Matematički paradoksi

Kušec, Emina

Sveučilište u Zagrebu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Matematički odsjek

Emina Kušec

Matematički paradoksi

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Vedran Krčadinac

Zagreb, srpanj 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik
2. ______________________________ , član
3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Sadržaj

Ovaj rad posvećujem svojoj obitelji i prijateljima koji su mi tijekom cijelog studiranja davali beskrajnu podršku u svakom smislu te riječi. Hvala svim mojim cimericama što su mi uljepšale dane i noći studentskog života te kolegicama s PMF-a s kojima sam najviše dijelila znanje, stres, sreću i tugu u napetim kolokvijskim tjednima. Ne znam kako bih izdržala bez vas. Hvala dragom mentoru Vedranu Krčadincu na konstruktivnim savjetima, idejama, strpljivosti, trudu i uloženom vremenu pri pisanju ovog rada. Hvala mom Antoniju na neizmjernoj ljubavi i podršci u svim sretnim i onim manje sretnim trenucima mog studiranja. Hvala svima što ste vjerovali u mene.

1 Uvod

U ovom radu opisat ćemo nekoliko matematičkih paradoksa i njihovu primjenu u nastavi matematike u osnovnoškolskom i srednjoškolskom obrazovanju. U svakom poglavlju proučit ćemo po jedan paradoks. Najprije ćemo objasniti paradoks o krumpiru korištenjem formule za relativni maseni udio, ali i jednostavnom primjenom postotnog računa. Zenonov paradoks o Ahileju i kornjači pomoći će nam u shvaćanju pojma geometrijskog reda i njegove konvergencije. Podsjetit ćemo se pojma geometrijskog niza te pokazati kako s učenicima pomoću vizualne reprezentacije izvesti formulu za sumu beskonačno mnogo članova zadanog geometrijskog niza. Prisjetit ćemo se temeljnih pojmova iz vjerojatnosti pa proučiti koliko ljudi treba da bi vjerojatnost dvostrukog rođendana bila veća od 50%, a za koliko osoba će ta vjerojatnost biti gotovo 100%. Diskutirat ćemo o najboljem odabiru pri sudjelovanju u igri na sreću koja se odvijala u televizijskom kvizu *Let's make a deal* 70-ih godina prošlog stoljeća gdje će nam biti potrebna uvjetna vjerojatnost, formula potpune vjerojatnosti i Bayesova formula, a pomoći će nam i crtanje vjerojatnosnog stabla. Saznat ćemo kako odabrati kuvertu ako nam netko ponudi dvije kuverte takve da jedna ima dvostruko više novca u odnosu na drugu. Problem 100 zatvorenika dat će nam priliku za primjenu (cikličkih) permutacija te korištenje digitalnih matematičkih alata. Paradoks Gabrielovog roga, poznat još kao slikarov paradok, podsjetit će nas kakve veličine ima smisla uspoređivati, a kakve ne.

Svaki od navedenih paradoksa može pronaći svoje mjesto na redovnoj ili dodatnoj nastavi matematike, ovisno o uzrastu i potrebama učenika. Osmislit ćemo zadatke i aktivnosti analogne paradoksima koji će nam pomoći pri motiviranju učenika za usvajanje odgovarajućih nastavnih sadržaja i buđenje znatiželje o složenijim matematičkim konceptima, ali i ponavljanje naučenog.

2 Paradoks o krumpiru

Paradoks o krumpiru je zadatak o masi krumpira prije i poslije sušenja, a pitanje glasi ovako:

> Imamo 100 kg krumpira koji su svježe izvađeni iz tla, a takav krumpir sastoji se od 99% vode i 1% suhe tvari (pretpostavka za potrebe zadatka). Krumpir je ostavljen preko noći te se zbog sušenja sada sastoji od 98% vode. Kolika je nova masa krumpira?

Prije nego izračunamo odgovor na pitanje, probajmo pogoditi što bi mogao biti. Ne uzimajući u obzir da je riječ o paradoksu (pa samim tim očekujemo iznenađujući odgovor), mogli bismo pretpostaviti da je masa zanemarivo manja, recimo za 1% izgubljene vode. No, nova masa ipak je znatno manja od početne.

Neka je $v_0 = 0.99$ početni relativni udio vode, a $s_0 = 0.01$ početni relativni udio suhe tvari. Relativni udjeli vode i suhe tvari u svakom trenutku u zbroju daju 1, tj. $v + s = 1$. Označimo s M_0 početnu masu krumpira, tada je $M_0 = 100$ kg, a s m_0 početnu masu suhe tvari; $m_0 = 0.01 \cdot 100 = 1$ kg. Važno je naglasiti da se masa suhe tvari ne mijenja, pa će nakon sušenja također biti $m = 1$ kg. Relativni udio sastojka definiran je kao omjer mase sastojka i mase smjese pa imamo:

$$s_0 = \frac{m_0}{M_0} \Longleftrightarrow m_0 = s_0 \cdot M_0,$$
$$s = \frac{m}{M} \Longleftrightarrow m = s \cdot M.$$

Budući da je $m_0 = m$, izjednačavanjem i korištenjem uvjeta $v + s = 1$ dobivamo:

$$s_0 \cdot M_0 = s \cdot M \Longleftrightarrow (1 - v_0)M_0 = (1 - v)M$$
$$M = \frac{1 - v_0}{1 - v} M_0.$$

Uvrštavanjem $v_0 = 0.99, v = 0.98, M_0 = 100$ imamo:

$$M = \frac{1 - 0.99}{1 - 0.98} \cdot 100 = \frac{0.01}{0.02} \cdot 100 = 50 \text{ kg}.$$

Izračunali smo da je nova masa krumpira upola manja, odnosno iznosi 50 kg. Smanjenjem relativnog udjela vode za samo 1% (s 99% na 98%) izgubili smo čak 50% početne mase! Ovo je jedan od mnogih slučajeva u kojem nas postotni račun iznenađuje. Odgovor na ovo pitanje mogli smo dati i na jednostavniji način koji ćemo objasniti u aktivnosti prilagođenoj za nastavni sat.

2.1 Na satu matematike: Paradoks krumpira ili paradoks postotnog računa?

Učenici se s postotnim računom prvi put susreću u sedmom razredu osnovne škole nakon što nauče rješavati linearne jednadžbe, zatim ponovno u prvom ili drugom razredu srednje škole, ovisno o godišnjem broju sati nastave matematike. Ovaj paradoks učenicima je prigodno pokazati u svim navedenim razdobljima na nastavnom satu na kojem počinju primjenjivati postotni račun u problemskim zadacima.

Postotni iznos y računamo tako da postotak $p\%$ pomnožimo s osnovnom vrijednošću x.

$$y = p\% \cdot x$$

Uobičajeni motivacijski primjer za primjenu postotaka je varijacija sljedećeg zadatka:

> Nekom proizvodu se cijena smanjila za 20%, a zatim se nova cijena povećala za 20%. Kolika je bila konačna cijena proizvoda ako je početna cijena bila 150 kn?

Cijena nakon pojeftinjenja bila je:

$$(100\% - 20\%) \cdot 150 = 80\% \cdot 150 = 0.8 \cdot 150 = 120 \text{ kn},$$

a nakon poskupljenja:

$$(100\% + 20\%) \cdot 120 = 120\% \cdot 120 = 1.2 \cdot 120 = 144 \text{ kn}.$$

Ono što učenike iznenađuje je to što početna i konačna cijena nisu jednake iako se radi o istom postotku, a to je zato što smo računali postotak od različitih iznosa. Na sličan način ih iznenađuje paradoks krumpira koji se lako rješava postotnim računom. Zadatak za učenike možemo postaviti na sljedeći način:

> Krumpir svježe izvađen iz tla sastoji se od 99% vode i 1% suhe tvari. Obitelj Krumpirović izvadila je 100 kg krumpira. Krumpir se preko noći osušio pa se sada sastoji od 98% vode. Kolika je nova masa krumpira? Napomena: masa suhe tvari se ne mijenja, a udio vode i mase suhe tvari zajedno čine 100% ukupne mase.

Učenici pokušavaju pogoditi novu masu krumpira pa te pokušaje zapisujemo na ploču kako bismo ih kasnije usporedili s točnim rješenjem. Zatim je potrebno proći kroz nekoliko ključnih pitanja za rješavanje postavljenog problema, važno je učenicima dati vremena za razmišljanje prije nego li ih počnemo navoditi po koracima. Prvo pitanje je: *Koje su početne mase vode i suhe tvari?* Izračunajmo te mase:

- početna masa vode iznosi $99\% \cdot 100 = \frac{99}{100} \cdot 100 = 99$ kg
- početna masa suhe tvari iznosi $1\% \cdot 100 = \frac{1}{100} \cdot 100 = 1$ kg.

Sljedeće pitanje je: *Što se s tim masama događa preko noći, to jest kako se mijenjaju?* Krumpir se sada sastoji od 98% vode, odnosno $100\% - 98\% = 2\%$ suhe tvari. Osim toga, znamo da se masa suhe tvari ne mijenja, dakle još uvijek iznosi 1 kg, odnosno 1 kg suhe tvari čini 2% nove ukupne mase krumpira. Zadnje pitanje je: *Od kojeg broja* 2% *iznosi 1?* Neka je M masa krumpira nakon sušenja. Tada je:

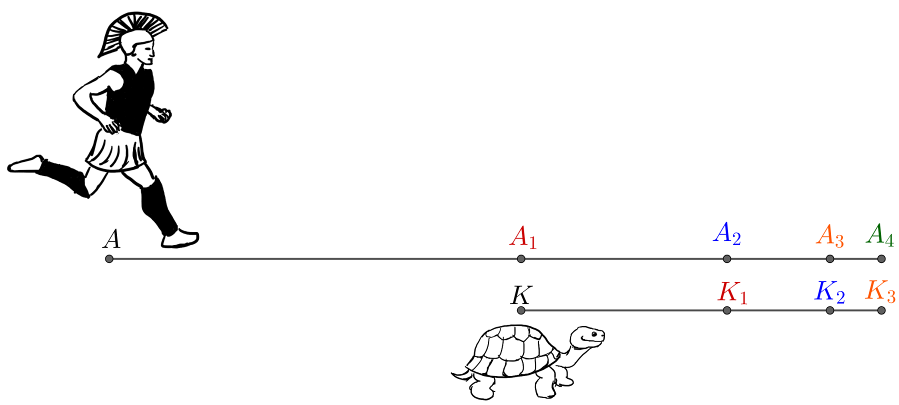
$$\begin{aligned} 2\% \cdot M &= 1 \\ \frac{2}{100} \cdot M &= 1 \\ M &= \frac{100}{2} \\ M &= 50 \text{ kg.} \end{aligned}$$

U ovom slučaju mijenjao se postotak te osnovna vrijednost, ali je postotni iznos bio jednak i prije i poslije promjene. Ovakvi zadaci su vrlo korisni jer učenici nerijetko ne primijenjuju postotke na pravilan način. Na primjer, kada trebaju postotak nekog iznosa dodati ili oduzeti od nekog broja, skloni su tome da samo dodaju, odnosno oduzmu taj postotak kao razlomak, a ne kao razlomak pomnožen odgovarajućim iznosom.

3 Zenonov paradoks o Ahileju i kornjači

Zenon iz Eleje bio je grčki filozof, živio je oko 490. - 430. godine prije Krista [16]. Najpoznatiji je po svojim paradoksima koji su zanimljivi i nakon više od 2500 godina od njegove smrti. Zenonova djela nisu sačuvana, ali je njegove paradokse kretanja opisao Aristotel u svome djelu *Fizika*. To su paradoks dihotomije, paradoks Ahileja i kornjače te paradoks strijele. Paradoks Ahileja i kornjače govori o utrci u kojoj spora kornjača pobjeđuje brzog Ahileja, pri čemu je kornjači u startu dana prednost.

> U utrci, najbrži trkač nikada ne može prestići najsporijeg, zato što gonitelj prvo mora doći do točke odakle je gonjeni pošao, pa prema tome najsporiji uvijek ima prednost. (Aristotel, *Fizika*)



Slika 1: Utrka Ahileja i kornjače.

Promotrimo sliku 1. Kad Ahilej stigne od točke A do točke A_1, odnosno na udaljenost na kojoj je kornjača započela utrku, kornjača se pomakne do sljedeće točke K_1, a kada Ahilej dotrči do točke A_2, kornjača se pomakne do točke K_2 i na taj način se utrka nastavlja. Nakon beskonačno mnogo pokušaja sustizanja kornjače, Ahilej će uvijek biti iza nje iako će tada ta udaljenost biti infinitezimalna. Ipak, iz iskustva znamo da bi Ahilej u stvarnosti sustigao kornjaču, a to možemo i matematički dokazati.

Za dokaz će nam trebati definicija geometrijskog niza te geometrijskog reda.

Definicija 3.1. *Niz (a_n) nazivamo geometrijskim nizom ako mu je kvocijent uzastopnih članova stalan broj q, tj. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Sumu beskonačno mnogo članova geometrijskog niza nazivamo geometrijskim redom.*

Teorem 3.2. *Geometrijski red* $\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1}$ *konvergira ako je* $|q| < 1$ *te vrijedi:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_1 q^{n-1} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Za $|q| \geq 1$ *i* $a_1 \neq 0$ *geometrijski red divergira.*

Pojednostavimo problem, neka je kornjača 10 puta sporija od Ahileja te 10 metara u prednosti ispred njega. Izračunajmo nakon koliko metara će Ahilej sustići kornjaču. Najprije će Ahilej prijeći 10 m do početne točke kornjače, a kornjača će se pomaknuti za 1 m. Kad Ahilej pretrči još 1 m, kornjača će se pomaknuti za 0.1 m i tako dalje. Put koji Ahilej treba prijeći da bi sustigao kornjaču tada je jednak:

$$10 \text{ m} + 1 \text{ m} + \frac{1}{10} \text{ m} + \frac{1}{100} \text{ m} + \dots$$

Taj beskonačan zbroj je suma beskonačno mnogo članova geometrijskog niza kojemu je prvi član $a_1 = 10$, a kvocijent $q = \frac{1}{10}$, a ta suma je upravo geometrijski red koji znamo izračunati:

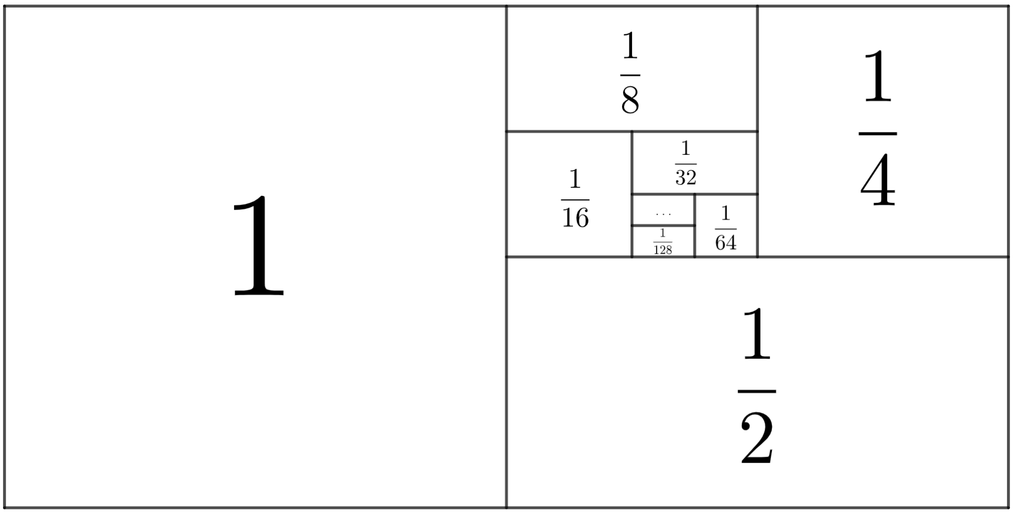
$$\sum_{n=1}^{\infty} 10 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} = \frac{10}{1-\frac{1}{10}} = \frac{100}{9} \text{ m}.$$

Dakle, put koji Ahilej treba prijeći da bi sustigao kornjaču je $\frac{100}{9}$ m, što je konačan put. Pitamo se što je bilo pogrešno u početnom razmišljanju? Greška je bila u pretpostavci da suma beskonačno mnogo brojeva ne može biti konačna.

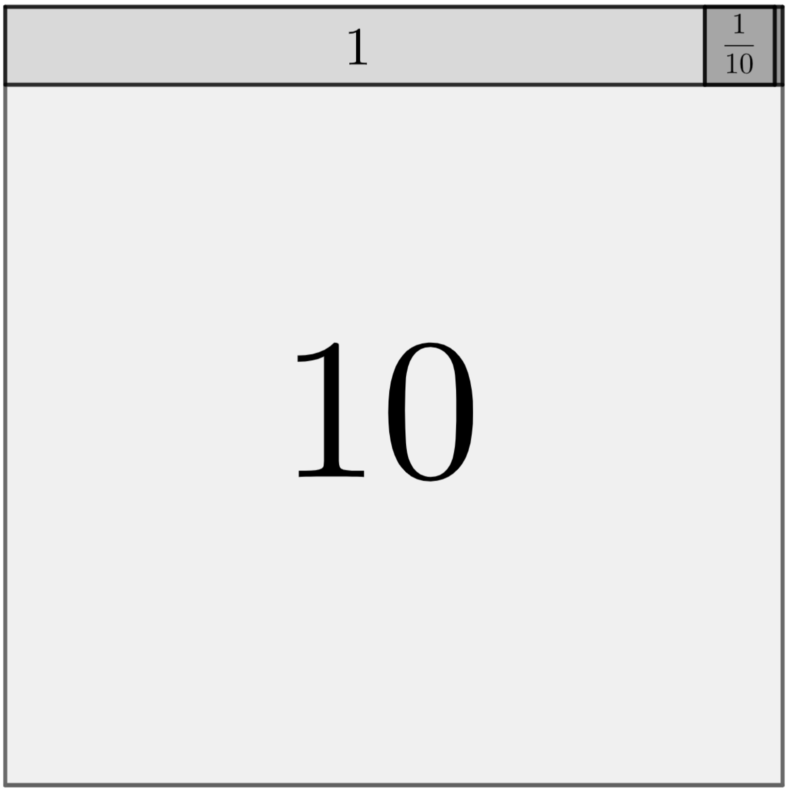
3.1 Na satu matematike: Ahilej i kornjača

Učenici o aritmetičkom i geometrijskom nizu uče u četvrtom razredu srednje škole, pri čemu je geometrijski red obvezan u ishodima učenja za četvrte razrede koji imaju 128 i više nastavnih sati matematike godišnje. Učenici na kraju nastavne teme *Nizovi* opisuju aritmetički i geometrijski niz, geometrijski red, povezuju ih s aritmetičkom i geometrijskom sredinom, računaju zbroj prvih n članova niza te primjenjuju navedene nizove i geometrijski red u problemima iz stvarnog života. Zenonov paradoks je učenicima prigodno predstaviti upravo na nastavnom satu na kojem će se prvi put susresti s geometrijskim redom, a pomoću njega učenici otkrivaju formulu za geometrijski red s kvocijentom manjim od 1.

Prije nego prikažemo vizualizaciju geometrijskog reda s kvocijentom $\frac{1}{10}$, promotrimo sliku 2 na kojoj je vizualni prikaz beskonačnog geometrijskog



Slika 2: Vizualni prikaz geometrijskog reda s početnim članom 1 te kvocijentom $\frac{1}{2}$.



Slika 3: Vizualni prikaz geometrijskog reda s početnim članom 10 te kvocijentom $\frac{1}{10}$.

niza s kvocijentom $\frac{1}{2}$ kojemu je suma jednaka 2. Pravokutnik dimenzija 1×2 najprije dijelimo na dva jednaka dijela da bismo dobili kvadrate površine 1. Jedan od njih zatim ponovno dijelimo na dva jednaka dijela pa imamo dva pravokutnika površine $\frac{1}{2}$ i tako dalje. Možemo reći da se početnik pravokutni okvir popunjava pravokutnicima/kvadratima površina $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ sve dok se ne popuni zadnji dio početnog pravokutnika.

Na analogan način kvadratom dimenzija $\frac{10}{3} \times \frac{10}{3}$ (površina mu je jednaka $\frac{100}{9}$) prikažimo beskonačnu sumu geometrijskog niza s kvocijentom $\frac{1}{10}$ i prvim članom 10. Unutar početnog kvadrata označavamo pravokutnik dimenzija $\frac{10}{3} \times 3$ kojemu je površina jednaka 10. Nakon toga u preostalom dijelu kvadrata označimo pravokutnik dimenzija $\frac{1}{3} \times 3$ površine 1. Zatim u preostalom dijelu označavamo pravokutnik dimenzija $\frac{1}{3} \times \frac{3}{10}$ površine $\frac{1}{10}$ i tako dalje.

Učenicima pokazujemo sliku 3 te ih upućujemo da opišu niz koji je prikazanom tom slikom. Učenici prepoznaju niz brojeva $10, 1, \frac{1}{10}, \ldots$, svaki sljedeći član u tom nizu je 10 puta manji od prethodnog pa zaključuju da je to geometrijski niz s početnim članom 10 te kvocijentom $\frac{1}{10}$.

Nadalje, diskutiramo s učenicima kakva će biti suma beskonačno mnogo članova tog niza, to jest hoće li zbroj biti konačan ili beskonačan. Učenici po slici zaključuju da se radi o četverokutu konačne površine te da će se svakim sljedećim članom koji je prikazan četverokutom odgovarajuće površine taj početni četverokut sve više popunjavati pa će tako suma beskonačno mnogo članova tog niza biti konačna. U tom trenutku možemo pustiti učenike da u grupama ili samostalno probaju to i računski pokazati. Nakon nekog vremena, zajedno provodimo dokaz.

Znamo da je suma prvih n članova geometrijskog niza jednaka

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q},$$

odnosno za $a_1 = 10$, $q = \frac{1}{10}$ iznosi $10 \cdot \dfrac{1-(\frac{1}{10})^n}{1-\frac{1}{10}}$. Zanima nas kojoj vrijednosti teži ta suma kada n teži u beskonačno, to jest računamo:

$$\lim_{n\to\infty} \left(10 \cdot \frac{1-(\frac{1}{10})^n}{1-\frac{1}{10}} \right).$$

Koristimo teorem koji kaže da je $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ kada je $|q| < 1$ pa dobivamo:

$$\lim_{n\to\infty} \left(10 \cdot \frac{1-(\frac{1}{10})^n}{1-\frac{1}{10}} \right) = \frac{10}{1-\frac{1}{10}} = \frac{100}{9}.$$

Nakon toga, možemo zapisati općenitu formulu za sumu beskonačno mnogo članova geometrijskog niza u kojemu je $|q| < 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q}.$$

Sada slijedi zadatak o Ahileju i kornjači postavljen na isti pojednostavljeni način kao ranije:

> Ahilej i kornjača se utrkuju, ali budući da je kornjača 10 puta sporija od Ahileja, dana joj je prednost od 10 m. Hoće li Ahilej ikada dostići kornjaču? Ako hoće, nakon koliko metara će to postići?

Učenici zaključuju da je problem povezan s prethodnim zadatkom te da se radi o istom geometrijskom nizu kojim su prikazani pomaci Ahileja u opisanoj utrci. Kada se Ahilej pomakne za 10 m, kornjača se pomakne za 10 puta manje metara, odnosno za 1 m. Kada Ahilej pretrči još 1 m, kornjača se pomakne za 0.1 m i tako nastavljaju u beskonačno mnogo koraka. Ahilejevi pomaci čine niz $10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \dots$ pa ukupan put računamo kao sumu beskonačno mnogo članova tog niza, a tu sumu smo već izračunali ranije i ona iznosi $\frac{100}{9}$ m. Odgovor je da će Ahilej zaista dostići kornjaču i to nakon pretrčanih $\frac{100}{9}$ m.

Nakon tog primjera definiramo geometrijski red kao sumu beskonačno mnogo članova geometrijskog niza te govorimo o konvergenciji geometrijskog reda ovisno o kvocijentu. Zaključujemo da je geometrijski red konvergentan ako i samo je $|q| < 1$, a u ostalim slučajevima divergira.

4 Rođendanski paradoks

Postavlja se sljedeće pitanje:

> Koliko osoba treba biti u grupi da bi vjerojatnost barem jednog dvostrukog rođendana bila veća od 50%?

Ne govorimo o datumima rođenja koji uključuju i godinu rođenja, već samo dan i mjesec u kojemu je osoba rođena. Budući da godina (ako ne računamo 29. veljače) ima 365 dana, znamo da po *Dirichletovom principu* za grupu od 366 osoba vrijedi da barem dvije osobe imaju rođendan istog datuma. Za grupu od 365 ljudi moguće je da ne postoji dvostruki rođendan, ali vjerojatnost za to je jako mala ako su rođendani slučajni. Imajući to na umu, mogli bismo pomisliti da je tek za grupu od $366 : 2 = 182$ ljudi vjerojatnost postojanja dvostrukog rođendana veća od 50%, ali pokazat ćemo da je tada vjerojatnost već veoma blizu 100%, a za 50% je potrebna puno manja grupa ljudi. To ovu tvrdnju čini svojevrsnim paradoksom.

Da bismo dokazali rođendanski paradoks potrebni su nam matematički pojmovi navedeni u nastavku. *Pokus* je svaka dobro definirana procedura. Rezultati pokusa nazivaju se *elementarni događaji* i često ih označavamo s ω. Skup svih elementarnih događaja nazivamo *prostor elementarnih događaja* i označavamo ga s Ω. Podskup skupa Ω nazivamo *događaj*, a familiju svih događaja označavamo s $\mathcal{F}$ i nazivamo ju *prostor događaja* [11]. Za prostor događaja $\mathcal{F}$ vrijedi:

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$

(ii) $A \in \mathcal{F} \implies A^C \in \mathcal{F}$

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F} \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Definicija 4.1. *Neka je Ω neprazan skup i $\mathcal{F}$ prostor događaja. Vjerojatnost je funkcija $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0,1]$ koja zadovoljava sljedeća svojstva:*

(A1) (nenegativnost) $\mathbb{P}(A) \geq 0$, za sve $A \in \mathcal{F}$

(A2) (normiranost) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

(A3) (aditivnost) $\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(A_j)$, za po parovima disjunktne događaje $A_1, \ldots, A_n$.

Uređenu trojku $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ nazivamo vjerojatnosnim prostorom.

Laplaceov model vjerojatnosti je konačan vjerojatnosni prostor u kojem su svi elementarni događaji jednako vjerojatni. Zbroj vjerojatnosti svih elementarnih događaja jednak je 1. Za događaje A i $\bar{A}$ kažemo da su *suprotni* kada se događaj A dogodi ako i samo ako se $\bar{A}$ ne dogodi. Zbroj vjerojatnosti dva suprotna događaja jednak je $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{A}) = 1$. Kažemo da su događaji A i B nezavisni ako vrijedi:

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Rođendanski paradoks modeliramo vjerojatnosnim prostorom u kojemu je skup elementarnih događaja Ω skup svih uređenih n-torki brojeva od 1 do 365, pri čemu brojevi od 1 do 365 označavaju odgovarajuće datume u godini. Vjerojatnost svakog elementarnog događaja jednaka je $\frac{1}{365^n}$ jer je svaki datum jednako vjerojatan (Laplaceov model vjerojatnosti). Da bismo lakše izračunali vjerojatnost da barem dvije osobe u grupi imaju rođendan istog datuma, izračunajmo vjerojatnost suprotnog događaja: da su sve osobe u grupi rođene različitog datuma. Najprije promotrimo manje grupe ljudi, počevši od $n = 2$, gdje je n broj ljudi u skupini. Za prvu osobu u grupi postoji 365 mogućnosti datuma rođenja. Budući da druga osoba ima različit datum rođenja u odnosu na prvu osobu, preostaje $365 - 1 = 364$ mogućnosti za njen rođendan. Ukupan broj mogućnosti rođendana u godini dana je 365. Vjerojatnost da u grupi od dvoje ljudi ne postoji dvoje s istim rođendanom tada je:

$$\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \approx 0.997.$$

Događaj da u grupi od dvoje ljudi barem dvoje ima rođendan na isti dan je suprotan prethodno opisanom događaju, njegova vjerojatnost je tada:

$$1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \approx 0.003.$$

Poopćimo formulu za grupu od n osoba. Neka je događaj $\bar{A} = \{$u grupi od n osoba ne postoje dvije osobe s istim rođendanom$\}$, tada je događaj $A = \{$u grupi od n osoba postoje barem dvije osobe s istim rođendanom$\}$.

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{365}\right)$$

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365 - (n-1)}{365} = \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n} \qquad (1)$$

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{365!}{(365-n)! \cdot 365^n}. \qquad (2)$$

Izračunajmo za koji n vrijedi da je:

$$\mathbb{P}(A) > \frac{1}{2}.$$

Umjesto formule (1) koju lako koristimo za manje n vjerojatnost ćemo aproksimirati eksponencijalnom funkcijom radi lakšeg računa. Razvijmo eksponencijalnu funkciju u Taylorov red.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Za jako mali x imamo da je aproksimacija eksponencijalne funkcije jednaka:

$$e^x \approx 1 + x.$$

Koristeći navedenu aproksimaciju dobivamo da za $x = -\dfrac{a}{365}$ vrijedi:

$$e^{-\frac{a}{365}} \approx 1 - \frac{a}{365}.$$

Za $a = 1$ imamo da je

$$e^{-\frac{1}{365}} \approx 1 - \frac{1}{365}.$$

Uvrštavajući aproksimaciju u nejednadžbu dobivamo:

$$1 - 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) > \frac{1}{2}$$

$$1 \cdot \left(1 - \frac{1}{365}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{365}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{n-1}{365}\right) < \frac{1}{2}$$

$$1 \cdot e^{-\frac{1}{365}} \cdot e^{-\frac{2}{365}} \cdot \ldots \cdot e^{-\frac{n-1}{365}} > \frac{1}{2}$$

$$e^{\frac{-(1+2+\ldots+(n-1))}{365}} < \frac{1}{2}.$$

Suma prvih $n-1$ prirodnih brojeva jednaka je $\dfrac{n(n-1)}{2}$ pa imamo:

$$e^{\frac{-n(n-1)}{2 \cdot 365}} < \frac{1}{2}$$

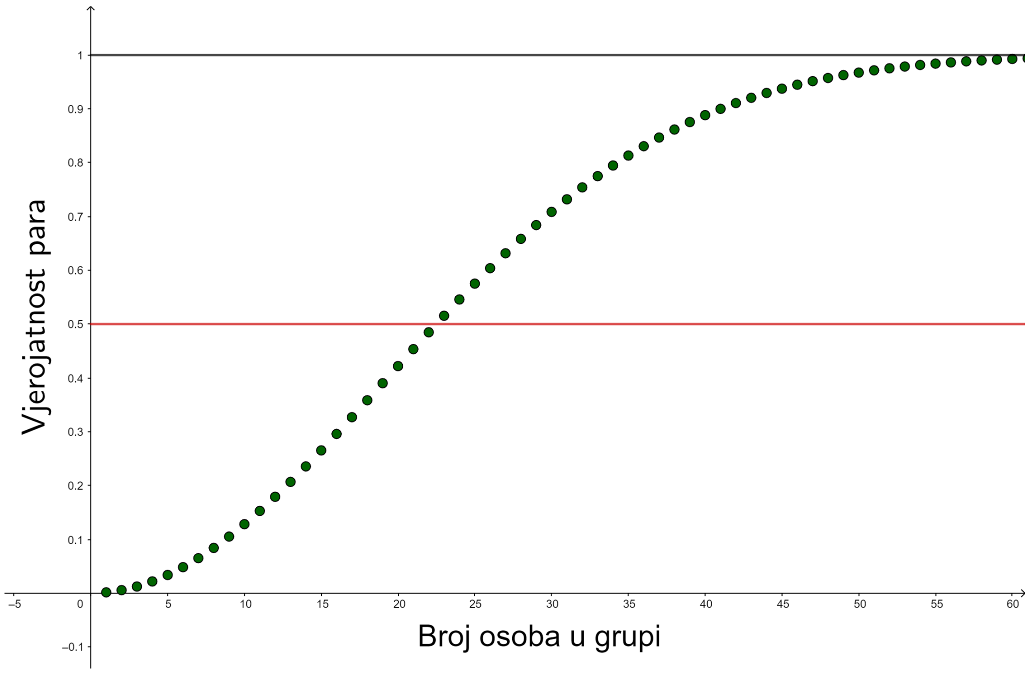
$$e^{\frac{-n(n-1)}{730}} < \frac{1}{2}$$

$$\frac{-n(n-1)}{730} < \ln \frac{1}{2}$$

$$-n^2 + n < -730 \cdot \ln 2$$

$$-n^2 + n + 730 \ln 2 < 0.$$

Rješavajući kvadratnu nejednadžbu dobivamo da je $n < -21.99994\ldots$ ili $n > 22.99994\ldots$, a najmanji takav $n \in \mathbb{N}$ je 23. Dakle, zaključujemo da u grupi treba biti 23 osobe da bi vjerojatnost barem jednog dvostrukog rođendana bila veća od 50%. Vjerojatnost dvostrukog rođendana u ovisnosti o broju ljudi u grupi možemo prikazati grafički kao na slici 4. Prikaz vjerojatnosti dvostrukog rođendana za grupe s različitim brojem ljudi vidimo u tablici 1.



Slika 4: Grafički prikaz vjerojatnosti da barem dvoje ljudi ima isti rođendan u grupi od n ljudi napravljen pomoću programa dinamične geometrije *Geogebra*. Korištena je aproksimacija eksponencijalnom funkcijom $e^{\frac{-n(n-1)}{730}}$.

Izračunali smo da je vjerojatnost da u grupi od 80 osoba barem dvije osobe imaju isti rođendan približno jednaka 99.99%, odnosno možemo biti poprilično sigurni da u grupi od 80 osoba barem dvije imaju rođendan na isti dan. Na početku smo očekivali da bi broj ljudi u grupi potreban da bi postojao dvostruki rođendan mogao biti 182, ali kada bismo tu vjerojatnost izračunali za $n = 182$ vidimo da bi vjerojatnost bila vrlo blizu 100%, odnosno tada bismo bili gotovo sigurni da postoji dvostruki rođendan.

Broj ljudi n	Vjerojatnost da svi imaju rođendan različitog datuma	Vjerojatnost da barem dvoje ljudi ima rođendan istog datuma
2	$\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \approx 0.997$	$1 - 0.997 = 0.003$
3	$\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \approx 0.992$	$1 - 0.992 = 0.008$
4	$\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{362}{365} \approx 0.9836$	$1 - 0.9936 = 0.0164$
5	$\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{361}{365} \approx 0.973$	$1 - 0.973 = 0.027$
10	$\frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{356}{365} \approx 0.8831$	$1 - 0.8831 = 0.1169$
15	$\frac{365!}{(365-15)! \cdot 365^{15}} \approx 0.7471$	$1 - 0.7471 = 0.2529$
22	$\frac{365!}{(365-22)! \cdot 365^{22}} \approx 0.524$	$1 - 0.524 = 0.476$
23	$\frac{365!}{(365-23)! \cdot 365^{23}} \approx 0.493$	$1 - 0.493 = 0.507$
30	$\frac{365!}{(365-30)! \cdot 365^{30}} \approx 0.2937$	$1 - 0.2937 = 0.7063$
45	$\frac{365!}{(365-45)! \cdot 365^{45}} \approx 0.059$	$1 - 0.059 = 0.941$
60	$\frac{365!}{(365-60)! \cdot 365^{60}} \approx 0.0059$	$1 - 0.0059 = 0.9941$
80	$\frac{365!}{(365-80)! \cdot 365^{80}} \approx 0.00009$	$1 - 0.00009 = 0.99991$
182	$\frac{365!}{(365-182)! \cdot 365^{182}} \approx 0$	$1 - 0 = 1$

Tablica 1: Tablica vjerojatnosti da u grupi od n osoba ne postoji, odnosno postoji dvostruki rođendan.

4.1 Na satu matematike: Kad ti je rođendan?

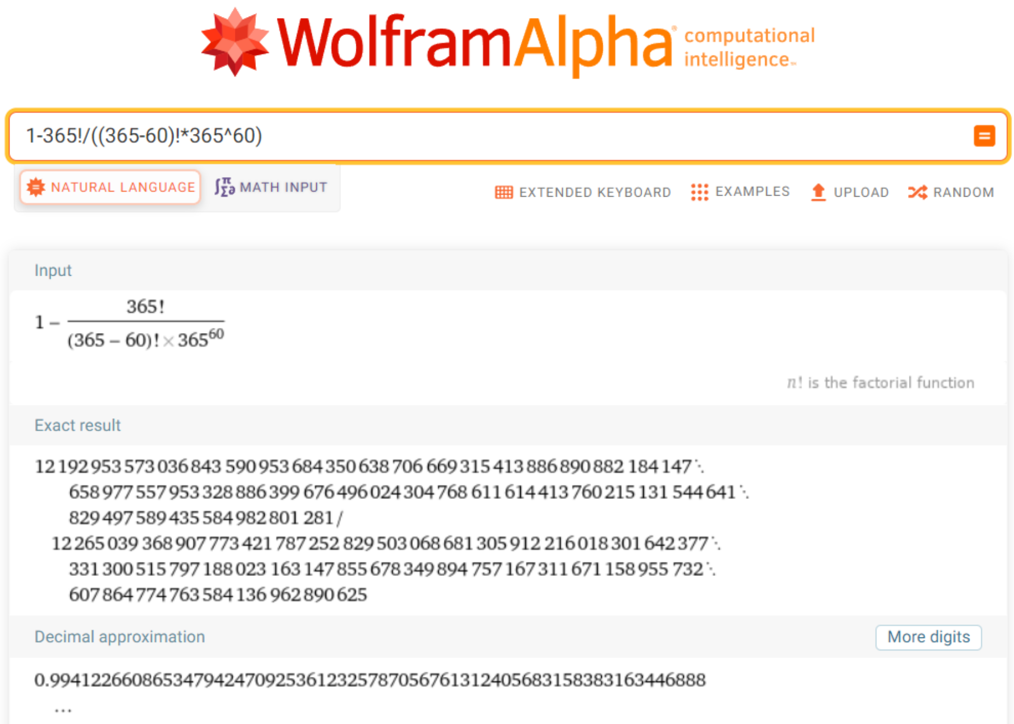
Učenici se s vjerojatnošću susreću vrlo rano u svojem obrazovanju, već u drugom razredu osnovne škole. U toj dobi učenici osvješćuju pojam vjerojatnosti te da događaji ili pojave mogu završiti različitim ishodima. Također, predviđaju i objašnjavaju je li neki događaj moguć ili nemoguć. Vjerojatnost slučajnog događaja računaju u osmom razredu osnovne škole te razlikuju skup povoljnih događaja od skupa elementarnih događaja. Nešto ozbiljnije znanje ipak stječu u srednjoj školi u drugom i četvrtom razredu. U drugom razredu opisuju siguran i nemoguć događaj, primjenjuju algebru događaja te računaju geometrijsku vjerojatnost. U četvrtom razredu srednje škole argumentirano računaju vjerojatnost, uvjetnu vjerojatnost te interpretiraju formulu potpune vjerojatnosti i Bayesovu formulu. Ovisno o tome želimo li učenike samo zaintrigirati za vjerojatnost ili ipak želimo da oni mogu i razumijeti dokaz rođendanskog paradoksa, možemo ga uklopiti u nastavu na različitim navedenim razinama obrazovanja.

Rođendanski paradoks učenicima možemo predstaviti već na prvom satu s nastavnom temom *Vjerojatnost*, a na koji način ćemo opisati rješenje i dokaz tog paradoksa ovisi o kompetentnosti učenika. Najprije možemo postaviti jednostavno pitanje:

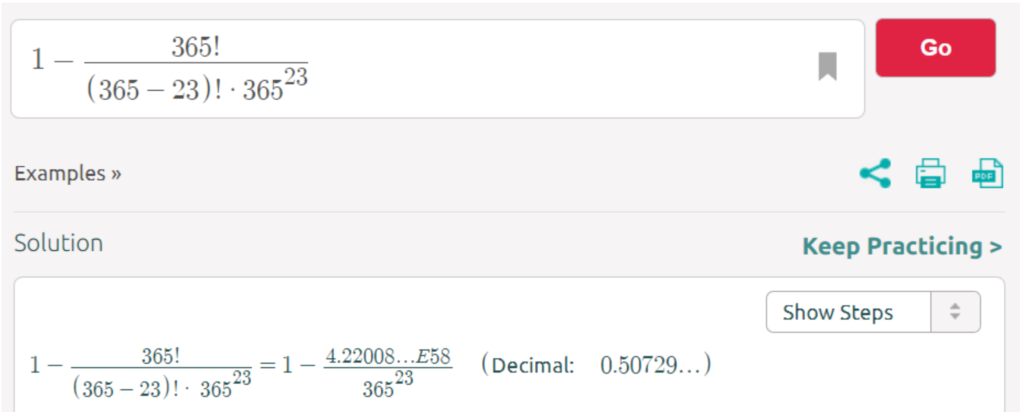
> Koliko osoba treba biti u grupi da bi da bi vjerojatnost da dvije osobe imaju rođendan istog dana u godini bila veća od 50%?

Ideje učenika zapisat ćemo na školsku ploču kako bismo nagađanja kasnije usporedili s rješenjem zadatka. Nakon toga ćemo na zadatak pokušati odgovoriti praktično - tako da ispisujemo naše rođendane i rođendane naših bližnjih. Broj učenika u nastavnom odjelu varira oko broja 20 pa ćemo na školsku ploču najprije zapisati rođendane svih prisutnih učenika. Ukoliko nakon toga ne postoji dvostruki rođendan, nastavnik nasumično proziva učenike da kažu jedan rođendan svojih bližnjih. Možemo dodavati datume sve dok ne dobijemo barem jedan dvostruki rođendan. Nakon što završimo s popisivanjem, komentiramo s učenicima je li nas broj ljudi koji je bio dovoljan za dvostruki rođendan iznenadio i uspoređujemo ga s brojevima pretpostavljenim na početku.

Budući da je za računanje tražene vjerojatnosti potrebno znanje i baratanje kompleksnijim pojmovima iz vjerojatnosti, taj račun možemo provesti tek nakon što naučimo te pojmove. Između ostalog, potrebno je definirati konačan vjerojatnosni prostor, Laplaceov model vjerojatnosti te vjerojatnost suprotnih događaja. Kao i u dokazu ranije u radu, krenut ćemo s računanjem vjerojatnosti dvostrukog rođendana u grupi od dvoje ljudi tako da računamo vjerojatnost suprotnog događaja, to jest da u toj grupi ne postoji dvostruki rođendan. S učenicima je važno izračunati što više traženih vjerojatnosti za manji konkretan broj ljudi u grupi. Možemo popunjavati tablicu na sličan način kako smo to činili u tablici 1. Izvedemo formule za vjerojatnost dvostrukog rođendana za grupe od dvoje, troje do primjerice šestero ljudi. Za manje grupe vjerojatnost lako možemo izračunati kalkulatorom. Nakon toga potrebno je poopćiti tu formulu za grupu od n ljudi, to jest do formule (2). Nadalje vjerojatnosti računamo dobivenom formulom pomoću digitalnih alata kao što su *Wolfram Alpha* [17] ili *Symbolab* [12], pri čemu prvi alat izvodi zahtijevnije račune od drugog. S učenicima razvijenijih kompetencija možemo provesti dokaz u kojem tražimo n za koji vrijedi da je vjerojatnost dvostrukog rođendana veća od 50% te koristimo aproksimaciju eksponencijalne funkcije kao što smo to pokazali ranije u radu.



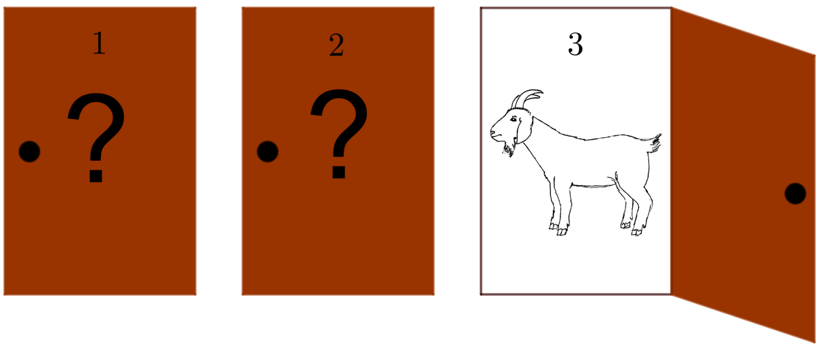
Slika 5: Računanje vjerojatnosti dvostrukog rođendana u grupi od 60 ljudi pomoću digitalnog alata *Wolfram Alpha*.



Slika 6: Računanje vjerojatnosti dvostrukog rođendana u grupi od 23 ljudi pomoću digitalnog alata *Symbolab*.

5 Monty Hall problem

Problem je nazvan prema voditelju televizijskog kviza iz 1970-ih *Let's make a deal* Montyju Hallu. U kvizu su natjecatelju ponuđena troja zatvorena vrata takva da se iza dvoja vrata nalaze koze, a iza jednih novi automobil. Natjecatelj dobiva ono što se nalazi iz vrata koja izabere. Igra započinje tako da natjecatelj najprije odabere jedna od ponuđenih vrata, ali nakon toga voditelj kviza (znajući iza kojih vrata je automobil) otvara jedna od ostalih dvoja vrata iza kojih se nalazi koza. Voditelj kviza tada nudi natjecatelju mogućnost promjene prvog izbora vrata. Je li vjerojatnije da će natjecatelj otvoriti vrata iza kojih se nalazi automobil ako promijeni izbor ili ako ostane pri prvom izboru vrata?



Slika 7: Prikaz vrata ako natjecatelj najprije odabire vrata 1, a voditelj otvara vrata 3 iza kojih se nalazi koza.

Zašto je jedan od navedena dva slučaja vjerojatniji? Pokazalo se da se ta tvrdnja protivi ljudskoj intuiciji, a kada se o navedenom problemu počelo diskutirati javno, mnogi matematičari su bili uvjereni da su vjerojatnosti jednake, odnosno $\frac{1}{2}$. Zaista, pokazat ćemo da je vjerojatnost da će natjecatelj otvoriti vrata iza kojih se nalazi automobil ukoliko ostane pri prvom izboru jednaka $\frac{1}{3}$, a ako promijeni izbor $\frac{2}{3}$. Kako bismo pokazali da to vrijedi, koristit ćemo tvrdnje u nastavku.

Definicija 5.1. *Uvjetna vjerojatnost događaja A uz uvjet da se dogodio događaj B takav da je $\mathbb{P}(B) > 0$ definirana je formulom:*

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Propozicija 5.2. *(Formula potpune vjerojatnosti) Neka je $\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_k$ particija prostora elemenentarnih događaja, pri čemu podskupove H_i nazivamo hipotezama. Za svaki događaj $A \subseteq \Omega$ vrijedi:*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_i \mathbb{P}(H_i)\mathbb{P}(A|H_i).$$

Teorem 5.3. *(Bayesova formula) Neka je $\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_k$ particija prostora elemenentarnih događaja. Tada za svaki $A \subseteq \Omega$ takav da je $\mathbb{P}(A) > 0$ vrijedi:*

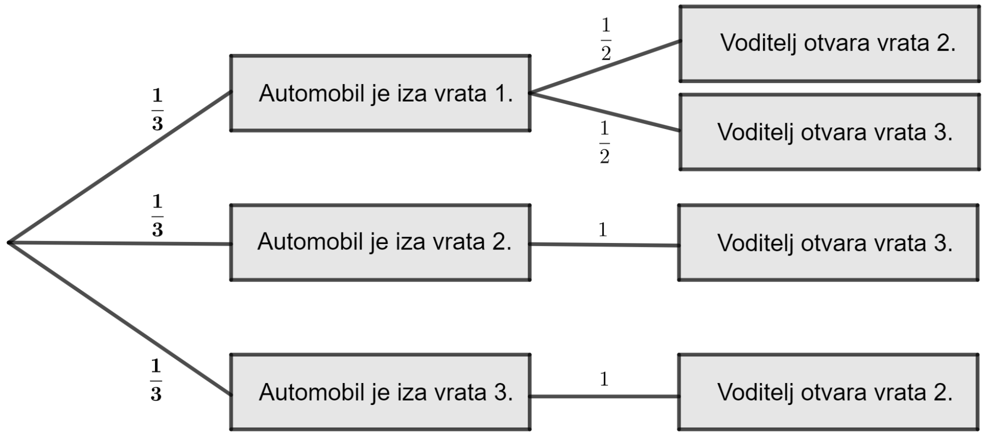
$$\mathbb{P}(H_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|H_i) \cdot \mathbb{P}(H_i)}{\mathbb{P}(A)}.$$

Recimo da natjecatelj prvo bira vrata 1 te vjerojatnosti prikažimo vjerojatnosnim stablom na slici 8. Daljnji račun bio bi analogan za bilo koji prvi izbor vrata i zaključak bi bio isti.

Objasnimo vjerojatnosti prikazane u vjerojatnosnom stablu na slici 8. Na početku igre vjerojatnost da se automobil nalazi iza prvih, drugih ili trećih vrata je jednaka i iznosi $\frac{1}{3}$. Ako se automobil nalazi iza vrata 1 tada je vjerojatnost da će voditelj otvoriti vrata 2 jednaka vjerojatnosti da će otvoriti vrata 3 i iznosi $\frac{1}{2}$. Ako se automobil nalazi iza vrata 2, tada će voditelj sigurno otvoriti vrata 3 (jer ne smije otkriti iza kojih vrata se nalazi automobil), odnosno vjerojatnost da će tada voditelj otvoriti vrata 2 je 0. Ako se nalazi iza vrata 3, tada će sigurno otvoriti vrata 2, odnosno vjerojatnost da će voditelj otvoriti vrata 3 je 0.

U daljnjem računu koristimo sljedeće oznake:

$$A_i = \{\text{automobil je iza vrata } i\},$$
$$V_i = \{\text{voditelj otvara vrata } i\}.$$



Slika 8: Vjerojatnosno stablo svih mogućnosti ako natjecatelj na početku bira vrata 1.

Uz pretpostavku da je natjecatelj prvo odabrao vrata 1, trebamo izračunati vjerojatnosti:

- da se auto nalazi iza vrata 1 uz uvjet da je voditelj otvorio vrata 3, odnosno $\mathbb{P}(A_1|V_3)$
- da se auto nalazi iza vrata 2 uz uvjet da je voditelj otvorio vrata 3, odnosno $\mathbb{P}(A_2|V_3)$.

Na početku igre, vjerojatnosti da se automobil nalazi iza vrata 1, 2 ili 3 su jednake:

$$\mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(A_3) = \frac{1}{3}.$$

Iz vjerojatnosnog stabla lako iščitavamo vjerojatnost da je voditelj otvorio vrata 3 uz uvjet da se automobil nalazi iza vrata 1 te je ona jednaka:

$$\mathbb{P}(V_3|A_1) = \frac{1}{2}.$$

Iz vjerojatnosnog stabla također vidimo da je vjerojatnost da je voditelj otvorio vrata 3 uz uvjet da se automobil nalazi iza vrata 2 jednaka:

$$\mathbb{P}(V_3|A_2) = 1.$$

Uvrstimo li vrijednosti iz vjerojatnosnog stabla u formulu potpune vjerojatnosti dobivamo da je vjerojatnost da voditelj otvori vrata 3 jednaka:

$$\mathbb{P}(V_3) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}(V_3|A_1) + \mathbb{P}(A_2) \cdot \mathbb{P}(V_3|A_2) + \mathbb{P}(A_3) \cdot \mathbb{P}(V_3|A_3)$$
$$\mathbb{P}(V_3) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{2}.$$

Koristeći Bayesovu formulu računamo vjerojatnost da se auto nalazi iza vrata 1 uz uvjet da je voditelj otvorio vrata 3, odnosno vjerojatnost da se iza vrata nalazi automobil ako ne promijenimo izbor:

$$\mathbb{P}(A_1|V_3) = \frac{\mathbb{P}(V_3|A_1) \cdot \mathbb{P}(A_1)}{\mathbb{P}(V_3)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Vjerojatnost da se auto nalazi iza vrata 2 uz uvjet da je voditelj otvorio vrata 3, odnosno vjerojatnost da se iza vrata nalazi automobil ako promijenimo izbor jednaka je:

$$\mathbb{P}(A_2|V_3) = \frac{\mathbb{P}(V_3|A_2) \cdot \mathbb{P}(A_2)}{\mathbb{P}(V_3)} = \frac{1 \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

Time smo pokazali paradoksalnu tvrdnju, odnosno da je bolje promijeniti izbor.

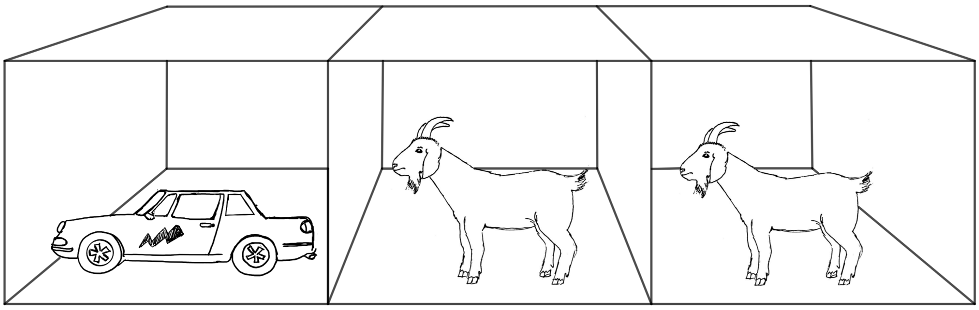
Tvrdnju možemo objasniti i jednostavnije pri čemu još uvijek imamo na umu da natjecatelj na početku bira vrata 1. Na početku igre vjerojatnost da se automobil nalazi iza vrata 1, 2 ili 3 je jednaka i za svaka vrata iznosi $\frac{1}{3}$. Nakon što natjecatelj najprije odabere vrata 1, a voditelj otvara vrata 3 iza kojih otkriva kozu, za vrata 1 još uvijek je vjerojatnost da se iza njih nalazi automobil jednaka $\frac{1}{3}$ (nije jednaka $\frac{1}{2}$ jer voditelj svakako može otvoriti vrata iza kojih se nalazi koza i ta informacija ne utječe na navedenu vjerojatnost). Jedina druga mogućnost je da se automobil nalazi iza vrata 2. Budući da su ta dva događaja komplementarna, vjerojatnost da se automobil nalazi iza vrata 2 uz uvjet da je voditelj otvorio vrata 3 tada je:

$$\mathbb{P}(A_2|V_3) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Primijetimo da bi zaključivanje bilo drugačije u slučaju da je voditelj kviza odmah otvorio vrata 3 i otkrio da se iza njih nalazi koza te da je tek tada natjecatelj prvi put birao vrata. Vjerojatnost da se automobil nalazi iza vrata 1 tada bi zaista bila jednaka vjerojatnosti da se nalazi iza vrata 2, odnosno iznosila bi $\frac{1}{2}$.

5.1 Let's make a deal - u učionici

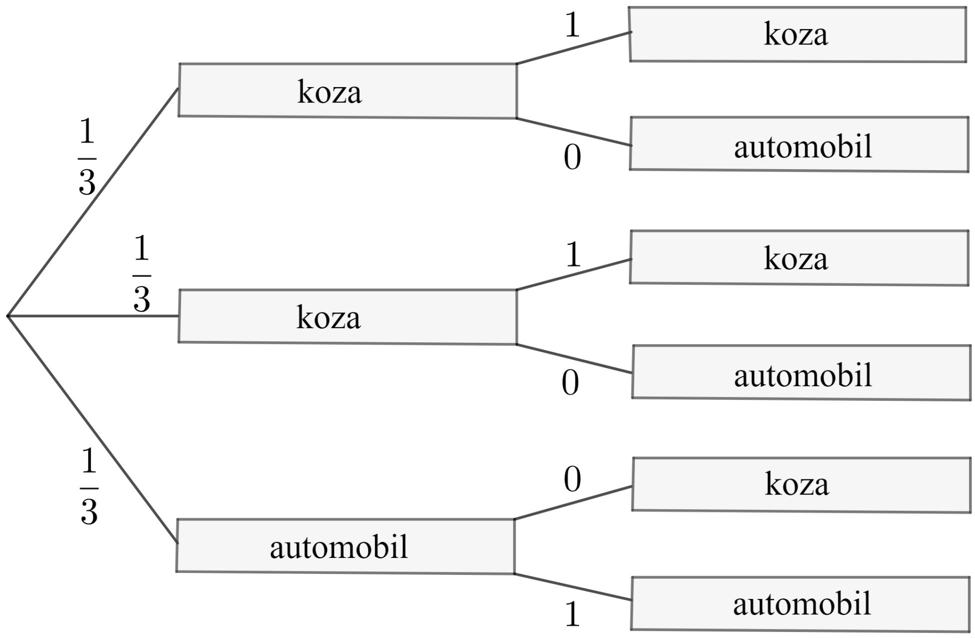
Za rješavanje Monty Hall problema potrebno je primijeniti uvjetnu vjerojatnost, formulu potpunu vjerojatnosti te Bayesovu formulu, stoga je isti učenicima prigodno predstaviti u četvrtom razredu srednje škole na satu na kojem ponavljamo naučeno iz nastavne teme *Vjerojatnost*.



Slika 9: Prikaz kutija iz perspektive nastavnika.

Ideja je da simuliramo analognu situaciju kao i u originalnoj emisiji. Potrebno je pripremiti tri kutije slične veličine, dvije koze i autić (igračke za djecu). Navedene kutije postavimo na školsku klupu ispred učenika, pri čemu između kutija ne postoji razmak, kutije su zatvorene sa svih strana osim s one koja je okrenuta prema nastavniku kao na slici 9. Nastavnik dvije koze i autić raspoređuje u postavljene kutije te diskutira s učenicima koja je vjerojatnost da učenici pogode u kojoj kutiji se nalazi autić. Budući da postoje tri moguća ishoda, a samo jedan je povoljan, učenici odgovaraju da je ta vjerojatnost jednaka $\frac{1}{3}$. Zatim proziva jednog po jednog učenika koji probaju pogoditi u kojoj kutiji se nalazi automobil, nakon odabira nastavnik pokazuje u kojoj od preostalih dviju kutija se nalazi koza, ali ne daje učeniku mogućnost promjene izbora. Nakon svakog pokušaja nastavnik mijenja položaj igračaka u kutijama, a sve pogotke i gubitke bilježi na ploči. Takva igra pogađanja ponavlja se devet puta. Slijedi novi krug igre u kojem se pogađanje također ponavlja devet puta, no ovoga puta nastavnik nakon učenikovog prvog odabira pokazuje unutar koje od preostalih dviju kutija se nalazi koza i učenik mora promijeniti svoj početni odabir kutije. S učenicima diskutiramo zašto ovaj put mijenjamo odabir nakon što saznamo gdje se nalazi jedna koza, to jest hoće li to utjecati na vjerojatnost pogotka i na koji način. Njihova razmišljanja su različita pa podizanjem ruke glasaju hoće li vjerojatnost pogotka sada biti veća, manja ili jednaka vjerojatnosti bez promjene odabira, a glasove bilježimo na školsku ploču.

Nakon oba odigrana kruga u idealnoj situaciji će biti tri pogotka u pr-



Slika 10: Vjerojatnosno stablo svih mogućnosti ako natjecatelj ne promijeni svoj izbor nakon što voditelj otkrije iza kojih vrata se nalazi jedna od koza.

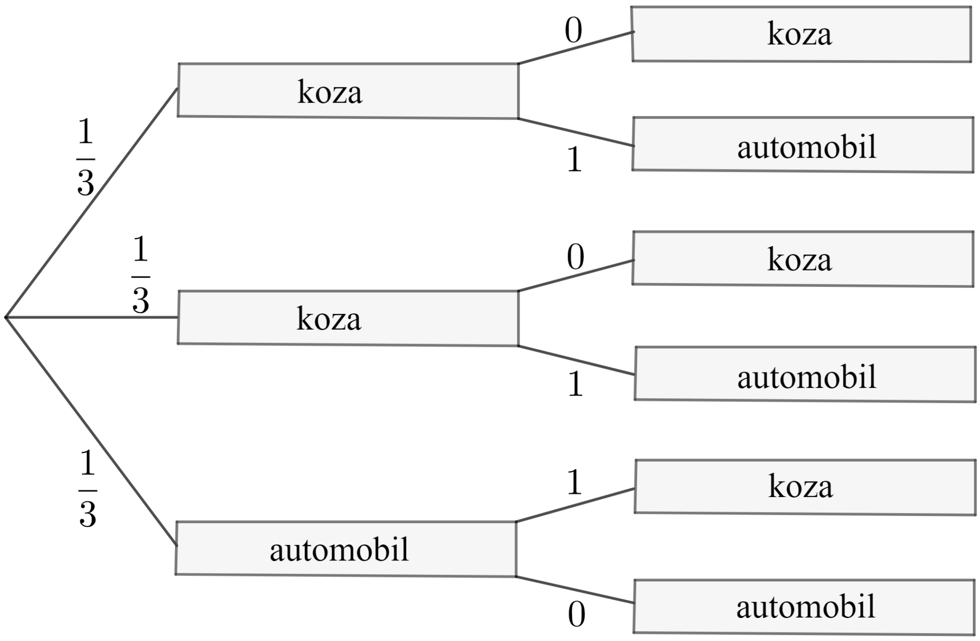
vom krugu, a šest pogodaka u drugom krugu. Zaključujemo da bi odgovor trebao biti: vjerojatnost pogotka je veća ako nakon otkrivanja jedne koze promijenimo izbor, a preostaje to i dokazati.

Jedna opcija je s učenicima provesti dokaz na isti način kao što smo ranije u ovom diplomskom radu - primjenom vjerojatnosnog stabla, formule potpune vjerojatnosti i Bayesove formule. Druga opcija je nacrtati s učenicima dva različita vjerojatnosna stabla takva da jedno prikazuje moguće ishode ako mijenjamo izbor, a drugo ako ne mijenjamo izbor nakon otkrivanja koze.

Promotrimo vjerojatnosno stablo sa slike 10. Budući da su moguća tri ishoda: učenik je odabrao jednu kozu, drugu kozu ili autić, vjerojatnost svakog od tih ishoda je $\frac{1}{3}$. Ako učenik odabere bilo koju od koza, a ne promijeni odabir, sigurno će odabrati kozu (vjerojatnost je 1). Ako odabere automobil, a ne promijeni izbor, sigurno će odabrati automobil. Učenici računaju da je vjerojatnost da će natjecatelj odabrati vrata iza kojih se nalazi automobil jednaka

$$\frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}.$$

U vjerojatnosnom stablu sa slike 11 također imamo da su vjerojatnosti za odabir jedne koze, druge koze ili autića sve jednake i iznose $\frac{1}{3}$. No, budući



Slika 11: Vjerojatnosno stablo svih mogućnosti ako natjecatelj promijeni svoj izbor nakon što voditelj otkrije iza kojih vrata se nalazi jedna od koza.

da u ovom slučaju mijenjamo izbor nakon što se otkriva jedna koza imamo sljedeću situaciju. Ako smo odabrali vrata iza kojih se krije koza, a nastavnik je otkrio vrata iza kojih se krije druga koza, mijenjajući izbor sigurno ćemo odabrati vrata iza kojih se nalazi automobil. Ako odaberemo automobil, a nastavnik otkrije vrata iza kojih se nalazi jedna koza pa moramo promijeniti odabir, sigurno ćemo odabrati kozu. Dakle, dobivamo da je vjerojatnost da će učenik odabrati vrata iza kojih se nalazi automobil (ako promijeni izbor) jednaka

$$\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Zaključujemo da je vjerojatnost pogotka zaista veća ako promijenimo izbor.

6 Paradoks dvije kuverte

Paradoks dvije kuverte postavljen je na sljedeći način:

> Ponuđene su vam dvije kuverte koje sadrže određene svote novca, a jedina informacija koju znate o tim svotama je da je u jednoj od tih kuverti dvostruko veća svota nego u drugoj. Nakon što odaberete jednu kuvertu (pri čemu ju niste još otvorili), dobivate priliku promijeniti izbor. Je li bolje ostati prvi prvom izboru ili promijeniti ga?

Navedimo matematičke definicije koje će nam biti potrebne da bismo riješili paradoks.

Definicija 6.1. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Funkcija $X : \Omega \to \mathbb{R}$ je diskretna slučajna varijabla ako postoji prebrojiv skup $D = \{a_1, a_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ takav da vrijedi:*

(i) $X(\omega) \in D$, za sve elementarne događaje $\omega \in \Omega$

(ii) $\{X = a_j\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = a_j\} \in \mathcal{F}$, za sve $j \in \mathbb{N}$.

Definicija 6.2. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor i funkcija $X : \Omega \to D$, $D = \{a_1, a_2, \dots\} \subset \mathbb{R}$ diskretna slučajna varijabla. Funkcija $f : \mathbb{R} \to [0, 1]$ definirana s:*

$$f(x) = \mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) = x\})$$

naziva se diskretna funkcija gustoće slučajne varijable X.

Definicija 6.3. *Neka je X diskretna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s funkcijom gustoće f. Ako je $\sum_{x \in \mathbb{R}} |x| f(x) < \infty$, onda postoji matematičko očekivanje od X koje definiramo s:*

$$\mathbb{E}(X) := \sum_{x \in \mathbb{R}} x f(x).$$

Razmotrimo prvi način razmišljanja. Recimo da smo odabrali prvu omotnicu te označimo svotu novca u toj omotnici s x. Tada je u drugoj omotnici svota novca iznosa ili $2x$ ili $\frac{x}{2}$. Obje svote novca u drugoj omotnici su jednako vjerojatne pa imamo da je očekivana svota novca u drugoj omotnici:

$$\frac{1}{2} \cdot 2x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} = x + \frac{x}{4}.$$

Zaključili bismo da je bolje promijeniti izbor jer je očekivana svota novca u drugoj omotnici veća od svote novca u omotnici koju smo odabrali prvu. Do istog zaključka došli bismo i da nam je prvi odabir bila druga omotnica pa bi ovom logikom zaključili da trebamo promijeniti izbor u prvu omotnicu. No, što je onda pametnije napraviti? Ovim zaključcima vrtimo se u krug.

Opisan način izračuna očekivane vrijednosti druge omotnice bio bi ispravan kada bi onaj tko nudi omotnice nakon vašeg odabira prve omotnice bacao novčić kojim bi odlučio hoće li u drugu omotnicu staviti upola manje ili dvostruko više novca. To nije bio slučaj, nego su omotnice prethodno popunjene pa svote novca možemo označiti s x u jednoj omotnici i s $2x$ u drugoj omotnici. Vjerojatnosti odabira omotnica su jednake pa imamo da je očekivana vrijednost pojedine omotnice:

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \cdot 2x = \frac{3}{2}x.$$

Ta očekivana vrijednost jednaka je bez obzira koju omotnicu smo prvu odabrali. Iako ovaj problem neodoljivo podsjeća na *Monty Hall problem* pa bi nas mogao lako zavarati, ovdje zaključujemo da je svejedno hoćemo li promijeniti izbor ili ne [14].

Pojam matematičkog očekivanja upoznaju samo učenici četvrtog razreda gimnazije s 224 nastavnih sati matematike godišnje. Njima paradoks dvije kuverte možemo predstaviti na jednaki način kao što je prethodno opisano pa ga u ovom slučaju nećemo posebno raspisivati kao aktivnost.

7 Problem 100 zatvorenika

Problem 100 zatvorenika može se postaviti na više načina, a jedan je sljedeći:

> Voditelj zatvora je 100 zatvorenika osuđenim na smrt, označenim brojevima od 1 do 100, dao posljednju šansu da izbjegnu smaknuće. U jednoj sobi postavljeno je 100 kutija koje su također numerirane brojevima 1 do 100. Voditelj prije početka izazova u svaku kutiju na nasumičan način stavlja jedan od brojeva 1 do 100 tako da svaka kutija sadrži jedan broj, a dvije kutije ne mogu sadržavati isti broj. Zatvorenici, jedan po jedan, smiju ući u sobu te otvoriti 50 različitih kutija koje nakon toga ponovno zatvore. Ako svi zatvorenici u traženju pronađu vlastite brojeve kojima su na početku označeni, onda će svi zatvorenici biti pomilovani. Ako barem jedan zatvorenik ne pronađe svoj broj, svim zatvorenicima preostaje smrtna kazna. Prije nego prvi zatvorenik krene u sobu u potragu za vlastitim brojem, zatvorenici smiju međusobno dogovoriti strategiju traženja, ali nakon što prvi zatvorenik krene u potragu, zatvorenici više ne smiju međusobno komunicirati. Koja je najbolja strategija za zatvorenike?

Svaki zatvorenik smije otvoriti 50 od ukupno 100 kutija u sobi pa slijedi da je vjerojatnost da pojedini zatvorenik na slučaj način pronađe vlastiti broj jednaka $\frac{1}{2}$. Budući da su potrage različitih zatvorenika nezavisni događaji, vjerojatnost da svi zatvorenici na slučajan način pronađu vlastite brojeve jednaka je umnošku vjerojatnosti da pojedini zatvorenik na slučajan način pronađe vlastiti broj. Dakle, ako n zatvorenika na slučajan način traži vlastite brojeve, vjerojatnost da svi zatvorenici nađu vlastite brojeve je:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

U tablici je prikazano kako se ta vjerojatnost smanjuje u odnosu na povećanje broja zatvorenika u postavljenom problemu.

Očito, strategija da svi zatvorenici nasumično traže vlastite brojeve ne daje im veliku šansu. Postoji strategija s kojom je vjerojatnost da svih 100 zatvorenika pronađe vlastiti broj veća od 30%. Prema tablici 2, ta vjerojatnost čini se van svakog dosega, ali je istinita.

Svaki zatvorenik za najpovoljniji ishod treba postupiti na sljedeći način:

1. Zatvorenik ulazi u sobu te otvara kutiju koja je numerirana njegovim vlastitim brojem.

Ukupan broj zatvorenika n	Vjerojatnost da svi zatvorenici na slučajan način pronađu vlastiti broj
2	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0.25$
3	$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} = 0.125$
20	$\left(\frac{1}{2}\right)^{20} \approx 0.000000954 = 9.54 \cdot 10^{-7}$
50	$\left(\frac{1}{2}\right)^{50} \approx 8.88 \cdot 10^{-16}$
100	$\left(\frac{1}{2}\right)^{100} \approx 7.89 \cdot 10^{-31}$

Tablica 2: Tablica vjerojatnosti da svih n zatvorenika na slučajan način pronađe vlastiti broj.

2. U slučaju da je pronašao svoj broj u kutiji, izlazi iz sobe jer je ostvario svoj cilj.
3. Ako nije pronašao svoj broj, nego neki drugi broj, tada otvara kutiju koja je numerirana nađenim brojem.
4. Ponavlja navedene korake sve dok ne pronađe svoj broj ili ne otvori 50 kutija.

Slijede matematičke tvrdnje koje će nam biti potrebne za nastavak.

Definicija 7.1. *Bijekciju $f : S \to S$ nazivamo permutacijom skupa S. Ako je $S = \{1, \dots, n\}$, bijekciju $f : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots, n\}$ nazivamo permutacijom stupnja n.*

Definicija 7.2. *Ciklus ili ciklička permutacija $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_s \end{pmatrix}$ je permutacija koja preslikava $i_1 \mapsto i_2, i_2 \mapsto i_3, \dots i_s \mapsto i_1$, a ostale elemenete iz $\{1, \dots, n\}$ preslikava u same sebe. Broj s nazivamo duljinom ciklusa.*

Definicija 7.3. *Za cikluse $\pi_1 = \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_s \end{pmatrix}$ i $\pi_2 = \begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_t \end{pmatrix}$ kažemo da su disjunktni ako je $\{i_1, \dots, i_n\} \cap \{j_1, \dots, j_t\} = \emptyset$.*

Teorem 7.4. *Svaka permutacija je kompozicija disjunktnih ciklusa.*

Budući da svi zatvorenici imaju dodijeljene različite brojeve, svaki zatvorenik otvara različitu prvu kutiju. Svaka kutija sadrži jedan broj te dvije kutije ne sadrže isti broj pa će poredak otvaranja kutija biti različit za svakog zatvorenika. Raspored brojeva zatvorenika koji se nalaze u kutijama možemo poistovijetiti s permutacijom brojeva 1 do 100, tj. bijekcijom iz skupa $\{1, \ldots, 100\}$ u samog sebe. Ako zatvorenik u nekom koraku traženja pronađe svoj broj, taj broj će ga ponovno uputiti na kutiju koju je prvu otvorio (jer je prvu kutiju otvorio zato što je numeririana njegovim brojem). Na primjer, zatvorenik s vlastitim brojem 2 otvara kutiju pod brojem 2. U toj kutiji se nalazi broj 7 pa zatvorenik nakon toga otvara kutiju numeriranu brojem 7. U kutiji broj 7 nalazi se broj 2, to je njegov vlastiti broj te broj prve kutije koju je otvorio. Takve permutacije su ciklične permutacije ili ciklusi pa prema uvjetima problema ciklus mora biti duljine manje ili jednake 50. Ako je ciklus duljine veće od 50, to znači da zatvorenik nije uspio pronaći svoj broj pri otvaranju 50 kutija te svim zatvorenicima preostaje smrtna kazna. Postoji ukupno $\binom{100}{d}$ načina za odabir brojeva koji su u ciklusu. Zbog simetrije cikličnih permutacija, brojeve unutar ciklusa možemo poredati na $(d-1)!$ načina. Ostali brojevi izvan ciklusa mogu biti poredani na $(100-d)!$ načina. Broj permutacija skupa $\{1, \ldots, 100\}$ koje sadrže ciklus duljine $d > 50$ jednak je:

$$\binom{100}{d} \cdot (d-1)!(100-d)! = \frac{100!}{(100-d)!d!} \cdot (d-1)!(100-d)! =$$
$$\frac{100!}{(100-d)!(d-1)! \cdot d} \cdot (d-1)!(100-d)! = \frac{100!}{d}.$$

Ukupan broj permutacija, tj. ukupan broj mogućih rasporeda brojeva 1 do 100 po kutijama je 100! pa imamo da je vjerojatnost da opisanom strategijom svi zatvorenici pronađu vlastite brojeve jednaka:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{100!} \cdot \left(\frac{100!}{51} + \frac{100!}{52} + \ldots + \frac{100!}{100} \right) \\ = 1 - \left(\frac{1}{51} + \frac{1}{52} + \ldots + \frac{1}{100} \right). \end{aligned}$$

Naglasimo, strategija je uspješna samo ako permutacija ne sadrži niti jedan ciklus duljine veće od 50 jer tako zahtjeva uvjet problema. Za izračun sume $\sum_{n=51}^{100} \frac{1}{n}$ ne postoji formula, postoje samo formule za aproksimaciju. Međutim, digitalni matematički alati poput *Wolfram Alpha*-e sposobni su izračunati tu sumu pa korištenjem navedenog alata dobivamo sljedeći rezultat:

$$1-\left(\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\ldots+\frac{1}{100}\right)\approx 0.3118,$$

što je čak više od 30%.

7.1 Na satu matematike: Problem 20 učenika

Problem 100 zatvorenika možemo prilagoditi za učenike trećih razreda srednje škole pri obradi nastavne cjeline *Osnovni principi prebrojavanja, permutacije, kombinacije, varijacije.* Zbog razine zahtjevnosti, poželjno je predstaviti ga na dodatnoj nastavi.

Radi jednostavnosti opisavanja aktivnosti pretpostavit ćemo da nastavni odjel u kojem provodimo aktivnost broji 20 učenika. Potrebno nam je 20 numeriranih kuverti u koje nastavnik nasumično stavlja brojeve od 1 do 20 tako da svaka kuverta sadrži različit broj. Te kuverte možemo rasporediti na školsku klupu ispred učionice kako ostatak učenika ne bi promatrao međusobna pretraživanja opisana u nastavku. Učenicima dijelimo po jedan papirić s brojem od 1 do 20 tako da svaki dobije različit broj. Jedan po jedan, učenici izlaze iz učionice te imaju pravo otvoriti 10 kuverti ponaosob. Cilj je pronaći vlastiti broj dobiven na početku. Pobjeda je zajednička, a pobjeđuju samo ako svi učenici u potrazi nađu vlastite brojeve. Učenici imaju pravo dogovoriti se za strategiju, ali nakon što potraga počne ne smiju se naknadno dogovarati. Ovisno o tome koliko vremena nam je na raspolaganju, pustit ćemo učenike da koriste vlastite strategije traženja odgovarajućeg broja. Nakon toga, nastavnik i učenici pokušavaju smisliti najbolju strategiju. Ukoliko samostalno ne dobiju ideju, nastavnik im otkriva kako se trebaju organizirati da je vjerojatnost za pobjedu najveća. Zapisujemo korake na ploču:

1. Svaki učenik najprije otvara kuvertu koja je numerirana njegovim vlastitim brojem.

2. Iduća kuverta koju otvara je numerirana brojem koji se je nalazio u prethodno otvorenoj kuverti.

3. Učenik ponavlja postupak sve dok ne pronađe vlastiti broj, odnosno dok ne otvorit deset kuverti.

Strategiju testiramo u praksi, a nakon toga računamo vjerojatnost da će tom strategijom svi učenici pronaći vlastite brojeve. Prije toga, podsjećamo se pojmova iz kombinatorike koje smo naučili u trećem razredu srednje škole. Raspored brojeva učenika koji se nalaze u kuvertama poistovjećujemo s permutacijom brojeva 1 do 20. Navedenom strategijom korake učenike također možemo promatrati kao permutaciju podskupa skupa $\{1,\ldots,20\}$, a budući da nas nalazak vlastitog broja ponovno usmjerava na otvaranje prve otvorene kuverte, ta permutacija je ciklička (ciklus). Ako je ciklus duljine $d \leq 10$ znači je učenik pronašao vlastiti broj s 10 ili manje otvorenih kuverti. Postoji ukupno $\binom{20}{d}$ načina za odabir brojeva u ciklusu, a te odabrane brojeve možemo poredati na $(d-1)!$ načina. Ostale brojeve skupa $\{1, \ldots, 20\}$ koji nisu u ciklusu možemo poredati na $(20-d)!$ načina. Ukupan broj permutacija podskupa skupa brojeva $\{1, \ldots, 20\}$ kojima je ciklus duljine d jednak je:

$$\binom{20}{d} \cdot (d-1)!(20-d)! = \frac{20!}{(20-d)! \cdot d!} \cdot (d-1)!(20-d)! = \frac{20!}{(20-d)!(d-1)! \cdot d} \cdot (d-1)!(20-d)! = \frac{20!}{d}.$$

Vjerojatnost da opisanom strategijom svi učenici pronađu vlastite brojeve dobit ćemo tako da računamo vjerojatnost suprotnog događaja, odnosno da je duljina ciklusa d veća od 10, a zatim ćemo tu vjerojatnost oduzeti od broja 1 (jer vjerojatnosti nekog događaja i njemu suprotnog događaja u zbroju daju 1). Ukupan broj permutacija brojeva 1 do 20 je 20! pa taj račun izgleda ovako:

$$1 - \frac{1}{20!} \cdot \left(\frac{20!}{11} + \frac{201}{12} + \ldots + \frac{20!}{20} \right) = 1 - \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{20} \right).$$

Budući da se radi o manje zahtjevnom računu, rezultat možemo izračunati kalkulatorom, ali možemo koristiti i digitalni alat *Wolfram Alpha*-u. Računamo:

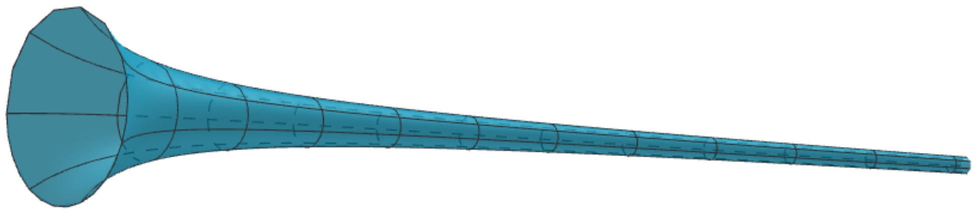
$$1 - \sum_{n=11}^{20} \frac{1}{n} \approx 0.33123,$$

dakle tražena vjerojatnost je veća od 33%.

Ovaj zadatak vrlo se lako da prilagoditi po broju učenika u nastavnom odjelu, pri tome će broj kuverti koji učenici otvaraju traženjem vlastitog broja biti uvijek upola manji. Ako je ukupan broj učenika neparan broj, možemo se i sami uključiti u traženje.

8 Gabrielov rog

Gabrielov rog, poznat još kao Torricellijeva truba, je rotacijsko tijelo koje je otkrio Evangelista Torricelli (1608. - 1647.). Nastaje rotacijom grafa funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ na domeni $[1, +\infty\rangle$ oko osi apscisa. Paradoks Gabrielovog roga je da ima konačan volumen, a beskonačno oplošje. Da bismo to pokazali, navest ćemo formule kojima se računaju volumen i oplošje rotacijskih tijela.



Slika 12: Gabrielov rog.

Volumen tijela nastalog rotacijom grafa funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ oko $x-$osi računamo sljedećom formulom:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx. \tag{3}$$

Tada je volumen Gabrielovog roga na domeni $[1, a]$ jednak:

$$V = \pi \int_1^a \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \pi \int_1^a \frac{1}{x^2} dx = \pi \left(1 - \frac{1}{a}\right).$$

Odredimo volumen Gabrielovog roga na domeni $[1, +\infty\rangle$ tako da računamo limes kada a teži u beskonačno:

$$\lim_{a \to \infty} \left(1 - \frac{1}{a}\right) = \pi.$$

Oplošje tijela nastalog rotacijom grafa funkcije $f(x)$ na intervalu $[a, b]$ oko $x-$osi računamo formulom:

$$O = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \tag{4}$$

Tada je oplošje Gabrielovog roga na domeni $[1, a]$ jednako:

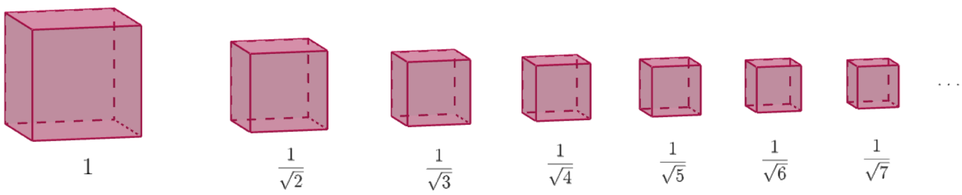
$$O = 2\pi \int_1^a \frac{1}{x}\sqrt{1+\left[\left(\frac{1}{x}\right)'\right]^2}dx = 2\pi \int_1^a \frac{1}{x}\sqrt{1+\left(\frac{-1}{x^2}\right)^2}dx =$$

$$2\pi \int_1^a \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{x}dx > 2\pi \int_1^a \frac{\sqrt{1}}{x}dx = 2\pi \ln a.$$

Oplošje Gabrielovog roga bit će veće od $2\pi \ln a$. Kada a teži u beskonačno, tada $2\pi \ln a$ teži u beskonačno, odnosno oplošje Gabrielovog roga bit će beskonačno.

Kako je moguće da je volumen tijela konačan, a oplošje beskonačno i ima li smisla te dvije veličine uopće uspoređivati? Ne bismo li punjenjem Gabrielovog roga bojom također obojili i njegov plašt s unutarnje strane? Paradoks Gabrielovog roga je poznat također kao slikarov paradoks koji tvrdi upravo to. Što ako ispunimo Gabrielov rog bojom pa potom boju izlijemo, neće li tada plašt s unutarnje strane ostati obojan i rog ipak imati konačno oplošje? Problem je upravo u našem shvaćanju jer pokušavamo usporediti dvije veličine koje nisu usporedive. Fizička boja o kojoj govorimo nije dvodimenzionalna nego ima i svoju debljinu, to jest trodimenzionalna je pa zato ne možemo razmišljati na navedeni način. Čini nam se da je oplošje Gabrielovog roga *veće* od volumena, međutim, kao što nema smisla uspoređivati duljinu i površinu, metre s kvadratnim metrima, litre sa satima i slično, tako nema smisla uspoređivati površinu/oplošje s volumenom tijela.

8.1 Na satu matematike: Konačan volumen i beskonačno oplošje



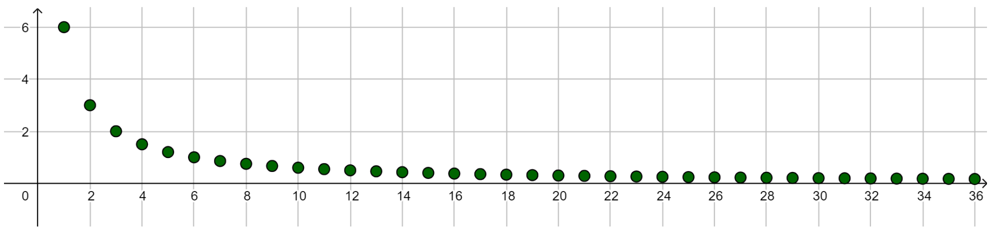
Slika 13: Niz kocaka s bridom duljine $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Umjesto originalnog paradoksa Gabrielovog roga, učenicima u četvrtom razredu pri obradi redova možemo prikazati sličan paradoks za koji nije potrebno znanje o nepravim integralima te volumenu i oplošju rotacijskog tijela. Radi se o nizu kocaka kojima je zbroj volumena konačan, a ukupno oplošje beskonačno. Problem koji zadajemo učenicima glasi:

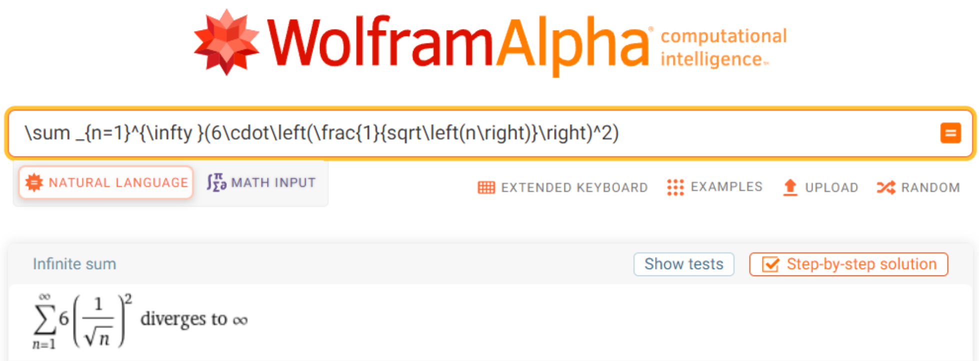
Zamislite beskonačan niz kocaka takvih da je prva kocka s bridom duljine 1, druga kocka s bridom duljine $\frac{1}{\sqrt{2}}$, treća kocka s bridom duljine $\frac{1}{\sqrt{3}}, \ldots$, n-ta kocka s bridom duljine $\frac{1}{\sqrt{n}}$ i tako dalje kao što je prikazano na slici 13. Izračunajte ukupan volumen i oplošje kocaka u tom nizu [15].

Oplošje kocke s duljinom brida a računamo po formuli $O = 6a^2$. Da bismo izračunali oplošje svih kocaka u navedenom beskonačnom nizu, računamo sumu reda:

$$6 \cdot 1^2 + 6 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right)^2 + \ldots + 6 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 + \ldots$$
$$= 6 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots\right)$$



Slika 14: Niz točaka $\left(n, 6 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$ koje prikazuju oplošje n-te kocke.

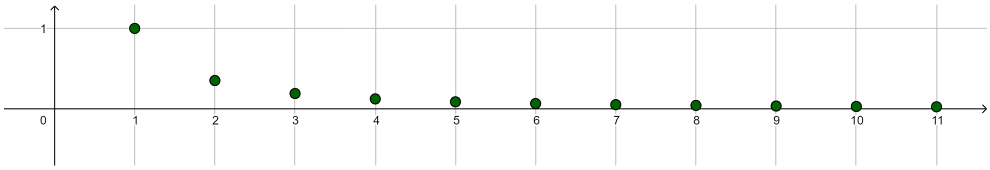


Slika 15: Računanje oplošja beskonačno mnogo kocaka pomoću digitalnog alata *Wolfram Alpha*.

Na slici 14 vidimo da se oplošje svake sljedeće kocke u nizu smanjuje, ali vrlo sporo. Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ je poznati harmonijski red koji je divergentan, odnosno oplošje svih kocaka je beskonačno. S učenicima to možemo izračunati pomoću digitalnog alata kao što je prikazano na slici 15.

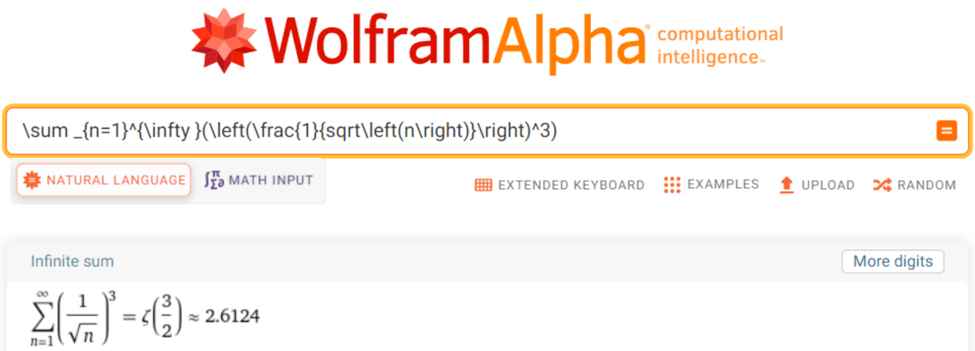
Volumen kocke s duljinom brida a računamo po formuli $P = a^3$ pa je volumen zadanih kocaka jednak zbroju:

$$1^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3 + \ldots$$



Slika 16: Niz točaka koje prikazuju volumen n-te kocke.

Na slici 16 vidimo da se volumen svake sljedeće kocke u nizu vrlo brzo smanjuje. S učenicima također možemo izračunati da red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3$ konvergira kao što je prikazano na slici 17.



Slika 17: Računanje volumena beskonačno mnogo kocaka pomoću digitalnog alata *Wolfram Alpha*.

Zaključujemo da zadani niz kocaka zaista ima konačan volumen i beskonačno oplošje. Kao i kod Gabrielovog roga, s učenicima možemo komentirati slikarov paradoks i na ovom primjeru. Potrebno je objasniti da bojenje strana kocki ne možemo poistovjetiti s oplošjem kocke jer fizička boja ima treću dimenziju - debljinu koja je svakako različita od nule.

Literatura

[1] M. Cook, *Sleight of mind. 75 ingenious paradoxes in mathematics, physics, and phylosophy*, The MIT Press, 2020.

[2] S. J. Farlow, *Paradoxes in Mathematics*, Dover Publications, Inc., 2014.

[3] M. Gardner, *Hexaflexagons and other mathematical diversions*, The University of Chicago Press, 1988.

[4] M. Gardner, *Knotted doughnuts and other mathematical entertainments*, W. H. Freeman and Company, 1986.

[5] M. Gardner, *The Colossal Book of Mathematics*, W. W. Norton and Company, Inc., 2001.

[6] D. Kung, *Mind - Bending Math: Riddles and Paradoxes*, The Great Courses, 2015.

[7] V. Krčadinac, *Kombinatorika. Predavanja*, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno - matematički fakultet, Matematički odsjek, 2022.

[8] J. Matotek, I. Stipančić-Klaić, *Rođendanski paradoks.* Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike, 18, 70(2017.), str. 36−45.

[9] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, *Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematika za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj*, 2019. dostupno na: `https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html`, (veljača 2022.).

[10] D. Pavrlišak, I. Plavčić, T. Škrtić, *Matematički paradoksi*, Hrvatski matemematički elektronički časopis, dostupno na: `http://e.math.hr/math_e_article/br16/plavcic_skrtic_pavrlisak/index`, (lipanj 2010.).

[11] N. Sandrić, Z. Vondraček, *Vjerojatnost, skripta*, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno - matematički fakultet, Matematički odsjek, 2019.

[12] Symbolab Math Solver - Step by Step calculator, dostupno na: `https://www.symbolab.com/` (lipanj, 2022.).

[13] G. J. Székely, *Paradoxes in probability theory and mathematical statistics*, Akadémiai Kiadó, 1986.

[14] Z. Šikić, *Druga kći, Monty Hall i dvije omotnice - zbunjujuće vjerojatnosti*, Poučak: časopis za metodiku i nastavu matematike, 20, 77(2019.), str. 4−17.

[15] Youtube kanal - Up and Atom, *This Object has Infinite Surface Area, but Finite Volume*, dostupno na:
`https://youtu.be/3WVpOXUXNXQ`, (svibanj 2022.).

[16] Wikipedia, *Zenon iz Eleje*, dostupno na:
`https://hr.wikipedia.org/wiki/Zenon_iz_Eleje`, (ožujak 2022.).

[17] Wolfram Alpha: Computational Intelligence, dostupno na: `https://www.wolframalpha.com`, (lipanj, 2022.).

[18] P. Žugec, *Paradoks krumpira.* Matematičko fizički list, 71, 280 (2020.), str. 15−17.

Sažetak

U ovom diplomskom radu opisujemo matematičke paradokse iz različitih područja matematike. Paradoks krumpira jedan je od jednostavnijih paradoksa i lako se objašnjava postotnim računom. Zenonov paradoks o Ahileju i kornjači na slikovit način nam pokazuje da suma beskonačno mnogo članova može biti konačna. Rođendanski paradoks idealan je uvod u temu vjerojatnosti, a za nešto kompetentnije učenike koji uče o uvjetnoj vjerojatnosti proučavamo i Monty Hall paradoks. Za matematičko očekivanje zaintrigirat će nas paradoks dvije kuverte, a za cikličke permutacije problem 100 zatvorenika. Na kraju računamo volumen i oplošje Gabrielovog roga pa ih pokušavamo usporediti. Svaki od navedenih paradoksa prilagodili smo nastavi matematike na određenoj razini obrazovanja i time dali ideju nastavnicima kako zainteresirati učenike za spomenuta matematička područja.

Summary

In this thesis we describe mathematical paradoxes from different areas of mathematics. The potato paradox is one of the simpler paradoxes and is easily explained by a percentage calculation. Zeno's paradox about Achilles and the tortoise visually shows us that the sum of an infinite number of parts can be finite. The birthday paradox is an ideal introduction to the topic of probability, and for somewhat more competent students learning about conditional probability, we also study the Monty Hall paradox. For mathematical expectation we will be intrigued by the paradox of two envelopes, and for cyclic permutations by the problem of 100 prisoners. Finally, we calculate the volume and area of Gabriel's horn and try to compare them. We have adapted each of these paradoxes to the teaching of mathematics at a certain level of education, thus giving teachers an idea of how to interest students in the mentioned mathematical areas.

Životopis

Rođena sam 30. studenog 1996. godine u Bjelovaru. Osnovnoškolsko obrazovanje završila sam u III. osnovnoj školi Bjelovar, a nakon toga sam upisala pa 2015. godine završila opći smjer u Gimnaziji Bjelovar. Iste te godine upisala sam predidplomski studij na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu - nastavnički smjer matematike. 2019. godine završila sam preddiplomski studij te upisala diplomski studij - nastavnički smjer matematike. Tijekom studiranja obavljala sam razne studentske poslove, a od rujna 2021. godine radim u Ekonomskoj i birotehničkoj školi Bjelovar te Medicinskoj školi Bjelovar kao nastavnica matematike.