Pravilni mnogokuti i njihove konstrukcije

Curavić, Lorena

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:925886

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-26**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lorena Curavić

PRAVILNI MNOGOKUTI I NJIHOVE KONSTRUKCIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Sanja Varošanec

Zagreb, srpanj, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Vici i Niki

Sadržaj

Uvod

Konstrukcije pravilnih mnogokuta tema je kojom su se matematičari počeli baviti još u antičkoj grčkoj. Metode konstrukcija pravilnog trokuta, kvadrata i peterokuta opisao je grčki matematičar Euklid u jednom od najznačajnijih matematičkih djela Euklidovi elementi. Te konstrukcije izvođene su isključivo neoznačenim ravnalom i šestarom te se danas nazivaju euklidske konstrukcije. Osim navedenih, Euklid je opisao i konstrukciju pravilnog petnaesterokuta kojeg je dobio tehnikom spajanja jednakostraničnog trokuta i peterokuta te konstrukcije za udvostručeni broj stranica konstruiranog n-terokuta (6, 8, 10, 12, 16,. . .). Dakle, pravilni mnogokuti neparnog broja stranica na toj listi bili su samo trokut, peterokut i petnaesterokut.
Konstrukcije pravilnih mnogokuta ostale su na tome sve do 1796. godine kada je njemački matematičar Carl Frierdrich Gauss dokazao konstruktibilnost pravilnog sedamnaesterokuta. U svojoj knjizi Disquisitiones Arithmeticae opisao je kriterij koji daje odgovor na pitanje koji se n-terokut može, a koji ne može konstruirati ravnalom i šestarom. Naveo je kako mogućnost konstrukcije pravilnog n-terokuta, gdje je n neparan prirodan broj, ovisi o određenim prostim brojevima (poznatim još kao Fermatovim brojevima). Iako je njegov opis vrlo detaljan, Gauss je dokazao samo uvjet dovoljnosti, no ne i uvjet nužnosti. Potpuni dokaz dao je Pierre Wantzel 1837. godine te je rezultat poznat kao Gauss-Wantzelov teorem.

Poglavlje 1

Geometrijske konstrukcije

Geometrijske konstrukcije su dio geometrije u ravnini (planimetriji) koji probleme rješava konstruktivnim metodama.

Konstruktivna geometrija polazi od pet općih aksioma:

Aksiom 1. *Svaki dani lik je konstruiran.*
Aksiom 2. *Ako su konstruirana dva ili više likova, onda je konstruirana i njihova unija.*
Aksiom 2. *Ako su konstruirana dva lika, može se ustanoviti je li njihova razlika prazan skup ili nije. U slučaju da ta razlika nije prazan skup, ta je razlika konstruirana.*
Aksiom 4. *Ako su konstruirana dva ili više likova, može se ustanoviti je li njihov presjek prazan skup ili nije. U slučaju da taj presjek nije prazan skup, taj presjek je konstruiran.*
Aksiom 5. *Ako je konstruiran neki neprazan lik, moguće je konstruirati točku koja pripada tom liku.*

Kao što smo već spomenuli u uvodu, konstrukcije pomoću jednobridnog (neoznačenog) ravnala i šestara nazivamo euklidskim ili elementarnim konstrukcijama. U svojoj knjizi Elementi, Euklid navodi aksiome ravnala i šestara:
Aksiom ravnala. Ravnalom je moguće:
1. *konstruirati dužinu ako su dani krajevi te dužine,*
2. *konstruirati polupravac s danom početnom točkom koji prolazi kroz drugu danu točku,*
3. *konstruirati pravac kroz dvije dane točke.*

Aksiom šestara. Šestarom je moguće:
1. *konstruirati kružnicu ako je dano njeno središte i njen polumjer,*
2. *konstruirati bilo koji od dva luka kružnice određena s dvije točke kružnice ako je dano središte kružnice i krajnje točke tog luka.*

Navedeni aksiomi potrebni su nam kako bi mogli izvesti temeljne konstrukcije. To su: konstrukcija dužine uz dane rubne točke, konstrukcija pravca uz dane dvije različite točke, konstrukcija presjeka dvaju neparalelnih pravaca, konstrukcija kružnice uz dano središte i polumjer, konstrukcija presjeka dviju kružnica, presjeka pravca i kružnice.

Pomoću temeljnih konstrukcija, rješavaju se svi složeniji konstruktivni zadaci

Poglavlje 2

Carl Friedrich Gauss

2.1 Crtice iz povijesti

Carl Frriedrich Gauss rođen je 30. travnja 1777. u Braunschweigu, a umro 23. veljače 1855. u Göttingenu. Bio je jedan od najvećih matematičara ikad. Njegova majka je bila nepismena te nikada nije zabilježila datum njegova rođenja. Sjećala se samo da se rodio u srijedu, osam dana prije blagdana Uzašašća (koji je 39 dana nakon Uskrsa).Gauss je pomoću samo tih informacija uspio rekonstruirati točan datum svog rođenja i dao matematički algoritam za utvrđivanje datuma Uskrsa.

Slika 2.1: Carl Friedrich Gauss
izvor:https://hr.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss
(preuzeto 10.5.2022.)

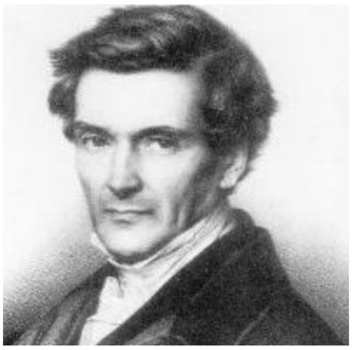
Svojom darovitošću počeo se isticati već na početku osnovne škole. Učitelj je cijelom razredu zadao zadatak da pronađu zbroj brojeva od 1 do 100. Gauss je vrlo brzo uočio da parovi brojeva $(1 + 100, 2 + 99, ..., 50 + 51)$ daju zbroj 101. Taj broj je onda pomnožio s 50 jer je to ukupan broj parova brojeva koji u zbroju daju 101.
Zahvaljujući svojim intelektualnim sposobnostim te vojvodi od Brunswicka, pohađao je Collegium Carolinum i Sveučilište u Göttingenu. Iako je bio darovit i u jezikoslovlju, 1796. godine, otkrićem konstrukcije pravilnog sedamnaesterokuta se u potpunosti odlučio posvetiti karijeri matematičara. Gauss je bio toliko zadivljen tim svojim otkrićem da je želio da mu se na nadgrobni spomenik ukleše pravilni sedamnaesterokut što je klesar navodno odbio tvrdeći da će ta figura previše ličiti na kružnicu.

U svojoj knjizi *Disquisitiones Arithmeticae (Pitanja o aritmetici)* koju je objavio 1801. godine dokazao je da je konstrukcija pravilnog mnogokuta s n strana(gdje je n neparan prost broj) ravnalom i šestarom moguća samo ako je broj n oblika $2^{2^k} + 1$. Također ovim djelom postavio je osnovne suvremene teorije brojeva. Doktorirao je 1779. godine dokazavši temeljni teorem algebre.
Tokom cijelog života, Gauss je stvarao važne doprinose ne samo na području matematike već i astronomije, geodezije i fizike. Upravo zato, mnogi pojmovi u prirodnim znanostima danas nose njegovo ime. Neki od njih su Gaussova ravnina, Gaussove mješovite sredine, Gaussova krivulja, Gaussov zakon za magnetsko i električno polje, Gaussov sustav jedinica, Gaussov algoritam, a po njemu su nazvani i krater na Mjesecu te planetoid.

2.2 Pierre Laurent Wantzal

Pierre Laurent Wantzal rođen je 5.lipnja 1814., a umro 21. svibnja 1848. godine u Parizu. Najpoznatiji je kao francuski matematičar koji je dokazao nekoliko antičkih geometrijskih problema.

Već s 12 godina pokazao je iznimnu nadarenost za matematiku, a sa samo 15 godina dokazao je metodu za pronalaženje kvadratnih korijena koja se već koristila, ali do tada nije bila dokazana. U radu iz 1837. Wantzel je dokazao da probleme duplikacije kocke i trisekcije kuta nije moguće riješiti koristeći samo ravnalo i šestar. U tom istom radu dao je i potpuni dokaz o mogućnosti konstrukcije pravilnih mnogokuta. Godine 1845. dao je i novi dokaz o nemogućnosti rješavanja svih algebarskih jednadžbi u radikalima.
Iako je objavio preko 20 radova, njegovi suvremenici su ga dosta zanemarili pa je njegovo ime postalo popularno među matematičarima tek kasnije. Wantzel se cijeli život bavio matematikom i to većinom poučavanjem. Bio je predavač analize, inžinjer, profesor primijenjene mehanike, predavao je razne tečajeve matematike i fizike u raznim školama u Parizu.
Nakon njegove smrti govorilo se da je umro od previše rada.



Slika 2.2: Pierre Laurent Wantzel
izvor:https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/-Wantzel/
(preuzeto 10.5.2022.)

2.3 Gaussova ravnina

Skup $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ gdje je i broj koji ima svojstvo $i^2 = -1$ se zove skup kompleksnih brojeva. Ako je $z = a+bi$, onda je a realan dio kompleksnog broja z, b je imaginarni dio kompleksnog broja z dok je i imaginarna jedinica. Svaki kompleksni broj je potpuno zadan s dva realna broja i pritom je važno koji je prvi (realni dio), a koji drugi (imaginarni dio). Također, svakom uređenom paru (a, b) realnih brojeva možemo pridružiti kompleksni broj $z = a + bi$. Koristeći preslikavanje $a + bi \leftrightarrow (a, b)$ kompleksni brojevi mogu se prikazati kao točke u ravnini. Takav prikaz poznat je kao prikaz u kompleksnoj, odnosno Gaussovoj ravnini.

Položaj bilo koje točke u kompleksnoj ravnini možemo opisati pomoću udaljenosti r točke od ishodišta i kuta φ koji radij-vektor te točke zatvara s pozitivnim dijelom x osi. Brojevi r i φ jednoznačno su određeni kompleksnim brojem z te se nazivaju polarne koordinate. Prikaz kompleksnog broja z u obliku $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ nazivamo trigonometrijski prikaz kompleksnog broja.

Neka je dana jednadžba oblika $w^n = z$ pri čemu je $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Svako rješenje te jednadžbe naziva se n-ti korijen kompleksnog broja z, označava se s $w = \sqrt[n]{z}$ i dano je formulom $w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$.

Geometrijska interpretacija rješenja jednadžbe $w^n = z$ su vrhovi pravilnog n-terokuta upisanog u kružnicu sa središtem u ishodištu polumjera $\sqrt[n]{r}$. Upravo je to bila ideja kojom se Gauss služio pri svojoj konstrukciji pravilnog sedamanesterokuta.

Promotrimo sada jednadžbu oblika $z^n = 1$. Primjenjujući formulu za korjenovanje kompleksnih brojeva dobivamo rješenja te jednadžbe

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, k \in \{0, 1, .., n-1\}.$$

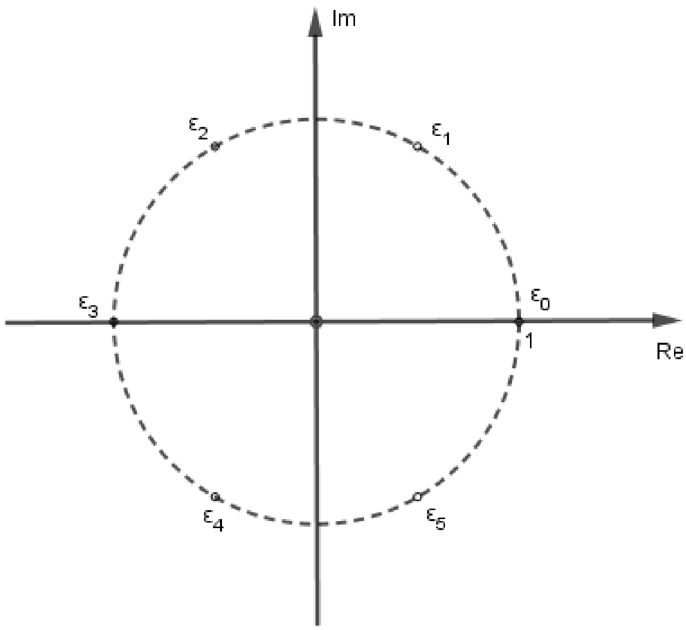
Promotrimo sada slučaj kada je $n = 6$. Tada su rješenja jednadžbe $z^6 = 1$ dana s

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Odnosno rješenja jednadžbe su

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_0 &= 1\\
\varepsilon_1 &= \varepsilon = \cos\frac{2\pi}{6} + i\sin\frac{2\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\\
\varepsilon_2 &= \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2},\\
\varepsilon_3 &= \cos\pi + i\sin\pi = -1,\\
\varepsilon_4 &= \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,\\
\varepsilon_5 &= \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.
\end{aligned}
$$

Uočimo da vrijedi $\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 = 0$.
Prikažimo točke u kompleksnoj ravnini



Slika 2.3: Rješenja jednadžbe $z^6 = 1$

Vidimo kako su rješenja vrhovi pravilnog šesterokuta upisanog u jediničnu kružnicu sa središtem u ishodištu.

2.4 Algebarska pozadina i Gauss-Wantzelov teorem

Orginalan Gaussov dokaz napisan je na preko 50 stranica iako u njemu nije u potpunosti dokazana nužnost. Kompletan dokaz dovršio je Pierre Wantzel. U nastavku ćemo vidjeti kraći dokaz teorema koristeći se konceptom proširenja polja i Galoisovom teorijom.

Na početku ćemo navesti neke definicije i teoreme koji će nam biti potrebni za dokaz.

1. Polja

Definicija 2.1. *Skup G s binarnom operacijom $*$ naziva se grupa ako vrijedi:*

1. *zatvorenost: za* $\forall g_1, g_2 \in G, g_1 * g_2 \in G$
2. *asocijativnost: za* $\forall g_1, g_2, g_3 \in G$ *vrijedi* $g_1 * (g_2 * g_3) = (g_1 * g_2) * g_3$
3. *neutralni element:* $\exists e \in G$ *takav da je* $e * g = g * e = g$ *za* $\forall g \in G$
4. *inverz: Za* $\forall g \in G$ $\exists g^{-1} \in G$ *takav da je* $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$

Posebno, grupu zovemo *Abelova (komutativna)* ako $\forall g_1, g_2 \in G$ vrijedi $g_1 * g_2 = g_2 * g_1$.

Definicija 2.2. *Neka je R neprazan skup na kojem su definirane dvije binarne operacije $+$ i $\cdot$. Kažemo da je uređena trojka $(R, +, \cdot)$ prsten ako vrijedi:*

1. $(R, +)$ *je Abelova grupa*
2. $(R, \cdot)$ *je polugrupa (to jest operacija $\cdot$ je asocijativna)*
3. *distributivnost operacije $\cdot$ s obzirom na operaciju $+$:*

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c, \ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \forall a, b, c \in R.$$

Neutralni element grupe $(R, +)$ naziva se nula *i označava s 0. Ako postoji neutralni element strukture $(R, \cdot)$ onda se on naziva* jedinica *i označava s 1, a $(R, +, \cdot)$ se tada naziva prsten s jedinicom. Ako je operacija $\cdot$ komutativna, onda govorimo o komutativnom prstenu.*

Nadalje ćemo umjesto $(R, +, \cdot)$ pisati R.
Prsten R nazivamo integralna domena ako je R komutativan prsten s jedinicom i ako nema djelitelja nule, tj. ako ne postoje a i b elementi R takvi da je $a \neq 0$ i $b \neq 0$, a $ab = 0$.

Definicija 2.3. *Komutativni prsten s jedinicom $(R, +, \cdot)$ u kojem je svaki element $x \in R \setminus \{0\}$ invertibilan naziva se polje.*

2. Polinomi

Još jedan važan rezultat u algebri je da ako je R komutativni prsten s jedinicom, onda je $R[x]$, skup polinoma s koeficijentima iz R, također komutativni prsten s jedinicom. U algebri se često govori o ireducibilnim polinomima. To je polinom kod kojeg ne postoji polinom manjeg stupnja od njega koji ga dijeli u istom prstenu polinoma. Drugim riječima, ako je polinom $p(x)$ ireducibilan, onda ne postoje netrivijalni polinomi $a(x)$ i $b(x)$ manjeg stupnja takvi da je $a(x)b(x) = p(x)$. Također, svaki se polinom iz $R[x]$ može na jedinstven način zapisati kao produkt ireducibilnih polinoma, što je analogno osnovnom teoremu aritmetike.

Podsjetimo se ako je a korijen polinoma $p(x)$, tada je taj polinom djeljiv s $x - a$. Ova ideja općenito vrijedi za polinome stupnja n i svaki korijen polinoma. Polinomi su ireducibilni kada ti korijeni nisu sadržani u istom prstenu kao i polinom. To je slučaj za $x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$. Primjetimo da dva korijena $\pm\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Stoga se $x^2 - 2$ ne može faktorizirati u $\mathbb{Q}[x]$ pa je ireducibilan. Svaki polinom stupnja n ima točno n kompleksnih nultočaka $a_1, a_2, ..., a_n$ (ne nužno različitih) i vrijedi $P(x) = (x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n)$.

Einsteinov kriterij ireducibilnosti je također važan rezultat u teoriji polinoma. On kaže da je polinom s cjelobrojnim koeficijentima $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ ireducibilan u $\mathbb{Z}[x]$ ako postoji prost broj p tako da $p \nmid a_n$, $p | a_k$ za svaki $k < n$ te $p^2 \nmid a_0$. To vrijedi za polinome u $\mathbb{Z}[x]$, ali Gauss je dokazao lemu koja pokazuje da ireducibilnost na $\mathbb{Z}$ implicira ireducibilnost na $\mathbb{Q}$.

3. Proširenje polja

Koje je najmanje polje nad kojim je zadani polinom reducibilan? Osnovni teorem algebre kaže nam da su svi polinomi reducibilni nad poljem kompleksnih brojeva, ali zadani polinom može biti i potpuno reducibilan nad nekim manjim poljem. To nas dovodi do koncepta proširenja polja.

Definicija 2.4. *Ako su K i L polja te $K \subseteq L$, kažemo da je L proširenje polja K.*

Ako je proširenje L polja K generirano samo jednim elementom α, tj. $L = K(\alpha)$ (gdje je $K(\alpha)$ najmanji potprsten od L koji sadrži K i α), kažemo da je L jednostavno proširenje polja K. Također, u polje možemo dodati korijene polinoma i tako napraviti veće polje nad kojim je polinom reducibilan. U slučaju od ranije, $x^2 - 2$, veće polje nad kojim je on reducibilan je $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Elementi tog polja su $a + b\sqrt{2}$ gdje su $a, b \in \mathbb{Q}$. Ovo je također primjer polja cijepanja s minimalnim polinomom $p(x) = x^2 - 2$.

Definicija 2.5. *Neka je K polje i $P \in K[X]$ nekonstantan polinom. Kažemo da se polinom P cijepa nad proširenjem L polja K ako postoji $a \in K$ te $\alpha_1, ..., \alpha_n \in L$ takvi da je*

$$P = a(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n),$$

odnosno ako polinom P možemo faktorizirati u produkt linearnih faktora.

Definicija 2.6. *Neka je K polje i $P \in K[X]$ nekonstantan polinom. Ako se P cijepa nad L, tj. $P = a(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n), a \in K, \alpha_1, ..., \alpha_n \in L$ te ako je k tome $L = K(\alpha_1, ..., \alpha_n)$, onda se L naziva polje cijepanja polinoma P nad poljem K.*
Dakle, polje cijepanja je najmanje proširenje polja K nad kojim se polinom P cijepa.

Polinom koji je ireducibilan nad K, normiran i kojem je α korijen nazivamo minimalni polinom od α nad K. Niti jedan polinom nad K kojem je α korijen nema manji stupanj od stupnja minimalnog polinoma.

Kako bi uspjeli izmjeriti koliko je proširenje polja, možemo promatrati dimenziju vektorskog prostora. Dakle, L možemo promatrati kao vektorski prostor nad poljem K te ako je taj vektorski prostor konačnodimenzionalan, onda kažemo da je L konačno proširenje polja K. Prirodan broj $dim_K L$ zovemo stupanj proširenja i označavamo [L:K]. Stupanj proširenja jednak je stupnju minimalnog polinoma nadodanog elementa.

Teorem 2.1. *Neka su $K \subseteq L \subseteq M$ polja. Tada je $[M : K] = [M : L] \cdot [L : K]$, pri čemu smatramo da je $\infty \cdot n = n \cdot \infty = \infty \cdot \infty = \infty$.*
Drugim riječima, proširenje M polja K je konačno ako i samo ako su proširenja M od L i L od K konačna i tada je stupanj $[M : K]$ umnožak stupnjeva $[M : L]$ i $[L : K]$.

4. Ciklotomsko polje

Definicija 2.7. *Ciklotomsko polje, $\mathbb{Q}(\zeta_n), n \in \mathbb{N}$, je polje koje se dobije proširenjem polja racionalnih brojeva primitivnim n-tim korijenima iz jedinice.*

Ovo polje je ključno pri prijelazu ideje o n točaka jednako raspoređenih na trigonometrijsku kružnicu do nečega s čime možemo raditi algebarski.

Ciklotomsko polje $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ je polje korijena polinoma $x^n - 1$. Njegov minimalni polinom je n-ti ciklotomski polinom stupnja $\phi(n)$ gdje je ϕ Eulerova funkcija. To je funkcija koja broji broj prirodnih brojeva manjih od prirodnog broja n koji nemaju zajedničkih djelitelja s n.

Definicija 2.8. *Neka je n cijeli broj te neka je ζ_k^n primitivni n-ti korijen iz jedinice. Tada n-ti ciklotomski polinom $\Phi_n(x)$ glasi*

$$\Phi_n(x) = \prod_{1 \leq k \leq n} (x - \zeta_k^n)$$

gdje su korijeni primitivni n-ti korijeni iz jedinice.

5. Konstruktibilni brojevi
Broj je geometrijski konstruktivan ako ga možemo dobiti konačnim brojem presjeka pravaca i kružnica. Primjetimo da će svaki presjek pravca i kružnice imati jednadžbu stupnja dva ili manje. Dakle, sve ove jednadžbe se mogu riješiti samo racionalnim operacijama i kvadratnim korjenovanjem.

Teorem 2.2. *Kompleksni broj je konstruktibilan ako i samo ako postoji niz proširenja polja* $\mathbb{Q} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq \ldots \subseteq K_m = \mathbb{Q}(z)$ *takav da je svako proširenje* $K_i \subseteq K_{i+1}$ *kvadratno, tj.* $[K_{i+1} : K_i] = 2$.

6. Fermatovi brojevi
Fermatovi brojevi su brojevi oblika $2^{2^k} + 1$ gdje je $k \geq 1$. Poznato je da su prvih pet Fermatovih brojeva prosti. Ti brojevi su 3, 5, 17, 257 i 65537. Idući Fermatov broj je jednak 4 294 967 297. Dokaz da taj broj nije prost, već složen, pokazao je Euler otprilike 80 godina nakon Fermatove smrti. Nakon još petnaest godina, Euler je objavio još jedan rad s općenitijim dokazom malog Fermatovog teorema.

Teorem 2.3. *Ako brojevi a i b nisu djeljivi prostim brojem p tada je svaki broj oblika* $a^{p-1} - b^{p-1}$ *djeljiv s p.*

On je to iskoristio kako bi dokazao rezultat da bilo koji djelitelj broja oblika $a^{2m} + b^{2m}$, među kojima su i Fermatovi brojevi, mora biti oblika $k2^{m+1} + 1$ gdje je $k \geq 0$. Lucas je to proširio na brojeve oblika $k2^{m+2} + 1$. To mu je dalo početnu točku za testiranje vrijednosti n koji daju proste brojeve te je testirao dijele li oni peti Fermatov broj. Trebalo mu je samo šest pokušaja kako bi našao prikladni n. Na temelju ovoga zaključeno je da su od šestog do jedanaestog Fermatovog broja brojevi složeni. Također, nije poznato postoje li veći prosti Fermatovi brojevi.

Na kraju ćemo navesti još nekoliko definicija vezanih uz Galoisovu teoriju.
Definicija 2.9. *Neka je K polje. Automorfizam polja K je izomorfizam polja K na samog sebe. Skup svih automorfizama polja K označavamo s* $Aut(K)$.

Definicija 2.10. *Neka su L i M proširenja polja K. Homomorfizam* $\varphi : L \to M$ *za koji vrijedi* $\varphi(\alpha) = \alpha$ *za svaki* $\alpha \in K$ *zove se K-homomorfizam.*

Definicija 2.11. *K-automorfizam polja L je automorfizam* $\sigma \in Aut(L)$ *koji je K-homomorfizam. Skup svih K-automorfizama polja L označavamo s* $Aut_K(L)$ *i nazivamo Galoisovom grupom proširenja L polja K. Pišemo Gal(L, K).*

Definicija 2.12. *Ako je L polje i K podskup od Aut(L), tada je fiksno polje od K definirano*

$$L^K = \{a \in L : \sigma(a) = a \text{ za sve } \sigma \in K\}.$$

2.4.1 Gauss-Wantzelov teorem

Teorem *Konstrukcija pravilnog n-terokuta ravnalom i šestarom moguća je ako i samo ako je $n = 2^k p_1 p_2 \cdots p_s$, gdje su k i s nenegativni cijeli brojevi i p_i-ovi su (za $s > 0$) različiti prosti Fermatovi brojevi.*

Dokaz. Uočimo prvo da je konstrukcija pravilnog n-terokuta ekvivalentna konstrukciji n-tih korijena iz jedinice u kompleksnoj ravnini. Promotrimo sada n-ti primitivni korijen iz jedinice $\zeta_n = e^{\frac{2\pi i}{n}}$. Sada su svi n-ti korijeni iz jedinice $1, \zeta_n, \zeta_n^2, ..., \zeta_n^{n-1}$. S obzirom da je skup konstruktibilnih brojeva polje, ti brojevi će biti konstruktibilni ako i samo ako je ζ_n konstruktibilan. To povlači da je pravilni n-terokut konstruktibilan ako i samo ako je ζ_n konstruktibilan.
Iz Teorema 2.2 slijedi da će ζ_n biti konstruktibilan ako i samo ako postoji niz proširenja polja $\mathbb{Q} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq K_3 \subseteq ... \subseteq K_m = \mathbb{Q}(\zeta_n)$ takav da je svako proširenje $K_i \subseteq K_{i+1}$ kvadratno, tj. $[K_{i+1} : K_i] = 2$. Tvrdimo da ovo vrijedi ako i samo ako je $\phi(n)$ potencija broja 2. Napomenimo da je ζ_n ciklotomsko polje pa stoga vrijedi $[\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] = \phi(n)$.

Pretpostavimo sada da postoji takav niz proširenja. Iz teorema slijedi:

$$\phi(n) = [\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] = [K_m : K_{m-1}][K_{m-1} : K_{m-2}] \cdots [K_1 : K_0] = (2)(2) \cdots (2) = 2^m$$

što smo i tražili.

Pretpostavimo sada da je $\phi(n) = 2^m$ za neki $m \geq 1$. $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ je polje cijepanja n-tog ciklotomskog polinoma $\Phi_n(x)$ pa je stoga $\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q}$ Galoisova grupa proširenja polja $\mathbb{Q}$. Red Galoisove grupe jednak je $G = |Gal(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})| = [\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}] = 2^m$ te je G 2-grupa. Tada mora postojati niz podgrupa

$$G = G_m < G_{m-1} < ... < G_0 = 1$$

takav da je $[G_{i+1} : G_i] = 2$ za sve i. Sada, prema fundamentalnom teoremu Galoisove teorije, ako je K_i fiksno polje od G_i onda

$$\mathbb{Q} = K_m \subseteq K_{m-1} \subseteq ... \subseteq K_0 = \mathbb{Q}(\zeta_n)$$

i $[G_{i+1} : G_i] = [K_i : K_{i+1}] = 2$. Dakle, ζ_n je konstruktibilan.

Pokazali smo da je pravilni n-terokut konstruktibilan ako i samo ako je $\phi(n)$ potencija broja 2. Ostaje nam još samo pokazati da su brojevi koji to zadovoljavaju upravo oblika $n = 2^k p_1 p_2 \cdots p_s$ gdje su k i s nenegativni cijeli brojevi i p_i-ovi su (za $s > 0$) različiti prosti Fermatovi brojevi.
Neka je faktorizacija od n jednaka $n = 2^k p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdot \cdot p_s^{e_s}$ gdje su $p_1, p_2, ..., p_s$ različiti neparni prosti brojevi, $e_i \geq 1$ za sve i i $k \geq 0$. Sada prema definiciji od $\phi(n)$ imamo

$$\phi(n) = 2^{k-1} p_1^{e_1-1} p_2^{e_2-1} \cdots p_n^{e_n-1}(p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_n - 1)$$

(ili $\phi(n) = p_1^{e_1-1} p_2^{e_2-1} \cdots p_n^{e_n-1}(p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_n - 1)$ ako je $k = 0$).
Pretpostavimo sada da je $\phi(n) = 2^m$. Potencija broja 2 ne može biti djeljiva niti jednim neparnim prostim brojem pa ne može biti $e_i > 1$ ni za koji i jer bi inače p_i dijelio 2^m. Dakle, $e_1 = e_2 = ... = e_n = 1$. Također, bilo koji djelitelj potencije broja 2, mora biti potencija broja 2 pa je $p_i - 1$ potencija broja 2 za sve i. Iz toga slijedi da je svaki p_i Fermatov broj. Dakle, n je traženog oblika.

Obratno, pretpostavimo da je $n = 2^k p_1 p_2 \cdots p_s$ gdje su $p_1, p_2, ..., p_s$ različiti Fermatovi brojevi $p_i = 2^{2^{\gamma_i}} + 1$. Tada je

$$\phi(n) = 2^{k-1}(p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_n - 1) = 2^{k-1} 2^{2^{\gamma_1}} 2^{2^{\gamma_2}} \cdots 2^{2^{\gamma_s}}$$

(ili $\phi(n) = (p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdots (p_n - 1) = 2^{2^{\gamma_1}} 2^{2^{\gamma_2}} \cdots 2^{2^{\gamma_s}}$ ako je $k = 0$). U oba slučaja to su potencije broja 2 što se i tražilo.

□

S obzirom da je danas poznato samo pet prostih Fermatovih brojeva, to znači da trenutno znamo konstruirati točno $2^5 - 1 = 31$ pravilnih n-terokuta gdje je n neparan koristeći ravnalo i šestar.

Poglavlje 3

Konstrukcije nekih pravilnih mnogokuta

Definicija 3.1. *Pravilni n-terokut je konveksan lik ravnine omeđen s n međusobno jednakih dužina, takvih da su mu i svi kutovi koji zatvaraju uzastopne stranice jednaki.*

3.1 Pravilni peterokut

Za konstrukciju stranice pravilnog peterokuta i pravilnog deseterokuta pomaže nam zlatni rez pa ćemo za početak definirati njega.

Definicija 3.2. *Ako neka točka dijeli dužinu tako da se cjelina prema većem dijelu odnosi kao veći dio prema manjem, onda kažemo da ta točka dijeli dužinu u zlatnom rezu.*

Nađimo sada za zadanu dužinu $\overline{AB}$ zlatni rez.
Neka je $C \in \overline{AB}$ i dijeli dužinu $\overline{AB}$ u zlatnom rezu. Dužina $\overline{AC}$ se još zove i zlatnim rezom dužine $\overline{AB}$.
Neka je $a = |AB|$, $x = |AC|$. Tada je $a - x = |BC|$. Prema definiciji zlatnog reza mora vrijediti

$$a : x = x : (a - x).$$

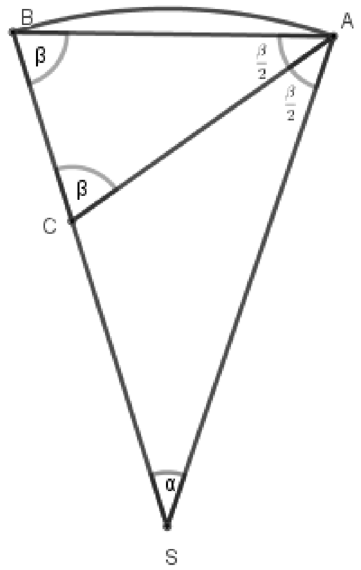
Odavde slijedi

$$x^2 + ax - a^2 = 0$$
$$x_{1,2} = \frac{a}{2}(\pm\sqrt{5} - 1).$$

S obzirom da točka C leži na $\overline{AB}$, slijedi da je

$$x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1). \tag{3.1}$$

Uzmimo sada pravilni deseterokut i neka je $\overline{AB}$ jedna njegova stranica, S središte opisane kružnice i r njezin polumjer, $|AB| = s_{10}$.



Slika 3.1

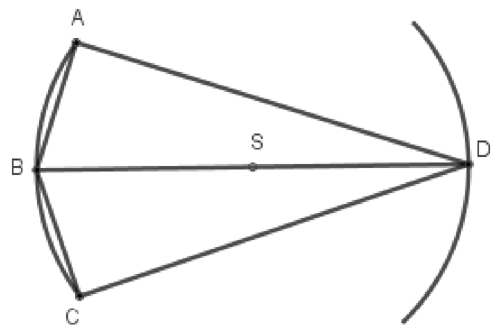
Označimo sada kutove kao na slici 3.1. Simetrala kuta $\angle SAB$ siječe $\overline{SB}$ u točki C. Zbog toga što se radi o pravilnom deseterokutu vrijedi $\alpha = 36°$ i $\beta = 72°$. Iz toga slijedi da je $\angle BCA = 180° - \frac{3}{2}\beta = 72° = \beta$ i $\alpha = \frac{1}{2}\beta$. Dakle, $|AC| = |AB| = |SC|$. S obzirom da su trokuti $\triangle SAB$ i $\triangle ABC$ slični (K-K-K) vrijedi:

$$|SA| : |AB| = |AB| : |BC|$$

$$|SB| : |SC| = |SC| : |BC|.$$

Iz čega slijedi da točka C dijeli polumjer $\overline{SB}$ u zlatnom rezu. Dakle, stranica pravilnog deseterokuta jednaka je zlatnom rezu polumjera deseterokutu opisane kružnice tj. $s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1)$.

Nađimo sada stranicu pravilnog peterokuta upisanog u kružnicu polumjera r.



Slika 3.2

Na slici 3.2 je prikazan tetivni četverokut $ABCD$ gdje su A, B i C tri uzastopna vrha pravilnog deseterokuta. Tada je $|AB| = |BC| = s_{10}$ te prema konstrukciji vrijedi

$$|BD| = 2r. \tag{3.2}$$

Prema (3.1) je

$$|AD| = |DC| = \sqrt{4r^2 - s_{10}^2} = \sqrt{4r^2 - \left(\frac{r}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)\right)^2}.$$

Dakle,

$$|AD| = |DC| = \frac{r}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}. \tag{3.3}$$

Prema Ptolomejevom teoremu (četverokut $ABCD$ je tetivni)

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|.$$

Prema slici 3.2 je $|AB| = |BC|$ i $|CD| = |AD|$ pa ako to uvrstimo u prethodnu jednakost dobivamo:

$$|AC| = \frac{2|BC| \cdot |AD|}{|BD|}.$$

Uvrstimo li tu (3.1), (3.2), (3.3) dobivamo

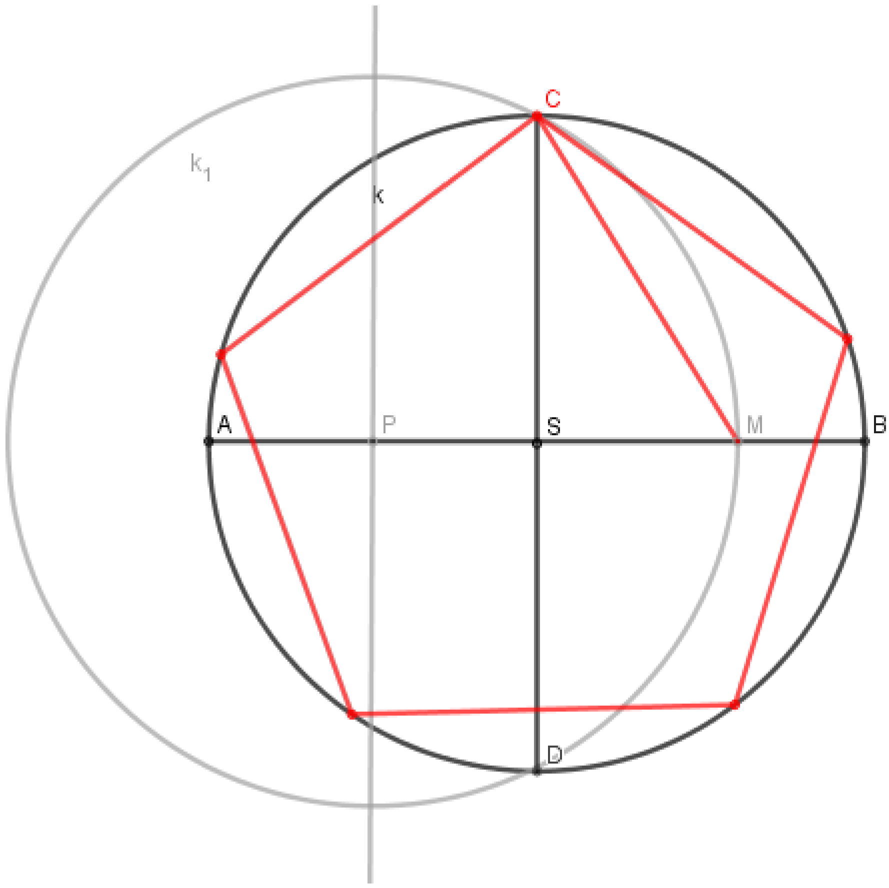
$$|AC| = \frac{r}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = s_5.$$

Dobili smo, dakle, duljinu stranice pravilnog peterokuta upisanog u kružnicu polumjera r.
Dakle, $|AC| = s_5$
Na osnovu ovoga možemo konstruirati stranicu pravilnog peterokuta upisanog u kružnicu polumjera r.

3.2 Konstrukcija pravilnog peterokuta

Konstrukcija:

1. Konstruirajmo kružnicu k sa središtem S i polumjerom r. Konstruirajmo dva promjera koja su međusobno okomita i označimo ih s $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$.
2. Konstruirajmo polovište dužine $\overline{AB}$ i označimo ga s P.
3. Konstruirajmo kružnicu k_1 sa središtem u točki P i polumjera $|CP|$. Kružnica k_1 siječe dužinu $\overline{AB}$ u točki M.
4. Spajanjem točaka C i M dobivamo dužinu $\overline{CM}$ i tako dobivamo stranicu pravilnog peterokuta. (Spajanjem točaka S i M dobili bi dužinu $\overline{SM}$ koja je ujedno i stranica pravilnog deseterokuta.)
5. Dužinu $\overline{CM}$ prenosimo po kružnici te dobivamo pravilni peterokut.



Slika 3.3: Konstrukcija pravilnog peterokuta

Dokaz:
Pretpostavimo da je $|AP| = |PS| = 1$. Sada prema Pitagorinom poučku imamo

$$|PC| = \sqrt{|SP|^2 + |SC|^2} = \sqrt{(1 + 2^2)} = \sqrt{5}.$$

Iz konstrukcije kružnice k_1 možemo uočiti da vrijedi $|SM| = |PC| - |PS| = \sqrt{5} - 1$. Dakle,

$$|CM| = \sqrt{|SM|^2 + |SC|^2} = \sqrt{(5 - 1)^2 + 2^2} = 10 - 2\sqrt{5}.$$

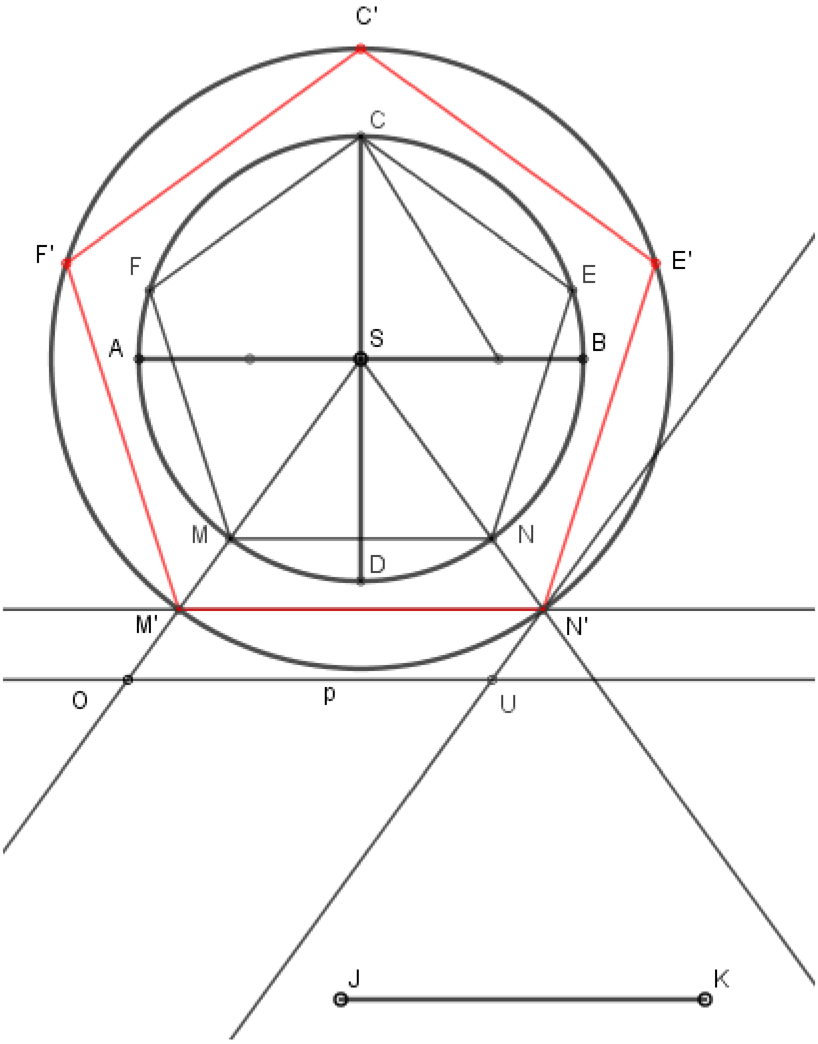
Poznato nam je da je duljina stranice pravilnog peterokuta upisanog u kružnicu radijusa r jednaka $r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. Iz pretpostavke imamo da je $r = 2$, slijedi da je $2\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$ što je upravo $|CM|$. Dakle, $|CM|$ je stranica pravilnog peterokuta.

Konstrukcija pravilnog peterokuta omogućava nam i konstrukciju pravilnog petnaesterokuta. Kako je središnji kut pravilnog petnaesterokuta jednak $24°$ i kako je $24° = 2 \cdot (72° - 60°)$, to kut od $24°$ možemo konstruirati ravnalom i šestarom pa onda i petnaesterokut upisan u zadanu kružnicu.

3.2.1 Konstrukcija pravilnog peterokuta kojemu je zadana stranica

Za konstrukciju pravilnog peterokuta zadane stranice s_5 dovoljno je nacrtati bilo koji pravilni peterokut, a zatim ga homotetijom preslikati u traženi peterokut.

Konstrukcija:
1. Zadana je dužina $\overline{JK}$, stranica traženog pravilnog peterokuta s_5.
2. Konstruirajmo pravilni peterokut upisan u neku proizvoljno zadanu kružnicu k.
3. Konstruirajmo dva polupravca SM i SN kroz središte kružnice S i dva susjedna vrha peterokuta M i N.
4. Odaberemo proizvoljnu točku O na polupravcu SM i konstruiramo pravac p paralelan s MN.
5. Konstruiramo točku U na pravcu p takvu da je $|OU| = s_5$, pri čemu U leži u istoj poluravnini s obzirom na SO kao i dužina MN.
6. Konstruiramo paralelu sa SO kroz točku U i presjek sa SN označimo s N'.
7. Konstruiramo paralelu s MN kroz točku N' i presjek sa SO označimo s M'.
8. Preslikamo postojeći pravilni peterokut homotetijom koja dužinu $\overline{MN}$ preslikava u dužinu $\overline{M'N'}$.



Slika 3.4: Konstrukcija pravilnog peterokuta - homotetija

3.3 Pravilni sedamnaesterokut

Teorem 3.1.(konstruktibilan n-terokut)
Pravilni n-terokut se može konstruirati ako se broj $\cos(\frac{2\pi}{n})$ *može konstruirati.*

U pozadini ovog teorema leži to da je problem konstrukcije pravilnog n-terokuta ekvivalnetan problemu podjele jedinične kružnice na n jednakih dijelova. Broj $\cos(\frac{2\pi}{n})$ predstavlja x-

koordinatu prve od dobivenih točaka na jediničnoj kružnici. Dakle, ako je $\cos(\frac{2\pi}{n})$ konstruktibilan broj, onda je prvi vrh n-terokuta konstruktibilan. Preostale vrhove onda možemo lako dobiti koristeći šestar.

Neka je $2\pi = 17\phi$.
Uvedimo oznake:

$$\begin{aligned}
a &= \cos\phi + \cos 4\phi \\
b &= \cos 2\phi + \cos 8\phi \\
c &= \cos 3\phi + \cos 5\phi \\
d &= \cos 6\phi + \cos 7\phi \\
e &= a + b \\
f &= c + d.
\end{aligned}$$

Zbrojimo sada $e + f = a + b + c + d = \cos\phi + \cos 2\phi + ... + \cos 8\phi$.
Označimo $e + f = S_8$ te lijevu i desnu stranu pomnožimo s $2\sin\frac{\phi}{2}$. Iz toga slijedi

$$2S_8 \sin\frac{\phi}{2} = 2\cos\phi\sin\frac{\phi}{2} + 2\cos 2\phi\sin\frac{\phi}{2} + ... + 2\cos 8\phi\sin\frac{\phi}{2}.$$

Koristeći formulu za pretvorbu zbroja u umnožak za sve članove s desne strane jednakosti dobivamo jednostavniju formulu. U nju potom uvrstimo $\phi = \frac{2\pi}{17}$

$$S_8 = \frac{\sin\frac{17\phi}{2} - \sin\frac{\phi}{2}}{2\sin\frac{\phi}{2}}$$

te dobijemo

$$S_8 = e + f = -\frac{1}{2}.$$

Sada možemo izračunati produkte od a, b, c, d svaki sa svakim:

$$\begin{aligned}
2ab &= 2(\cos\phi + \cos 4\phi)(\cos 2\phi + \cos 8\phi) \\
&= 2(\cos\phi\cos 2\phi + \cos\phi\cos 8\phi + \cos 4\phi\cos 2\phi + \cos 4\phi\cos 8\phi).
\end{aligned}$$

Korištenjem formule za pretvorbu umnoška u zbroj imamo

$$2\cos\phi\cos 2\phi = \cos\phi + \cos 3\phi$$

$$\begin{aligned}2\cos\phi\cos 8\phi &= \cos 7\phi + \cos 9\phi\\ 2\cos 4\phi\cos 2\phi &= \cos 6\phi + \cos 2\phi\\ 2\cos 4\phi\cos 8\phi &= \cos 12\phi + \cos 4\phi.\end{aligned}$$

Uočimo sada da za svaki cijeli broj n vrijedi

$$\begin{aligned}\cos((17-n)\frac{2\pi}{17}) &= \cos(2\pi - \frac{2\pi n}{17})\\ &= \cos 2\pi \cos\frac{2\pi n}{17} + \sin 2\pi \sin\frac{2\pi n}{17}\\ &= \cos\frac{2\pi n}{17}.\end{aligned}$$

Zbog toga vrijedi $\cos 12\phi = \cos 5\phi$ i $\cos 9\phi = \cos 8\phi$.
Iz toga slijedi

$$\begin{aligned}2ab &= \cos\phi + \cos 2\phi + \cos 3\phi + \cos 4\phi + \cos 5\phi + \cos 6\phi + \cos 7\phi + \cos 8\phi\\ &= e + f\\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Slično, imamo

$$\begin{aligned}2ac &= 2(\cos\phi + \cos 4\phi)(\cos 3\phi + \cos 5\phi)\\ &= 2(\cos\phi\cos 3\phi + \cos\phi\cos 5\phi + \cos 3\phi\cos 4\phi + \cos 4\phi\cos 5\phi)\\ &= \cos 4\phi + \cos 2\phi + \cos 6\phi + \cos 4\phi + \cos 7\phi + \cos\phi + \cos 9\phi + \cos\phi\\ &= 2(\cos 4\phi + \cos\phi) + (\cos 2\phi + \cos 8\phi) + (\cos 6\phi + \cos 7\phi)\\ &= 2a + b + d.\end{aligned}$$

Analognim računom za ostale dobivamo sljedeće rezultate

$$\begin{aligned}2ad &= b + c + 2d\\ 2bc &= a + 2c + d\\ 2bd &= a + 2b + c\\ 2cd &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Uočavamo

$$\begin{aligned}2ac + 2ad + 2bc + 2bd &= (2a + b + d) + (b + c + 2d) + (a + 2c + d) + (a + 2b + c)\\ &= 4(a + b + c + d)\\ &= 4(e + f)\\ &= -2.\end{aligned}$$

Faktoriziranjem dobijemo

$$\begin{aligned}2(ac+ad+bc+bd) &= 2(a(c+d)+b(c+d))\\ &= 2(c+d)(a+b)\\ &= 2ef.\end{aligned}$$

Dakle, $2ef = -2ef = -1$.
Našli smo da je $ef = -1$ i $e + f = -\dfrac{1}{2}$ pa znamo da su e i f korijeni kvadratne jednadžbe $x^2 + \dfrac{1}{2}x - 1$. Korijeni te jednadžbe su

$$x_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{17}{16}}.$$

Koristimo numeričku procjenu

$$\begin{aligned}e &= \cos\frac{2\pi}{17} + \cos\frac{4\pi}{17} + \cos\frac{8\pi}{17} + \cos\frac{16\pi}{17} \approx 0.78077\\ f &= \cos\frac{6\pi}{17} + \cos\frac{10\pi}{17} + \cos\frac{12\pi}{17} + \cos\frac{14\pi}{17} \approx -1.28077\end{aligned}$$

te možemo zaključiti da je $x_1 = e$ i $x_2 = f$.
Kako smo već ranije vidjeli, vrijedi $ab = -\frac{1}{4}$ i po definiciji je $a + b = e$ pa iz Vietèovih formula slijedi da su a i b korijeni kvadratne jednadžbe $x^2 - ex - \dfrac{1}{4}$.
Dakle,

$$x_{1,2} = \frac{e}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{e^2}{4}}.$$

Ponovno koristimo numeričku procjenu

$$\begin{aligned}a &= \cos\frac{2\pi}{17} + \cos\frac{8\pi}{17} \approx 1.0247\\ b &= \cos\frac{4\pi}{17} + \cos\frac{16\pi}{17} \approx -0.24397.\end{aligned}$$

Dakle, moramo imati

$$\begin{aligned}x_1 = a &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}\\ x_2 = b &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\sqrt{17} - \frac{1}{8}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}.\end{aligned}$$

Na potpuno analogan način dolazimo i do

$$x_1 = c = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{17} + \frac{1}{8}\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}$$

$$x_2 = d = -\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\sqrt{17} - \frac{1}{8}\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}.$$

Konačno, iz formule pretvorbe umnoška u zbroj

$$\cos\phi\cos 4\phi = \frac{1}{2}(\cos 3\phi + \cos 5\phi) = \frac{1}{2}c$$

te definicije $\cos\phi + \cos 4\phi = a$, prema Vietèovim formulama slijedi da su $\cos\phi$ i $\cos 4\phi$ korijeni kvadratne jednadžbe $x^2 - ax + \frac{1}{2}c$.
Ti korijeni su:

$$x_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{1}{2}c}.$$

S obzirom da su i ϕ i 4ϕ iz intervala $[0, \frac{\pi}{2}]$ možemo uočiti da je $\cos\phi > \cos 4\phi$ jer je cos padajuća funkcija na tom intervalu. Iz toga slijedi da mora vrijediti da je

$$\cos\phi = x_1 = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{1}{2}c}.$$

Nadalje je

$$\begin{aligned} 2a^2 &= 2(\cos\phi + \cos 4\phi)^2 \\ &= 2\cos^2\phi + 4\cos 4\phi + 2\cos^2 4\phi \\ &= 1 + \cos 2\phi + 2\cos 3\phi + 2\cos 5\phi + 1 + \cos 8\phi \\ &= 2 + 2c + b. \end{aligned}$$

I tako dobivamo

$$\begin{aligned} \cos\frac{2\pi}{17} &= \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{8}b - \frac{1}{4}c} \\ &= \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{2}b - c}. \end{aligned}$$

Nakon uvrštavanja i sređivanja dobivamo

$$\cos\frac{2\pi}{17} =$$

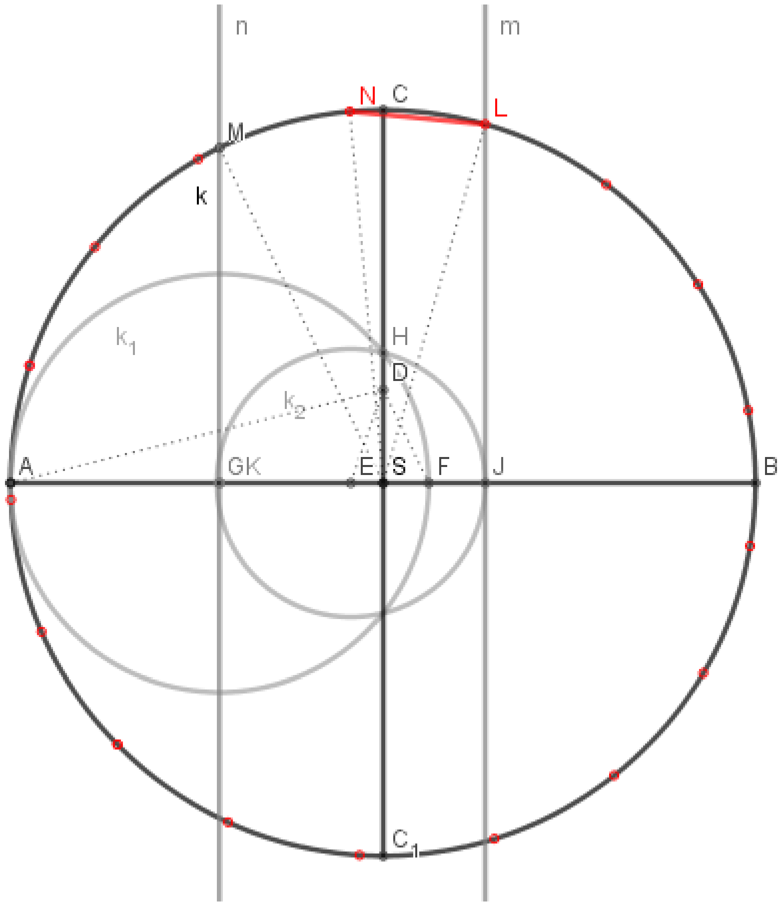
$$-\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \frac{1}{16}\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}}.$$

S obzirom da se svaki pozitivni algebarski izraz koji se iz danih veličina može dobiti operacijama zbrajanja, oduzimanja, množenja, djeljenja i uzimanja drugog korijena može konstruirati ravnalom i šestarom, slijedi da je ravnalom i šestarom moguće konstruirati $\cos\frac{2\pi}{17}$, a stoga i pravilni sedamnaesterokut.

3.4 Konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta

Konstrukcija:

1. Konstruirajmo kružnicu k sa središtem S i polumjerom r. Konstruirajmo dva promjera koja su međusobno okomita i označimo ih s $\overline{AB}$ i $\overline{CC_1}$.
2. Konstruirajmo točku D koja pripada dužini $\overline{SC}$ i vrijedi da je $|SD| = \frac{1}{4}|SC|$.
3. Konstruirajmo točku E koja pripada dužini $\overline{SA}$ tako da je $\angle SDE = \frac{1}{4}\angle SDA$
4. Konstruirajmo točku F koja pripada dužini $\overline{AB}$ tako da je $\angle FDE = 45°$.
5. Konstruirajmo polovište dužine $\overline{AF}$ i označimo ga s G.
6. Konstruirajmo kružnicu k_1 sa središtem u G, polumjera $|AG|$. Presjek k_1 s dužinom $\overline{SC}$ označimo s H.
7. Konstruirajmo kružnicu k_2 sa središtem u E, polumjera $|EH|$. Presjeke k_2 s dužinom $\overline{AB}$ označimo s J i K.
8. Konstruirajmo pravce m i n tako da točka J pripada pravcu m, a K pravcu n te su m i n okomiti na dužinu $\overline{AB}$.
9. Presjek pravca m s k označimo slovom L, a presjek n s k slovom M.
10. Konstruirajmo simetralu kuta $\angle LSM$ te označimo presjek te simetrale s k slovom N.
11. $|LN|$ je stranica pravilnog sedamnaesterokuta.



Slika 3.5: Konstrukcija pravilnog sedamnaesterokuta

Dokaz:
Trebamo pokazati da je dobiveni kut $\angle LSM = \frac{4\pi}{17}$. Simetralom se taj kut raspolovi i dobije se traženi unutrašnji kut pravilnog sedamnaesterokuta $\frac{2\pi}{17}$. Dakle, trebamo pokazati da je $\pi - \angle JSL - \angle MSK = \frac{4\pi}{17}$, odnosno da je $\pi - \arccos\frac{|SJ|}{|LS|} - \arccos\frac{|SK|}{|MS|} = \frac{4\pi}{17}$.

Bez smanjenja općenitosti, neka je $|MS| = |LS| = 1$, tj. neka je kružnica k jedinična kružnica. Trebamo pronaći duljine $|SJ|$ i $|SK|$ u čemu će nam pomoći trigonometrija pravokutnog trokuta.
Možemo uočiti da iz $\triangle ASD$ slijedi $\angle SDA = \operatorname{arctg} 4$. Iz konstrukcije uočimo da je $\angle SDE = \frac{\operatorname{arctg} 4}{4}$. Taj kut označimo s α. *Iz* $\triangle SDE$ slijedi da je $|SE| = \frac{1}{4}\operatorname{tg}\angle SDE$. Označimo tu

dužinu s a.
Sada, iz konstrukcije slijedi da je $\angle SDF = 45^\circ - \alpha$. Iz $\triangle SDF$ slijedi da je $|SF| = \frac{1}{4}\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha)$. Tu duljinu označimo s b.
Prema konstrukciji $|FA| = b + |SA| = b + 1$. Tu duljinu označimo s c.
Prema konstrukciji $|EH| = |EK|$ jer su to dva radijusa iste kružnice. Nađimo jedan od njih, na primjer $|EH|$.
Možemo primjetiti da je $|SG| = \frac{1}{2}|AF| - |SF| = \frac{c}{2} - b$. Ovaj izraz označimo s d.
Primjetimo još da je $|GH|$ radijus k_1 pa je stoga $|GH| = \frac{c}{2}$. Taj izraz označimo s e.
Iz $\triangle GSH$ možemo zaključiti da je $\cos\angle HGS = \frac{|SG|}{GH} = \frac{\frac{c}{2} - b}{\frac{c}{2}} = 1 - \frac{2b}{c}$. Označimo $\cos\angle HGS$ sf. Tada slijedi da je $\angle HGS = \arccos f$. Označimo taj kut s g.
Sada možemo zaključiti da je $|SH| = e \sin g$. Tu duljinu označimo s h.
Iz $\triangle SHE$ vrijedi da je $\operatorname{tg}\angle SHE = \frac{|SE|}{|SH}$. Tada je $\angle SHE = \operatorname{arctg}|SH|$, tj. $\angle SHE = \operatorname{arctg}\frac{a}{h}$. Tu vrijednost označimo s i.
Sada je $|EH| = \frac{|SE}{\sin\angle SHE} = \frac{a}{\sin i} = |EK|$. Ovu vrijednost označimo s j.
Očito je da vrijedi $|SK| = |SE| + |EK| = a + j$. Tu duljinu označimo s k.
Možemo primjetiti da je $|JK| = 2j$ jer je to promjer kružnice kojoj je $|EK| = j$ promjer. Iz toga onda slijedi da je $|SJ| = |JK| - k$.
Napokon, iz trokuta $\triangle MSK$ i $\triangle SLJ$ lako možemo pronaći vrijednosti kuteva $\angle MSK$ i $\angle JSL$ te je konačno $\pi - \arccos\frac{|SJ|}{|LS|} - \arccos\frac{|SK|}{|MS|} = \frac{4\pi}{17}$. Bisekcijom tog kuta dobijemo traženi kut.

Poglavlje 4

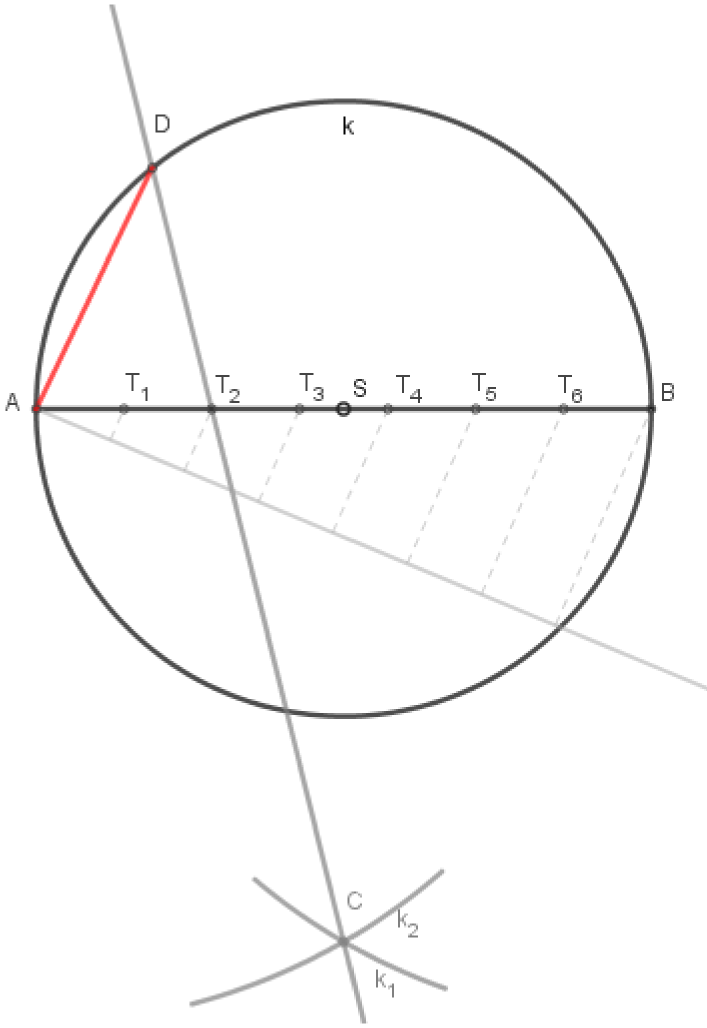
Približne konstrukcije

S obzirom na Gaussov teorem, znamo da određeni mnogokuti nisu elementarno konstruktibilni. Za njih su se matematičari služili raznim postupcima kako bi ih približno konstruirali uz manje ili veće greške.

Carlo Renaldini bio je profesor matematike iz Padove koji je 1668. godine objavio univerzalnu približnu konstrukciju pravilnih poligona. Ta konstrukcija je točna za jednakostraničan trokut, kvadrat i pravilni šesterokut, dok je za ostale poligone približna. Osim njegove, poznata je još Bernhardova metoda koja nudi odgovor na problem upisivanja pravilnog n-terokuta u danu kružnicu k polumjera r. Obje metode ćemo u nastavku opisati na primjeru pravilnog sedmerokuta.

4.1 Pravilni sedmerokut

Renaldinijeva metoda:
Neka je dana kružnica k sa središtem S i neka je $\overline{AB}$ njezin promjer. Podijelimo dužinu $\overline{AB}$ točkama $T_1, T_2, \ldots, T_7 = B$ na 7 jednakih dijelova. Opišimo luk k_1 sa središtem u A, polumjera $|AB|$ te luk k_2 sa središtem u B istog polumjera. Presjek ta dva luka označimo slovom C. Pravac CT_2 siječe kružnicu k u točki D. Dužina $\overline{AD}$ približno je jednaka stranici pravilnog sedmerokuta.



Slika 4.1: Renaldinijeva metoda za sedmerokut

Možemo izračunati duljinu ovako dobivene stranice n-terokuta te usporediti s duljinom stranice pravilnog n-terokuta kako bi vidjeli kolika je relativna pogreška. Kako bi izračunali $\overline{s_n}$ mi ćemo koristit koordinatnu metodu.
Neka je $r = 1$, $A(0,0)$, $B(2,0)$.

$$k(x-1)^2 + y^2 = 1$$

$$T_1\left(\frac{2}{n},0\right), T_2\left(\frac{4}{n},0\right)$$

$$k_1(x-0)^2 + (y-0)^2 = 4$$

$$k_2(x-2)^2+(y-0)^2=4$$

Nađimo prvo točku C.
$C = k_1 \cap k_2$

$$x^2+y^2=4$$
$$x^2-4x+4+y^2=4$$
$$-4x+4=0$$
$$x=1$$

$$1+y^2=4$$
$$y^2=3$$
$$y=\pm\sqrt{3}$$
$$C(1,-\sqrt{3})$$

Nađimo sada jednadžbu pravca CT_2.

$$T_2\left(\frac{4}{n},0\right), C(1,-\sqrt{3})$$

$$y-y_1=\frac{y_2-y1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$
$$y-0=\frac{-\sqrt{3}-0}{1-\frac{4}{n}}\left(x-\frac{4}{n}\right)$$
$$y=\frac{\sqrt{3}n}{4-n}\left(x-\frac{4}{n}\right)$$
$$y=\frac{\sqrt{3}n}{4-n}x-\frac{4\sqrt{3}}{4-n}$$

Nađimo sada presjek pravca CT_2 s kružnicom k, $P = CT_2 \cap k$.

$$(x-1)^2+\left(\frac{\sqrt{3}n}{4-n}x-\frac{4\sqrt{3}}{4-n}\right)^2=1$$

$$x^2 - 2x + 1 + \frac{3n^2}{(4-n)^2}x^2 - \frac{24n}{(4-n)^2}x + \frac{48}{(4-n)^2} = 0/(4-n)^2$$

$$x^2[(4-n)^2 + 3n^2] - x[2(4-n)^2 + 24n] + 48 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{[2(4-n)^2 + 24n] \pm \sqrt{[2(4-n)^2 + 24n]^2 - 4[(4-n)^2 + 3n^2) \cdot 48}}{2[(4-n)^2 + 3n^2}$$

$$= \frac{[2(16 - 8n + n^2) + 24n \pm \sqrt{4(4-n)^4 + 96(4-n)^2 n + 576n^2 - 192[(4-n)^2 + 3n^2]}}{2(16 - 8n + n^2 + 3n^2)}$$

$$= \frac{32 - 16n + 2n^2 + 24n \pm \sqrt{4(4-n)^2[(4-n)^2 + 24n - 48]}}{2(4n^2 - 8n + 16)}$$

$$= \frac{2(n^2 + 4n + 16) \pm \sqrt{4(4-n)^2(n^2 + 16n - 32)}}{8(n^2 - 2n + 4)}$$

$$= \frac{2(n^2 + 4n + 16) \pm 2(4-n)\sqrt{n^2 + 16n - 32}}{8(n^2 - 2n + 4)}, n \geq 5, n \in \mathbb{N}$$

$$x_{1,2} = \frac{n^2 + 4n + 16 \pm (4-n)\sqrt{n^2 + 16n - 32}}{4(n^2 - 2n + 4)}$$

Dakle x koordinata točke P je $x = \dfrac{n^2 + 4n + 16 + (4-n)\sqrt{n^2 + 16n - 32}}{4(n^2 - 2n + 4)}$.

Na kraju još trebamo izračunati $\overline{s_n}^2 = x_p^2 + y_p^2$.

$$\overline{s_n^2} = x^2 + \frac{3n^2}{4-2)^2}x^2 - \frac{24n}{(4-n)^2}x + \frac{48}{(4-n)^2}$$

$$= \frac{x^2[(4-n)^2 + 3n^2] - 24nx + 48}{(4-n)^2}$$

$$= \frac{x[2(4-n)^2 + 24n] - 24nx - 48 + 48}{(4-n)^2}$$

$$= 2x$$

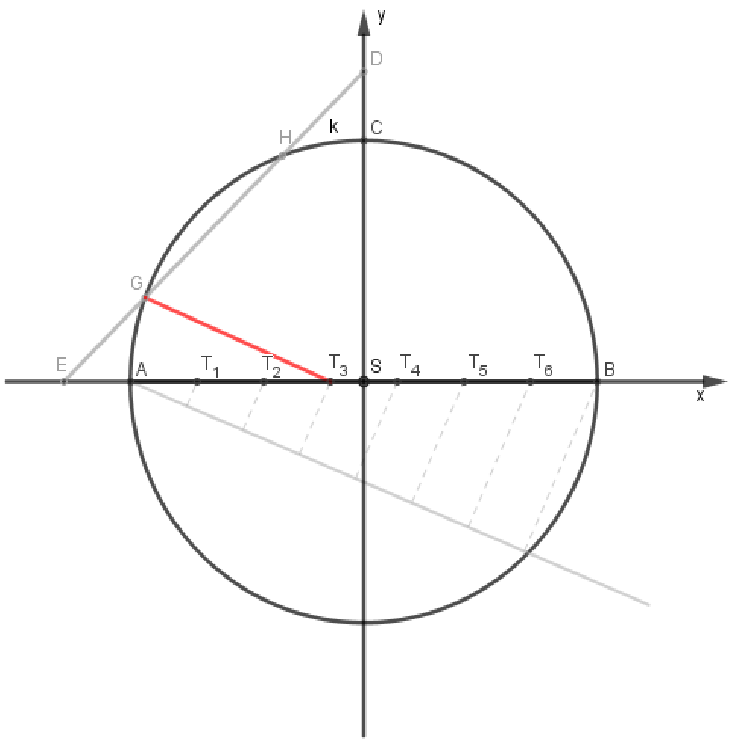
Dakle, $\overline{s_n^2} = 2 \cdot \dfrac{n^2 + 4n + 16 + (4-n)\sqrt{n^2 + 16n - 32}}{4(n^2 - 2n + 4)}$, tj.

$$\overline{s_n} = \sqrt{\frac{n^2 + 4n + 16 + (4-n)\sqrt{n^2 + 16n - 32}}{2(n^2 - 2n + 4)}}.$$

Dakle za naš sedmerokut dobivamo $\overline{s_n} = 0.8691$, dok je $s_n = 0.8677$ pa je relativna greška $\frac{s_7 - \overline{s_7}}{s_7} = -0.1624\%$.

Bernhardova metoda:

Neka je dana kružnica k sa središtem S i neka je $\overline{AB}$ njezin promjer. Na taj promjer konstruiramo okomiti polumjer $\overline{SC}$. Promjer $\overline{AB}$ podijelimo točkama $T_1, T_2, \ldots, T_7 = B$ na 7 jednakih dijelova. Na polupravcima SC i BA označimo točke D i E tako da je $|CD| = |EA| = \frac{1}{7}|AB|$. Dužina $\overline{DE}$ siječe kružnicu k u točkama G i H. Približna stranica sedmerokuta je $\overline{T_3G}$.



Slika 4.2: Bernhardova metoda za sedmerokut

Ponovno pomoću koordinatne metode možemo izračunati duljinu stranice $\overline{s_n}$. Tako možemo usporediti duljinu stranice u približnoj konstrukciji te duljinu stranice s_n pravilnog n-

terokuta te vidjeti relativnu pogrešku.

Neka je $r = 1$, $S(0,0)$, $A(-1,0)$, $B(1,0)$ i $C(0,1)$.
Nađimo prvo jednadžbu pravca ED.
$E\left(\frac{-n-2}{n}, 0\right)$, $D\left(0, \frac{n+2}{n}\right)$

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{\frac{n+2}{n} - 0}{0 - (\frac{-n-2}{n})}\left(x - \left(\frac{-n-2}{n}\right)\right)$$

$$y = \frac{n+2}{n+2}\left(x + \frac{n+2}{n}\right)$$

$$y = x + \frac{n+2}{n}$$

Nađimo sada presjek pravca ED s kružnicom k.

$$x^2 + \left(x + \frac{n+2}{n}\right)^2 = 1$$

$$x^2 + x^2 + \frac{2nx + 4x}{n} + \frac{n^2 + 4n + 4}{n^2} = 1/n^2$$

$$2x^2n^2 + 2n^2x + 4nx + n^2 + 4n + 4 = n^2$$

$$2n^2x^2 + (2n^2 + 4n)x + 4n + 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-(2n^2 + 4n) \pm \sqrt{(2n^2 + 4n)^2 - 4 \cdot 2n^2(4n + 4)}}{22n^2}$$

$$= \frac{-2n^2 - 4n \pm \sqrt{4n^4 - 16n^3 - 16n^2}}{4n^2}$$

$$= \frac{-2n^2 - 4n \pm \sqrt{4n^2(n^2 - 4n - 4)}}{4n^2}, n > 0$$

$$= \frac{2n(-n - 4) \pm 2n\sqrt{n^2 - 4n - 4}}{4n^2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-n - 2 \pm \sqrt{n^2 - 4n - 4}}{2n}$$

$$y_{1,2} = x + \frac{n+2}{n}$$

$$= \frac{-n-2 \pm \sqrt{n^2-4n-4}}{2n} + \frac{n+2}{n}$$

$$= \frac{-n-2 \pm \sqrt{n^2-4n-4}+2n+4}{2n}$$

$$y_{1,2} = \frac{n+2 \pm \sqrt{n^2-4n-4}}{2n}$$

Dakle pravac ED siječe kružnicu k u dvije točke
$G(\frac{-(n+2)-\sqrt{n^2-4n-4}}{2n}, \frac{n+2-\sqrt{n^2-4n-4}}{2n})$ i
$H(\frac{-(n+2)+\sqrt{n^2-4n-4}}{2n}, \frac{n+2+\sqrt{n^2-4n-4}}{2n})$.

I na kraju izračunajmo još $\overline{s_n} = |T_3G|$ gdje je $T_3\left(\frac{-n+6}{n}\right)$.

$$\overline{s_n} = \sqrt{\left(\frac{-(n+2)-\sqrt{n^2-4n-4}}{2n} - \frac{-n+6}{n}\right)^2 + \left(\frac{n+2-\sqrt{n^2-4n-4}}{2n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-n-2-\sqrt{n^2-4n-4}+2n-12}{2n}\right)^2 + \left(\frac{n+2-\sqrt{n^2-4n-4}}{2n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{n-14-\sqrt{n^2-4n-4}}{2n}\right)^2 + \left(\frac{n+2-\sqrt{n^2-4n-4}}{2n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{(n-14)^2-2(n-14)\sqrt{n^2-4n-4}+n^2-4n-4+(n+2)^2-2(n+2)\sqrt{n^2-4n-4}}{4n^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{n^2-28n+196-2nD+28D+n^2-4n-4+n^2+4n+4-2nD-4D+n^2-4n-4}{4n^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4n^2-4nD-32n+24D+192}{4n^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4(n^2-nD-8n+6D+48}{4n^2}}, n \geq 5, n \in \mathbb{N}$$

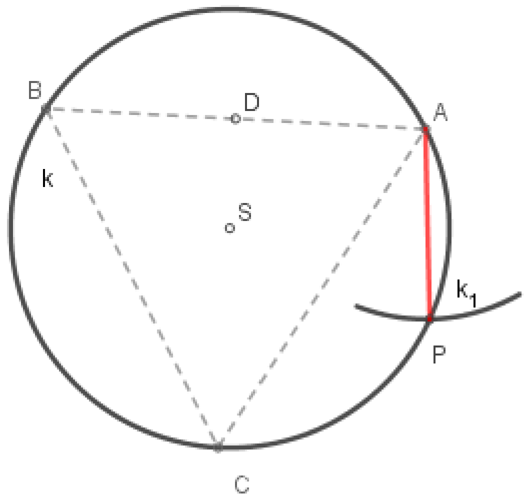
$$\overline{s_n} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2-8n+48-(n-6)D}$$

gdje je $D = \sqrt{n^2-4n-4}$.

Dakle za naš sedmerokut dobivamo $\overline{s_n} = 0.8675$, dok je $s_n = 0.8677$ pa je relativna greška $\dfrac{s_7 - \overline{s_7}}{s_7} = 0.0286\%$.

Još jednu približnu i vrlo jednostavnu konstrukciju sedmerokuta dao je najpoznatiji njemački renesansni slikar Albrecht Dürer. Za svoju konstrukciju koristio se jednakostraničnim trokutom te je duljinu stranicu sedmerokuta aproksimirao s $\frac{1}{2}$ duljine stranice jednakostraničnog trokuta.

Dürerova konstrukcija:
Neka je dan jednakostraničan trokut i njemu opisana kružnica k. Konstruiramo polovište dužine $\overline{AB}$ i označimo ga s D. Opišimo luk k_1 sa središtem u A i polumjerom $|AD|$. Luk k_1 siječe kružnicu k u točki P. Stranica sedmerokuta tada je $|AP|$.



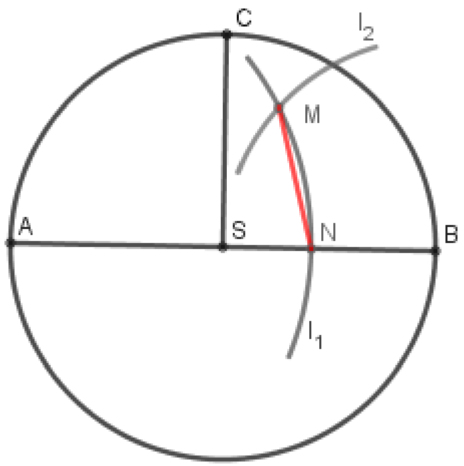
Slika 4.3: Dürerova metoda za sedmerokut

Označimo sa $s_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ stranicu jednakostraničnog trokuta upisanog u istu kružnicu kao i sedmerokut stranice $\overline{s_7} = \dfrac{1}{2}s_3$. Sada lako možemo izračunati da je relativna pogreška ove aproksimacije $\dfrac{s_7 - \overline{s_7}}{s_7} = 0.2007\%$.
Ipak, točna konstrukcija pravilnog sedmerokuta moguća je s nešto drugačijim instrumentima za konstrukcije. Ta vrsta konstrukcije zove se *"neusis"* te su je razvili stari Grci.

Ona podrazumijeva konstrukciju šestarom i označenim ravnalom. Metoda *"neusis"* konstrukcije pravilnog sedmerokuta temelji se na tome da se dužinu zadane duljine smjesti između dva pravca tako da se krajevi dužina nalaze na tim pravcima, a da dužina ili njezin produžetak prolaze zadanom točkom P.

4.2 Pravilni deveterokut

Opišimo jednu približnu konstrukciju pravilnog deveterokuta:
Neka je dana kružnica k sa središtem S i polumjerom r. Neka su $\overline{AB}$ i $\overline{SC}$ međusobno okomiti promjer i polumjer kružnice k. Opišimo luk l_1 sa središtem u A, polumjera $|AC|$ te luk l_2 sa središtem u B, polumjera r. Luk l_1 siječe promjer $\overline{AB}$ u točki N, a luk l_2 u točki M. Dužina $\overline{MN}$ približna je stranica pravilnog deveterokuta. Njezina duljina je $r\sqrt{\frac{8-5\sqrt{2}}{2}}$, a relativna pogreška pri ovoj konstrukciji je 0.3688%.

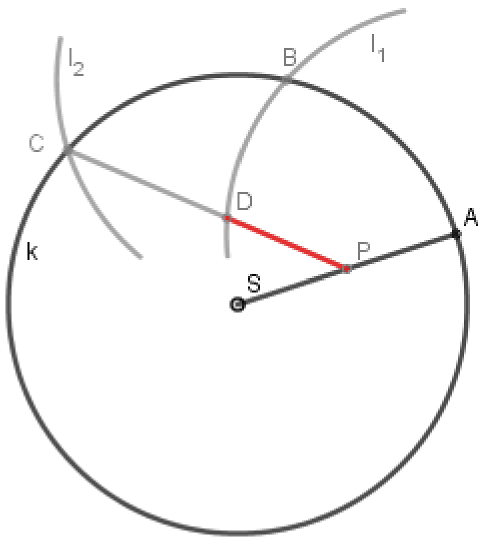


Slika 4.4: Približna konstrukcija stranice pravilnog deveterokuta

4.3 Pravilni jedanaesterokut

Opišimo jednu približnu konstrukciju pravilnog jedanaesterokuta:
Neka je dana kružnica k opisana pravilnom jedanaesterokutu sa središtem S i polumjerom r. Neka je $\overline{SA}$ jedan polumjer kružnice k. Opišimo luk l_1 sa središtem u A i polumjerom r

te neka on kružnicu k siječe u točki B. Opišimo luk l_2 sa središtem u B i polumjerom r koji kružnicu k siječe u točki C. Spojnica točke C i polovišta P dužine $\overline{SA}$ siječe luk l_1 u točki D. Približna stranica pravilnog jedanaesterokuta je dužina $\overline{DP}$. Također, koordinatnom metodom možemo izračunati da je njezina duljina $r\frac{3\sqrt{7}}{14}$, a relativna pogreška -0.6178%.



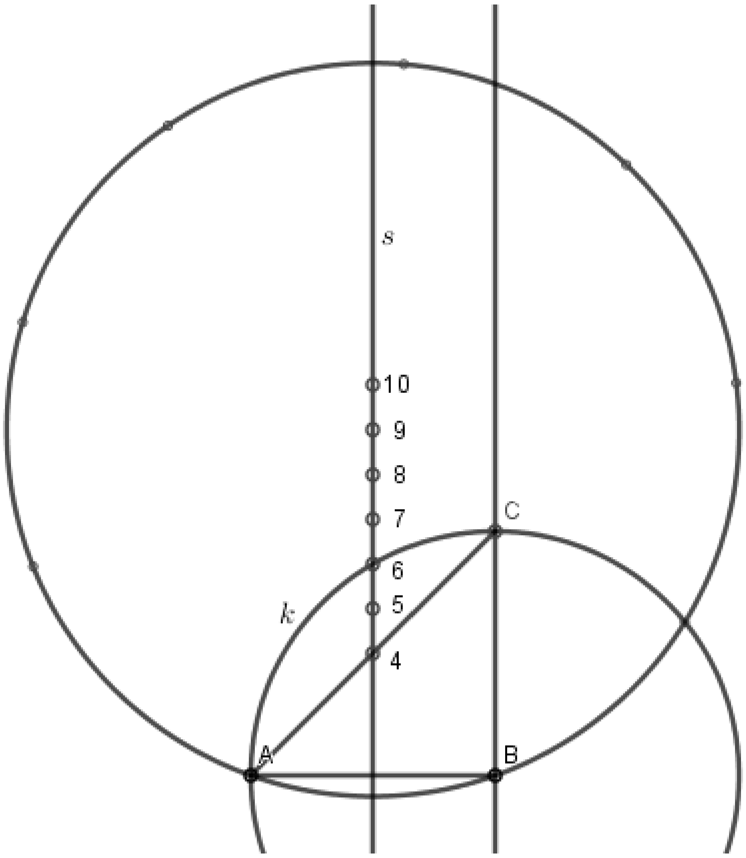
Slika 4.5: Približna konstrukcija stranice pravilnog jedanaesterokuta

4.4 Univerzalna konstrukcija pravilnih mnogokuta kojima je zadana stranica

U nastavku ćemo opisati jednu univerzalnu konstrukciju pravilnih mnogokuta kojima je zadana stranica. Ova konstrukcija točna je za pravilni četverokut i pravilni šesterokut dok je za ostale pravilne mnogokute približna. Mi ćemo je pokazati na primjeru deveterokuta.

1. Konstruirajmo stranicu $s_9 = \overline{AB}$ i njezinu simetralu s.
2. Konstruirajmo okomicu na $\overline{AB}$ kroz točku B te kružnicu $k(B, |AB|)$. Njihov presjek označimo s C.
3. Presjek kružnice k sa s označimo s 6, a $\overline{AC}$ sa s s 4. Točka 6 je središte kružnice koja se može opisati oko šesterokuta stranice $\overline{AB}$, a točka 4 je središte one kružnice koja se može opisati oko kvadrata stranice $\overline{AB}$.

4. Konstruirajmo polovište segmenta $\overline{4-6}$ i označimo ga s 5 (središte one kružnice koja se može opisati oko pravilnog peterokuta stranice $\overline{AB}$).
5. Prenošenjem segmenta $\overline{4-5}$ po simetrali s preko točke 6 dobivamo točke 7, 8, 9, 10 itd. Te su točke središta opisane kružnice pravilnom sedmerokutu, osmerokutu, deveterokutu, desterokutu, itd.
6. Prenošenjem segmenta $\overline{AB}$ kao tetive po kružnici dobivamo vrhove pravilnog deveterokuta.



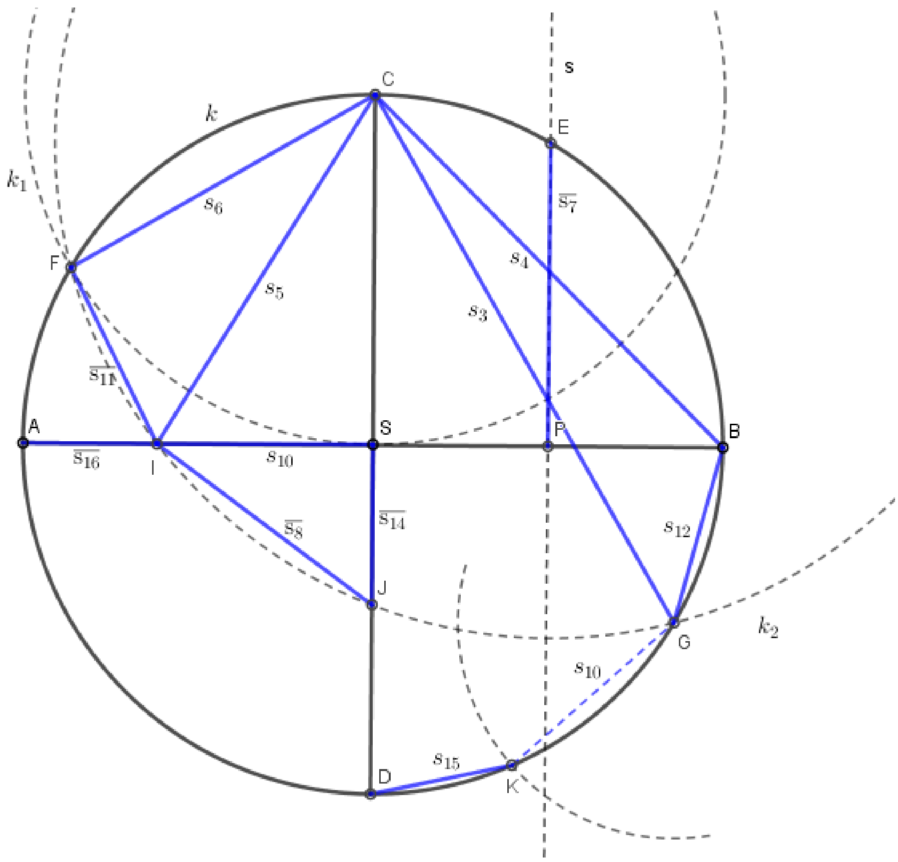
Slika 4.6

4.5 Jedna slika, nekoliko mnogokuta

Konstruirajmo sliku s koje ćemo moći očitati stranice nekoliko mnogokuta.

Konstrukcija:

1. Konstruirajmo kružnicu k sa središtem S i polumjerom r.
2. Konstruirajmo dva međusobno okomita promjera te kružnice $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$.
3. Konstruirajmo polovište dužine $\overline{SB}$ i označimo ga s P te simetralu te dužine označimo sa s. Simetrala s siječe kružnicu k u točki E.
4. Konstruirajmo kružnicu k_1 sa središtem C polumjera r. Kružnica k_1 siječe kružnicu k u točki F.
5. Konstruirajmo kružnicu k_2 sa središtem E i polumjerom $|EF|$. Ta kružnica siječe AS u točki I, SD u točki J i kružnicu k u točki G.
6. Konstruirajmo luk sa središtem u G polumjera $|SI|$. On kružnicu k siječe u točki K.



Slika 4.7

Uz ovako navedene oznake vrijedi sljedeće:

$$s_3 = |CG|, s_4 = |CB|, s_5 = |CI|, s_6 = |CF|$$
$$\overline{s_7} = |PE|, \overline{s_8} = |IJ|, s_{10} = |SI|, \overline{s_{11}} = |FI|$$
$$s_{12} = |BG|, \overline{s_{14}} = |SJ|, s_{15} = |DK|, \overline{s_{16}} = |AI|$$

Na slici se također javljaju i približne stranice za neke mnogokute koji se mogu konstruirati ($n = 8$, $n = 16$). Relativne pogreške svih aproksimacija redom su:
$\Delta_7 = 0.2\%$, $\Delta_8 = -0.416\%$, $\Delta_{11} = 0.948\%$, $\Delta_{14} = -2.653\%$, $\Delta_{16} = 2.105\%$

Više o ovim konstrukcijama, pripadnim algebarskim izrazima i pogreškama može se naći u literaturi [9].

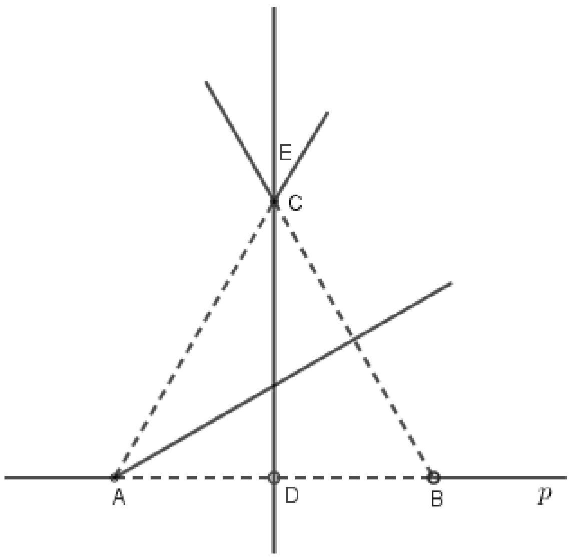
Poglavlje 5

Pravilni mnogokuti i presavijanje papira

Pogledajmo neke primjere kako uz pomoć presavijanja papira možemo dobiti pravilne mnogokute.

1. Jednakostranični trokut

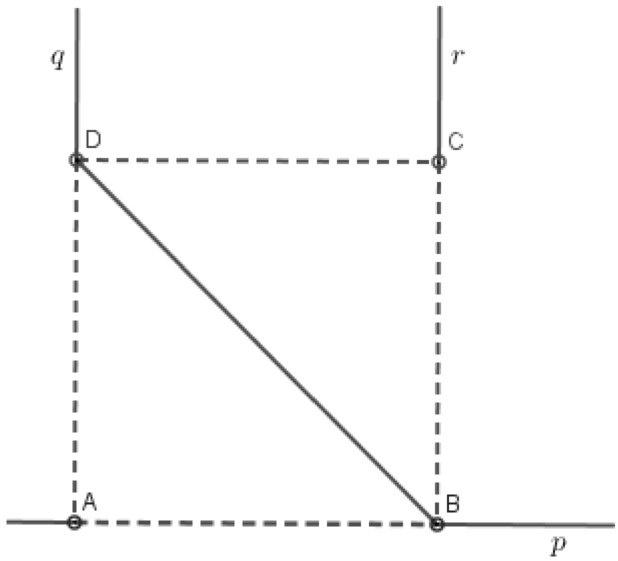
Presavijmo papir po nekom pravcu p i na taj rub prenesimo stranicu $\overline{AB}$ proizvoljne duljine. Presavijmo papir tako da točka A padne u točku B. Tako dobivamo okomicu DE kroz polovište D dužine $\overline{AB}$. Presavijmo AB preko A tako da točka B padne na točku C koja pripada pravcu DE. Dobili smo jednakostraničan trokut ABC.



Slika 5.1

2. Kvadrat

Presavijmo papir po pravcu p na kojem se nalazi dužina $\overline{AB}$, stranica kvadrata $ABCD$. Presavijanjem papira u točki A i točki B dobivamo okomice q i r. Izrežimo papir uzduž tih okomica. Sada presavijmo papir tako da $\overline{AB}$ padne na r. Točka A pada na točku C, a rub kroz B na q daje točku D. Izrežemo papir duž $\overline{CD}$ i dobijemo traženi kvadrat $ABCD$.



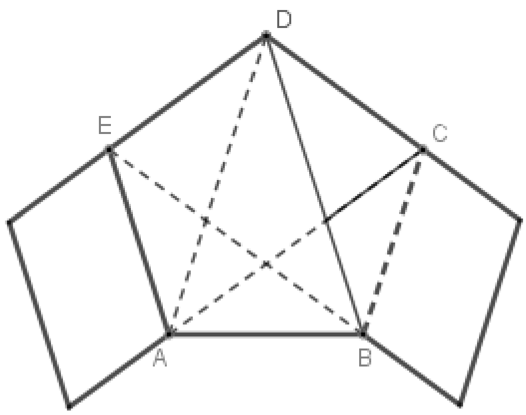
Slika 5.2

3. Pravilni peterokut

Pokušajmo uočiti vezu između čvorova od konopa ili nekog drugog materijala i pravilnih mnogokuta.

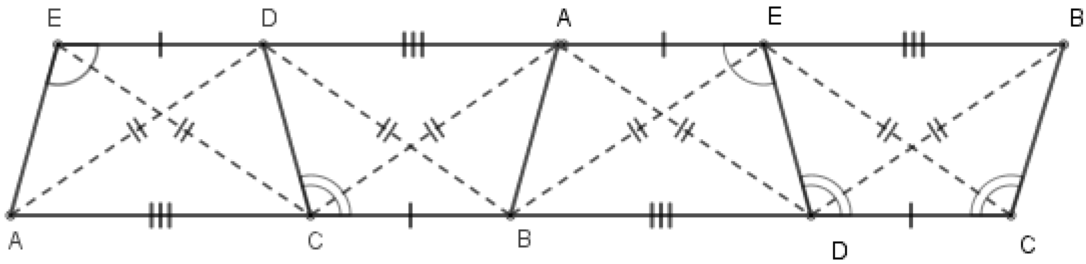
Slika 5.3: izvor:https://en.wikipedia.org/wiki/Overhand_knot
(preuzeto 10.5.2022.)

Ako se umjesto konopa uzme traka od papira i s njom načini čvor na isti način kao s konopom dobivamo pravilni peterokut.



Slika 5.4

Kad vrpcu razvijemo možemo uočiti četiri sukladna trapeza.



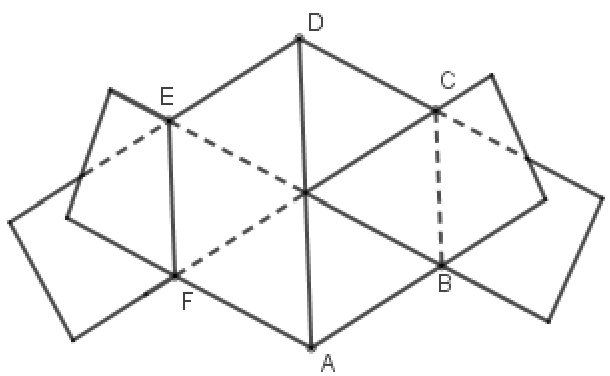
Slika 5.5

4. Pravilni šesterokut

a) Kod pravilnog šesterokuta ponovno možemo iskoristi čvor od konopa.

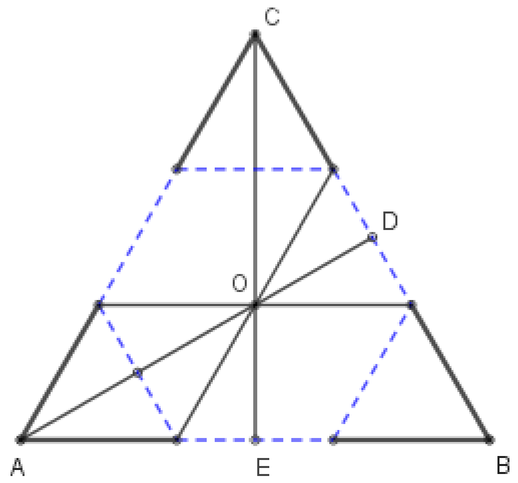
Slika 5.6: izvor:https://en.m.wikipedia.org/wiki/File:Reef_knot.svg
(preuzeto 10.5.2022.)

Ako umjesto konopa uzmemo dvije vrpce V_1 i V_2 i slože kao čvor konopa, dobivamo pravilni šesterokut $ABCDEF$.



Slika 5.7

b) Pravilan šesterokut također možemo dobiti iz papira oblika jednakostraničnog trokuta ABC. Duljina stranice pravilnog šesterokuta jednaka je trećini duljine stranice jednakostraničnog trokuta. Presavijmo vrhove A, B i C tako da padnu na točku O u kojoj se sijeku visine AD i CE jednakostraničnog trokuta ABC. Tako smo dobili željeni pravilni šesterokut.



Slika 5.8

Bibliografija

[1] V. Bajrović, *Pravilni mnogokuti i presavijanje papira*, Bilten seminara iz matematike za nastavnike - mentore, 10. državni susret, Makarska, 2001.

[2] V. Benčić, *Elementarna geometrija*, Školska knjiga, Zagreb, 1974.

[3] E. T. Eekhoff, *Constructibility of Regular Polygons*, Iowa State University, Math 599, Creative Component, web stranici pristupljeno 16.5.2022. https://nanopdf.com/download/contractibility-of-regular-polygons-from-euclid-to-gauss_pdf#

[4] H. Kraljević, *Algebra*, Odjel za matematiku, Osijek, 2007.

[5] D. Kuh, *Constructible Regular n-gons*, Whitman College - senior project archive, 2013.

[6] I. Marušić, D. Erceg, *Približna konstrukcija nekoliko pravilnih poligona*, Matematičko - fizički list, vol.72, no.287, (2022.) 174–177

[7] Y. Nishiyama, *Gauss´Method of Constructing a Regular Heptadecagon*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, vol.82, no.5, (2013.) 695–707

[8] D. Palman, *Geometrijske konstrukcije*, Element, Zagreb, 1996.

[9] D. Palman, *Nacrtna geometrija*, Element, Zagreb, 2001.

[10] Đ. Paunić, *Pravilni poligoni*, Društvo matematičara Srbije, Beograd, 2006.

[11] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1,2*, Zagreb,1992.

[12] S. Varošanec, *O konstrukcijama pravilnih poligona*, Zbornik radova 3. susreta nastavnika matematike, Zagreb, 1996.

[13] https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/Constructible_polygon web stranici je pristupljeno 16.5.2022.

[14] https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/
web stranici je pristupljeno 16.5.2022.

[15] http://dynamicsofpolygons.org/PDFs/Constructions.pdf
web stranici je pristupljeno 16.5.2022.

Sažetak

Geometrijskim konstrukcijama pravilnih mnogokuta pomoću jednobridnog ravnala i šestara bavili su se još antički grčki matematičari. Glavno pitanje koje se javilo bilo je mogu li se svi pravilni mnogokuti konstruirati. Odgovor na to pitanje prvi je dao Carl Friedrich Gauss u svom djelu Disquisitiones Arithmeticae. On je dokazao konstruktibilnost pravilnog sedamnaesterokuta, a potom je i razvio teoriju koja mu je omogućila da formulira dovoljan uvjet za konstruktibilnost pravilnih mnogokuta. Njegov je dokaz s nužnošću upotpunio Pierre Wantzel. U radu je opisan dokaz Gauss - Wantzelovog teorema, a potom i nekoliko konstrukcija pravilnih mnogokuta koji se mogu konstruirati jednobridnim ravnalom i šestarom te nekoliko približnih konstrukcija.

Summary

The ancient Greek matematicians were already engaged in the geometric constructions of the regular polygons with compass and straightedge. The main question that was being asked was that if it was possible to construct all of the regular polygons. The answer to that question was first given by Carl Frierdrich Gauss in his Disquisitiones Arithmeticae. He proved the constructibility of the regular heptadecagon, and later developed theory which allowed him to formulate a sufficient condition for the constructibility of the regular polygons. Pierre Wantzel completed his proof with necessity. This thesis decscribes the proof of the Gauss - Wantzel theorem, construction of several regular polygons that can be constructed with compass and straightedge and several approximate constructions.

Životopis

Rođena sam 5. travnja 1994. godine u Zagrebu. Godine 2009. završila sam Osnovnu školu Otona Ivekovića u Zagrebu. Iste godine upisala sam XVI. gimnaziju u Zagrebu koju sam završila 2013. godine. Iste godine upisala sam preddiplomski studij Matematika: smjer nastavnički na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu kojeg sam završila 2017. godine. Potom sam upisala diplomski sveučilišni studij Matematika: smjer nastavnički na istom fakultetu.