SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Božidar Grgur Drmić

HINDMANOV TEOREM

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc.Mladen Vuković

Zagreb, srpanj 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Sadržaj **iii**

Uvod **1**

1 Filtri i ultrafiltri **3**
1.1 Filtri . . . 3
1.2 Ultrafiltri . . . 6

2 Osnovne definicije i činjenice o topološkim prostorima **13**
2.1 Topološki prostori . . . 13
2.2 Hausdorffovi topološki prostori . . . 15

3 Prostor ultrafiltera **17**
3.1 Topologija na prostoru ultrafiltera . . . 17

4 Hindmanov teorem **21**
4.1 Idempotentnost . . . 21
4.2 Dokaz Hindmanovog teorema . . . 26

Bibliografija **31**

Uvod

Američki matematičar Neil Hindman 1974. godine dokazao je da za svako konačno bojanje skupa prirodnih brojeva postoji beskonačan skup čiji je skup parcijalnih suma monokromatski, tj. obojan jednom bojom. [1] Njemu u čast, taj teorem poznat je pod nazivom Hindmanov teorem. U ovom diplomskom radu, dokazat ćemo Hindmanov teorem upotrebom strukture ultrafiltera. Osim osnovnih rezultata o ultrafiltrima, proučit ćemo prostor svih ultrafiltera na skupu prirodnih brojeva te uspostaviti topologiju na tom prostoru. Stoga ćemo prethodno definirati neke osnovne pojmove iz topologije i dokazati neke rezultate potrebne za ovaj rad. Na prostoru svih ultrafiltera definirat ćemo operator koji će biti ključan za dokaz samog Hindmanovog teorema. Naime, ispostavit će se da ultrafilter idempotentan s obzirom na taj operator daje prirodan način daje prirodan način za dokaz samog Hindmanovog teorema. Napomenimo samo da ćemo u daljnjem skup prirodnih brojeva označavati s $\mathbb{N}$ i da nulu ne smatramo prirodnim brojem.

Prije nego damo i formalan iskaz Hindmanovog teorema definirajmo skup parcijalnih suma.

Definicija 0.0.1. *Za $A \subseteq \mathbb{N}$ definiramo skup parcijalnih suma kao:*

$$\sum_A = \left\{ \sum_{a \in A_0} a : A_0 \subseteq A, A_0 \textit{ konačan} \right\}$$

Sada možemo i formalno iskazati Hindmanov teorem.

Teorem 0.0.2 (Hindmanov teorem)**.**
Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $\chi : \mathbb{N} \to \{1, ..., n\}$ proizvoljna funkcija. Tada postoji beskonačan skup $B \subseteq \mathbb{N}$ takav da je funkcija χ konstantna na $\sum_B$.

Za dokaz Hindmanovog teorema koristit ćemo i aksiom izbora. Zapravo, koristit ćemo Zornovu lemu koja je ekvivalentna aksiomu izbora. Dokaz ekvivalencije aksioma izbora i Zornove leme dan je, primjerice, u [2].Ovdje dajemo iskaz Zornove leme.

Lema 0.0.3 (Zornova lema)**.**
Neka je X parcijalno uređen skup na kojem svaki lanac ima gornju među u X. Tada X sadrži maksimalan element.

Poglavlje 1

Filtri i ultrafiltri

U ovom ćemo poglavlju definirati pojmove filtra i ultrafiltra. Zatim ćemo navesti nekoliko primjera te dokazati neka osnovna svojstva. Upravo ta svojstva čine ih idealnim alatom za dokaz Hindmanovog teorema. Naime, ispostavlja se da pametno odabran ultrafilter na $\mathbb{N}$ daje prirodan način za odabir beskonačnog skupa čiji je skup parcijalnih suma obojen jednom bojom. Upravo to je ključan dio Hindmanovog teorema.

1.1 Filtri

Filtri su osnovna struktura koju ćemo koristiti u ovom radu. Naime, mnoga poželjna svojstva koja imaju čine ih korisnim alatom prilikom dokaza raznih teorema. Međutim, za sam Hindmanov teorem nisu dovoljno jaka. Potrebno će biti i svojstvo maksimalnosti.

Definicija 1.1.1. *Neka je X proizvoljan neprazan skup. Familija $\mathcal{F}$ podskupova od X je* ***filter*** *na skupu X ako vrijedi:*

i) $X \in \mathcal{F}$ *i* $\emptyset \notin \mathcal{F}$

ii) *ako* $A, B \in \mathcal{F}$, *tada* $A \cap B \in \mathcal{F}$

iii) *ako* $A \in \mathcal{F}$ *i* $B \supseteq A$, *tada* $B \in \mathcal{F}$.

Drugim riječima filter na X je svaka neprazna familija podskupova od X zatvorena na konačne presjeke i nadskupove koja ne sadrži prazan skup. Promotrimo neke primjere filtera.

Primjer 1.1.2. *Budući da filter ne sadrži prazan skup, zbog zatvorenosti na neprazne presjeke nužno je da filter nema disjunktne elemente. To je naravno najlakše postići ako postoji*

$A \subseteq X$ takav da svi elementi filtra sadrže skup A. Tako dobivamo da je za svaki neprazni podskup A od X sljedeća familija jedan filter:

$$\mathcal{F}_A = \{B \subseteq X : B \supseteq A\}.$$

Primijetimo da familija $\mathcal{F}_A$ očito zadovoljava zatvorenost na nadskupove, a zatvorena je i na konačne presjeke jer je presjek dva nadskupa od A i sam nadskup od A.

Primjer 1.1.3. *Kada je X beskonačan skup, tada uvjet da filter na X nema disjunktnih elemenata možemo postići i tako da svi elementi filtra imaju konačne komplemente. Takve filtre zovemo Fréchetovi filtri. Za proizvoljan beskonačan skup X definiramo:*

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X : X \setminus A \text{ konačan}\}.$$

Provjerimo da je $\mathcal{F}$ filter. Očito vrijedi $\emptyset \notin \mathcal{F}$ jer je $X = \emptyset^c$ beskonačan. Zatim, imamo $X \in \mathcal{F}$ jer je $X^c = \emptyset$ konačan. Familija $\mathcal{F}$ očito je zatvorena na konačne presjeke jer za $A, B \in \mathcal{F}$ imamo da je $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ što je konačan skup kao unija dva konačna skupa. Ako je $A \in \mathcal{F}$, onda je skup A^c konačan pa za svaki skup $B \supseteq A$ imamo da je $B^c \subseteq A^c$ konačan jer je podskup konačnog skupa. Dakle, familija $\mathcal{F}$ je filter.

Primjer 1.1.4. *Želimo još istaknuti da uvjet da filter nema disjunktnih elemenata možemo postići i nizom padajućih skupova. To ćemo sada ilustrirati.*

Neka je niz $(A_n)_n$ nepraznih podskupova nekog skupa X takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $A_{n+1} \subseteq A_n$. Familiju $\mathcal{F}$ definiramo ovako:

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X : (\exists n \in \mathbb{N})\ A_n \subseteq A\}.$$

Provjerimo da familija $\mathcal{F}$ ispunjava uvjete iz definicije filtra.

Očito imamo $X \in \mathcal{F}$ i $\emptyset \notin \mathcal{F}$ jer $X \supseteq A_1$, a pretpostavili smo da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $A_n \neq \emptyset$.

Neka su $B_1, B_2 \in \mathcal{F}$ proizvoljni. Tada postoje $n, m \in \mathbb{N}$ takvi da vrijedi $B_1 \supseteq A_n$ i $B_2 \supseteq A_m$. Možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da vrijedi $n \geq m$. Tada očito vrijedi:

$$B_1 \cap B_2 \supseteq A_n \cap A_m = [\text{padajući skupovi}] = A_m.$$

Dakle $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{F}$, tj. familija $\mathcal{F}$ zatvorena je na konačne presjeke.

Neka su $B \in \mathcal{F}$ i $C \supseteq B$, $C \subseteq X$ proizvoljni. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da imamo $B \supseteq A_n$. Tada je $C \supseteq B \supseteq A_n$ pa je $C \in \mathcal{F}$, tj. vrijedi zatvorenost na nadskupove.

Time smo dokazali da je familija $\mathcal{F}$ filter.

Prvi primjer 1.1.2 navodi nas na zaključak da su elementi filtera zapravo svi nadskupovi neke baze, tj. da se sastoje od baze i proizvoljnog ostatka. U primjeru 1.1.3 vidimo da baznih elemenata može biti više. Iz primjera 1.1.4 zaključujemo da je zatvorenost na konačne presjeke dobivena time što je presjek baznih skupova opet bio bazni skup. Međutim to se može dodatno poopćiti. Naime, dovoljno je da je presjek dva bazna skupa nadskup baznog skupa. Tako dolazimo do sljedeće definicije i rezultata.

Definicija 1.1.5. *Neka je X neki skup te $\mathcal{B}$ neka familija podskupova od X. Kažemo da je familija $\mathcal{B}$* ***baza filtra*** *ako vrijedi:*

i) $\mathcal{B} \neq \emptyset$

ii) $\emptyset \notin \mathcal{B}$

iii) za sve $A, B \in \mathcal{B}$ postoji $C \in \mathcal{B}$ tako da vrijedi $C \subseteq A \cap B$

Ako je $\mathcal{F}$ neki filter nad skupom X tada kažemo da je $\mathcal{B}$ ***baza filtra*** *$\mathcal{F}$ ako je $\mathcal{B}$ baza filtra i $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$.*

Propozicija 1.1.6. *Ako je $\mathcal{B}$ baza filtra nad skupom X, onda je sljedeća familija filter, a $\mathcal{B}$ njegova baza:*

$$F_{\mathcal{B}} = \{A : (\exists B \in \mathcal{B})\ A \supseteq B\}.$$

Dokaz. Pokažimo da su zadovoljena sva tri uvjeta iz definicije filtra.

Iz definicije baze slijedi da je familija $\mathcal{B}$ neprazna. Neka je $B \in \mathcal{B}$ proizvoljan. Budući da vrijedi $X \supseteq B$, tada je $X \in F_{\mathcal{B}}$. Očito $\emptyset \notin F_{\mathcal{B}}$ jer $\emptyset \notin \mathcal{B}$, a elementi od $F_{\mathcal{B}}$ nadskupovi su elemenata iz $\mathcal{B}$.

Pokažimo zatvorenost na konačne presjeke. Neka su $A_1, A_2 \in F_{\mathcal{B}}$ proizvoljni. Tada postoje $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ takvi da vrijedi $B_1 \subseteq A_1$ i $B_2 \subseteq A_2$. Budući da je familija $\mathcal{B}$ baza filtra slijedi da postoji skup $C \in \mathcal{B}$ takav da je $C \subseteq B_1 \cap B_2$. Tada je $A_1 \cap A_2 \supseteq B_1 \cap B_2 \supseteq C$ pa je $F_{\mathcal{B}}$ zatvoren na konačne presjeke.

Očito vrijedi i zatvorenost na nadskupove jer ako je $C \subseteq A$ i $A \in F_{\mathcal{B}}$, imamo da postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da vrijedi $A \supseteq B$. No, tada imamo $C \subseteq A \subseteq B$ pa je $C \in F_{\mathcal{B}}$.

Time smo provjerili sve uvjete iz definicije filtra pa zaključujemo da je $F_{\mathcal{B}}$ filter. Očito vrijedi $\mathcal{B} \subseteq F_{\mathcal{B}}$ pa je $\mathcal{B}$ njegova baza. □

U sljedećem primjeru navodimo baze filtera.

Primjer 1.1.7. *Odredimo baze filtrima iz prethodnih primjera.*

U Primjeru 1.1.2 imamo $\mathcal{F} = \{B : B \supseteq A\}$. Tada je jedna baza očito skup $\mathcal{B} = \{A\}$

U Primjeru 1.1.3 ako uzmemo $X = \mathbb{N}$ *tada imamo da je* $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} : A^c \text{ konačan}\}$. *Za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *neka je* $A_n = [n, n+1, n+2, ...\rangle$. *Definirajmo* $\mathcal{B} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$. *Uočimo da je za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *skup* A_n^c *konačan pa je* $A_n \in \mathcal{F}$. *Dakle, još trebamo pokazati da za* $\mathcal{B}$ *vrijede uvjeti iz definicije 1.1.5. Redom ih navodimo i pokazujemo da vrijede:*

i) $A_1 \in \mathcal{B}$ *pa* $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

ii) Očito za svaki $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $n \in A_n$ *pa imamo* $A_n \neq \emptyset$

iii) Za sve $n, m \in \mathbb{N}$ *takve da je* $n < m$ *vrijedi* $A_m = A_n \cap A_m \in \mathcal{B}$.

Dakle familija $\mathcal{B} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ *je baza filtra.*

U Primjeru 1.1.4 imamo $\mathcal{F} = \{A : (\exists n \in \mathbb{N})\ A \supseteq A_n\}$ *gdje je* $(A_n)_n$ *niz padajućih skupova te* $A_n \neq \emptyset$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *Pokažimo da je* $\mathcal{B} = \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ *baza filtra* $\mathcal{F}$. *Kao i prije, navodimo redom uvjete iz definicije baze filtra te uočavamo da vrijede:*

i) $A_1 \in \mathcal{B}$ *pa* $\mathcal{B} \neq \emptyset$.

ii) za svaki $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $A_n \neq \emptyset$ *po definiciji.*

iii) $(A_n)_n$ *je niz padajućih skupova pa za sve* $n, m \in \mathbb{N}$, *takv da* $n < m$, *vrijedi* $A_m = A_n \cap A_m \in \mathcal{B}$.

Uočimo još na kraju ovog primjera da je uz $X = \mathbb{N}$ *primjer 1.1.3 samo poseban slučaj primjera 1.1.4.*

1.2 Ultrafiltri

Kao što smo već naveli, strukturi filtera nedostaje svojstvo maksimalnosti da bi bila pogodan alat za dokaz Hindmanovog teorema. To nas dovodi do definicije ultrafiltra.

Definicija 1.2.1. *Ultrafilter je filter koji je maksimalan s obzirom na inkluziju.*

Pitanje koje prvo pada na pamet je može li se svaki filter proširiti do ultrafiltra, tj. postoji li za svaki filter neki ultrafilter koji ga sadrži. Odgovor je potvrdan, a tvrdnju dokazujemo upotrebom Zornove leme 0.0.3.

Propozicija 1.2.2. *Neka je* F *filter na* X. *Tada postoji ultrafilter* U *na* X *takav da je* $F \subseteq U$.

Dokaz. Neka je $\mathcal{F}$ familija svih filtera nad skupom X koji sadrže filter F, tj. $\mathcal{F} = \{F' : F' \text{ je filter}, F' \supseteq F\}$. Budući da vrijedi $F \supseteq F$, tada je $F \in \mathcal{F}$, tj. familija $\mathcal{F}$ je neprazna.

Primjenom Zornove leme 0.0.3 sada želimo dokazati da postoji ultrafilter U koji sadrži filter F. U tu svrhu uzmimo proizvoljan lanac $\mathcal{L}$ obzirom na inkluziju u $\mathcal{F}$.

Definirajmo $G = \bigcup_{F' \in \mathcal{L}} F'$. Neka je $F_0 \in \mathcal{L}$ proizvoljan. Filter F_0 također je i iz familije $\mathcal{F}$ pa je nadskup od F. Stoga je i $G \supseteq F_0 \supseteq F$.

Pokažimo da je G filter nad skupom X. U tu svrhu provjeravamo da vrijede svi uvjeti iz definicije filtra 1.1.1.

i) Neka je $F_0 \in \mathcal{L}$ proizvoljan. Budući da je F_0 filter nad skupom X tada vrijedi $X \in F_0$. Stoga je i $X \in G \supseteq F_0$. Zatim, $\emptyset$ ne pripada niti jednom elementu lanca $\mathcal{L}$ pa nije ni u njihovoj uniji G.

ii) Neka su $A, B \in G$. Tada postoje $F_1, F_2 \in \mathcal{L}$ takvi da je $A \in F_1$ i $B \in F_2$. Kako je $\mathcal{L}$ lanac s obzirom na inkluziju, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $F_1 \subseteq F_2$. Stoga je $A \in F_2$. Kako je F_2 zatvoren na konačne presjeke, vrijedi da je $A \cap B \in F_2$. Stoga je $A \cap B \in G \supseteq F_2$.

iii) Neka je $A \in G$ i $B \subseteq X$ neki nadskup od A. Tada postoji $F_1 \in \mathcal{L}$ takav da je $A \in F_1$. Onda je i $B \in F_1$ jer je F_1 filter pa je zatvoren na nadskupove. Stoga je $B \in G \supseteq F_1$.

Dakle, G je filter koji je nadskup od F pa je $G \in \mathcal{F}$. Zaključujemo da svaki lanac $\mathcal{L}$ u $\mathcal{F}$ ima gornju među u $\mathcal{F}$ pa po Zornovoj lemi 0.0.3 postoji maksimalan element u $\mathcal{F}$. Neka je $U \in \mathcal{F}$ maksimalan. Pretpostavimo da postoji filter U_2 koji je pravi nadskup od U. Tada bismo imali da je $F \subseteq U \subseteq U_2$ pa je i $U_2 \in \mathcal{F}$ što je kontradikcija s time da je U maksimalan u $\mathcal{F}$. Dakle, U je maksimalan filter, tj. U je ultrafilter. Kako je $U \supseteq F$, tvrdnja propozicije je dokazana. □

Po prethodnoj propoziciji znamo da se svaki filter može proširiti do nekog ultrafiltra. Međutim, nismo rekli ništa kvalitativno o tom proširenju. Od ranije znamo da filter ne može sadržavati istovremeno neki skup A i njegov komplement A^c jer su ti skupovi disjunktni. Ostaje otvoreno pitanje može li se neki filter koji ne sadrži niti A niti A^c za neki $A \subseteq X$ proširiti do filtra koji će sadržati neki od ta dva skupa. Ispostavlja se da je to uvijek moguće napraviti. Kako je svaki ultrafilter maksimalan s obzirom na inkluziju, takvo proširenje ne smije biti moguće, tj. mora sadržavati točno jedan od skupova A i A^c za svaki $A \subseteq X$. Time dolazimo do sljedeće propozicije.

Propozicija 1.2.3. *Filter je ultrafilter ako i samo ako sadrži točno jedan od skupova A i A^c za svaki $A \subseteq X$.*

Dokaz. Uočimo da je jedan smjer trivijalan. Naime, neka je $\mathcal{F}$ filter koji sadrži točno jedan od skupova A i A^c za svaki $A \subseteq X$. Pretpostavimo da to nije ultrafilter. Dakle, postoji filter

$\mathcal{F}'$ takav da je $\mathcal{F}' \supseteq \mathcal{F}$. Budući da je $\mathcal{F}' \supsetneq \mathcal{F}$ imamo da postoji $A \in \mathcal{F}'$ takav da $A \notin \mathcal{F}$. Budući da $\mathcal{F}$ ne sadrži A po definiciji od $\mathcal{F}$ imamo da je $A^c \in \mathcal{F}$, no onda je $A^c \in \mathcal{F}'$ pa preko svojstava filtra dobivamo da je $\emptyset = A \cap A^c \in \mathcal{F}'$ što je kontradikcija. Dakle, $\mathcal{F}$ je ultrafilter.

Pokažimo i drugi smjer. Neka je U ultrafilter. Budući da je tada familija U filter, tada ona ne može sadržati disjunktne skupove. Posebno, familija U ne može sadržavati istovremeno skupove A i A^c ni za koji $A \subseteq X$. Stoga je dovoljno pokazati da uvijek sadrži nekog od njih. Pretpostavimo suprotno, tj. pretpostavimo da postoji skup $A \subseteq X$ takav da $A \notin U$ i $A^c \notin U$. Promotrimo sljedeći skup:

$$\mathcal{B} = U \cup \{A \cap B : B \in U\} \supseteq U$$

Imamo da je $A = (A \cap X) \in \{A \cap B : B \in U\} \subseteq \mathcal{B}$ pa je $\mathcal{B} \supsetneq U$. Pokažimo da za B vrijede sva svojstva baze filtra iz definicije 1.1.5. Redom ih navodimo i odmah provjeravamo da vrijede.

i) Budući da je familija U ultrafilter, tada je $U \neq \emptyset$. Stoga $\mathcal{B} \supseteq U \neq \emptyset$

ii) Pretpostavimo da je $\emptyset \in \mathcal{B}$. Budući da je familija U ultrafilter tada posebno $\emptyset \notin U$. Stoga je $\emptyset \in \{A \cap B : B \in U\}$ pa postoji skup $B \in U$ takav da vrijedi $A \cap B = \emptyset$. Tada je $B \subseteq A^c$. Kako je $B \in U$, a familija U zatvorena je na nadskupove, tada imamo da je $A^c \in U$ što je kontradikcija. Dakle $\emptyset \notin \mathcal{B}$.

iii) Neka su $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ proizvoljni. U svrhu dokaza promatramo sljedeća tri slučaja:

1. $B_1, B_2 \in U$:
   Tada imamo $B_1 \cap B_2 \in U$, a onda $B_1 \cap B_2 \in \mathcal{B}$
2. $B_1, B_2 \in \{A \cap B : B \in U\}$:
   Tada postoje skupovi $C_1, C_2 \in U$ takvi da vrijedi $B_1 = C_1 \cap A$ i $B_2 = C_2 \cap A$. Očito je tada $B_1 \cap B_2 = (C_1 \cap A) \cap (C_2 \cap A) = A \cap (C_1 \cap C_2)$. Međutim, $C_1 \cap C_2 \in U$ pa je $B_1 \cap B_2 \in \{A \cap B : B \in U\} \subseteq \mathcal{B}$
3. $B_1 \in U,\ B_2 \in \{A \cap B : B \in U\}$:
   Tada postoji skup $C_2 \in U$ takav da vrijedi $B_2 = C_2 \cap A$. Očito vrijedi $B_1 \cap B_2 = B_1 \cap (C_2 \cap A) = A \cap (B_1 \cap C_2)$. Međutim $B_1 \cap C_2 \in U$ pa je $B_1 \cap B_2 \in \{A \cap B : B \in U\} \subseteq \mathcal{B}$

Time smo dokazali da je familija $\mathcal{B}$ zatvorena na konačne presjeke pa posebno vrijedi svojstvo iii) iz definicije 1.1.5.

Iz prethodnog dokaza slijedi da je familija $\mathcal{B}$ baza nekog filtra. Iz propozicije 1.1.6 slijedi da se može proširiti do nekog filtra $F_{\mathcal{B}}$ kojem je upravo $\mathcal{B}$ baza. Stoga je $F_{\mathcal{B}} \supseteq \mathcal{B} \supsetneq U$ što je kontradikcija jer je U kao ultrafilter maksimalan filter s obzirom na inkluziju. Dakle, imamo da je $A^c \in U$ ili $A \in U$, a onda i da U sadrži točno jedan od skupova A i A^c za svaki $A \subseteq X$. □

Korolar 1.2.4. *Neka je U ultrafilter i neka su $A_1, ..., A_n$ podskupovi od X. Ako je $\bigcup_{k=1}^n A_k = X$, onda U sadrži barem jedan od tih skupova. Ako su $A_1, ..., A_n$ još u parovima disjunktni, onda sadrži točno jedan od tih skupova.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da U ne sadrži nijedan od tih skupova. Tada po prethodnoj propoziciji U kao ultrafilter mora sadržati njihove komplemente. Dakle, $A_1^c, ..., A_n^c \in U$. Kako ih je konačno mnogo, imamo da je $\bigcap_{k=1}^n A_k^c \in U$. Neka je $x \in X$ proizvoljan. Iz činjenice da je $X = \bigcup_{k=1}^n A_k$ slijedi da postoji $i \in \{1, \ldots, n\}$ takav da vrijedi $x \in A_i$. Tada imamo $x \notin A_i^c$, a onda očito $x \notin \bigcap_{k=1}^n A_k^c$. Budući da je $x \in X$ bio proizvoljan, tada očtio slijedi da je $\bigcap_{k=1}^n A_k^c = \emptyset$. Sada iz ovog posljednjeg i prije uočene činjenice da vrijedi $\bigcap_{k=1}^n A_k^c \in U$ dobivamo $\emptyset \in U$ što je nemoguće.

Dakle, U sadrži barem jedan od skupova $A_1, ..., A_n$.

Neka su $A_1, ..., A_n$ u parovima disjunktni. Pretpostavimo da U sadrži A_i i A_j za neke i, j koji su različiti. Tada $\emptyset = A_i \cap A_j \in U$ što je kontradikcija s time da je U filter. Dakle, u tom slučaju U sadrži točno jedan od skupova $A_1, ..., A_n$. □

Primjer 1.2.5. *Neka je X neki neprazan skup. Tada je familija $U_x = \{Y \subseteq X : x \in Y\}$ ultrafilter za svaki $x \in X$. Takve ultrafiltre nazivamo* ***glavni ultrafiltri****.*

Dokaz. Uočimo da uz $A = \{x\}$ imamo da je $U_x = \{Y \subseteq X : Y \supseteq A\}$, a u primjeru 1.1.2 već smo pokazali da su takvi skupovi filtri. Zbog prethodne propozicije dovoljno je pokazati da za svaki neprazni $A \subseteq X$ familija U_x sadrži taj skup A ili pak sadrži njegov komplement A^c. Vidimo da je $Y \in U_x$ ako i samo ako je $x \in Y$. Za svaki $A \subseteq X$ imamo da je $x \in A$ ekvivalentno tome da $x \notin A^c$ pa je točno jedan od skupova A i A^c u U_x.
Time smo poakzali da je za svaki $x \in$ familija U_x ultrafilter. □

Glavni su ultrafiltri trivijalni i kao takvi uvijek postoje. No, nije odmah jasno postoje li ultrafiltri koji nisu glavni. O tome nam govore sljedeći rezultati.

Propozicija 1.2.6. *Ultrafilter je glavni ako i samo ako sadrži neki konačan skup.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $x \in X$ te je $U_x = \{Y \subseteq X : x \in Y\}$ glavni ultrafilter. Tada očito $\{x\} \in U_x$ pa U_x sadrži konačan skup.

Dokažimo sada obratnu implikaciju. Neka je U ultrafilter koji sadrži neki konačan skup S. Neka je $A \subseteq S$, $A \in U$ minimalan skup u smislu inkluzije među elementima od U. Uočimo da takav skup postoji jer je $S \in U$ konačan.

Tvrdimo da vrijedi $U = \{Y \subseteq X : A \subseteq Y\}$. Pokažimo obje inkluzije. Ultrafilter U sadrži A pa onda i sve njegove nadskupove. Stoga je $U \supseteq \{Y \in X : A \subseteq Y\}$.

Pokažimo i obratnu inkluziju. Pretpostavimo da postoji $B \in U$ takav da $B \not\supseteq A$. Tada je $B \cap A$ pravi podskup od A. No, onda imamo da je zbog zatvorenosti na konačne presjeke $B \cap A \in U$ što je u kontradikciji s time da je A minimalan element. Dakle, svi elementi od U su nadskupovi od A pa je $U \subseteq \{Y \subseteq X : A \subseteq Y\}$.

Time smo dobili da je $U = \{Y \subseteq X : A \subseteq Y\}$.

Budući da je $A \in U$, a U je ultrafilter, skup A je neprazan. Neka je $x \in A$ neki proizvoljan element. Promotrimo glavni ultrafilter $U_x = \{Y \subseteq X : x \in Y\}$ kao u primjeru 1.2.5.

Imamo da ako je $B \in U$, onda je B nadskup od A pa sadrži x. Stoga je $B \in U_x$ pa imamo da je $U \subseteq U_x$. Budući da je U kao ultrafilter maksimalan s obzirom na inkluziju dobivamo da je $U_x = U$. □

Uočimo da smo u dokazu prethodne propozicije postupak proveli za proizvoljan $x \in A$. Međutim, za različite x i y vrijedi da su U_x i U_y različiti što bi bila kontradikcija jer je $U_x = U$ i $U_y = U$. Dakle, skup A zapravo je jednočlan.

Korolar 1.2.7. *Svaki ultrafilter na konačnom skupu X je glavni.*

Dokaz. Svaki ultrafilter U sadrži skup X na kojem je definiran, tj. vrijedi $X \in U$. Ako je skup X konačan tada iz prethodne propozicije imamo da je ultrafilter U glavni. □

Korolar 1.2.8. *Ultrafilter U na beskonačnom skupu X nije glavni ako i samo ako je U nadskup Fréchetovog filtra.*

Dokaz. Neka je U ultrafilter koji sadrži Fréchetov filter.
Prepostavimo suprotno, tj. da je U glavni ultrafilter. Tada po prethodnoj propoziciji postoji konačan skup $A \in U$. Međutim, tada je A^c u Fréchetovom filtru koji je podskup od U jer je $(A^c)^c = A$ konačan. Dakle, imamo $A, A^c \in U$ pa je $\emptyset = A \cap A^c \in U$ što je kontradikcija. Dakle, U nije glavni ultrafilter.

Neka je U ultrafilter koji nije glavni. Pretpostavimo da nije nadskup Fréchetovog filtra. Tada postoji A koji je u Fréchetovom filtru, no nije u U. Budući da je skup A u Fréchetovom filtru, skup A^c je konačan. Kako U nije glavni ultrafilter, po prethodnoj propoziciji znamo da ne sadrži konačne elemente. Stoga $A^c \notin U$. Dakle, imamo $A, A^c \notin U$. Međutim, U je ultrafilter pa je to kontradikcija s propozicijom 1.2.3 u kojoj smo pokazali da ultrafiltri sadrže ili A ili A^c za svaki $A \subseteq X$. Dakle, U je nadskup Fréchetovog filtra. □

Korolar 1.2.9. *Na svakom beskonačnom skupu X postoji ultrafilter koji nije glavni.*

Dokaz. Promotrimo $F = \{A : X \setminus A \text{ je konačan}\}$, tj. Fréchetov filter. Budući da je X beskonačan, F je uistinu filter. Po propoziciji 1.2.2 on se može proširiti do ultrafiltra U. Kako je U nadskup Fréchetovog filtra, po prethodnom korolaru dobivamo da U nije glavni ultrafilter. □

Poglavlje 2

Osnovne definicije i činjenice o topološkim prostorima

2.1 Topološki prostori

U ovom poglavlju dajemo osnovne definicije i neke rezultate iz topologije koji će nam biti potrebni kasnije u radu. Kako topologija kao takva nije u fokusu ovoga rada, ne ćemo uvesti čak niti sve osnovne pojmove iz područja topologije, nego samo one nužne za ostatak rada.

Definicija 2.1.1. *Neka je X skup i τ familija podskupova od X. Kažemo da je τ topologija na X ako vrijedi:*

i) $X \in \tau$, $\emptyset \in \tau$

ii) τ *je zatvoren na proizvoljne unije.*

iii) Ako su $A, B \in \tau$, *onda je i* $A \cap B \in \tau$.

Tada uređeni par (X, τ) zovemo topološki prostor. Elemente topologije zovemo otvorenim skupovima.

Dakle, topologija zapravo predstavlja familiju otvorenih skupova u nekom prostoru. Slično kao i kod filtera, možemo definirati i bazu topologije.

Definicija 2.1.2. *Familija $\mathcal{B}$ baza je neke topologije na X ako sadrži prazan skup, zatvorena je na konačne podskupove i X se može prikazati kao unija elemenata $\mathcal{B}$.*

Familija $\mathcal{B}$ baza je topologije τ ako je $\mathcal{B} \subseteq \tau$ i elementi topologije τ mogu se prikazati kao unija nekih elemenata familije $\mathcal{B}$.

Propozicija 2.1.3. *Neka je $\mathcal{B}$ neka familija zatvorena na konačne presjeke. Tada je skup $\tau = \{\bigcup_{A \in B} A : B \subseteq \mathcal{B}\}$ topologija na $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$, a $\mathcal{B}$ njena baza.*

Dokaz. Pokažimo da vrijede sva svojstva iz definicije topologije.

i) τ očito sadrži prazan skup i skup X zbog načina na koji je X definiran.

ii) Iz definicije familije τ jasno je da je zatvorena na proizvoljne unije.

iii) Presjek dviju proizvoljnih unija elemenata iz $\mathcal{B}$ i dalje je unija elemenata iz $\mathcal{B}$ ili prazan skup pa je τ zatvoren na konačne presjeke.

Dakle, τ je topologija na skupu X. Također, $\mathcal{B}$ je očito njena baza. □

Osim otvorenih skupova, na topološkim prostorima od velike su važnosti i zatvoreni i kompaktni skupovi. Stoga prvo definiramo pojam pokrivača koji je nužan za definiciju kompaktnosti.

Definicija 2.1.4. *Neka je (X, τ) topološki prostor. Kažemo da je familija $\mathcal{P}$ otvoreni pokrivač nekog $A \subseteq X$ ako $\mathcal{P}$ sadrži samo otvorene skupove i ako je $\bigcup_{P \in \mathcal{P}} P \supseteq A$. Podskup od $\mathcal{P}$ koji je i sam pokrivač od A zovemo potpokivačem.*

Definicija 2.1.5. *Neka je (X, τ) topološki prostor.*
Skup $B \subseteq X$ zatvoren je ako je $B^c \in \tau$, tj. ako je njegov komplement otvoren skup.
Skup $A \subseteq X$ kompaktan je ako svaki otvoreni pokrivač od A ima konačan potpokrivač.

Pokažimo neka osnovna svojstva zatvorenih skupova.

Propozicija 2.1.6. *Neka je (X, τ) topološki prostor. Tada vrijedi:*

i) Presjek proizvoljno mnogo zatvorenih skupova je zatvoren.

ii) Unija konačno mnogo zatvorenih skupova je zatvorena.

Dokaz.

i) Neka je $\{A_i, i \in I\}$ proizvoljna familija zatvorenih skupova. Tada su skupovi A_i^c otvoreni pa je zbog zatvorenosti topologije na unije i skup $\bigcup_{i \in I} A_i^c$ otvoren. Tada je i skup $\bigcap_{i \in I} A_i = (\bigcup_{i \in I} A_i^c)^c$ zatvoren.

ii) Neka je $n \in \mathbb{N}$ prozivoljan i $A_1, ..., A_n$ proizvoljni zatvoreni skupovi. Tada su skupovi A_i^c otvoreni pa je zbog zatvorenosti topologije na konačne presjeke i skup $\bigcup_{i=1}^n A_i^c$ otvoren, a onda je i $\bigcap_{i=1}^n A_i = (\bigcup_{i=1}^n A_i^c)^c$ zatvoren.

□

Definirajmo još pojam neprekidnosti na topološkom prostoru.

Definicija 2.1.7. *Neka su* (X, τ_X) *i* (Y, τ_Y) *topološki prostori. Za funkciju* $f : X \to Y$ *kažemo da je neprekidna u paru topologija* (τ_X, τ_Y) *ako je praslika svakog otvorenog skupa otvoren skup, tj. ako za svaki* $B \in \tau_Y$ *vrijedi da je* $f^{-1}(B) \in \tau_X$*. Kada je jasno o kojim je topologijama riječ, jednostavno kažemo da je funkcija* f *neprekidna.*

Pogledajmo koja svojstva imaju neprekidne funkcije u odnosu na kompaktne, tj. zatvorene skupove.

Propozicija 2.1.8. *Neka su* (X, τ_X) *i* (Y, τ_Y) *topološki prostori i funkcija* $f : X \to Y$ *neprekidna. Tada vrijedi:*

a) Ako je $A \subseteq X$ *kompaktan skup, onda je i slika* $f(A)$ *kompaktan skup.*

b) Ako je $B \subseteq Y$ *zatvoren skup, onda je je i praslika* $f^{-1}(B)$ *zatvoren skup.*

Dokaz.

a) Neka je $A \subseteq X$ neki kompaktan skup i $\{U_i : i \in I\}$ otvoreni pokrivač od $f(A)$. Tada imamo da je $f(A) \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ pa je $A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\bigcup_{i \in I} U_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$.

   Skupovi U_i su otvoreni, a funkcija f neprekidna pa su po definiciji neprekidnosti i skupovi $f^{-1}(U_i)$ otvoreni. Stoga je i $\bigcup_{i \in I} f^{-1}(U_i)$ otvoren. Dakle, $\{f^{-1}(U_i), i \in I\}$ je pokrivač od A. Kako je A kompaktan skup, postoji njegov konačan potpokrivač $\{f^{-1}(U_{i_1}), ..., f^{-1}(U_{i_n})\}$ za neki $n \in \mathbb{N}$ i neke indekse $i_1, ...i_n \in I$. Vrijedi da je $A \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(U_{i_j})$ pa je $f(A) \subseteq f(\bigcup_{j=1}^{n} f^{-1}(U_{i_j})) = \bigcup_{j=1}^{n} f(f^{-1}(U_{i_j})) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j}$. Dakle, $\{U_{i_1}, ..., U_{i_n}\}$ je konačan potpokrivač od $\{U_i : i \in I\}$. Dakle, skup $f(A)$ je kompaktan.

b) Neka je $B \subseteq Y$ neki zatvoren skup. Tada je B^c otvoren u Y. Budući da je funkcija f neprekidna, tada po definiciji neprekidnosti slijedi da je $f^{-1}(B^c)$ otvoren skup. Sada imamo da je $(f^{-1}(B))^c = f^{-1}(B^c)$ otvoren skup pa je praslika $f^{-1}(B)$ zatvorena.

□

2.2 Hausdorffovi topološki prostori

Gornja definicija topološkog prostora daje nam osnovnu strukturu koju otvoreni skupovi moraju zadovoljavati. Međutim, u mnogim primjenama prostori zadovoljavaju i jača svojstva. Učestalo i vrlo korisno je svojstvo separabilnosti. To nas dovodi do sljedeće definicije.

Definicija 2.2.1. *Za topološki prostor* (X, τ) *kažemo da je Hausdorffov ako zadovoljava svojstvo separabilnosti, tj. ako za sve različite* $x, y \in X$ *postoje disjunktni otvoreni skupovi* $A_x, A_y \in \tau$ *takvi da je* $x \in A_x$ *i* $y \in A_y$*.*

Na Hausdorffovom topološkom prostoru vrijede mnoga jaka svojstva. Jedno od njih je i sprega između zatvorenih i kompaktnih skupova.

Propozicija 2.2.2. *Neka je* (X, τ) *Hausdorffov topološki prostor i* $A \subseteq X$ *kompaktan skup. Tada je* A *zatvoren.*

Dokaz. Neka je $x \in X \setminus A$ proizvoljan. Riječ je Hausdorffovom topološkom prostoru pa za svaki $y \in A$ postoje U_y i V_y koji separiraju x i y. Dakle, to su otvoreni disjunktni skupovi koji sadrže redom x i y. Familija $\{V_y : y \in A\}$ očito je otvoreni pokrivač od A pa zbog kompaktnosti od A postoji konačan potpokrivač $\{V_y : y \in B \subseteq A\}$ za neki konačan skup B.

Sada definirajmo $U_x = \bigcap_{y \in B} U_y$. Skup U_x očito je otvoren kao presjek konačno mnogo otvorenih skupova. Vrijedi:

$$U_x^c = \left(\bigcap_{y \in B} U_y \right)^c = \bigcup_{y \in B} U_y^c \supseteq \bigcup_{y \in B} V_y \supseteq A$$

pa je $U \subseteq X \setminus A$. Dakle, skup $X \setminus A = \bigcup_{x \in X \setminus A} U_x$ je otvoren skup kao unija otvorenih skupova. Stoga je skup A zatvoren. □

Separabilnost nam također daje da su jednočlani skupovi zatvoreni.

Propozicija 2.2.3. *Neka je* (X, τ) *Hausdorffov topološki prostor i* $x \in X$*. Tada je skup* $\{x\}$ *zatvoren.*

Dokaz. X je Hausdorffov topološki prostor pa svaku točku y različitu od x možemo separirati od x, tj. postoji otvoren skup A_y takav da $x \notin A_y$. Skup $X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \neq x} A_y$ očito je otvoren kao unija otvorenih skupova. Stoga je $\{x\} = (X \setminus \{x\})^c$ zatvoren. □

Poglavlje 3

Prostor ultrafiltera

U uvodu prvog poglavlja napomenuli smo kako je za dokaz Hindmanovog teorema potrebno odabrati dobar ultrafilter uz pomoć kojega će biti lako odabrati traženi skup. U ovom poglavlju definirat ćemo koja to svojstva traženi ultrafilter mora imati i pokazati njegovu egzistenciju.

3.1 Topologija na prostoru ultrafiltera

Da bismo pronašli traženi ultrafilter, potrebno je prethodno vidjeti kako uopće izgleda prostor ultrafiltera nad nekim skupom. Cilj nam je pokazati da je taj topološki prostor kompaktan i Hausdorffov. Uvedimo prvo neke oznake.

Neka je E neprazan skup. Tada s $\mathcal{U}(E)$ označavamo skup svih ultrafiltera na E.

Za $A \subseteq E$, s $\langle A \rangle$ označavamo skup skup ultrafiltera na E koji sadrže A, tj.

$$\langle A \rangle = \{U \in \mathcal{U}(E) : A \in U\}$$

Da bismo pokazali da je riječ o kompaktnom Hausdorffovom topološkom prostoru, trebamo definirati Hausdorffovu topologiju. Dakle, potrebno je definirati otvorene skupove, tj. bazu otvorenih skupova. Upravo skupovi oblika $\langle A \rangle$ čine tu bazu. Pokažimo prvo neka osnovna svojstva koja će nam pomoći u dokazu da je tome stvarno tako. U daljnjem izlaganju pretpostavljamo da je zadan neki neprazan skup E.

Propozicija 3.1.1. *Ako je $A \subseteq B \subseteq E$, tada je $\langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$*

Dokaz. Za svaki ultrafilter $U \in \langle A \rangle$ imamo da je $A \in U$. Kako je U ultrafilter, a $A \subseteq B$, imamo da je $B \in U$.
Sada po definiciji imamo $U \in \langle B \rangle$. Dakle $\langle A \rangle \subseteq \langle B \rangle$. □

Propozicija 3.1.2. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ i sve $A_1, ..., A_n \subseteq E$ vrijedi:*

$$\langle A_1 \rangle \cap ... \cap \langle A_n \rangle = \langle A_1 \cap ... \cap A_n \rangle$$

Dokaz. Dokazujemo obje inkluzije.

Pretpostavimo da je $U \in \bigcap_{i=1}^{n} \langle A_i \rangle$. Tada $A_1 \in U, ..., A_n \in U$. Budući da je U ultafilter, imamo da je zatvoren na konačne presjeke pa je $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in U$. Stoga je $U \in \langle \bigcap_{i=1}^{n} A_i \rangle$. Dakle, imamo $\bigcap_{i=1}^{n} \langle A_i \rangle \subseteq \langle \bigcap_{i=1}^{n} A_i \rangle$.

Dokažimo sada i drugu inkluziju. Neka je $U \in \langle \bigcap_{i=1}^{n} A_i \rangle$. Imamo $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in U$. Budući da je je U filter, zbog $A_k \supseteq \bigcap_{i=1}^{A} {}_i$ imamo da je $A_k \in U$ pa onda i $U \in \langle A_k \rangle$ za sve $k = 1, ..., n$. Dakle, $U \in \bigcap_{i=1}^{n} \langle A_i \rangle$ pa je $\langle \bigcap_{i=1}^{n} A_i \rangle \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \langle A_i \rangle$.

Vrijede obje inkluzije pa vrijedi da je $\langle A_1 \rangle \cap ... \cap \langle A_n \rangle = \langle A_1 \cap ... \cap A_n \rangle$ □

Propozicija 3.1.3. *Za svaki $A \subseteq E$ vrijedi:*

$$\langle E \setminus A \rangle = \mathcal{U}(E) \setminus \langle A \rangle$$

Dokaz. Pokažimo da vrijede obje inkluzije.

Neka je $U \in \langle E \setminus A \rangle$ proizvoljan ultrafilter. Tada imamo da je $E \setminus A \in U$. Iz propozicije 1.2.3 znamo da ultrafilter mora sadržati točno jedan od skupova B i B^c za svaki $B \subseteq E$. Stoga $A = (E \setminus A)^c \notin U$ pa $U \notin \langle A \rangle$. Dakle, $U \in \mathcal{U}(E) \setminus \langle A \rangle$. Tako smo dobili da je $\langle E \setminus A \rangle \subseteq \mathcal{U}(E) \setminus \langle A \rangle$

Dokažimo i drugu inkluziju. Neka je $U \in \mathcal{U}(E) \setminus \langle A \rangle$, tj. neka je U ultrafilter na E koji ne sadrži A. Iz propozicije 1.2.3 znamo da ultrafilter mora sadržati B ili B^c za svaki $B \subseteq E$. Stoga je $E \setminus A = A^c \in U$ pa je $U \in \langle E \setminus A \rangle$. Dakle, $\mathcal{U}(E) \setminus \langle A \rangle \subseteq \langle E \setminus A \rangle$

Time smo dokazali tvrdnju, tj. $\langle E \setminus A \rangle = \mathcal{U}(E) \setminus \langle A \rangle$ □

Sada uz pomoć dobivenih rezultata možemo pokazati da skupovi $\langle A \rangle$ doista čine bazu kompaktne Hausdorffove topologije.

Teorem 3.1.4. *$\mathcal{U}(E)$ je kompaktan Hausdorffov topološki prostor.*

Dokaz. Pokažimo da je $\{\langle A \rangle : \emptyset \neq A \subseteq E\}$ baza Hausdorffove topologije na $\mathcal{U}(E)$.

Iz propozicije 3.1.2 znamo da vrijedi $\bigcap_{i=1}^{n} \langle A_i \rangle = \langle \bigcap_{i=1}^{n} A_i \rangle$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i sve skupove $A_1, ..., A_n \subseteq E$. Dakle, $\mathcal{U}(E)$ je zatvoren na konačne presjeke. Po propoziciji 2.1.3 oni čine bazu neke topologije. Kako je očito $\mathcal{U}(E) = \bigcup_{A \subseteq E} \langle A \rangle$, riječ je o bazi topologije na $\mathcal{U}(E)$.

Iz propozicije 3.1.3 pak znamo da je $\langle E \setminus A \rangle = \mathcal{U}(E) \setminus \langle A \rangle$ pa za $A \subseteq E$ imamo $\langle A \rangle = \langle E \setminus (E \setminus A) \rangle = \mathcal{U}(E) \setminus \langle E \setminus A \rangle$. Dakle, $\langle A \rangle$ je komplement otvorenog skupa pa je zatvoren.

Neka su $U, V \in \mathcal{U}(E)$ različiti. Tada postoji $A \subseteq E$ takav da je $A \in U$ i $A \notin V$. V je ultrafilter pa je $E \setminus A \in V$. Familija $\langle A \rangle$ po definiciji sadrži U. Isto tako $\langle E \setminus A \rangle$ sadrži V. Skupovi $\langle E \setminus A \rangle = \mathcal{U}(E) \setminus \langle A \rangle$ i $\langle A \rangle$ su otvoreni i disjunktni pa smo uspjeli separirati proizvoljne ultrafiltre U i V. Dakle, $\mathcal{U}(E)$ je Hausdorffov topološki prostor.

Pokažimo još i kompaktnost. Prisjetimo se definicije 2.1.5 koja kaže da je skup kompaktan ako svaki njegov otvoreni pokrivač sadrži konačan potpokrivač. Neka je $\{X_i : i \in I\}$ otvoreni porkivač od $\mathcal{U}(E)$. Budući da su X_i otvoreni skupovi, a $\{\langle A \rangle : A \subseteq E\}$ baza topologije, svaki od X_i možemo prikazati kao uniju elemenata baze pa možemo reindeksirati $\bigcup_{i \in I} X_i$ kao $\bigcup_{j \in J} \langle A_j \rangle$ za neki skup J.

Pokažimo da postoji konačan $J_0 \subseteq E$ takav da $\bigcup_{j \in J_0} A_j = E$. Pretpostavimo suprotno, tj. da ne postoji takav skup. Tada se E ne može prikazati kao konačna unija skupova A_j pa familija $\mathcal{B} = \{E \setminus (\bigcup_{j \in J_0} A_j : J_0 \subseteq J$ konačan$\}$ ne sadrži prazan skup.

Za konačne skupove J_1, J_2, skup $J_1 \cup J_2$ također je konačan pa je skup $E \setminus (\bigcup_{j \in J_1 \cup J_2} A_j) \in \mathcal{B}$. Sada zbog činjenice da je $(E \setminus \bigcup_{j \in J_1} A_j) \cap (E \setminus \bigcup_{j \in J_2} A_j) \supseteq E \setminus (\bigcup_{j \in J_1 \cup J_2} A_j)$ imamo da je $\mathcal{B}$ baza filtra po definiciji 1.1.5. Ona se po propoziciji 1.1.6 može proširiti do filtra koji je pak sadržan u nekom ultrafiltru U. Jer je $\mathcal{U}(E) = \bigcup_{j \in J} \langle A_j \rangle$, postoji $j \in J$ takav da je $U \in \langle A_j \rangle$. Onda je $A_j \in U$, no to je kontradikcija s time da je $A_j^c = E \setminus A_j \in U$. Dakle, postoji konačan $J_0 \subseteq J$ takav da je $\bigcup_{j \in J_0} A_j = E$. Skup J_0 je konačan pa možemo reindeksirati $\{A_j : j \in J_0\}$ kao $\{A_1, ..., A_n\}$.

Neka je sada $U \in \mathcal{U}(E)$ proizvoljan ultrafilter. Pretpostavimo da $U \notin \bigcup_{j=1}^n \langle A_j \rangle$. Tada U nije ni u jednom $\langle A_j \rangle$ pa ne sadrži nijedan skup A_j. Međutim, po korolaru 1.2.4 U mora sadržati neki od A_j jer je $\bigcup_{i=1}^n A_i = E$. Dakle, $U \in \bigcup_{j=1}^n \langle A_j \rangle$ pa je $\mathcal{U}(E) = \bigcup_{j=1}^n \langle A_j \rangle$. Skupovi A_j dobiveni su tako što smo otvorene skupove X_i prikazali kao uniju nekih A_j. Stoga za svaki $j \in J_0$ postoji $i \in I$ takav da je $A_j \subseteq X_i$. Time dobivamo da je

$$\mathcal{U}(E) = \bigcup_{j=1}^{n} \langle A_j \rangle \subseteq \bigcup_{\substack{j=1,..,n \\ X_i \supseteq A_j}} X_i \subseteq \mathcal{U}(E)$$

Dakle, svaki otvoreni pokrivač ima konačan potpokrivač pa je $\mathcal{U}(E)$ kompaktan Hausdorffov prostor. □

Poglavlje 4

Hindmanov teorem

U ovom poglavlju napokon ćemo dokazati Hindmanov teorem. Međutim, prvo je potrebno pronaći poseban ultrafilter koji će nam uvelike olakšati sam dokaz. Strukturu dokaza Hindmanovog teorema i rezultata potrebnih za njegov dokaz može se pronaći u knjizi [3, str. 28-31].

4.1 Idempotentnost

U ovom odjeljku uvest ćemo poseban operator na topološkom prostorom ultrafiltera te pokazati da postoji idempotentan ultrafilter s obzirom na taj operator. Upravo takav filter koristit ćemo u dokazu Hindmanovog teorema. Prvo uvedimo nekoliko oznaka.

Za $A \subseteq \mathbb{N}$ i $k \in \mathbb{N}$ definiramo $A - k$ kao:

$$A - k = \{a - k : a \in A\} \cap \mathbb{N}$$

Za $A \subseteq \mathbb{N}$ i $U \in \mathcal{U}(\mathbb{N})$ definiramo A_U kao:

$$A_U = \{k \in \mathbb{N} : A - k \in U\}$$

Za $U, V \in \mathcal{U}(\mathbb{N})$ definiramo $U \oplus V$ kao:

$$U \oplus V = \{A \subseteq \mathbb{N} : A_U \in V\}$$

Dokažimo neka osnovna svojstva koja proizlaze iz gore navedenih definicija.

Propozicija 4.1.1. *Neka su $A, B \subseteq N$ i $U \in \mathcal{U}(\mathbb{N})$. Tada vrijedi:*

a) $\mathbb{N}_U = \mathbb{N}$

b) $(A \cap B)_U = A_U \cap B_U$

c) $(\mathbb{N} \setminus A)_U = \mathbb{N} \setminus A_U$

d) $(A - k)_U = A_U - k$

e) Ako je $A \subseteq B$*, onda* $A_U \subseteq B_U$

Dokaz.

a) Imamo

$$\mathbb{N} - k = \{n - k : n \in \mathbb{N}\} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$$

pa vrijedi

$$\begin{aligned} \mathbb{N}_U &= \{k \in \mathbb{N} : \mathbb{N} - k \in U\} \\ &= \{k \in \mathbb{N} : \mathbb{N} \in U\} \\ &= \mathbb{N} \end{aligned}$$

Zadnja jednakost vrijedi jer je U filter na $\mathbb{N}$ pa sadrži $\mathbb{N}$.

b) Pokažimo prvo pomoćnu tvrdnju:

$$\begin{aligned} (A \cap B) - k &= \{x - k : x \in A \cap B\} \cap \mathbb{N} \\ &= \{x - k : x \in A\} \cap \{x - k : x \in B\} \cap \mathbb{N} \\ &= (\{x - k : x \in A\} \cap \mathbb{N}) \cap (\{x - k : x \in B\} \cap \mathbb{N}) \\ &= A - k \cap B - k \end{aligned}$$

Pokažimo sada obje inkluzije iz jednakosti $(A \cap B)_U = A_U \cap B_U$. Vrijedi da je:

$$\begin{aligned} (A \cap B)_U &= \{k \in \mathbb{N} : (A \cap B) - k \in U\} \\ &= \{k \in \mathbb{N} : (A - k \cap B - k) \in U\} \\ &\subseteq \{k \in \mathbb{N} : A - k \in U\} \\ &= A_U \end{aligned}$$

Analogno dobijemo i $(A \cap B)_U \subseteq B_U$ pa je $(A \cap B)_U \subseteq A_U \cap B_U$

Pokažimo i drugu inkluziju. Neka je $k \in A_U \cap B_U$. Tada imamo da je $A - k \in U$ i $B - k \in U$. Zbog zatvorenosti na konačne presjeke vrijedi $(A \cap B) - k = (A - k) \cap (B - k) \in U$ pa je $k \in (A \cap B)_U$. Dakle, $A_U \cap B_U \subseteq (A \cap B)_U$

Kako vrijede obje inkluzije, vrijedi i jednakost, tj. $A_U \cap B_U = (A \cap B)_U$.

c) Vrijedi da je:

$$\begin{aligned}(\mathbb{N}\setminus A)-k &= \{a-k : a\in\mathbb{N}\setminus A\}\cap\mathbb{N}\\ &= \{a-k : a\notin A\}\cap\mathbb{N} = \mathbb{N}\setminus\{a-k : a\in A\}\\ &= \mathbb{N}\setminus(\{a-k : a\in A\}\cap\mathbb{N})\\ &= \mathbb{N}\setminus(A-k)\end{aligned}$$

Sada vrijedi da je $k \in (\mathbb{N}\setminus A)_U$ ekvivalentno tome da je $(\mathbb{N}\setminus A)-k \in U$ što je pak ekivalentno tome da je $\mathbb{N}\setminus(A-k)\in U$. Kako je U ultrafilter, to je ekvivalentno tome da $A-k = (\mathbb{N}\setminus(A-k))^c \notin U$, a to je slučaj ako i samo ako $k\notin A_U$, tj. $k\in A_U^c = \mathbb{N}\setminus A_U$. Dakle, $(\mathbb{N}\setminus A)_U = \mathbb{N}\setminus A_U$

d) Pokažimo prvo pomoćnu tvrdnju:

$$\begin{aligned}(A-k)-l &= \{a-l : a\in A-k\}\cap\mathbb{N}\\ &= \{a-l : a\in\{b-k : b\in A\}\cap\mathbb{N}\}\cap\mathbb{N}\\ &= \{b-k-l : b\in A : b-k\in\mathbb{N}\}\cap\mathbb{N}\\ &= \{b-(k+l) : b\in A\}\cap\mathbb{N}\\ &= A-(k+l)\end{aligned}$$

Po definiciji znamo da je $l\in(A-k)_U$ ako i samo ako je $(A-k)-l\in U$. Pokazali smo gore da je $(A-k)-l = A-(k+l)$ pa je to ekvivalentno tome da je $k+l\in A_U$ što po definiciji vrijedi ako i samo ako je $l\in A_U-k$. Dakle, $(A-k)_U = A_U-k$

e) Neka je $A\subseteq B$. Tada imamo:

$$A-k = \{a-k : a\in A\}\cap\mathbb{N}\subseteq\{a-k : a\in B\}\cap\mathbb{N} = B-k$$

Za $k\in A_U$ vrijedi da je $A-k\in U$ pa zbog činjenice da je $A-k\subseteq B-k$ i toga što je U filter, vrijedi da je $B-k\in U$, tj. $k\in B_U$. Dakle, $A_U\subseteq B_U$.

□

U sljedećoj propoziciji navodimo neka osnovna svojstva operacije $\oplus$.

Propozicija 4.1.2. *Za operator $\oplus$ vrijedi:*

a) Za sve $U,V\in\mathcal{U}(\mathbb{N})$ vrijedi da je $U\oplus V\in\mathcal{U}(\mathbb{N})$, tj. $\oplus$ je operator na $\mathcal{U}(\mathbb{N})$.

b) Za sve $U,V\in\mathcal{U}(\mathbb{N})$ vrijedi da je $(A_U)_V = A_{U\oplus V}$

c) $\oplus$ je asocijativan operator.

d) Za fiksan $U \in \mathcal{U}(\mathbb{N})$, funkcija $f_U : \mathcal{U}(\mathbb{N}) \to \mathcal{U}(\mathbb{N})$ definirana s $f_U(V) = U \oplus V$ je neprekidna.

Dokaz.

a) Neka su $U, V \in \mathcal{U}(E)$ neki proizvoljni ultrafiltri. Pokažimo da je familija $U \oplus V$ filter, tj. da zadovoljava uvjete iz definicije 1.1.1.

   Pokažimo da je $\mathbb{N} \in U \oplus V$. Iz a) dijela propozicije 4.1.1 znamo da je $\mathbb{N}_U = \mathbb{N}$. V je filter pa je $\mathbb{N}_U \in V$. Stoga je $\mathbb{N} \in U \oplus V$.

   Pokažimo zatvorenost familije $U \oplus V$ na nadskupove. Neka je $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$ i $A \in U \oplus V$. Iz e) dijela propozicije 4.1.1 znamo da je $A_U \subseteq B_U$. Jer je $A \in U \oplus V$, vrijedi $A_U \in V$ pa je $B_U \in V$ jer je V zatvoren na nadskupove. Sada po definiciji imamo da je $B \in U \oplus V$.

   Pokažimo još i zatvorenost na konačne presjeke. Iz b) dijela propozicije 4.1.1 znamo da je $A_U \cap B_U = (A \cap B)_U$. Neka su $A, B \in U \oplus V$ proizvoljni. Imamo da je $A_U \in V$ i $B_U \in V$ pa zbog zatvorenosti na konačne presjeke dobivamo $(A \cap B)_U = A_U \cap B_U \in V$, tj. $A \cap B \in U \oplus V$

   Dakle, familija $U \oplus V$ je filter. Pokažimo da je štoviše ultrafilter. Zbog propozicije 1.2.3 dovoljno je pokazati da za bilo koji skup A sadrži ili A ili A^c. Imamo da je $A \in U \oplus V$ ako i samo ako je $A_U \in V$. Kako je V ultrafilter to je ekvivalentno tome da $\mathbb{N} \setminus A_U \notin V$. Po c) dijelu propozicije 4.1.1 vrijedi da je $\mathbb{N} \setminus A_U = (\mathbb{N} \setminus A)_U$ pa je to istovjetno tome da $(\mathbb{N} \setminus A)_U \notin V$, tj. $A^c = \mathbb{N} \setminus A \notin U \oplus V$. Dakle, $U \oplus V$ je ultrafilter.

b) Imamo da je $l \in (A_U)_V$ ako i samo ako je $A_U - l \in V$. Iz d) dijela propozicije 4.1.1 znamo da je $(A - k)_U = A_U - k$ pa je to ekivalentno tome da je $A - l \in U \oplus V$, tj. $l \in A_{U \oplus V}$.

c) Neka su $U, V, W \in \mathcal{U}(E)$ i $A \in U \oplus (V \oplus W)$ proizvoljni. Po definiciji operatora $\oplus$ to vrijedi ako i samo je $A_U \in V \oplus W$, tj. $(A_U)_V \in W$. U b) dijelu pokazali smo da je $(A_U)_V = A_{U \oplus V}$. Stoga je $A_U \in V \oplus W$ ako i samo ako je $A_{U \oplus V} \in W$, tj. $A \in (U \oplus V) \oplus W$.

   Dakle $U \oplus (V \oplus W) = (U \oplus V) \oplus W$, tj. operator $\oplus$ je asocijativan.

d) Po definiciji 2.1.7, funkcija f neprekidna je ako je praslika svakog otvorenog skupa otvoren skup. Na prostoru $\mathcal{U}(\mathbb{N})$, bazni otvoreni skupovi oblika su $\langle A \rangle$ za $A \in \mathcal{U}(\mathbb{N})$ pa je dovoljno pokazati da su njihove praslike također otvoreni skupovi. Imamo: $f_U^{-1}(\langle A \rangle) = \{V \in \mathcal{U}(\mathbb{N}) : A \in U \oplus V\} = \{V \in \mathcal{U}(\mathbb{N}) : A_U \in V\} = \langle A_U \rangle$

□

Uvedimo još neke oznake.
Za skupove ultrafiltera $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{U}(\mathbb{N})$ s $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ označavamo skup:

$$\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \{A \oplus B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$$

Također, ako je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}(\mathbb{N})$, a $B \in \mathcal{U}(\mathbb{N})$ s $\mathcal{A} \oplus B$ i $B \oplus \mathcal{A}$ označavamo skupove:

$$\mathcal{A} \oplus B = \{A \oplus B : A \in \mathcal{A}\}$$
$$B \oplus \mathcal{A} = \{B \oplus A : A \in \mathcal{A}\}$$

Definicija 4.1.3. *Za ultrafilter $U \in \mathcal{U}(\mathbb{N})$ kažemo da je idempotentan na $\mathbb{N}$ ako je $U \oplus U = U$*

Propozicija 4.1.4. *Postoji ultrafilter idempotentan na $\mathbb{N}$.*

Dokaz. Neka je $\mathbb{A} = \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U}(\mathbb{N}) : \mathcal{A}$ neprazan i zatvoren, $\mathcal{A} \oplus \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}\}$.
Uočimo da je $\mathcal{U}(\mathbb{N}) \oplus \mathcal{U}(\mathbb{N}) \subseteq \mathcal{U}(\mathbb{N})$ pa je $\mathcal{U}(\mathbb{N}) \in \mathbb{A}$. Dakle, $\mathbb{A}$ je neprazan.

Neka je $(\mathcal{A}_i)_{i \in I}$ lanac u $\mathbb{A}$ s obzirom na relaciju $\supseteq$. Pokažimo da je $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i \in \mathbb{A}$.

Pretpostavimo da je $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i = \emptyset$. Tada je $\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i^c = (\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i)^c = \mathcal{U}(\mathbb{N})$. Za sve $i \in I$ vrijedi da je $\mathcal{A}_i$ zatvoren pa je $\mathcal{A}_i^c$ otvoren. Stoga je $\{\mathcal{A}_i^c : i \in I\}$ otvoren pokrivač od $\mathcal{U}(\mathbb{N})$. U teoremu 3.1.4 pokazali smo da je to kompaktan Hausdoffov topološki prostor. Stoga taj pokrivač ima konačan potpotkivač, tj. postoji $n \in \mathbb{N}$ i skup indeksa $I_0 = \{i_1, ..., i_n\}$ takvi da je $\{\mathcal{A}_{i_1}^c, ..., \mathcal{A}_{i_n}^c\}$ pokrivač od $\mathcal{U}(\mathbb{N})$. Kako skupovi $\mathcal{A}_i$ tvore lanac s obzirom na $\supseteq$, onda skupovi $\mathcal{A}_i^c$ tvore lanac s obzirom na $\subseteq$ pa bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da su indeksi posloženi tako da vrijedi $\mathcal{A}_{i_1}^c \subseteq ... \subseteq \mathcal{A}_{i_n}^c$.

Tada je $\bigcup_{i \in I_0}(\mathcal{A}_i^c) = \mathcal{A}_{i_n}^c$. Kako je riječ o pokrivaču dobivamo da je $\mathcal{U}(\mathbb{N}) = \mathcal{A}_{i_n}^c$ pa je $\mathcal{A}_{i_n} = \emptyset$ što je kontradikcija s time da je $\mathcal{A}_{i_n} \in \mathbb{A}$ jer su elementi familije $\mathbb{A}$ neprazni. Dakle, $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i$ je neprazan. Po propoziciji 2.1.6 znamo da je i zatvoren kao presjek proizvoljno mnogo zatvorenih skupova. Dakle, $\bigcap_{i \in I} \mathcal{A}_i \in \mathbb{A}$.

Pokazali smo da svaki lanac u $\mathbb{A}$ ima gornju među u $\mathbb{A}$ pa po Zornovoj lemi 0.0.3 vrijedi da postoji $\mathcal{B} \in \mathbb{A}$ koji je maksimalan u odnosu na $\supseteq$, tj. minimalan s obzirom na $\subseteq$.

Neka je $U \in \mathcal{B}$ proizvoljan.

Promotrimo $\mathcal{B}' = U \oplus \mathcal{B}$. Iz propozicije 4.1.2 znamo da je funkcija f_U neprekidna, a $\mathcal{B}$ kompaktan pa po propoziciji 2.1.8 dobivamo da je $\mathcal{B}' = f_U(\mathcal{B})$ kompaktan kao slika kompaktnog skupa po neprekidnoj funkciji. Prostor $\mathcal{U}(\mathbb{N})$ je Hausdorffov pa po propoziciji 2.2.2 dobivamo da je $\mathcal{B}'$ zatvoren. Za fiksne $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$ definirajmo $W = V_1 \oplus U \oplus V_2$. Zbog $\mathcal{B} \oplus \mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}$, imamo da je $W \in \mathcal{B}$. Iz b) dijela propozicije 4.1.2 znamo da je operator $\oplus$ asocijativan pa je $(U \oplus V_1) \oplus (U \oplus V_2) = U \oplus (V_1 \oplus U \oplus V_2) = U \oplus W \in \mathcal{B}'$. Dakle, $\mathcal{B}' \oplus \mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}'$. Stoga je $\mathcal{B}' \in \mathbb{A}$. Kako je $\mathcal{B}' = U \oplus \mathcal{B}$, a $\mathcal{B} \oplus \mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}$ imamo da je $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$.

Zbog minimalnosti od $\mathcal{B}$ unutar $\mathbb{A}$ dobivamo da je $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$. Sada iz $U \in \mathcal{B}$ slijedi da je $U \in \mathcal{B}'$ pa iz definicije $\mathcal{B}'$ slijedi da postoji $V' \in \mathcal{B}$ takav da je $U \oplus V' = U$.

Definirajmo $\mathcal{V}' = \{V \in \mathcal{B} : U \oplus V = U\}$. Prostor $\mathcal{U}(\mathbb{N})$ je Hausdorffov pa je po propoziciji 2.2.3 skup $\{U\}$ zatvoren. Zbog neprekidnosti funkcije f_U po propoziciji 2.1.8 imamo da je i skup $f_U^{-1}(\{U\})$ zatvoren. Stoga je $\mathcal{V}' = f_U^{-1}(\{U\}) \cap \mathcal{B}$ po propoziciji 2.1.6 zatvoren kao presjek dva zatvorena skupa. Gore smo pokazali da je $V' \in \mathcal{V}'$, tj. $\mathcal{V}'$ je neprazan. Za $V_1, V_2 \in \mathcal{V}'$ imamo $U \oplus (V_1 \oplus V_2) = (U \oplus V_1) \oplus V_2) = U \oplus V_2 = U$ pa je $V_1 \oplus V_2 \in \mathcal{V}'$, tj. $\mathcal{V}' \oplus \mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}'$. Dakle, $\mathcal{V}' \in \mathbb{A}$. Kako je $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{B}$ zbog minimalnosti od $\mathcal{B}$ unutar $\mathbb{A}$, dobivamo da je $\mathcal{V}' = \mathcal{B}$. Stoga je i $U \in \mathcal{V}'$ pa je $U \oplus U = U$, tj. postoji idempotentan ultrafilter na $\mathbb{N}$. □

Lema 4.1.5. *Za sve $n, m \in \mathbb{N}$ vrijedi da je*

$$U_n \oplus U_m = U_{n+m}$$

gdje je $U_k = \{A \subseteq \mathbb{N} : k \in A\}$ glavni ultrafilter kao u primjeru 1.2.5

Dokaz. Neka su $n, m \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi da je $A \in U_n \oplus U_m$ ako i samo ako je $A_{U_n} \in U_m$.

Iz definicije glavnog ultrafiltra dobivamo da je $A - k \in U_n$ ako i samo ako je $n \in A - k$, tj. $n + k \in A$. Iz činjenice da je $A_{U_n} = \{k \in \mathbb{N} : A - k \in U_n\} \in U_m$ dobivamo da je $\{k : n + k \in A\} \in U_m$, tj. $m \in \{k : n + k \in A\}$. Međutim, to je ekvivalentno tome da je $n + m \in A$, tj. $A \in U_{n+m}$. Dakle, $U_n \oplus U_m = U_{n+m}$. □

Propozicija 4.1.6. *Idempotentan ultrafilter na $\mathbb{N}$ sadrži samo beskonačne elemente.*

Dokaz. Na $\mathbb{N}$ svi glavni ultrafiltri oblika su $U_n = \{A \subseteq \mathbb{N} : n \in A\} = \{A \supseteq \{n\}\}$. Po prošloj lemi znamo da je $U_n \oplus U_n = U_{2n} \neq U_n$ pa glavni ultrafilter ne može biti idempotentan.

Stoga idempotentni ultrafiltri nisu glavni pa po propoziciji 1.2.6 sadrže samo beskonačne elemente. □

4.2 Dokaz Hindmanovog teorema

U ovom odjeljku napokon dokazujemo Hindmanov teorem. Glavni alat koji ćemo koristiti pri dokazu upravo je egzistencija ultrafiltra na $\mathcal{U}(\mathbb{N})$ koji je idempotentan u odnosu na operator $\oplus$.

Definicija 4.2.1. *Za $A \subseteq \mathbb{N}$ definiramo skup parcijalnih suma kao:*

$$\sum_A = \left\{ \sum_{a \in A_0} a : A_0 \subseteq A, A_0 \text{ } konačan \right\}$$

Kako su jednočlani skupovi naravno konačni, to i $\sum_A$ uvijek sadrži sve $a_0 \in A$ jer je $\sum_{a\in\{a_0\}} a = a_0$. Stoga za sve $A \subseteq \mathbb{N}$ vrijedi da je $A \subseteq \sum_A$. Izračunajmo skup konačnih suma za nekoliko skupova kako bismo stekli bolju intuiciju.

Primjer 4.2.2. *Za neki $k \in \mathbb{N}$ definiramo $k\mathbb{N}$ kao $A = k\mathbb{N} = \{kn : n \in \mathbb{N}\}$, tj. kao skup svih višekratnika broja k. Izračunajmo sada $\sum_A$ za $A = k\mathbb{N}$. Zbroj konačno mnogo višekratnika broja k i sam je višekratnik od k pa je $\sum_{k\mathbb{N}} \subseteq k\mathbb{N}$. Obratna inkluzija vrijedi općenito pa i za skup parnih brojeva. Stoga je $\sum_{k\mathbb{N}} = k\mathbb{N}$.*

Za skup neparnih brojeva, situacija je ipak nešto drukčija.

Primjer 4.2.3. *Neka je $A = 2\mathbb{N} - 1 = \{2n - 1 : n \in \mathbb{N}\}$, tj. skup neparnih brojeva. Skup $\{1, 2n - 1\} \subseteq 2\mathbb{N} - 1$ je naravno konačan za sve $n \in \mathbb{N}$. Uočimo da za $n = 1$ vrijedi $2n - 1 = 1$ pa je takav skup zapravo jednočlan. Stoga promatramo samo slučajeve kada je $n \neq 1$. Vrijedi da je $\sum_{a\in\{1,2n-1\}} a = 1 + 2n - 1 = 2n$. Dakle, svi parni brojevi osim 2 (jer gledamo slučajeve $n \neq 1$) su elementi $\sum_{2\mathbb{N}-1}$. Broj 2 je očito nemoguće postići jer je zbroj već dva različita neparna broja veći od dva pa je onda i zbroj konačno mnogo različitih neparnih brojeva veći od dva. Kako već od ranije znamo da je $\sum_{2\mathbb{N}-1} \supseteq 2\mathbb{N} - 1$, dobivamo da je $\sum_{2\mathbb{N}-1} = \mathbb{N} \setminus \{2\}$.*

Teorem 4.2.4 (Hindmanov teorem)**.**
Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $\chi : \mathbb{N} \to \{1, ..., n\}$ proizvoljna funkcija. Tada postoji beskonačan skup $B \subseteq \mathbb{N}$ takav da je funkcija χ konstantna na $\sum_B$.

Dokaz. Neka je $U = U \oplus U \in \mathcal{U}(\mathbb{N})$ idempotentan ultrafilter kao u propoziciji 4.1.4.

Skupovi $\chi^{-1}(\{1\}), ..., \chi^{-1}(\{n\})$ očito su disjunktni i vrijedi $\bigcup_{i=1}^{n} \chi^{-1}(\{i\}) = \mathbb{N}$ pa po korolaru 1.2.4 postoji jedinstveni $i_0 \in \{1, ..., n\}$ takav da $\chi^{-1}(\{i_0\}) \in U$. Neka je $A = \chi^{-1}(\{i_0\})$.

Budući da je $U \oplus U = U$ za svaki $C \in U$ imamo da je $C_U \in U$. Stoga je zbog zatvorenosti filtra na konačne presjeke $C_U \cap C \in U$. Iz propozicije 4.1.6 znamo da U zbog idempotentnosti na $\mathbb{N}$ nema konačne elemente pa su C i $C_U \cap C$ beskonačni. Imamo da $k \in C_U \cap C$ povlači da je $k \in C_U$, tj. $C - k \in U$. Zbog zatvorenosti na konačne presjeke dobivamo da je $(C - k) \cap C \in U$.

Definirajmo $A^1 = A$ i neka je $k_1 \in A^1 \cap A^1_U$ proizvoljan.

Dalje rekurzivno definiramo:

$$A^{n+1} = (A^n - k_n) \cap A^n$$
$$k_{n+1} \in A^{n+1} \cap A^{n+1}_U \text{ proizvoljan, ali takav da je } k_{n+1} > k_n$$

Pokažimo matematičkom indukcijom da je definicija dobra, da je $A^n \in U$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ i da je $k_n \in C_U \cap C$ za neki $C \in U$.

Pokažimo prvo bazu indukcije. Tvrdnja očito vrijedi za $n = 1$ jer je $A_1 = A \in U$. Zatim, $k_1 \in A^1 \cap A^1_U$ također očito zadovoljava kriterij jer je $A_1 \in U$.

Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Tada za $n + 1$ po prethodnoj argumentaciji uz $C = A^n$ vrijedi da je $A^{n+1} \in U$. Onda je i $k_{n+1} \in A^{n+1} \cap A^{n+1}_U$ što je odgovarajućeg oblika uz $C = A^{n+1}_U$. Također po prethodnoj lemi znamo da ultrafilter U sadrži samo beskonačne skupove pa je A^{n+1} beskonačan, a onda i neograničen odozgo. Stoga postoji element veći od k_n, tj. k_{n+1} je dobro definiran.

Po principu matematičke indukcije definicija je dobra i vrijede tražena svojstva za sve $n \in \mathbb{N}$.

Definirajmo $B = \{k_n : n \in \mathbb{N}\}$. Za sve $n \in N$ imamo da je $k_{n+1} > k_n$, tj. niz $(k_n)_n$ je strogorastuć pa su svi elementi međusobno različiti. Stoga je skup B beskonačan. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ imamo da je $A_{n+1} = (A^n - k_n) \cap A^n \subseteq A_n$ pa je $A_n \subseteq A^1 = A$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Onda je i $k_{n+1} \in A^{n+1} \cap A^{n+1}_U \subset A^{n*1} \subseteq A$ pa je i $B \subseteq A$.

Neka je $I \subseteq \mathbb{N}$ neprazan i konačan. Pokažimo matematičkom indukcijom po $card(I)$ da vrijedi da je $\sum_{i \in I} k_i \in A^{min(I)}$

Pokažimo prvo bazu indukcije. Kada je $card(I) = 1$, imamo da je $I = \{n\}$ za neki $n \in \mathbb{N}$. Tada je $\sum_{i \in I} k_i = k_n \in A^n = A^{min(I)}$

Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Neka su $i_1 < ... < i_{n+1}$ elementi od I. Imamo da je $i_1 < i_2$ pa je $i_1 + 1 \leq i_2$. Po pretpostavci indukcije znamo da je $k_{i_2} + ... + k_{i_{n+1}} \in A^{min\{i_2,...,i_{n+1}\}} = A^{i_2} \subseteq A^{i_1+1} = A^{i_1} \cap (A^{i_1} - k_{i_1})$.

Dakle, $k_{i_2} + ... + k_{i_{n+1}} \in (A^{i_1} - k_{i_1})$ pa je $k_{i_1} + k_{i_2} + ... + k_{i_{n+1}} \in A^{i_1} = A^{min(I)}$ Po principu matematičke indukcije slijedi da tvrdnja vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$.

Sada imamo da je $\sum_{i \in I} k_i \in A^{min(I)} \subseteq A$.

Kako su svi konačni skupovi $B_0 \subseteq B$ oblika $\{k_i : i \in I\}$ za neki konačan $I \subseteq \mathbb{N}$ dobivamo da je $\sum_B \subseteq A$.

Kako je B beskonačan skup, a funkcija χ konstantna na A, dokazali smo teorem.

□

Iako je ovaj rezultat sam po sebi vrlo jak i pomalo neočekivan, postavlja se pitanje može li se dodatno generalizirati i vrijede li neki analogni rezultati. Odgovor je potvrdan i ovdje ćemo navesti nekoliko takvih primjera. Dokaze teorema koji slijede može se naći u članku [4].

Kako bismo mogli izreći prvu generalizaciju Hindmanovog teorema moramo prvo definirati skup parcijalnih produkata analogno kao što smo definirali skup parcijalnih suma.

Definicija 4.2.5. *Za $A \subseteq \mathbb{N}$ definiramo skup parcijalnih produkata ovako:*

$$\prod_A = \left\{ \prod_{a \in A_0} a : A_0 \subseteq A, A_0 \text{ } konačan \right\}$$

Ispostavlja se da Hindmanov teorem vrijedi i za množenje, tj. da za svako konačno bojanje postoji beskonačan skup čiji je skup parcijalnih produkata monokromatski. Iskažimo to i formalno:

Teorem 4.2.6 (Hindmanov teorem za množenje)**.**
Neka je $n \in \mathbb{N}$ *i* $\chi : \mathbb{N} \to \{1, ..., n\}$ *proizvoljna funkcija. Tada postoji beskonačan skup* $B \subseteq \mathbb{N}$ *takav da je funkcija* χ *konstantna na* $\prod_B$.

Također vrijedi i analogon Hindmanovog teorema na partitivnom skupu od $\mathbb{N}$. Kako bismo mogli iskazati teorem o tome, moramo prvo definirati skup parcijalnih unija sasvim analogno kao što smo definirali skup parcijalnih suma.

Definicija 4.2.7. *Za* $A \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *definiramo skup parcijalnih unija kao:*

$$\bigcup_A = \left\{ \bigcup_{B \in A_0} B : A_0 \subseteq A, A_0 \textit{ konačan} \right\}$$

Teorem 4.2.8 (Hindmanov teorem za $\mathcal{P}(\mathbb{N})$)**.**
Neka je $n \in \mathbb{N}$ *i* $\chi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{1, ..., n\}$ *proizvoljna funkcija. Tada postoji beskonačan skup* $B \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ *takav da je funkcija* χ *konstantna na* $\bigcup_B$.

Navedimo još i jednu direktnu generalizaciju. Ispostavlja se da je moguće smanjiti skup $\mathbb{N}$ na proizvoljan skup koji zadovoljava svojstvo da je skup parcijalnih suma nekog beskonačnog podskupa od $\mathbb{N}$.

Teorem 4.2.9 (Hindmanov teorem za skup parcijalnih suma)**.**
Neka je $A \subseteq \mathbb{N}$ *beskonačan skup i* $\sum_A$ *njegov skup parcijalnih suma. Tada za proizvoljan* $n \in \mathbb{N}$ *i proizvoljnu funkciju* $\chi : \sum_A \to \{1, ..., n\}$ *postoji beskonačan skup* $B \subseteq \sum_A$ *takav da je funkcija* χ *konstantna na* $\sum_B$.

Uočimo da je ovo direktna generalizacija Hindmanovog teorema. Naime, za $A = \mathbb{N}$ imamo da je $\sum_A = \mathbb{N}$ pa tvrdnja postaje istovjetna tvrdnji iz Hindmanovog teorema.

Bibliografija

[1] N. Hindman, *Finite sums from sequences within cells of a partition* $\mathbb{N}$, J. Combinatorical Theory **17.1** (1974).

[2] J. Lewin, *A simple proof of Zorn's lemma.*, The American Mathematical Monthly **98(4)** (1991), 353–354.

[3] F. Loeser M. Hils, *A First Journey through Logic*, AMS, Providence, 2019.

[4] Guanyu Zhou, *Ultrafilter and Hindman's theorem*, 2017, str. 14–17.

Sažetak

Centralni dio ovoga rada dokaz je Hindmanovog teorema upotrebom strukture ultrafiltera. Za potrebe toga definiraju se pojmovi filtra i ultrafiltra te se navode primjeri i dokazuju neka njihova svojstva potrebna za dokaz Hindmanovog teorema. Također se uvode neki pojmovi iz topologije i dokazuju osnovni teoremi. Na samom kraju rada bez dokaza je navedeno nekoliko poopćenja i analogona Hindmanovog teorema.

Summary

Focus of this thesis is on prooving the Hindman's Theorem by utilising the sturcture of ultrafilters. Therefore, we define the concepts of filters and ultrafilters with examples and prove some of their properties required in order to prove Hindman's Theorem. We also introduce some of the concepts from topology and prove some basic results. At the very end, we have listed some of the generalisations and analogous results of Hindman's Theorem.

Životopis

Rođen sam 10.10.1998. u Zagrebu. Prva četiri razreda osnovne škole završio sam u OŠ Gračani u Zagrebu, a zadnja četiri u OŠ Miroslava Krleže po klasičnom programu. Maturirao sam 2017. godine u II. gimnaziji u Zagrebu po programu opće gimnazije te sam iste godine upisao preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Preddiplomski studij završio sam 2020. godine te na istom fakultetu upisao diplomski studij Matematička statistika. Za vrijeme studija bio sam zaposlen u domaćim tvrtkama Ericsson Nikola Tesla d.d., Hashcode d.o.o. te Smartcode d.o.o. gdje trenutno radim. U slobodno vrijeme sviram klavir, čitam romane i bavim se enigmatikom.