Kombinatorni dokazi u nastavi matematike

Mamić, Zrinka

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Zrinka Mamić

KOMBINATORNI DOKAZI U NASTAVI MATEMATIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Slaven Kožić

Zagreb, srpanj, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Kao što znamo, matematičarima dokazi imaju bitnu ulogu u utvrđivanju valjanosti matematičkih tvrdnji. No, što je sa dokazima u osnovnoškolskom i srednjoškolskom obrazovanju? U nastavi matematike rijetko nailazimo na dokaze. Nešto češće susrećemo se s dokazima u srednjoškolskom obrazovanju, dok se u osnovnoj školi oni vrlo rijetko spominju te minimalno provode. No, ima li uopće potrebe učiti dokaze? Nažalost, većina učenika ne shvaća razloge dokazivanja i rijetko kada vide potrebu za njima. U posljednjih nekoliko desetljeća, vidljiv je značajan napredak u istraživanjima vezanim za poučavanje dokaza i njihovog korištenja u nastavnom procesu. Stručnjaci se slažu oko toga da učenici trebaju učiti dokaze u školama jer tako prvenstveno uče rasuđivati i zaključivati, što je jedan od glavnih zadataka nastave matematike. Međutim, poučavanje dokaza za nastavnike matematike predstavlja veliki izazov. Potrebno je dobro razmisliti koje dokaze i na koji način učenicima prikazati te odabrati prikladnu vrstu dokaza za određeni uzrast učenika.
U ovom diplomskom radu ukratko ćemo proći kroz povijest matematičkih dokaza te navesti funkcije dokazivanja te potrebu za dokazivanjem iz učeničke perspektive i perspektive učitelja. Također, prikazat ćemo važnost uloge nastavnika u poučavanju dokaza te probleme koji nastaju kada učenici nisu dovoljno uključeni u proces dokazivanja. Objasnit ćemo i načine na koje možemo učenicima olakšati učenje dokaza, a učiteljima njihovo poučavanje. Nadalje, predstavit ćemo vrste dokaza na koje nailazimo u nastavi, nakon čega ćemo se zadržati na kombinatornim dokazima.
U posljednjem poglavlju pokazat ćemo kombinatorne dokaze koji bi se mogli uvrstiti i obraditi u pojedinom gradivu predviđenom nastavnim programom za srednje škole. Time ćemo pokazati da učenicima možemo kombinatoriku približiti tokom sve četiri godine njihova srednjoškolskog obrazovanja.
Tako ćemo za prvi razred srednje škole pokazati dokaze primjenjive u cjelinama „Realni brojevi“ te „Potencije i algebarski izrazi“.
U prvoj točki „Suma prvih n prirodnih brojeva“ detaljno ćemo razraditi kombinatorni dokaz formule za sumu prvih n prirodnih brojeva, nakon čega ćemo vidjeti primjere zadataka koje možemo provesti s učenicima. U sljedećoj točki, „Djeljivost“, obraditi ćemo kombinatorni način rješavanja problema karakterističnih za ovu temu, dok ćemo u posljednjoj točki pod nazivom „Potencije“ riješiti problem određivanja kombinacija zapisa zadane po-

tencije baze x u obliku produkta određenog broja nenegativnih cjelobrojnih potencija od x. Kod drugog razreda srednje škole obraditi ćemo dvije točke; „Funkcije“ i „Klasična definicija vjerojatnosti“. U prvoj ćemo točki povezati problem raspodjele m markica na k kuverti s injektivnosti, surjektivnosti i bijektivnosti funkcije, dok ćemo u drugoj pokazati tipove zadataka karakteristične navedenoj cjelini.
U prvoj točki trećeg razreda srednje škole riješiti ćemo problem određivanja vjerojatnosti izbora dvije osnovne trigonometrijske funkcije čiji se grafovi nikada neće sjeći. U drugoj i trećoj točki rješavati ćemo probleme iz cjeline ”Kombinatorika”; „Varijacije i permutacije“ te „Kombinacije“ i pokazati da se svi zadaci mogu riješiti i samo primjenom osnovnih metoda prebrojavanja.
U posljednjem dijelu rada pokazati ćemo kombinatorni dokaz binomnog teorema u sklopu točke „Binomni teorem“, zatim u drugoj točki pod nazivom „Derivacije“ provesti ćemo kombinatorni izvod Leibnizovog pravila derivacije produkta funkcija. Naposljetku, u točki „Vjerojatnost“, pokazati ćemo primjere zadataka iz učeničkih udžbenika koji se nalaze u istoimenoj cjelini.

Poglavlje 1

Matematički dokazi kroz povijest

U ovom poglavlju ukratko ćemo sagledati povijesni razvoj dokaza i dokazivanja slijedeći članak [4] i djelo [19]. Istaknuti ćemo ključne autore i objave u povijesti matematike i matematičkih ideja koje ćemo na kraju poglavlja prikazati tablično.
Upravo strogi matematički dokazi su ono što matematiku čini drugačijom od ostalih znanosti. Kako bi se neka tvrdnja u matematici smatrala istinitom, mora se dokazati. Odnosno, koristeći logičke argumente, s obzirom na zadane i općeprihvaćene standarde, pokazuje se da je navedena tvrdnja točna. Ali nije uvijek bilo tako. U prošlim vremenima dovoljno je bilo da netko nacrta smislenu sliku ili da ponudi jasan opis matematičke ideje i to je bilo sve što je potrebno da bi se tvrdnja smatrala matematičkom činjenicom. Ponekad bi se istinitost tvrdnje argumentirala povezivanjem s bogovima.
Ideja o potrebi dokazivanja točnosti matematičke tvrdnje pojavljuje još u Grčkoj u 5. stoljeću pr. Kr. među filozofima koji su se u to doba bavili i matematikom. Filozofi su objašnjavali pojave koje su se zbivale oko njih a u istinitost svojih objašnjenja morali su uvjeriti i ostale. Iz tog razloga bio im je potreban jasan i nepobitan sustav argumentiranja a principe logičkog zaključivanja, kakve su razvili za dokazivanje tvrdnji unutar matematike, iako su mogli primijeniti i na druga područja. Smatra se da je prva osoba koja je svoje matematičke tvrdnje dokazivala grčki filozof, znanstvenik i inžinjer Tales iz Mileta (634. – 548. pr. Kr). Dokaz koji mu se pripisuje je dokaz tvrdnje da promjer kruga dijeli krug na dva jednaka dijela. Budući da niti jedno njegovo djelo nije ostalo sačuvano, ne možemo sa sigurnošću tvrditi da prvi dokaz potječe od Talesa. Oni dokazi koji jesu sačuvani su dokazi Pitagore i njegovih učenika. Unatoč tome, mnogi njihovi dokazi i dalje nisu bili rigorozni. Premda je ovo bio samo početak matematičkog dokaza, pravila dokazivanja, koja su omogućila širu upotrebu i razvoj matematičkog dokaza, usustavljena su tek par stoljeća kasnije. Za to je zaslužan matematičar Euklid (325. – 265. pr. Kr.), odnosno njegovo najznačajnije djelo nazvano „*Elementi*“. Euklidovi „*Elementi*“ su sinteza tada poznate matematike u trinaest knjiga veličine poglavlja. Zašto je to djelo toliko značajno? Upravo

zbog svog stila pisanja: teoremi i propozicije su logički poredani tako da svaki dokaz ili propozicija slijedi iz ranije dokazanih ili pak osnovnih tvrdnji danih na samom početku, a zaključci se izvode strogo deduktivno. Euklidova ideja bila je izvesti svu matematiku (geometriju) iz malog broja početnih pretpostavki: aksioma i postulata. Grci su djelo odmah prihvatili kao standardni udžbenik matematike, a vjeruje se da je u tu svrhu i napisan.
Mnogi su nagađali razlog zbog kojeg su Grci počeli inzistirati na dokazima matematičkih tvrdnji. U prvom poglavlju svoga djela [18] autori navode da je demokratska priroda atenskog društva stvorila kontekst u kojem su se logički argumenti cijenili. Također su bili potaknuti potrebom za rješavanje problema nesumjerljivosti i iracionalnosti, primjerice da dijagonala kvadrata nije sumjerljiva sa svojom stranicom i da broj 2 nema racionalni kvadratni korijen. Umjesto da matematiku baziraju na opažanju i eksperimentima, Grci su ju bazirali na logici. Platon (427. – 349. pr. Kr.) je zahtijevao stroge definicije i dokaze, dok je njegov učeni Aristotel (384. – 322. pr. Kr.) formirao metodu primjerenu matematici. Tu metodu danas zovemo dedukcija. Euklidov aksiomatski pristup ne samo da je od povijesne važnosti, već je postao središnji pojam u matematici. Moderne matematičke strukture često se baziraju na definicijama i aksiomima te oslanjaju na pravila ili zaključke. U takvom sustavu, propozicija se smatra istinitom ako se može izvesti iz konačnog broja aksioma.
Descartes (1596. – 1650.) našao je inspiraciju za svoje filozofske metode u Euklidovim *„Elementima"*. Ono što ga je impresioniralo je način na koji je Euklid bazirao geometriju na par aksioma tj. postulata i nastavio deduktivno izvoditi daljnje tvrdnje u koje je imao povjerenja.
Europska matematika u doba renesanse većinom je bila bazirana na dostugnućima starih Grka. Istina, bilo je trenutaka kada su otkrića novih teorema i metoda prestigla zadatak rigoroznog dokazivanja, primjerice kada su Newton i Leibniz predstavili diferencijalni i integralni račun u 17. stoljeću. Njihova opravdanja za metode naišla su na mnoge kritike. U isto vrijeme, dok su se nizale kritike na račun manjka strogosti u analizi, dogodio se važan razvoj u geometriji; otkriće neeuklidske geometrije. Za Descartesa i Kanta, euklidska geometrija bila je primjer znanja i nepobitna istina. Kada su Lobachevsky, Bolyai i Gauss obznanili da je moguće konstruirati geometriju u kojoj Euklidovi postulati nisu istiniti, postaje moguće postaviti pitanje istinitosti euklidske geometrije. Naravno, postojalo je snažno iskušenje zapitati se je li sve u redu s neeuklidskom geometrijom kad postoje kontradikcije s euklidskom. Klein je 1871. godine eliminirao tu mogućnost dokazavši da ako postoji kontradikcija u tada novoj, neeuklidskoj geometriji, također postoji kontradikcija i u euklidskoj geometriji. Ovo je stvorilo potrebu za novim pristupom kojim bi se zaštitili temelji geometrije i ostatka matematike. Ova metoda utvrđivanja manjka kontradikcije jednog matematičkog sustava, pokazujući da je konzistentan poput drugog sustava, nije primjenjivana isključivo u geometriji. Hilbert je pokazao konzistentnost aksioma eulidske geometrije te je dao i novu aksiomatizaciju euklidske geometrije ali i otvorio pitanje kon-

zistentnosti aritmetike. Naime, svođenjem pitanja konzistentsnosti geometrije na pitanje konzistentnosti analize te naposljetku i aritmetike dolazi do problema koji je glasio; kako direktno dokazati konzistentnost aritmetike? Ideja je bila pokušati uspostaviti aritmetiku na osnovi teorije skupova, zatim uspostaviti teoriju skupova na temelju logike. Krajem devetnaestog i početkom dvadesetog stoljeća to je dovelo do stavljanja naglaska na potrebu za formalizacijom matematike u vidu aksiomatskog sustava u teoriji skupova (Frege, Russell i drugi), geometriji (Hilbert) i aritmetici (Peano i drugi).
Sljedeći korak bio je matematiku formalizirati na način da se sve matematičke tvrdnje izraze u preciznom formalnom jeziku, da se dokaže potpunost i konzistentnost takvog sustava korištenjem konačnih operacija i dokaza te da se otkrije algoritam koji odlučuje o istinitosti matematičkih tvrdnji. Upravo to bio je cilj Hilbertova formalizma.
Za kraj, sagledajmo i definiciju dokaza u proizvoljnoj teoriji prvog reda iz [21, str. 173 - 174].

Neka je zadana neka teorija T prvog reda te neke formule jezika A_1, ... , A_n i A te teorije. Za dani niz formula A_1, ... , A_n kažemo da su dokaz za formulu A u teoriji T ako vrijede dvije stvari. Prva da je formula A_n upravo A, a druga da za sve A_i vrijedi ili da je formula A_i aksiom od T ili da je formula A_i nastala primjenom generalizacije na neke prethodne formule.

Navesti ćemo neke ključne autore i objave u povijesti matematike i matematičkih ideja da bih pružila bolji pregled standardne verzije povijesti dokaza u matematici. Uočiti ćemo da postoji znatna praznina između djela Aristotela i Euklida te europskih filozofa i matematičara koji su njihova djela prepoznali kao značajna. Autori i djela u kojima se često ne diskutira kada se govori o standardnoj povijesti dokaza su izostavljeni, što je rezultiralo spomenutom prazninom. Ne tvrdi se da u tom periodu nije bilo značajnih matematičkih postignuća, samo da se najčešće ignorira kada se predstavlja standardna verzija.

600. pr. Kr.	Tales; prvi dokaz
427. – 349. pr. Kr.	Platon; osnivač filozofske škole Akademija
384. – 322. pr. Kr.	Aristotel; začetnik metode dedukcije (*„Posterior Analytics“*, 335. pr. Kr.)
300. pr. Kr.	Euklidovi *„Elementi“*
250. pr. Kr. do 100. pr. Kr.	*„Jiuzhang Suanshu“* (*Devet poglavlja umijeća računanja*); kompilacija raznih manuskripta koja se sastoji od 246 zadataka raspisanih 9 poglavlja
0.	
200.	

263.	Liu Hui-jevi komentari *„Jiuzhang Suanshu“*
300. – 600.	Teorijski period Kineske matematike
800.	
1 000.	
1 200.	
1 258. – 1 264.	Thomas Aquina (*„Summa Contra Gentiles“*)
1 400.	
1 500. – 1 557.	Tartaglia; otkrio metodu za rješavanje kubne jednadžbe oblika $$x^3 + px^2 = q^3$$
1 596. – 1 650.	Descartes; iznosi kritiku dotadašnje filozofske i znanstvene misli, te ukazuje na potrebu revizije pojmova i metoda kojima su se gradile znanstvene teorije (*„Discours de la Méthode“*, 1 637.)
1 632. – 1 677.	Spinoza; naglašava neodvojivost teorijske spoznaje od njene praktične realizacije (*„Etika“* objavljenje posthumno, 1 677.)
1 642. – 1 727.	Newton; postavio je račun beskonačnosti, osnovne teorije prirode svjetlosti i boje, ostvario značajan napredak u proučavanju planetarnog gibanja (*„Philosophia Naturalis Principia Mathematica“*, 1 687.)
1 646. – 1 716.	Leibniz; predstavio je diferencijalni i integralni račun vodeći se, za razliku od Newtona, geometrijskim potrebama (svoje radove najvećim je dijelom objabio u časopisu *„Acta Eruditorum“*)
1 685. – 1 753.	Berkeley; objavio kritiku temelja diferencijalnog i integralnog računa, posebno na Newtonov pojam fluksija i na Leibnizov pojam beskonačno male promjene (*„The Analyst“*, 1 734.)
1 724. – 1 804.	Kant; pokušaj da se objasni ili zadovolji nužnost matematike i apriorne prirode matematičke istine dok se objašnjava ili zadovoljava mjesto matematike u empirijskoj znanosti i primjenjivost na opaženi fizički svijet
1 789. – 1 857.	Cauchy; posebno je pridonio matematičkoj analizi. Bio je prvi matematičar koji je razvio definicije i pravila za matematiku. Uveo je definiciju integrala i pravila za konvergenciju nizova.

1 830.	Bolyai i Lobachevsky objavili prvu raspravu o neeuklidskoj geometriji
1 845. – 1 918.	Cantor; doprinio je konceptu otvorenih i zatvorenih skupova analiziranjem konvergencije
1 848. – 1 925.	Frege; donosi potpuno novo shvaćanje logike polažući temelje teoriji kvantifikavije i istinitosti funkcija, tj. tradicionalnu analizu suda u subjekt i predikat zamjenjuje analizom u funkciju i argument (*„Begriffsschrift“*, 1879.)
1 849. – 1 925.	Klein; dokazao je da kontradikcija u neeuklidskoj geometriji implicira kontradikciju u euklidskoj geometriji (1 871.)
1 858. – 1 932.	Peano; formuliro je aksiome za prirodne brojeve potaknut potrebom za formalizacijom aritmetike
1 862. – 1 943.	Hilbert; dao je novu aksiomatizaciju euklidske geometrije čime je zamijenio tradicionalne Euklidove aksiome (*„Grundlagen der Geometrie“*, 1 899.)
1 872. – 1 970.	Russell; tvrdio da se sva matematika može izvesti iz nekoliko jednostavnih aksioma koji nisu konkretno koristili matematičke koncepte već su bili ograničeni na čisto logičke koncepte (*„Principia Mathematica“*, 1 910. – 1 913.)

Tablica 1.1: Povijesni razvoj dokaza i dokazivanja

Poglavlje 2

Potreba za dokazima u nastavi matematike

U ovom poglavlju prikazati ćemo potrebu za poučavanjem dokaza u obrazovnom procesu. Također, obraditi ćemo i razne pristupe navedenoj temi. Prikazat ćemo i važnost uloge nastavnika u poučavanju dokaza te problem nedovoljne uključenosti učenika u proces dokazivanja. Većinom ćemo pratiti istraživački rad [22].
Sagledajmo sada vezu između dokazivanja teorema i nastave matematike. Budući da su matematika kao znanost i matematika kao nastavni predmet oduvijek, a pogotovo danas, usko povezane, to nam pokazuje da dokazivanje teorema ima svoje bitno mjesto u nastavnom procesu. Istu stvar govori nam i sama činjenica da matematički kurikulum [11], ne samo u Republici Hrvatskoj, već i u zemljama širom svijeta, kao cilj ima:

„- primijeniti matematički jezik u usmenom i pisanome izražavanju, strukturiranju, analizi, razumijevanju i procjeni informacija upotrebljavajući različite načine prikazivanja matematičkih ideja, procesa i rezultata u matematičkome kontekstu i stvarnome životu
- samostalno i u suradničkome okružju matematički rasuđivati logičkim, kreativnim i kritičkim promišljanjem i povezivanjem, argumentiranim raspravama, zaključivanjem, provjeravanjem pretpostavki i postupaka te dokazivanjem tvrdnji
- rješavati problemske situacije odabirom relevantnih podataka, analizom mogućih strategija i provođenjem optimalne strategije te preispitivanjem procesa i rezultata, po potrebi uz učinkovitu upotrebu odgovarajućih alata i tehnologije
- razviti samopouzdanje i svijest o vlastitim matematičkim sposobnostima, upornost, poduzetnost, odgovornost, uvažavanje i pozitivan odnos prema matematici i radu općenito
- prepoznati povijesnu, kulturnu i estetsku vrijednost matematike njezinom primjenom u različitim disciplinama i djelatnostima kao i neizostavnu ulogu matematike u razvoju i dobrobiti društva“.

U svome članku [5], Kurnik iznosi svoje stajalište o metodici dokazivanja teorema. Navodi da je radi lakšeg razumijevanja metodike dokazivanja teorema potrebno poznavati i moći opisati pojam „dokaz". Ranije u radu navedeno je što je dokaz, razvoj dokazivanja te konačno Hilbertov formalizam i njegov cilj. No, istaknimo još jednom da je dokaz teorema u nekoj teoriji konačan niz tvrdnji teorije u kojem je svaka tvrdnja ili aksiom ili je dobivena iz prethodno dokazanih tvrdnji toga niza po nekom pravilu zaključivanja; te je posljednja tvrdnja niza ona tvrdnja koju dokazujemo. Kurnik smatra da su posebno važni dokazi geometrijskih teorema jer upravo oni učenicima pružaju pravu priliku upoznavanja ideje strogog zaključivanja. Pitanje koje se stalno postavlja u nastavnom procesu je „Trebaju li učenicima dokazi i dokazivanje?". Naime, i dalje se većina učenika kasnije u svom životu neće baviti matematikom niti će im matematika biti potrebna za njihovo buduće zanimanje. Kao što sam na početku poglavlja napomenula; osnovni zadatak matematike je „rasuđivati logičkim, kreativnim i kritičkim promišljanjem i povezivanjem, argumentiranim raspravama, zaključivanjem, provjeravanjem pretpostavki i postupaka te dokazivanjem tvrdnji" [11] iz čega slijedi da je potrebno učenike učiti dokazivati. Učiti dokazivati znači učiti rasuđivati, a svaki čovjek u svom životu mora znati rasuđivati. Primjerice, usporediti različite tvrdnje koje do nas dopru te od njih izdvojiti one koje su istinite, provjeriti valjanost nekog sumnjivog dokaza ili tvrdnje, opovrgnuti nečije mišljenje, donijeti ispravan zaključak o nečemu i slično. Iz tog razloga učenici bi se u svome obrazovanju trebali upoznati s dokazima barem nekoliko standardnih matematičkih teorema te ih, naravno, razumijeti. Kako poučavanje dokaza nije nimalo lagan zadatak, Kurnik u [5] navodi nekoliko važnih činjenica koje nastavnici trebaju imati na umu tijekom pripreme za poučavanje dokazivanja teorema. Prvo što moramo znati je da, iako je matematika deduktivna znanost, školska matematika ne izgrađuje se ni na jednoj razini nastave kao strog deduktivni sustav, već ostaje u okvirima modela. Ova činjenica pogotovo je važna za nastavnike koji predaju u osnovnoj školi, jer je matematika u tom periodu obrazovanja većim dijelom induktivna te se mnogi poučci u njoj obrađuju bez dokaza. Drugo, u školskim dokazima neizbježni su intuitivni elementi, pa ako je neki teorem jednostavan učenici teško mogu pojmiti zašto se on još mora i dokazati. Posljednja činjenica koji Kurnik navodi je da učenici lakše prihvaćaju logički dokaz u manje očiglednim primjerima. Iako je takav dokaz kompliciraniji, u njemu se povezuje više različitih činjenica što dovodi to toga da se lakše pamte te naposljetku i to stečeno znanje postaje trajnije.

Razvoju matematičkog obrazovanja te pitanju poučavanja dokaza u školama uvelike pomaže činjenica da se u posljednje vrijeme objavljuje sve više radova na temu dokazivanja u nastavi matematike. U svom članku [17] Reid navodi jednu upečatljivu tvrdnju koja glasi da učenici u svom matematičkom obrazovanju moraju koristiti dokaze kako bi uvjerili sebe i pokazali svojim učiteljima istinitost tvrdnje ili poučka. No, ne zagovaraju svi istraživači isključivo taj razlog i potrebu poučavanja dokaza i dokazivanja, već navode i potrebu za provjerom istinitosti poučka, potrebu za istraživanjem, objašnjenjem, sistematizacijom, komunikacijom i društvenim prihvaćanjem. Većina istraživanja u matematičkom obrazovanju ima jedan od četiri pristupa u razmatranju potrebe koja motivira učenike za dokazivanje. Mnogi, pogotovo oni koji imaju tradicionalniji pogled na dokaz, smatraju da je jedina potreba za dokazima ispitati istinitost poučka. Drugi pak ističu onu potrebu koja motivira istraživačke matematičare smatrajući da bi ista ta potreba trebala potaknuti i učenike osnovnih i srednjih škola na dokazivanje u nastavnom procesu. Također postoji grupa istraživača koja ukazuje na potrebe primjerenije nastavnom procesu, odnosno naglasak stavljaju na činjenicu da učiti dokazivati znači učiti rasuđivati. Posljednja grupa istraživača koju Reid navodi je ona koja se bavi ispitivanjem matematičke aktivnosti učenika za vrijeme nastavnog procesa, te identificiranjem potreba koje u postojećem školskom sustavu potiču unutarnju motivaciju učenika za dokazivanjem i učenjem dokaza. Nastavnici koji smatraju dokaze isključivo alatima za provjeru istinitosti pojedine tvrdnje motivirati će učenike na način da u njima pobude sumnju, dok će oni koji dokaze vide kao objašnjenje pojedinih tvrdnji u učenicima pokušati pobuditi propitivanje. Oni nastavnici koji pak smatraju da je dokazivanje motivirano s više različitih čimbenika, usredotočiti će se na pitanja koja postavljaju učenicima u procesu dokazivanja teorema u svrhu dobrog i brzog sagledavanja poučka od strane učenika, uspješnog vođenja metode razgovora i ostvarenje postavljenog cilja nastavnog sata. Naravno, postoje pitanja koja su standardna i nezaobilazna te se stalno javljaju kod poučavanja dokaza, dok postoje ona koja ovise o trenutku i umiješanosti nastavnika. Kurnik u [5] navodi pitanja koja mogu poslužiti u svrhu usmjeravanja učeničkog mišljenja i pojačavanja pozornosti na dokaz poučka poput; „Je li sve jasno u formulaciji poučka? Što je pretpostavka u poučku? Od koliko se dijelova sastoji uvjet pretpostavke? Možete li raščlaniti uvjet na dijelove? Što treba dokazati? Što je tvrdnja poučka? Kako glasi suprotna tvrdnja? Koje bi činjenice mogle pomoći pri dokazivanju poučka? Možete li naći vezu između ovog poučka i nekog ranije dokazanog poučka? Jeste li iskoristili sve dijelove uvjeta iz pretpostavke? Jesmo li način dokazivanja već koristili kod nekog drugog poučka? Jesmo li dokazivali srodan teorem? Možete li dokazati teorem na drugi način? Kako glasi obrnuta tvrdnja? Vrijedi li obrnuta tvrdnja?“.

U daljnjem tijeku obrazlaganja, pratiti ćemo rad [22] u kojem autori pobliže prikazuju nastavnicima matematike učeničko gledište o potrebi dokazivanja te koje situacije i zadaci potiču tu potrebu kod učenika. Usredotočili su se na središnje uloge dokaza unutar matematike; potvrđivanje, objašnjenje, otkriće, sistematizacija rezultata, ugradnja u okvire i prenošenje matematičkog znanja. Dokaz primarno pokazuje da je matematička tvrdnja istinita, tj. da slijedi iz određenih aksioma. A ipak, matematičari gledaju dalje od svrhe utvrđivanja istine da bi uvidjeli zašto neka tvrdnja vrijedi. Kroz proces dokazivanja, matematičari mogu ostvariti i nove rezultate. Dokazi prenose matematičko znanje i sistematiziraju dosadašnje znanje te u konačnici, autor zaključuje da su dokazi od osnovne važnosti u matematici zbog toga što utjelovljuju alat, metodu i strategiju rješavanja problema.

Iz prethodnog paragrafa slijedi da je prvi od razloga poučavanja dokaza u školama podržati učenikovo razumijevanje dokaza kao što se i prakticira u matematici, gdje istinitost matematičke tvrdnje slijedi kroz valjano deduktivno zaključivanje iz utvrđenog dokaza. Pritom, dokaz je deduktivna demonstracija koja prisiljava na slaganje svih koji razumiju uključeni koncept. Stoga, matematički kurikuli zemalja diljem svijeta imaju zajednički cilj obučiti učenike za deduktivno razmišljanje i logičko zaključivanje. Nastavnici matematike igraju ulogu posrednika s članstvom i u matematičkoj i u razrednoj zajednici, te predstavljaju most između njih. Bilo u srednjim ili osnovnim školama, nastavnici imaju aktivnu ulogu u prosuđivanju i poučavanju onoga što smatramo dokazom.
Još jedna uloga dokaza u matematici je objašnjenje zašto je matematička izjava istinita uz određene pretpostavke. Mnogi matematičari provode, tj. pokušavaju provesti dokaz jer su osobno uvjereni u istinitost ili valjanost matematičke tvrdnje, istraživši ga empirijski i kroz njegovu strukturu. Dokazi komuniciraju matematičko znanje i njegovo mjesto unutar organizirane strukture. Stoga je još jedna potreba za poučavanjem dokaza „rasvijetliti" podrijetlo i veze matematičkog znanja.
Autori rada navode da kada bi jedina svrha dokaza bila utvrditi valjanost ne bi bilo potrebe dokazivati na razne načine. Višestruke perspektive koje pružaju višestruki dokazi, zajedno s oslanjanjem na primjere pružaju mrežu veza i dublje razumijevanje matematičkih koncepata. Matematičari također generiraju više dokaza teorema „da bi dokazali snagu različitih metodologija" ili da otkriju nove tehnike.
Dakle, drugi razlog za poučavanje dokaza je potencijal podučavanja metoda rješavanja problema. Primjerice, neki autori tvrde su da bi nastavnici matematike mogli iskoristiti dokaze uobičajene u srednjoškolskom kurikulumu kako bi eksplicitno predstavili strategije, metode i alate. Sugeriraju, primjerice, izvođenje kvadratne formule koja učenike upoznaje sa strategijom nadopunjavanja do potpunog kvadrata. Također tvrde da učenici na taj način mogu naučiti tehniku čija se primjenjivost proteže izvan ove situacije, kao i naučiti svoditi jednadžbu na kanonski oblik.
Najčešće je srednjoškolska geometrija ta gdje se učenici prvo susretnu s dokazima. Geometrija je dio srednjoškolske matematike koje je najočiglednije podložna intelektualnoj potrebi rigorozne matematičke strukture. Ovo bi se moglo poboljšati programom koji započinje s „neutralnom geometrijom", odnosno geometrijom bez Euklidovog 5. postulata.
Učenička iskustva s dokazima i dokazivanjem razlikuju se od iskustva matematičara jer se njihove svrhe razlikuju; učenici u školama nisu uključeni u aktivnost dokazivanja da bi otkrili nove matematičke rezultate. Razlog za poučavanje dokaza i dokazivanja u školama proizlazi iz očekivanja da učenici imaju iskustva u zaključivanju slična onima matematičara: učenje skupa matematičkog znanja i stjecanje uvida u to zašto su tvrdnje istinite. Međutim, dokazi s kojima se učenici u školama susreću su često predstavljeni u potpunosti da bi učenike naučili proces logičkog razmišljanja i komunikacije te možda bez izravnog

navođenja, npr. rješavanjem problema primjerom. Iz perspektive učenika, dokazivanje kao vježba u procesu potvrđivanja tvrdnji i učenja teorema nema nikakvu intelektualnu svrhu jer na taj način učenici nisu potpuno uključeni u pokušaj pronalaska rješenja matematičkog problema što bi oni cijenili.
Povijesno, dokaz je retorički uređaj za uvjeravanje nekoga da je matematička tvrdnja istinita. Da bi bio uvjerljiv, dokaz mora biti u skladu s normama zajednice kojoj se prezentira. Standardi koje dokaz mora zadovoljiti proizlaze iz dogovora među članovima zajednice. Pregledom povijesti razvoja dokaza jasno daje do znanja da su pravila i forme evoluirale s vremenom te da variraju od kulture do kulture.
Autori izdvajaju dva gledišta, ono učeničko i ono nastavničko, koje ćemo sagledati u sljedećim potpoglavljima.

2.1 Potreba za dokazima i dokazivanjem: učenička perspektiva

Autori u člancima [17] i [22] navode da učenicima može nedostajati razumijevanje funkcija dokaza u matematici. U istraživanjima u Japanu, prevedenima među učenicima nižih razreda srednjih škola u kojima se većina pokazala dobra u provođenju dokaza, više od 60% učenika nisu shvaćali koja je svrha dokaza u nastavi te čemu oni služe. Healy i Holyes su 2000. godine proučavali približno 2 500 četrnaestogodišnjih i petnaestogodišnjih britanskih učenika, među kojima više od četvrtina njih nije moglo izreći svrhu ili značenje dokaza. Oko polovice učenika ukazalo je na provjeru kao svrhu dokaza: otprilike trećina njih navela je kao funkciju dokaza objašnjenje i komunikaciju. U naknadnim intervjuima činilo se da je mnogo više učenika imalo mišljenje o dokazu kao objašnjenju.
Dvadeset godina ranije, Williams otkrio je da od 255 učenika viših razreda kanadskih srednjih škola u nasumično odabranih deset razreda iz devet različitih srednjih škola, njih oko polovica nisu izrazili potrebu dokazivati izjavu koju smatraju očitom. Manje od 30% pokazalo je shvaćanje značenja dokaza.
Coeova i Ruthvenova istraživanja iz 1994. godine ilustrirala su kako učenici mogu teoretski razumjeti funkciju dokaza, a da ne koriste dokaz u svojoj matematičkoj praksi. Istraživanje je provedeno s grupom studenata matematike napredne razine pred kraj njihove prve godine studiranja, koji su slijedili reformirani srednjoškolski kurikulum. Autori su pregledali 60 radova studenata i analizirali korištene vrste dokaza. Sedmero od njih su intervjuirali. Studenti su bili svjesni toga da je za matematičko znanje potreban dokaz, ali samo su oni najbolji studenti rekli da ih je dokaz uvjerio u istinitost matematičkih tvrdnji.
Često, vanjski zahtjevi utječu na potrebu za dokazivanjem. Neki učenici provode dokaze jer njihovi nastavnici to zahtijevaju, ne jer prepoznaju da je dokaz neophodan u njihovoj vježbi. Zbog toga, možda neće razumjeti razloge za istinitost izjave; uvjereni su da je iz-

java istinita jer njihov učitelj to tvrdi.
U klasifikaciji shema dokaza ovaj autoritarni koncept dokaza pripada među „vanjsko uvjerenje“ sheme dokaza.
Balacheff tvrdi da razlog iz kojeg učenici ne sudjeluju u dokazivanju nije da ne mogu provesti dokaz, nego da ne vide svrhu niti potrebu za njim. Ako učenici ne razumiju ulogu dokaza i prikazuju sheme dokazivanja vanjskih uvjerenja, postavlja se pitanje: postoji li samo vanjska potreba za dokazivanjem ili možemo pronaći i neku unutarnju potrebu koja bi mogla potaknuti učenike na dokazivanje?
Da bi odgovorili na ovo pitanje, Harel i Sowder ispituju pet kategorija intelektualne potrebe: potrebu za sigurnosti odnosno uvjerenjem, uzročnosti, računanjem, komunikacijom i za strukturom. Te su potrebe povezane i odnose se na funkcije dokaza koje se prakticiraju u matematici, kao i na sheme dokaza. Prve dvije potrebe, za uvjerenjem i uzročnosti, posebno su istaknute u istraživanju učenja i poučavanja dokaza.

2.1.1 Potreba za uvjerenjem

Prva potreba za uvjerenjem je ljudska želja za provjerom tvrdnje. Iako je provjera jedna od središnjih uloga dokaza, učenici ne vide potrebu za matematičkim dokazom, jer je njihova potreba za sigurnošću osobna, u smislu da zahtijevaju „osobno“, a ne „matematičko“ uvjeravanje. Zapažanja temeljena na učeničkim dokazima proizvela su neke neizravne dokaze u tom smislu.
Primjerice, Fischbein i Kedem su 1982. godine proučavali 400 učenika srednjih škola kojima je bio predstavljen matematički teorem i njegov potpuni formalni dokaz. Većina učenika potvrdila je da je sigurna da je dokaz potpun i neosporan, ali su istovremeno tvrdili da će analiza primjera ojačati njihovo samopouzdanje. U neku ruku to nije začuđujuće, poznavajući povijest dokaza prije starih Grka. Osim toga, ova praksa traženja primjera i kontraprimjera nakon čitanja dokaza jedno je od sredstava koje matematičari koriste. Kako je Fishbein 1982. godine spomenuo, uloga intuitivnih struktura ne prestaje kada formalni oblici mišljenja postanu mogući.
Međutim, kada izjavljuju da bi se ispitivanjem daljnjih primjera moglo pronaći kontradiktorne dokaze dokazane tvrdnje, učenici pokazuju da ne razumiju značenje „matematičkog dokaza“.
Uz konceptualne logičke sheme, učenicima je potreban osjećaj slaganja, temelj uvjerenja izražen u toj potrebi za provjerom daljnjim primjerima. U Fischbeinovoj i Kedemovoj studiji iz 1982. godine, učenicima je uz formalni dokaz bila potrebna provjera primjerima.
Primjerice, Thompson je 1991. godine proučavao napredne studente u kolegiju koji je naglašavao obrazloženje i dokaze: ipak je velik broj studenata „dokazao“ tvrdnju navodeći konkretan primjer. Ovo ponašanje otkriva induktivnu shemu dokaza, jednu vrstu empirijske sheme dokaza. Nekoliko studija promatralo je kako učenici usvajaju takve sheme em-

pirijskih dokaza. Zapravo, mnogi učenici, uključujući napredne srednjoškolce ili učenike s visokim uspjehom i sveučilišne studente, uključujući matematičke smjerove, smatraju empirijske argumente dokazom matematičkih generalizacija. Iako nije univerzalna, ova sveprisutna zabluda sprječava učenike da percipiraju intelektualnu potrebu za dokazom kao matematičkom konstrukcijom.
Osim toga, učenik koji ima ovu miskoncepciju, čak i ako vidi razlog za razvoj dokaza, vjerojatno će proizvesti empirijski argument za matematičku generalizaciju. Takvi učenici ne prepoznaju važnost izrade općenitijeg argumenta koji zadovoljava standard dokaza (za matematičara). Njima empirijski argumenti ne predstavljaju razlog da se trude (naučiti kako) konstruirati opće argumente (posebno dokaze). Konstruiranje općih argumenata neusporedivo je složenije od konstruiranja empirijskih argumenata. Opći argumenti imaju za cilj prikladno pokriti cjelokupno područje generalizacije (koja može imati beskonačnu kardinalnost), dok se empirijski argumenti mogu zadovoljiti ispitivanjem samo podskupa te domene. Oni mogu provjeriti taj podskup, ali generalizacija ostaje neprovjerena i stoga neizvjesna, iako učenik to možda neće prepoznati.

2.1.2 Potreba za uzročnosti

Kao i za uvjerenjem, ljudi imaju želju otkriti uzrok nekog fenomena – objasniti zašto je tvrdnja istinita. Uzročnost se povezuje uz objašnjavajuću funkciju dokaza. U biti nastavnicima je relativno lako pobuditi zanimanje učenika da propitaju istinitost tvrdnje.
Također, opisuje se potreba za uzročnosti u svom istraživanju nastavnika i pojedinog učeničkog procesa matematičkog opravdanja tijekom istraživanja bifurkacijskih točaka u dinamičkim sustavima. Učenička potreba za postavljanjem uzročnosti proizlazi iz opravdavanja rezultata dobivenih numerički pomoću interakcije s računalom. Učenik je bio siguran u ove rezultate, budući da se slažu s prethodnim empirijskim rezultatima. Stoga, učenik nije bio zainteresiran niti za provjeru niti za formalni dokaz, ali je osjećao potrebu za objašnjenjem kako bi stekao bolji uvid u veze podataka.
Ova potreba za uvidom u „zašto“ može varirati od osobe do osobe i od konteksta do konteksta. U Harelovim i Sowderovim terminima, ovo odgovara shemi dokaza uzročnosti. Spomenuti autori navode da subjektivnost dokazivanja dovodi do proučavanja određenih temeljnih aspekata dokaza koji zauzvrat vode do koncepta sheme dokaza, a oni su sljedeći: nagađanja naspram činjenice, dokazivanje, utvrđivanje naspram uvjeravanja.
Nagađanje je tvrdnja koju je formulirala osoba ili zajednica i koja nije automatski istinita. Dakle, može implicirati da osoba koja nagađa možda neće biti sigurna u istinitost nagađanja. Ako osoba vjeruje u istinitost izrečene pretpostavke, tada pretpostavka postaje, sa stajališta osobe, činjenica. Dokazivanje je proces koji otklanja ili samo učvršćuje sumnju u tvrdnju koju je izrazila osoba ili zajednica. Utvrđivanje i uvjeravanje su procesi dokazivanja. Utvrđivanje uklanja sumnje osobe ili zajednice ili ih konsolidira u vezi s

tvrdnjom. Na neki način ima veze s introvertnim postupcima osobe ili zajednice. Uvjeravanje je ekstrovertna radnja koju poduzima osoba ili zajednica da uvjeri druge u valjanost ili nevaljanost tvrdnje. Stoga se shema dokaza koristi umjesto pojma dokaz kako bi se stavio naglasak na subjektivnost dokaza gledano povijesno ili kroz oči pojedinca. Napomenimo ovdje da prihvaćanje ovakvog načina razmišljanja o dokazu ne znači da dokaz nikada nije "objektivan". Moderni aksiomatski sustav je objektivni deduktivni sustav za dokazivanje matematičkih tvrdnji i ishod je učenja matematičkog obrazovanja. Potreba za uvidom u „zašto " može se pojaviti u trenutku kontradikcije, popraćeno iznenađenjem ili neizvjesnošću, što navodi učenike da traže objašnjenje.
Učenici mogu tražiti uzročnost nakon što ih eksperimentalno istraživanje uvjeri i potaknuti su objasniti zašto.
Može se pojaviti u međusobnoj igri tvrdnji i provjera izvjesnosti i neizvjesnosti, na primjer, kada studenti osjete potrebu da pronađu uzrok neistinitosti svoje tvrdnje.

2.1.3 Potrebe za računanjem, komunikacijom i strukturom

Potreba za računanjem i komunikacijom su međusobno povezane i često istodobne.
Upućuje se na potrebu za računanjem kao sklonost ljudi da kvantificiraju, odrede ili konstruiraju objekt, ili da odrede svojstvo objekta ili odnosa među objektima (primjerice broja, geometrijskog lika, funkcije) pomoću simboličke algebre. Ta potreba je bila značajna u razvoju matematike, a posebno dokazivanja. Računanje pomoću simboličke algebre omogućilo je pomak fokusa s atributa prostornih figura na istraživanja iz devetnaestog stoljeća o temeljnim operacijama, algebarskim reprezentacijama i njihovim strukturama. Potreba za komunikacijom odnosi se i na formuliranje i na formaliziranje, ukorijenjeno u postupcima prenošenja i razmjene ideja. Učenike se intuitivnim objašnjenjem „zašto" može potaknuti da budu sustavni u izražavanju svog razmišljanja i modificiraju svoju potrebu notacije kako bi bolje izrazili ono što imaju na umu. Ova potreba također se povezuje s ulogom dokaza u komunikacijskoj metodologiji i tehnikama za rješavanje problema.
Potreba za strukturom odnosi se na potrebu (re)organizacije informacija u logičku strukturu. Harel još 2012. godine razlikuje stariju fazu, u kojoj netko organizira vlastito znanje asimilirajući ga u svoju postojeću kognitivnu strukturu koja možda nije logički hijerarhijska, i kasniju fazu u kojoj se može pojaviti potreba za reorganizacijom strukture u logičku strukturu. Povijesno, potreba za strukturiranjem euklidske geometrije u Euklidovim „*Elementima*" proizašla je iz potrebe da se organizira i prenese nagomilano znanje. Nadalje, potreba za usavršavanjem ove strukture dovela je do pokušaja dokazivanja postulata o paralelama. Potreba za strukturom može dovesti od nepovezanih ideja do ujedinjujućih načela ili koncepata.
Dokaz u nastavi ponekad se percipira kao vježba u opravdavanju onoga što je očito, a ne kao sredstvo za upoznavanje. Kada je dokaz alat za poznavanje i komuniciranje metodolo-

gija, komunikacija je povezana s potrebom za izračunavanjem i strukturiranjem.

2.2 Olakšavanje potrebe za dokazivanjem: perspektiva učitelja

Prema Harelu: „učenici se osjećaju intelektualno besciljno na kolegijima matematike, jer im mi [nastavnici] obično ne uspijevamo dati jasnu intelektualnu svrhu“. Učenici se često upoznaju s matematičkim pojmovima, a da im se ne pomogne da uvide potrebu za učenjem onoga što ih namjeravamo podučiti. Kao rezultat toga, učenici imaju malo smisla za matematičke koncepte općenito i, posebno, za konstrukciju dokaza.
Kako smo ranije diskutirali, učenici (a) često ne vide pravi razlog za razvijanje dokaza u kontekstu određenih aktivnosti koje zahtijevaju dokaz (sa matematičkog stajališta) ili (b) imaju neke duboko ukorijenjene zablude o tome što znači potkrijepiti matematičke tvrdnje (primjerice generalizacija). Prvi odražava nedostatak uvažavanja potrebe za dokazom na lokalnoj razini, dok drugi odražava nedostatak uvažavanja šire potrebe za dokazom kao matematičkom konstrukcijom. Ova dva problema očito su međusobno povezana, iako se čini da je drugi sveobuhvatniji: učenik koji ne shvaća što se u matematici smatra dokazom vjerojatno neće vidjeti razlog za razvoj dokaza (kao što bi matematičar razumio) u kontekstu određenih aktivnosti.
Nastavnici se stoga suočavaju s izazovima kako olakšati razvoj intelektualne potrebe za dokazom među učenicima – kako u kontekstu pojedinih aktivnosti tako i šire, potrebe za dokazom kao matematičkom konstrukcijom. Harel je, raspravljajući o tome kako bi podučavanje moglo pomoći učenicima da spoznaju intelektualnu potrebu za učenjem onoga što ih učitelji namjeravaju podučiti, istaknuo:
„Intelektualna potreba“ je izraz prirodnog ljudskog ponašanja: kada naiđemo na situaciju koja je nespojiva s problemom ili predstavlja problem koji je nerješiv našim postojećim znanjem, vjerojatno ćemo tražiti rješenje i kao rezultat toga konstruirati novo znanje. Takvo je znanje značajno za osobu koja ga konstruira, jer je proizvod osobne potrebe i povezuje se s prethodnim iskustvom.
Ovdje Harel u biti postavlja temelje za tri glavne strategije usmjeravanja za pristupe podučavanju koje mogu dovesti do potrebe za dokazima kod učenika:
• izazivanje nesigurnosti i kognitivnog sukoba
• olakšavanje učenja temeljenog na upitima
• prenošenje kulture matematike.

2.2.1 Neizvjesnost i kognitivni sukobi

Uvođenje *neizvjesnosti* i *kognitivnog sukoba* može poslužiti za motiviranje ljudi da promijene ili prošire svoje postojeće načine razmišljanja o određenom konceptu ili da nauče nešto o njemu. Izrazi „kognitivni sukob“ i „neizvjesnost“ovdje imaju preklapajuća, ali različita značenja i koristimo ih naizmjenično. U ova dva pojma također uključujemo niz drugih srodnih pojmova za literaturu o matematičkom obrazovanju, kao što su kontradikcija, zbunjenost i iznenađenje. Zaslavsky je 2005. godine pružio detaljnu raspravu o korijenima pojma kognitivnog sukoba u Deweyevom konceptu refleksivnog mišljenja i njegovim odnosima s psihološkim teorijama kao što su Piagetova teorija ekvilibracije, Festingerova teorija kognitivne disonance i Berlyneova teorija konceptualnog sukoba. Neke novije istraživačke studije o podučavanju i učenju dokazivanja preispitale su ulogu kognitivnog sukoba kao pokretačke snage za stvaranje potrebe za dokazom među učenicima. Ove studije potkrijepile su i dale primjere tvrdnji da, kroz odgovarajuće didaktičko inženjerstvo, kognitivni sukob *može* kod učenika stvoriti potrebu za dokazom. Međutim, različite studije razvijaju ovu tvrdnju na različite načine. Od tri ilustrativne studije koje predstavljamo, dvije su se prvenstveno bavile stvaranjem potrebe za dokazom u kontekstu pojedinih aktivnosti, dok se treća fokusirala na stvaranje potrebe za dokazom kao matematičkom konstrukcijom izvan konteksta pojedinih aktivnosti.
Hadas je u svom istraživanju 2000. godine osmislio dvije aktivnosti, u kontekstu okruženja dinamičke geometrije, s namjerom da dovede učenike do kontradikcije između pretpostavki i zaključaka, motivirajući time potrebu za dokazom. Prema istraživačima te dvije aktivnosti predstavljaju primjer projekta u kojem učenje u okružju dinamičke geometrije otvara mogućnosti za osjećaj potrebe za dokazivanjem umjesto da se dokazivanje smatra suvišnim. U drugoj aktivnosti učenici su ostali nesigurni u ispravnost rezultata koji su dobili primjenom dinamičke geometrije. Kao rezultat te nesigurnosti, do koje nije došlo u prvoj aktivnosti, učenici su se kretali između dvije alternativne hipoteze i oslanjali se na deduktivna razmatranja (između ostalog). Posljedično, objasnio je Hadas, druga je aktivnost izazvala mnogo veći udio deduktivnih argumenata među učenicima (56%) nego prva aktivnost (18%).
Zaslavsky je 2005. godine opisao situaciju u učionici koja spontano izaziva kognitivni sukob kroz konkurentske tvrdnje koje su dva učenika izrazila. Jedan je učenik dokazao određenu tvrdnju, a drugi se dosjetio (navodnog) protuprimjera. Dokaz kojeg je prezentirao prvi učenik nije imao moć objašnjenja; dakle, nije pomogao u rješavanju kontradikcije. Zaslavsky je ispričao kako je nastavnik potaknuo učenike da postignu dogovor u rješenju. Ovaj proces prirodno je doveo do utvrđivanja potrebe da se dokaže ne samo kao sredstvo za rješavanje nesigurnosti, već i kao sredstvo za utvrđivanje uzroka pojave. U iterativnom procesu, Zaslavsky je dalje analizirao ovo iskustvo učenja i razvio zadatak kako bi olakšao potrebu za dokazom. Ova vrsta iterativnog procesa, koju izvodi refleksivni nastavnik, mogla bi dovesti do mnogih drugih sličnih zadataka.

Stylianides i Stylianides raspravljali su o teoretskim osnovama i provedbi nastavne intervencije koju su razvili u četverogodišnjem eksperimentu dizajna na preddiplomskom sveučilišnom studiju. Intervencija se uvelike oslanja na dva namjerno projektirana kognitivna sukoba koji su motivirali postupno napredovanje znanja učenika o dokazu. Nastavnik je imao ključnu ulogu u pomaganju učenicima u rješavanju nastalih kognitivnih sukoba i razvijanju razumijevanja da je bolje približeno konvencionalnom znanju. Osim toga, nastavnik je omogućio društvene interakcije koje su učenicima omogućile da uče jedni od drugih. Proces je kulminirao time što su učenici prepoznali empirijske argumente (bilo koje vrste) kao nesigurne validacije matematičkih generalizacija i razvili intelektualnu potrebu za učenjem o sigurnim validacijama. Stoga je intervencija izazvala intelektualnu znatiželju o pitanjima validacije koja je nadišla kontekst njezinih aktivnosti: drugim riječima, potrebu za dokazom.

2.2.2 Učenje temeljeno na upitu

Nedavni pozivi na poboljšano matematičko obrazovanje preporučuju uključivanje istraživačkih pristupa i rješavanja problema uz vrednovanje vlastitog matematičkog zaključivanja učenika. Takvo otvoreno okružje za učenje uključuje učenike u kontinuirani proces istraživanja, nagađanja, objašnjavanja, potvrđivanja i pobijanja pretpostavki. De Villiers opširno je raspravljao i pokazao vrijednost eksperimentalnog pristupa učenju matematike i dokaza. Ovakvim pristupom pruža se prilika uvidjeti svrhu pouzdanosti dokaza, a istodobno se bavi uzročnosti, komunikacijom i strukturom.

Bunchbinder i Zaslavsky osmislili su generički zadatak pod naslovom „Je li ovo slučajnost?“ što učenike navodi na istraživanje prirode općenitosti. Svaki određeni zadatak predstavlja hipotetičko učenikovo zapažanje o jednom geometrijskom primjeru. Pita je li promatrani ishod slučajan ili ne; odnosno vrijedi li za svaki relevantan slučaj ili samo slučajno za neke specifične slučajeve. Zadatak implicitno potiče ili dokazivanje da je opisni geometrijski fenomen opći ili konstruiranje protuprimjera koji pokazuje da nije. Zadatak ne sadrži izričit zahtjev za dokazivanjem bilo koje tvrdnje.

Buchbincer i Zaslavsky podijelili su sudionike u dvije grupe; šest parova srednjoškolaca i šest iskusnih nastavnika matematike. Za obje skupine, zadatak je stvorio potrebu za dokazivanjem i uvjeravanjem, bilo zbog osjećaja nesigurnosti u vezi s matematičkim fenomenom o kojem je riječ ili zbog pretjeranog povjerenja u lažnu pretpostavku. Kasnije, želja da se nešto dokaže i nekoga uvjeri rezultirala je pogrešnim argumentima i zaključcima. Dakle, olakšavanju potrebe za dokazivanjem treba pristupati pažljivo.

2.2.3 Nastavnik kao nositelj kulture matematike

Hanna i Jahnke naglasili su ograničenja koja nastaju kada učitelji preuzmu potpuno pasivne uloge u podučavanju dokazivanja.
Pasivna uloga nastavnika znači da je učenicima onemogućen pristup dostupnim metodama dokazivanja. Čini se nerealnim očekivati da učenici ponovno otkriju sofisticirane matematičke metode ili čak prihvaćene načine argumentacije.
Slično, čini se nerealnim očekivati da učenici osjete potrebu za dokazivanjem bez da nastavnici poduzmu određenu radnju da izazovu tu potrebu bilo stvaranjem nesigurnosti i kognitivnih sukoba, ili korištenjem aktivnosti učenja temeljenog na ispitivanju.
Postupci nastavnika imaju krajnji cilj potaknuti učenike da istražuju i primjenjuju konvencionalno matematičko znanje. U ovom slučaju, nastavnik služi kao nositelj kulture matematike u razredu. Učitelj pomaže učenicima u rješavanju novih problema modificirajući njihova postojeća shvaćanja o dokazu kako bi se bolje približili matematičkim konvencijama. Ovakav pristup nastavi postavlja visoke zahtjeve u provedbi i primjeni nastavnikovih matematičkih znanja.

Poglavlje 3

Kombinatorni dokazi u srednjoj školi

U zadnjem poglavlju ovog rada navesti ćemo osnovne vrste dokaza, zatim definirati kombinatorne dokaze i predstaviti neke od kombinatornih metoda dokazivanja. Naposlijetku ćemo predstaviti kombinatorne dokaze koji se mogu primjenjivati u pojedinim razredima srednje škole. Većina tih definicija, primjera i zadataka nalazi se u svim srednjoškolskim udžbenicima.

3.1 Kombinatorni dokazi

Prije nego otvorimo posljednje poglavlje ovoga rada, navedimo neke osnovne tipove dokaza koji se u školskoj matematici javljaju.
U literaturi [2] i [12] autori navode dvije osnovne vrste dokaza teorema oblika $P \Rightarrow Q$: direktni dokaz i indirektni dokaz.
Napraviti direktan dokaz tvrdnje $P \Rightarrow Q$ znači, uz pretpostavku da si istinite tvrdnja P i aksiomi teorije, logičkim zaključuvanjem pronaći tvrdnje $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ takve da vrijedi

$$(P \Rightarrow Q_1) \wedge (Q_1 \Rightarrow Q_2) \wedge ... \wedge Q_n \Rightarrow Q.$$

Tada, zbog toga što vrijedi $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \equiv (A \Rightarrow C)$, vrijedi $P \Rightarrow Q$.
Kod indirektnog dokaza razlikujemo dvije metode; dokaz obratom po kontrapoziciji te dokaz svođenjem na kontradikciju. Napraviti dokaz obratom po kontrapoziciji znači dokazati da vrijedi $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Ovaj je sud je semantički jednak sudu $P \Rightarrow Q$, pa smo, dokazavši $\neg Q \Rightarrow \neg P$ ujedno dokazali i $P \Rightarrow Q$. S druge strane, napraviti dokaz svođenjem na kontradikciju znači dokazati da vrijedi $P \wedge \neg Q \Rightarrow L$, pri čemu je neka očito lažna tvrdnja. Naime, ako je $P \wedge \neg Q$ laž, onda je $\neg(P \wedge \neg Q) \equiv P \Rightarrow Q$ istina.

Naravno, spomenuti dokazi nisu jedina vrsta dokaza koja se u matematici primjenjuju, ali su najčešći. Spomenimo još neke vrste dokaza. Jedna također poznata metoda dokazivanja je metoda matematičke indukcije koja kaže da ako tvrdnja vrijedi za broj 1, i ako iz pretpostavke da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj n slijedi da tvrdnja vrijedi i za $n + 1$ onda vrijedi za svaki prirodan broj. Nadalje, spomenimo i konstruktivni dokaz, vizualni dokaz, statistički dokaz, dokaz metodom ekshaustije (ili iscrpljivanja), vjerojatnosni dokaz te kombinatorni dokaz.

Kombinatorika je grana matematike koja se bavi konačnim skupovima i metodama prebrojavanja. Kako je navedeno u knjizi [20], dokaz koji pokazuje da neki skup S ima točno m elemenata na način da konstruiramo bijekciju između S i nekog drugog skupa M za koji se zna da ima m elemenata je primjer kombinatornog ili bijektivnog dokaza. Upotrijebimo oznaku $|S|$ za kardinalnost (broj elemenata) konačnog skupa S. Tada možemo reći da kombinatorni dokaz nekog identiteta dobijemo kada taj identitet zapišemo sa $|X| = |Y|$ pa konstruiramo bijekciju između skupova X i Y.

Neke od kombinatornih metoda dokazivanja korištene u nastavi su osnovni principi prebrojavanja, metoda uključivanja i isključivanja te Dirichletova metoda. Osnovni principi prebrojavanja dijele se na princip uzastopnog prebrojavanja, podjele na slučajeve, princip komplementa, princip kvocijenta i princip bijekcije.

Prisjetimo se principa uzastopnog prebrojavanja koji još zovemo i principom umnoška. Skup svih uređenih parova (a, b) gdje je prvi član a iz skupa A, a drugi član b iz skupa B zovemo Kartezijev umnožak skupova A i B i pišemo:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}.$$

Ako su A i B konačni skupovi, onda je i njihov Kartezijev umnožak konačan skup te vrijedi

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Općenito, ako su $A_1, A_2, ..., A_n, n \in \mathbb{N}$ konačni skupovi onda je njihov Kartezijev umnožak $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$ konačan skup te vrijedi:

$$|A_1 \times A_2 \times ... \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot ... \cdot |A_n|.$$

Teorem o uzastopnom prebrojavanju glasi: Ako element a_1 iz skupa A_1 možemo odabrati na k_1 načina, element a_2 iz skupa A_2 na k_2 načina, ... , element a_n iz skupa A_n na k_n načina, onda je ukupan broj odabira svih elemenata jednak $k_1 \cdot k_2 \cdot ... \cdot k_n$.

Sljedeći princip prebrojavanja je podjela na disjunktne slučajeve ili princip zbroja.
Ako su A i B konačni i disjunktni skupovi, onda je i njihova unija konačan skup te vrijedi

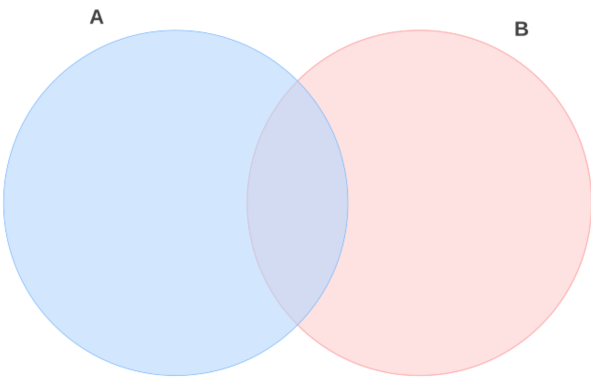
$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Općenito, ako su $A_1, A_2, ..., A_n, n \in \mathbb{N}$ konačni skupovi od kojih su svaka dva međusobno disjunktna, onda je njihova unija konačan skup te vrijedi

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_n|.$$

Općenito, broj elemenata u uniji skupova nije jednak zbroju broja elemenata u svakom skupu. Ako su A i B konačni skupovi, onda je broj elemenata njihove unije jednak

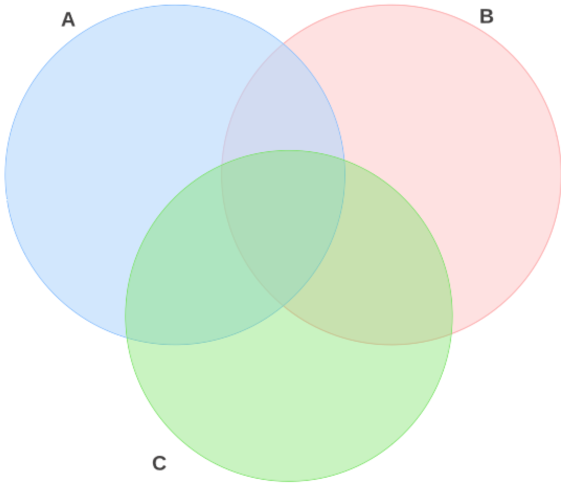
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$



Slika 3.1: Vennov dijagram za uniju dva skupa

Ako su A, B i C konačni skupovi, onda je broj elemenata njihove unije jednak

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$



Slika 3.2: Vennov dijagram za uniju tri skupa

Navedena pravila ustvari su poznata formula uključivanja i isključivanja. U općem obliku ona glasi:

Neka su $A_1, A_2, ..., A_n, n \in \mathbb{N}$ konačni skupovi. Tada vrijedi

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_n \leq n} |A_{i_1} \cap ... \cap A_{i_k}|.$$

Nadalje, imamo princip razlike ili komplementa.
Neka je A podskup od X, a $X \backslash A = \overline{A}$ komplement skupa A unutar skupa X (podskup od X koji se sastoji od svih elemenata koji nisu u A). Tada je

$$|\bar{A}| = |X| - |A|.$$

Princip kvocijenta kaže sljedeće. Neka su $A_1, A_2, ..., A_n, n \in \mathbb{N}$ u parovima disjunktni neprazni skupovi takvi da je $A = A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$. Ako su svi skupovi jednakobrojni, tj. $|A_1| = |A_2| = ... = |A_n| = k$, onda je broj tih skupova jednak

$$n = \frac{|A|}{k}.$$

Posljednji princip prebrojavanja je princip bijekcije koji kaže da dva skupa A i B imaju jednak broj elemenata ako i samo ako postoji bijekcija između njih.

Naposljetku, izrecimo i slabiju formu Dirichletova principa također poznatog pod nazivom princip kutija ili princip golubinjaka [6].

Teorem 3.1.1. *Neka je n prirodan broj. Ako* $n + 1$ *predmeta bilo kako rasporedimo u n kutija (pretinaca), tada bar jedna kutija sadrži bar dva predmeta.*

Precizna granica između kombinatornih i nekombinatornih dokaza prilično je maglovita, a određeni argumenti koji će se neiskusnom pojedincu činiti kao nekombinatorni, kod iskusnijih biti će prepoznati kao kombinatorni, prvenstveno zato što je svjestan određenih tehnika za „pretvaranje" naizgled nekombinatornih argumenata u kombinatorne.
Iako su kombinatorni dokazi često naizgled kompliciraniji od onih nekombinatornih, zanimljivi su i vrijedni pažnje. Kako navode Benjaminn i Quinn u predgovoru svog djela [1], svi ljudi na svijetu znaju brojati, i to od malih nogu. Brojanje je nešto čovjeku urođeno i ne treba biti vrsni matematičar da bi se kombinatorne dokaze moglo primijeniti.

U nastavku rada predstaviti ću kombinatorne dokaze koji se mogu primjenjivati na nastavi u određenom razredu srednje škole s 3 ili 4 sata matematike tjedno prateći kurikulum.

3.2 Primjeri kombinatornih dokaza u prvom razredu srednje škole

Sadržaj kojim se učenici bave u prvom razredu srednje škole je sljedeći: „Realni brojevi", „Potencije i algebarski izrazi", „Linearne jednadžbe i nejednadžbe", „Linearna funkcija", „Trokut", „Trigonometrijski omjeri", „Prikaz i analiza podataka" te „Vektori" ([13] i [14]). Većinom su zadaci koji se mogu riješiti kombinatorno zastupljeniji na matematičkim natjecanjima negoli u samoj nastavi. Bez obzira na to, u cjelini Realni brojevi, kada učenici ponavljaju gradivo obrađeno i savladano u osnovnoj školi, nastavnici mogu usmjeriti učenička znanja i pokazati im osnovne kombinatorne metode i tehnike rješavanja zadataka i problema.

3.2.1 Suma prvih n prirodnih brojeva

Jedan od prvih identiteta spomenutih u udžbeniku [13] je formula za sumu prvih n prirodnih brojeva, odnosno

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Stoga ćemo u ovom potpoglavlju, osim dokaza navedene formule, promatrati i razne primjere i zadatke vezane uz sumu prvih n prirodnih brojeva. Učenici do navedenog identiteta dolaze induktivno, kroz vođene primjere. Primjer iz udžbenika glasi:

Primjer 1.
a) Zbrojimo prvih šest prirodnih brojeva.
b) Zbrojimo prvih osam prirodnih brojeva.
c) Zbrojimo prvih 50 prirodnih brojeva.
d) Zbrojimo prvih n prirodnih brojeva tako da izvedemo zaključak iz prethodnih primjera.
e) Koliko prvih prirodnih brojeva moramo zbrojiti da bismo dobili 36?

Učenicima prva dva potprimjera neće biti zahtjevna za rješavanje budući da je vrlo lako ispisati tražene brojeve i zbrojiti ih. Kod trećeg potpitanja većina će se zapitati postoji li kraći način za dolazak do rješenja ili će opet morati ispisati sve pribrojnike i redom ih zbrajati. U ovom trenutku kod učenika dolazi do izazivanja nesigurnosti i kognitivnog sukoba, prve od tri glavne strategije usmjeravanja za pristupe podučavanju koje mogu dovesti do potrebe za dokazima kod učenika o kojima je Harel pisao. Dokaz naveden u udžbeniku nije jedini. U udžbeniku [13], učenike se navodi da do rješenja dođu primjenom komutativnosti i asocijativnosti zbrajanja na sljedeći način:

Rješenje.

a) $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = (1 + 6) + (2 + 5) + (3 + 4) = 7 + 7 + 7 = 3 \cdot 7 = 21.$

Uočimo: ako zbrojimo prvi i posljednji broj, dobijemo 7, isto kao i kad zbrojimo drugi i pretposljednji broj ili dva srednja broja. Imamo tri para takvih pribrojnika, što je polovina od broja 6.

Preostali potprimjeri rješavaju se analogno, a učenici u d) primjeru dolaze do sljedećeg zaključka:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = (1 + n) \cdot \frac{n}{2} = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}.$$

Drugi način na koji se ovaj identitet može dokazati je kombinatorno, primjenjujući kombinacije bez ponavljanja i s ponavljanjem.
Svaki k-člani podskup skupa $S = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ od n elemenata zovemo kombinacija k-tog razreda u n-članom skupu S. Ukupan broj ovih kombinacija k-tog razreda u n-članom skupu označavamo s C_n^k i on iznosi

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Svaku neuređenu k-torku iz skupa od n elemenata, gdje se odabrani elementi mogu ponavljati, zovemo kombinacija s ponavljanjem k-tog razreda u skupu od n elemenata. Broj svih kombinacija s ponavljanjem k-tog razreda u skupu od n elemenata označavamo $\bar{C}_n^k$ i računamo kao broj svih permutacija s ponavljanjem od $n-1+k$ elemenata, od čega je $n-1$ elemenata jedne vrste, a k elemenata druge vrste:

$$\bar{C}_n^k = \frac{(n-1+k)!}{(n-1)! \cdot k!} = \binom{n-1+k}{k}.$$

Kako navode autori u svom djelu [1], kod dokaza prebrojavanjem ključan je način tumačenja izraza $\frac{n(n+1)}{2}$ ili kao $\binom{n+1}{2}$, kombinacija bez ponavljanja, ili $\left(\binom{n}{2}\right)$, kombinacija s ponavljanjem. Napomenimo, kod nas se za kombinacije s ponavljanjem najčešće koristi oznaka $\bar{C}_n^k$, dok se u nekim drugim zemljama za isti pojam koristi oznaka $\left(\binom{n}{k}\right)$.

Identitet 1.

Za $n \geq 0$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \binom{n+1}{2}.$$

Pitanje: Na koliko načina možemo odabrati dva broja iz skupa $\{0, 1, \ldots, n\}$?

Prvi odgovor na pitanje je sama definicija $\binom{n+1}{2}$;

$$\sum_{k=1}^{n} k = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)!}{(n+1-2)!2!} = \frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!2!} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Odnosno, u skupu $\{0, 1, \ldots, n\}$ koji sadrži $n+1$ elemenata, prvi možemo odabrati na $n+1$ načina. Tada u skupu ostaje n elemenata od kojih drugi možemo odabrati na upravo toliko načina. Po načelu umnoška, različitih bi izbora bilo $(n+1)n$ načina. Ali, dva odabrana elementa mogli smo izvući i na način da smo prvo odabrali drugi, zatim prvi element. Uočimo da su mogućnosti samo dvije. Broj načina na koji smo odabrali dva različita elementa odgovara broju permutacija dva različita elementa, odnosno $2! = 2$. Sve različite poretke odabira ta dva elementa računamo samo jednom jer nam poredak odabira nije bitan. Tada je broj izvlačenja dvostruko manji, to jest $\binom{n+1}{2}$.

Drugi odgovor je broj načina na koji ćemo odabrati dva elementa u skupu od $n+1$ elemenata pri čemu redoslijed nije važan niti je dozvoljeno ponavljanje elemenata. Odaberimo dva elementa skupa $\{0, 1, \ldots, n\}$. Ako je veći od ta dva broja k, manji broj može biti bilo koji od k element skupa $\{0, 1, \ldots, k-1\}$.
Stoga je ukupan broj odabira

$$\sum_{k=1}^{n} k.$$

Identitet 2.

Za $n \geq 0$,

$$\sum_{k=1}^{n} k = \left(\!\!\binom{n}{2}\!\!\right).$$

Pitanje: Na koliko načina možemo odabrati dva elementa iz skupa $\{1, \ldots, n\}$ pri čemu redoslijed nije važan te je dozvoljeno ponavljanje elemenata?

Prije no odgovorimo na drugo pitanje, promotrimo $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$, broj načina odabira k objekata iz skupa od n elemenata, pri čemu (kako je navedeno) redoslijed nije važan, ali je ponavljanje dopušteno. U Tablici 3.1 prikazano je dvadeset tročlanih podskupova koji se mogu dobiti od skupa $\{1, 2, 3, 4\}$. Za usporedbu $\binom{n}{k}$ također broji na koliko načina se može odabrati k elemenata iz n-članog skupa, samo se elementi ne smiju ponavljati.

$\left(\!\binom{4}{3}\!\right) = 20$				$\binom{4}{3} = 4$
$\{1,1,1\}$	$\{1,2,3\}$	$\{2,2,2\}$	$\{2,4,4\}$	$\{1,2,3\}$
$\{1,1,2\}$	$\{1,2,4\}$	$\{2,2,3\}$	$\{3,3,3\}$	$\{1,2,4\}$
$\{1,1,3\}$	$\{1,3,3\}$	$\{2,2,4\}$	$\{3,3,4\}$	$\{1,3,4\}$
$\{1,1,4\}$	$\{1,3,4\}$	$\{2,3,3\}$	$\{3,4,4\}$	$\{2,3,4\}$
$\{1,2,2\}$	$\{1,4,4\}$	$\{2,3,4\}$	$\{4,4,4\}$	

Tablica 3.1: Usporedba broja kombinacija s ponavljanjem i bez ponavljanja

Identitet 3.

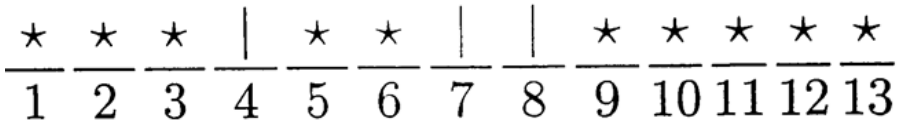
Za $k, n \geq 0$,

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Pitanje: Na koliko načina možemo dodijeliti k identičnih čokoladica n učenika.

Odgovorimo na ovo pitanje pomoću „zvjezdica i štapića“.
Svaku dodjelu predstavimo uz pomoć „zvjezdica i štapića“. Konkretno, svaka se dodjela može zamisliti kao raspored od k zvjezdica (svaka predstavlja jednu čokoladicu) i $n - 1$ štapića koji predstavljaju razdjelnike među učenicima. Primjerice, kada se deset čokoladica dodjeljuje četvorici učenika, raspored deset zvjezdica i tri štapića prikazano na Slici 3.3 predstavljaju situaciju u kojoj učenici 1, 2, 3 i 4 dobivaju 3, 2, 0 i 5 čokoladica,

redom. Svaki takav raspored uključuje raspoređivanje $n + k - 1$ objekata u red odlučujući koji k od njih će biti čokoladice (u ovom primjeru, čokoladice su smještene na mjesta $1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13$).



Slika 3.3: Prikaz višestrukog odabira pomoću zvjezdica i štapića

Sada, vratimo se na pitanje vezano za Identitet 2.
Prvi odgovor na pitanje je sama definicija $\left(\!\binom{n}{2}\!\right)$:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \left(\!\binom{n}{2}\!\right) = \binom{n+2-1}{2} = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Drugi odgovor je uvjet na veći od dva odabrana elementa. Odaberimo dva elementa skupa $\{1, \ldots, n\}$. Ako je veći od ta dva broja k, manji broj može biti bilo koji od $k - 1$ elemenata skupa $\{1, \ldots, k\}$. Stoga je ukupan broj odabira $\sum\limits_{k=1}^{n} k$.
Učenicima kod rješavanja uvodnog primjera možemo zadati zadatak da ispišu sve kombinacije dvaju brojeva koje možemo dobiti od zadanih prirodnih brojeva pri čemu redoslijed nije važan te je dozvoljeno ponavljanje elemenata (napisati kombinacije s ponavljanjem drugog razreda skupa $\{1, 2, ..., n\}$). Nakon što ih ispišu i prebroje sve moguće kombinacije, dobiveni broj povezujemo sa zbrojem prvih n prirodnih brojeva. U ovom trenutku, dopuštamo učenicima postavljati pitanja te iznijeti svoje ideje i teorije o vezi između uočenih dokaza čime omogućavamo sljedeći korak strategije usmjeravanja za pristupe podučavanju; olakšavanje učenja temeljenog na upitima. Iako učenici u prvom razredu srednje škole nisu upoznati s principima prebrojavanja, varijacijama i permutacijama niti kombinacijama, učenicima kombinatorno obrazloženje identiteta nije komplicirano, lako se pamti te nam omogućava ono najbitnije; prenošenje kulture matematike.

Nakon prezentiranog dokaza, učenicima možemo zadati sljedeći problem:

Zadatak 2.[1] (Općinsko natjecanje, prvi razred srednje škole, 17. veljače 2021., A varijanta)
Na ploči su napisani brojevi $1, 2, 3, ..., 2021$. *Je li moguće brojeve brisati jednog po jednog sve dok na ploči ne ostane samo jedan broj, tako da nakon svakog brisanja zbroj svih preostalih brojeva bude složen broj?*

Rješenje.

Moguće je.
Znamo da je zbroj prvih n prirodnih brojeva

$$1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Uočimo da je zbroj prvih n prirodnih brojeva složen broj za sve $n \geq 3$.

Brojeve brišemo redom; od većeg prema manjem. Prvo ćemo pobrisati najveći broj 2021, a onda nastavljamo brisati sve do broja 5 (uključujući i njega).
Tada su nam preostali brojevi $1, 2, 3$ i 4. Uočimo da će uvjet zadatka biti zadovoljen ako prvo pobrišemo broj 1, nakon njega 3, pa 2 i na kraju ostane broj 4.

3.2.2 Djeljivost

Ponavljajući cjelinu „Realni brojevi“ nailazimo na razne primjere i zadatke vezane uz djeljivost prirodnih brojeva koje također rješavamo kombinatorno. Jedan od primjera koji možemo pokazati učenicima je sljedeći:

Primjer 3.
Koliko ima dvoznamenkastih brojeva djeljivih s 5?

Prije no učenicima otkrijemo kombinatorni način rješavanja problema, diskutiramo o načinima na koji bi se ovaj problem mogao riješiti. Učenicima opet najlogičnije djeluje ispisati ili izreći sve tražene brojeve budući da ih nema mnogo.
Traženi brojevi su $10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90$ i 95 iz čega slijedi da je odgovor na traženo pitanje 18. Nadalje, s učenicima raspravljamo o ispisanim brojevima čime pokušavamo uvesti neizvjesnost koja će nam poslužiti kao motivacija za proširivanjem učeničkih postojećih načina razmišljanja o konceptu djeljivosti. Ono što svi

[1] Zadatak preuzet s web stranice http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2021/2021-SS-skolsko-1234-zad+rj/2021-SS-skolsko-A-1234-rj.pdf (posjet 3.1.2022.)

zaključuju je da su posljednje znamenke ispisanih brojeva ili 0 ili 5, a prve brojevi od 1 do 9. Odnosno, da smo broj mogli sastaviti tako da smo odabrali jednu od 9 znamenaka iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ zatim jednu od dvije znamenke iz skupa $\{0, 5\}$. Neki će učenici možda u ovom trenutku zaključiti da smo broj dvoznamenkastih brojeva djeljivih s 5 dobili tako da smo pomnožili brojeve 2 i 9. Nakon prvog primjera, učenicima zadajemo novi koji glasi:

Primjer 4.
Koliko ima dvoznamenkastih brojeva djeljivih s 5 čiji dekadski zapis ne sadrži brojeve 1, 2, 3 i 4?

Učenici uočavaju da je primjer sličan prethodnom, ali se razlikuje u tome da postoje znamenke koje ne smijemo iskoristiti u zapisu broja. Vodeći se prethodnim primjerom, zaključujemo da su traženi brojevi 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90 i 95 te da dvoznamenkastih brojeva djeljivih s 5 čiji dekadski zapis ne sadrži brojeve 1, 2, 3 i 4 ima točno 10. Kroz diskusiju učenici zaključuju da je prva znamenka traženog broja mogla biti 5, 6, 7, 8 ili 9, a posljednja opet 0 ili 5 jer uvjet zadatka ne utječe na odabir posljednje znamenke. Točnije, prvu smo znamenku mogli odabrati na pet načina, a drugu na dva. Učenici sada već mogu povezati broj mogućnosti za odabir pojedine znamenke s odgovorom na pitanje; ukupan broj traženih brojeva jednak je $5 \cdot 2 = 10$.

Nakon dva riješena primjera, učenicima možemo zadati posljednji koji bi samostalno riješili ovaj puta primjenom kombinacija. Nakon prvog primjera, učenicima zadajemo novi koji glasi:

Primjer 5.
Koliko ima troznamenkastih brojeva djeljivih s 2 čiji dekadski zapis ne sadrži brojeve 2, 4 i 6?

Učenici zaključuju da na raspolaganju imamo sedam znamenaka: 0, 1, 3, 5, 7, 8 i 9.
Prvu znamenku možemo odabrati na 6 načina (bilo koju znamenku osim nule, jer ako kao prvu znamenku odaberemo nulu sastavljen broj neće niti troznamenkasti).
Drugu znamenku možemo odabrati na po 7 načina.
Posljednju, odnosno treću znamenku broja možemo odabrati na samo dva načina. Jedine znamenke koje možemo napisati na posljednje mjesto su zmaneke 0 i 8, u protivnom broj neće biti djeljiv s dva što je uvijet zadatka.
Zato je ukupan broj takvih brojeva jednak $6 \cdot 7 \cdot 2 = 84$.

Naposljetku, učenicima govorimo da je metoda koju smo koristili pri rješavanju navedenih problema kombinatorna. Riječ je o jednom od osnovnih principa prebrojavanja; principu umnoška odnosno principu uzastopnog prebrojavanja.

Primjeri poput ranije navedenih i riješenih česti su u cjelini "Realni brojevi". Učenici njima ponavljaju djeljivost, pravila djeljivosti prirodnih brojeva i povezuju ih s osnovnim principima prebrojavanja nakon čega mogu rješavati slične zadatke bez većih problema.

Zadatak 6.[2] (Općinsko natjecanje, prvi razred srednje škole, 17. veljače 2021., A varijanta)
Koliko ima četveroznamenkastih brojeva djeljivih s 3 čiji dekadski zapis ne sadrži znamenke 2, 4, 6 ni 9?

Rješenje.

Na raspolaganju imamo šest znamenaka: 0, 1, 3, 5, 7 i 8.

Prvu znamenku možemo odabrati na 5 načina (bilo koju znamenku osim nule).
Drugu i treću znamenku možemo odabrati na po 6 načina.
Neka te prve tri odabrane znamenke čine troznamenkasti broj n. Zadnju znamenku y za traženi četveroznamenkasti broj $10n + y$ možemo uvijek odabrati na točno dva načina. Naime, kako od šest zamenaka koje imamo na raspolaganju dvije daju ostatak 0, dvije ostatak 1 i dvije ostatak 2 pri dijeljenju s 3, točno dva među brojevima

$$10n + 0, \quad 10n + 1, \quad 10n + 3, \quad 10n + 5, \quad 10n + 7, \quad 10n + 8$$

su djeljiva s 3, neovisno o broju n.
Zato je ukupan broj takvih brojeva jednak $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 360$.

3.2.3 Potencije

Nakon obrađene cjeline „Realni brojevi“, učenici prvog razreda srednje škole nastavljaju s potencijama i algebarskim izrazima. U sklopu zadataka predviđenih u [13], s učenicima možemo rješavati probleme poput:

Zadatak 7.
Na koliko načina možemo potenciju x^{100} zapisati kao produkt triju nenegativnih cjelobrojnih potencija od x?

Prije no s učenicima riješimo spomenuti problem, možemo im zadati jednostavniji uvodni primjer:

[2] Zadatak preuzet s web stranice http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci/2021/2021-SS-skolsko-1234-zad+rj/2021-SS-skolsko-A-1234-rj.pdf (posjet 3.1.2022.)

Primjer 8.
Na koliko načina možemo potenciju x^{10} zapisati kao produkt dviju nenegativnih cjelobrojnih potencija od x?

Učenicima savjetujemo da problem riješe samostalno čime im omogućujemo učenje temeljeno na upitu. Intuitivno opet ispisuju sve moguće kombinacije te prebroje koliko ih ima. Prvo što zaključuju je da moraju naći dva faktora čije su baze x, a eksponenti su dva nenegativna cijela broja koja u zbroju daju 10. Učenici od osnovne škole znaju da se potencije jednakih baza množe tako da se baza potencije potencira zbrojem eksponenata ([13]). Promotrimo prvo slučaj kada jedan od faktora smije imati eksponent 0. Učenici dolaze do sljedećih kombinacija:

$$x^0 \cdot x^{10}, x^1 \cdot x^9, x^2 \cdot x^8, x^3 \cdot x^7, x^4 \cdot x^6, x^5 \cdot x^5, x^6 \cdot x^4, x^7 \cdot x^3, x^8 \cdot x^2, x^9 \cdot x^1, x^{10} \cdot x^0.$$

Uočimo da je dovoljno među zadanim brojevima 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 i 10 naći ona dva koja u zbroju daju 10. Ranije u radu spominjala sam i na primjeru opisala metodu „zvjezdica i štapića“, pa učenicima savjetujemo da primjer riješe pomoću navedene metode. Prisjetimo se, ovakvo okružje za učenje uključuje učenike u kontinuirani proces istraživanja, objašnjavanja i potvrđivanja pretpostavki.
Kako se svaka dodjela može zamisliti kao raspored od k zvjezdica (svaka predstavlja jedan broj od 1 do 10) i $n-1$ štapića koji predstavljaju razdjelnike među brojevima. Primjerice, kada se deset brojeva dijeli na dva dijela, raspored deset zvjezdica i jednog štapića može biti sljedeći:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \star & \star & \star & | & \star & \star & \star & \star & \star & \star & \star \\ \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{array}$$

Štapić možemo postaviti na bilo koje od 11 mjesta, dok na preostala stavljamo zvjezdice. Slijedi da svaki takav raspored uključuje raspoređivanje $n+k-1$ objekata u red odlučujući koji k od njih će biti brojevi od 1 do 10. Tada broj načina na koji možemo potenciju x^{10} zapisati kao produkt dviju nenegativnih cjelobrojnih potencija od x iznosi

$$\binom{n+10-1}{10} = \binom{11}{10} = \binom{11}{1} = 11.$$

Ukoliko nula nije bila dopuštena kao eksponent, tada nam „otpadaju“ dva moguća rješenja; $x^0 \cdot x^{10}$ i $x^{10} \cdot x^0$. Odnosno, u kontekstu zvjezdica i štapića, kod razmještaja štapića izuzimamo mjesta 1 i 11 jer se u tim slučajevima na jednoj strani neće nalaziti niti jedna zvjezdica što želimo izbjeći. Tada broj načina na koji možemo potenciju x^{10} zapisati kao produkt dviju potencija od x iznosi $\binom{9}{1} = 1$.

Nakon uvodnog primjera, s učenicima se vraćamo na početno postavljen primjer te ga analogno rješavamo:

Zadatak 7.
Na koliko načina možemo potenciju x^{100} zapisati kao produkt triju nenegativnih cjelobrojnih potencija od x?

Učenici ovoga puta ne ispisuju sve moguće kombinacije (ima ih previše te smo raspravili o načinu rješavanja primjenom „zvjezdica i štapića“ koji se učenicima na prvu činio jednostavnijim od ispisivanja i prebrojavanja kombinacija), već odmah sa sigurnošću komentiraju rješenje. Ukoliko je nula ponovno dopuštena kao jedan od eksponenata, tada na raspolaganju imamo 100 zvjezdica i 2 štapića. Odnosno, imamo 102 objekta koja moramo rasporediti u red tako da se na 2 mjesta nalaze štapići. Ukupan broj poredaka u tom slučaju iznosi

$$\binom{102}{2} = \frac{102 \cdot 101}{2 \cdot 1} = 5151.$$

Ukoliko nulu želimo izuzeti iz kombinacija, tada imamo tri mjesta manje za postaviti štapiće (dva krajnja mjesta i jedno tik uz prethodno postavljeni štapić). Konačno je broj kombinacija $\binom{99}{2} = 4851$.

3.3 Primjeri kombinatornih dokaza u drugom razredu srednje škole

Sadržaj kojim se učenici bave u drugom razredu srednje škole je sljedeći: „Kvadratna jednadžba“, „Funkcije“, „Kompleksni brojevi“ kao izborni sadržaj, „Planimetrija“, „Stereometrija“ te „Vjerojatnost“ ([7] i [8]).

Cjeline koje ćemo u ovom potpoglavlju razraditi su „Funkcije“ i „Vjerojatnost“.

3.3.1 Funkcije

Prisjetimo se, učenici u drugom razredu srednje škole definiraju funkciju kao pridruživanje koje svakom elementu nekog skupa (domene) pridružuje točno jedan element nekog drugog skupa (kodomene) [7]. Nakon toga obično uz pomoć ilustracije definiraju pojmove injekcija, surjekcija i bijekcija. Navedene pojmove možemo definirati i pomoću sljedećeg primjera preuzetog iz [3]:

Zadatak 9.
Ako imamo šest različitih kuverti i četiri različite poštanske marke iste nominalne vrijednosti, na koliko načina možemo
a) izabrati kuvertu s markom
b) polijepiti sve marke na kuvertu (nije bitan iznos maraka na svakoj pojedinoj kuverti)
c) polijepiti sve marke na kuverte, tako da na svaku kuvertu bude nalijepljena najviše jedna marka?

Kako smo u prošloj točki rada vidjeli, učenici već na početku prvog razreda srednje škole upoznaju osnovne principe prebrojavanja, pa im rješenje ovog zadatka neće biti nepoznato.

Rješenje.

a) Od 6 kuverti, jednu možemo odabrati na 6 načina, a od 4 marke, jednu možemo odabrati na 4 načina. Po principu uzastopnog prebrojavanja, kuvertu s markom možemo odabrati na $6 \cdot 4$, odnosno 24 načina.

b) Svakoj marku pridružit ćemo jednu kuvertu (možda će biti više maraka kojima će biti pridružena ista kuverta). Bez smanjenja općenitosti marke možemo numerirati (poredati). Prvu marku možemo nalijepiti na bilo koju od 6 kuverata, drugu također na bilo koju od 6 kuverata itd. Takvih kombinacija ima $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 6^4$, odnosno broj načina na koji možemo polijepiti sve marke na kuverte je 6^4.

c) U ovom dijelu zadatka, na svakoj kuverti može biti nalijepljena najviše jedna marka. Iz čega slijedi da kuvertu na koju ćemo nalijepiti prvu marku možemo izabrati na 6 načina. Nakon toga, kuvertu na koju možemo nalijepiti drugu marku možemo izabrati na 5 načina, kuvertu na koju možemo nalijepiti treću marku na 4 načina i posljednju na preostalih 3 načina. Konačno, broj načina na koji možemo polijepiti sve marke na kuverte, tako da na svaku kuvertu bude nalijepljena najviše jedna marka iznosi $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ načina.

Nakon što učenici riješe zadatak, možemo im postaviti sljedeće pitanje:
Ako s K označimo skup kuverata, a s M skup maraka, onda vidimo da smo u b) i c) dijelu zadatka promatrali neke funkcije između tih skupova. O kakvim se funkcijama radi? Generalizirajte zadatak na k kuverata i m maraka (pri čemu k može biti veći, jednak ili manji od m).

Naš zadatak bio je osmišljen tako da smo na raspolaganju imali šest kuverti i četiri marke. Neka je $K = \{k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_6\}$ i $M = \{m_1, m_2, m_3, m_4\}$.
Funkcija f skupa M od m elemenata u skupu K od k elemenata ($f : M \to K, |M| = m, |K| = k$) je smještanje m različitih markica na k različitih kuverti, pri čemu svaka kuverta može primiti od 0 do m markica i svaka markica je na nekoj kuverti.
Ova definicija je ekvivalentna definiciji funkcije jer smještanje markica na kuverte je pridruživanje originalu (markici) slike (kuverte) na koju je ona smještena i ne može jedna markica biti istovremeno smještena na dvije kuverte.
Općenito, funkcija $f : A \to B$ je injektivna funkcija ili injekcija ako različite elemente skupa A preslikava u različite elemente skupa B.
Očigledno je da funkcija primjerice šesteročlanog skupa u četveročlani skup (ili bilo koji slučaj kada je $m > k$) ne može biti injektivna jer će po Dirichletovom principu bar na jednoj kuverti biti bar dvije markice.
Naša funkcija je injektivna ako i samo ako na svakoj kuverti ima najviše jedna markica.
Općenito, funkcija $f : A \to B$ je surjektivna funkcija ili surjekcija ako za svaki element y iz skupa B postoji element x iz skupa A za koji je $f(x) = y$.
Iz ove definicije je očekivano da funkcija primjerice četveročlanog skupa u šesteročlani skup (ili bilo koji slučaj kada je $m < k$) nikada ne može biti surjektivna jer po po Dirichleovom principu bar jedna kuverta mora ostati prazna.
Funkcija $f : M \to K$ je surjektivna ako i samo ako je na svakoj kuverti bar jedna markica, tj. nije surjektivna ako i samo ako bar jedna kuverta ostane bez markice.
S učenicima diskutiramo o slučaju da je broj markica jednak broju kuverti te da na svaku kuvertu možemo nalijepiti najviše jednu markicu. Tada bi se na svakoj kuverti nalazila točno jedna markica. Učenike pitamo hoće li takav način pridruživanja markica kuvertama biti injekcija? Hoće li biti surjekcija? Učenici zaključuju da će biti i injekcija i surjekcija.
Funkcija $f : M \to K$ je i injektivna i surjektivna ako i samo ako je $m = k$.

Općenito, funkcija $f : A \to B$ je bijektivna funkcija ili bijekcija ako je injektivna i surjektivna.

3.3.2 Klasična definicija vjerojatnosti

Nakon što učenici upoznaju osnovne pojmove poput vjerojatnosti, nemogućeg i sigurnog događaja, slučajnog pokusa i elementarnog događaja spremni su baviti se klasičnom definicijom vjerojatnosti. Pretpostavljamo da slučajan pokus ima konačno mnogo elementarnih događaja. Ako su elementarni događaji jednako mogući, tada su vjerojatnosti svih elementarnih događaja međusobno jednake. Vjerojatnost nekog događaja A jednaka je omjeru povoljnih ishoda za taj događaj i ukupnog broja mogućih ishoda;

$$P(A) = \frac{k(A)}{k(\Omega)},$$

uz uvjet da su ishodi jednako mogući pri čemu je $k(A)$ broj ishoda povoljnih za događaj A, dok je $k(\Omega)$ ukupan broj elementarnih događaja (ishoda). Svi zadaci iz ove nastavne teme većinom se rješavaju ispisivanjem svih povoljnih i elementarnih događaja, a s učenicima zadatke možemo rješavati pomoću već poznatih osnovnih principa prebrojavanja.

Primjer 10. ([8])
Brojevi od 1 do 10 zapisani su na komadiće papira koji su zatim stavljeni u vrećicu. Slučajnim odabirom se iz vrećice izvlači jedan komadić papira.

a) Odredimo prostor elementarnih događaja.
b) Kolika je vjerojatnost da je izvučen papirić s brojem 3?
c) Jesu li događaji A={izvučen je paran broj} i B={izvučen je neparan broj} jednako mogući?
d) Jesu li događaji C={izvučen je broj djeljiv s 3} i D={izvučen je broj djeljiv s 5} jednako mogući?

Rješenje.

a) Učenici se prisjećaju da su elementarni događaji mogući ishodi slučajnog pokusa i da se oni ne mogu razložiti na jednostavnije događaje. Prostor elementarnih događaja je prostor mogućih ishoda za ovaj slučajni pokus, a to je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

b) U vrećici se nalazi 10 papirića. Svaki papirić čini $\frac{1}{10}$ ukupnog broja papirića. To znači da elementarni događaj "izvučen je papirić s brojem 3" čini $\frac{1}{10}$ svih elementarnih događaja iz Ω. Prema tome, vjerojatnost da je izvučen papirić s brojem 3 iznosi $\frac{1}{10}$. To pišemo $P(3) = \frac{1}{10}$. Primjetimo da su svi elementarni događaji jednako vjerojatni.

c) Povoljni ishodi za A su 2, 4, 6, 8 i 10, a povoljni ishodi za B su 1, 3, 5, 7 i 9. Mogućnost da se dogodi prvi događaj jednaka je mogućnosti da se dogodi drugi događaj. U vrećici ima 5 parnih i 5 neparnih brojeva, tj. broj povoljnih ishoda za A je 5 i broj povoljnih ishoda za B je 5.

d) Povoljni ishodi za C su 3, 6 i 9, dok su povoljni ishodi za D 5 i 10. Ova dva događaja nisu jednako moguća. Postoje tri broja djeljiva s 3 i dva broja djeljiva s 5, tj. broj povoljnih ishoda za C je 3, a broj povoljnih ishoda za D je 2. Vjerojatnost da se odabere broj djeljiv s 3 malo je veća od vjerojatnosti da se odabere broj djeljiv s 5.

Nakon primjera riješenog na način da smo sve ishode, bili povoljni ili elementarni, ispisali i analizirali, učenike pitamo jesmo li mogli na neki drugi način naći broj spomenutih ishoda. Učenici se prisjećaju kombinatorne metode. Odnosno, broj načina da među 10 brojeva odaberemo jedan, bilo koji broj, iznosi 10. Broj načina da bismo iz iste „hrpe" odabrali upravo broj 3 je samo jedan. Kod primjera c) u kojemu se traži broj ishoda događaja da je izvučen ili paran ili neparan broj, odgovor je 5. Na papirićima nalazi se točno pet parnih i pet neparnih brojeva, pa je broj načina za odabrati paran broj jednak broju načina za izabrati neparan, a to je upravo 5. U posljednjem primjeru, brojeva djeljivih s 3 imamo samo 3, pa je broj načina za odabrati jedan od 3 broja iznosi 3, a broj načina na koji možemo odabrati jedan broj djeljiv s 5 iznosi 2 jer su samo sva broja djeljiva s 5.

Nadalje, s učenicima rješavamo drugi primjer koji se nadovezuje na prethodni, a glasi:

Primjer 11. ([8])
a) Kolika je vjerojatnost da se dogodi A, a kolika vjerojatnost da se dogodi B iz prethodnog primjera?
b) Kolika je vjerojatnost da se dogodi C, a kolika je vjerojatnost da se dogodi D iz prethodnog primjera?

Rješenje.

a) Kako broj povoljnih ishoda za A iznosi 5, to znači da će se dogoditi A ako se dogodi neki od 5 elementarnih događaja, od njih ukupno 10. Dakle $P(A) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$. Slično vrijedi i za događaj B, pa je $P(B) = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$.

b) Broj povoljnih ishoda za C je 3, što znači da će se dogoditi C ako se dogodi neki od 3 elementarnih događaja od njih ukupno 10. Vjerojatnost da se dogodi C jednaka je $P(C) = \frac{3}{10}$. Broj povoljnih ishoda za D je 2, što znači da će se dogoditi D ako se dogodi neki od 2 elementarna događaja od ukupno 10 njih. Vjerojatnost da se dogodi D jednaka je
$P(C) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

Prije nego učenici krenu samostalno rješavati zadatke, moraju se upoznati s načinom određivanja vjerojatnosti nezavisnih događaja, zatim unije dvaju zavisna događaja te naposljetku dvaju događaja koji se međusobno isključuju. Učenicima je navedene vjerojatnosti najbolje prikazati pomoći primjera.

Primjer 12. ([8])
Slučajni pokus sastoji se od bacanja igraće kocke i novčića u isto vrijeme. Odredimo vjerojatnost događaja „palo je pismo i pao je broj 5".

Rješenje.

Događaj A ={*palo je pismo*} i događaj B={*pao je broj 5*} su nezavisni, tj. realizacija jednog događaja ne utječe na vjerojatnost realizacije drugog. Vjerojatnost događaja A je $\frac{1}{2}$ (pismo može pasti na jedan način od ukupno dva moguća ishoda), dok vjerojatnost događaja B iznosi $\frac{1}{6}$ (broj načina na koji možemo odabrati broj 5 od mogućih šest brojeva na kocki iznosi 1, a bilo koji broj na kocki možemo odabrati na 6 načina). Događaj palo je pismo i pao je broj 5 je presjek događaja A i B pa je

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

Primjer 13. ([8])
Odredimo vjerojatnost da pri bacanju kocke padne paran broj ili broj manji od 4.

Rješenje.

Učenici lako određuju da je ukupan broj elementarnih događaja ustvari broj načina na koji možemo odabrati bilo koji broj na kocki, a to je 6. Neka je A={*pao je paran broj*}, a B={*pao je broj manji od 4*}. Tada je broj povoljnih ishoda događaja A broj načina na koji možemo odabrati parne brojeve iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, a to je 3. Slično dobivamo broj povoljnih ishoda za događaj B; broj načina za odabrati broj manji od četiri je 3.
Tada je $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, kao i $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Uočavamo da ova dva događaja imaju i jedan zajednički ishod, a to je broj 2, pa je $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$.

Povežimo navedene ishode s formulom uključivanja i isključivanja. Ranije u radu naveli smo formulu za dva i tri konačna skupa te formulu u općem obliku. U našem primjeru imamo zadana dva konačna skupa. Odredili smo koliko se članova nalazi u svakom pojedinom skupu te koliko ih se nalazi u presjeku, nakon čega smo odredili i vjerojatnosti navedenih ishoda. Učenike možemo potaknuti na razmišljanje ako ih upitamo: kako odrediti broj elemenata unije skupova A i B? Možemo li samo zbrojiti broj elemenata skupa A i skupa B? Učenici zaključuju da ne možemo jer postoji element koji se nalazi i u jednom

i u drugom skupu. Skupovi A i B nisu međusobno disjunktni, pa moramo imati drugačiji pristup rješenju problema. Učenici zaključuju da bismo od zbroja elemenata skupova A i B moramo oduzeti broj elemenata koji se nalaze u presjeku tih dvaju skupova. Analogno bismo došli do zaključka vezanog i za vjerojatnost.
Konačno, tražena vjerojatnost iznosi

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}.$$

Primjer 14. ([8])
Odredimo vjerojatnost da je pri slučajnom bacanju igraće kocke pao broj 2 ili broj 3.

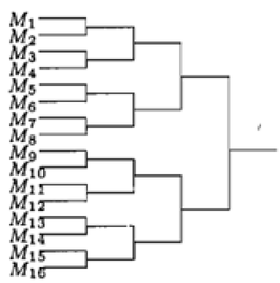
Rješenje.

Ponovno je ukupan broj elementarnih događaja 6. Ovdje razmatramo dva događaja; A={*pala je dvojka*}, čija je vjerojatnost $P(A) = \frac{1}{6}$ i B={*pala je trojka*}, čija je vjerojatnost $P(A) = \frac{1}{6}$. Ova dva događaja nemaju zajedničkih ishoda, tj. $A \cap B = \emptyset$ stoga je

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Nakon obrađenih primjera, učenici su spremni za samostalno rješavanje zadataka. U ovoj cjelini nastavnici imaju prostora s učenicima detaljnije obraditi i ponoviti kombinatorne metode u sklopu određivanja broja elementarnih i povoljnih događaja.

Zadatak 15. ([3])
Na nekom natjecanju po kup-sistemu poznati su parovi osmine finala i shema natjecanja, tj. otisnuta je tablica kao na slici 3.4.



Slika 3.4: Parovi osmine finala i shema natjecanja

Nakon svakog odigranog kola, na crtu koja izlazi iz pojedinog susreta napišemo pobjednika tog susreta.
Na koliko se načina može prognozirati popunjena tablica (tj. svi ishodi kupa)?
Kolika je vjerojatnost da će pobijediti klub M_{10}?

Rješenje.

Ishod svakog od susreta osmine finala (prvo kolo) možemo prognozirati na 2 načina; pobjeđuje gore ili dolje napisani klub. Dakle, ishod cijele osmine finala možemo prognozirati na 2^8 načina. Slično za svaki od susreta četvrtfinala možemo reći da li će pobijediti momčad koja dolazi iz „gornjeg" ili „donjeg" dvoboja. Ishod četvrtfinala možemo dakle prognozirati na 2^4 načina. Za polufinale imamo 2^2 moguća ishoda, a za finale $2^1 = 2$.

Tako smo za svaki od susreta odredili da li pobjeđuje gornji ili donji klub. Ishod kupa je određen ishodom osmine finala, četvrtfinala, polufinala i finala, pa cijelu tablicu dakle možemo popuniti na $2^8 \cdot 2^4 \cdot 2^2 \cdot 2^1 = 2^{15}$ načina.

Nakon što smo izračunali ukupan broj ishoda kupa, riješimo i drugi dio zadatka. Zanima nas vjerojatnost da će pobijediti upravo klub M_{10}. Broj elementarnih događaja je 2^{15}, a broj povoljnih ishoda za događaj A={*pobijedio je klub* M_{10}} je jedan. Dakle,

$$P(A) = \frac{1}{2^{15}}.$$

3.4 Primjeri kombinatornih dokaza u trećem razredu srednje škole

Sadržaj kojim se učenici bave u trećem razredu srednje škole je sljedeći: „Eksponencijalna i logaritamska funkcija“, „Trigonometrijske funkcije“, „Vektori“, „Pravac“, „Krivulje drugog reda“ te „Kombinatorika“ ([15] i [16]).

Cjeline koje ćemo u ovom potpoglavlju razraditi su „Trigonometrijske funkcije“ u sklopu kojih ćemo riješiti jedan kombinatorni problem te „Kombinatorika“, a vrste zadataka koje ćemo detaljnije predstaviti su oni koji koriste varijacije i permutacije te kombinacije.

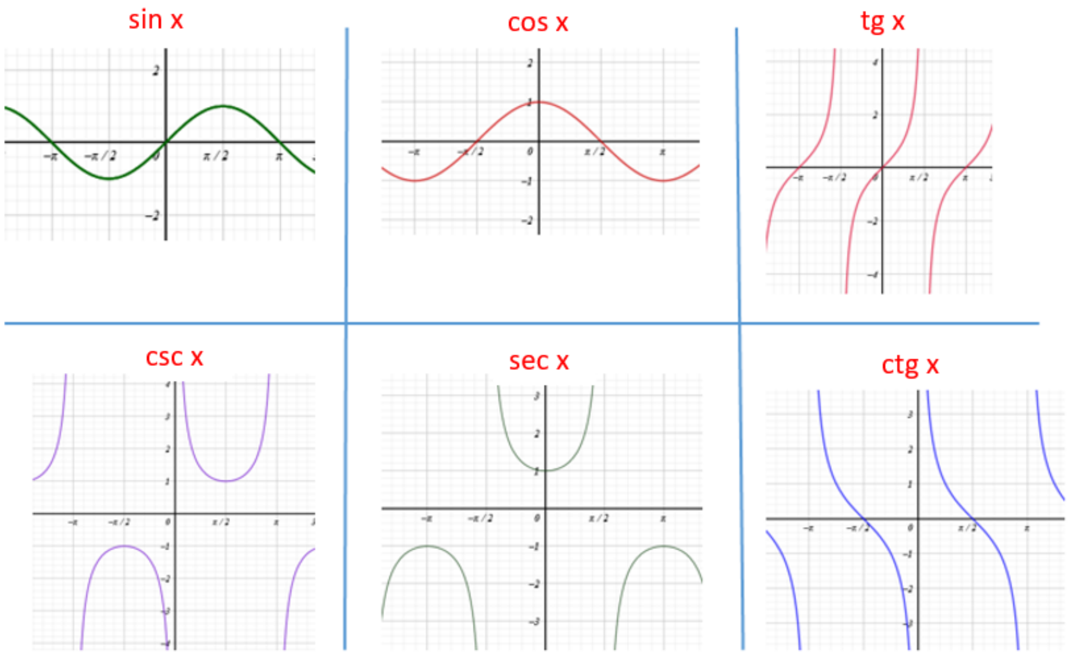
3.4.1 Trigonometrijske funkcije

Nakon što učenici u trećem razredu srednje škole upoznaju brojevnu kružnicu i definiraju trigonometrijske funkcije, opet možemo među zadatke uvrstiti i razne kombinatorne probleme. Primjer zadatka koji ćemo sagledati glasi:

Zadatak 16.[3]
Koja je vjerojatnost da ćemo odabrati dvije osnovne trigonometrijske funkcije čiji grafovi se nikada neće sjeći?

Spomenuti zadatak primjeren je dodatnoj nastavi. Naime, kurikulumom predviđen sadržaj obuhvaća samo četiri najosnovnije trigonometrijske funkcije; sinus, kosinus, tangens i kotangens. Učenici su u drugom razredu srednje škole definirali spomenute funkcije za šiljaste kutove pomoću omjera stranica pravokutnog trokuta. Sinus šiljastog kuta u pravokutnom trokutu definiramo kao omjer nasuprotne katete i hipotenuze, kosinus kao omjer priležeće katete i hipotenuze, tangens kao omjer nasuprotne katete i priležeće katete te kotangens kao omjer priležeće katete i nasuprotne katete. Uočimo da su tangens i kotangens međusobno recipročni brojevi. Kao što tangens ima svoju recipročnu vrijednost, tako ju imaju i sinus i kosinus. Kosekans u oznaci csc je recipročan sinusu te ga definiramo kao omjer hipotenuze i nasuprotne katete, dok je sekans u oznaci sec recipročan kosinusu i definiramo ga kao omjer hipotenuze i priležeće katete. Nakon što učenici pomoću brojevne kružnice definiraju sinus, kosinus, tangens i kotangens, obrađuju grafove trigonometrijskih funkcija. Na dodatnoj nastavi s učenicima možemo detaljnije obraditi grafove preostalih trigonometrijskih funkcija, što je prikazano na Slici 3.5. Tek nakon što smo s učenicima obradili „dodatan sadržaj“ problem se može riješiti.
Učenici mogu u grupi zadatak riješiti pomoću programa dinamične geometrije GeoGebre.

[3] Zadatak preuzet s web stranice https://math.stackexchange.com/questions/4132461/probability-of-picking-two-standard-trig-functions-whose-graphs-never-intersect (posjet 22.1.2022.)

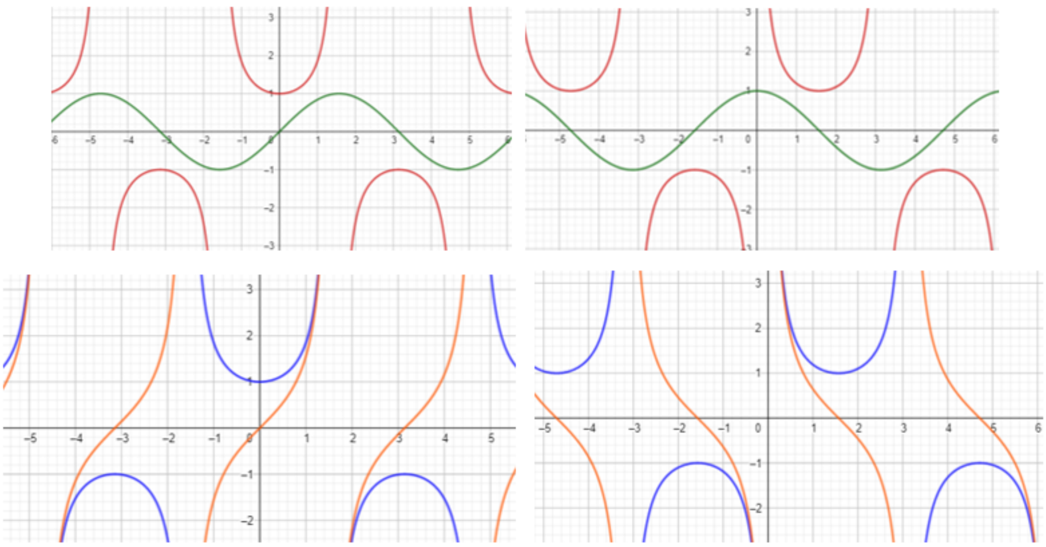


Slika 3.5: Grafovi osnovnih trigonometrijskih funkcija

Učenici crtaju sve moguće kombinacije dvaju funkcija te promatraju imaju li točke presjeka ili ne. Zaključak koji donose je da se grafovi funkcija sinus i sekans nikada neće sjeći, kao niti kosinus i kosekans. Također, sekans i tangens te kosekans i kotangens nemaju točaka presjeka.
Kako učenici samostalno rješavaju zadatak, odnosno traže one funkcije koje nemaju presjek, mogu naići na dvojbu: hoće li se u jednom trenutku funkcije sekans i tangens te kotangens i kosekans sjeći? Ovo pitanje kod učenika budi potrebu za potvrđivanjem ili pobijanjem pretpostavke što povezujemo s drugom Harelovom strategijom usmjeravanja za pristupe podučavanju koje mogu dovesti do potrebe za dokazima kod učenika. Uvjeriti se možemo pomoću prikaza funkcija u GeoGebri ili, u konačnici, primjenom Pitagorina poučka čime lako vidimo da se uistinu nikada neće sjeći $((\sec x)^2 = (\mathrm{tg} x)^2 + 1)$. Vidimo da je broj povoljnih događaja 4, dok je ukupan broj načina na koji možemo odabrati dvije od šest funkcija

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15.$$

Konačno, vjerojatnost da ćemo odabrati dvije osnovne trigonometrijske funkcije čiji grafovi se nikada neće sjeći iznosi $\frac{4}{15}$.



Slika 3.6: Grafovi funkcija koje se nikada neće sjeći

3.4.2 Varijacije i permutacije

Prije navedene teme, učenici trećeg razreda srednje škole obrađuju osnovne principe prebrojavanja. Ukoliko nastavnik kroz prva dva razreda srednje škole s učenicima bude obrađivao ovakve tipove zadataka te ih upoznao s terminima princip uzastopnog prebrojavanja, presjek i unija konačnih skupova, disjunktni konačni skupovi, učenicima će prva tema biti ponavljanje. Ono što će učenicima biti nepoznato su pojmovi varijacije i permutacije.

Učenicima u uvodnom dijelu nastavnog sata možemo zadati već poznati primjer koji glasi:

Primjer 17.
Koliko se četveroznamenkastih brojeva može zapisati s pomoću znamenaka 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 i 9 ako se nijedna znamenka ne smije ponavljati?

Učenicima prepuštamo rješavanje i argumentiranje primjera. Kako na raspolaganju imamo 9 znamenaka, broj načina da od ponuđenih znamenaka odaberemo točno jednu iznosi 9. Nadalje, kako se znamenke ne smiju ponavljati, sljedeću po redu možemo odabrati na 8 načina. Slično, predposljednju znamenku možemo odabrati na 7, i posljednju na 6 načina. Po principu uzastopnog prebrojavanja, od zadanih znamenki možemo zapisati $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$, odnosno 3024 četveroznamenkastih brojeva.

Učenicima objašnjavamo kakav smo problem u primjeru rješavali. Iz nepraznog skupa trebali smo odabrati nekoliko objekata te ih poredati u točno određenom redoslijedu. Kada god rješavamo problem navedenog tipa, kažemo da je riječ o varijaciji. Preciznim matematičkim rječnikom, autori udžbenika [17] varijaciju su definirali na sljedeći način:

Uređenu k-torku $(a_1, \ldots, a_k)$ različitih elemenata n-članog skupa A nazivamo varijacija k-tog razreda u n-članom skupu. Još se kaže i varijacija bez ponavljanja. Broj varijacija k-tog razreda u n-članom skupu označujemo s V_n^k (ili $V_{(n,k)}$). Za $k \leq n$ je broj varijacija k-tog razreda u n-članom skupu jednak

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Učenike nakon izrečene definicije i napisane formule možemo upitati za obrazloženje iste. Učenici lako daju odgovor jer je analogan početnom primjeru.
Pri odabiru uređene k-torke $(a_1, \ldots, a_k)$ elemenata n-članog skupa A element a_1 možemo doabrati na n načina jer to može biti bilo koji element iz A.
Zatim element a_2 možemo odabrati na $n-1$ način jer to može biti bilo koji element iz A različit od a_1. Slično tomu, a_3 može biti bilo koji element iz A osim a_1 i a_2 pa ga možemo odabrati na $n-2$ načina. Učenici zaključuju da se u svakom idućem koraku broj načina smanjuje za 1. Konačno, a_k možemo odabrati na $n-k+1$ način te nam princip uzastopnog prebrojavanja daje traženu formulu: $V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$.
S učenicima komentiramo da umnožak prvih n prirodnih brojeva označavamo s $n!$ i čitamo n faktorijela. Također, uočavamo da je

$$V_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1) \cdot (n-k) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1}{(n-k) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Sljedeći primjer koji zadajemo učenicima glasi:

Primjer 18. [16]
Koliko se troznamenkastih brojeva može sastaviti od znamenaka 3, 6 i 7 ako se znamenke ne smiju ponavljati?

Učenici opet lako dolaze do rješenja; prvu od znamenaka možemo odabrati na tri načina, drugu na dva i posljednju na samo jedan način. Iz ranije navedenog, da umnožak prvih n prirodnih brojeva označavamo s $n!$, slijedi da traženih troznamenkastih brojeva ima $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$.

Učenicima zatim iznosimo da se ovakav poredak, kada je skupina objekata ili osoba poredana u nekom točno određenom redoslijedu, naziva permutacija. U istom udžbeniku [17], autori navode sljedeću definiciju permutacije:

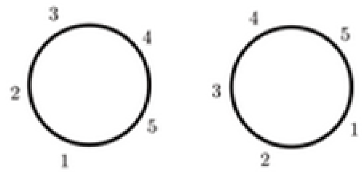
Varijacije n-tog razreda u skupu od n elemenata nazivamo permutacijama od n elemenata. Broj permutacija od n elemenata iznosi

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Učenicima zatim možemo zadati primjer koji će rješavati u parovima.

Primjer 19. [16]
Na koliko načina možemo smjestiti pet osoba oko okruglog stola?

Kako sve osobe moramo smjestiti oko okruglog stola, učenici zaključuju da se zadatak rješava primjenom permutacija. Uglavnom dolaze do broja od $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Ali, učenicima tada govorimo da pokušaju ilustrirati rješenje problema (sugeriramo im da osobe numeriraju brojevima od 1 do 5). Dok nastavnik obilazi učenike, ukazuje im na ovakvu ilustraciju:



Slika 3.7: Poredak petero osoba za okruglim stolom

Naime, ako se i na prvi pogled ova dva poretka čine različita, zarotiramo li poredak na recimo desnom stolu za jedno mjesto ulijevo, dobivamo jednake razmještaje. Slijedi da poredak dobiven rotacijom ne smatramo novim nego istim poretkom. Kako bismo onda izbjegli ove slučajeve u prebrojavanju? Učenici zaključuju da bi jednu od pet osoba trebali fiksirati, odnosno naći joj jedinstveno mjesto za stolom, a ostale osobe razmještati. Tada nas ustvari zanima na koliko načina možemo poredati četiri osobe. Odgovor je tada: $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$, odnosno 24 načina.

Nakon što su učenici upoznati s pojmovima varijacija i permutacija, slijedi primjer:

Primjer 20. [16]
Koliko ima peteroznamenkastih brojeva koji se mogu napisati pomoću znamenaka 3, 5 i 7?

Uočavamo da je dan skup od tri znamenke $A = \{3, 5, 7\}$, a ukupan je broj znamenki u peteroznamenkastom broju pet. Zaključujemo da se neke znamenke iz skupa A moraju ponavljati kako bismo dobili peteroznamenkasti broj. Primjerice, neki od traženih brojeva

su 35777, 33557, 33333...
Uočimo da su brojevi 35735 i 35375 različiti, iako su sastavljeni od istog broja istih znamenki. Dakle, i tu nam je poredak važan pa je riječ o varijacijama. Možemo to promatrati kao uređene petorke od tri elementa. Ako se elementi mogu ponavljati, takve uređene petorke nazivamo varijacije s ponavljanjem petog razreda u skupu od tri elementa.
Koliko ih ima? Prvu znamenku peteroznamenkastog broja možemo odabrati na 3 načina, drugu na tri načina, treću na tri načina, četvrtu na tri načina te posljednju, petu, također na tri načina. Zaključujemo da je broj takvih varijacija $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^5 = 243$.

Nakon riješenog zadatka, s učenicima diskutiramo po čemu se primjer u kojem smo upoznali varijacije razlikuje od ovog? Učenici odmah zaključuju da je razlika u tome što se u ovome primjeru znamenke peteroznamenkastog broja smiju ponavljati. Varijacije koje smo upoznali zovu se varijacije bez ponavljanja, pa učenici lako predviđaju naziv ovakvog tipa varijacija; varijacije s ponavljanjem. U [16] navodi se definicija:

Neka je A skup od n elemenata. Ukupan broj svih uređenih k-torki $(a_1, \ldots, a_k)$ s elementima iz skupa A pri čemu se neki elementi mogu ponavljati iznosi n^k.
Takve k-torke nazivaju se varijacije s ponavljanjem k-tog razreda u n-članom skupu.

Posljednji primjer koji s učenicima rješavamo je:

Primjer 21. [16]
Na koliko se različitih načina mogu razmjestiti slova riječi ABRAKADABRA?

Učenike pitamo da analiziraju malo slova od kojih se ova riječ sastoji. Riječ ABRAKADABRA sastoji se od ukupno 11 slova, od kojih je pet slova A, dva slova B, dva slova R i po jednim slovom K i D. Ako bismo sva ista slova promatrali kao različite znakove, imali bismo 11! različitih načina. Ali, pogledajmo, primjerice, riječi BARAKADABRA, BARAKADABRA i BARAKADABRA.
Vidimo da je riječ o istim razmještajima slova, odnosno o riječi BARAKADABRA, što naravno moramo uzeti u obzir. Ovih pet slova A mogu se razmjestiti na ukupno 5! načina. Slično je i sa slovima B i R. Slova B mogu se razmjestiti na 2! načina, kao i slova R. Primjenjujući princip uzastopnog prebrojavanja i princip kvocijenta, određujemo ukupan broj različitih načina za razmjestiti slova zadane riječi.
Ukupan broj permutacija riječi ABRAKADABRA iznosi $\frac{11!}{5!2!2!} = 83160$.

Učenicima tada iznosimo definiciju iz [16];

Ako se među n elemenata koje permutiramo nalazi k_1 elemenata jedne vrste, k_2 elemenata druge vrste ... k_r elemenata r-te vrste, tada govorimo o permutacijama s ponavljanjem.

Broj permutacija tih n elemenata iznosi

$$\frac{n!}{k_1! \cdot k_2 \cdot ... \cdot k_r!}.$$

Nakon što su učenici kroz primjere upoznali pojmove varijacija sa i bez ponavljanja, permutacija i permutacija s ponavljanjem, učenike dijelimo u dvije grupe. I jedna i druga grupa učenika rješavaju iste zadatke, ali prva grupa zadatke rješava primjenjujući isključivo osnovne principe prebrojavanja (princip uzastopnog prebrojavanja, princip zbroja, princip komplementa te princip kvocijenta), dok druga grupa zadatke rješava primjenjujući formule za varijacije bez ponavljanja, varijacije s ponavljanjem, permutacije i permutacije s ponavljanjem. Pogledajmo primjer nastavnog listića sa zadacima preuzetim iz [16]:

<u>Zadatak 1</u>
Na koliko se načina mogu odabrati predsjednik, potpredsjednik, tajnik i blagajnik u klubu ljubitelja loših ljubavnih romana koji ima 15 članova?

<u>Zadatak 2</u>
Na koliko se različitih načina mogu poredati slova riječi:

a) GLAVOLOMKA b) EPIDEMIJA c) OTORINOLARINGOLOG

<u>Zadatak 3</u>
Na klaviru bijele tipke predstavljaju note C, D, E, F, G, A i H.
Koliko se različitih melodija može odsvirati koje čine sedam nota odsviranih u nizu ako:

a) svaku notu možemo odsvirati točno jedanput
b) note se mogu ponavljati
c) note se mogu ponavljati, a melodija počinje i završava notom D
d) melodiju čine tri note D, dvije note H i dvije note A?

Rješenje
<u>Zadatak 1.</u>
$15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 = 32760$

<u>Zadatak 2.</u>

a) $\dfrac{10!}{2! \cdot 2! \cdot 2!} = 453600$
b) $\dfrac{9!}{2! \cdot 2!} = 90720$
c) $\dfrac{17!}{5! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 2!}$

<u>Zadatak 3.</u>

a) $7! = 5040$
b) $7^7 = 823543$
c) $7^5 = 16807$
d) $\dfrac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 210$

Nakon što svaka grupa riješi zadatke, zaključuju da se svi navedeni zadaci mogu riješiti samo uz pomoć osnovnih principa prebrojavanja. Ali, dobro dođe prepoznati permutacije i varijacije te primjenom definicije i formule riješiti problem čime nekada možemo do rješenja brže i jednostavnije doći (primjerice kod permutacija s ponavljanjem). Također, učenike smo na taj način potaknuli da istražuju i primjenjuju konvencionalno matematički znanje. Prisjetimo se, posljednja Harelova strategija govori kako nastavnik služi kao nositelj kulture matematike u razredu.

3.4.3 Kombinacije

Kombinacije smo spominjali ranije u radu, kada smo govorili o jednom od prvih identiteta spomenutih u prvom razredu srednje škole; formuli za sumu prvih n prirodnih brojeva, odnosno

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Učenike možemo na dokaz podsjetiti rješavanjem sličnog uvodnog primjera:

Primjer 22. [16]
Neka je dan skup $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. *Na koliko je načina moguće odabrati dva različita elementa iz tog skupa?*

Učenike prije rješavanja pitamo je li poredak elemenata iz skupa važan? Kako nigdje nije naglašeno tako, poredak elemenata nije važan. Što to učenicima govori? Da je odabir 12 jednak odabiru 21. Odnosno, da prvi element možemo odabrati na 5 načina, a drugi na 4 (elementi moraju biti različiti). Nadalje, kako je par 12 jednak paru 21, moramo eliminirati sva slična ponavljanja. U paru postoji 2! načina za odabrati redoslijed brojeva. Stoga je broj načina za odabrati dva različita elementa iz skupa jednak

$$\frac{5 \cdot 4}{2!} = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10.$$

Također, možemo komentirati način rješavanja u kojemu ispisujemo sve moguće kombinacije brojeva, pazeći pri tome na već navedene uvijete .
Učenike u ovom trenutku možemo upitati sumi koliko prvih prirodnih brojeva odgovara broj 10? Učenici se tada prisjećaju da smo kombinacije koristili kod dokaza formule za sumu prvih n prirodnih brojeva. Naposljetku, komentiramo da je u ovom primjeru govora bilo o kombinacijama bez ponavljanja, ali naravno postoje i kombinacije s ponavljanjem kojih ćemo se također prisjetiti. Važno je razlikovati traži li se u nekom zadatku poredak odgovarajućih elemenata ili ne. Primijetimo da odabrati elemente nekog skupa znači odabrati neki njegov podskup pri čemu poredak elemenata u skupu nije važan.

Autori udžbenika [16] kombinaciju bez ponavljanja definiraju na sljedeći način:

Neka je A skup od n elemenata. Svaka kombinacija k-tog razreda u skupu A je k-člani podskup od A ($k \leq n$) te predstavlja način na koji možemo izabrati k različitih elemenata iz skupa od n elemenata bez obzira na redoslijed izbora. Kažemo još da je riječ o kombinacijama bez ponavljanja. Broj kombinacija k-tog razreda u skupu od n elemenata označujemo s C_n^k i on iznosi

$$C_n^k = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

S učenicima možemo izvesti formulu za broj kombinacija k-tog razreda u skupu od n elemenata. Niz od k različitih elemenata možemo odabrati na ukupno $n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ načina jer je riječ o broju varijacija k-tog razreda u n-članom skupu. No, svaka permutacija tako odabranog niza daje isti k-člani podskup, a znamo da je permutacija ukupno $k!$.

Prema tome, ukupan broj kombinacija k-tog razreda u skupu od n elemenata je

$$\frac{n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

S učenicima diskutiramo slučajeve kada je podskup prazan skup te n-člani podskup. Takvih je podskupova upravo 1, odnosno $\binom{n}{0} = 1$ i $\binom{n}{n} = 1$. Primjenom do sada navedenog, s učenicima možemo dokazati sljedeću jednakost:

Dokažimo da za binomne koeficijente vrijedi jednakost

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}.$$

Zamislimo da od $n+1$ predmeta trebamo odabrati njih k te uočimo jedan od predmeta. Prebrojimo zasebno podskupove od k predmeta koji sadržavaju taj predmet i zasebno one koji ga ne sadržavaju. Primijetimo da je broj podskupova koji sadržavaju taj predmet jednak broju načina na koji od preostalih n elemenata treba odabrati još njih $k-1$, a takvih je $\binom{n}{k-1}$.
A broj podskupova koji ne sadržavaju taj element jednak je broju načina na koji od n elemenata možemo odabrati njih k (jer se odabrani element ne nalazi među njima), a takvih je $\binom{n}{k}$.
Prema tome, $C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k$.

Do sada, učenici su naučili razlikovati premutacije i kombinacije. U prvima je poredak elemenata važan, a u drugima nije. Kako riješiti problem kada nam poredak objekata nije važan, a iz neke skupine možemo odabrati više istih objekata? Kroz primjer s učenicima diskutiramo rješenje postavljena pitanja:

Primjer 23. [16]
U slastičarnici „Slatki život" imaju neobičnu ponudu triju vrsta sladoleda čokolade, vanilije i jagode. Svaki kupac koji uzme neki od triju okusa može dobiti još jednu kuglicu nekog od tih triju okusa besplatno. Koliko različitih kombinacija dviju dviju kuglica sladoleda možemo dobiti u toj neobičnoj ponudi?

Učenike navodimo da nam odgovore koji mi točno skup u primjeru promatramo? Odgovaraju da promatramo skup A={*čokolada,vanilija,jagoda*}. Učenici tada predlažu kao moguće rješenje problema ispisati sve moguće kombinacije te ponude. Dobivaju sljedeće kombinacije:

čokolada-čokolada, čokolada-vanilija, čokolada-jagoda
vanilija-čokolada, vanilija-vanilija, vanilija-jagoda
jagoda-čokolada, jagoda-vanilija, jagoda-jagoda

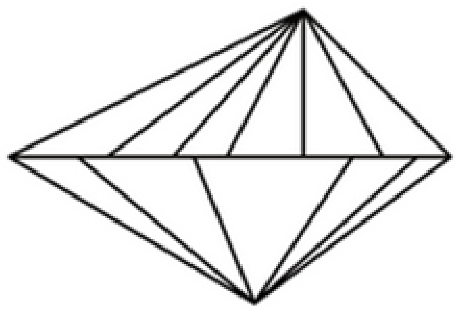
Uočimo da se javljaju kombinacije čokolada-vanilija i vanilija-čokolada. Neki učenici možda te kombinacije neće ispisati, ali one koji su ispisali pitamo je li važan redoslijed kojim smo naručili kuglice sladoleda? Zaključujemo da nije važan redoslijed. Tada su kombinacije koje možemo dobiti:

čokolada-čokolada, čokolada-vanilija, čokolada-jagoda
vanilija-vanilija, vanilija-jagoda
jagoda-jagoda

Prebrojavanjem kombinacija, uočavamo da ima šest različitih kombinacija koje se mogu dobiti tom ponudom. Ako među elementima nekog skupa, koji ima konačan broj elemenata, neki element možemo odabrati i više puta, tada govorimo o kombinacijama s ponavljanjem.
Broj kombinacija s ponavljanjem k-tog razreda skupa n elemenata označujemo s $\bar{C}_n^k$ i on iznosi
$$\bar{C}_n^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

Naposljetku, učenicima zadajemo sljedeći problem (udžbenik [16]).

Primjer 24.
Koliko je trokuta na slici? Dokaži kombinatorno!



Slika 3.8: Problem broja trokuta na slici

Učenici su se s ovim problemom susretali već u dosta ranoj dobi. Često ga znamo susresti i na raznim portalima predstavljenog kao „mozgalicu". Način na koji smo takav problem najčešće rješavali je jednostavno ručno prebrojati sve trokute koje vidimo.
Ali, problem možemo riješiti i na jednostavniji način! Primjer nam opet može poslužiti kao pomoć u prenošenju kulture matematike. Možemo pomoći učenicima u rješavanju „novih" problema modificirajući njihova postojeća znanja.
Uočimo da se nacrtani trokuti nalaze ili ispod horizontalne dužine ili iznad nje. Iz tog razloga, prebrojavanje možemo podijeliti na dva slučaja. Prebrojimo prvo gornje trokute. Da bismo odredili trokut, moramo odabrati dvije dužine koje izlaze iz gornje točke, odnosno gornjeg vrha. Te dvije dužine bit će dvije stranice trokuta. Tada je treća stranica trokuta određena donjim dijelom horizontalne dužine. Za jedan trokut od sedam dužina trebamo izabrati dvije. Redoslijed kojim izabiremo dužine nije važan, tako da je broj načina na koji to možemo učiniti $\binom{7}{2} = 21$.
Prebrojimo donje trokute. Da bismo odredili trokut, moramo odabrati dvije dužine koje izlaze iz donje točke. Kao i u gornjem slučaju, te dvije dužine bit će dvije stranice trokuta, a treća stranica trokuta određena je dijelom horizontalne dužine. Za jedan trokut od šest dužina moramo odabrati dvije pa je broj načina na koji to možemo $\binom{6}{2} = 15$. Zaključujemo da je, prema principu zbroja, na slici $21 + 15 = 36$ trokuta.

3.5 Primjeri kombinatornih dokaza u četvrtom razredu srednje škole

Sadržaj kojim se učenici bave u četvrtom razredu srednje škole je sljedeći: „Brojevi“, „Nizovi“, „Funkcije“, „Derivacija“, „Integral“ te „Vjerojatnost“ ([9] i [10]).

Dokaz koji ćemo u posljednjem potpoglavlju ovoga rada obraditi je binomni teorem u sklopu cjeline „Brojevi“, a predstavljeni zadaci će biti preuzeti iz teme prebrojavanje i vjerojatnost iz cjeline „Vjerojatnost“.

3.5.1 Binomni teorem

Kao što smo već naveli, nema mnogo teorema koji su u redovnom nastavnom procesu dokazivani kombinatornim metodama. Jedna od najupečatljivijih je dokaz binomnog teorema kojeg učenici obrađuju u četvrtom razredu srednje škole.

Teorem 3.5.1. *Za bilo koje realne brojeve x i y, te prirodni broj n vrijedi*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^n y^{n-k}.$$

Dokaz. Zapišimo prvo $(x+y)^n$ u obliku umnoška, odnosno: $(x+y)^n = (x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y)$ (n faktora) te iskoristimo svojstvo distributivnosti.
Svaki pribrojnik dobiven primjenom distributivnosti imat će n faktora. Označimo prvo mjesto s 1, drugo s 2, itd. Dakle, tražimo na koliko načina možemo izabrati k elemenata iz skupa $S = \{1, 2, \ldots, n\}$.
Tražimo broj pribrojnika koji imaju $0 \le k \le n$ faktora y. Sada je jasno da zapravo tražimo broj načina za izabrati k elemenata iz skupa $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Broj tih načina jednak je $\frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$.

Uz to, uočimo još da je prema gornjoj argumentaciji k-ti član u raspisu zaista

$$\binom{n}{k} x^n y^{n-k}.$$

□

Zadaci koje zatim s učenicima rješavamo su tipa:

Primjer 25.[10]
Odredimo koeficijent uz x^{18} u razvoju binoma

$$(x^2\sqrt{3} + \frac{1}{x})^{15}.$$

Rješenje zadatka dolazi direktno iz ranije navedenog dokaza te općeg člana raspisa binoma. Opći član razvoja binoma je

$$\binom{15}{k}(x^2\sqrt{3})^{15-k}\cdot(\frac{1}{x})^k.$$

Sređivanjem gornjeg izraza dobivamo:

$$\binom{15}{k}(\sqrt{3})^{15-k}\cdot(x^2)^{(15-k)}\cdot(x^{-1})^k=\binom{15}{k}(\sqrt{3})^{15-k}\cdot x^{30-2k}\cdot x^{-k})=\binom{15}{k}(\sqrt{3})^{15-k}\cdot x^{30-3k}.$$

Kako tražimo koeficijent uz x^{18}, slijedi da $30-3k$ mora biti jednako 18, odnosno da je $k=4$. Tada je traženi koeficijent uz x^{18} jednak

$$\binom{15}{4}(\sqrt{3})^{15-4}=\binom{15}{4}(\sqrt{3})^{11}=1365\cdot 3^5\cdot\sqrt{3}=331695\sqrt{3}.$$

3.5.2 Derivacija

U sklopu navedene cjeline, učenici se upoznaju sa samim pojmom derivacije nakon čega obrade pravila deriviranja i nastavljaju s primjenom istih na rješavanje mnoštva zadataka. Ponovno, nastavna tema pravila deriviranja omogućava nastavnicima da učenicima pokaže jedan zgodan kombinatorni izvod Leibnizovog pravila derivacije produkta funkcija.

Formula za derivaciju umnoška dviju funkcija glasi

$$(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x).$$

S učenicima izvodimo formulu za drugu derivaciju umnoška tih istih dvaju funkcija $f(x)\cdot g(x)$.

$$(f(x)\cdot g(x))''=[(f(x)\cdot g(x))']'=[f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)]'$$

U ovom koraku primjenjujemo formulu za derivaciju zbroja iz čega slijedi:

$$\begin{aligned}[f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)]'&=[f'(x)\cdot g(x)]'+[f(x)\cdot g'(x)]'\\&=f''(x)\cdot g(x)+f'(x)\cdot g'(x)+f'(x)\cdot g'(x)+f(x)\cdot g'(x)\\&=f''(x)+2\cdot f'(x)\cdot g'(x)+f(x)\cdot g''(x)\end{aligned}$$

Nadalje, s učenicima možemo izvesti i treću derivaciju:

$$
\begin{aligned}
[f(x) \cdot g(x)]''' &= [(f(x) \cdot g(x))'']' \\
&= [f''(x) \cdot g(x) + 2 \cdot f'(x) \cdot g'(x) + f(x) \cdot g''(x)]' \\
&= [f''(x) \cdot g(x)]' + 2 \cdot [f'(x) \cdot g'(x)]' + [f(x) \cdot g''(x)]' \\
&= f'''(x) \cdot g(x) + f''(x) \cdot g'(x) + 2 \cdot f''(x) \cdot g'(x) \\
&+ 2 \cdot f'(x) \cdot g''(x) + f'(x) \cdot g''(x) + f(x) \cdot g'''(x) \\
&= f'''(x) \cdot g(x) + 3 \cdot f''(x) \cdot g'(x) + 3 \cdot f'(x) \cdot g''(x) + f(x) \cdot g'''(x).
\end{aligned}
$$

U ovom trenutku možemo s učenicima komentirati na što ih asociraju druga i treća derivacija umnoška dvaju funkcija. Učenici vrlo brzo zaključuju da su koeficijenti napisanih formula isti kao koeficijenti u binomnom razvoju druge i treće potencije binoma. Uz pretpostavku da članovi s nulom u eksponentu (f^0 i g^0) odgovaraju samim funkcijama f i g, možemo napisati opću formulu za derivaciju n-tog reda umnoška funkcija f i g koja glasi

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{n-k}(x) g^k(x).$$

Napomenimo da se ova formula također naziva i Leibnizova formula.
Naposljetku, komentiramo opću formulu i pokušavamo učenike potaknuti da dođu do kombinatornog objašnjenja Leibnizove formule. Učenici se mogu pitati je li ova veza između druge i treće derivacije umnoška dvaju funkcija i binomnog razvoja druge i treće potencije binoma slučajnost, što ih zatim navodi na istraživanje prirodne općenitosti.
Kombinatorno objašnjenje Leibnizove formule je sljedeće;
Svaka od n derivacija može djelovati ili na funkciju f ili na funkciju g. Ako promatramo pribrojnik $f^k g^{n-k}$ zanima nas koeficijent koji bi se trebao naći ispred njega. Ovih k derivacija koje djeluju na funkciju f biramo među ukupno n derivacija. Odnosno, možemo ih odabrati na $\binom{n}{k}$ načina. Tada preostalih $n - k$ derivacija djeluje na funkciju g. Koeficijent će tada biti $\binom{n}{k}$. Budući da k može biti bilo koji prirodni broj između 0 i n, dolazimo do Leibnizove formule.

3.5.3 Vjerojatnost

Posljednja cjelina kojom se učenici bave u četvrtom razredu srednje škole je „Vjerojatnost" [10]. Kako su se do sada upoznali s klasičnom definicijom vjerojatnosti te svima kombinatornim metodama rješavanja problema, učenicima možemo zadati par problema koji će im poslužiti kao ponavljanje.

Primjer 26.[10]
U jednoj je zgradi živjelo 10 žena i 15 muškaraca. Stanarsko vijeće te zgrade čini 5 stanara. Odabire li se na slučajan način stanarsko vijeće, kolika je vjerojatnost da će to vijeće činiti 2 žene?

Učenici znaju da je vjerojatnost slučajnog događaja jednaka je omjeru povoljnih ishoda za taj događaj i ukupnog broja mogućih ishoda. Ono što prvo moramo učiniti je odrediti broj svih mogućih događaja, odnosno odrediti na koliko se načina može odabrati 5 stanara za stanarsko vijeće od ukupno 25 stanara. To možemo učiniti na $\binom{25}{5}$ načina.
Budući da stanarsko vijeće moraju činiti dvije žene, preostala tri člana moraju biti muškarci. Imajući to na umu, zanima nas vjerojatnost događaja A={*odabrane su 2 žene i 3 muškarca*}. Potrebno je odrediti povoljne ishode za taj događaj.
Dvije žene od njih 10 možemo odabrati na $\binom{10}{2}$ načina, a tri muškarca od njih 15 na $\binom{15}{3}$ načina. Vjerojatnost događaja A jednaka je

$$P(A) = \frac{\binom{10}{2}\binom{15}{3}}{\binom{25}{5}} = \frac{195}{506} = 0.385.$$

Učenicima zatim zadajemo novi primjer koji glasi:

Primjer 27.[10]
Dvije karte izvlače se iz snopa od 52 karte slučajnim odabirom. Najprije se izvlači jedna karta (koja se ne vraća), a zatim druga karta. Kolika je vjerojatnost da ćemo izvući dva kralja?

S učenicima diskutiramo o vjerojatnosti da ćemo u prvom izvlačenju izvući kralja. Kralja možemo izvući na četiri načina, dok je ukupan broj karata i mogućnosti za izvući bilo koju kartu 52. Vjerojatnost tada iznosi $\frac{4}{52}$. Budući da se karte ne vraćaju, u drugom izvlačenju na raspolaganju imamo 51 kartu. Ako smo u prvom izvlačenju izvukli jednog od ukupno četiri kralja, na raspolaganju nam preostaju 3 kralja te je vjerojatnost da ćemo i u drugom izlačenju izvući kralja jednaka $\frac{3}{51}$. Dakle, vjerojatnost da ćemo izvući dva kralja u našem slučajnom pokusu iznosi

$$\frac{4}{52} \cdot \frac{3}{51} = \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{17} = \frac{1}{221} \approx 0.0045.$$

U ovom primjeru pojavila su se dva događaja, A i B, za koje kažemo da su zavisni jer ostvarenje događaja B ovisi o ostvarenju događaja A. Ako ostvarenje događaja A ne ovisi o ostvarenju događaja B, kažemo da su događaji A i B nezavisni.

Vjerojatnost da će se dogoditi događaj B nakon što se dogodio događaj A bilježimo u obliku $P(B|A)$. Na taj način označujemo uvjetnu vjerojatnost da će se događaj B dogoditi nakon što se dogodio A.

Učenicima tada pišemo formulu uvjetne vjerojatnosti:
Ako su događaji A i B zavisni, vjerojatnost da će se dogoditi oba događaja je

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A).$$

Iz navedenog slijedi da se vjerojatnost događaja B uz uvjet da se dogodio događaj A, pri čemu je vjerojatnost realizacije događaja A pozitivna, može izračunati iz relacije:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Učenicima naposljetku zadajemo zadatak koji glasi ([10])

Primjer 28.
Od 30 mogućih pitanja student je za ispit naučio odgovore na njih 20. Kolika je vjerojatnost da će mu profesor postaviti tri uzastopna različita pitanja na koja će student znati odgovor?

Neka je A_1={*student zna odgovor na prvo pitanje*}, A_2={*student zna odgovor na drugo pitanje*} i A_3={*student zna odgovor na treće pitanje*}.
Ono što tražimo je $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$, što je jednako $P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2)$.
Očito je $P(A_1) = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$ jer je učenik naučio odgovore na 20 od 30 pitanja.
Dalje je $P(A_2|A_1) = \frac{19}{29}$ jer od preostalih 29 pitanja učenik zna odgovor na njih 19.
Na isti način je je i $P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{18}{28} = \frac{9}{14}$.
Sada znamo i $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{2}{3} \cdot \frac{19}{29} \cdot \frac{9}{14} = \frac{57}{203} \approx 0.28$.

Bibliografija

[1] A. T. Benjamin, J. Quinn *Proofs that really count: The art of combinatorial proof*, The Mathematical Association of America, 2003.

[2] Z. Bujanović, B. Muha, *Elementarna matematika 1*, skripta PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu, 2018.

[3] M. Cvitković, *Kombinatorika: Zbirka zadataka*, Element, Zagreb, 2018.

[4] M. Gusić, *Dokaz - najzanimljivija matematička igra*, Zagreb 2018./2019., Matka 27, br. 106, 94.–95.

[5] Z. Kurnik, *Dokaz*, Matematika i škola (2001.), br. 9, 149.–155.

[6] S. Majstorović, *Dirichletov princip*, Osječki matematički list (2006.), br. 6, 99.–105. `https://hrcak.srce.hr/file/14679`. (posjet 5.1.2022.)

[7] I. Matić, J. Barišin, Lj. Jukić Matić, M. Zelčić, M. Mišurac, R. Gortan, V. Vujasin Ilić, Ž. Dijanić, *Matematika 2, 1. dio, udžbenik matematike u drugom razredu srednje škole sa zadacima za rješavanje, 3 i 4 sata tjedno*, Školska knjiga, Zagreb, 2021.

[8] I. Matić, J. Barišin, Lj. Jukić Matić, M. Zelčić, M. Mišurac, R. Gortan, V. Vujasin Ilić, Ž. Dijanić, *Matematika 2, 2. dio, udžbenik matematike u drugom razredu srednje škole sa zadacima za rješavanje, 3 i 4 sata tjedno*, Školska knjiga, Zagreb, 2021.

[9] I. Matić, Lj. Jukić Matić, M. Zelčić, M. Šujansky, T. Vukas, Ž. Dijanić, *Matematika 2, 1. dio, udžbenik matematike u drugom razredu srednje škole sa zadacima za rješavanje, 3 i 4 sata tjedno*, Školska knjiga, Zagreb, 2021.

[10] I. Matić, Lj. Jukić Matić, M. Zelčić, M. Šujansky, T. Vukas, Ž. Dijanić, *Matematika 2, 1. dio, udžbenik matematike u drugom razredu srednje škole sa zadacima za rješavanje, 3 i 4 sata tjedno*, Školska knjiga, Zagreb, 2021.

[11] Narodne novine, Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj, 2019.

[12] D. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Škoslka knjiga, Zagreb, 2003.

[13] A. Pletikosić, J. Barišin, Lj. Jukić Matić, R. Gortan, V. Vujasin Ilić, Ž. Dijanić, *Matematika 2, 1. dio, udžbenik matematike u drugom razredu srednje škole sa zadacima za rješavanje, 3 i 4 sata tjedno*, Školska knjiga, Zagreb, 2021.

[14] A. Pletikosić, J. Barišin, Lj. Jukić Matić, R. Gortan, V. Vujasin Ilić, Ž. Dijanić, *Matematika 2, 1. dio, udžbenik matematike u drugom razredu srednje škole sa zadacima za rješavanje, 3 i 4 sata tjedno*, Školska knjiga, Zagreb, 2021.

[15] A. Pletikosić, I. Matić, Lj. Jukić Matić, M. Zelčić, M. Njerš, R. Gortan, T. Srnec, Ž. Dijanić, *Matematika 2, 1. dio, udžbenik matematike u drugom razredu srednje škole sa zadacima za rješavanje, 3 i 4 sata tjedno*, Školska knjiga, Zagreb, 2021.

[16] A. Pletikosić, I. Matić, Lj. Jukić Matić, M. Zelčić, M. Njerš, R. Gortan, T. Srnec, Ž. Dijanić, *Matematika 2, 1. dio, udžbenik matematike u drugom razredu srednje škole sa zadacima za rješavanje, 3 i 4 sata tjedno*, Školska knjiga, Zagreb, 2021.

[17] D. A. Reid, *The meaning of proof in mathematics education*, Paper presented to Working Group 4: Argumentation and Proof, at the Fourth annual conference of the European Society for Research in Mathematics Education. Spain, 17 - 21 Februrary 2005.

[18] D. A. Reid, *C. Knipping*, *Proof in Mathematics Education: Research, Learning and Teaching*, Sense, Rotterdam, 2010.

[19] W. W. Rouse Ball, *A Short Account of the History of Mathematics*, Dover, 1960.

[20] R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics*, Vol. 1. 2^{nd} edition, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 49. Cambridge University press, Cambridge, 2012.

[21] M. Vuković, *Matematička logika 1*, skripta PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu, 2007.

[22] O. Zaslavsky, S. D. Nickerson, A. J. Styliandies, I. Kidron, G. Winicki - Landman, *The need for proof and proving: Mathematical and pedagogical perspectives*, Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI Study (G. Hanna, M. de Villiers), New ICMI Study Series, Springer, 2012., 215.–229.

Sažetak

U ovom diplomskom radu bavimo se kombinatornim dokazima u nastavi matematike. Na početku rada ukratko smo iznijeli povijesni razvoj dokaza. U drugom dijelu rada naveli smo svrhu i potrebu za dokazima unutar nastave matematike; najprije iz učeničke perspektive, zatim iz perspektive nastavnika. Zatim smo pobliže objasnili navedene perspektive prateći razna istraživanja i znanstvene radove. U posljednjem, trećem dijelu rada smo promatrali kombinatorne dokaze u srednjoj školi. Najprije smo definirali što je to kombinatorni dokaz nakon čega smo pokazali neke kombinatorne metode dokazivanja. Potom smo za svaki razred srednje škole s 3 ili 4 sata matematike tjedno, prateći kurikulum, pokazali cjeline i primjere zadataka u kojima možemo primjenjivati kombinatorne dokaze.

Summary

In this thesis we deal with combinatorial proofs in mathematics education. At the beginning of the thesis, we briefly outlined the historical development of proof. In the second part of the paper, we stated the purpose and need for proof within mathematics teaching; first from the student's perspective, then from the teacher's perspective. After this, we explained these perspectives in more detail, following various researches and scientific papers. In the last, third part of the paper, we considered combinatorial proofs in high school teaching. We first defined the notion of combinatorial proof, after which we showed some combinatorial methods of provingproof methods. Then, for each grade of high school with 3 or 4 hours of mathematics per week, following the curriculum, we demonstrated areas and examples of mathematical problems and excercises in which we can apply combinatorial proof.

Životopis

Moje ime je Zrinka Mamić. Rođena sam 13. veljače 1992. u Zagrebu. Pohađala sam OŠ Ljubljanica, te 2006. upisala VII. gimnaziju u Zagrebu. Maturirala sam 2010. godine te u srpnju iste godine upisala preddiplomski sveučilišni studij Matematika: smjer nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Nakon završetka preddiplomskog studija, zaposlila sam se u OŠ Otona Ivekovića gdje i danas radim. 2019. godine upisala sam i diplomski sveučilišni studij Matematika: smjer nastavnički, na istom fakultetu. Tijekom školovanja bavila sam se plivanjem u PK Medveščak, PK Mladost te ZPK i vaterpolom u ŽVK Mladost. Za vrijeme preddiplomskog studija predstavljala sam fakultet na sveučilišnim natjecanjima u plivanju i ženskom vaterpolu. Udana sam i majka jednog djeteta.