_n^2 + \ldots + A_n^k + \ldots + A_n^{n-1} + A_n^n \\
&= A_{n-1}^0 + (A_{n-1}^0 + A_{n-1}^1 + A_{n-2}^0) + (A_{n-1}^1 + A_{n-1}^2 + A_{n-2}^1) + \ldots + \\
&+ (A_{n-1}^{k-1} + A_{n-1}^k + A_{n-2}^{k-1}) + \ldots + (A_{n-1}^{n-2} + A_{n-1}^{n-1} + A_{n-2}^{n-2}) + A_{n-1}^{n-1} \\
&= 2 \cdot A_{n-1}^0 + 2 \cdot A_{n-1}^1 + 2 \cdot A_{n-1}^2 + \ldots + 2 \cdot A_{n-1}^{n-1} + A_{n-2}^0 + A_{n-2}^1 + \ldots + A_{n-2}^{n-2} \\
&= 2 \cdot (A_{n-1}^0 + A_{n-1}^0 + \ldots + A_{n-1}^0) + A_{n-2}^0 + A_{n-2}^1 + \ldots + A_{n-2}^{n-2} \\
&= 2 \cdot a_{n-1} + a_{n-2}.
\end{aligned}$$

Budući da je $a_0 = 1$ i $a_1 = 2$, prema rekurzivnoj definiciji Pellovih brojeva vrijedi

$$a_n = P_n,$$

čime smo dokazali tvrdnju. □

Računanje aproksimacije za $\sqrt{2}$

Pascalov trokut se može primijeniti za računanje niza racionalnih aproksimacija iracionalnih kvadratnih korijena, odnosno broja $\sqrt{s}$, gdje $s \in \mathbb{N}$ nije kvadrat nekog broja. Ovu primjenu ćemo dokazati za broj $\sqrt{2}$, a analogno se dokazuje i za bilo koji broj $\sqrt{s}$. Za svaki prirodni broj n i potenciju binoma $\left(1+\sqrt{2}\right)^n$ iz binomnog poučka slijedi da $\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + \sqrt{2}b_n$, gdje su a_n i b_n neki prirodni brojevi. Iz jednakosti

$$\begin{aligned}
a_{n+1} + \sqrt{2}b_{n+1} &= \left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} \\
&= \left(1+\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)^n \\
&= \left(1+\sqrt{2}\right)\left(a_n+\sqrt{2}b_n\right) \\
&= (a_n + 2b_n) + \sqrt{2}(a_n + b_n)
\end{aligned}$$

imamo da je $a_{n+1} = a_n + 2b_n$, $b_{n+1} = a_n + b_n$. Nadalje, vrijedi

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_n + 2b_n}{a_n + b_n} = \frac{\frac{a_n}{b_n} + 2}{\frac{a_n}{b_n} + 1}.$$

Želimo pokazati da, ako je $\frac{a_n}{b_n}$ aproksimacija broja $\sqrt{2}$, tada je $\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}$ još bolja aproksimacija broja $\sqrt{2}$.

Korolar 3.4.4. *Neka je $\frac{m}{n}$ aproksimacija broja $\sqrt{2}$, tada je $\frac{m+2n}{m+n}$ još bolja aproksimacija $\sqrt{2}$.*

Dokaz. Neka je $\frac{m}{n} > \sqrt{2}$, odnosno $\frac{m}{n} = \sqrt{2}(1+\epsilon)$ za neki $\epsilon > 0$. Tada je

$$\frac{m+2n}{m+n} = \frac{\frac{m}{n}+2}{\frac{m}{n}+1} = \frac{\sqrt{2}(1+\epsilon)+2}{\sqrt{2}(1+\epsilon)+1} = \sqrt{2}\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}\epsilon}\right)\epsilon\right)$$

Vrijedi da je $\sqrt{2}-1 < \sqrt{2}+1+\sqrt{2}\epsilon$, a jer je $1 < \sqrt{2} < \frac{3}{2}$ slijedi da je $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{+1}} < \frac{1}{5}$ pa imamo da je

$$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1+\sqrt{2}\epsilon} < \frac{1}{5}.$$

Zaključujemo da je $\frac{m+2n}{m+n} < \sqrt{2}$ i da je $\left|\frac{m+2n}{m+n} - \sqrt{2}\right| < \left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right|$, čime smo dokazali tvrdnju. □

Sada želimo pokazati povezanost s Pascalovim trokutom pa promotrimo binomni teorem. Prema binomnom teoremu imamo

$$\begin{aligned}\left(1+\sqrt{2}\right)^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\sqrt{2} + \binom{n}{2}2 + \binom{n}{3}2\sqrt{2} + \binom{n}{4}2^2 + \binom{n}{5}2^2\sqrt{2} + \dots \\ &= \left[\binom{n}{0} + 2\binom{n}{2} + 2^2\binom{n}{4} + \dots\right] + \sqrt{2}\cdot\left[\binom{n}{1} + 2\binom{n}{3} + 2^2\binom{n}{5} + \dots\right].\end{aligned}$$

Dakle,

$$a_n = \binom{n}{0} + 2\binom{n}{2} + 2^2\binom{n}{4} + \dots, \quad b_n = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{3} + 2^2\binom{n}{5} + \dots. \tag{3.8}$$

Iskažimo i dokažimo sljedeći teorem.

Teorem 3.4.5. *Neka su a_n, b_n definirani kao u* (3.8)*. Tada je*

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{a_n + 2b_n}{a_n + b_n}.$$

Dokaz. Dokaz provodimo direktno.

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = \frac{\binom{n+1}{0} + 2\binom{n+1}{2} + 2^2\binom{n+1}{4} + \dots}{\binom{n+1}{1} + 2\binom{n+1}{3} + 2^2\binom{n+1}{5} + \dots}$$

$$\left[\text{primjenimo:}\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right]$$

$$= \frac{\binom{n}{0} + 2\left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right] + 2^2\left[\binom{n}{3} + \binom{n}{4}\right] + \dots}{\left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] + 2\left[\binom{n}{2} + \binom{n}{3}\right] + 2^2\left[\binom{n}{4} + \binom{n}{5}\right] + \dots}$$

$$= \frac{\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 2^2\binom{n}{3} + 2^2\binom{n}{4} + \dots}{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 2\binom{n}{3} + 2^2\binom{n}{4} + 2^2\binom{n}{5} + \dots}$$

[grupiramo po parnim i neparnim potencijama]

$$= \frac{\left[\binom{n}{0} + 2\binom{n}{2} + 2^2\binom{n}{4} + \dots\right] + 2\cdot\left[\binom{n}{1} + 2\binom{n}{3} + 2^2\binom{n}{5} + \dots\right]}{\left[\binom{n}{0} + 2\binom{n}{2} + 2^2\binom{n}{4} + \dots\right] + \left[\binom{n}{1} + 2\binom{n}{3} + 2^2\binom{n}{5} + \dots\right]}$$

$$= \frac{a_n + 2b_n}{a_n + b_n},$$

čime smo dokazali tvrdnju teorema. □

Na primjer, za 6. razlomak, odnosno 6. red Pascalovog trokuta imamo

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \vdots & & & \\ 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 \\ & & & \vdots & & & \end{array} \qquad \frac{1\cdot 2^0 + 15\cdot 2^1 + 15\cdot 2^2 + 1\cdot 2^3}{6\cdot 2^0 + 20\cdot 2^1 + 6\cdot 2^2} = \frac{99}{70}.$$

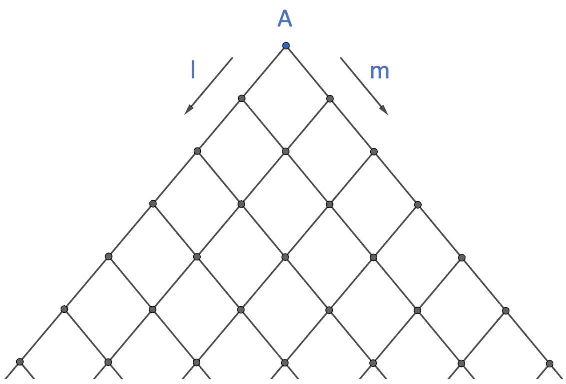
Ovu tvrdnju možemo generalizirati za niz aproksimacija broja $\sqrt{s}$, za $s \in \mathbb{N}$ koji nije kvadrat nekog broja tako što potencije broja 2 zamijenimo s potencijama broja s.

Poglavlje 4

Jedan zadatak s matematičke olimpijade

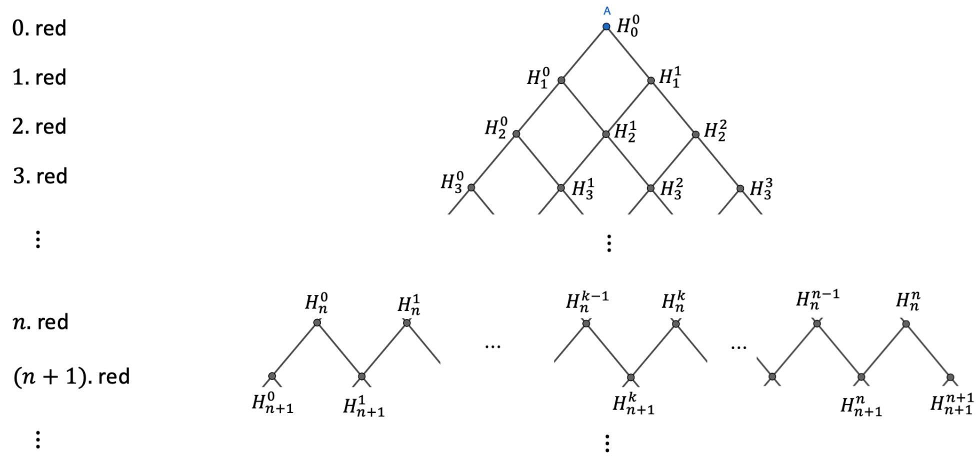
U ovom poglavlju ćemo pomoću Pascalove operacije riješiti jedan zadatak. Tijekom VIII. moskovske olimpijade 1945. godine, sudionicima devetih i desetih razreda predstavljen je sljedeći zadatak

Dana je cestovna mreža kao na slici 4.1. *Iz početne točke A kreće* 2^{1000} *ljudi, tako da jedna polovica ljudi nastavlja u l smjeru, a druga polovica u m smjeru. Dolazeći na prvo križanje svaka grupa se dijeli na dvije podgrupe tako da polovica ide u l smjeru, a druga polovica u m smjeru. Tako se nastavljaju dijeliti na svakom križanju. Koliko ljudi dolazi na svako od križanja u tisućitom redu?*



Slika 4.1: Cestovna mreža

Treba primijetiti kako trenutno nismo sigurni postoji li rješenje problema. Ne znamo je li promet ljudi prema uputama zadatka uopće moguć. Ako na neko križanje stigne neparan broj ljudi daljnje dijeljenje mora stati. Zato je nužan i dovoljan uvjet da na svako križanje prvih tisuću redova, počevši od 0. do 999., dođe paran broj ljudi. Stoga, prvo treba dokazati da je taj uvjet ispunjen. Raskrižje koje se nalazi u n-tom retku i k-tom mjestu nazvat ćemo (n, k). Raskrižja u nekom redu brojimo od nultog mjesta počevši s lijeva na desno. Broj ljudi na raskrižju (n, k) označimo s H_n^k. Dakle, u $n-$tom redu redom imamo oznake $H_n^0,\ H_n^1,\ H_n^2,\ H_n^3,\ \dots,\ H_n^{n-1},\ H_n^n$, kao što je prikazano na slici 4.2.



Slika 4.2

Budući da još ne znamo postoji li rješenje problema kao niti postoji li broj H_n^k za svaki $k, n \in [0, 1000]$, prvo trebamo pokazati da oni postoje. Prema uvjetu zadatka znamo da postoji

$$H_0^0 = 2^{1000}. \tag{4.1}$$

Odredimo vezu između brojeva $H_n^k,\ k \in [0, n]$ i $H_{n+1}^k,\ k \in [0, n+1]$ uz pretpostavku da svi brojevi postoje. Pokazat ćemo da, ako svi brojevi H_n^k postoje i parni su, tada postoje i svi brojevi H_{n+1}^k. Promotrimo raskrižja i dijelove ceste koja povezuje redove n i $(n+1)$. Svakom raskrižju je pridružen odgovarajući broj koji predstavlja koliko je ljudi stiglo na raskrižje. Broj H_n^0 predstavlja broj ljudi koji su stigli na raskrižje $(n, 0)$ koji se dijeli na dva jednaka dijela (slika 4.2). Prva polovica odlazi raskrižje $(n+1, 0)$, pa vrijedi

$$H_{n+1}^0 = \frac{H_n^0}{2}. \tag{4.2}$$

Druga polovica broja H_n^0 dolazi na raskrižje $(n+1,1)$, gdje se sastaje s polovicom ljudi koja dolazi iz raskrižja $(n,1)$, odnosno polovicom broja H_n^1. Dakle,

$$H_{n+1}^1 = \frac{H_n^0 + H_n^1}{2}. \tag{4.3}$$

Općenito, broj ljudi koji su došli križanje $(n+1,k)$ je zbroj polovice ljudi koji su napustili križanje $(n,k-1)$, $\frac{H_n^{k-1}}{2}$ i polovice koja je napustila križanje (n,k), odnosno $\frac{H_n^k}{2}$ što se vidi iz slike 4.2. Dakle vrijedi

$$H_{n+1}^k = \frac{H_n^{k-1} + H_n^k}{2}, \quad 1 \leq k \leq n. \tag{4.4}$$

Konačno, broj ljudi koji dolazi na križanje $(n+1,n+1)$ jednak je polovici ljudi koji su napustili križanje (n,n) pa je

$$H_{n+1}^{n+1} = \frac{H_n^n}{2}. \tag{4.5}$$

Iz jednadžbi (4.1) – (4.5) dokazat ćemo da rješenje problema postoji. Prvo uočimo da iz (4.2) – (4.5) slijedi da, ako za neki n postoje svi brojevi

$$H_n^0,\ H_n^1,\ H_n^2,\ H_n^3,\ \ldots,\ H_n^{n-1},\ H_n^n$$

u n-tom redu i djeljivi su s $2a$, onda postoje i svi brojevi

$$H_{n+1}^0,\ H_{n+1}^1,\ H_{n+1}^2,\ H_{n+1}^3,\ \ldots,\ H_{n+1}^{n-1},\ H_{n+1}^n$$

u $(n+1)$-vom redu i djeljivi su s a. Zaista, pretpostavimo da brojevi $H_n^0,\ H_n^1,\ H_n^2,\ H_n^3,\ \ldots,\ H_n^{n-1},\ H_n^n$ postoje i da su djeljivi s $2a$, tada postoje prirodni brojevi

$$M_n^0,\ M_n^1,\ M_n^2,\ M_n^3,\ \ldots,\ M_n^{n-1},\ M_n^n$$

za koje vrijedi

$$\begin{aligned} H_n^0 &= 2aM_n^0, \\ H_n^1 &= 2aM_n^1, \\ &\vdots \\ H_n^n &= 2aM_n^n. \end{aligned}$$

Prema jednadžbama (4.2) – (4.5) slijedi

$$\begin{aligned} H_{n+1}^0 &= \frac{H_n^0}{2} = \frac{2aM_n^0}{2} = aM_n^0, \\ H_{n+1}^k &= \frac{H_n^{k-1} + H_n^k}{2} = \frac{2aM_n^{k-1} + 2aM_n^k}{2} = a(M_n^{k-1} + M_n^k), \quad 1 \leq k \leq n, \\ H_{n+1}^{n+1} &= \frac{H_n^n}{2} = \frac{2aM_n^n}{2} = aM_n^n, \end{aligned}$$

što dokazuje tvrdnju da brojevi $H_{n+1}^0,\ H_{n+1}^1,\ H_{n+1}^2,\ H_{n+1}^3,\ \ldots,\ H_{n+1}^{n-1},\ H_{n+1}^n$ postoje i da su djeljivi s a. S obzirom na početni uvjet zadatka da u nultom redu postoji jedinstven broj $H_0^0 = 2^{1000}$ koji je djeljiv s 2^{1000}, svi brojevi u prvom redu $H_1^0,\ H_1^1$ također postoje i djeljivi su s 2^{999}. Zatim, svi brojevi u drugom redu

$$H_2^0,\ H_2^1,\ H_2^2$$

postoje i djeljivi su s 2^{998}. Nastavljamo do 999. reda, u kojem brojevi

$$H_{999}^0,\ H_{999}^1,\ ,\ldots,\ H_{999}^{999}$$

postoje i djeljivi su s 2. Konačno, postoje i brojevi 1000. reda, koji predstavlja rješenje problema,

$$H_{1000}^0,\ H_{1000}^1,\ ,\ldots,\ H_{1000}^{1000}.$$

Možemo zaključiti kako odnosi jednadžbi (4.2) – (4.5) garantiraju da rješenje problema postoji te pokazuju kako iz niza brojeva

$$H_n^0,\ H_n^1,\ H_n^2,\ H_n^3,\ \ldots,\ H_n^{n-1},\ H_n^n$$

dobivamo brojeve

$$H_{n+1}^0,\ H_{n+1}^1,\ H_{n+1}^2,\ H_{n+1}^3,\ \ldots,\ H_{n+1}^{n-1},\ H_{n+1}^n.$$

Uzastopnom primjenom ovih relacija, počevši od nultog reda, mogli bismo izračunati sve vrijednosti H_n^k za svako raskrižje do tisućitog reda. Takvih raskrižja ukupno ima 501501. Računajući brojeve tisućitog reda, dobili bismo rješenje problema. Račun za nekoliko prvih redova izgleda ovako

$$H_0^0 = 2^{1000}$$

$$H_1^0 = \frac{H_0^0}{2} = \frac{2^{1000}}{2} = 2^{999} \quad H_1^1 = \frac{H_0^0}{2} = \frac{2^{1000}}{2} = 2^{999}$$

$$H_2^0 = \frac{H_1^0}{2} = \frac{2^{999}}{2} = 2^{998} \quad H_2^1 = \frac{H_1^0 + H_1^1}{2} = \frac{2^{999} + 2^{999}}{2} = 2^{999} \quad H_2^2 = \frac{H_1^1}{2} = \frac{2^{999}}{2} = 2^{998}$$

$$H_3^0 = \frac{H_2^0}{2} = \frac{2^{998}}{2} = 2^{997} \quad H_3^1 = \frac{H_2^0 + H_2^1}{2} = \frac{2^{998} + 2^{999}}{2} = 3 \cdot 2^{997}$$

$$\vdots$$

Sada ćemo pokazati kako pomoću Pascalove operacije izraziti brojeve H_n^k. Neka je

$$Z_m^q = \frac{1}{2^{1000-m}} H_m^q, \tag{4.6}$$

odnosno
$$H_m^q = 2^{1000-m} Z_m^q, \tag{4.7}$$
za $m = 0, 1, 2, \dots, 1000,\ q = 0, 1, 2, \dots, m$.

Iz (4.1) i (4.6) slijedi
$$Z_0^0 = \frac{1}{2^{1000}} \cdot 2^{1000} = 1. \tag{4.8}$$
Zamijenimo sada jednadžbe (4.2), (4.3) i (4.4) izrazom (4.7). Iz (4.2) imamo
$$2^{1000-(n+1)} Z_{n+1}^0 = \frac{2^{1000-n} Z_n^0}{2},$$
to jest
$$Z_{n+1}^0 = Z_n^0. \tag{4.9}$$
Iz (4.4) slijedi
$$2^{1000-(n+1)} Z_{n+1}^{n+1} = \frac{2^{1000-n} Z_n^n}{2},$$
to jest
$$Z_{n+1}^{n+1} = Z_n^n. \tag{4.10}$$
Naposljetku, iz (4.3) slijedi
$$2^{1000-(n+1)} Z_{n+1}^k = \frac{2^{1000-n} Z_n^{k-1} + 2^{1000-n} Z_n^k}{2},$$
to jest
$$Z_{n+1}^k = Z_n^{k-1} + Z_n^k. \tag{4.11}$$
Iz jednadžbi (4.9)-(4.11) slijedi da je svaki red $Z_{n+1}^0, Z_{n+1}^1, \dots, Z_{n+1}^{n+1}$, za $n = 0, 1, \dots, 999$, nastao iz prethodnog reda, a budući da se početni red $Z_0^0 = 1$ podudara s prvim uvjetom Pascalove operacije, zaključujemo da je
$$Z_m^q = T_m^q.$$
Dakle, za $m = 0, 1, \dots, 1000,\ q = 0, 1, \dots, m$ vrijedi
$$H_m^q = 2^{1000-m} T_m^q. \tag{4.12}$$
Za traženo rješenje problema je $m = 1000$ pa je rješenje početnog problema
$$H_{1000}^q = T_{1000}^q,$$
odnosno, broj ljudi koji dolaze na svako križanje tisućitog reda odgovara redom članovima tisućitog reda Pascalovog trokuta. Možemo zaključiti da su brojevi $\binom{1000}{0}, \binom{1000}{1}, \binom{1000}{2}, \dots, \binom{1000}{1000}$ redom brojevi osoba koji dolaze na križanja u tisućitom redu.

Bibliografija

[1] http://jwilson.coe.uga.edu/EMAT6680Su12/Berryman/6690/BerrymanK-Pascals/BerrymanK-Pascals.html, posjećena 5. ožujka 2022.

[2] Bannink, T., Buhrman H.: *Quantum Pascal's Triangle and Sierpinski's carpet*, 2017. https://arxiv.org/pdf/1708.07429.pdf, posjećena 15. veljače 2022.

[3] Bigović, H. Villi: *Pascalov trokut*. Matka, 24(95):164–167, 2016. https://hrcak.srce.hr/file/250238.

[4] Bogomolny, A.: *Patterns in Pascal's Triangle*. https://www.cut-the-knot.org/arithmetic/combinatorics/PascalTriangleProperties.shtml, posjećena 5. ožujka 2022.

[5] Bogomolny, A.: *π in Pascal's Triangle*. https://www.cut-the-knot.org/arithmetic/algebra/PiInPascal.shtml, posjećena 3. veljače 2022.

[6] Bogomolny, A.: *π in Pascal's Triangle via Triangular Numbers*. https://www.cut-the-knot.org/arithmetic/algebra/TriPiInPascal.shtml, posjećena 5. ožujka 2022.

[7] Brothers, H. J.: *Pascal's triangle: The hidden stor-e*. The Mathematical Gazette, 96(535):145–148, 2012.

[8] Brückler, F. M.: *Blaise Pascal*. Osječki matematički list, 6(2):119–123, 2006. https://hrcak.srce.hr/file/14682.

[9] Čavrak, H.: *Catalanovi brojevi*. Hrvatski matematički elektronički časopis, 7(1):35–58, 2006. https://hrcak.srce.hr/6206.

[10] Hilton, P., Pedersen J.: *Looking into Pascal's Triangle: Combinatorics, Arithmetic, and Geometry*. Mathematics Magazine, 60(5):305–316, 1987, ISSN 0025570X, 19300980. http://www.jstor.org/stable/2690414.

[11] Hoffman, N.: *Pascal's triangle*. The Arithmetic Teacher, 21(3):190–198, 1974, ISSN 0004136X. http://www.jstor.org/stable/41188488.

[12] Hosch, W. L.: *Pascal's triangle*. https://www.britannica.com/science/Pascals-triangle, posjećena 5. ožujka 2022.

[13] Mesarić, M.: *Pascalov trokut*. Matka, 21(83):154–157, 2013. https://hrcak.srce.hr/112900.

[14] Peterson, D.: *Fibonacci, Pascal, and Induction*. https://www.themathdoctors.org/fibonacci-pascal-and-induction/, posjećena 5. ožujka 2022.

[15] Plaza, Á.: *Proof Without Words: A Pascal-Like Triangle With Pell Number Row Sums*. The College Mathematics Journal, 48(5):346–346, 2017. https://doi.org/10.4169/college.math.j.48.5.346.

[16] Plaza, Á.: *Half Row Sums in Pascal's Triangle*. Mathematics Magazine, 93(4):308–308, 2020. https://doi.org/10.1080/0025570X.2019.1638209.

[17] Smith, D. E.: *A source book in mathematics*. Dover publications, 1993.

[18] Smith, K. J.: *Pascal's Triangle*. The Two-Year College Mathematics Journal, 4(1):1–13, 1973, ISSN 00494925. http://www.jstor.org/stable/2698949.

[19] Stephenson, P.: *Surds from Pascal‘s triangle*. The Mathematical Gazette, 104(561):552–553, 2020.

[20] Šuljić, Š.: *Pascalov ili kineski trokut*. MiŠ, 21(10):26–30, 2009. https://mis.element.hr/fajli/383/21-10.pdf.

[21] Uspensky, V. A.: *Pascal's triangle*. Mir Publisher, 1976.

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučavali smo konstrukciju Pascalovog trokuta i njegova svojstva. U prvom smo poglavlju dali povijesni prikaz nastanka i tijeka proučavanja Pascalovog trokuta. U drugom poglavlju definirali smo Pascalovu operaciju pomoću koje smo prikazali dvije najpoznatije primjene Pascalovog trokuta: binomne koeficijente i kombinacije. Nakon toga, u trećem smo poglavlju opisali i dokazali razna zanimljiva svojstva Pascalovog trokuta. Svojstva smo podijelili u nekoliko skupina. Prva skupina su osnovna, lako uočljiva, svojstva Pascalovog trokuta. Drugoj skupini pripadaju zanimljivi brojevi i poznati iracionalni brojevi koje nalazimo proučavajući elemente Pascalovog trokuta. Treća skupina predstavlja svojstva povezana s geometrijom. Naposljetku, zadnjoj skupini pripadaju netrivijalna svojstva Pascalovog trokuta. U zadnjem smo poglavlju pokazali kako se Pascalova operacija može koristiti pri rješavanju problemskih zadataka na primjeru zadatka s matematičke olimpijade.

Summary

In this thesis, we studied the construction of the Pascal triangle and its properties. In the first chapter, we give a historical overview of the origin and course of the study of the Pascal triangle. In the second chapter, we defined Pascal's operation by which we presented the two most famous applications of the Pascal triangle: binomial coefficients and combinations. After that, in the third chapter, we described and proved various interesting properties of the Pascal triangle. We divided the properties into several groups. The first group are the basic, easily noticeable, properties of the Pascal triangle. The second group includes interesting numbers and well-known irrational numbers that we find by studying the elements of Pascal's triangle. The third group represents properties related to geometry. Finally, the nontrivial properties of the Pascal triangle belong to the latter group. In the last chapter, we showed how Pascal's operation can be used to solve problem tasks on the example of a task from the Mathematical Olympiad.

Životopis

Rođena sam 26. rujna 1992. godine u Zagrebu. Odrasla sam u Zaprešiću, gdje sam završila Osnovnu školu Antuna Augustinčića. Po završetku osnovne škole upisala sam opću gimnaziju u Srednjoj školi Ban Josip Jelačić, također u Zaprešiću. Godine 2011. završila sam srednju školu te upisala Preddiplomski studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2017. godine nastavljam Preddiplomski studij Matematike na Sveučilištu u Rijeci, Odjel za matematiku, gdje sam iste godine stekla zvanje prvostupnice matematike. Svoje obrazovanje nastavljam 2019. godine i upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematika i informatika, smjer: nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2021. sam se zaposlila kao nastavnica matematike i informatike u Osnovnoj školi Pavao Belas. Prvi sam stupanj za trenericu mentalne aritmetike položila 2022. godine.