Generalizacije Weierstrassove reprezentacijske formule za plohe u Minkowskijevom prostoru

Devald, Davor

Doctoral thesis / Disertacija

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:078876

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-25**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Davor Devald

GENERALIZACIJE WEIERSTRASSOVE REPREZENTACIJSKE FORMULE ZA PLOHE U MINKOWSKIJEVOM PROSTORU

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2022.

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Davor Devald

GENERALIZACIJE WEIERSTRASSOVE REPREZENTACIJSKE FORMULE ZA PLOHE U MINKOWSKIJEVOM PROSTORU

DOKTORSKI RAD

Mentor:

prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, 2022.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Davor Devald

GENERALIZATIONS OF WEIERSTRASS REPRESENTATION FORMULA FOR SURFACES IN MINKOWSKI SPACE

DOCTORAL DISSERTATION

Supervisor:

prof. dr. sc. Željka Milin Šipuš

Zagreb, 2022.

ZAHVALA

Hvala

mojim roditeljima

i najboljim učiteljima na svijetu:

mojoj učiteljici razredne nastave Jasni Österreicher,

mojoj nastavnici matematike i informatike u osnovnoj školi Ireni Turjak,

mom profesoru matematike u srednjoj školi Davoru Iliću,

mojoj mentorici na doktorskom studiju Željki Milin Šipuš.

SAŽETAK

U radnji poopćavamo Weierstrassovu reprezentacijsku formulu na plohe u prostoru Minkowskog. Weierstrassova parametrizacija je lokalna konformna parametrizacija plohe kojom se svaka minimalna ploha u $\mathbb{E}^3$ može reprezentirati parom (f,g) kompleksnih funkcija, gdje je f holomorfna i g meromorfna funkcija. U prvom dijelu uvodimo osnovne pojmove i rezultate o plohama u prostoru Minkowskog s posebnim naglaskom na svjetlosne plohe i dualne funkcije, koje ćemo koristiti kao alat za reprezentaciju svjetlosnih ploha. Analiziramo parametrizacije za prostorne i vremenske plohe u $\mathbb{M}^3$ koje su već pronađene te za formulu McNertney pokazujemo da reprezentira sve regularne prostorne plohe ako koristimo funkcije f i g koje nisu nužno holomorfne. Pronalazimo Weierstrassovu parametrizaciju za svjetlosne plohe pomoću para (f,g) dualnih funkcija, gdje je f holomorfna i g meromorfna funkcija. Sve svjetlosne plohe u $\mathbb{M}^3$ su minimalne. Koristeći vezu s dualnim brojevima, pronalazimo svjetlosni analogon katenoida i helikoida te općenito asociranu familiju i adjungiranu plohu svjetlosne plohe. Pokazujemo 1-1 korespondenciju između konformnih parametrizacija maksimalne/minimalne plohe i konformnih parametrizacija jedinične sfere.

U drugom dijelu sve Weierstrassove parametrizacije poopćavamo na 2-plohe u $\mathbb{M}^4$ analogno kao u euklidskom prostoru. Za prostorne plohe je to već napravljeno ranije pomoću kompleksnih funkcija, za vremenske plohe koristimo kompleksne funkcije (q,r) dviju dualnih varijabli i realne funkcije (f,g), a za svjetlosne plohe koristimo dualne funkcije (ρ,f,g). Za svaku reprezentaciju pronalazimo klasu funkcija koje reprezentiraju maksimalne/minimalne plohe. Parametrizaciju za prostorne plohe poopćavamo na 2-plohe u $\mathbb{M}^n$. U teoriji relativnosti pronalazimo lokalnu parametrizaciju tzv. zarobljenih ploha u Schwarzschildovom prostoru, najjednostavnijem modelu prostor-vremena s crnom rupom.

SUMMARY

In this work we generalize the Weierstrass representation formula for surfaces in the Minkowski space. The Weierstrass parametrization is a local conformal parametrization of a surface which represents every minimal surface in $\mathbb{E}^3$ by a pair of complex functions (f,g), where f is holomorfic and g a meromorfic function. In the first part we introduce the basic terms and results on surfaces in the Minkowski space with focus on lightlike surfaces and dual functions, which we will use as the tool for representing lightlike surfaces. We analyse the parametrizations for spacelike and timelike surfaces which are already known and show that McNertney's formula represents all regular spacelike surfaces when the functions (f,g) are not necessarily holomorphic. We find the Weierstrass representation for lightlike surfaces using a pair (f,g) of dual functions, where f is holomorphic and g a meromorphic function. Every lightlike surface in $\mathbb{M}^3$ is minimal. Using the link with dual numbers, we find the lightlike catenoid and helicoid and we construct the entire associated family and the adjoint surface of a lightlike surface. We show a 1-1 correspondence between the conformal parametrizations of a maximal/minimal surface and the conformal parametrizations of a unit sphere.

In the second part we generalize every Weierstrass parametrization for 2-surfaces in $\mathbb{M}^4$ analogously as in the Euclidean space. For spacelike surfaces this is already done by using complex functions, for timelike surfaces we use complex functions (q,r) of two real variables and real functions (f,g) and for lightlike surfaces we use dual functions (ρ,f,g). For each representation we find the class of functions which represent maximal/minimal surfaces. We generalize the parametrization for spacelike surfaces for 2-surfaces in $\mathbb{M}^n$. In general relativity we find a local parametrization of the so-called trapped surfaces in the Schwarzschild space, the simplest model of spacetime containing a black hole.

SADRŽAJ

Uvod **1**

1 Plohe u prostoru Minkowskog **5**

1.1 Kompleksne i dualne funkcije 5

1.2 Višedimenzionalni prostor Minkowskog 12

1.3 Prostorne i vremenske plohe u $\mathbb{M}^n$ 19

1.4 Svjetlosne hiperplohe i polusvjetlosne plohe u $\mathbb{M}^n$ 33

1.5 Svjetlosne 2-plohe u $\mathbb{M}^n$ 42

2 Weierstrassova parametrizacija za plohe u $\mathbb{M}^3$ **54**

2.1 Weierstrassova parametrizacija za prostorne plohe u $\mathbb{M}^3$ 54

2.2 Weierstrassova parametrizacija za vremenske plohe u $\mathbb{M}^3$ 62

2.3 Weierstrassova parametrizacija za svjetlosne plohe u $\mathbb{M}^3$ 72

2.4 Weierstrassove parametrizacije poznatih ploha 86

3 Weierstrassova parametrizacija za plohe u $\mathbb{M}^4$ **95**

3.1 Weierstrassova parametrizacija za prostorne plohe u $\mathbb{M}^4$ 95

3.2 Weierstrassova parametrizacija za vremenske plohe u $\mathbb{M}^4$ 103

3.3 Weierstrassova parametrizacija za svjetlosne plohe u $\mathbb{M}^4$ 113

3.4 Weierstrassova parametrizacija za prostorne plohe u $\mathbb{M}^N$ 124

4 Maksimalne i minimalne plohe u teoriji relativnosti **132**

4.1 Prostor-vrijeme i crne rupe 132

4.2 Zarobljene i fotonske plohe 140

Zaključak **147**

Bibliografija **149**

Životopis **152**

UVOD

Prvu Weierstrassovu parametrizaciju pronašli su Karl Weierstrass i Alfred Enneper u drugoj polovici 19. stoljeća. Svaka minimalna ploha, tj. ploha srednje zakrivljenosti $H = 0$, može se parametrizirati konformnom parametrizacijom oblika

$$\begin{aligned} x_1(u,v) &= \mathrm{Re} \int \frac{f}{2}(1-g^2)\,dz \\ x_2(u,v) &= \mathrm{Re} \int \frac{if}{2}(1+g^2)\,dz \\ x_3(u,v) &= \mathrm{Re} \int fg\,dz, \end{aligned}$$

gdje su f i g kompleksne funkcije takve da je funkcija f holomorfna, funkcija g meromorfna i funkcija fg^2 holomorfna. Katsuei Kenmotsu je 1979. godine otkrio analogon te reprezentacije za plohe srednje zakrivljenosti $H \neq 0$ ([19]) tako što je rekonstruirao parametrizaciju iz Gaussovog preslikavanja (tj. normalnog polja) plohe. Još jedan tip Weierstrassove parametrizacije otkrili su Boris Konopelchenko i Giulio Landolfi tražeći konformnu parametrizaciju kod koje će parcijalne derivacije biti polinomi što manjeg stupnja funkcija koje reprezentiraju plohu. Svaka regularna ploha u $\mathbb{E}^3$ se može parametrizirati konformnom parametrizacijom oblika

$$\begin{aligned} x_1(u,v) &= \frac{i}{2}\int (s^2+\bar{t}^2)\,dz - (\bar{s}^2+t^2)\,d\bar{z} \\ x_2(u,v) &= -\frac{1}{2}\int (s^2-\bar{t}^2)\,dz + (\bar{s}^2-t^2)\,d\bar{z} \\ x_3(u,v) &= -\int s\bar{t}\,dz + \bar{s}t\,d\bar{z}, \end{aligned}$$

gdje su s i t kompleksne funkcije koje zadovoljavaju tzv. Diracov sustav

$$\begin{aligned} \partial_z t &= ps \\ \partial_{\bar{z}} s &= -pt \end{aligned}$$

za neku glatku realnu funkciju p. Ploha je minimalna ako i samo ako je $p = 0$.

U prostoru Minkowskog razlikujemo tri tipa ploha: prostorne, vremenske i svjetlosne plohe.

Prostorne plohe su Riemannove podmnogostrukosti, vremenske plohe su pseudo-Riemannove, a svjetlosne plohe nisu ni pseudo-Riemannove. Analogon Weierstrass-Enneperove parametrizacije za prostorne plohe u $\mathbb{M}^3$ pronašla je Louise McNertney 1980. godine ([25]), a Konopelchenko je pronašao analogon svoje formule za prostorne plohe u $\mathbb{M}^3$ ([20]). Prostorne plohe su također reprezentirane kompleksnim funkcijama.

Prvu reprezentaciju za vremenske plohe pronašao je Martin Magid 1991. godine ([24]). Radi se o analogonu formule McNertney. Vremenske plohe imaju drugačije uvjete konformnosti od prostornih (i euklidskih) i reprezentirane su četirima realnim funkcijama (q, f, r, g). Analogon Konopelchenkove formule za vremenske plohe pronašao je Sungwook Lee 2008. godine ([22]) te dao geometrijsku interpretaciju parametara (q, r) u Magidovoj formuli: oni su komponente Gaussovog preslikavanja plohe. Leejeva formula reprezentira plohe pomoću realnih funkcija (s_1, t_1, s_2, t_2) koje zadovoljavaju Diracov sustav. Konopelchenko je svoje formule poopćio na $\mathbb{M}^4$, a Magidovu formulu će poopćiti Huili Liu 2013. godine ([23]).

Svjetlosne plohe se više istražuju tek nedavno. Za njih je zbog degenerirane metrike teže uvesti osnovne pojmove poput orijentacije i normalnog polja, inducirane koneksije, operatora oblika plohe i druge fundamentalne forme. To su uspjeli napraviti Aurel Bejancu, Angel Ferrández i Pascual Lucas 1998. godine ([5]) i taj rad se smatra fundamentalnim za teoriju svjetlosnih mnogostrukosti. Za svjetlosne plohe ne možemo definirati srednju zakrivljenost, ali može se definirati analogon minimalne plohe, što je napravio Vasyl Gorkaviy 2008. godine ([15]). Kao definiciju minimalne plohe uzeo je svojstvo za koje je McNertney otkrila da karakterizira maksimalne (minimalne) prostorne (vremenske) plohe, a to je da one imaju netrivijalnu izometričnu G-deformaciju. Pokazao da je da tada imamo dvije disjunktne klase minimalnih svjetlosnih ploha: pravčaste plohe sa svjetlosnim izvodnicama i tzv. l-minimalne plohe. U $\mathbb{M}^3$ su sve svjetlosne plohe pravčaste, a u $\mathbb{M}^n$, $n \geq 4$ imamo obje klase ploha i plohe koje nisu minimalne.

Ovaj doktorski rad je podijeljen u četiri poglavlja. Prvo poglavlje je preliminarno i u njemu uvodimo osnovne pojmove i rezultate iz geometrije ploha u prostoru Minkowskog. Uvodimo osnovne pojmove vezane uz holomorfne i meromorfne kompleksne ([31]) i dualne ([26]) funkcije. Zatim proučavamo elementarnu geometriju prostora Minkowskog. Predstavljamo osnovne rezultate o prostornim i vremenskom plohama u prostoru Minkowskog ([25], [10]). Posebno detaljno bavimo se svjetlosnim plohama. Opisujemo konstrukciju normalnog polja i druge fundamentalne forme ([14]) za svjetlosnu hiperplohu (tj. $(n-1)$-plohu) te za polusvjetlosnu plohu (tj. $(n-2)$-plohu) u $\mathbb{M}^n$. U ovom radu bavimo se samo 2-plohama, međutim u $\mathbb{M}^3$ su one hiper-

plohe, a u $\mathbb{M}^4$ su polusvjetlosne. Za kraj se detaljnije bavimo 2-plohama u $\mathbb{M}^n$, uvodimo pojam G-deformacije i asocirane familije ploha te minimalne svjetlosne plohe. Za sva tri tipa ploha pokazujemo da se mogu lokalno parametrizirati konformnom parametrizacijom, što je ključno za postojanje Weierstrassove parametrizacije.

U drugom poglavlju predstavljamo Weierstrassove parametrizacije za plohe u $\mathbb{M}^3$. Za formulu McNertney pokazujemo da reprezentira sve regularne prostorne plohe ako koristimo funkcije f i g kojima su realni i imaginarni dio glatki, ali nisu nužno holomorfne (reprezentacija je drugačijeg oblika nego u [19]). Za Konopelchenkovu formulu dajemo jednostavan dokaz da se svaka prostorna ploha može tako parametrizirati, koji nije dan u izvornom radu. Zatim proučavamo Magidovu i Leejevu reprezentacijsku formulu za vremenske plohe te geometrijsku interpretaciju funkcija q i r. Za Leejevu formulu dajemo jednostavniji dokaz nego u izvornom radu. Zatim predstavljamo Weierstrassovu parametrizaciju za svjetlosne plohe u $\mathbb{M}^3$ koju je otkrio autor ([12]) i koja reprezentira svjetlosnu plohu parom dualnih funkcija (f,g), gdje je f holomorfna, g meromorfna i fg^2 holomorfna funkcija. Formula je analogon formule McNertney, a analogon Konopelchenkove formule ne postoji.

Dalje se proučavaju svjetlosne plohe i daje se definicija minimalne plohe pomoću fundamentalnih veličina drugog reda ekvivalentna Gorkaviyevoj. Pronalazimo klasu funkcija (f,g) koje reprezentiraju potpuno geodetske plohe (u $\mathbb{M}^3$ su to samo ravnine), čime dobivamo sve konformne parametrizacije ravnina (ne nužno afine). Pomoću dualnih brojeva za svjetlosnu plohu konstruiramo eksplicitno asociranu familiju ploha analogno kao za prostorne i vremenske plohe u [25]. Definiramo svjetlosni analogon katenoida kao jedinu rotacijsku minimalnu plohu (svjetlosni stožac) i zatim svjetlosni helikoid kao helikoidalnu plohu koja pripada toj familiji. Definiramo i adjungiranu plohu svjetlosne plohe, ali ona ima slabija svojstva nego kod prostornih i vremenskih ploha. Za kraj dajemo pregled konformnih parametrizacija poznatih ploha i funkcije koje ih reprezentiraju. Dokazujemo 1-1 korespondenciju između konformnih parametrizacija maksimalne/minimalne plohe i konformnih parametrizacija jedinične sfere.

U trećem poglavlju poopćavamo Weierstrassove reprezentacijske formule iz drugog poglavlja na plohe u $\mathbb{M}^4$. Za prostorne plohe je to već napravljeno, samo predstavljamo parametrizacije koje su dali Liu i Konopelchenko. Dajemo jednostavniji dokaz da se svaka ploha može parametrizirati Konopelchenkovom formulom, ali samo za maksimalne plohe. Za vremenske plohe je autor poopćio Magidovu i Leejevu formulu na $\mathbb{M}^4$ ([11]). Weierstrassova parametrizacija za svjetlosne plohe u $\mathbb{M}^4$ također je originalni doprinos autora i nije objavljena kao zasebni rad.

Pronalazimo klasu funkcija koja reprezentira minimalne svjetlosne plohe u $\mathbb{M}^4$ i ispostavlja se da funkcije zadovoljavaju slabije uvjete od holomorfnosti. Dan je i nužan i dovoljan uvjet da ploha bude pravčasta te da sama parametrizacija bude pravčasta. Parametrizaciju za prostorne plohe poopćavamo na $\mathbb{M}^n$ koristeći Konopelchenkovu metodu iz [21].
U zadnjem poglavlju proučavamo minimalne i maksimalne plohe u teoriji relativnosti. Prvo pokazujemo da iz Einsteinovih postulata specijalne teorije relativnosti slijedi da prostor-vrijeme, četverodimenzionalni ambijent koji predstavlja svemir, ima geometriju Minkowskog. Zatim proučavamo Schwarzschildov prostor, najjednostavniji model prostor-vremena koji sadrži crnu rupu i pokazujemo da zadovoljava Einsteinove postulate opće teorije relativnosti. Zatim definiramo tzv. rubno zarobljene plohe kao plohe kojima je vektor srednje zakrivljenosti svjetlosni i pronalazimo dovoljne uvjete da bi ploha dana Weierstrassovom parametrizacijom bila zarobljena u Schwarzschildovom prostoru. Za kraj razmatramo Weierstrassovu parametrizaciju tzv. fotonskih ploha, čije su geodetske krivulje putanje fotona u prostor-vremenu.

1. PLOHE U PROSTORU MINKOWSKOG

1.1. KOMPLEKSNE I DUALNE FUNKCIJE

Kompleksni broj je broj oblika $z = x + yi$, gdje su $x, y \in \mathbb{R}$ realni i imaginarni dio broja z te $i \notin \mathbb{R}$ imaginarna jedinica takva da je $i^2 = -1$. Skup svih kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ je polje sa standardnim zbrajanjem i množenjem. Polje $\mathbb{C}$ je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ izomorfan prostoru $\mathbb{R}^2$ uz izomorfizam $(x, y) \mapsto x + yi$. Norma $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ inducira euklidsku topologiju na $\mathbb{C}$.
Neka je $U \subseteq \mathbb{C}$ otvoren skup. Kompleksna funkcija $f = \varphi + i\psi : U \to \mathbb{C}$ je neprekidna u točki $z_0 = x_0 + y_0 i \in U$ ako su funkcije φ i ψ neprekidne u točki (x_0, y_0).

Definicija 1.1.1. *Za funkciju $f : U \to \mathbb{C}$ kažemo da je derivabilna u točki $z_0 \in U$ ako postoji*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{1.1}$$

i tada taj broj zovemo derivacija funkcije f u točki z_0. Za funkciju f kažemo da je holomorfna ako je derivabilna i ako je funkcija f' neprekidna. Za funkciju f kažemo da je holomorfna u točki z_0 ako je holomorfna na nekoj otvorenoj okolini točke z_0.
Ako je funkcija f derivabilna u točki z_0, onda je i neprekidna u točki z_0. Obrat ne vrijedi.

Teorem 1.1.2. *Funkcija $f = \varphi + i\psi$ je holomorfna u točki $z_0 \in U$ ako i samo ako su funkcije φ i ψ klase C^1 u točki (x_0, y_0) i zadovoljavaju tzv. Cauchy-Riemannove uvjete:*

$$\partial_x \varphi(x_0, y_0) = \partial_y \psi(x_0, y_0), \quad \partial_x \psi(x_0, y_0) = -\partial_y \varphi(x_0, y_0).$$

Napomena 1.1.3. Za kompleksne funkcije ekvivalentno je:

a) funkcija f je derivabilna,

b) funkcija f je holomorfna,

c) funkcija f je derivabilna po volji mnogo puta (tj. klase C^∞, glatka),

d) funkcija f je analitička, tj. može se razviti u Taylorov red.

Ova svojstva nisu ekvivalentna za realne funkcije.

Ako je funkcija f derivabilna, onda je

$$f' = \partial_x f = -i\partial_y f. \tag{1.2}$$

Definicija 1.1.4. *Za funkciju $\varphi : U \to \mathbb{R}$ kažemo da je harmonička ako je*

$$\partial_{xx}\varphi + \partial_{yy}\varphi = 0.$$

Propozicija 1.1.5. *Ako je funkcija $f = \varphi + i\psi : U \to \mathbb{C}$ holomorfna, onda su funkcije φ i ψ harmoničke.*

Dokaz. Ako deriviramo prvi Cauchy-Riemannov uvjet po x, a drugi po y, dobivamo

$$\partial_{xx}\varphi + \partial_{yy}\varphi = \partial_{yx}\psi - \partial_{xy}\psi = 0.$$

Ako deriviramo prvi uvjet po y, a drugi po x, dobivamo

$$\partial_{yy}\psi + \partial_{xx}\psi = \partial_{xy}\varphi - \partial_{yx}\varphi = 0.$$

■

Obrat ove propozicije ne vrijedi, jedan protuprimjer je funkcija $f(z) = \operatorname{Re} z$. Ovo je ujedno primjer funkcije koja je neprekidna, a nije derivabilna. Međutim, vrijedi sljedeća tvrdnja.

Propozicija 1.1.6. *Ako je funkcija $\varphi : U \to \mathbb{R}$ harmonička, onda postoji funkcija $\tilde{\varphi} : U \to \mathbb{R}$ takva da je funkcija $f = \varphi + i\tilde{\varphi}$ holomorfna.*

Dokaz. Ako funkciju $\tilde{\varphi}$ definiramo formulom

$$\tilde{\varphi}(x,y) = \int \varphi_x(x,y)\,dy + C(x),$$

onda ona zadovoljava prvi Cauchy-Riemannov uvjet. Nadalje, tada je

$$\partial_x\tilde{\varphi}(x,y) = \int \partial_{xx}\varphi(x,y)\,dy + C'(x) = -\int \partial_{yy}\varphi(x,y)\,dy + C'(x) = -\partial_y\varphi(x,y) + \tilde{C}'(x).$$

Ako odaberemo $\tilde{C} = const.$, onda je zadovoljen i drugi Cauchy-Riemannov uvjet. ■

Definicija 1.1.7. *Za funkciju $f : U \to \mathbb{C}$ kažemo da je meromorfna ako postoje holomorfne funkcije $g, h : U \to \mathbb{C}$ takve da je*

$$f = \frac{g}{h}.$$

Funkcija f ima polove u (izoliranim) nultočkama funkcije h (za detalje vidi [31] ili [10]).

Za neprekidnu funkciju $f = \varphi + i\psi : [a,b] \to \mathbb{C}$ definiramo

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \varphi(t)\,dt + i\int_a^b \psi(t)\,dt.$$

Definicija 1.1.8. *Neka je $f : U \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija i $\gamma : [a,b] \to U$ put klase C^1. Integral funkcije f duž puta γ je dan formulom*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt.$$

Želimo poopćiti pojam derivacije za kompleksne funkcije koje ne zadovoljavaju Cauchy-Riemannove uvjete. Jedno poopćenje su operatori ∂_z i $\partial_{\bar{z}}$, koji su definirani za svaku funkciju $f = \varphi + i\psi$ kojoj su realni i imaginarni dio diferencijabilne funkcije:

$$\begin{aligned} \partial_z f &= \frac{1}{2}\partial_x f - \frac{i}{2}\partial_y f \\ \partial_{\bar{z}} f &= \frac{1}{2}\partial_x f + \frac{i}{2}\partial_y f. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Ovi operatori su linearni te zadovoljavaju produktno i Schwarzovo pravilo. Nadalje, funkcija f je holomorfna ako i samo ako je $\partial_{\bar{z}} f = 0$ i tada je $f' = \partial_z f$. Međutim, operator ∂_z ne zadovoljava lančano pravilo. Naime, $\partial_z(\bar{z}) = 0$ i onda za $f(z) = \bar{z}$ i $g(z) = \operatorname{Re} z$ imamo:

$$\partial_z(f \circ g)(z) = \partial_z(\operatorname{Re} z) = \frac{1}{2} \neq 0 = \partial_z f(g(z))\partial_z g(z).$$

Nama treba poopćenje koje će zadovoljavati lančano pravilo, zato ćemo koristiti operator ∂_x. Naime, iz jednakosti (1.2) slijedi da operator ∂_x također poopćava kompleksnu derivaciju.

Propozicija 1.1.9. *Operator ∂_x je linearan te zadovoljava*

a) $\partial_x(fg) = (\partial_x f)g + f\partial_x g$,

b) $\partial_x(f \circ g) = ((\partial_x f) \circ g)\partial_x g$.

Funkcija f je holomorfna ako i samo ako je $\partial_x f = -i\partial_y f$ i tada je $f' = \partial_x f$.

Teorem 1.1.10. *Neka je $f : U \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija i $\gamma : [a,b] \to U$ put klase C^1. Ako funkcija f ima primitivnu funkciju F na U (tj. takvu da je $\partial_x F = f$), onda je*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Dokaz.

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b \partial_x F(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$
$$= \int_a^b (F\circ\gamma)'(t)\,dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

■

Napomena 1.1.11. Svaka funkcija $f = \varphi + i\psi : [a,b] \to \mathbb{C}$, kojoj su realni i imaginarni dio neprekidne funkcije, ima primitivnu funkciju

$$F(t) = \int \varphi(t)\,dt + i\int \psi(t)\,dt$$

jedinstvenu do na konstantu $C \in \mathbb{C}$.

U slučaju holomorfnih funkcija vrijedi i obrat prethodnog teorema, koji je netrivijalan i poznat pod nazivom Cauchyjev teorem za derivaciju (vidi [31]). Nadalje, holomorfna funkcija $f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ima primitivnu funkciju F na U (tj. takvu da je $F' = f$) ako je skup U jednostavno povezan.

Dualni broj je broj oblika $z = x + y\varepsilon$, gdje su $x, y \in \mathbb{R}$ realni i imaginarni dio broja z, a $\varepsilon \notin \mathbb{R}$ imaginarna jedinica takva da je $\varepsilon^2 = 0$. Skup svih dualnih brojeva $\mathbb{D}$ je komutativni prsten sa zbrajanjem i množenjem danim formulama:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\varepsilon, \quad z_1 \cdot z_2 = x_1y_1 + (x_1y_2 + x_2y_1)\varepsilon.$$

Za razliku od polja $\mathbb{C}$, prsten $\mathbb{D}$ nije polje. Broj $z \in \mathbb{D}$ je invertibilan ako i samo ako je $\operatorname{Re} z \neq 0$. Skup svih invertibilnih dualnih brojeva označavamo $\mathbb{D}^\times$. Za $z_1 \in \mathbb{D}$ i $z_2 \in \mathbb{D}^\times$ definiramo

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + y_1\varepsilon}{x_2 + y_2\varepsilon} \cdot \frac{x_2 - y_2\varepsilon}{x_2 - y_2\varepsilon} = \frac{x_1}{x_2} + \frac{-x_1y_2 + y_1x_2}{x_2^2}\varepsilon.$$

Prsten $\mathbb{D}$ je također vektorski prostor nad $\mathbb{R}$ izomorfan prostoru $\mathbb{R}^2$. Na skupu $\mathbb{D}$ osim euklidske imamo i tzv. dualnu topologiju, koja je inducirana pseudonormom $|z|^2 = z \cdot \bar{z} = x^2$. Otvorenim skupom ćemo smatrati skup koji je otvoren u euklidskoj topologiji.

Neprekidnost, derivaciju, holomorfnost i meromorfnost za dualnu funkciju $f : U \subseteq \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ definiramo kao za kompleksne funkcije. U definiciji (1.1) pretpostavljamo da je $z - z_0 \in \mathbb{D}^\times$.

Teorem 1.1.12. *Funkcija $f = \varphi + \varepsilon\psi$ je holomorfna u točki $z_0 \in U$ ako i samo ako su funkcije φ i ψ klase C^1 u točki (x_0, y_0) te zadovoljavaju uvjete*

$$\partial_y\varphi(x_0,y_0) = 0, \quad \partial_x\varphi(x_0,y_0) = \partial_y\psi(x_0,y_0).$$

Ako je funkcija f holomorfna u točki z_0, onda je

$$f'(z_0) = \partial_x f(z_0) = \partial_x \varphi(x_0, y_0) + \varepsilon \partial_x \psi(x_0, y_0). \tag{1.4}$$

Dokaz. Po definiciji je

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{x \to x_0, y \to y_0} \frac{\varphi(x,y) - \varphi(x_0,y_0)}{x - x_0} \\ &+ \lim_{x \to x_0, y \to y_0} \frac{\psi(x,y) - \psi(x_0,y_0)}{x - x_0} \varepsilon - \lim_{x \to x_0, y \to y_0} \frac{(\varphi(x,y) - \varphi(x_0,y_0))(y - y_0)}{(x - x_0)^2} \varepsilon \\ &= \partial_x \varphi(x_0, y_0) + \varepsilon \partial_x \psi(x_0, y_0) - \lim_{x \to x_0, y \to y_0} \frac{(\varphi(x,y) - \varphi(x_0,y_0))(y - y_0)}{(x - x_0)^2} \varepsilon \end{aligned}$$

Zadnji limes se može napisati u obliku

$$\varepsilon \lim_{x \to x_0, y \to y_0} \frac{\varphi(x,y) - \varphi(x_0,y_0)}{y - y_0} \left(\frac{y - y_0}{x - x_0} \right)^2.$$

Drugi i treći limes iz predzadnjeg koraka se mogu zajedno napisati u obliku

$$\varepsilon \lim_{x \to x_0, y \to y_0} \left(\frac{\psi(x,y) - \psi(x_0,y_0)}{y - y_0} - \frac{\varphi(x,y) - \varphi(x_0,y_0)}{x - x_0} \right) \cdot \frac{y - y_0}{x - x_0}.$$

Budući da limes $\lim_{x \to x_0, y \to y_0} \dfrac{y - y_0}{x - x_0}$ ne postoji, postojanje derivacije $f'(z_0)$ je sada ekvivalentno zahtjevima

$$\lim_{x \to x_0, y \to y_0} \frac{\varphi(x,y) - \varphi(x_0,y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0, y \to y_0} \left(\frac{\psi(x,y) - \psi(x_0,y_0)}{x - x_0} - \frac{\varphi(x,y) - \varphi(x_0,y_0)}{y - y_0} \right) = 0.$$

Prvi limes nam daje $\partial_y \varphi(x_0, y_0) = 0$ i (1.4), a drugi $\partial_x \varphi(x_0, y_0) = \partial_y \psi(x_0, y_0)$. ■

Vidimo da, kao u slučaju kompleksnih funkcija, operator ∂_x poopćuje derivaciju za funkcije koje nisu nužno holomorfne. Operator ∂_x za dualne funkcije također ima svojstva iz propozicije 1.1.9. Nadalje, funkcija f je holomorfna ako i samo ako je $\partial_y f = \varepsilon \partial_x f$.

Korolar 1.1.13. *Funkcija $f : I \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ je holomorfna ako i samo ako je oblika*

$$f(z) = \varphi(x) + \varepsilon(\varphi'(x)y + k(x)) \tag{1.5}$$

za jedinstvene funkcije $\varphi, k : I \to \mathbb{R}$ klase C^1.

Dokaz. Integriranjem prvog Cauchy-Riemannovog uvjeta po y dobivamo da funkcija φ ovisi samo o x. Zatim integriranjem drugog Cauchy-Riemannovog uvjeta po y dobivamo da je $\psi(x,y) = \varphi'(x)y + k(x)$ za neku funkciju k, koja ovisi samo o x. ■

Korolar 1.1.14. *Ako su funkcije φ i ψ glatke i funkcija $f = \varphi + i\psi$ holomorfna, onda je funkcija f glatka.*

Dokaz. Dovoljno je pokazati da sve derivacije zadovoljavaju Cauchy-Riemannove uvjete. Iz formule (1.5) imamo da je

$$f'(z) = \partial_x f(z) = \varphi'(x) + \varepsilon(\varphi''(x)y + k'(x)).$$

Sada imamo da je

$$\partial_y(\varphi'(x)) = 0, \quad \partial_x(\varphi'(x)) = \varphi''(x) = \partial_y(\varphi''(x)y + k'(x)).$$

Dakle, funkcija f' zadovoljava Cauchy-Riemannove uvjete, odakle slijedi da je holomorfna. Sada indukcijom slijedi da je funkcija f klase C^∞. ■

Sljedeća lema je zapravo analogon propozicije 1.1.6 za dualne funkcije.

Lema 1.1.15. *Svaka analitička funkcija $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ može se na jedinstven način proširiti do analitičke dualne funkcije.*

Dokaz. Ako formalno razvijemo izraz $f(x + y\varepsilon)$ u Taylorov red oko točke x, dobivamo

$$f(x + y\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} y^n \varepsilon^n = f(x) + f'(x)y\varepsilon$$

jer je $\varepsilon^2 = 0$. Iz toga slijedi da je jedinstveno proširenje dano formulom

$$f(x + y\varepsilon) = f(x) + \varepsilon f'(x)y. \tag{1.6}$$

■

Uočimo da se funkcija f može proširiti formulom (1.6) i ako je samo klase C^1, no tada proširenje nije analitičko jer restrikcija na $\mathbb{R}$ nije analitička. Može se pokazati (indukcijom) da je

$$(x + y\varepsilon)^n = x^n + nx^{n-1}y\varepsilon,$$

odakle slijedi formula (1.6) i ako razvijemo oko bilo koje točke $z_0 \in I \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{D}$.

Teorem 1.1.16. *Funkcija $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{D}$ je analitička ako i samo ako je holomorfna te je u reprezentaciji (1.5) funkcija φ analitička i $k = 0$.*

Dokaz. Ako je funkcija f holomorfna, onda je oblika (1.5). Ako to usporedimo s formulom (1.6), vidimo da ako je još $k = 0$ i funkcija φ analitička, onda je funkcija f jedinstveno analitičko proširenje funkcije φ na skup $I \times \mathbb{R}$. Dakle, funkcija f je analitička.

Obratno, ako je funkcija f analitička, onda je ona analitičko proširenje funkcije $\tilde{f} = (\operatorname{Re} f)\,|_{\mathbb{R}}$ na skup $I \times \mathbb{R}$. No, onda zbog jedinstvenosti proširenja mora biti

$$f(z) = \tilde{f}(x) + \tilde{f}'(x) y \varepsilon,$$

odakle slijedi da je funkcija f oblika (1.5) uz $\varphi = \tilde{f}$ i $k = 0$. Posebno, funkcija f je holomorfna. Funkcija φ je analitička kao restrikcija analitičke funkcije f. ■

Iz prethodnog teorema vidimo da za razliku od kompleksnih funkcija, holomorfna dualna funkcija ne mora biti analitička, čak i ako je klase C^∞.

Integral dualne funkcije duž puta definira se kao u kompleksnom slučaju te vrijedi Cauchyjev teorem za derivaciju i analogon teorema 1.1.10 (vidi [26]).

Neprekidna funkcija $f : [a,b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{D}$ ima primitivnu funkciju jedinstvenu do na konstantu. Nama je bitan samo taj rezultat za funkciju definiranu na segmentu. Za funkcije dualne varijable vrijedi sljedeći rezultat, koji je dokazan u [26]. Dokaz je sličan kao u kompleksnom slučaju.

Teorem 1.1.17. *Svaka holomorfna funkcija $f = \varphi + \varepsilon\psi : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{D}$ ima primitivnu funkciju F (tj. takvu da je $F' = f$) na $I \times \mathbb{R}$. Ako je funkcija f dana formulom (1.5), onda je svaka primitivna funkcija funkcije f dana formulom*

$$F(z) = \int f(z)\,dz = \int \varphi(x)\,dx + \varepsilon\left(\varphi(x)y + \int k(x)\,dx\right) + c,$$

za neku konstantu $c \in \mathbb{D}$.

1.2. Višedimenzionalni prostor Minkowskog

Prostor Minkowskog (Lorentzov prostor) $\mathbb{M}^n$ je realni vektorski prostor $\mathbb{R}^n$ sa pseudoskalarnim produktom $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ danim formulom

$$x \cdot y = -x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n.$$

Taj pseudoskalarni produkt nije (pozitivno) definitan, tj. postoje vektori $x \in \mathbb{M}^n$ takvi da je $x \neq 0$, ali $x \cdot x = 0$. Međutim, on je nedegeneriran, što znači da ako za neki $x \in \mathbb{M}^n$ vrijedi $x \cdot y = 0$ za svaki $y \in \mathbb{M}^n$, onda je $x = 0$.

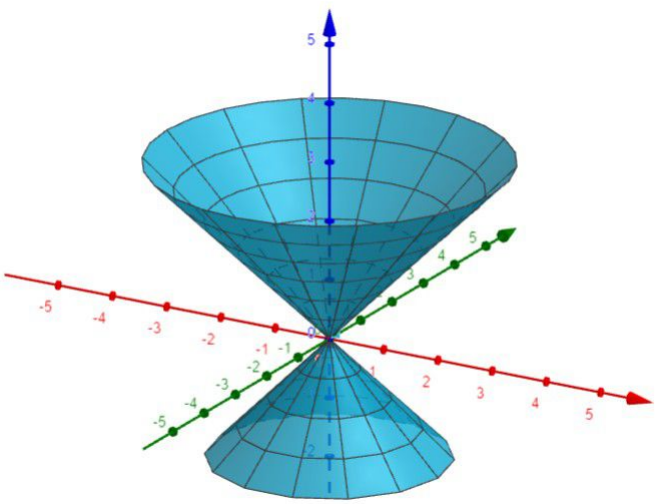
Definicija 1.2.1. *Za vektor $x \in \mathbb{M}^n$ kažemo da je*

a) prostorni ako je $x \cdot x > 0$ ili $x = 0$,

b) vremenski ako je $x \cdot x < 0$,

c) svjetlosni ako je $x \cdot x = 0$ i $x \neq 0$.

Skup $LC = \{x \in \mathbb{M}^n : x \cdot x = 0\}$ zovemo svjetlosni stožac.



Slika 1.1: Svjetlosni stožac $-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ u $\mathbb{M}^3$

Pseudoskalarni produkt inducira pseudonormu i pseudometriku na $\mathbb{M}^n$ na standardni način

$$\|x\| = \sqrt{|x \cdot x|}, \quad d(x,y) = \|x - y\|.$$

Prostor $\mathbb{M}^n$ je pseudo-Riemannova mnogostrukost ako na njemu imamo zadanu odgovarajuću topologiju, koja nije jednoznačna, ali mora zadovoljavati definiciju mnogostrukosti, tj. prostor mora biti Hausdorffov, mora imati prebrojivu bazu i biti lokalno euklidski dimenzije n. Obično se koristi euklidska topologija, s kojom $\mathbb{M}^n$ postaje afini prostor.

Sljedeći rezultat je Cauchy-Schwarzova nejednakost za pseudometriku Minkowskog, što je ključni rezultat za proučavanje svojstava vektora u $\mathbb{M}^n$.

Lema 1.2.2. *Ako su vektori $v, w \in \mathbb{M}^n$ vremenski ili svjetlosni, a vektor $v - w$ nije svjetlosni, onda je*

$$(v \cdot w)^2 \geq (v \cdot v)(w \cdot w). \tag{1.7}$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $v, w \in \{x \in \mathbb{M}^n : x \cdot x \leq 0, x_1 > 0\}$. Ako nije tako, možemo promijeniti orijentaciju vektora, što ne mijenja gornju nejednakost.

Budući da je gornji skup konveksan (dio gornjeg poluprostora omeđen svjetlosnim stošcem), slijedi da je vektor $tv + (1-t)w$ također element tog skupa za svaki $t \in [0,1]$, odakle slijedi

$$t^2(v \cdot v) + 2t(1-t)(v \cdot w) + (1-t)^2(w \cdot w) \leq 0.$$

Izraz s lijeve strane je kvadratna funkcija $f(t) = at^2 + bt + c$, gdje je

$$a = v \cdot v - 2(v \cdot w) + (w \cdot w), \quad b = 2(v \cdot w - w \cdot w), \quad c = w \cdot w.$$

Ako je vektor $v - w$ prostorni, onda je $a = (v-w) \cdot (v-w) > 0$ ili $v = w$. Ako je $v = w$, postiže se jednakost. Pretpostavimo da je $a > 0$. Tada funkcija f ima minimum i budući da je $f \leq 0$ na $[0,1]$, slijedi da je $A = \min_{t \in \mathbb{R}} f(t) \leq 0$. Taj minimum je

$$A = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4(v \cdot v)(w \cdot w) - 4(v \cdot w)^2}{4a}.$$

Dakle, mora biti $(v \cdot v)(w \cdot w) \leq (v \cdot w)^2$.

Ako je vektor $v - w$ vremenski, onda je $a < 0$. Tada funkcija f ima maksimum jednak A u nekoj točki. Želimo pokazati da je $A \geq 0$. Dovoljno je pokazati da postoji $t_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $f(t_0) \geq 0$ (bit će $t_0 \notin [0,1]$).

Ako su vektori v i w linearno zavisni, nejednakost vrijedi (postiže se jednakost), a ako nisu, onda postoji prostorni vektor $u \neq 0$ koji leži u ravnini razapetoj vektorima v i w. Tada je $u = \lambda v + \mu w$ za jedinstvene skalare $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Želimo pokazati da postoji vektor $\tilde{u} = \alpha(\lambda v + \mu w)$ kolinearan s vektorom u takav da je $\alpha\mu = 1 - \alpha\lambda$. Možemo uzeti $\alpha = \dfrac{1}{\mu + \lambda}$. Naime, mora biti $\mu \neq -\lambda$ jer bi u suprotnom vektor u bio kolinearan s vektorom $v - w$, koji je vremenski.

Kako je vektor $\tilde{u}$ prostorni, za $t_0 = \alpha\lambda$ imamo da je $f(t_0) = \tilde{u} \cdot \tilde{u} > 0$. Dakle, $A > 0$ i kako je $a < 0$, slijedi da je brojnik od A manji od 0 (imamo čak strogu nejednakost). ■

Propozicija 1.2.3. *Neka je $v \in \mathbb{M}^n$ vremenski vektor. Ako je $w \in \mathbb{M}^n$ vektor takav da je $v \cdot w = 0$, onda je vektor w prostorni.*

Dokaz. Pretpostavimo da je vektor w vremenski ili svjetlosni, tj. $w \cdot w \leq 0$. Ako je vektor $v - w$ svjetlosni, onda imamo da je $v \cdot v - 2(v \cdot w) + w \cdot w = 0$, odakle zbog $v \cdot w = 0$ slijedi da je $w \cdot w = -v \cdot v > 0$. Dakle, vektor w je prostorni.

Pretpostavimo da vektor $v - w$ nije svjetlosni. Budući da je $v \cdot v < 0$, desna strana u nejednakosti (1.7) je nenegativna. Onda zbog $v \cdot w = 0$ slijedi $w \cdot w = 0$. Dakle, vektor w mora biti svjetlosni. No, tada za funkciju f iz dokaza prethodne leme imamo da je $b = 0$, odakle slijedi da funkcija f postiže globalni ekstrem $A = 0$.

Ako je vektor $v - w$ prostorni, onda je A minimum. No, kako je $f(1) = v \cdot v < 0$, dobivamo kontradikciju. Ako je vektor $v - w$ vremenski, onda je A maksimum. No, tada za $t_0 = \alpha\lambda$ iz dokaza prethodne leme imamo da je $f(t_0) > 0$, što je opet kontradikcija. ■

Korolar 1.2.4. *Svaka ortonormirana baza $\{v_1, \ldots, v_n\}$ za $\mathbb{M}^n$ sastoji se od jednog vremenskog i $n-1$ prostornih vektora.*

Dokaz. Vektori v_i ne mogu biti svjetlosni zbog $\|v_i\| = 1 \neq 0$. Ako su svi vektori v_i prostorni, onda za proizvoljni vektor $x \in \mathbb{M}^n$, $x = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ imamo:

$$x \cdot x = \alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2 \geq 0,$$

što povlači da je svaki vektor $x \in \mathbb{M}^n$ prostorni, što ne vrijedi. Dakle, baza mora sadržavati barem jedan vremenski vektor.

S druge strane, ako imamo barem dva vremenska vektora v_i i v_j, $i \neq j$, onda zbog $v_i \cdot v_j = 0$ dobivamo kontradikciju s propozicijom 1.2.3. ■

Propozicija 1.2.5. *Neka su $v, w \in \mathbb{M}^n$ svjetlosni vektori. Tada je $v \cdot w = 0$ ako i samo ako su vektori v i w kolinearni.*

Dokaz. Pretpostavimo da su vektori v i w kolinearni. Tada je, zbog $v \neq 0$, $w = \lambda v$ za neki $\lambda \in \mathbb{R}$. No, tada je $v \cdot w = v \cdot (\lambda v) = \lambda (v \cdot v) = \lambda \cdot 0 = 0$.

Pretpostavimo da je $v \cdot w = 0$. Ako su vektori v i w linearno nezavisni, onda sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(\alpha v + \beta w) \cdot (\alpha v + \beta w) = \alpha^2 (v \cdot v) + 2\alpha\beta (v \cdot w) + \beta^2 (w \cdot w) = \alpha^2 \cdot 0 + 2\alpha\beta \cdot 0 + \beta^2 \cdot 0 = 0.$$

Iz toga slijedi da je čitava ravnina razapeta vektorima v i w podskup svjetlosnog stošca, što ne može biti. Naime, ako presječemo svjetlosni stožac dvijema horizontalnim ravninama, dio stošca između njih je omeđen skup u euklidskoj metrici. No, ako isto napravimo za ravninu koja prolazi kroz ishodište, dobijemo neomeđen skup, a neomeđen skup ne može biti podskup omeđenog skupa. ■

Kao što imamo tri tipa vektora, u prostoru Minkowskog razlikujemo i tri tipa potprostora.

Definicija 1.2.6. *Za potprostor $M \subseteq \mathbb{M}^n$ kažemo da je*

a) prostorni ako je svaki vektor $x \in M$ prostorni,

b) vremenski ako sadrži barem jedan vremenski vektor,

c) svjetlosni ako sadrži barem jedan svjetlosni vektor, ali ne sadrži vremenski vektor.

Propozicija 1.2.7. *Neka je $n \geq 2$ i $M \subseteq \mathbb{M}^n$ potprostor.*

a) Ako je potprostor M je prostorni, onda je potprostor $M^\perp$ vremenski.

b) Ako je potprostor M vremenski, onda je potprostor $M^\perp$ prostorni.

c) Ako je potprostor M svjetlosni, onda je potprostor $M^\perp$ svjetlosni.

U prva dva slučaja je $M \oplus M^\perp = \mathbb{M}^n$, a u trećem je $M + M^\perp \neq \mathbb{M}^n$ i suma nije direktna.

Dokaz. a) Za $M = \{0\}$ tvrdnja je trivijalna. Pretpostavimo da je $M \neq \{0\}$ i $n \geq 3$.

Prvo ćemo dokazati pomoćnu tvrdnju: ako je vektor $x \in \mathbb{M}^n$ okomit na sve svjetlosne vektore, onda je $x = 0$. Za $i \in \{2, \ldots, n\}$, vektori $\tilde{e}_i = e_1 + e_i$ su svjetlosni, pa iz $x \cdot \tilde{e}_i = 0$ slijedi $-x_1 + x_i = 0$. Dakle, $x = x_1(1, \ldots, 1)$. S druge strane, zbog $n \geq 3$, vektor $\tilde{e} = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \ldots, 0)$ je svjetlosni, pa onda iz $x \cdot \tilde{e} = 0$ slijedi $x_1(-1 + \sqrt{2}) = 0$, tj. $x_1 = 0$.

Neka je sada $\{v_1, \ldots, v_k\}$ bilo koja ortonormirana baza za M. Tada prema pomoćnoj tvrdnji postoji svjetlosni vektor $e \in \mathbb{M}^n$ koji nije okomit na vektor $v_1 \neq 0$. Stavimo

$$v = e - \sum_{i=1}^{k} (e \cdot v_i) v_i.$$

Tada je $v \cdot v_i = 0$ za svaki i, odakle slijedi da je $v \in M^\perp$. Nadalje,

$$\begin{aligned} v \cdot v &= \underbrace{e \cdot e}_{=0} - 2e \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} (e \cdot v_i) v_i \right) + \left(\sum_{i=1}^{n} (e \cdot v_i) v_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} (e \cdot v_i) v_i \right) \\ &= -2 \sum_{i=1}^{n} (e \cdot v_i)^2 + \sum_{1 \leq i,j \leq n} (e \cdot v_i)(e \cdot v_j) \underbrace{(v_i \cdot v_j)}_{=\delta_{ij}} = -\sum_{i=1}^{n} (e \cdot v_i)^2 \end{aligned}$$

Sada zbog $e \cdot v_1 \neq 0$ slijedi da je $v \cdot v < 0$. Dakle, vektor v, a time i potprostor $M^\perp$, je vremenski. Ako je $n = 2$, onda je $\dim M \leq 1$ jer je čitav $\mathbb{M}^2$ vremenski potprostor. Dakle, $M = [(x_1, x_2)]$ za neki prostorni vektor $(x_1, x_2) \neq 0$. No, tada je $M^\perp = [(x_2, x_1)]$ i $-x_2^2 + x_1^2 = -(-x_1^2 + x_2^2) < 0$, dakle potprostor $M^\perp$ je vremenski.

b) Budući da je potprostor M vremenski, on sadrži neki vremenski vektor v. No, tada za svaki vektor $x \in M^\perp$ imamo da je $x \cdot v = 0$, odakle prema propoziciji 1.2.3 slijedi da je vektor x prostorni. Dakle potprostor $M^\perp$ je prostorni.

c) Budući da je potprostor M svjetlosni, on sadrži neki svjetlosni vektor v. No, tada je $v \cdot v = 0$, što povlači da je $v \in M^\perp$. Dakle, potprostor $M^\perp$ sadrži svjetlosni vektor. Pretpostavimo da sadrži i vremenski vektor w. Tada je $v \cdot w = 0$, što je u kontradikciji s propozicijom 1.2.3.

Pokažimo sada da je u prva dva slučaja suma $M + M^\perp$ direktna. Ako je $v \in M \cap M^\perp$, onda je $v \cdot v = 0$. No, kako barem jedan od prostora M i $M^\perp$ sadrži vremenski vektor w, zbog $v \cdot w = 0$ iz propozicije 1.2.3 slijedi $v = 0$.

Pokažimo sada da je $M \oplus M^\perp = \mathbb{M}^n$. Ako je potprostor M prostorni (vremenski), onda postoji ortonormirana baza $\{v_1, \ldots, v_k\}$ za M ($M^\perp$) jer možemo provesti Gram-Schmidtov postupak. Tu bazu možemo nadopuniti do neke baze $\{v_1, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ za $\mathbb{M}^n$. Dovoljno je sada pokazati da je $v_i \in M \oplus M^\perp$ za sve $k+1 \leq i \leq n$. Uočimo da je

$$y = v_i - \underbrace{\sum_{j=1}^{k} (v_i \cdot v_j) v_j}_{=x} \in M^\perp$$

jer je $y \cdot v_r = 0$ za sve $1 \leq r \leq k$. S druge strane, $x \in M$ kao linearna kombinacija vektora $v_r \in M$, pa je $v_i = x + y \in M + M^\perp$.

U trećem slučaju, za svjetlosni vektor $v \in M$ imamo da je $v \in M \cap M^\perp$ i $v \neq 0$, dakle suma nije direktna. Suma nije jednaka čitavom $\mathbb{M}^n$ jer ne sadrži vremenske vektore. Naime, za $v = v_1 + v_2 \in M + M^\perp$ imamo da je $v \cdot v = v_1 \cdot v_1 + v_2 \cdot v_2 \geq 0$. ■

Ako je $\dim M = 1$, onda je M prostorni (vremenski, svjetlosni) pravac ako i samo ako je svaki vektor $v \in M$, $v \neq 0$ prostorni (vremenski, svjetlosni).

U sljedećoj propoziciji ćemo vidjeti kako izgledaju ravnine u $\mathbb{M}^n$.

Propozicija 1.2.8. *Neka je $n \geq 3$ i $M \subseteq \mathbb{M}^n$ potprostor dimenzije 2. Potprostor M je vremenski ako i samo ako sadrži dva linearno nezavisna svjetlosna vektora.*

Dokaz. Pretpostavimo da je potprostor M vremenski. Tada postoji vremenski vektor $v \in M$. Možemo ga nadopuniti do neke baze $\{v, w\}$ za M. Ako je $w \cdot v = 0$, stavimo $u = w$, a inače

$u = v - \frac{v \cdot v}{w \cdot v} w$. Tada je $u \in M$ i $u \cdot v = 0$. Iz toga slijedi da je vektor u prostorni te mora biti $u \neq 0$ jer su vektori v i w linearno nezavisni. Za $t \in \mathbb{R}$ imamo:

$$(tu+v) \cdot (tu+v) = 0 \Leftrightarrow (u \cdot u)t^2 + 2(u \cdot v)t + (v \cdot v) = 0.$$

Ovo je kvadratna jednadžba s diskriminantom $-4(u \cdot u)(v \cdot v) > 0$, odakle slijedi da jednadžba ima dva različita realna rješenja t_1 i t_2. Vektori $e_i = t_i u + v$, $i = 1,2$ su svjetlosni, leže u ravnini M i zbog $t_1 \neq t_2$, linearno su nezavisni.

Obratno, pretpostavimo da postoje dva linearno nezavisna svjetlosna vektora $e_1, e_2 \in M$. Zbog linearne nezavisnosti slijedi da je $e_1 \cdot e_2 \neq 0$. Tada kvadratna funkcija

$$f(t) = (te_1 + (1-t)e_2) \cdot (te_1 + (1-t)e_2) = 2t(1-t)(e_1 \cdot e_2)$$

ima dvije nultočke $t_1 = 0$ i $t_2 = 1$, što povlači da mora biti $f(t_0) < 0$ za neki $t_0 \in \mathbb{R}$. Tada je vektor $v = t_0 e_1 + (1-t_0)e_2 \in M$ vremenski, odakle slijedi da je ravnina M vremenska. ■

Uočimo da iz prethodne propozicije slijedi da svjetlosna ravnina sadrži točno jedan svjetlosni pravac, a svi ostali vektori u toj ravnini su prostorni.

Za kraj ćemo još uvesti vektorski produkt za trodimenzionalni prostor Minkowskog. Sljedeće propozicije ćemo navesti bez dokaza, koji se mogu pročitati u [10] ili [29]. Tamo su rezultati koje dokazali za $\mathbb{M}^n$ dokazani na jednostavniji način u slučaju $n = 3$ pomoću vektorskog produkta.

Propozicija 1.2.9. *Za vektore $u, v \in \mathbb{M}^3$ postoji jedinstveni vektor $u \times v \in \mathbb{M}^3$ takav da je*

$$(u \times v) \cdot x = \det(u, v, x)$$

za svaki vektor $x \in \mathbb{M}^3$. Vektor $u \times v$ je dan formulom

$$u \times v = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix},$$

gdje je $u = (u_1, u_2, u_3)$, $v = (v_1, v_2, v_3)$ te $\{e_1, e_2, e_3\}$ standardna baza za $\mathbb{M}^3$.

Vektor $u \times v$ iz prethodne propozicije zovemo vektorski produkt vektora u i v. U sljedećoj propoziciji su dana svojstva vektorskog produkta u prostoru Minkowskog.

Propozicija 1.2.10. *Za sve $u, v, w \in \mathbb{M}^3$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi:*

a) $u \times v \perp u, v$,

b) $v \times u = -(u \times v)$,

c) $(u \times v) \cdot w = u \cdot (v \times w)$,

d) $(\alpha u) \times v = \alpha(u \times v)$,

e) $(u + v) \times w = u \times w + v \times w$,

f) $u \times v = 0$ *ako i samo ako je skup* $\{u, v\}$ *linearno zavisan,*

g) skup $\{u, v, u \times v\}$ *je baza za* $\mathbb{M}^3$ *ako i samo ako vektor* $u \times v$ *nije svjetlosni ni nulvektor,*

h) $(u \times v) \times w = -(u \cdot w)v + (v \cdot w)u$.

Vektorski produkt općenito nije asocijativan, tj. $(u \times v) \times w \neq u \times (v \times w)$.

Propozicija 1.2.11. **(Lagrangeov identitet)** *Za vektore* $a, b, c, d \in \mathbb{M}^3$ *vrijedi*

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = \begin{vmatrix} a \cdot d & a \cdot c \\ b \cdot d & b \cdot c \end{vmatrix}.$$

Propozicija 1.2.12. *Ako je skup* $\{u, v\} \subseteq \mathbb{M}^3$ *ortonormiran, onda je skup* $\{u, v, u \times v\}$ *ortonormirana baza za* $\mathbb{M}^3$. *Posebno, svaki se jedinični vektor* $u \in \mathbb{M}^3$ *može nadopuniti do ortonormirane baze za* $\mathbb{M}^3$.

1.3. Prostorne i vremenske plohe u $\mathbb{M}^n$

U ovom radu uglavnom ćemo proučavati 2-plohe u $\mathbb{M}^3$ i $\mathbb{M}^4$, ali ćemo u preliminarnom poglavlju malo proučiti i svjetlosne plohe viših dimenzija. O prostornim i vremenskim plohama u $\mathbb{M}^3$ može se puno detaljnije pročitati u [10]. Ovdje ćemo većinu tih rezultata navesti bez dokaza, koji se izravno poopćavaju na 2-plohe u $\mathbb{M}^n$.

Definicija 1.3.1. *Skup $S \subseteq \mathbb{M}^n$, $S \neq \emptyset$ zovemo k-ploha ako za svaku točku $p \in S$ postoji difeomorfizam $\mathbf{x} : U \to V \cap S$, gdje su $U \subseteq \mathbb{R}^k$ i $V \subseteq \mathbb{M}^n$, $k \leq n$ otvoreni skupovi i $p \in V$. Preslikavanje $\mathbf{x}$ zovemo (lokalna) parametrizacija, a preslikavanje $\mathbf{x}^{-1}$ (lokalna) karta plohe S.*

Ako je $k = 1$, onda plohu S zovemo krivulja. Ako je $k = n - 1$, plohu S zovemo hiperploha. Ako je $k = n$, onda je S otvoreni skup u $\mathbb{M}^n$. Plohom ćemo kraće zvati 2-plohu u $\mathbb{M}^n$.

Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoreni skup (tj. n-ploha). Tangencijalni prostor skupa U u točki $p \in \mathbb{R}^n$ je vektorski prostor

$$T_pU = \{(p, v) : v \in \mathbb{R}^n\},$$

koji je izomorfan prostoru $\mathbb{R}^n$. Kraće pišemo $v_p = (p, v)$ ili samo $v = (p, v)$. Disjunktnu uniju $TU = \bigcup_{p \in U} T_pU$ zovemo tangencijalni svežanj skupa U.

Definicija 1.3.2. *Za k-plohu S kažemo da je regularna u točki $p = \mathbf{x}(u_1, \ldots, u_k) \in S$ ako je diferencijal $d\mathbf{x}_{(u_1,\ldots,u_k)} : T_{(u_1,\ldots,u_k)}U \to T_p\mathbb{M}^n$ injektivan linearni operator.*

Za k-plohu S kažemo da je regularna ako je regularna u svakoj točki $p \in S$. U ovoj radnji ćemo proučavati samo regularne k-plohe.

Neka je $U \subseteq \mathbb{M}^n$ otvoren skup i $f : U \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^1. Tada vektorsko polje $\nabla f : U \to TU$, dano formulom

$$\nabla f(p) = (-\partial_{x_1} f(p), \partial_{x_2} f(p), \ldots, \partial_{x_n} f(p)) \in T_pU,$$

zovemo gradijent funkcije f. Iz teorema o inverznom preslikavanju slijedi da ako je k-ploha S regularna u točki p, onda se ona može lokalno oko točke p prikazati implicitno jednadžbom $f(x_1, \ldots, x_n) = c$, gdje je $f : U \subseteq \mathbb{M}^n \to \mathbb{R}$ glatka funkcija, $c \in \mathbb{R}$ te je $\nabla f(p) \neq 0$. Obratno, ako za nivo-skup $f(x_1, \ldots, x_n) = c$ vrijedi $\nabla f(p) \neq 0$ za neku točku $p = f^{-1}(\{c\})$, onda se taj skup može lokalno oko točke p parametrizirati glatkim preslikavanjem $\mathbf{x} : U \to f^{-1}(\{c\})$ te je operator $d\mathbf{x}_{(u_1,\ldots,u_k)}$, gdje je $\mathbf{x}(u_1, \ldots, u_k) = p$, injektivan.

Definicija 1.3.3. *Neka je S k-ploha u $\mathbb{M}^n$ i $p \in S$ točka. Za vektor $v \in T_p\mathbb{M}^n$ kažemo da je tangencijalni vektor plohe S u točki p ako postoji krivulja $c : I \to S$ takva da je $c(t_0) = p$*

i $c'(t_0) = v$ za neki $t_0 \in I$. Skup T_pS svih tangencijalnih vektora plohe S u točki p zovemo tangencijalni prostor plohe S u točki p. Svežanj $TS = \bigcup_{p\in S} T_pS$ zovemo tangencijalni svežanj plohe S.

Teorem 1.3.4. *Ako je k-ploha S regularna u točki p, onda je skup T_pS potprostor vektorskog prostora $T_p\mathbb{M}^n$ dimenzije k. Ako je $\mathbf{x} : U \to S$ lokalna parametrizacija i $\mathbf{x}(u_1,\dots,u_k) = p$, onda je skup $\{\mathbf{x}_{u_1}(u_1,\dots,u_k),\dots\mathbf{x}_{u_k}(u_1,\dots,u_k)\}$ baza za T_pS.*

Definicija 1.3.5. *Za k-plohu S kažemo da je prostorna (vremenska, svjetlosna) u točki $p \in S$ ako je potprostor T_pS prostorni (vremenski, svjetlosni).*
Krivulja $c : I \to \mathbb{M}^n$ je prostorna (vremenska, svjetlosna) u točki $c(t_0)$ ako i samo ako je vektor $c'(t_0)$ prostorni (vremenski, svjetlosni). k-ploha S je prostorna (vremenska, svjetlosna) ako je prostorna (vremenska, svjetlosna) u svakoj točki $p \in S$.

Definicija 1.3.6. *Neka je S k-ploha u $\mathbb{M}^n$ i $p \in S$ točka. Tada potprostor $T_pS^\perp$ zovemo normalni prostor plohe S u točki p. Svežanj $TS^\perp = \bigcup_{p\in S} T_pS^\perp$ zovemo normalni svežanj plohe S.*
Iz propozicije 1.2.7 i teorema 1.3.4 slijedi: ako je S regularna prostorna ili vremenska k-ploha, onda je $\dim T_pS^\perp = n-k$ te $T_pS \oplus_{orth} T_pS^\perp = T_p\mathbb{M}^n$. Za svjetlosne plohe to ne vrijedi. Nadalje, k-ploha S je prostorna (vremenska, svjetlosna) u točki p ako i samo ako je potprostor $T_pS^\perp$ vremenski (prostorni, svjetlosni).

U ostatku ovog dijela ćemo proučavati samo prostorne i vremenske 2-plohe (kraće, plohe).

Definicija 1.3.7. *Neka je S ploha u $\mathbb{M}^n$. Tada preslikavanje I, dano formulom $I(v,w) = v \cdot w$, $v,w \in T_pS$, $p \in S$, zovemo prva fundamentalna forma plohe S. Ako je $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ parametrizacija, onda funkcije*

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v$$

zovemo fundamentalne veličine prvog reda (metrički koeficijenti) parametrizacije $\mathbf{x}$.
U svakoj točki $p \in S$, preslikavanje $I : T_pS \to T_pS \to \mathbb{R}$ je simetrična bilinearna forma. Sada ćemo uvesti pojam jediničnog normalnog polja samo za plohe u $\mathbb{M}^3$, koje su ujedno i hiperplohe.

Definicija 1.3.8. *Neka je S ploha u $\mathbb{M}^3$ i $p \in S$ točka. Neka je $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ parametrizacija takva da je $\mathbf{x}(u,v) = p$. Tada vektorsko polje $n : S \to T\mathbb{M}^3$, dano formulom*

$$n(p) = \frac{\mathbf{x}_u(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)}{\|\mathbf{x}(u,v) \times \mathbf{x}_v(u,v)\|},$$

zovemo jedinično normalno polje plohe S.

Iz propozicije 1.2.10 slijedi da je polje n prerez svežnja $TS^{\perp}$. Iz propozicije 1.2.11 slijedi da je

$$(\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) \cdot (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v) = F^2 - EG.$$

Nadalje, ploha S je prostorna (vremenska, svjetlosna) ako i samo ako je polje n vremensko (prostorno, svjetlosno).

Definicija 1.3.9. *Za plohu S u $\mathbb{M}^3$ kažemo da je orijentabilna ako postoji glatko jedinično normalno polje n plohe S.*

Ako je ploha S orijentabilna i povezana, onda ona ima točno dva glatka jedinična normalna polja n_1 i n_2 (unutarnje i vanjsko), za koja vrijedi $n_2 = -n_1$.

Definicija 1.3.10. *Neka je (S,n) orijentirana ploha u $\mathbb{M}^3$ i $p \in S$ točka. Preslikavanje $S_p : T_pS \to T_p\mathbb{M}^3$, dano formulom*

$$S_p(v) = -\partial_v n(p) = -dn_p(v),$$

zovemo operator oblika plohe S u točki p.

Preslikavanje S_p je simetričan (samoadjungiran) linearni operator, tj. $S_p(v) \cdot w = v \cdot S_p(w)$ za sve $v, w \in T_pS$. Nadalje, $S_p(T_pS) \subseteq T_pS$, tj. S_p je operator $T_pS \to T_pS$.

Definicija 1.3.11. *Neka je (S,n) orijentirana ploha u $\mathbb{M}^3$. Tada preslikavanje II, dano formulom $II(v,w) = S_p(v) \cdot w$, $v, w \in T_pS$, $p \in S$, zovemo druga fundamentalna forma plohe S. Ako je $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ parametrizacija, onda funkcije*

$$L = S_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_u) \cdot \mathbf{x}_u, \quad M = S_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v), \quad N = S_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_v) \cdot \mathbf{x}_v$$

zovemo fundamentalne veličine drugog reda parametrizacije $\mathbf{x}$.

U svakoj točki $p \in S$, preslikavanje $II : T_pS \times T_pS \to \mathbb{R}$ je simetrična bilinearna forma.

Definicija 1.3.12. *Neka je (S,n) orijentirana ploha u $\mathbb{M}^3$ i $p \in S$ točka. Tada broj $K(p) = \det S_p$ zovemo Gaussova (Gauss-Kroneckerova) zakrivljenost plohe S, a broj $H(p) = \frac{1}{2}\operatorname{tr} S_p$ srednja zakrivljenost plohe S u točki p.*

Teorem 1.3.13. *Neka (S,n) orijentirana ploha u $\mathbb{M}^3$ i $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ parametrizacija. Tada*

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)}.$$

Za točku $p \in S$ kažemo da je umbilička ako je S_p skalarni operator, tj. $S_p = \alpha I$ za neki skalar $\alpha \in \mathbb{R}$. Za linearni operator $A : V \to V$, gdje je V vektorski prostor sa (pseudo)skalarnim produktom, kažemo da se može dijagonalizirati ako postoji ortonormirana baza za V u kojoj je matrični prikaz operatora A dijagonalna matrica (sa svojstvenim vrijednostima na dijagonali). U [10] je dokazan sljedeći rezultat o dijagonalizaciji operatora oblika plohe.

Teorem 1.3.14. *Neka (S,n) orijentirana ploha u $\mathbb{M}^3$ i $p \in S$ točka.*

a) Operator S_p se može dijagonalizirati nad $\mathbb{R}$ ako i samo ako je $H(p)^2 - K(p) > 0$ ili je točka p umbilička.

b) Operator S_p se može dijagonalizirati nad $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ako i samo ako je $H(p)^2 - K(p) < 0$.

c) Operator S_p se ne može dijagonalizirati (nad $\mathbb{C}$) ako i samo ako je $H(p)^2 - K(p) = 0$ i točka p nije umbilička.

Teorem 1.3.15. *Ako je ploha (S,n) prostorna u točki $p \in S$, onda se operator S_p može dijagonalizirati nad $\mathbb{R}$.*

Kod vremenskih ploha moguć je bilo koji od gornja tri slučaja.

Definicija 1.3.16. *Za prostornu (vremensku) plohu (S,n) u $\mathbb{M}^3$ kažemo da je maksimalna (minimalna) ako ima srednju zakrivljenost $H = 0$.*

Neka je (S,n) orijentirana ploha u $\mathbb{M}^3$ i $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ parametrizacija. Površina dijela $\mathbf{x}(U) \subseteq S$ je broj

$$P(\mathbf{x}(U)) = \int_u \|\mathbf{x}_U \times \mathbf{x}_v\| \, dudv = \int_U \sqrt{|EG - F^2|} \, dudv.$$

Familiju parametrizacija $\mathbf{x}_s : U \to \mathbb{M}^3$, $-\varepsilon < s < \varepsilon$ oblika

$$\mathbf{x}_s(u,v) = \mathbf{x}(u,v) + s\phi(u,v)n(\mathbf{x}(u,v)),$$

gdje je $\phi : U \to \mathbb{R}$ bilo koja glatka funkcija, zovemo normalna varijacija parametrizacije $\mathbf{x}$.

Teorem 1.3.17. *Neka je (S,n) orijentirana ploha u $\mathbb{M}^3$ i $\mathbf{x} : U \to S$ parametrizacija. Tada je parametrizacija $\mathbf{x}$ minimum (maksimum, sedlasta točka) funkcionala $\mathbf{x} \mapsto P(\mathbf{x}(U))$ za svaki normalnu varijaciju parametrizacije $\mathbf{x}$ ako i samo ako je $H = 0$ i $K > 0$ ($K < 0$, $K = 0$) na dijelu $\mathbf{x}(U) \subseteq S$.*

Iz teorema 1.3.14 i 1.3.15 slijedi da za prostorne plohe uvijek vrijedi $H^2 - K \geq 0$. Ako je

$H = 0$, onda iz toga slijedi da je $K \leq 0$. Jedina prostorna ploha za koju je $H = K = 0$ je ravnina (to ne vrijedi za vremenske plohe). Iz toga slijedi da svaka prostorna ploha za koju je $H = 0$, osim ravnine, lokalno maksimizira površinu. S druge strane, ako je $H = 0$ i $K > 0$, onda je $H^2 - K < 0$, odakle sijedi da su sve plohe koje lokalno minimiziraju površinu nužno vremenske, iako među vremenskim plohama ima i onih koje maksimiziraju površinu ili ju uopće ne optimiziraju (sedlaste točke).

Definicija 1.3.18. *Neka je S ploha u $\mathbb{M}^n$ i $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ parametrizacija. Ako je ploha S prostorna, onda za parametrizaciju $\mathbf{x}$ kažemo da je konformna ako je*

$$E = G = \lambda > 0, \quad F = 0.$$

Ako je ploha S vremenska, onda za parametrizaciju $\mathbf{x}$ kažemo da je konformna ako je

$$-E = G = \lambda > 0, \quad F = 0.$$

Funkciju $\lambda : U \to \mathbb{R}$ zovemo konformni faktor parametrizacije $\mathbf{x}$.

Sljedeća dva rezultata su ključna za postojanje Weierstrassove reprezentacijske formule. Prvi od njih je dokazan u [16] (isti je dokaz kao za plohe u euklidskom prostoru). Ideja dokaza je pomoću kompleksne reparametrizacije problem svesti na rješavanje tzv. Beltramijeve jednadžbe.

Teorem 1.3.19. *Neka je S prostorna ploha u $\mathbb{M}^n$ i $p \in S$ točka. Tada postoji konformna parametrizacija $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ takva da je $p \in \mathbf{x}(U)$.*

Dokaz. Neka je $\mathbf{x} : U \to S$ bilo koja parametrizacija takva da je $p \in \mathbf{x}(U)$ i

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2$$

njena prva fundamentalna forma. Ako napravimo reparametrizaciju $\mathbf{x}(z, \bar{z})$, gdje je $z = u + iv$, onda ona ima prvu fundamentalnu formu

$$ds^2 = \lambda |dz + \mu\, d\bar{z}|^2, \tag{1.8}$$

gdje je

$$\lambda = \frac{1}{4}(E + G + 2\sqrt{W}), \quad \mu = \frac{1}{4\lambda}(E - G + 2iF),$$

gdje je $W = EG - F^2 > 0$ tzv. Weingartenovo preslikavanje. Uočimo da je $\lambda > 0$ jer je T_pS prostorni potprostor, pa mora biti $E, G > 0$.

Pokažimo da vrijedi jednakost (1.8).

$$
\begin{aligned}
|dz+\mu\, d\bar{z}|^2 &= \left| d(u+vi) + \frac{1}{4\lambda}(E-G+2iF)\, d(u-vi) \right|^2 \\
&= \left| du + i\,dv + \frac{E-G}{4\lambda}\, du - \frac{E-G}{4\lambda} i\, dv + \frac{F}{2\lambda} i\, du + \frac{F}{2\lambda}\, dv \right|^2 \\
&= \left(\left(1+\frac{E-G}{4\lambda}\right) du + \frac{F}{2\lambda}\, dv \right)^2 + \left(\frac{F}{2\lambda}\, du + \left(1-\frac{E-G}{4\lambda}\right) dv \right)^2 \\
&= \left(\frac{E+\sqrt{W}}{2\lambda}\, du + \frac{F}{2\lambda}\, dv \right)^2 + \left(\frac{F}{2\lambda}\, du + \frac{G+\sqrt{W}}{2\lambda}\, dv \right)^2 \\
&= \frac{1}{4\lambda^2}[((E+\sqrt{W})^2+F^2)\, du^2 + 2(E+G+2\sqrt{W})F\, dudv + (F^2+(G+\sqrt{W})^2)\, dv]
\end{aligned}
$$

Budući da je $4\lambda = E+G+2\sqrt{W}$, sada imamo da je

$$
\begin{aligned}
\lambda\, |dz+\beta\, d\bar{z}|^2 &= \frac{1}{4\lambda}[(E^2+2E\sqrt{W}+EG)\, du + 2F\cdot 4\lambda\, dudv + (G^2+2G\sqrt{W}+EG)\, dv^2] \\
&= \frac{1}{4\lambda}[E\cdot 4\lambda\, du^2 + 2F\cdot 4\lambda\, dudv + G\cdot 4\lambda\, dv^2] = E\, du^2 + 2F\, dudv + G\, dv^2 = ds^2
\end{aligned}
$$

Želimo pokazati da postoji reparametrizacija $\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{u},\tilde{v})$ parametrizacije $\mathbf{x}$ koja će biti konformna. Po definiciji, prva fundamentalna forma parametrizacije $\tilde{\mathbf{x}}$ mora biti oblika

$$
ds^2 = \tilde{\lambda}\,(d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2)
$$

za neku glatku funkciju $\tilde{\lambda} > 0$. No, ako supstituiramo kompleksnu varijablu $w = \tilde{u} + i\tilde{v}$, taj izraz se može zapisati na sljedeći način (gledamo w kao funkciju $w(z,\bar{z})$)

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= \tilde{\lambda}\,(d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2) = \tilde{\lambda}\,|d\tilde{u} + i\, d\tilde{v}|^2 = \tilde{\lambda}\,|d(\tilde{u}+i\tilde{v})|^2 \\
&= \tilde{\lambda}\,|dw|^2 = \tilde{\lambda}\,|(\partial_z w)\, dz + (\partial_{\bar{z}} w)\, d\bar{z}|^2 = \tilde{\lambda}\,|\partial_z w|^2 \left| dz + \frac{\partial_{\bar{z}} w}{\partial_z w}\, d\bar{z} \right|^2
\end{aligned}
$$

Ako to usporedimo s jednakošću (1.8), vidimo da će $\tilde{\mathbf{x}}$ biti reparametrizacija od $\mathbf{x}$ ako je

$$
\tilde{\lambda} = \frac{\lambda}{|\partial_z w|^2} > 0, \quad \frac{\partial_{\bar{z}} w}{\partial_z w} = \mu \Leftrightarrow \partial_{\bar{z}} w = \mu\, \partial_z w.
$$

Ova zadnja diferencijalna jednadžba je poznata Beltramijeva jednadžba i netrivijalan je rezultat da ona ima rješenje $w(z,\bar{z})$ koje je difeomorfizam za $|\mu| < 1$. Međutim, to ovdje vrijedi jer je

$$
\begin{aligned}
|\mu|^2 &= \frac{1}{(4\lambda)^2}|E-G+2iF|^2 = \frac{(E-G)^2+4F^2}{(E+G+2\sqrt{W})^2} \\
&= \frac{(E+G)^2-4EG+4F^2}{(E+G)^2+4(E+G)\sqrt{W}+4W} = \frac{(E+G)^2-4W}{(E+G)^2+4(E+G)\sqrt{W}+4W} < 1
\end{aligned}
$$

■

Uočimo da ako je parametrizacija $\mathbf{x}$ iz prethodnog dokaza konformna, onda je $\lambda = E$ i $\mu = 0$, tj. funkcija λ je upravo konformni faktor parametrizacije $\mathbf{x}$. Sljedeći rezultat je dokazan u [32].

Lema 1.3.20. (Frobeniusov teorem) *Neka je M glatka n-mnogostrukost i $E \subseteq TM$ svežanj ranga k takav da za prereze X i Y svežnja E, polje $[X,Y]$ je također prerez svežnja E. Tada za svaku točku $p \in M$ postoji okolina $U \subseteq M$ i parametrizacija $\mathbf{x} : \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle^k \to U$ takva da je $\mathbf{x}(0) = p$ i za sve $a_i \in \langle -\varepsilon, \varepsilon \rangle$, $k+1 \leq i \leq n$, skup*

$$N = \left\{ q \in U : x_i^{-1}(q) = a_i, k+1 \leq i \leq n \right\}$$

je tzv. integralna mnogostrukost svežnja E, tj. za svaku točku $q \in N$ je $T_qN = E_q$.

Teorem 1.3.21. *Neka je S vremenska ploha u $\mathbb{M}^n$ i $p \in S$ točka. Tada postoji konformna parametrizacija $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ takva da je $p \in \mathbf{x}(U)$.*

Dokaz. Iz propozicije 1.2.8 slijedi da na nekoj otvorenoj okolini $V \subseteq S$ točke p postoje glatka linearno nezavisna svjetlosna vektorska polja X i Y, koja su tangencijalna na plohu S. Iz propozicije 1.2.5 slijedi da je $X(q) \cdot Y(q) \neq 0$ za svaku točku $q \in V$. Ako je $X \cdot Y < 0$, možemo promijeniti orijentaciju polja X tako da bude $X \cdot Y > 0$.

Želimo pokazati da postoje glatke funkcije $\lambda, \mu > 0$ takve da je $[\lambda X, \mu Y] = 0$ (o Liejevoj zagradi vidi u [27]). Tada iz Frobeniusovog teorema ([30]) slijedi da postoji parametrizacija $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to V$ takva da je $p \in \mathbf{x}(U)$ te $\mathbf{x}_u = (\lambda X) \circ \mathbf{x}$ i $\mathbf{x}_v = (\mu Y) \circ \mathbf{x}$. Tada za parametrizaciju $\mathbf{x}$ vrijedi

$$E = \lambda^2 (X \cdot X) = 0, \quad F = \lambda \mu (X \cdot Y) > 0, \quad G = \mu^2 (Y \cdot Y) = 0.$$

Ako stavimo $\tilde{\lambda} = \dfrac{F}{2}$ i napravimo reparametrizaciju $\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \mathbf{x}\left(\dfrac{\tilde{u} - \tilde{v}}{2}, \dfrac{\tilde{u} + \tilde{v}}{2} \right)$, onda će biti $-\tilde{E} = \tilde{G} = \tilde{\lambda}$ i $\tilde{F} = 0$, tj. parametrizacija $\tilde{\mathbf{x}}$ će biti konformna. Naime,

$$ds^2 = 2F\, du dv = \tilde{\lambda}\, du dv = \tilde{\lambda}\, d(\tilde{u} + \tilde{v}) d(-\tilde{u} + \tilde{v}) = \tilde{\lambda}(-d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2).$$

Pronađimo sada funkcije λ i μ. Iz svojstava Liejeve zagrade imamo da je

$$[\lambda X, \mu Y] = \lambda \mu [X,Y] + \lambda (X\mu) Y - \mu (Y\lambda) X. \tag{1.9}$$

Budući da je vektorsko polje $[X,Y]$ tangencijalno, a $\{X,Y\}$ baza za TS, slijedi da je

$$[X,Y] = fX + gY$$

za jedinstvene glatke funkcije $f, g : V \to \mathbb{R}$. Ako je $[\lambda X, \mu Y] = 0$, jednakost (1.9) postaje

$$\lambda \mu (fX + gY) = \mu (Y\lambda) X - \lambda (X\mu) Y.$$

Ako sada izjednačimo odgovarajuće komponente s lijeve i desne strane, dobivamo

$$\lambda f = Y\lambda, \quad \mu g = -X\mu.$$

Neka su sada (u,v) bilo koje lokalne koordinate plohe S oko točke p. Budući da je $\{\partial_u, \partial_v\}$ baza za TS, imamo da je

$$X = \alpha\partial_u + \beta\partial_v, \quad Y = \gamma\partial_u + \delta\partial_v$$

za jedinstvene glatke funkcije $\alpha, \beta, \gamma, \delta : U \to \mathbb{R}$ takve da je $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Tada je

$$\lambda f = Y\lambda = \gamma\partial_u\lambda + \delta\partial_v\lambda \Leftrightarrow f = \gamma\partial_u(\ln\lambda) + \delta\partial_v(\ln\lambda)$$

uz pretpostavku da je $\lambda > 0$. Na isti način je

$$-\mu g = X\mu = \alpha\partial_u\mu + \beta\partial_v\mu \Leftrightarrow -g = \alpha\partial_u(\ln\mu) + \beta\partial_v(\ln\mu)$$

uz pretpostavku da je $\mu > 0$. Supstitucijom $\tilde{\lambda} = \ln\lambda$ i $\tilde{\mu} = \ln\mu$ dobivamo parcijalne diferencijalne jednadžbe prvog reda

$$f = \gamma\partial_u\tilde{\lambda} + \delta\partial_v\tilde{\lambda}, \quad -g = \alpha\partial_u\tilde{\mu} + \beta\partial_v\tilde{\mu},$$

koje imaju C^∞ rješenja $\tilde{\lambda}$ i $\tilde{\mu}$ oko točke p. Tada su $\lambda = e^{\tilde{\lambda}} > 0$ i $\mu = e^{\tilde{\mu}} > 0$ tražene funkcije. ■

Primjer. Neka je $S^1 = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 = 1\right\}$, $H^1 = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 - v^2 = 1\right\}$ te

$$S_1 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 + y^2 + z^2 = -1\right\}$$
$$S_2 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : -x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

prostorna i vremenska jedinična sfera sa središtem u ishodištu.

Stereografska projekcija plohe S_1 s obzirom na sjeverni pol $A = (0,0,1)$ na xy-ravninu je injekcija i njen inverz je preslikavanje $\mathbf{x}_1 : \mathbb{R}^2 \setminus S^1 \to S_1 \setminus \{A\}$ dano formulom

$$\mathbf{x}_1(u,v) = \left(1 - \frac{2}{1-u^2-v^2}, \frac{2u}{1-u^2-v^2}, \frac{2v}{1-u^2-v^2}\right). \tag{1.10}$$

Računamo:

$$\partial_u\mathbf{x}_1(u,v) = \left(\frac{4u}{(1-u^2-v^2)^2}, \frac{2(1+u^2-v^2)}{(1-u^2-v^2)^2}, \frac{4uv}{(1-u^2-v^2)^2}\right)$$
$$\partial_v\mathbf{x}_1(u,v) = \left(\frac{4v}{(1-u^2-v^2)^2}, \frac{4uv}{(1-u^2-v^2)^2}, \frac{2(1-u^2+v^2)}{(1-u^2-v^2)^2}\right)$$

$$E_1 = \partial_u\mathbf{x}_1 \cdot \partial_u\mathbf{x}_1 = \frac{4}{(1-u^2-v^2)^2}, \quad F_1 = \partial_u\mathbf{x}_1 \cdot \partial_v\mathbf{x}_1 = 0, \quad G_1 = \partial_v\mathbf{x}_1 \cdot \partial_v\mathbf{x}_1 = \frac{4}{(1-u^2-v^2)^2}.$$

Dakle, parametrizacija $\mathbf{x}_1$ je konformna s konformnim faktorom $\lambda_1 = E_1$.

Inverz stereografske projekcije $\mathbf{x}_2 : \mathbb{R}^2 \setminus H^1 \to S_2 \setminus \{z = 1\}$, dan formulom

$$\mathbf{x}_2(u,v) = \left(\frac{2u}{1-u^2+v^2}, \frac{2v}{1-u^2+v^2}, 1 - \frac{2}{1-u^2+v^2}\right), \tag{1.11}$$

je konformna parametrizacija s konformnim faktorom

$$\lambda_2 = \frac{4}{(1-u^2+v^2)^2}.$$

Ne može se za svaku plohu eksplicitno konstruirati konformna parametrizacija. Zanimljiv je sljedeći rezultat ([8]) da se pomoću konformne parametrizacije za jediničnu sferu može konstruirati lokalna konformna parametrizacija na bilo kojoj maksimalnoj ili minimalnoj plohi.

Lema 1.3.22. (Weingartenove formule) *Neka je (S,n) orijentirana ploha u $\mathbb{M}^3$ i $\mathbf{x}: U \to S$ parametrizacija. Tada je*

$$(n\circ\mathbf{x})_u = \frac{MF-LG}{EG-F^2}\mathbf{x}_u + \frac{LF-ME}{EG-F^2}\mathbf{x}_v$$
$$(n\circ\mathbf{x})_v = \frac{NF-MG}{EG-F^2}\mathbf{x}_u + \frac{MF-NE}{EG-F^2}\mathbf{x}_v.$$

Teorem 1.3.23. *Neka je (S,n) maksimalna (minimalna) ploha u $\mathbb{M}^3$ i $p \in S$ točka koja nije umbilička. Neka je $V \subseteq S$ otvorena okolina točke p takva da je $n: V \to n(V)$ difeomorfizam. Neka je $\tilde{\mathbf{x}}: U \to n(V)$ bilo koja konformna parametrizacija jedinične prostorne (vremenske) sfere oko točke $n(p)$. Tada je parametrizacija $\mathbf{x} = n^{-1}\circ\tilde{\mathbf{x}}: U \to S$ konformna.*

Dokaz. Budući da točka p nije umbilička, slijedi da je $K(p) = -\det\nabla n(p) \neq 0$, odakle po teoremu o inverznom preslikavanju da je preslikavanje n difeomorfizam na nekoj otvorenoj okolini točke p. Neka je $\tilde{\lambda}$ konformni faktor parametrizacije $\tilde{\mathbf{x}}$.

Uočimo da iz $\mathbf{x} = n^{-1}\circ\tilde{\mathbf{x}}$ slijedi da je $\tilde{\mathbf{x}} = n\circ\mathbf{x}$ Gaussovo preslikavanje plohe S. Dakle, za preslikavanje $\tilde{\mathbf{x}}$ vrijede Weingartenove formule. Ako uvrstimo Weingartenove formule u jednakost $(n\circ\mathbf{x})_u\cdot(n\circ\mathbf{x})_v = 0$ i pomnožimo obje strane izrazom $EG-F^2$, dobivamo

$$(MF-LG)(NG-MG)E + (MF-LG)(MF-NE)F$$
$$+(LF-ME)(NF-MG)F + (LF-ME)(MF-NE)G = 0$$

$$\Rightarrow (MF-LG)M(-EG+F^2) + (LF-ME)N(F^2-EG) = 0$$

$$\Rightarrow M^2F - MLG + LFN - MEN = 0$$

$$\Rightarrow M(MF-LG-EN) + LFN = 0$$

Budući da je $H = 0$, iz teorema 1.3.13 slijedi da je $EN - 2FM + GL = 0$, dakle

$$-M^2F + LFN = 0 \Rightarrow F(-M^2+LN) = 0.$$

Budući da $K(q) \neq 0$ u svakoj točki $q \in V$ (zbog neprekidnosti), iz teorema 1.3.13 slijedi da je $LN - M^2 \neq 0$ u svakoj točki $q \in V$, dakle mora biti $F = 0$. Sada se Weingartenove formule reduciraju na

$$(n \circ \mathbf{x})_u = -\frac{L}{E}\mathbf{x}_u - \frac{M}{G}\mathbf{x}_v, \quad (n \circ \mathbf{x})_v = -\frac{M}{E}\mathbf{x}_u - \frac{N}{G}\mathbf{x}_v.$$

Uvrštavanjem toga u $(n \circ \mathbf{x})_u \cdot (n \circ \mathbf{x})_u = \pm\tilde{\lambda}$, dobivamo

$$\frac{L^2}{E^2} \cdot E + \frac{M^2}{G^2} \cdot G = \pm\tilde{\lambda} \Rightarrow L^2G + M^2E = \pm\tilde{\lambda}EG.$$

Sada iz $H = 0$ i $F = 0$ slijedi $GL = -EN$, pa imamo

$$-LEN + M^2E = \pm\tilde{\lambda}EG \Rightarrow G = \pm\frac{-LN + M^2}{\tilde{\lambda}}.$$

S druge strane, uvrštavanjem Weingartenovih formula u $(n \circ \mathbf{x})_v \cdot (n \circ \mathbf{x})_v = \lambda$ dobivamo

$$\frac{M^2}{E^2} \cdot E + \frac{N^2}{G^2} \cdot G = \tilde{\lambda} \Rightarrow M^2G + N^2E = \tilde{\lambda}EG.$$

Uvrštavanjem $EN = -GL$ dobivamo

$$M^2G - NGL = \tilde{\lambda}EG \Rightarrow E = \frac{M^2 - NL}{\tilde{\lambda}}.$$

Dakle, vidimo da je $\pm E = G$, tj. parametrizacija $\mathbf{x}$ je konformna. ■

Primjer. Prostorna (vremenska) ravnina S je primjer maksimalne (minimalne) plohe na koju se ne može primijeniti prethodni teorem jer je svaka točka $p \in S$ umbilička. Međutim, konformnu parametrizaciju ravnine je trivijalno konstruirati (u $\mathbb{M}^n$). Neka je $\{e_1, e_2\} \subseteq S$ bilo koja ortonormirana baza (tako da je $e_1 \cdot e_1 = \pm 1$) i $p \in S$ bilo koja točka. Tada je

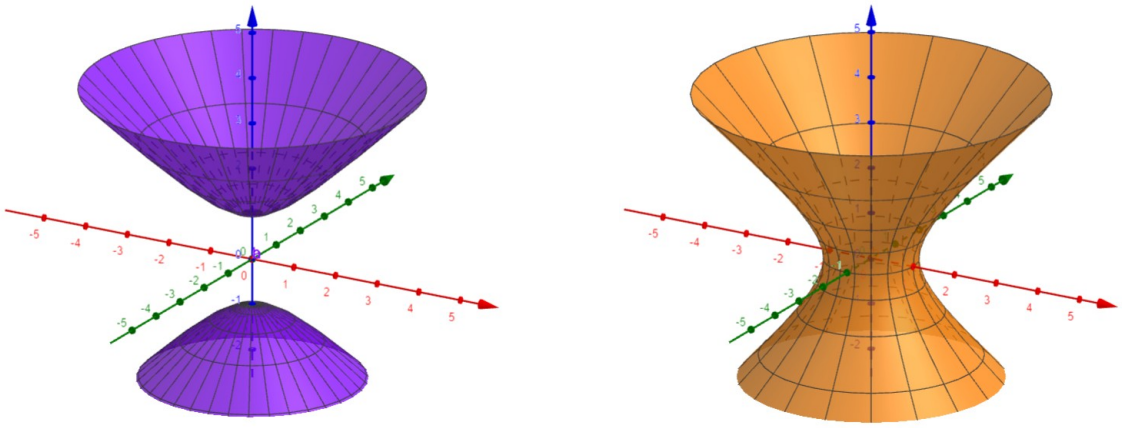
$$\mathbf{x}(u,v) = ue_1 + ve_2 + p \tag{1.12}$$

konformna parametrizacija.

Ako želimo da bude samo $F = 0$ (tzv. ortogonalna parametrizacija), onda se postojanje takve parametrizacije može dokazati bez diferencijalnih jednadžbi, uz pomoć integralnih krivulja vektorskih polja (vidi [8]). Za svaku rotacijsku plohu se može eksplicitno konstruirati ortogonalna parametrizacija. Jedan primjer ortogonalnih parametrizacija sfera S_1 i S_2 je

$$\mathbf{x}_1(u,v) = (\pm\cosh u, \sinh u \sin v, \sinh u \cos v)$$
$$\mathbf{x}_2(u,v) = (\sinh u, \cosh u \cos v, \cosh u \sin v).$$

Konformne parametrizacije nam omogućuju da poopćimo srednju zakrivljenost na plohe u $\mathbb{M}^n$.



Slika 1.2: Prostorna sfera $-x^2+y^2+z^2=-1$ i vremenska sfera $-x^2+y^2+z^2=1$

Teorem 1.3.24. *Neka je S prostorna (vremenska) ploha $\mathbb{M}^n$ i $\mathbf{x}: U \to S$ konformna parametrizacija s konformnim faktorom λ. Tada je vektor $\mathbf{x}_{uu}+\mathbf{x}_{vv}$ $(-\mathbf{x}_{uu}+\mathbf{x}_{vv})$ normalni vektor plohe S. Štoviše, u $\mathbb{M}^3$ je*

$$\pm\mathbf{x}_{uu}+\mathbf{x}_{vv} = \mp 2H\lambda(n\circ\mathbf{x}).$$

Dokaz. Ako deriviramo $\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u=\pm\lambda$ i $\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v=\lambda$ po u te $\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v=0$ po u, dobivamo

$$2(\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_u)=\lambda_u,\quad 2(\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_v)=\lambda_u,\quad \mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_v+\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_{vv}=0.$$

Iz toga slijedi da je

$$\begin{aligned}\pm\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_u &= \frac{1}{2}\lambda_u = \mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_v = -\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_{vv}\\ &\Rightarrow (\pm\mathbf{x}_{uu}+\mathbf{x}_{vv})\cdot\mathbf{x}_u = 0.\end{aligned}$$

Na isti način (deriviranjem prvih dviju jednakosti gore po v, a treće po u) pokaže se da je $(\pm\mathbf{x}_{uu}+\mathbf{x}_{vv})\cdot\mathbf{x}_v=0$. Budući da je $\{\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v\}$ baza za TS, slijedi da je $\pm\mathbf{x}_{uu}+\mathbf{x}_{vv}$ prerez svežnja $TS^\perp$. Pretpostavimo sada da je S ploha u $\mathbb{M}^3$ i neka je

$$n\circ\mathbf{x} = \frac{\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v\|}$$

jedinično normalno polje plohe S. Tada zbog $\dim T_pS^\perp=1$ imamo da je

$$\pm\mathbf{x}_{uu}+\mathbf{x}_{vv} = \alpha(n\circ\mathbf{x})$$

za jedinstvenu glatku funkciju $\alpha: U\to\mathbb{R}$. Ako pomnožimo obje strane ove jednakosti skalarno s vektorom $n\circ\mathbf{x}$, dobivamo

$$\mp\alpha = (n\circ\mathbf{x})\cdot(n\circ\mathbf{x}) = \pm(\mathbf{x}_{uu}\cdot(n\circ\mathbf{x}))+(\mathbf{x}_{vv}\cdot(n\circ\mathbf{x})) = \pm L+N$$

Zbog $\pm E = G = \lambda$ i $F = 0$, formula za srednju zakrivljenost iz teorema 1.3.13 se reducira na

$$H = \frac{\pm N + L}{\pm 2\lambda}.$$

Iz toga slijedi da je

$$\alpha = \mp(\pm L + N) = -L \mp N = -(L \pm N) = -(\pm 2\lambda H) = \mp 2\lambda H.$$

■

Korolar 1.3.25. *Neka je S prostorna (vremenska) ploha u $\mathbb{M}^3$ i $\mathbf{x} : U \to S$ konformna parametrizacija. Tada je ploha S maksimalna (minimalna) ako i samo ako je $\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$ ($-\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv} = 0$).*

Ako je $n \geq 4$, ploha S u $\mathbb{M}^n$ nema jedinstveno (do na orijentaciju) jedinično normalno polje jer je normalni svežanj $TS^{\perp}$ ranga većeg od 1. Prethodni teorem nam omogućuje da definiramo srednju zakrivljenost bez korištenja jediničnog normalnog polja.

Definicija 1.3.26. *Neka je S ploha u $\mathbb{M}^n$ i $\mathbf{x} : U \to S$ konformna parametrizacija. Tada vektorsko polje*

$$h(\mathbf{x}(u,v)) = \frac{1}{2\lambda}(\pm \mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv})$$

zovemo polje srednje zakrivljenosti plohe S. Broj $H(p) = \pm\|h(p)\|$ zovemo srednja zakrivljenost plohe S u točki $p = \mathbf{x}(u,v)$.

Predznak u definiciji polja h je pozitivan za prostorne plohe, a negativan za vremenske. Predznak u definiciji H je po volji. Naime, u slučaju $n = 3$ iz $H(p) = \frac{1}{2}\operatorname{tr} S_p$ slijedi da ako promijenimo orijentaciju plohe, H mijenja predznak. Dakle, srednja zakrivljenost je definirana do na predznak. S druge strane, $K(p) = \det S_p$ ne mijenja predznak pri promjeni orijentacije.

Ako je $n \geq 4$ i ploha S je prostorna, onda je ploha S maksimalna ako i samo ako je h svjetlosno vektorsko polje ili $h = 0$. S druge strane, ako je ploha S vremenska, polje h ne može biti svjetlosno jer je $TS^{\perp}$ prostorni svežanj. Dakle, tada je ploha S minimalna ako i samo ako je $h = 0$.

Sada ćemo definirati klasu asociranih ploha za maksimalne i minimalne plohe u $\mathbb{M}^3$. Ta jednoparametarska familija ploha je uvedena u [25] i pokazano je da postojanje takve familije karakterizira maksimalne i minimalne plohe.

Neka je S maksimalna ploha u $\mathbb{M}^3$ i $\mathbf{x} : U \to S$ konformna parametrizacija. Tada iz korolara 1.3.25 slijedi da su komponentne funkcije x_i, $i = 1,2,3$ preslikavanja $\mathbf{x}$ harmoničke. Zatim iz

propozicije 1.1.6 slijedi da se funkcije x_i mogu nadopuniti do holomorfnih kompleksnih funkcija $f_i = x_i + i\tilde{x}_i$. Neka je $\tilde{\mathbf{x}} : U \to \mathbb{M}^3$ preslikavanje dano formulom $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$.

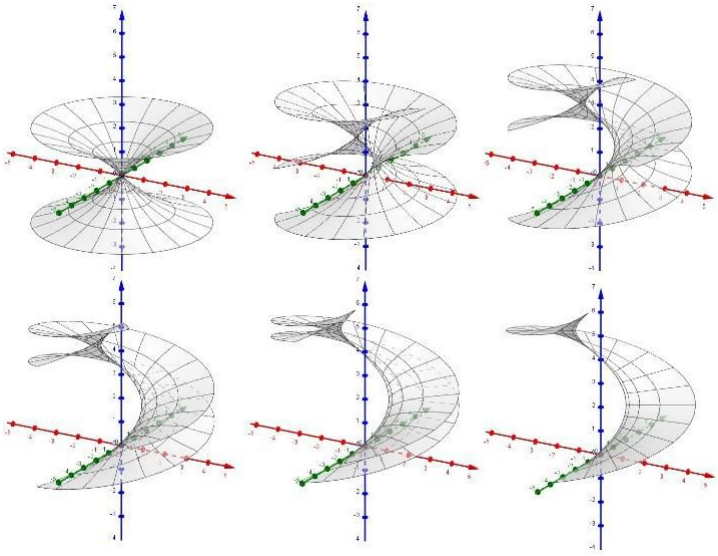
Teorem 1.3.27. *Neka je (S,n) maksimalna ploha u $\mathbb{M}^n$ lokalno parametrizirana konformnom parametrizacijom $\mathbf{x} : U \to S$. Tada je formulom*

$$\mathbf{x}_t(u,v) = (\cos t)\mathbf{x}(u,v) + (\sin t)\tilde{\mathbf{x}}(u,v)$$

definirana jednoparametarska familija $(S_t)_{t\in\mathbb{R}}$ lokalno izometričnih maksimalnih ploha. Za $(u,v) \in U$, tangencijalne ravnine ploha S_t u točkama $p_t = \mathbf{x}_t(u,v)$ su paralelne za sve $t \in \mathbb{R}$.

Familiju $(S_t)_{t\in\mathbb{R}}$ zovemo familija asociranih ploha plohe S. Plohe $S = S_0$ i $\tilde{S} = S_{\pi/2}$ pripadaju familiji $(S_t)_{t\in\mathbb{R}}$.

Primjer. Prostorni katenoid $y^2 + z^2 = \mathrm{sh}^2 x$ i jedna od dvije povezane pruge prostornog helikoida $(-x^2 + y^2)\mathrm{ch}^2 z = y^2$ su adjungirane plohe (vidi [10]).



Slika 1.3: Plohe iz asocirane familije katenoida $y^2 + z^2 = \mathrm{sh}^2 x$ za $t = k\pi/10$, $k \in \{0,1,\ldots,5\}$.

Za konstrukciju familije asociranih ploha minimalne plohe treba nam sljedeći rezultat.

Teorem 1.3.28. *Neka je S vremenska ploha u $\mathbb{M}^3$. Tada je ploha S minimalna ako i samo ako je lokalno translacijska, tj. za svaku točku $p \in S$ postoji parametrizacija $\mathbf{x} : U \to S$ oblika*

$$\mathbf{x}(u,v) = c_1(u) + c_2(v), \tag{1.13}$$

gdje su c_1 i c_2 svjetlosne krivulje, takva da je $p \in \mathbf{x}(U)$.

Sada definiramo preslikavanje $\tilde{\mathbf{x}} : U \to \mathbb{M}^3$ formulom $\tilde{\mathbf{x}}(u,v) = c_1(u) - c_2(v)$.

Teorem 1.3.29. *Neka je (S,n) minimalna ploha u $\mathbb{M}^3$ lokalno parametrizirana parametrizacijom $\mathbf{x}: U \to S$ oblika (1.13). Tada je formulom*

$$\mathbf{x}_t(u,v) = (\mathrm{ch}\, t)\mathbf{x}(u,v) + (\mathrm{sh}\, t)\tilde{\mathbf{x}}(u,v)$$

definirana jednoparametarska familija $(S_t)_{t\in\mathbb{R}}$ lokalno izometričnih minimalnih ploha. Za $(u,v) \in U$, tangencijalne ravnine ploha S_t u točkama $p_t = \mathbf{x}_t(u,v)$ su paralelne za sve $t \in \mathbb{R}$.

Ploha $S = S_0$ pripada familiji $(S_t)_{t\in\mathbb{R}}$. Zanimljivo je da ploha $\tilde{S}$ ne pripada familiji $(S_t)_{t\in\mathbb{R}}$. Naime, plohe S i $\tilde{S}$ su lokalno antiizometrične i kad bi još bile lokalno izometrične, dobili bismo kontradikciju s regularnošću plohe S (vidi [10]).

Neka je $\mathfrak{T}(\mathbb{M}^n)$ skup svih glatkih vektorskih polja na $\mathbb{M}^n$. Linearna koneksija je preslikavanje $\nabla : \mathfrak{T}(\mathbb{M}^n) \times \mathfrak{T}(\mathbb{M}^n) \to \mathfrak{T}(\mathbb{M}^n)$, $(X,Y) \mapsto \nabla_X Y$ koje ima sljedeća svojstva

a) preslikavanje $\nabla_X Y$ je linearno u varijabli X nad $C^\infty(\mathbb{M}^n)$,

b) preslikavanje $\nabla_X Y$ je linearno u varijabli Y nad $\mathbb{R}$,

c) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + (Xf)Y$, $f \in C^\infty(\mathbb{M}^n)$.

Vektorsko polje $\nabla_X Y$ zovemo kovarijantna derivacija polja X u smjeru polja Y.

Prema fundamentalnom teoremu Riemannove geometrije (vidi [27]), koji vrijedi i za pseudo-Riemannove mnogostrukosti, postoji jedinstvena linearna koneksija $\tilde{\nabla}$ na $\mathbb{M}^n$ koja je simetrična ($\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X = [X,Y]$) i usklađena sa pseudometrikom, tj.

$$\tilde{\nabla}_X(Y \cdot Z) = (\tilde{\nabla}_X Y) \cdot Z + Y \cdot \tilde{\nabla}_X Z \tag{1.14}$$

za sve $X,Y,Z \in \mathfrak{T}(\mathbb{M}^n)$ (pri čemu smo definirali $\tilde{\nabla}_X f = Xf$). Tu koneksiju zovemo metrička (Riemannova, Levi-Civita) koneksija. Ako je S prostorna ili vremenska hiperploha u $\mathbb{M}^n$, onda koneksija $\tilde{\nabla}$ inducira koneksiju ∇ na plohi S formulom

$$\nabla_X Y = \pi(\tilde{\nabla}_X Y),$$

gdje je $\pi : T_p\mathbb{M}^n \to T_pS$ ortogonalna projekcija. Koneksija ∇ je također metrička.

Teorem 1.3.30. (Gauss-Weingartenove formule) *Neka je (S,N) orijentirana hiperploha u $\mathbb{M}^n$. Tada za sve $X,Y \in \mathfrak{T}(S)$ vrijedi*

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X,Y)N$$
$$\tilde{\nabla}_X N(p) = -\varepsilon S_p(X(p)),$$

gdje je $\varepsilon = N(p) \cdot N(p) = \pm 1$.

1.4. SVJETLOSNE HIPERPLOHE I POLUSVJETLOSNE PLOHE U $\mathbb{M}^n$

Neka je S regularna k-ploha u $\mathbb{M}^n$ i $p \in S$ točka. Ako je ploha S prostorna ili vremenska u točki p, onda je $T_p\mathbb{M}^n = T_pS \oplus T_pS^\perp$, odakle slijedi da svaki vektor $v \in T_p\mathbb{M}^n$ ima jedinstvenu tangencijalnu i normalnu komponentu, tj. $v = v_1 + v_2$ za jedinstvene vektore $v_1 \in T_pS$ i $v_2 \in T_pS^\perp$. Ako je ploha S svjetlosna u točki p, onda je $T_pS + T_pS^\perp \neq T_p\mathbb{M}^n$ i suma s lijeve strane nikad nije direktna, pa to ne vrijedi.

Ako je $k = n-1$, onda je potprostor $T_pS^\perp$ svjetlosni pravac, odakle slijedi da ploha S u točki p nema jedinstveni (do na orijentaciju) normalni vektor, pa ne možemo definirati Gaussovu i srednju zakrivljenost te drugu fundamentalnu formu u točki p. Čak i kada bismo mogli definirati fundamentalne veličine drugog reda, ne možemo koristiti formulu iz teorema 1.3.13 kako bismo definirali srednju zakrivljenost jer je u nazivniku $EG - F^2 = 0$.

Zato nam treba drugačiji pristup kako bismo definirali gore spomenute pojmove. Ideja je napraviti dekompoziciju prostora $T_p\mathbb{M}^n$ na drugačiji način (na tri potprostora) kako bi vektori $v \in T_p\mathbb{M}^n$ imali jedinstvenu tangencijalnu i normalnu komponentu.

Definicija 1.4.1. *Neka je S svjetlosna k-ploha u $\mathbb{M}^n$ i $p \in S$ točka. Tada potprostor*

$$Rad\, T_pS = T_pS \cap T_pS^\perp$$

zovemo radikalni prostor plohe S u točke p.

Uočimo da je nužno $\dim Rad\, T_pS = 1$ (ovo vrijedi samo u prostoru Minkowskog, općenito u pseudo-Riemannovim prostorima može biti i $\dim Rad\, T_pS > 1$, vidi [14]). Naime, iz definicije slijedi da je svaki vektor $v \in Rad\, T_pS$ svjetlosni ili 0, što povlači da je potprostor $Rad\, T_pS$ svjetlosni pravac (vidi dokaz propozicije 1.2.5). Ako je S hiperploha, onda je

$$Rad\, T_pS = T_pS^\perp \subseteq T_pS.$$

Propozicija 1.4.2. *Neka je S svjetlosna k-ploha u $\mathbb{M}^n$. Tada za svaku točku $p \in S$ postoji prostorni potprostor $S(T_pS) \subseteq T_pS$ takav da je*

$$S(T_pS) \oplus_{orth} Rad\, T_pS = T_pS.$$

Dokaz. Neka je $\{v_1\}$ bilo koja baza za $Rad\, T_pS$. Tada ju možemo nadopuniti do neke baze $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ za nadprostor T_pS. Zatim provedemo Gram-Schmidtov postupak, ali bez normi-

ranja, tj. stavimo

$$v_1' = v_1, \quad v_i' = v_i - \sum_{j=1}^{i-1} (v_i \cdot v_j') v_j', \quad i \geq 2.$$

Zatim definiramo $S(T_pS) = [v_2', \ldots, v_k']$. Tada je

$$S(T_pS) + Rad\, T_pS = [v_1', v_2', \ldots, v_k'] = [v_1, v_2, \ldots, v_k] = T_pS.$$

Indukcijom dobivamo da za $i \geq 2$ vrijedi

$$v_i' \cdot v_1 = \underbrace{v_i \cdot v_1}_{=0} - \sum_{j=1}^{i-1} (v_i \cdot v_j') \underbrace{(v_j' \cdot v_1)}_{=0} = 0.$$

Ovdje smo koristili činjenicu da je $(T_pS^{\perp})^{\perp} = T_pS$, tj. $v_i \cdot v_1 = 0$ za sve $1 \leq i \leq k$.

Iz toga slijedi da je suma $S(T_pS) + Rad\, T_pS$ ortogonalna i da je potprostor $S(T_pS)$ prostorni jer su vektori v_i' svi prostorni. To slijedi iz propozicije 1.2.5 zbog linearne nezavisnosti. Nadalje, suma je direktna jer ako je $v \in S(T_pS) \cap Rad\, T_pS$, $v \neq 0$, onda slijedi da je vektor v istovremeno svjetlosni i prostorni, što je kontradikcija. ■

Potprostor $S(T_pS)$ nije jedinstven. Naime, $S(T_pS)$ je direktni komplement od $T_pS^{\perp}$, ali nije ortogonalni komplement jer sadrži samo neke vektore okomite na $T_pS^{\perp}$, ali ne sve.

Definicija 1.4.3. *Neka je S svjetlosna k-ploha u $\mathbb{M}^n$. Vektorski svežanj*

$$S(TS) = \bigcup_{p \in S} S(T_pS)$$

zovemo mreža plohe S.

Sljedeći teorem je fundamentalan za uvođenje normalnog polja svjetlosne hiperplohe.

Teorem 1.4.4. *Neka je S svjetlosna hiperploha u $\mathbb{M}^n$ i $S(TS)$ bilo koja mreža plohe S. Tada postoji jedinstveni svežanj $tr(TS)$ nad plohom S ranga 1 takav da za svaki prerez $\xi \neq 0$ svežnja $TS^{\perp}$ i koordinatnu okolinu $U \subseteq S$ postoji jedinstveni prerez N svežnja $tr(TS)$ na U takav da je $N \cdot \xi = 1$, $N \cdot N = 0$ i $N \cdot X = 0$ za svaki prerez X svežnja $S(TS)\,|_U$.*

Dokaz. Budući da je S hiperploha, svežanj $S(TS)^{\perp}$ ima rang $n-(n-2) = 2$ te iz $S(T_pS) \subseteq T_pS$ slijedi da je $T_pS^{\perp} \subseteq S(T_pS)^{\perp}$. Neka je F_p direktni komplement potprostora $T_pS^{\perp}$ u potprostoru $S(T_pS)^{\perp}$ i $F = \bigcup_{p \in S} F_p$. Tada svežanj F ima rang $2-1 = 1$.

Nadalje, za svaki prerez $V \neq 0$ svežnja $F\,|_U$ mora biti $\xi \cdot V \neq 0$. Naime, u suprotnom, ako je Y prerez svežnja $S(TS)^{\perp}$, onda zbog $F \oplus TS^{\perp} = S(TS)^{\perp}$ imamo da je

$$Y = \alpha V + \beta \xi$$

za jedinstvene funkcije $\alpha, \beta : U \to \mathbb{R}$. Ako sada pomnožimo obje strane skalarno poljem ξ, dobivamo

$$Y \cdot \xi = \alpha(V \cdot \xi) + \beta(\xi \cdot \xi) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0,$$

odakle slijedi da je svežanj $S(TS)^{\perp}$ degeneriran. Međutim, to ne može biti jer je svežanj $S(TS)$ prostorni, odakle slijedi da je svežanj $S(TS)^{\perp}$ vremenski. Stavimo

$$N = \frac{1}{\xi \cdot V}\left(V - \frac{V \cdot V}{2(\xi \cdot V)}\xi\right). \tag{1.15}$$

Tada je

$$N \cdot \xi = \frac{1}{\xi \cdot V}\left(V \cdot \xi - \frac{V \cdot V}{2(\xi \cdot V)}\underbrace{(\xi \cdot \xi)}_{=0}\right) = 1$$

$$N \cdot N = \frac{1}{(\xi \cdot V)^2}\left(V \cdot V - 2 \cdot \frac{V \cdot V}{2(\xi \cdot V)}(V \cdot \xi) + \frac{(V \cdot V)^2}{4(\xi \cdot V)^2}\underbrace{(\xi \cdot \xi)}_{=0}\right) = 0$$

$$N \cdot X = \frac{1}{\xi \cdot V}\left(\underbrace{V \cdot X}_{=0} + \frac{V \cdot V}{2(\xi \cdot V)}\underbrace{(\xi \cdot X)}_{=0}\right) = 0$$

za svaki prerez X svežnja $S(TS)\,|_U$. Vrijedi i obrat: svako polje N koje zadovoljava ta tri uvjeta mora biti oblika 1.15. Pokažimo to.

Iz $N \cdot X = 0$ za svaki prerez X svežnja $S(TS)$ slijedi da je N prerez svežnja $S(TS)^{\perp}$. No, tada je

$$N = \lambda V + \mu \xi$$

za jedinstvene funkcije $\lambda, \mu : U \to \mathbb{R}$. Zatim iz uvjeta $N \cdot N = 0$ i $N \cdot \xi = 1$ slijedi da mora biti

$$\lambda = \frac{1}{\xi \cdot V}, \quad \mu = -\frac{V \cdot V}{2(\xi \cdot V)}.$$

Pokažimo sada da je prerez N jedinstven, tj. da ne ovisi o izboru prereza V (za dani prerez ξ). Neka je $W \neq 0$ neki drugi prerez svežnja $F\,|_U$. Tada zbog $r(F) = 1$ mora biti $W = \psi V$ za neku funkciju $\psi \neq 0$. No, tada je

$$N_W = \frac{1}{\xi \cdot W}\left(W - \frac{W \cdot W}{2(\xi \cdot W)}\xi\right) = \frac{1}{\psi(\xi \cdot V)}\left(\psi V - \frac{\psi^2(V \cdot V)}{2\psi(\xi \cdot V)}\xi\right) = N_V.$$

I sada za prerez $\xi \neq 0$ svežnja $TS^{\perp}$, pripadno polje N_ξ inducira svežanj $tr(TS)$ formulom $tr(T_pS) = [N_\xi]$. Za neki drugi prerez $\xi^* \neq 0$ svežnja $TS^{\perp}$ i prerez $V^* \neq 0$ svežnja F imamo da je $\xi^* = \gamma\xi$ i $V^* = \psi V$ za neke funkcije $\gamma, \psi \neq 0$. No, tada je $N_{\xi^*} = \frac{1}{\gamma}N_\xi$, odakle slijedi da polje N_{ξ^*} inducira isti svežanj. ■

Teorem ne vrijedi općenito za k-plohe jer tada nije $r(TS^{\perp}) = r(F) = 1$, pa nemamo jedinstveno polje N_ξ i svežanj $tr(TS)$.

Definicija 1.4.5. *Neka je S svjetlosna hiperploha u $\mathbb{M}^n$ i $S(TS)$ mreža plohe S. Tada potprostor $tr(T_pS)$ zovemo transverzalni prostor plohe S u točki p. Svežanj $tr(TS)$ zovemo transverzalni svežanj plohe S s obzirom na mrežu $S(TS)$.*

Iz $N \cdot N = 0$ slijedi da je svežanj $tr(TS)$ svjetlosni. Pokažimo da je $S(TS)^{\perp} = TS^{\perp} \oplus tr(TS)$. Kad bi bilo $\eta \in \mathfrak{T}(TS^{\perp} \cap tr(TS))$ za neko polje $\eta \neq 0$, onda bi, zbog $\eta \in \mathfrak{T}(tr(TS))$, bilo $\eta = \delta N$ za neku funkciju $\delta \neq 0$, pa bi iz formule 1.15 slijedilo da su prerezi ξ i V iz dokaza teorema linearno zavisni, što je kontradikcija s činjenicom da je potprostor F_p direktan komplement potprostora $T_pS^{\perp}$. Dakle, suma je direktna. Zatim iz Grassmannove formule imamo

$$\dim(T_pS^{\perp} \oplus tr(T_pS)) = \dim T_pS^{\perp} + \dim tr(T_pS) = 1 + 1 = 2 = \dim S(T_pS)^{\perp},$$

odakle slijedi da je suma jednaka čitavom svežnju $S(TS)^{\perp}$. Time smo dobili rastav

$$\begin{aligned} T_p\mathbb{M}^n &= S(T_pS) \oplus_{orth} S(T_pS)^{\perp} = S(T_pS) \oplus_{orth} (T_pS^{\perp} \oplus tr(T_pS)) \\ &= (S(T_pS) \oplus_{orth} T_pS^{\perp}) \oplus tr(T_pS) = T_pS \oplus tr(T_pS) \end{aligned}$$

Zadnja suma nije ortogonalna jer su oba potprostora svjetlosna. Pomoću te dekompozicije ćemo uvesti linearnu koneksiju ∇ i drugu fundamentalnu formu II plohe S. Prostor $tr(T_pS)$ će igrati ulogu normalnog prostora plohe S u točki p, a polje N će biti normalno polje, koje je u svjetlosnom slučaju jedinstveno do na množenje skalarom (za odabranu mrežu $S(TS)$).

Za vektorska polja $X, Y \in \mathfrak{T}(S)$, polje $\tilde{\nabla}_X Y$ ima jedinstveni rastav

$$\tilde{\nabla}_X Y = Y_1 + Y_2, \;\; Y_1(p) \in T_pS, \;\; Y_2(p) \in tr(T_pS).$$

Sada definiramo $\nabla_X Y = Y_1$ i $II(X,Y) = Y_2 \cdot \xi$. Tada je preslikavanje $\nabla : \mathfrak{T}(S) \times \mathfrak{T}(S) \to \mathfrak{T}(S)$ linearna koneksija na S, a preslikavanje $II : \mathfrak{T}(S) \times \mathfrak{T}(S) \to \mathbb{R}$ je bilinearna forma u svakoj točki $p \in S$. Nadalje, izravno iz definicije slijedi Gaussova formula

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X,Y)N. \tag{1.16}$$

Nadalje, polje $\tilde{\nabla}_X N$ ima jedinstveni rastav

$$\tilde{\nabla}_X N = N_1 + N_2, \;\; N_1(p) \in T_pS, \;\; N_2(p) \in tr(T_pS).$$

Definiramo $S_p(X(p)) = -N_1(p)$ i $\tau(X) = N_2 \cdot \xi$. Tada je $S_p : T_pS \to T_pS$ linearni operator i zovemo ga operator oblika plohe S u točki p. Nadalje, vrijedi analogon Weingartenove formule za svjetlosne plohe

$$\tilde{\nabla}_X N(p) = -S_p(X(p)) + \tau(X(p))N(p).$$

Ako to usporedimo s Gauss-Weingartenovim formulama za prostorne i vremenske plohe (teorem 1.3.30), vidimo da je za prostorne i vremenske plohe $\tau = 0$.

Ako primijenimo produktno pravilo za kovarijantnu derivaciju na $N \cdot N = 0$, dobivamo da je $\tilde{\nabla}_X N \cdot N = 0$. Ako sada pomnožimo obje strane Weingartenove formule skalarno vektorom $N(p)$, dobivamo

$$\underbrace{(\tilde{\nabla}_X N(p))}_{=0} \cdot N(p) = -S_p(X) \cdot N(p) + \tau(X(p)) \underbrace{(N(p) \cdot N(p))}_{=0},$$

odakle slijedi da je $S_p(N(p)) \in S(T_pS)$ (jer je $tr(TS)^{\perp} \cap TS = S(TS)$). Dakle, $S_p(T_pS) \subseteq S(T_pS)$. Kako slika operatora S_p ima manju dimenziju nego domena, slijedi da operator S_p ima netrivijalnu jezgru, odakle slijedi da je 0 svojstvena vrijednost operatora S_p.

Operator S_p općenito nije simetričan i općenito se ne može dijagonalizirati. Nadalje, veza između operatora S_p i forme II je složenija nego u prostornom i vremenskom slučaju (definicija 1.3.11) i nećemo ju ovdje razmatrati (vidi [14]).

Ako obje strane Gaussove formule pomnožimo skalarno poljem ξ, dobivamo

$$(\tilde{\nabla}_X Y) \cdot \xi = \underbrace{(\nabla_X Y) \cdot \xi}_{=0} + II(X,Y) \underbrace{(N \cdot \xi)}_{=1} \Rightarrow II(X,Y) = (\tilde{\nabla}_X Y) \cdot \xi.$$

Iz toga slijedi da preslikavanje II ne ovisi o izboru mreže $S(TS)$.

Definicija 1.4.6. *Za svjetlosnu hiperplohu S u $\mathbb{M}^n$ kažemo da je potpuno umbilička ako postoji funkcija $\alpha : S \to \mathbb{R}$ takva da je*

$$II(v,w) = \alpha(p)(v \cdot w)$$

za sve $p \in S$, $v, w \in T_pS$. Posebno, ako je $II = 0$, za plohu S kažemo da je potpuno geodetska.

Lema 1.4.7. *Druga fundamentalna forma svjetlosne hiperplohe S u $\mathbb{M}^n$ je degenerirana, tj. $II(X,\xi) = 0$ za svako polje $X \in \mathfrak{T}(S)$.*

Dokaz. Kako je $\xi \cdot \xi = 0$ i koneksija $\tilde{\nabla}$ je usklađena sa pseudometrikom, uvrštavanjem $Y = Z = \xi$ u jednakost (1.14) dobivamo

$$\underbrace{\tilde{\nabla}_X(\xi \cdot \xi)}_{=0} = (\tilde{\nabla}_X \xi) \cdot \xi + \xi \cdot \tilde{\nabla}_X \xi \Rightarrow II(X,\xi) = (\tilde{\nabla}_X \xi) \cdot \xi = 0.$$

■

Sljedeći rezultat za plohe u $\mathbb{M}^3$ je dokazan u [13].

Teorem 1.4.8. *Svaka regularna svjetlosna ploha u $\mathbb{M}^3$ je potpuno umbilička.*

Dokaz. Budući da je $S(T_pS)$ prostorni potprostor dimenzije 1, razapet je bilo kojim vektorom $v \in S(T_pS)$, $v \neq 0$. Stavimo

$$\alpha(p) = \frac{II(v,v)}{v \cdot v}.$$

Ovo je dobro definirano (tj. ovisi samo o točki p) jer zbog $\dim S(T_pS) = 1$, za svaki $w \in S(T_pS)$ imamo da je $w = av$ za neki $a \in \mathbb{R}$, pa se a^2 skrati u brojniku i nazivniku.

Budući da je $TS = S(TS) \oplus_{orth} TS^{\perp}$, polja $X, Y \in \mathfrak{T}(S)$ imaju jedinstvene rastave $X = X_1 + X_2$, $Y = Y_1 + Y_2$, gdje su X_1 i Y_1 prerezi svežnja $S(TS)$, a X_2 i Y_2 prerezi svežnja $TS^{\perp}$. Sada je

$$X \cdot Y = X_1 \cdot Y_1 + \underbrace{X_1 \cdot Y_2}_{=0} + \underbrace{X_2 \cdot Y_1}_{=0} + \underbrace{X_2 \cdot Y_2}_{=0} = X_1 \cdot Y_1.$$

No, kako je $r(S(TS)) = 1$, imamo da je $Y_1 = \gamma X_1$ za neku funkciju γ.

I sada zbog nezavisnosti broja $\alpha(p)$ o izboru vektora $v \in S(T_pS)$, imamo da je

$$\begin{aligned}\alpha(X \cdot Y) = \alpha(X_1 \cdot Y_1) &= \frac{II(X_1,X_1)}{X_1 \cdot X_1}(X_1 \cdot Y_1) = \frac{II(X_1,X_1)}{(X_1,X_1)}(X_1, \gamma X_1) \\ &= \frac{II(X_1,X_1)}{X_1 \cdot X_1} \cdot \gamma(X_1,X_1) = II(X_1, \gamma X_1) = II(X_1,Y_1)\end{aligned}$$

To vrijedi i u točakama $p \in S$ u kojima je $X_1(p) = 0$ ako definiramo $\alpha(p) = 0$. S druge strane, budući da su polja X_2 i Y_2 kolinearna s poljem ξ, primjenom leme 1.4.7 dobivamo

$$II(X,Y) = II(X_1,Y_1) + \underbrace{II(X_1,Y_2)}_{=0} + \underbrace{II(X_2,Y_1)}_{=0} + \underbrace{II(X_2,Y_2)}_{=0} = II(X_1,Y_1).$$

Dakle, $II(X,Y) = \alpha(X \cdot Y)$. ■

Ovaj rezultat ne vrijedi za $n > 3$ jer je tada $r(S(TS)) > 1$.

Za razliku od prostornih i vremenskih ploha, inducirana koneksija svjetlosne plohe nije uvijek metrička. Navest ćemo bez dokaza sljedeći rezultat iz [13].

Teorem 1.4.9. *Inducirana koneksija ∇ hiperplohe S je metrička ako i samo ako je ploha S potpuno geodetska.*

Jedan smjer je trivijalan: ako u jednakost (1.16) uvrstimo $h = 0$, dobivamo $\tilde{\nabla} = \nabla$ i onda tvrdnja slijedi iz činjenice da je koneksija $\tilde{\nabla}$ metrička. Nadalje, vidimo da je tada koneksija ∇ jedinstvena (ne ovisi o izboru mreže $S(TS)$) i podudara se s koneksijom prostora $\mathbb{M}^n$.

Definicija 1.4.10. *Za regularnu svjetlosnu $(n-2)$-plohu u $\mathbb{M}^n$ kažemo da je polusvjetlosna u točki $p \in S$ ako je* $\dim Rad\, T_pS = 1$.

U prostoru Minkowskog sve svjetlosne $(n-2)$-plohe su nužno polusvjetlosne (vidi dokaz propozicije 1.2.5). U nekim pseudo-Riemannovim prostorima može biti $\dim Rad\, T_pS = 2$. Za takvu plohu kažemo da je koizotropna (vidi [14]).

Uočimo da su 2-plohe u $\mathbb{M}^4$ polusvjetlosne (za $n \geq 5$ ne vrijedi). Za polusvjetlosne plohe može se uvesti druga fundamentalna forma i operator oblika plohe. Pro trebamo napraviti odgovarajuću dekompoziciju prostora $T_p\mathbb{M}^n$, ovaj put na četiri potprostora.

Iz propozicije 1.4.2 slijedi da postoji potprostor $S(T_pS)$ takav da je $S(T_pS) \oplus_{orth} Rad\, T_pS = T_pS$. Iz propozicije 1.2.7 slijedi da je $T_pS^{\perp}$ svjetlosni potprostor dimenzije 2. Tada postoje vektori $\xi(p), U(p) \in T_pS^{\perp} \setminus \{0\}$ takvi da je $\xi(p) \cdot v = 0$ za svaki vektor $v \in T_pS$ (posebno, vektor $\xi(p)$ je svjetlosni) i $U(p)$ je jedinični prostorni vektor takav da je $U(p) \cdot \xi(p) = 0$. Budući da je prostor $Rad\, T_pS$ jednodimenzionalan, slijedi da je razapet vektorom $\xi(p)$. Dakle, lokalno postoje prerezi ξ i U svežnja $TS^{\perp}$ takvi da je $\xi \cdot U = 0$ i $\xi \cdot X = 0$ za svaki prerez X svežnja TS.

Neka je $D = \bigcup_{p \in S} D_p$ svežanj takav da je $D_p = [U(p)]$. Uočimo da $D_p \subseteq T_pS^{\perp}$ i $S(T_pS) \subseteq T_pS$ povlači da je $D_p \subseteq S(T_pS)^{\perp}$. Neka je $D^{\perp} = \bigcup_{p \in S} D_p^{\perp}$ svežanj takav da je $D_p^{\perp}$ ortogonalni komplement potprostora D_p u potprostoru $S(T_pS)^{\perp}$, tj.

$$D_p^{\perp} = \left\{ v \in S(T_pS)^{\perp} : U(p) \cdot v = 0 \right\}.$$

Potprostor $D_p^{\perp}$ je nedegeneriran. U suprotnom bi potprostor $S(T_pS)^{\perp} = D_p +_{orth} D_p^{\perp}$ bio degeneriran, što ne može biti jer je potprostor $S(T_pS)$ prostorni, odakle slijedi da je potprostor $S(T_pS)^{\perp}$ vremenski. Nadalje, polje ξ je prerez svežnja $D^{\perp}$. Sada postoji jedinstveni prerez N svežnja $D^{\perp}$ takav da je $N \cdot \xi \neq 0$, $N \cdot N = N \cdot U = 0$. Prerez N je dan formulom

$$N = \frac{1}{\xi \cdot V} \left(V - \frac{V \cdot V}{2(\xi \cdot V)} \xi \right),$$

gdje je F_p direktni komplement potprostora $Rad\, T_pS$ u potprostoru $D^{\perp}$, $F = \bigcup_{p \in S} F_p$, $U \subseteq S$ neka koordinatna okolina i V bilo koji prerez svežnja $F\,|_U$ takav da je $\xi \cdot V \neq 0$.

Ako odaberemno neki drugi prerez $\xi^* = \alpha\xi$ svežnja $Rad\, T_pS$, slijedi da je $N^* = \dfrac{1}{\alpha} N$. Dakle, polje N inducira svežanj $ltr(TS)$ formulom $ltr(T_pS) = [N(p)]$, koji zovemo svjetlosni transverzalni svežanj plohe S s obzirom na mrežu $S(TS)$.

Zatim definiramo transverzalni svežanj $tr(TS)$ plohe S s obzirom na mrežu $S(TS)$ formulom

$$tr(T_pS) = D_p \oplus_{orth} ltr(T_pS).$$

Ta suma je ortogonalna zbog $U \cdot N = 0$, a direktna je jer je $U(p)$ prostorni vektor, a $N(p)$ svjetlosni. I sada imamo dekompoziciju

$$\begin{aligned} T_p\mathbb{M}^n &= S(T_pS) \oplus_{orth} S(T_pS)^{\perp} = S(T_pS) \oplus_{orth} (D_p \oplus_{orth} D_p^{\perp}) \\ &= S(T_pS) \oplus_{orth} (D_p \oplus_{orth} (Rad\, T_pS \oplus ltr(T_pS))) \\ &= S(T_pS) \oplus_{orth} (Rad\, T_pS \oplus (D_p \oplus_{orth} ltr(T_pS))) \\ &= (S(T_pS) \oplus_{orth} Rad\, T_pS) \oplus tr(T_pS) = T_pS \oplus tr(T_pS) \end{aligned}$$

Uočimo da je $tr(T_pS)$ svjetlosni potprostor dimenzije 2. Prostor $tr(T_pS)$ opet igra ulogu normalnog prostora plohe S u točki p i razapet je vektorima $N(p)$ i $U(p)$. Za izabranu mrežu $S(TS)$, polje U je jedinstveno do na orijentaciju. Polje N ovisi o izabranom polju ξ, ali samo do na množenje skalarom. Dakle, svežanj $tr(TS)$ ovisi samo o mreži $S(TS)$.
Sada imamo dekompoziciju prostora $T_p\mathbb{M}^n$ u kojoj vektorska polja $\tilde{\nabla}_X Y$, $\tilde{\nabla}_X N$ i $\tilde{\nabla}_X U$ imaju jedinstvenu tangencijalnu i normalnu komponentu, pa možemo kao u slučaju hiperploha definirati preslikavanja ∇, h, A_N i A_U takva da vrijede Gauss-Weingartenove formule

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + h(X,Y) \\ \tilde{\nabla}_X N(p) &= -A_N(X(p)) + \nabla_X N(p) \\ \tilde{\nabla}_X U(p) &= -A_U(X(p)) + \nabla_X U(p). \end{aligned}$$

Preslikavanje ∇ je linearna koneksija na plohi S i zovemo ju inducirana koneksija. Preslikavanje h je bilinearno i zovemo ga druga fundamentalna forma plohe S. Za razliku od hiperploha, ovdje je $\dim tr(T_pS) = 2$, pa ne možemo drugu fundamentalnu formu definirati kao skalarnu funkciju (za hiperplohe je $h(X,Y) = II(X,Y)N$). Preslikavanja A_N i A_U su linearni operatori i zovemo ih operatori oblika plohe S u točki p. Kao kod hiperploha, inducirana koneksija ∇ nije uvijek metrička. Ako stavimo $\varepsilon_1(X) = (\tilde{\nabla}_X U) \cdot \xi$ i $\varepsilon_2(X) = (\tilde{\nabla}_X U) \cdot U$, onda je

$$\nabla_X U = \varepsilon_1(X)N + \varepsilon_2(X)U.$$

Ako zatim u jednakost (1.14) uvrstimo $Y = Z = U$, zbog $U \cdot U = 1$ (konstanta) dobivamo

$$\underbrace{\tilde{\nabla}_X(U \cdot U)}_{=0} = (\tilde{\nabla}_X U) \cdot U + U \cdot \tilde{\nabla}_X U \Rightarrow \varepsilon_2(X) = 0.$$

Nadalje, ako stavimo $D_1(X,Y) = (\tilde{\nabla}_X Y) \cdot \xi$ i $D_2 = (\tilde{\nabla}_X Y) \cdot U$, onda je

$$h(X,Y) = D_1(X,Y)N + D_2(X,Y)U.$$

Netrivijalan je rezultat (vidi [14]) da je inducirana koneksija ∇ plohe S metrička ako i samo ako je $D_1 = 0$. Uočimo da kod svjetlosnih hiperploha zapravo nemamo komponentu U, a preslikavanje D_1 je analogon preslikavanja II.

Definicija 1.4.11. *Za polusvjetlosnu plohu S u $\mathbb{M}^n$ kažemo da je potpuno umbilička ako postoji prerez Z svežnja $tr(TS)$ takav da je*

$$h(X,Y) = (X \cdot Y)Z$$

za sve $X,Y \in \mathfrak{T}(S)$. Posebno, ako je $h = 0$, za plohu S kažemo da je potpuno geodetska.

Sljedeći rezultat iz [14], koji je dan samo za prostor $\mathbb{M}^4$, nam govori kako za danu plohu provjeriti je li potpuno umbilička.

Teorem 1.4.12. *Neka je S polusvjetlosna ploha u $\mathbb{M}^4$ i $S(TS) = [X]$. Tada je ploha S potpuno umbilička ako i samo ako postoje glatke funkcije $h_1, h_2 : S \to \mathbb{R}$ takve da je*

$$D_1(X,X) = h_1(X \cdot X), \;\; D_2(X,X) = h_2(X \cdot X), \;\; D_2(X,\xi) = D_2(\xi,X) = D_2(\xi,\xi) = 0.$$

1.5. SVJETLOSNE 2-PLOHE U $\mathbb{M}^n$

Cilj nam je definirati minimalnu svjetlosnu plohu. Za svjetlosnu plohu nemamo definiranu srednju zakrivljenost. Operator oblika plohe ovisi o izboru mreže $S(TS)$, a u formulama iz teorema 1.3.13 imamo u nazivniku $EG - F^2 = 0$. Koristit ćemo pristup koji je dan u [15], gdje se minimalna svjetlosna ploha definira bez korištenja pojma srednje zakrivljenosti. Ideja je napraviti analogiju s teoremima 1.3.27 i 1.3.29.

Definicija 1.5.1. *Neka su S i $\tilde{S}$ regularne plohe u $\mathbb{M}^n$. Glatku bijekciju $f : S \to \tilde{S}$ zovemo G-transformacija ako su za svaku točku $p \in S$ tangencijalne ravnine T_pS i $T_{f(p)}\tilde{S}$ paralelne.*

Trivijalan primjer G-transformacije je translacija. Netrivijalnom G-transformacijom smatramo svaku G-transformaciju koja nije translacija.

Za glatku bijekciju $f : S \to \tilde{S}$ kažemo da je izometrija ako je $df_p(v) \cdot df_p(w) = v \cdot w$ za sve $p \in S$, $v, w \in T_pS$. Za plohe S i $\tilde{S}$ kažemo da su izometrične ako postoji izometrija ploha S i $\tilde{S}$. Zanima nas pod kojim uvjetima postoji netrivijalna izometrična G-transformacija $f : S \to \tilde{S}$.

Neka je $p \in S$ točka, $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ parametrizacija takva da je $p \in \mathbf{x}(U)$ i $\tilde{\mathbf{x}} = f \circ \mathbf{x}$. Da bi vrijedilo $T_pS = T_{f(p)}\tilde{S}$ (kao potprostori od $\mathbb{M}^n$), mora biti

$$\tilde{\mathbf{x}}_u = A\mathbf{x}_u + B\mathbf{x}_v$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_v = C\mathbf{x}_u + D\mathbf{x}_v$$

za neke glatke funkcije $A, B, C, D : U \to \mathbb{R}$. Iz toga slijedi da je $T_{f(p)}\tilde{S} \subseteq T_pS$. Da bi još bilo $T_pS \subseteq T_{f(p)}\tilde{S}$, sustav mora imati rješenje, tj. mora biti $AD - BC \neq 0$.

Još treba odrediti tzv. uvjete kompatibilnosti tog sustava, koji slijede iz Schwarzovog pravila. Deriviranjem prve jednadžbe po v, a druge po u, dobivamo

$$\tilde{\mathbf{x}}_{uv} = A_v\mathbf{x}_u + A\mathbf{x}_{uv} + B_v\mathbf{x}_v + B\mathbf{x}_{vv}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{vu} = C_u\mathbf{x}_u + C\mathbf{x}_{uu} + D_u\mathbf{x}_v + D\mathbf{x}_{vu}$$

Izjednačavanjem desnih strana ovih jednakosti i korištenjem $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu}$ dobivamo

$$(A_v - C_u)\mathbf{x}_u + (B_v - D_u)\mathbf{x}_v - C\mathbf{x}_{uu} + (A - D)\mathbf{x}_{uv} + B\mathbf{x}_{vv} = 0. \tag{1.17}$$

Da bi preslikavanje f bilo izometrija, fundamentalne veličine parametrizacija $\mathbf{x}$ i $\tilde{\mathbf{x}}$ moraju se podudarati. Računamo

$$\begin{aligned}\tilde{E} &= \tilde{\mathbf{x}}_u \cdot \tilde{\mathbf{x}}_u = (A\mathbf{x}_u + B\mathbf{x}_v) \cdot (A\mathbf{x}_u + B\mathbf{x}_v) = A^2(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u) + 2AB(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v) + B^2(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v) \\ &= A^2E + 2ABF + B^2G\end{aligned}$$

Na isti način se dobije da je

$$\tilde{F} = ACE + (AD+BC)F + BDG, \quad \tilde{G} = C^2E + 2CDF + D^2G.$$

Mora biti $E = \tilde{E}$, $F = \tilde{F}$, $G = \tilde{G}$, odnosno

$$\begin{aligned} E &= A^2E + 2ABF + B^2G \\ F &= ACE + (AD+BC)F + BDG \\ G &= C^2E + 2CDF + D^2G. \end{aligned} \tag{1.18}$$

Uočimo: ako je $f : S \to \tilde{S}$ G-transformacija i ploha S je svjetlosna, onda je ploha $\tilde{S}$, zbog paralelnosti tangencijalnih ravnina u odgovarajućim točkama, također svjetlosna.

Definicija 1.5.2. *Neka je S svjetlosna ploha u $\mathbb{M}^n$. G-deformacija plohe S je neprekidna jednoparametarska familija $(\psi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ G-transformacija $\psi_t : S \to S_t$ takvih da je $\psi_0 = id_S$. Za G-deformaciju $(\psi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ kažemo da je izometrična ako su preslikavanja ψ_t izometrije za sve $t \in \mathbb{R}$. Za G-deformaciju $(\psi_t)_{t\in\mathbb{R}}$ kažemo da je netrivijalna ako su ψ_t i $\psi_t \circ \psi_s^{-1}$ netrivijalne G-transformacije za sve $t, s \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$, $s \neq t$.*

Definicija 1.5.3. *Za svjetlosnu plohu S u $\mathbb{M}^n$ kažemo da je minimalna ako dopušta netrivijalnu izometričnu G-deformaciju $(\psi_t)_{t\in\mathbb{R}}$. Tada familiju $(S_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ploha $S_t = \psi_t(S)$ zovemo asocirana familija plohe S.*

Definicija 1.5.4. *Neka je S svjetlosna ploha u $\mathbb{M}^n$ i $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ parametrizacija. Za parametrizaciju $\mathbf{x}$ kažemo da je konformna ako je*

$$E = \lambda > 0, \quad F = G = 0.$$

Tada funkciju λ zovemo konformni faktor parametrizacije $\mathbf{x}$.

Sada ćemo pokazati da svaka svjetlosna ploha ima konformnu parametrizaciju. Koristit ćemo metodu kojom je u [8] dokazano postojanje ortogonalne parametrizacije za plohe u $\mathbb{E}^3$.

Neka je S regularna ploha u $\mathbb{M}^n$, $U \subseteq S$ otvoreni skup i X glatko vektorsko polje na U tangencijalno na plohu S. Krivulju $c : I \to U$ zovemo integralna krivulja polja X ako je $c'(t) = X(c(t))$ za sve $t \in I$. Sljedeća dva rezultata su dokazana u [8].

Lema 1.5.5. *Ako je $p \in U$ točka takva da je $X(p) \neq 0$, onda postoji okolina $W \subseteq U$ točke p i glatka funkcija $f : W \to \mathbb{R}$ takva da je f konstanta na svakoj integralnoj krivulji polja X i $df_q \neq 0$ za svaku točku $q \in W$.*

Funkciju f is prethodne leme zovemo lokalni prvi integral polja X oko točke p.

Teorem 1.5.6. *Neka je S regularna ploha u $\mathbb{M}^n$ te X_1 i X_2 glatka vektorska polja na otvorenom skupu $U \subseteq S$. Ako su vektori $X_1(p)$ i $X_2(p)$ linearno nezavisni za neku točku $p \in U$, onda postoji okolina $V \subseteq U$ točke p i parametrizacija $\mathbf{x} : \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2 \to V$ takva da je polje $\mathbf{x}_u$ kolinearno s poljem X_1, a polje $\mathbf{x}_v$ kolinearno s poljem X_2.*

Dokaz. Zbog linearne nezavisnosti mora biti $X_1(p), X_2(p) \neq 0$, pa iz leme 1.5.5 slijedi da postoje lokalni prvi integrali $f_1 : W_1 \to \mathbb{R}$ i $f_2 : W_2 \to \mathbb{R}$ polja X_1 i X_2.

Neka je $W = W_1 \cap W_2$ i $\varphi : W \to \mathbb{R}^2$ preslikavanje dano formulom

$$\varphi(q) = (f_1(q), f_2(q)).$$

Budući da je f_1 konstanta na integralnim krivuljama polja X_1, slijedi da je $df_1(X_1) = 0$. Tada zbog $(df_2)_p \neq 0$ i činjenice da su vektori $X_1(p)$ i $X_2(p)$ linearno nezavisni (dakle, čine bazu za prostor T_pS) slijedi da je

$$d\varphi_p(X_1(p)) = ((df_1)_p(X_1(p)), (df_2)_p(X_1(p))) = (0, (df_2)_p(X_1(p))) \neq 0.$$

Na isti način dobivamo

$$d\varphi_p(X_2(p)) = ((df_1)_p(X_2(p)), (df_2)_p(X_2(p))) = ((df_1)_p(X_2(p)), 0) \neq 0.$$

Dakle, operator $d\varphi_p$ je regularan, pa iz teorema o inverznom preslikavanju slijedi da postoje otvoreni skupovi $V \subseteq W$ i $\tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^2$ takvi da je preslikavanje $\varphi : V \to \tilde{U}$ difeomorfizam. Tada je $\mathbf{x} = \varphi^{-1}$ tražena parametrizacija. ■

Korolar 1.5.7. *Neka je S svjetlosna ploha u $\mathbb{M}^n$ i $p \in S$ točka. Tada postoji konformna parametrizacija $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ takva da je $p \in \mathbf{x}(U)$.*

Dokaz. Budući da je ploha S svjetlosna, lokalno oko točke p postoje okomita glatka vektorska polja X_1 i X_2, tangencijalna na plohu S, takva da je polje X_1 prostorno, a polje X_2 svjetlosno. Polje X_2 je jedinstveno do na množenje skalarnom funkcijom jer ravnina T_qS sadrži jedinstveni svjetlosni pravac za svaku točku $q \in S$, a za X_1 možemo izabrati bilo koje polje takvo da vektor $X_1(q)$ nije kolinearan s vektorom $X_2(q)$ jer je $T_qS = [X_2(q)]^\perp$.

Sada iz teorema 1.5.6 slijedi da postoji parametrizacija $\mathbf{x} : U \to S$ takva da je $p \in \mathbf{x}(U)$ te da je $\mathbf{x}_u = \alpha X_1$ i $\mathbf{x}_v = \beta X_2$. No, tada je

$$E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = \alpha^2(X_1 \cdot X_1) > 0, \quad F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = \alpha\beta(X_1 \cdot X_2) = 0, \quad G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = \beta^2(X_2 \cdot X_2) = 0.$$

Dakle, parametrizacija $\mathbf{x}$ je konformna. ■

Sada ćemo pokazati da postoje točno dvije disjunktne klase svjetlosnih ploha koje zadovoljavaju definiciju minimalne plohe.

Definicija 1.5.8. *Za svjetlosnu plohu S u $\mathbb{M}^n$ kažemo da je pravčasta sa svjetlosnim izvodnicama ako se može parametrizirati parametrizacijom $\mathbf{x} : I \times \mathbb{R} \to S$ oblika*

$$\mathbf{x}(u,v) = c(u) + ve(u),$$

gdje je c prostorna krivulja, a e svjetlosno vektorsko polje duž krivulje c okomito na polje c'.

Definicija 1.5.9. *Za svjetlosnu plohu S u $\mathbb{M}^n$ kažemo da je l-minimalna ako se može parametrizirati parametrizacijom $\mathbf{x} : U \to S$ za koju vrijedi*

a) krivulje $u = const.$ su svjetlosne i $\mathbf{x}_u \perp \mathbf{x}_v$,

b) polja $\mathbf{x}_v$ i $\mathbf{x}_{vv}$ su linearno nezavisna za sve $(u,v) \in U$,

c) polja $\mathbf{x}_v$ i $\mathbf{x}_{uv}$ su linearno zavisna za sve $(u,v) \in U$.

Obje parametrizacije iz prethodnih dviju definicija su konformne. Nadalje, klasa pravčastih ploha i klasa l-minimalnih ploha su disjunktne zbog uvjeta b) iz definicije l-minimalne plohe. Naime, za pravčaste plohe je $\mathbf{x}_{vv} = 0$.
Sustav diferencijalnih jednadžbi (1.17) i (1.18) ima trivijalno rješenje $A = D = 1$, $B = C = 0$, koje odgovara translacijama. Da bi ploha S bila minimalna, mora postojati neprekidna familija $(A(u,v;t), B(u,v;t), C(u,v;t), D(u,v;t))$, $t \in \mathbb{R}$ rješenja tog sustava s početnim uvjetom

$$A(u,v;0) = D(u,v;0) = 1, \quad B(u,v;0) = C(u,v;0) = 0$$

za sve $(u,v) \in U$ (zbog $S_0 = S$). Uočimo da zbog $AD - BC \neq 0$ i neprekidnosti funkcija $AD - BC$ mora biti stalnog predznaka. Zatim zbog činjenice da za $t = 0$ imamo $AD - BC = 1$ slijedi da mora biti $AD - BC > 0$.

Teorem 1.5.10. *Ako su polja $\mathbf{x}_v$, $\mathbf{x}_{vv}$ i $\mathbf{x}_{uv}$ linearno nezavisna, onda ploha S ne dopušta netrivijalnu izometričnu G-transformaciju.*
Dokaz. Pretpostavimo da postoji svjetlosna ploha $\tilde{S}$ i izometrična G-transformacija $\psi : S \to \tilde{S}$. Zbog korolara 1.5.7 bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je parametrizacija $\mathbf{x}$ konformna. Tada se zbog $F = G = 0$ sustav (1.18) reducira na

$$EA^2 = E, \quad ACE = C^2E = 0.$$

Zbog $E > 0$, jedino rješenje je $A = \pm 1$ i $C = 0$. Sada jednadžba (1.17) postaje

$$(B_v - D_u)\mathbf{x}_v + (\pm 1 - D)\mathbf{x}_{uv} + B\mathbf{x}_{vv} = 0. \tag{1.19}$$

Zbog linearne nezavisnosti sada slijedi da je $D = \pm 1$ i $B = 0$. Zbog $AD - BC > 0$ mora biti $A = D = 1$. Dakle, sustav ima samo trivijalno rješenje. ■

Nužan uvjet za minimalne svjetlosne plohe iz teorema 1.5.10 je invarijantan na (konformne) reparametrizacije. Ako je ploha S minimalna, imamo dvije mogućnosti.

a) Polje $\mathbf{x}_{vv}$ je kolinearno s poljem $\mathbf{x}_v$.

b) Polja $\mathbf{x}_{vv}$ i $\mathbf{x}_v$ su linearno nezavisna, a polje $\mathbf{x}_{uv}$ je njihova linearna kombinacija.

Pokazat ćemo da slučaj a) daje pravčaste plohe sa svjetlosnim izvodnicama, a slučaj b) l-minimalne plohe.

Teorem 1.5.11. *Ako su polja $\mathbf{x}_v$ i $\mathbf{x}_{vv}$ kolinearna, onda je ploha S lokalno pravčasta sa svjetlosnim izvodnicama.*

Dokaz. Ako je $\mathbf{x}_{vv} = 0$, integriranjem dva puta po v dobivamo da je

$$\mathbf{x}(u,v) = c(u) + ve(u)$$

za neke funkcije c i e. No, kako je $\mathbf{x}_v = e$ i parametrizacija $\mathbf{x}$ je konformna, imamo da je $e \cdot e = G = 0$. Dakle, polje e je svjetlosno. Deriviranjem po u imamo da je $e' \cdot e = 0$, dakle

$$c' \cdot e = (c' + ve') \cdot e = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = F = 0.$$

Polja c' i e moraju biti linearno nezavisna (zbog regularnosti u točkama $\mathbf{x}(u,0)$). Iz propozicija 1.2.3 i 1.2.5 onda slijedi da polje c' mora biti prostorno. Dakle, krivulja c je prostorna.

Pretpostavimo sada da je $\mathbf{x}_{vv} \neq 0$. Neka je $p = \mathbf{x}(u_0, v_0) \in S$ točka. Dovoljno je pokazati da postoji dio svjetlosnog pravca koji prolazi točkom p i pripada plohi S.

Parametrizacija takvog pravca je $t \mapsto p + te$ za neki svjetlosni vektor $e \in \mathbb{M}^n$. Pravac pripada plohi S ako i samo ako postoje glatke funkcije $u, v : I \to \mathbb{R}$ takve da je

$$p + te = \mathbf{x}(u(t), v(t))$$

za sve $t \in I$. Ako tu jednakost deriviramo po t, dobivamo

$$e = \mathbf{x}_u(u(t), v(t))u'(t) + \mathbf{x}_v(u(t), v(t))v'(t). \tag{1.20}$$

Ako deriviramo još jednom, dobivamo

$$0 = (\mathbf{x}_{uu}u' + \mathbf{x}_{uv}v')u' + \mathbf{x}_u u'' + (\mathbf{x}_{vu}u' + \mathbf{x}_{vv}v')v' + \mathbf{x}_v v''. \tag{1.21}$$

Iz jednakosti (1.20) zbog $F = G = 0$ imamo da je

$$0 = e \cdot e = E(u')^2 + 2Fu'v' + G(v')^2 = E(u')^2.$$

Sada zbog $E > 0$ slijedi $u' = 0 \Rightarrow u = const. = u_0$. Tada zbog $\mathbf{x}_{vv} = \alpha \mathbf{x}_v$, $\alpha \neq 0$ jednakost (1.21) postaje $0 = \mathbf{x}_v(\alpha(v')^2 + v'')$, odakle zbog $\mathbf{x}_v \neq 0$ slijedi

$$\alpha(v')^2 + v'' = 0 \Rightarrow -\frac{v''}{(v')^2} = \alpha \Rightarrow \left(\frac{1}{v'}\right)' = \alpha \Rightarrow v' = \left(\int \alpha(t)\,dt + c_1\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow v(t) = \int \left(\int \alpha(t)\,dt + c_1\right)^{-1} dt + c_2$$

za neke $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Dakle, jednadžba ima rješenje. ■

Teorem 1.5.12. *Svaka pravčasta ploha sa svjetlosnim izvodnicama je minimalna.*

Dokaz. Neka je S pravčasta ploha sa svjetlosnim izvodnicama parametrizirana preslikavanjem

$$\mathbf{x}(u,v) = c(u) + ve(u).$$

Ako to uvrstimo u jednakost (1.19), dobivamo

$$(B_v - D_u)e + (1 - D)e' = 0.$$

Ako su vektori e i e' linearno nezavisni, slijedi da je $B_v - D_u = 1 - D = 0$. Ovo je rješenje i ako su vektori linearno zavisni, ali tada možda ima još rješenja. Iz toga slijedi $D = 1$ i zatim $B_v = D_u = 0 \Rightarrow B = B(u)$. Funkciju B možemo birati po volji i rješenje je netrivijalno ako i samo ako je $B \neq 0$. Dakle, imamo beskonačno mnogo netrivijalnih rješenja, odakle slijedi da ploha S dopušta netrivijalnu izometričnu G-deformaciju. ■

Teorem 1.5.13. *Ako su polja $\mathbf{x}_v$ i $\mathbf{x}_{vv}$ linearno nezavisna, a polje $\mathbf{x}_{uv}$ je njihova linearna kombinacija, onda je ploha S lokalno l-minimalna.*

Dokaz. Imamo da je $\mathbf{x}_{uv} = \lambda \mathbf{x}_v + \mu \mathbf{x}_{vv}$ za neke funkcije $\lambda, \mu : U \to \mathbb{R}$. Odgovarajućom reparametrizacijom oblika $\tilde{u} = \tilde{u}(u)$, $\tilde{v} = \tilde{v}(u,v)$ možemo postići da bude $\mu = 0$, tj. da reparametrizacija $\tilde{\mathbf{x}}$ zadovoljava uvjet c) iz definicije l-minimalne plohe.

Uočimo da parametrizacija $\mathbf{x}$ već zadovoljava uvjete a) i b). Dakle, dovoljno je pokazati da će ti uvjeti ostati očuvani gornjom reparametrizacijom.

Deriviranjem jednakosti $\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \mathbf{x}(u,v)$ po $\tilde{u}$ i po $\tilde{v}$ dobivamo

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}} = \mathbf{x}_u \partial_{\tilde{u}} u + \mathbf{x}_v \partial_{\tilde{u}} v$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{v}} = \mathbf{x}_u \underbrace{\partial_{\tilde{v}} u}_{=0} + \mathbf{x}_v \partial_{\tilde{v}} v.$$

Iz toga slijedi da je $\tilde{E} = E(\partial_{\tilde{u}} u)^2 > 0$ i $\tilde{F} = \tilde{G} = 0$. Dakle, parametrizacija $\tilde{\mathbf{x}}$ je konforma, što je uvjet a) iz definicije. Deriviranjem još jednom dobivamo

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{v}\tilde{v}} = (\mathbf{x}_{vu} \underbrace{\partial_{\tilde{v}} u}_{=0} + \mathbf{x}_{vv} \partial_{\tilde{v}} v) + \mathbf{x}_v \partial_{\tilde{v}}^2 v.$$

Želimo pokazati da $\alpha \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{v}} + \beta \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{v}\tilde{v}} = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$. Uvrštavanjem gornjih jednakosti dobivamo

$$(\alpha \partial_{\tilde{v}} v + \beta \partial_{\tilde{v}}^2 v)\mathbf{x}_v + \alpha (\partial_{\tilde{v}} v)^2 \mathbf{x}_{vv} = 0.$$

Budući da su polja $\mathbf{x}_v$ i $\mathbf{x}_{vv}$ linearno nezavisna, slijedi da je

$$\alpha \partial_{\tilde{v}} v + \beta \partial_{\tilde{v}}^2 v = \alpha (\partial_{\tilde{v}} v)^2 = 0.$$

Mora biti $\partial_{\tilde{v}} v \neq 0$. U suprotnom bi bilo $\tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{v}} = 0$, što je u suprotnosti s regularnošću plohe S. Dakle, $\alpha = 0$ i $\beta \partial_{\tilde{v}}^2 v = 0$. Ako je $\partial_{\tilde{v}}^2 v \neq 0$, slijedi da je $\beta = 0$, tj. polja $\tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{v}}$ i $\tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{v}\tilde{v}}$ su linearno nezavisna, što je uvjet b) iz definicije.

Ako je $\partial_{\tilde{v}}^2 v = 0$, slijedi da je polje $\tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{v}\tilde{v}}$ kolinearno s poljem $\mathbf{x}_{vv}$. No, polje $\tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{v}}$ je kolinearno s poljem $\mathbf{x}_v$. Budući da su polja $\mathbf{x}_v$ i $\mathbf{x}_{vv}$ linearno nezavisna, opet slijedi uvjet b). ■

Teorem 1.5.14. *Svaka l-minimalna ploha je minimalna.*

Dokaz. Ako uvrstimo $\mathbf{x}_{uv} = \alpha \mathbf{x}_v$ u jednakost (1.19), dobivamo

$$(B_v - D_u + \alpha(1-D))\mathbf{x}_v + B\mathbf{x}_{vv} = 0.$$

Budući da su polja $\mathbf{x}_v$ i $\mathbf{x}_{vv}$ linearno nezavisna, slijedi da je $B = 0$ i zatim

$$\alpha(1-D) = D_u \Rightarrow \frac{D_u}{1-D} = \alpha \Rightarrow -\partial_u(\ln|1-D|) = \alpha \Rightarrow \ln|1-D| = -\int \alpha(u,v)\,du - f(v)$$

$$\Rightarrow 1 - D = \pm \exp\left(-\int \alpha(u,v)\,du - f(v)\right) \Rightarrow D = 1 \mp \exp\left(-\int \alpha(u,v)\,du - f(v)\right),$$

gdje je f bilo koja glatka funkcija koja ovisi samo o v. Dakle, jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja $D \neq 1$ (zbog $e^x > 0$), tj. netrivijalnih rješenja. ■

Sada ćemo pokazati da su u $\mathbb{M}^3$ sve regularne svjetlosne plohe minimalne, štoviše pravčaste.

Lema 1.5.15. *Svaka svjetlosna ploha u $\mathbb{M}^3$ je minimalna.*

Dokaz. Neka je S regularna svjetlosna ploha u $\mathbb{M}^3$ parametrizirana konformnom parametrizacijom $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$.

Ako deriviramo jednakost $G = 0$ po u i po v, dobivamo da su $\mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{vv} \perp \mathbf{x}_v$. Budući da je polje $\mathbf{x}_v$ svjetlosno, imamo i da je $\mathbf{x}_v \perp \mathbf{x}_v$. Dakle, $\mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{vv}, \mathbf{x}_v \in [\mathbf{x}_v]^\perp$.

No, $[\mathbf{x}_v]^\perp \neq \mathbb{M}^3$ jer $\mathbb{M}^3$ sadrži vremenske vektore, a vremenski vektor ne može biti okomit na svjetlosni (propozicija 1.2.3). Dakle, $\dim[\mathbf{x}_v]^\perp \leq 2$, odakle slijedi da su polja $\mathbf{x}_{uv}$, $\mathbf{x}_{vv}$ i $\mathbf{x}_v$ linearno zavisna. Sada iz teorema 1.5.12 i 1.5.14 slijedi da je ploha S minimalna. ■

Teorem 1.5.16. *Svaka svjetlosna ploha u $\mathbb{M}^3$ je lokalno pravčasta sa svjetlosnim izvodnicama.*

Dokaz. Budući da je, prema lemi 1.5.15, svaka svjetlosna ploha u $\mathbb{M}^3$ minimalna, tj. pravčasta ili l-minimalna, dovoljno je pokazati da ne postoji l-minimalna ploha u $\mathbb{M}^3$.

Pretpostavimo suprotno, da postoji l-minimalna ploha S u $\mathbb{M}^3$. Tada se ploha S može parametrizirati konformnom parametrizacijom $\mathbf{x} : U \to S$ takvom da su polja $\mathbf{x}_v$ i $\mathbf{x}_{vv}$ linearno nezavisna, a polje $\mathbf{x}_{uv}$ je kolinearno s poljem $\mathbf{x}_v$.

Iz toga slijedi da je polje $\mathbf{x}_{vv}$ prostorno. Naime, deriviranjem uvjeta $G = 0$ po v dobivamo da je $\mathbf{x}_{vv} \perp \mathbf{x}_v$. Iz propozicije 1.2.3 slijedi da polje $\mathbf{x}_{vv}$ ne može biti vremensko, a kad bi bilo svjetlosno, iz propozicije 1.2.5 bi slijedilo da je kolinearno s poljem $\mathbf{x}_v$, što je kontradikcija. Zbog linearne nezavisnosti mora biti i $\mathbf{x}_{vv} \neq 0$. Nadalje, deriviranjem uvjeta $F = 0$ po v dobivamo

$$\underbrace{\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v}_{=0} + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{vv} = 0.$$

Dakle, $\mathbf{x}_u \perp \mathbf{x}_{vv}$ i kako su oba polja prostorna i $\neq 0$, slijedi da su linearno nezavisna. Nadalje, polje $\mathbf{x}_v$ ne može biti njihova linearna kombinacija jer bi tada bilo prostorno. Naime, za skalarne funkcije α i β, koje nisu obje jednake 0, je

$$(\alpha\mathbf{x}_u + \beta\mathbf{x}_{vv}) \cdot (\alpha\mathbf{x}_u + \beta\mathbf{x}_{vv}) = \alpha^2(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u) + \beta^2(\mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{x}_{vv}) > 0.$$

Dakle, polja $\mathbf{x}_u$, $\mathbf{x}_{vv}$ i $\mathbf{x}_v$ su linearno nezavisna, što je kontradikcija jer sva leže u potprostoru $[\mathbf{x}_v]^\perp$, koji je dimenzije ≤ 2. ■

U $\mathbb{M}^n$ za $n \geq 4$ postoje pravčaste plohe, l-minimalne plohe i plohe koje uopće nisu minimalne. Sada ćemo navesti dva rezultata o lokalnoj klasifikaciji svjetlosnih ploha. Posebno su nam od interesa rotacijske plohe.

Definicija 1.5.17. *Za plohu S u $\mathbb{M}^n$ kažemo da je rotacijska ako postoji 2-ravnina $\pi \subseteq \mathbb{M}^n$, pravac $q \subseteq \pi$ i krivulja $c : I \to \pi$, koja ne siječe pravac q, takva da ploha S nastaje rotacijom krivulje c oko pravca q. Pravac q zovemo os rotacije plohe S, a krivulju c generatrisa plohe.*

Zahtjev da generatrisa ne siječe os rotacije je potreban kako bismo osigurali da ploha S bude regularna (primjer: vrh svjetlosnog stošca je singularna točka). U tom smislu ravnina nije rotacijska ploha jer je jedini način da dobijemo ravninu rotacijom krivulje taj da za os rotacije

q uzmemo pravac okomit na ravninu π (što je moguće postići samo ako je ravnina π svjetlosna jer mora biti $q \subseteq \pi$), a krivulja c mora prolaziti kroz sjecište pravca q i ravnine π (u suprotnom dobijemo ravninu s rupom). Ravninu možemo smatrati rotacijskom plohom u širem smislu, tj. ako oslabimo definiciju (ne mora biti $c(I) \cap q = \emptyset$). Sada imamo sljedeći rezultat iz [17].

Teorem 1.5.18. *Jedine svjetlosne rotacijske plohe u $\mathbb{M}^3$ su svjetlosni stožac i ravnina.*

Dokaz. Os rotacije q može biti prostorni, vremenski ili svjetlosni pravac.

Ako je pravac q vremenski, onda ravnina π mora biti vremenska (jer sadrži vremenski vektor). Bez smanjenja općenitosti (tj. do na izometriju prostora $\mathbb{M}^3$) možemo pretpostaviti da je os rotacije x-os, a krivulja c leži u xy-ravnini, tj. $c(t) = (x(t), y(t), 0)$, $y(t) > 0$, $t \in I$. Tada je ploha S parametrizirana preslikavanjem

$$\mathbf{x}(u,v) = (x(u), y(u)\cos v, y(u)\sin v).$$

Tada je

$$E = -(x')^2 + (y')^2, \;\; F = 0, \;\; G = y^2 \Rightarrow EG - F^2 = (-(x')^2 + (y')^2)y^2.$$

Ploha S je svjetlosna, pa mora biti $EG - F^2 = 0$. Ako je $y = 0$, onda se ploha S degenerira u x-os. Dakle, mora biti $-(x')^2 + (y')^2 = 0$, što povlači da je krivulja c svjetlosna. Međutim, jedina svjetlosna ravninska krivulja je svjetlosni pravac, pa je ploha S svjetlosni stožac.

Ako je pravac q prostorni, možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je os rotacije z-os. Tada je ploha S parametrizirana preslikavanjem

$$\mathbf{x}(u,v) = (x(u)\mathrm{ch}\, v + y(u)\mathrm{sh} v, x(u)\mathrm{sh} v + y(u)\mathrm{ch} v, z(u)),$$

gdje je $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Sada imamo tri podslučaja.

Ako je ravnina π prostorna, možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je π yz-ravnina. Tada je $x = 0$ i imamo

$$E = (y')^2 + (z')^2, F = 0, G = -y^2 \Rightarrow EG - F^2 = -((y')^2 + (z')^2)y^2.$$

Ako je $y = 0$, ploha S se degenerira u z-os. Ako je $(y')^2 + (z')^2 = 0$, slijedi da je $y' = z' = 0 \Rightarrow$ $\mathbf{x}_u = 0$, što je kontradikcija s regularnošću plohe S. Dakle, takva ploha ne može biti svjetlosna.

Ako je ravnina π vremenska, možemo pretpostaviti da je π xz-ravnina. Tada je $y = 0$ i imamo

$$E = -(x')^2 + (z')^2, F = 0, G = x^2 \Rightarrow EG - F^2 = (-(x')^2 + (z')^2)x^2.$$

Ako je $x = 0$, ploha S se degenerira u z-os. Ako je $-(x')^2 + (z')^2 = 0$, onda je krivulja c opet svjetlosni pravac, odakle slijedi da je ploha S svjetlosni stožac.

Ako je ravnina π svjetlosna, bez smanjenja općenitosti ravnina π sadrži z-os i vektor $(1,1,0)$. Tada je ploha S parametrizirana preslikavanjem

$$\mathbf{x}(u,v) = (x(u)e^v, x(u)e^v, z(u)),$$

gdje je $c(t) = (x(t), x(t), z(t))$. Tada je

$$E = z'(t)^2, F = G = 0 \Rightarrow EG - F^2 = 0.$$

Dakle, ploha S je uvijek svjetlosna. Međutim, da bi skup S uopće bio ploha, mora biti $z' \neq 0$ i tada je ploha S dio svjetlosne ravnine $x = y$.

Pretpostavimo sada da je pravac q svjetlosni. Neka je $B \in q \setminus \{0\}$ bilo koji vektor. Tada se taj vektor može nadopuniti do tzv. nulbaze (A,B,C) (dokaz kasnije), za koju vrijedi

$$A \cdot A = B \cdot B = A \cdot C = B \cdot C = 0, \;\; C \cdot C = A \cdot B = 1.$$

Tada je u bazi (A,B,C) ploha S parametrizirana preslikavanjem

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -v^2/2 & 1 & -v \\ v & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \end{bmatrix},$$

gdje je $c(t) = x(t)A + y(t)B + z(t)C$. Krivulja c leži u svjetlosnoj ravnini razapetoj vektorom B i jediničnim prostornim vektorom X, koji je okomit na vektor B.

Mora biti $X = bB + C$ za neki skalar $b \in \mathbb{R}$ jer je tada

$$X \cdot X = b^2 \underbrace{(B \cdot B)}_{=0} + 2b \underbrace{(B \cdot C)}_{=0} + \underbrace{C \cdot C}_{=1} = 1, \;\; X \cdot B = b \underbrace{(B \cdot B)}_{=0} + \underbrace{C \cdot B}_{=0} = 0.$$

Nadalje, $c(t) = f(t)X + g(t)B$ za jedinstvene funkcije $f, g : I \to \mathbb{R}$. Tada je

$$c = f(bB + C) + gB = (bf + g)B + fC \Rightarrow \mathbf{x}(u,v) = (bf(u) + g(u) - vf(u))B + f(u)C.$$

Sada je

$$\mathbf{x}_u(u,v) = (bf'(u) + g'(u) - vf'(u))B + f'(u)C, \;\; \mathbf{x}_v(u,v) = -f(u)B$$

$$\Rightarrow E = (f')^2, F = G = 0 \Rightarrow EG - F^2 = 0.$$

Dakle, ploha S je uvijek svjetlosna. Međutim, da bi skup S uopće bio ploha, mora biti $f' \neq 0$ i tada je ploha S svjetlosna ravnina (razapeta vektorima B i C). ■

Nulbazu (A,B,C) možemo konstruirati na sljedeći način: vektor $B \neq 0$ biramo po volji. Tada je $\pi = [B]^{\perp}$ svjetlosna ravnina, pa sadrži neki jedinični prostorni vektor C. Tada je ravnina $[C]^{\perp}$, prema propoziciji 1.2.7, vremenska, pa prema propoziciji 1.2.8 sadrži dva linearno nezavisna svjetlosna vektora.

Jedan od njih je B. Neka je $\tilde{C} \neq 0$ drugi (bilo koji do na množenje skalarom). Tada stavimo $C = \dfrac{1}{B \cdot \tilde{C}}\tilde{C}$ tako da bude $B \cdot C = 1$ (prema propoziciji 1.2.5 mora biti $B \cdot \tilde{C} \neq 0$).

Ovim postupkom se može na plohi S, za svaku točku $p \in S$, konstruirati nulbaza $(A(p),B(p),C(p))$ (primijenimo konstrukciju za $q = T_pS^{\perp}$ i $\pi = T_pS$). Time dobijemo lokalno trojku glatkih vektorskih polja (A,B,C), koju zovemo Cartanov trobrid plohe S. Pomoću tog trobrida je u [7] dokazan opći rezultat o lokalnoj klasifikaciji svjetlosnih ploha.

Teorem 1.5.19. **(Carlsen-Clelland)** *Svaka svjetlosna ploha u $\mathbb{M}^3$ je lokalno jednaka nekoj od sljedećih ploha*

a) svjetlosna ravnina,

b) svjetlosni stožac,

c) ploha parametrizirana preslikavanjem

$$\mathbf{x}(u,v) = e^u G_0(v) - \int_0^v G_0(t)\,dt - G_0(0),$$

gdje je funkcija $G_0 : I \to \mathbb{R}^3$ rješenje diferencijalne jednadžbe

$$G_0''' - 2fG_0' - f'G_0 = 0$$

za neku glatku funkciju $f : I \to \mathbb{R}$.

U istom radu je i riješena jednadžba trećeg reda iz c) slučaja po komponentama.

Propozicija 1.5.20. *Neka je h bilo koja realna funkcija koja zadovoljava tzv. Sturm-Liouvilleovu jednadžbu*

$$\left(\left(\frac{d}{dv}\right)^2 - \frac{1}{2}f(v)\right)h(v) = 0.$$

Tada je funkcija $g = h^2$ rješenje diferencijalne jednadžbe

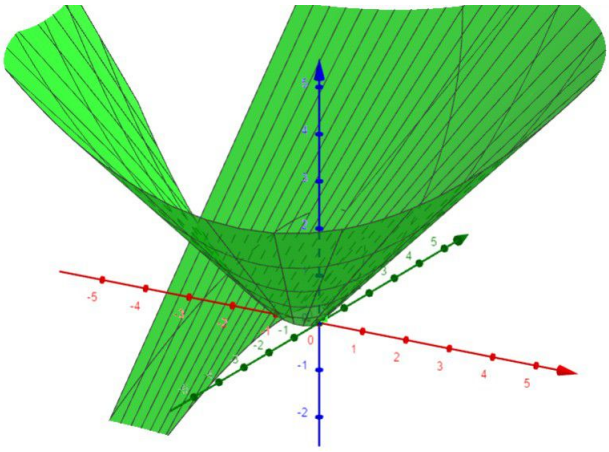
$$g''' - 2fg' - f'g = 0.$$

Nadalje, svako rješenje jednadžbe je linearna kombinacija takvih rješenja.

Sturm-Liouvilleova jednadžba može se riješiti eksplicitno za neke funkcije, npr. konstante.

Primjer. Za $f = 0$ uz odgovarajuće početne uvjete dobivamo plohu

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{bmatrix} (4\sqrt{2})^{-1}(e^u(3v^2+4v+4) - v^3 - 2v^2 - 4v - 4) \\ (12\sqrt{2})^{-1}(3e^u(-v^2+4v+4) + v^3 - 6v^2 - 12v - 12) \\ 6^{-1}(3e^u(v^2+2v) - v^3 - 3v^2) \end{bmatrix}$$



Slika 1.4: Ploha $\mathbf{x}(u,v)$ za $f = 0$

2. Weierstrassova parametrizacija za plohe u $\mathbb{M}^3$

2.1. Weierstrassova parametrizacija za prostorne plohe u $\mathbb{M}^3$

Weierstrass-Enneperova parametrizacija za minimalne plohe u $\mathbb{E}^3$ je lokalna konformna parametrizacija koja parametrizira plohu pomoću kompleksnih funkcija. Weierstrass i Enneper su otkrili da se svaka minimalna ploha može opisati pomoću jedne holomorfne i jedne meromorfne funkcije. U [25] je pokazano da slična formula vrijedi za maksimalne plohe u $\mathbb{M}^3$.

Teorem 2.1.1. **(McNertney)** *Neka je (S,n) orijentirana prostorna ploha u $\mathbb{M}^3$ i $\mathbf{x}: U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ konformna parametrizacija. Pretpostavimo da je skup U jednostavno povezan. Tada je ploha S maksimalna ako i samo ako je*

$$\begin{aligned} x_1(u,v) &= \operatorname{Re} \int_{z_0}^{z} fg\,dw + c_1 \\ x_2(u,v) &= \operatorname{Re} \int_{z_0}^{z} \frac{f}{2}(1+g^2)\,dw + c_2 \\ x_3(u,v) &= \operatorname{Re} \int_{z_0}^{z} \frac{if}{2}(1-g^2)\,dw + c_3, \end{aligned} \tag{2.1}$$

gdje je $z = u+iv$, $z_0 \in U$, $c_i \in \mathbb{R}$ te $f,g: U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funkcije takve da je funkcija f holomorfna, funkcija g meromofna i funkcija fg^2 holomorfna.

Dokaz. Budući da je skup U jednostavno povezan, gornji integrali ne ovise o izabranom putu od točke z_0 do točke z.

Pretpostavimo da je ploha S maksimalna. Tada iz korolara 1.3.25 slijedi da su funkcije x_k har-

moničke. Onda iz propozicije 1.1.6 slijedi da postoje funkcije $\tilde{x}_k : U \to \mathbb{R}$ takve da su funkcije

$$f_k = x_k + i\tilde{x}_k \tag{2.2}$$

holomorfne. Tada iz formule (1.2) i Cauchy-Riemannovih uvjeta slijedi da je

$$f_k' = \partial_u x_k + i\partial_u \tilde{x}_k = \partial_u x_k - i\partial_v x_k. \tag{2.3}$$

Sada imamo da je

$$\begin{aligned}
-(f_1')^2 + (f_2')^2 + (f_3')^2 &= -(\partial_u x_1 - i\partial_v x_1)^2 + (\partial_u x_2 - i\partial_v x_2)^2 + (\partial_u x_3 - i\partial_v x_3)^2 \\
&= [-(\partial_u x_1)^2 + (\partial_u x_2)^2 + (\partial_u x_2)^2] - [-(\partial_v x_1)^2 + (\partial_v x_2)^2 + (\partial_v x_3)^2] \\
&+ 2i[-(\partial_u x_1)(\partial_v x_1) + (\partial_u x_2)(\partial_v x_2) + (\partial_u x_3)(\partial_v x_3)] \\
&= E - G + 2iF = 0
\end{aligned}$$

U zadnjem koraku smo koristili činjenicu da je parametrizacija $\mathbf{x}$ konformna, pa je $E = G$ i $F = 0$. Sada je

$$(f_2' - if_3')(f_2' + if_3') = (f_1')^2.$$

Razlikujemo dva slučaja.

Ako je $f_1' = 0$, definiramo $f = 2f_2'$ i $g = 0$. Tada je

$$\begin{aligned}
f_1' &= 0 = f \cdot 0 = fg \\
f_2' &= \frac{f}{2} = \frac{f}{2}(1 + 0^2) = \frac{f}{2}(1 + g^2).
\end{aligned}$$

Nadalje,

$$-(f_1')^2 + (f_2')^2 + (f_3')^2 = 0 \Rightarrow (f_3')^2 = -(f_2')^2 = -\frac{f^2}{4} \Rightarrow f_3' = \frac{if}{2}(1 - g^2).$$

Sada iz teorema 1.1.10 i jednakosti (2.2) slijede formule (2.1).

Ako je $f_1' \neq 0$, stavimo $f = f_2' - if_3'$ i $g = \dfrac{f_1'}{f_2' - if_3'}$. Tada je

$$fg^2 = (f_2' - if_3') \cdot \frac{(f_1')^2}{(f_2' - if_3')^2} = \frac{(f_2' - if_3')(f_2' + if_3')}{f_2' - if_3'} = f_2' + if_3'$$

holomorfna funkcija. Nadalje,

$$\begin{aligned}
f_1' &= (f_2' - if_3') \cdot \frac{f_1'}{f_2' - if_3'} = fg \\
f_2' &= \frac{1}{2}(f_2' - if_3' + f_2' + if_3') = \frac{1}{2}(f + fg^2) = \frac{f}{2}(1 + g^2) \\
f_3' &= \frac{i}{2}(f_2' - if_3' - (f_2' + if_3')) = \frac{i}{2}(f - fg^2) = \frac{if}{2}(1 - g^2).
\end{aligned}$$

Sada opet, kao u prvom slučaju, iz teorema 1.1.10 slijede formule (2.1).

Obratno, pretpostavimo da vrijede formule (2.1) za neke funkcije f i g. Pokažimo da su funkcije

$$F_1(z) = \int_{z_0}^{z} fg\,dw, \quad F_2(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{f}{2}(1+g^2)\,dw, \quad F_3(z) = \int_{z_0}^{z} \frac{if}{2}(1-g^2)\,dw$$

holomorfne. Budući da su funkcije f i fg^2 holomorfne, slijedi da su funkcije $F_2' = \frac{1}{2}(f+fg^2)$ i $F_3' = \frac{i}{2}(f-fg^2)$ holomorfne. Pokažimo da je funkcija $F_1' = fg$ također holomorfna. Ako je z_0 singularitet funkcije F_1', onda z_0 mora biti pol funkcije g. No, tada je z_0 pol funkcije fg^2, što je kontradikcija. Dakle, funkcije F_i imaju neprekidne derivacije, pa su holomorfne po definiciji. Sada iz propozicije 1.1.5 slijedi da su funkcije $x_k = \operatorname{Re} F_k + c_k$ harmoničke, pa iz korolara 1.3.25 slijedi da je ploha S maksimalna. ■

Funkcije f i g iz prethodnog teorema zovemo Weierstrassovi podaci plohe S.

Sada ćemo pokazati da se formula McNertney može proširiti na sve regularne prostorne plohe ako dopustimo da funkcije f i g nisu nužno meromorfne, nego da samo imaju realni i imaginarni dio klase C^∞. Tada će parovi (f,g), gdje je funkcija f holomorfna, funkcija g meromorfna i funkcija fg^2 holomorfna, reprezentirati točno klasu maksimalnih ploha.

Teorem 2.1.2. *Neka je (S,n) orijentirana prostorna ploha u $\mathbb{M}^3$ i $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ konformna parametrizacija. Pretpostavimo da je skup U jednostavno povezan. Tada vrijede formule* (2.1) *za neke funkcije f i g takve da funkcija f ima realni i imaginarni dio klase C^∞, a funkcija g je kvocijent dviju takvih funkcija. Konformni faktor parametrizacije $\mathbf{x}$ je*

$$\lambda = -(\operatorname{Re} fg)^2 + (\operatorname{Re} f)(\operatorname{Re} fg^2).$$

Dokaz. Ovaj put definiramo funkcije f_k formulom

$$f_k = x_k - i\int \partial_v x_k\,du.$$

Sada koristimo činjenicu da je operator ∂_u poopćenje kompleksne derivacije na funkcije koje nisu nužno holomorfne, tj. imamo

$$\partial_u f_k = \partial_u x_k - i\partial_v x_k, \tag{2.4}$$

što se u slučaju kad je funkcija f holomorfna svodi na (2.3). Sada kao u dokazu prethodnog teorema imamo da je

$$-(\partial_u f_1)^2 + (\partial_u f_2)^2 + (\partial_u f_3)^2 = 0$$

i zatim definiramo funkcije f i g kao u prethodnom teoremu. Budući da teorem 1.1.10 vrijedi i za operator ∂_u, ponovo slijede formule (2.1).
Iz jednakosti (2.4) slijedi da je $\partial_u x_k = \operatorname{Re}\partial_u f_k$, pa je

$$\begin{aligned}\lambda = E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u &= -(\operatorname{Re}\partial_u f_1)^2 + (\operatorname{Re}\partial_u f_2)^2 + (\operatorname{Re}\partial_u f_3)^2 \\ &= -(\operatorname{Re} fg)^2 + \frac{1}{4}(\operatorname{Re} f + \operatorname{Re} fg^2)^2 - \frac{1}{4}(\operatorname{Re} f - \operatorname{Re} fg^2)^2 \\ &= -(\operatorname{Re} fg)^2 + (\operatorname{Re} f)(\operatorname{Re} fg^2)\end{aligned}$$

■

Može se izvesti i formula za srednju zakrivljenost tako da u formulu

$$H = \frac{1}{2\lambda}\|\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}\| \tag{2.5}$$

iz teorema 1.3.24 uvrstimo $\partial_u^2 x_k = \operatorname{Re}\partial_u^2 f_k$ i $\partial_v^2 x_k = \operatorname{Im}\partial_u\partial_v f_k$. Uočimo da ako je parametrizacija $\mathbf{x}$ konformna, onda supstitucijom $z = u + vi$, $\bar{z} = u - vi$ dobivamo reparametrizaciju $\mathbf{x}(z,\bar{z})$ koja, kao u euklidskom slučaju, ima fundamentalne veličine $\tilde{E} = \tilde{G} = 0$ i $\tilde{F} = \lambda/2$. Naime, budući da je vanjska derivacija linearan operator, imamo

$$\begin{aligned}\lambda\, dzd\bar{z} &= \lambda\, d(u+vi)d(u-vi) = \lambda(du + i\,dv)(du - i\,dv) = \lambda(du^2 + dv^2) \\ &= \lambda\, du^2 + 0\, dudv + \lambda\, dv^2 = E\, du^2 + 2F\, dudv + G\, dv^2 = ds^2\end{aligned}$$

I sada iz

$$ds^2 = \lambda\, dzd\bar{z} = 0\, dz^2 + 2\cdot\frac{\lambda}{2}\, dzd\bar{z} + 0\, d\bar{z}^2$$

očitamo da je $\tilde{E} = \tilde{G} = 0$ i $\tilde{F} = \lambda/2$. Nadalje, iz relacija (1.3) slijedi da je

$$\mathbf{x}_{z\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_u + i\partial_v)\left(\frac{1}{2}(\partial_u - i\partial_v)\mathbf{x}\right) = \frac{1}{4}(\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}).$$

Ako to uvrstimo u formulu (2.5), dobivamo

$$H = \frac{2}{\lambda}\|\mathbf{x}_{z\bar{z}}\|. \tag{2.6}$$

Sada ćemo izvesti drugi tip Weierstrassove parametrizacije za prostorne plohe u $\mathbb{M}^3$, koji parametrizira sve regularne plohe u $\mathbb{M}^3$ i koristi poopćenje derivacije dano formulama (1.3). Takvu parametrizaciju je otkrio B. Konopelchenko u [21] za plohe u $\mathbb{E}^3$. Za prostorne plohe u $\mathbb{M}^3$ nije navedena formula, ali postoji formula za prostorne plohe u $\mathbb{M}^4$ u [20], koju ćemo vidjeti kasnije, a sljedeća parametrizacija za plohe u $\mathbb{M}^3$ se može dobiti kao poseban slučaj.

Teorem 2.1.3. *Neka je $U \subseteq \mathbb{C}$ otvoren jednostavno povezan skup i $s,t : U \to \mathbb{C}$ funkcije kojima su realni i imaginarni dio klase C^∞, $|s| \neq |t|$ te zadovoljavaju sustav*

$$\begin{aligned} \partial_z t &= ps \\ \partial_{\bar{z}} s &= pt \end{aligned} \tag{2.7}$$

za neku realnu funkciju $p \in C^\infty(U)$. Tada je formulama

$$\begin{aligned} x_1(u,v) &= \int_{z_0}^{z} s\bar{t}\, dw + \bar{s}t\, d\bar{w} \\ x_2(u,v) &= \frac{1}{2}\int_{z_0}^{z} (s^2 + \bar{t}^2)\, dw + (\bar{s}^2 + t^2)\, d\bar{w} \\ x_3(u,v) &= \frac{1}{2i}\int_{z_0}^{z} (s^2 - \bar{t}^2)\, dw + (-\bar{s}^2 + t^2)\, d\bar{w} \end{aligned} \tag{2.8}$$

dana konformna parametrizacija $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{M}^3$. Metrički tenzor parametrizacije $\mathbf{x}$ i srednja zakrivljenost plohe $S = \mathbf{x}(U)$ su dani formulama

$$\begin{aligned} ds^2 &= (|s|^2 - |t|^2)^2\, dz d\bar{z} \\ H &= \frac{2p}{\sqrt{\lambda}}. \end{aligned}$$

Obratno, svaka regularna prostorna ploha u $\mathbb{M}^3$ može se lokalno parametrizirati takvom parametrizacijom.

Dokaz. Neka su s i t funkcije koje zadovoljavaju jednadžbe (2.7) te $|s| \neq |t|$. Tada za diferencijalne 1-forme

$$\begin{aligned} \omega_1 &= s\bar{t}\, dz + \bar{s}t\, d\bar{z} \\ \omega_{2,3} &= (s^2 \pm \bar{t}^2)\, dz + (\pm\bar{s}^2 + t^2)\, d\bar{z} \end{aligned}$$

vrijedi

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= (\partial_z(\bar{s}t) - \partial_{\bar{z}}(s\bar{t}))\, dz d\bar{z} \\ &= ((\partial_z \bar{s})t + \bar{s}\partial_z t - (\partial_{\bar{z}} s)\bar{t} - s\partial_{\bar{z}}\bar{t})\, dz d\bar{z} \\ &= (p\bar{t}t + \bar{s}ps - pt\bar{t} - sp\bar{s})\, dz d\bar{z} = 0 \\ d\omega_{2,3} &= (\partial_z(\pm\bar{s}^2 + t^2) - \partial_{\bar{z}}(s^2 \pm \bar{t}^2))\, dz d\bar{z} \\ &= (\pm 2\bar{s}\partial_z \bar{s} + 2t\partial_z t - 2s\partial_{\bar{z}} s \mp 2\bar{t}\partial_{\bar{z}}\bar{t})\, dz d\bar{z} \\ &= (\pm 2\bar{s}p\bar{t} + 2tps - 2spt \mp 2\bar{t}p\bar{s})\, dz d\bar{z} = 0 \end{aligned}$$

Dakle, forme ω_k su zatvorene, pa iz Poincaréove leme ([28]) slijedi da su egzaktne, tj. postoje funkcije (tj. 0-forme) x_k takve da vrijede formule (2.8). Nadalje, za parametrizaciju $\mathbf{x}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
E &= \mathbf{x}_z \cdot \mathbf{x}_{\bar{z}} = -(\partial_z x_1)^2 + (\partial_z x_2)^2 + (\partial_z x_3)^2 \\
&= -(s\bar{t})^2 + \frac{1}{4}(s^2 + \bar{t}^2) - \frac{1}{4}(s^2 - \bar{t})^2 \\
&= -s^2\bar{t}^2 + \frac{1}{4}(s^4 + 2s^2\bar{t}^2 + \bar{t}^4) - \frac{1}{4}(s^4 - 2s^2\bar{t}^2 + \bar{t}^4) = 0 \\
F &= \mathbf{x}_z \cdot \mathbf{x}_{\bar{z}} = -(\partial_z x_1)(\partial_{\bar{z}} x_1) + (\partial_z x_2)(\partial_{\bar{z}} x_2) + (\partial_z x_3)(\partial_{\bar{z}} x_3) \\
&= -s\bar{t} \cdot \bar{s}t + \frac{1}{4}(s^2 + \bar{t}^2)(\bar{s}^2 + t^2) - \frac{1}{4}(s^2 - \bar{t}^2)(-\bar{s}^2 + t^2) \\
&= -s\bar{t} \cdot \bar{s}t + \frac{1}{4}(s^2\bar{s}^2 + s^2t^2 + \bar{t}^2\bar{s}^2 + \bar{t}^2t^2) - \frac{1}{4}(-s^2\bar{s}^2 + s^2t^2 + \bar{t}^2\bar{s}^2 - \bar{t}^2t^2) \\
&= -s\bar{t} \cdot \bar{s}t + \frac{1}{2}s^2\bar{s}^2 + \frac{1}{2}\bar{t}^2t^2 = \frac{1}{2}(s\bar{s} - \bar{t}t)^2 = \frac{1}{2}(|s|^2 - |t|^2)^2 \\
G &= \mathbf{x}_{\bar{z}} \cdot \mathbf{x}_{\bar{z}} = -(\partial_{\bar{z}} x_1)^2 + (\partial_{\bar{z}} x_2)^2 + (\partial_{\bar{z}} x_3)^2 \\
&= -(\bar{s}t)^2 + \frac{1}{4}(\bar{s}^2 + t^2)^2 - \frac{1}{4}(-\bar{s}^2 + t^2)^2 \\
&= -\bar{s}^2t^2 + \frac{1}{4}(\bar{s}^4 + 2\bar{s}^2t^2 + t^4) - \frac{1}{4}(\bar{s}^4 - 2\bar{s}^2t^2 + t^4) = 0
\end{aligned}$$

Dakle, parametrizacija $\mathbf{x}$ je konformna s konformnim faktorom $\lambda = 2F = (|s|^2 - |t|^2)^2$. Zbog $|s| \neq |t|$ je $\lambda > 0$, pa je ploha $S = \mathbf{x}(U)$ regularna, a prostorna je jer u koordinatama (u, v) imamo da je $E = G = \lambda$ i $F = 0$, pa je $F^2 - EG < 0$. Nadalje,

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{z}}\partial_z x_1 &= \partial_{\bar{z}}(s\bar{t}) = (\partial_{\bar{z}} s)\bar{t} + s\partial_{\bar{z}}\bar{t} = pt\bar{t} + sp\bar{s} \\
\partial_{\bar{z}}\partial_z x_2 &= \frac{1}{2}\partial_{\bar{z}}(s^2 + \bar{t}^2) = \frac{1}{2}(2s\partial_{\bar{z}} s + 2\bar{t}\partial_{\bar{z}}\bar{t}) = spt + \bar{t}p\bar{s} \\
\partial_{\bar{z}}\partial_z x_3 &= \frac{1}{2i}\partial_{\bar{z}}(s^2 - \bar{t}^2) = \frac{1}{2i}(2s\partial_{\bar{z}} s - 2\bar{t}\partial_{\bar{z}}\bar{t}) = spt + \bar{t}p\bar{s} = i(-spt + \bar{t}p\bar{s}).
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem toga u formulu (2.6) dobivamo

$$\begin{aligned}
H &= \frac{2}{\lambda}\sqrt{|-(pt\bar{t} + sp\bar{s})^2 + (spt + \bar{t}p\bar{s})^2 + i^2(-spt + \bar{t}p\bar{s})^2|} \\
&= \frac{2}{\lambda}\sqrt{|-p^2(|t|^4 + 2|t|^2|s|^2 + |s|^4) + 2\bar{t}p\bar{s} \cdot 2spt|} \\
&= \frac{2p}{\lambda}\sqrt{|-|t|^4 - |s|^4 + 2|s|^2|t|^2|} = \frac{2p}{\lambda}\sqrt{(|s|^2 - |t|^2)^2} = \frac{2p}{\lambda}\sqrt{\lambda} = \frac{2p}{\sqrt{\lambda}}
\end{aligned}$$

Možemo izlučiti i ako je $p < 0$ jer srednja zakrivljenost ovisi do na predznak o izabranoj orijentaciji plohe S. Ako je $p < 0$, zapravo izlučimo $-p$ i onda promijenimo predznak od H.

Obratno, neka je S regularna prostorna ploha u $\mathbb{M}^3$ i $p \in S$ točka. Tada iz teorema 1.3.19 slijedi da postoji konformna parametrizacija $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ takva da je $p \in \mathbf{x}(U)$.

Skup U se može smanjiti tako da bude jednostavno povezan. Naime, budući da je skup U otvoren, postoji otvoreni krug $\tilde{U} \subseteq U$ oko točke (u_0, v_0), gdje je $\mathbf{x}(u_0, v_0) = p$, a otvoreni krug je jednostavno povezan skup. Reparametrizirajmo $\mathbf{x}(z, \bar{z})$ i definirajmo funkcije s i t formulama

$$s = \sqrt{\partial_z x_2 + i\partial_z x_3}, \quad t = \sqrt{\partial_{\bar{z}} x_2 + i\partial_{\bar{z}} x_3}.$$

Budući da je ploha S regularna, mora biti $|s| \neq |t|$. U suprotnom bi bilo $F = (|s|^2 - |t|^2)^2 = 0$. Budući da je parametrizacija $\mathbf{x}$ konformna, mora biti $E = G = 0$, pa imamo da je

$$\|\mathbf{x}_z \times \mathbf{x}_{\bar{z}}\|^2 = EG - F^2 = 0.$$

Budući da je ploha S prostorna, polje $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v$ je vremensko, pa onda slijedi da je $\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v = 0$, odakle slijedi da je ploha S singularna (propozicija 1.2.10, *f*).

Pokažimo da funkcije s i t zadovoljavaju sustav (2.7). Uočimo da je taj sustav ekvivalentan

$$\frac{\partial_z t}{s} = p = \frac{\partial_{\bar{z}} s}{t} \Leftrightarrow t\partial_z t = s\partial_{\bar{z}} s \Leftrightarrow \partial_z(t^2) = \partial_{\bar{z}}(s^2).$$

Međutim, ova zadnja jednakost vrijedi zbog Schwarzovog pravila za operatore ∂_z i $\partial_{\bar{z}}$.

Iz formula za funkcije s i t izravno slijede formule za funkcije x_2 i x_3 u (2.8). Još treba pokazati formulu za funkciju x_1. Iz $E = G = 0$ dobivamo

$$(\partial_z x_1)^2 = (\partial_z x_2)^2 + (\partial_z x_3)^2 = (\partial_z x_2 + i\partial_z x_3)(\partial_z x_2 - i\partial_z x_3) = s^2\bar{t}^2$$
$$(\partial_{\bar{z}} x_1)^2 = (\partial_{\bar{z}} x_2)^2 + (\partial_{\bar{z}} x_3)^2 = (\partial_{\bar{z}} x_2 - i\partial_{\bar{z}} x_3)(\partial_{\bar{z}} x_2 + i\partial_{\bar{z}} x_3) = \bar{s}^2 t^2.$$

■

Sada se kao poseban slučaj za $p = 0$ može dobiti reprezentacijska formula za maksimalne plohe.

Korolar 2.1.4. *Neka je $U \subseteq \mathbb{C}$ otvoren jednostavno povezan skup i $s, t : U \to \mathbb{C}$ funkcije kojima su realni i imaginarni dio klase C^∞, $|s| \neq |t|$ te zadovoljavaju jednakosti*

$$\partial_z t = \partial_{\bar{z}} s = 0.$$

Tada je formulama (2.8) dana konformna parametrizacija $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{M}^3$. Ploha $S = \mathbf{x}(U)$ je maksimalna. Obratno, svaka maksimalna ploha u $\mathbb{M}^3$ može se lokalno parametrizirati takvom parametrizacijom.

Uočimo da je funkcija s holomorfna ako i samo ako je $\partial_{\bar{z}} s = 0$. Za funkciju t za koju vrijedi $\partial_z t = 0$ kažemo da je antiholomorfna ([22]). Dakle, klasu maksimalnih ploha reprezentiraju parovi holomorfne i antiholomorfne funkcije.

Propozicija 2.1.5. *Neka je S maksimalna ploha u $\mathbb{M}^3$ dana Weierstrassovim podacima (f,g), odnosno (s,t). Tada je*

$$2s^2 = fg^2, \quad 2t^2 = \overline{f}.$$

Dokaz. Iz relacija (1.3) i (2.3) imamo da je

$$\begin{aligned}
\partial_z x_k &= \frac{1}{2}(\partial_u x_k - i\partial_v x_k) = \frac{1}{2}f_k' \\
\partial_{\bar{z}} x_k &= \frac{1}{2}(\partial_u x_k + i\partial_v x_k) = \frac{1}{2}\overline{f_k'}.
\end{aligned}$$

Budući da je

$$f_2' = \frac{f}{2}(1+g^2), \quad f_3' = \frac{if}{2}(1-g^2),$$

slijedi da je

$$\begin{aligned}
s &= \sqrt{\partial_z x_2 + i\partial_z x_3} = \sqrt{\frac{f}{4}(1+g^2) + i\cdot\frac{if}{4}(1-g^2)} = \sqrt{\frac{fg^2}{2}} \\
t &= \sqrt{\partial_{\bar{z}} x_2 + i\partial_{\bar{z}} x_3} = \sqrt{\frac{\overline{f}}{4}(1+\overline{g}^2) + i\cdot\frac{-i\overline{f}}{4}(1-\overline{g}^2)} = \sqrt{\frac{\overline{f}}{2}}.
\end{aligned}$$

■

2.2. Weierstrassova parametrizacija za vremenske plohe u $\mathbb{M}^3$

Za parametrizaciju $\mathbf{x}$ vremenske plohe S u $\mathbb{M}^3$ uvjeti konformnosti su $-E = G = \lambda$ i $F = 0$. Ako napravimo afinu reparametrizaciju $\tilde{u} = u + v$, $\tilde{v} = -u + v$, dobivamo

$$\begin{aligned}\lambda\, d\tilde{u}d\tilde{v} &= \lambda\, d(u+v)d(-u+v) = \lambda(du+dv)(-du+dv) = \lambda(-du^2+dv^2)\\ &= -\lambda\, du^2 + 0\, dudv + \lambda\, dv^2 = E\, du^2 + 2F\, dudv + G\, dv^2 = ds^2\end{aligned}$$

odakle slijedi da reparametrizacija $\mathbf{x}(\tilde{u},\tilde{v})$ ima fundamentalne veličine $\tilde{E} = \tilde{G} = 0$ i $\tilde{F} = \lambda/2$, što je analogna transformacija kao kod prostornih ploha. Uočimo da ako je ploha S minimalna, onda je $\mathbf{x}(\tilde{u},\tilde{v})$ upravo parametrizacija plohe S kao lokalno translacijske plohe iz teorema 1.3.28. Naime, tada je $\mathbf{x}_{\tilde{u}} = c_1'$ i $\mathbf{x}_{\tilde{v}} = c_2'$, a krivulje c_1 i c_2 su svjetlosne. Nadalje,

$$\mathbf{x}_{\tilde{u}\tilde{v}} = \partial_{\tilde{v}}(\partial_{\tilde{u}}\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\partial_u + \partial_v)\left(\frac{1}{2}(-\partial_u + \partial_v)\mathbf{x}\right) = \frac{1}{4}(-\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}).$$

Ako to uvrstimo u formulu

$$H = \frac{1}{2\lambda}\|-\mathbf{x}_{uu} + \mathbf{x}_{vv}\|$$

iz teorema 1.3.24, dobivamo

$$H = \frac{2}{\lambda}\|\mathbf{x}_{\tilde{u}\tilde{v}}\|. \tag{2.9}$$

Analogon formule McNertney pronašao je M. A. Magid u [24] i to odmah za sve regularne vremenske plohe u $\mathbb{M}^3$, a ne samo za minimalne. Zanimljivo je da za opis vremenskih ploha ne trebamo kompleksne funkcije. Weierstrassovi podaci vremenskih ploha su realne funkcije.

Teorem 2.2.1. **(Magid)** *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren jednostavno povezan skup i $f,g,q,r : U \to \mathbb{R}$ glatke funkcije takve da je*

$$\begin{aligned}\partial_v f &= -\partial_u(r^2 g)\\ \partial_u g &= -\partial_v(q^2 f)\\ \partial_v(qf) &= \partial_u(rg)\end{aligned} \tag{2.10}$$

te $fg > 0$ i $qr \neq -1$. Tada je parametrizacija $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) : U \to \mathbb{M}^3$, dana formulama

$$\begin{aligned}x_1(u,v) &= \frac{1}{2}\int (1+q^2) f\, du - (1+r^2) g\, dv\\ x_2(u,v) &= -\frac{1}{2}\int (1-q^2) f\, du + (1-r^2) g\, dv\\ x_3(u,v) &= -\int qf\, du + rg\, dv,\end{aligned} \tag{2.11}$$

konformna. Ploha S, koja je parametrizirana preslikavanjem $\mathbf{x}$*, je regularna i vremenska. Metrički tenzor i srednja zakrivljenost plohe S su dani formulama*

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1+qr)^2 fg\, dudv \\ H &= \frac{2}{\lambda}\sqrt{|(\partial_v f)(\partial_u g) + (\partial_v(qf))(\partial_u(rg))|}. \end{aligned}$$

Obratno, svaka regularna vremenska ploha u $\mathbb{M}^3$ može se lokalno parametrizirati takvom parametrizacijom.

Dokaz. Neka su $f,g,q,r : U \to \mathbb{R}$ funkcije koje zadovoljavaju jednakosti (2.10). Tada su diferencijalne 1-forme ω_i pod znakom integrala u formulama (2.11) zatvorene. Naime,

$$\begin{aligned} d\omega_{1,2} &= (-\partial_u((1\pm r^2)g) \mp \partial_v((1\pm q^2)f))\, dudv \\ &= (-\partial_u(g\pm r^2 g) \mp \partial_v(f\pm q^2 f))\, dudv \\ &= (-\partial_u g \mp \partial_u(r^2 g) \mp \partial_v f - \partial_v(q^2 f))\, dudv = 0 \\ d\omega_3 &= (-\partial_u(rg) + \partial_v(qf))\, dudv = 0 \end{aligned}$$

Iz Poincaréove leme sada slijedi da su forme ω_k egzaktne, tj. postoje glatke funkcije $x_k : U \to \mathbb{R}$ takve da vrijede formule (2.11). Nadalje,

$$\begin{aligned} E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = -(\partial_u x_1)^2 + (\partial_u x_2)^2 + (\partial_u x_3)^2 = -\frac{1}{4}(1+q^2)^2 f^2 + \frac{1}{4}(1-q^2)^2 f^2 + q^2 f^2 \\ &= -\frac{1}{4}(1+2q^2+q^4)f^2 + \frac{1}{4}(1-2q^2+q^4)f^2 + q^2 f^2 = 0 \\ F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = -(\partial_u x_1)(\partial_v x_1) + (\partial_u x_2)(\partial_v x_2) + (\partial_u x_3)(\partial_v x_3) \\ &= \frac{1}{4}(1+q^2)(1+r^2)fg + \frac{1}{4}(1-q^2)(1-r^2)fg + qfrg \\ &= \frac{1}{4}fg + \frac{1}{4}r^2 fg + \frac{1}{4}q^2 fg + \frac{1}{4}q^2 r^2 fg + \frac{1}{4}fg - \frac{1}{4}r^2 fg - \frac{1}{4}q^2 fg + \frac{1}{4}q^2 r^2 fg + qfrg \\ &= \frac{1}{2}(1+2qr+q^2 r^2)fg = \frac{1}{2}(1+qr)^2 fg \\ G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = -(\partial_v x_1)^2 + (\partial_v x_2)^2 + (\partial_v x_3)^2 = -\frac{1}{4}(1+r^2)^2 g^2 + \frac{1}{4}(1-r^2)^2 g^2 + r^2 g^2 \\ &= -\frac{1}{4}(1+2r^2+r^4)g^2 + \frac{1}{4}(1-2r^2+r^4)g^2 + r^2 g^2 = 0 \end{aligned}$$

Dakle, parametrizacija $\mathbf{x}$ je konformna s konformnim faktorom $\lambda = 2F = (1+qr)^2 fg > 0$. Posebno, ploha S je regularna i vremenska (jer u koordinatama $((u-v)/2, (u+v)/2)$ vrijedi $-E = G = \lambda$ i $F = 0$, pa je $F^2 - EG > 0$). Nadalje, imamo da je

$$\mathbf{x}_{uv} = \left(\frac{1}{2}\partial_v((1+q^2)f), -\frac{1}{2}\partial_v((1-q^2)f), -\partial_v(qf)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2}\partial_v f + \frac{1}{2}\partial_v(q^2 f), -\frac{1}{2}\partial_v f + \frac{1}{2}\partial_v(q^2 f), -\partial_v(qf)\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\partial_v f - \frac{1}{2}\partial_u g, -\frac{1}{2}\partial_v f - \frac{1}{2}\partial_u g, -\partial_v(qf)\right)
\end{aligned}
$$

Uvrštavanjem toga u formulu (2.9) i korištenjem jednakosti (2.10) dobivamo

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{2}{\lambda}\sqrt{\left|-\frac{1}{4}(\partial_v f - \partial_u g)^2 + \frac{1}{4}(-\partial_v f - \partial_u g)^2 + (\partial_v(qf))^2\right|} \\
&= \frac{2}{\lambda}\sqrt{(\partial_v f)(\partial_u g) + (\partial_v(qf))(\partial_u(rg))}
\end{aligned}
$$

Obratno, neka je S regularna prostorna ploha i $p \in S$ točka. Tada prema teoremu 1.3.21 postoji konformna parametrizacija $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ takva da je $p \in \mathbf{x}(U)$. Tu parametrizaciju možemo reparametrizirati tako da bude $E = G = 0$ i $F = \lambda/2$. Tada iz $E = G = 0$ slijedi

$$
\begin{aligned}
(\partial_u x_3)^2 &= (\partial_u x_1 - \partial_u x_2)(\partial_u x_1 + \partial_u x_2) \\
(\partial_v x_3)^2 &= (\partial_v x_1 - \partial_v x_2)(\partial_v x_1 + \partial_v x_2).
\end{aligned}
\tag{2.12}
$$

Definirajmo funkcije $q, f, r, g : U \to \mathbb{R}$ formulama

$$
\begin{aligned}
q &= -\frac{\partial_u x_3}{\partial_u x_1 - \partial_u x_2} = -\frac{\partial_u x_1 + \partial_u x_2}{\partial_u x_3} \\
f &= \partial_u x_1 - \partial_u x_2 \\
r &= \frac{\partial_v x_3}{\partial_v x_1 + \partial_v x_2} = \frac{\partial_v x_1 - \partial_v x_2}{\partial_v x_3} \\
g &= -\partial_v x_1 - \partial_v x_2.
\end{aligned}
$$

Tada je

$$
\begin{aligned}
\partial_u x_3 &= -qf \\
\partial_u x_1 + \partial_u x_2 &= q^2 f \\
\partial_v x_3 &= -rg \\
\partial_v x_1 - \partial_v x_2 &= -r^2 g,
\end{aligned}
$$

odakle slijede formule (2.11). Jednakosti (2.10) slijede iz Schwarzovog pravila za funkcije $x_1 \pm x_2$ i x_3. Iz $\lambda = \frac{1}{2}(1+qr)^2 fg > 0$ slijedi $fg > 0$ i $qr \neq -1$.

Posebno moramo riješiti slučaj kad je $\partial_u x_1 - \partial_u x_2 = 0$. Tada iz jednakosti (2.12) slijedi da je $\partial_u x_3 = 0$. Ako deriviramo obje jednakosti po v i primijenimo Schwarzovo pravilo, dobivamo da je $\partial_v x_2 = \partial_v x_1 + c_1(u)$ i $\partial_v x_3 = c_2(u)$ za neke glatke funkcije c_1 i c_2 koje ovise samo o u. Ako je $c_1 = 0$, onda iz jednakosti (2.12) slijedi $c_2 = 0$, odakle slijedi da su polja $\mathbf{x}_u$ i $\mathbf{x}_v$ kolinearna, što

je kontradikcija s regularnošću plohe S. Dakle, mora biti $c_1 \neq 0$ i onda možemo zamijeniti u i v (reparametrizacija $\mathbf{x}(v,u)$ ostane konformna), definiramo f i q kao gore te $g = -\partial_v x_1$ i $r = 0$. Analogno se riješi slučaj kad je $\partial_v x_1 + \partial_v x_2 = \partial_v x_3 = 0$. ■

Kao u slučaju prostornih ploha, posebna klasa Weierstrassovih podataka (q, f, r, g) parametrizira klasu minimalnih ploha.

Korolar 2.2.2. *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren jednostavno povezan skup i $f, g, q, r : U \to \mathbb{R}$ glatke funkcije takve da je*

$$f_v = g_u = q_v = r_u = 0.$$

Tada je parametrizacija $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) : U \to \mathbb{M}^3$, dana formulama (2.11), konformna te je ploha S, parametrizirana preslikavanjem $\mathbf{x}$, minimalna. Obratno, svaka minimalna ploha u $\mathbb{M}^3$ može se lokalno parametrizirati takvim preslikavanjem.

Weierstrassova parametrizacija (2.11) je analogon formule McNertney za vremenske plohe. U objema formulama koristimo četiri realne funkcije dviju realnih varijabli (zbog $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$). Nadalje, klasu minimalnih ploha dobivamo opet na isti način: samo koristimo funkcije koje ovise samo o jednoj od dviju varijabli u i v.

Weierstrassovi podaci (q, r) imaju zanimljivu geometrijsku interpretaciju. Za nju nam treba stereografska projekcija vremenske sfere $\tilde{S}$, dane implicitno jednadžbom $-x^2 + y^2 + z^2 = 1$, na xy-ravninu, koju poistovjećujemo s $\mathbb{R}^2$. Neka je $H = \{(x, y, 0) : -x^2 + y^2 = 1\}$. Tada je preslikavanje $F : \tilde{S} \setminus \{z \neq 1\} \to \mathbb{R}^2 \setminus H$, dano formulom

$$F(x, y, z) = \left(\frac{x+y}{1-z}, \frac{-x+y}{1-z} \right),$$

kompozicija stereografske projekcije sfere $\tilde{S}$ s obzirom na sjeverni pol $(0, 0, 1)$ i afine transformacije u nul-koordinate (vidi [22]). Preslikavanje F je bijekcija i njen inverz je dan formulom

$$F^{-1}(u, v) = \left(\frac{u-v}{1+uv}, \frac{u+v}{1+uv}, \frac{-1+uv}{1+uv} \right).$$

Sada možemo Gaussovo preslikavanje promatrati kao $F \circ n \circ \mathbf{x} : U \to \mathbb{R}^2$.

Teorem 2.2.3. *Neka je S regularna vremenska ploha u $\mathbb{M}^3$ i $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ Weierstrassova parametrizacija plohe S s Weierstrassovim podacima (q, f, r, g). Tada je preslikavanje*

$$n \circ \mathbf{x} = F^{-1}(q, r) = F^{-1}\left(\frac{-\partial_u x_3}{\partial_u x_1 - \partial_u x_2}, \frac{\partial_v x_3}{\partial_v x_1 + \partial_v x_2} \right) \tag{2.13}$$

normalno polje plohe S, tj. funkcije q i r su komponente Gaussovog preslikavanja plohe S.

Dokaz. Imamo da je

$$\begin{aligned} n\cdot n &= -\left(\frac{q-r}{1+qr}\right)^2+\left(\frac{q+r}{1+qr}\right)^2+\left(\frac{-1+qr}{1+qr}\right)^2 \\ &= \frac{-q^2+2qr-r^2+q^2+2qr+r^2+1-2qr+q^2r^2}{(1+qr)^2} \\ &= \frac{1+2qr+q^2r^2}{(1+qr)^2}=\frac{(1+qr)^2}{(1+qr)^2}=1 \end{aligned}$$

Dakle, preslikavanje n je jedinično prostorno vektorsko polje. Nadalje,

$$\begin{aligned} (1+qr)(n\cdot\mathbf{x}_u) &= -\left(\frac{-\partial_u x_3}{\partial_u x_1-\partial_u x_2}-\frac{\partial_v x_3}{\partial_v x_1+\partial_v x_2}\right)\partial_u x_1+\left(\frac{-\partial_u x_3}{\partial_u x_1-\partial_u x_2}+\frac{\partial_v x_3}{\partial_v x_1+\partial_v x_2}\right)\partial_u x_2 \\ &+\left(-1+\frac{-\partial_u x_3}{\partial_u x_1-\partial_u x_2}\cdot\frac{\partial_v x_3}{\partial_v x_1+\partial_v x_2}\right)\partial_u x_3 \\ &= \frac{(\partial_u x_3)(\partial_v x_1+\partial_v x_2)(\partial_u x_1-\partial_u x_2)+(\partial_v x_3)(\partial_u x_1-\partial_u x_2)(\partial_u x_1+\partial_u x_2)}{(\partial_u x_1-\partial_u x_2)(\partial_v x_1+\partial_v x_2)} \\ &- \partial_u x_3-\frac{(\partial_u x_3)^2\partial_v x_3}{(\partial_u x_1-\partial_u x_2)(\partial_v x_1+\partial_v x_2)} \\ &= \partial_u x_3+\frac{(\partial_v x_3)(\partial_u x_1+\partial_u x_2)}{\partial_v x_1+\partial_v x_2}-\partial_u x_3-\frac{(\partial_u x_1+\partial_u x_2)\partial_v x_3}{\partial_v x_1+\partial_v x_2}=0 \end{aligned}$$

Ovdje smo koristili jednakosti (2.12). Zbog $\lambda>0$ mora biti $1+qr\neq 0$, odakle slijedi $n\cdot\mathbf{x}_u=0$.

$$\begin{aligned} (1+qr)(n\cdot\mathbf{x}_v) &= -\left(\frac{-\partial_u x_3}{\partial_u x_1-\partial_u x_2}-\frac{\partial_v x_3}{\partial_v x_1+\partial_v x_2}\right)\partial_v x_1+\left(\frac{-\partial_u x_3}{\partial_u x_1-\partial_u x_2}+\frac{\partial_v x_3}{\partial_v x_1+\partial_v x_2}\right)\partial_v x_2 \\ &+\left(-1+\frac{-\partial_u x_3}{\partial_u x_1-\partial_u x_2}\cdot\frac{\partial_v x_3}{\partial_v x_1+\partial_v x_2}\right)\partial_v x_3 \\ &= \frac{(\partial_u x_3)((\partial_v x_1)^2-(\partial_v x_2)^2)+(\partial_v x_3)(\partial_u x_1-\partial_u x_2)(\partial_v x_1+\partial_v x_2)}{(\partial_u x_1-\partial_u x_2)(\partial_v x_1+\partial_v x_2)} \\ &- \partial_v x_3-\frac{(\partial_u x_3)(\partial_v x_3)^2}{(\partial_u x_1-\partial_u x_2)(\partial_v x_1+\partial_v x_2)} \\ &= \frac{(\partial_u x_3)(\partial_v x_3)^2}{(\partial_u x_1-\partial_u x_2)(\partial_v x_1+\partial_v x_2)}+\partial_v x_3-\partial_v x_3-\frac{(\partial_u x_3)(\partial_v x_3)^2}{(\partial_u x_1-\partial_u x_2)(\partial_v x_1+\partial_v x_2)}=0 \end{aligned}$$

Iz toga slijedi da je $n\circ\mathbf{x}_v=0$. Budući da je skup $\{\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v\}$ baza za tangencijalni svežanj TS, slijedi da je polje n okomito na plohu S. ■

Magid nije dao geometrijsku interpretaciju Weierstrassovih podataka. To je napravio Lee u [22], ali nije dao eksplicitnu formulu (2.13) za polje n preko komponentnih funkcija $\partial_u x_k$, $\partial_v x_k$, pomoću koje se može napraviti gornji dokaz.

Lee je u istom radu izveo analogon Konopelchenkove formule za vremenske plohe u $\mathbb{M}^3$. Mi ćemo dokazati formulu na jednostavniji način nego u izvornom radu, slično kao za prostorne plohe.

Teorem 2.2.4. **(Lee)** *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren jednostavno povezan skup i $s_1, t_1, s_2, t_2 : U \to \mathbb{R}$ glatke funkcije takve da su parovi $(s_1, -t_2)$ i (t_1, s_2) linearno nezavisni te zadovoljavaju sustav*

$$\begin{aligned} \partial_u t_2 &= -p s_1 \\ \partial_v s_1 &= p t_2 \\ \partial_u s_2 &= p t_1 \\ \partial_v t_1 &= -p s_2 \end{aligned} \tag{2.14}$$

za neku funkciju $p \in C^\infty(U)$. Tada je parametrizacija $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) : U \to \mathbb{M}^3$, dana formulama

$$\begin{aligned} x_1(u,v) &= \frac{1}{2}\int (s_1^2 + t_1^2)\, du - (s_2^2 + t_2^2)\, dv \\ x_2(u,v) &= \frac{1}{2}\int (s_1^2 - t_1^2)\, du + (s_2^2 - t_2^2)\, dv \\ x_3(u,v) &= -\int s_1 t_1\, du + s_2 t_2\, dv, \end{aligned} \tag{2.15}$$

konformna, a ploha $S = \mathbf{x}(U)$ je regularna i vremenska. Metrički tenzor parametrizacije $\mathbf{x}$ i srednja zakrivljenost plohe $S = \mathbf{x}(U)$ su dani formulama

$$\begin{aligned} ds^2 &= (s_1 s_2 + t_1 t_2)^2\, du dv \\ H &= \frac{2p}{\sqrt{\lambda}}. \end{aligned}$$

Dokaz. Neka su $s_1, t_1, s_2, t_2 : U \to \mathbb{R}$ funkcije koje zadovoljavaju sustav (2.14). Tada za diferencijalne forme

$$\begin{aligned} \omega_{1,2} &= (s_1^2 \pm t_1^2)\, du \mp (s_2^2 \pm t_2^2)\, dv \\ \omega_3 &= s_1 t_1\, du + s_2 t_2\, dv \end{aligned}$$

vrijedi

$$\begin{aligned} d\omega_{1,2} &= (\mp \partial_u (s_2^2 \pm t_2^2) - \partial_v (s_1^2 \pm t_1^2))\, du dv \\ &= (\mp 2 s_2 \partial_u s_2 - 2 t_2 \partial_u t_2 - 2 s_1 \partial_v s_1 \mp 2 t_1 \partial_v t_1)\, du dv \\ &= (\mp 2 s_2 p t_1 + 2 t_2 p s_1 - 2 s_1 p t_2 \pm 2 t_1 p s_2)\, du dv = 0 \\ d\omega_3 &= (\partial_u (s_2 t_2) - \partial_v (s_1 t_1))\, du dv \\ &= ((\partial_u s_2) t_2 + s_2 \partial_u t_2 - (\partial_v s_1) t_1 - s_1 \partial_v t_1)\, du dv \\ &= (p t_1 t_2 - s_2 p t_1 - p t_2 t_1 + s_1 p s_2)\, du dv = 0 \end{aligned}$$

Dakle, forme ω_k su zatvorene. Sada iz Poincaréove leme slijedi da su te forme egzaktne, tj. postoje glatke funkcije $x_k : U \to \mathbb{R}$ takve da vrijede formule (2.15). Za parametrizaciju $\mathbf{x}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = -(\partial_u x_1)^2 + (\partial_u x_2)^2 + (\partial_u x_3)^2 \\
&= -\frac{1}{4}(s_1^2 + t_1^2)^2 + \frac{1}{4}(s_1^2 - t_1^2)^2 + s_1^2 t_1^2 \\
&= -\frac{1}{4}(s_1^4 + 2s_1^2 t_1^2 + t_1^4) + \frac{1}{4}(s_1^4 - 2s_1^2 t_1^2 + t_1^4) + s_1^2 t_1^2 = 0 \\
F &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = -(\partial_u x_1)(\partial_v x_1) + (\partial_u x_2)(\partial_v x_2) + (\partial_u x_3)(\partial_v x_3) \\
&= \frac{1}{4}(s_1^2 + t_1^2)(s_2^2 + t_2^2) + \frac{1}{4}(s_1^2 - t_1^2)(s_2^2 - t_2^2) + s_1 t_1 s_2 t_2 \\
&= \frac{1}{4}(s_1^2 s_2^2 + s_1^2 t_2^2 + t_1^2 s_2^2 + t_1^2 t_2^2) + \frac{1}{4}(s_1^2 s_2^2 - s_1^2 t_2^2 - t_1^2 s_2^2 + t_1^2 t_2^2) + s_1 t_1 s_2 t_2 \\
&= \frac{1}{2}(s_1^2 s_2^2 + s_1 t_1 s_2 t_2 + t_1^2 t_2^2) = \frac{1}{2}(s_1 s_2 + t_1 t_2)^2 \\
G &= \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = -(\partial_v x_1)^2 + (\partial_v x_2)^2 + (\partial_v x_3)^2 \\
&= -\frac{1}{4}(s_2^2 + t^2)^2 + \frac{1}{4}(s_2^2 - t_2^2)^2 + s_2^2 t_2^2 = 0
\end{aligned}$$

Dakle, parametrizacija $\mathbf{x}$ je konformna s konformnim faktorom $\lambda = 2F = (s_1 s_2 + t_1 t_2)^2$. Uočimo da je

$$s_1 s_2 + t_1 t_2 = \begin{vmatrix} s_1 & -t_2 \\ t_1 & s_2 \end{vmatrix},$$

odakle zbog linearne nezavisnosti parova $(s_1, -t_2)$ i (t_1, s_2) slijedi $\lambda > 0$. Posebno, ploha $S = \mathbf{x}(U)$ je regularna i vremenska (jer u koordinatama (u, v) imamo $F^2 - EG > 0$). Nadalje,

$$\begin{aligned}
\partial_v \partial_u x_{1,2} &= \frac{1}{2}\partial_v(s_1^2 \pm t_1^2) = \frac{1}{2}(2s_1 \partial_v s_1 \pm 2t_1 \partial_v t_1) = s_1 p t_2 \mp t_1 p s_2 \\
\partial_v \partial_u x_3 &= -\partial_v(s_1 t_1) = -(\partial_v s_1) t_1 - s_1 \partial_v t_1 = -p t_2 t_1 + s_1 p s_2,
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem toga u formulu (2.9) dobivamo

$$\begin{aligned}
H &= \frac{2}{\lambda}\sqrt{|-(p s_1 t_2 - p t_1 s_2)^2 + (p s_1 t_2 + p t_1 s_2)^2 + (-p t_1 t_2 + p s_1 s_2)^2|} \\
&= \frac{2p}{\lambda}\sqrt{|-s_1^2 t_2^2 + 2s_1 t_2 t_1 s_2 - t_1^2 s_2^2 + s_1^2 t_2^2 + 2s_1 t_2 t_1 s_2 + t_1^2 s_2^2 + t_1^2 t_2^2 - 2t_1 t_2 s_1 s_2 + s_1^2 s_2^2|} \\
&= \frac{2p}{\lambda}\sqrt{|s_1^2 s_2^2 + 2s_1 s_2 t_1 t_2 + t_1^2 t_2^2|} = \frac{2p}{\lambda}\sqrt{(s_1 s_2 + t_1 t_2)^2} = \frac{2p}{\lambda}\sqrt{\lambda} = \frac{2p}{\sqrt{\lambda}}
\end{aligned}$$

■

Vidimo da je parametrizacija (2.15) analogon formule (2.8) za vremenske plohe. U oba slučaja funkcije koje reprezentiraju plohu moraju zadovoljavati isti sustav diferencijalnih jednadžbi (tzv. Diracov sustav s potencijalom p). U oba slučaja ploha je reprezentirana četirima realnim

funkcijama dviju varijabli. Formula za srednju zakrivljenost je u oba slučaja identična.

Za razliku od prostornih ploha, ne možemo dokazati da se svaka regularna vremenska ploha može parametrizirati preslikavanjem oblika (2.15) tako da pripadni Weierstrassovi podaci zadovoljavaju sustav (2.14). To pitanje ostavljamo otvorenim. Možemo samo reći da to ovisi o rješivosti Diracova sustava. Međutim, vrijedi sljedeći slabiji rezultat.

Teorem 2.2.5. *Neka je S regularna vremenska ploha. Tada za svaku točku $p \in S$ postoji parametrizacija $\mathbf{x} : U \to S$ oblika (2.15) takva da je $p \in \mathbf{x}(U)$ i da vrijedi*

$$\begin{aligned} \partial_u t_2 &= -p s_1 \\ \partial_v s_1 &= p t_2 \\ \partial_u s_2 &= q t_1 \\ \partial_v t_1 &= -q s_2 \end{aligned} \tag{2.16}$$

za neke funkcije $p, q \in C^\infty(U)$. Konformni faktor parametrizacije $\mathbf{x}$ i srednja zakrivljenost plohe S su dani formulama

$$\begin{aligned} \lambda &= (s_1 s_2 + t_1 t_2)^2 \\ H &= \frac{2}{\lambda} |p s_1 s_2 + q t_1 t_2|. \end{aligned}$$

Dokaz. Neka je S regularna vremenska ploha u $\mathbb{M}^3$ i $p \in S$ točka. Tada iz teorema 1.3.21 slijedi da postoji konformna parametrizacija $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) : U \to S$ takva da je $p \in \mathbf{x}(U)$.

Budući da je parametrizacija $\mathbf{x}$ konformna, iz relacija (2.12) slijedi da funkcije $\partial_u(x_1 \pm x_2)$ moraju biti istog predznaka te funkcije $-\partial_v(x_1 \pm x_2)$ također. Ako je $\partial_u(x_1 \pm x_2) < 0$, reparametriziramo $(u, v) \mapsto (-u, v)$. Ako je $-\partial_v(x_1 \pm x_2) < 0$, reparametriziramo $(u, v) \mapsto (u, -v)$, a ako su sve četiri funkcije negativne, reparametriziramo $(u, v) \mapsto (-u, -v)$. Uočimo da je reparametrizacija i dalje konformna.

Definirajmo zatim funkcije $s_1, t_1, s_2, t_2 : U \to \mathbb{R}$ formulama

$$\begin{aligned} s_1 &= \sqrt{\partial_u x_1 + \partial_u x_2} \\ t_1 &= \sqrt{\partial_u x_1 - \partial_u x_2} \\ t_2 &= \sqrt{-\partial_v x_1 - \partial_v x_2} \\ s_2 &= \sqrt{-\partial_v x_1 + \partial_v x_2}. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Prve dvije jednadžbe sustava (2.15) mogu se zapisati kao

$$-\frac{\partial_u t_2}{s_1} = p = \frac{\partial_v s_1}{t_2} \Leftrightarrow -t_2 \partial_u t_2 = s_1 \partial_v s_1 \Leftrightarrow \partial_u(t_2^2) + \partial_v(s_1^2) = 0.$$

Analogno, zadnje dvije jednadžbe se mogu zapisati kao $\partial_u(s_2^2)+\partial_v(t_1^2)=0$. Gornje funkcije očito zadovoljavaju te dvije jednadžbe zbog Schwarzovog pravila.
Izravno iz gornjih formula slijede formule za x_1 i x_2 u (2.15). Zatim iz jednakosti (2.12) slijedi formula za x_3. ■
Problem je što općenito ne mora biti $p=q$. Taj uvjet je dovoljan da forme ω_k budu zatvorene, ali nije nužan. S druge strane, linearni sustav

$$\partial_u x_1 = \partial_u(s_1^2)+\partial_u(t_1^2)$$
$$\partial_u x_2 = \partial_u(s_1^2)-\partial_u(t_1^2)$$

ima jedinstveno rješenje (do na predznak), kao i odgovarajući sustav za s_2 i t_2 i to su funkcije dane formulama (2.17). U [22] je dokazano da se $p=q$ postiže za plohe konstantne srednje zakrivljenosti (tzv. cmc-plohe). Postoje i plohe koje nisu cmc-plohe, a imaju $p=q$ (navest ćemo jedan primjer u $\mathbb{M}^4$). Minimalne plohe su, kao u prostornom slučaju, reprezentirane funkcijama koje ovise o samo jednoj od varijabli u i v. Njih dobivamo za $p=q=0$.

Korolar 2.2.6. *Neka je $U\subseteq\mathbb{R}^2$ jednostavno povezan skup i $s_1,t_1,s_2,t_2:U\to\mathbb{R}$ glatke funkcije takve da je*

$$\partial_u t_2=\partial_v s_1=\partial_u s_2=\partial_v t_1=0.$$

Tada je parametrizacija $\mathbf{x}:U\to\mathbb{M}^3$, dana formulama (2.15), konformna te je ploha $S=\mathbf{x}(U)$ minimalna. Obratno, svaka minimalna ploha u $\mathbb{M}^3$ može se lokalno parametrizirati takvom parametrizacijom.
Imamo i analogon propozicije 2.1.5 za vremenske plohe, koji vrijedi za sve regularne plohe.

Propozicija 2.2.7. *Neka je S regularna vremenska ploha u $\mathbb{M}^3$ dana Weierstrassovim podacima (q,f,r,g), odnosno (s_1,t_1,s_2,t_2). Tada je*

$$f=t_1^2,\quad fq^2=s_1^2,\quad g=t_2^2,\quad r^2g=s_2^2.$$

Kod prostornih ploha, parametrizaciju koja ima fundamentalne veličine $E=G=0$ i $F=\lambda/2$ smo dobili kompleksnom reparametrizacijom $z=u+vi$, $\bar{z}=u-vi$. Time smo plohu parametrizirali jednom kompleksnom varijablom z. U slučaju vremenskih ploha, analognu parametrizaciju dobivamo realnim parametrima $\tilde{u}=u+v$, $\tilde{v}=-u+v$.
Ako želimo analogiju s prostornim slučajem da nam reparametrizacija bude parametrizirana samo jednom varijablom, možemo koristiti tzv. hiperboličke (podijeljene kompleksne) brojeve.

Hiperbolički broj je broj oblika $z = x + yj$, gdje su $x, y \in \mathbb{R}$, a $j \notin \mathbb{R}$ je imaginarna jedinica takva da je $j^2 = 1$. Ako vremensku plohu reparametriziramo varijablama $z = u + vj$, $\overline{z} = u - vj$, opet dobivamo $E = G = 0$, $F = \lambda/2$. Dakle, Weierstrassove podatke vremenske plohe možemo promatrati i kao dvije hiperboličke funkcije ili četiri realne funkcije hiperboličke varijable.
Za hiperboličke brojeve imamo da je

$$z \cdot \overline{z} = (x + yj)(x - yj) = x^2 - y^2 j^2 = x^2 - y^2,$$

što ne mora biti nenegativan broj (kao kod kompleksnih i dualnih brojeva). Zato se definira

$$\|z\| = z \cdot \overline{z}.$$

Dakle, apsolutna vrijednost hiperboličkog broja može biti negativna, ali je $\|zw\| = \|z\| \cdot \|w\|$.
Hiperbolički broj z nije invertibilan ako i samo ako je oblika $x \pm xj$ za neki $x \in \mathbb{R}$. Dakle, skup hiperboličkih brojeva nije polje, nego samo prsten (i nije integralna domena). Za razliku od dualnih brojeva, imaginarna jedinica je invertibilna.
Hiperbolički brojevi mogu se prikazati u tzv. dijagonalnoj ili nulbazi, tj.

$$z = x + yj = (x - y)e + (x + y)\overline{e},$$

gdje je $e = (1 - j)/2$. Ako je $z = ae + b\overline{e}$ i $w = ce + b\overline{e}$, onda je

$$zw = ace + bd\overline{e},$$

što pokazuje da je prsten hiperboličkih brojeva izomorfan prstenu $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$. Geometrijski (tj. kao mnogostrukost), skup svih hiperboličkih brojeva je ravnina Minkowskog $\mathbb{M}^2$, za razliku od kompleksnih brojeva, koji čine euklidsku ravninu $\mathbb{E}^2$.

2.3. Weierstrassova parametrizacija za svjetlosne plohe u $\mathbb{M}^3$

Weierstrassova parametrizacija za svjetlosne plohe u $\mathbb{M}^3$ je objavljena u radu [12]. Budući da smo za parametrizaciju prostornih ploha koristili kompleksne brojeve ($i^2 = -1$), a za parametrizaciju vremenskih ploha hiperboličke brojeve ($j^2 = 1$), ideja je da probamo svjetlosne plohe parametrizirati pomoću dualnih brojeva ($\varepsilon^2 = 0$).
Ako je S regularna svjetlosna ploha u $\mathbb{M}^3$ i $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ konformna parametrizacija, onda reparametrizacijom $z = u + v\varepsilon$, $\bar{z} = u - v\varepsilon$ dobivamo

$$\begin{aligned}\lambda\, dzd\bar{z} &= \lambda\, d(u+v\varepsilon)d(u-v\varepsilon) = \lambda\,(du+\varepsilon dv)(du-\varepsilon dv) = \lambda\,(du^2 - \varepsilon^2\, dv^2) = \lambda\, du^2 \\ &= \lambda\, du^2 + 0\, dudv + 0\, dv^2 = E\, du^2 + 2F\, dudv + G\, dv^2 = ds^2\end{aligned}$$

Dakle, reparametrizacija $\tilde{\mathbf{x}}(z,\bar{z})$ ima fundamentalne veličine $\tilde{E} = \tilde{G} = 0$ i $\tilde{F} = \lambda/2$, što je upravo svojstvo koje treba imati Weierstrassova parametrizacija. To nam daje ideju da bi Weierstrassovi podaci svjetlosnih ploha trebale biti dualne funkcije. Uočimo da se općenito dualni parametri ne mogu eksplicitno supstituirati jer je

$$u = \frac{z+\bar{z}}{2}, \quad v\varepsilon = \frac{z-\bar{z}}{2}.$$

Iz toga ne možemo izraziti v jer ne možemo dijeliti brojem ε. Tu nam sada ključnu ulogu igra rezultat da je svaka svjetlosna ploha u $\mathbb{M}^3$ lokalno pravčasta, što nam omogućuje da ipak uvrstimo dualne parametre. Naime, pravčastu parametrizaciju (koja je konformna) možemo zapisati ovako

$$\mathbf{x}(u,v) = \operatorname{Im} \varepsilon \mathbf{x}(u,v) = \operatorname{Im}(\varepsilon c(u) + \varepsilon v e(u)) = \operatorname{Im}\left(\varepsilon c\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right) + \frac{z-\bar{z}}{2} e\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)\right).$$

Teorem 2.3.1. *Neka je S regularna svjetlosna ploha u $\mathbb{M}^3$ i $p \in S$ točka. Tada se ploha S može lokalno parametrizirati konformnom parametrizacijom $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ danom formulama*

$$\begin{aligned} x_1(u,v) &= \frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{z_0}^{z} f(1+g^2)\, dw \\ x_2(u,v) &= -\frac{1}{2}\operatorname{Im}\int_{z_0}^{z} f(1-g^2)\, dw \\ x_3(u,v) &= \operatorname{Im}\int_{z_0}^{z} fg\, dw, \end{aligned} \tag{2.18}$$

gdje je $p \in \mathbf{x}(U)$, $z_0 \in U \subseteq \mathbb{D}$, $z = u + v\varepsilon$ te $f, g : U \subseteq \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ funkcije takve da je funkcija f holomorfna, funkcija g meromorfna i funkcija fg^2 holomorfna. Konformni faktor je

$$\lambda = (\operatorname{Re} f)^2 (\operatorname{Im} g)^2.$$

Dokaz. Iz teorema 1.5.16 slijedi da postoji konformna pravčasta parametrizacija

$$\mathbf{x}(u,v) = c(u) + ve(u)$$

plohe S takva da je $p \in \mathbf{x}(U)$. Za $k \in \{1,2,3\}$ stavimo

$$x_k(u,v) = c_k(u) + ve_k(u).$$

Uočimo da funkcija $\partial_v x_k = e_k$ ovisi samo o u, odakle slijedi da postoji glatka funkcija $\tilde{x}_k : U \to \mathbb{R}$ takva da je funkcija

$$f_k = \tilde{x}_k + \varepsilon x_k$$

holomorfna. Jedna takva funkcija je

$$\tilde{x}_k = \int e_k(u)\, du.$$

Naime, tada je $\partial_v \tilde{x}_k = 0$ i $\partial_u \tilde{x}_k = e_k(u) = \partial_v x_k$, tj. funkcija f_k zadovoljava Cauchy-Riemannove uvjete za dualne funkcije. Budući da su realni i imaginarni dio funkcije f_k glatki (tj. C^∞), iz korolara 1.1.14 slijedi da je funkcija f glatka. Sada iz formule (1.4) i Cauchy-Riemannovih uvjeta slijedi da je

$$f_k' = \partial_u \tilde{x}_k + \varepsilon \partial_u x_k = \partial_v x_k + \varepsilon \partial_u x_k.$$

Iz toga slijedi da je

$$\begin{aligned}
-(f_1')^2 + (f_2')^2 + (f_3')^2 &= -(\partial_v x_1 + \varepsilon \partial_u x_1)^2 + (\partial_v x_2 + \varepsilon \partial_u x_2)^2 + (\partial_v x_3 + \varepsilon \partial_u x_3)^2 \\
&= [(-\partial_v x_1)^2 + (\partial_v x_2)^2 + (\partial_v x_3)^2] + \varepsilon^2 [-(\partial_u x_1)^2 + (\partial_u x_2)^2 + (\partial_u x_3)^2] \\
&\quad + 2\varepsilon[-(\partial_u x_1)(\partial_v x_1) + (\partial_u x_2)(\partial_v x_2) + (\partial_u x_3)(\partial_v x_3)] \\
&= G - \varepsilon^2 E + 2\varepsilon F = 0 - 0 \cdot E + 2\varepsilon \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Ovu jednakost možemo faktorizirati kao

$$(f_3')^2 = (f_1' - f_2')(f_1' + f_2'). \tag{2.19}$$

Uočimo da ovdje, za razliku od prostornog slučaja, $f_3' = 0$ ne povlači da jedna od funkcija $f_1' \pm f_2'$ mora biti 0 jer prsten $\mathbb{D}$ nije integralna domena. Sada imamo dva slučaja.

Ako je $f_1' - f_2' \neq 0$, stavimo $f = f_1' - f_2'$ i $g = \dfrac{f_3'}{f_1' - f_2'}$. Tada je funkcija fg^2 holomorfna jer iz jednakosti (2.19) imamo da je

$$fg^2 = (f_1' - f_2') \cdot \frac{(f_3')^2}{(f_1' - f_2')^2} = \frac{(f_3')^2}{f_1' - f_2'} = f_1' + f_2'.$$

Nadalje,

$$\begin{aligned} f_1' &= \frac{1}{2}(f_1' - f_2' + f_1' + f_2') = \frac{f}{2}(1 + g^2) \\ f_2' &= -\frac{1}{2}(f_1' - f_2' - (f_1' + f_2')) = -\frac{f}{2}(1 - g^2) \\ f_3' &= (f_1' - f_2') \cdot \frac{f_3'}{f_1' - f_2'} = fg. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Ako je $f_1' - f_2' = 0$, stavimo $f = 2f_1'$ i $g = 0$. Tada je funkcija $fg^2 = 0$ također holomorfna i vrijede jednakosti (2.20). Primjenom analogona teorema 1.1.10 za dualne funkcije dobivamo

$$x_k = \operatorname{Im} f_k = \operatorname{Im} \int_{z_0}^{z} f_k'(w)\, dw,$$

tj. vrijede formule (2.18). Konformni faktor parametrizacije $\mathbf{x}$ je

$$\begin{aligned} \lambda = E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u &= -(\partial_u x_1)^2 + (\partial_u x_2)^2 + (\partial_u x_3)^2 \\ &= -(\operatorname{Im} f_1')^2 + (\operatorname{Im} f_2')^2 + (\operatorname{Im} f_3')^2 \\ &= -\left(\operatorname{Im} \frac{f}{2}(1 + g^2)\right)^2 + \left(\operatorname{Im} \frac{f}{2}(1 - g^2)\right)^2 + (\operatorname{Im} fg)^2 \\ &= -\frac{1}{4}(\operatorname{Im} f + \operatorname{Im} fg^2)^2 + \frac{1}{4}(\operatorname{Im} f - \operatorname{Im} fg^2)^2 + (\operatorname{Im} fg)^2 \\ &= -(\operatorname{Im} f)(\operatorname{Im} fg^2) + (\operatorname{Im} fg)^2 \end{aligned}$$

Ova formula se može još pojednostavniti ako stavimo $f = \varphi_1 + \varepsilon\psi_1$ i $g = \varphi_2 + \varepsilon\psi_2$. Tada je

$$fg = \varphi_1\varphi_2 + \varepsilon(\varphi_1\psi_2 + \psi_1\varphi_2), \quad fg^2 = \varphi_1\varphi_2^2 + \varepsilon(2\varphi_1\varphi_2\psi_2 + \psi_1\varphi_2^2).$$

Iz toga slijedi da je

$$\begin{aligned} \lambda &= -\psi_1(2\varphi_1\varphi_2\psi_2 + \psi_1\varphi_2^2) + (\varphi_1\psi_2 + \psi_1\varphi_2)^2 \\ &= -2\varphi_1\varphi_2\psi_1\psi_2 - \psi_1^2\varphi_2^2 + \varphi_1^2\psi_2^2 + 2\varphi_1\psi_2\psi_1\varphi_2 + \psi_1^2\varphi_2^2 \\ &= \varphi_1^2\psi_2^2 = (\operatorname{Re} f)^2(\operatorname{Im} g)^2 \end{aligned}$$

■

Weierstrassova parametrizacija (2.18) je analogon formule McNertney za svjetlosne plohe. Vidimo i da je izvod sličan, štoviše postoji određena dualnost između parametrizacije za prostorne i parametrizacije za svjetlosne plohe. Kod prostornih ploha komponentne funkcije x_k se

nadopunjavaju do holomorfnih kompleksnih funkcija $f_k = x_k + i\tilde{x}_k$ tako da dodamo imaginarnu komponentu, a kod svjetlosnih ploha radimo obratno, funkcija x_k se nadopunjava do holomorfne dualne funkcije $f_k = \tilde{x}_k + \varepsilon x_k$ tako da dodamo realnu komponentu. Zatim u prostornom slučaju imamo da je $x_k = \operatorname{Re} f_k$, a u svjetlosnom $x_k = \operatorname{Im} f_k$.

U svjetlosnom slučaju se svaka regularna ploha može reprezentirati parom (f,g) dualnih funkcija, gdje je f holomorfna, a g meromorfna funkcija dok kod prostornih ploha takve (kompleksne) funkcije reprezentiraju točno klasu maksimalnih ploha. Dakle, parametrizacija (2.18) je usklađena s definicijom 1.5.3, prema kojoj su sve svjetlosne plohe u $\mathbb{M}^3$ minimalne (lema 1.5.15). Uočimo da je

$$2\varepsilon \operatorname{Im} \int f_k' \, dw = \int f_k' \, dw - \overline{f_k'} \, d\overline{w},$$

odakle slijedi da svjetlosne plohe nemaju parametrizaciju koja bi bila analogon Konopelchenkove formule za prostorne plohe, odnosno Leejeve za vremenske plohe jer ne možemo dijeliti brojem ε (za razliku od formula (2.8), gdje smo mogli dijeliti brojem i).

Neka je S regularna svjetlosna ploha u $\mathbb{M}^3$, $S(TS)$ neka mreža plohe S i $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ parametrizacija dijela plohe S. Budući da smo uveli drugu fundamentalnu formu plohe S, možemo definirati i fundamentalne veličine drugog reda parametrizacije $\mathbf{x}$ formulama

$$L = II(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u), \quad M = II(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_v), \quad N = II(\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_v).$$

Zatim želimo pronaći karakterizaciju minimalne svjetlosne plohe pomoću fundamentalnih veličina koja bi bila analogon teorema 1.3.13. Vidimo da ne možemo općenito definirati srednju zakrivljenost svjetlosne plohe formulom iz teorema jer je $EG - F^2 = 0$. Međutim, za prostorne i vremenske plohe vrijedi

$$H = 0 \Leftrightarrow EN - 2FM + GL = 0.$$

S druge strane, imamo sljedeći rezultat.

Teorem 2.3.2. *Za svaku regularnu svjetlosnu plohu S u $\mathbb{M}^3$ i parametrizaciju $\mathbf{x} : U \to S$ je*

$$EN - 2FM + GL = 0.$$

Dokaz. Prema teoremu 1.4.8, ploha S je potpuno umbilička, tj. $II(v,w) = \alpha(p)(v,w)$ za svaku točku $p \in S$ i vektore $v, w \in T_pS$, gdje je α neka glatka funkcija. No, tada je

$$L = II(\mathbf{x}_u, \mathbf{x}_u) = \alpha(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u) = \alpha E$$

i analogno $M = \alpha F$, $N = \alpha G$. No, iz toga slijedi da je

$$EN - 2FM + GL = E \cdot \alpha G - 2F \cdot \alpha F + G \cdot \alpha E = 2\alpha(EG - F^2) = 2\alpha \cdot 0 = 0.$$

■

Budući da su sve regularne plohe u $\mathbb{M}^3$ minimalne, vidimo da gornji uvjet karakterizira i minimalne svjetlosne plohe. Teorem se može dokazati i bez korištenja teorema 1.4.8 (vidi [12]).

U prostornom i vremenskom slučaju imamo Weierstrassovu parametrizaciju za sve regularne plohe i imamo klasu maksimalnih, odnosno minimalnih ploha ($H = 0$), koju reprezentiraju funkcije koje ovise samo o jednoj varijabli. Budući da su u svjetlosnom slučaju sve plohe minimalne i potpuno umbiličke, jedina manja klasa koja se ističe su potpuno geodetske plohe, koje su poseban slučaj potpuno umbiličkih ploha za $\alpha = 0$. Zanima nas koje funkcije (f, g) reprezentiraju takve plohe. U sljedećoj lemi ćemo za vektorska polja poput $X = \mathbf{x}_u \circ \mathbf{x}^{-1}$ pisati kraće $\mathbf{x}_u$ (iako ta funkcija nije dana na plohi S, nego na skupu $U \subseteq \mathbb{R}^2$).

Lema 2.3.3. *Ako je $\mathbf{x} : U \to S$ konformna parametrizacija, onda je*

$$\tilde{\nabla}_{\mathbf{x}_u} \mathbf{x}_u = \mathbf{x}_{uu},$$

gdje je $\tilde{\nabla}$ Levi-Civita koneksija na $\mathbb{M}^3$.

Dokaz. Ako je M n-dimenzionalna mnogostrukost i $\tilde{\nabla}$ linearna koneksija na M, onda je

$$\tilde{\nabla}_X Y = \sum_{1 \le i,j,k \le n} (XY_k + X_i Y_j \Gamma_{ij}^k) E_k$$

(vidi [27]), gdje je $\{E_k\}$ lokalni reper za svežanj TM te $X = \sum_{i=1}^n X_i E_i$, $Y = \sum_{j=1}^n Y_j E_i$. Za standardni koordinatni reper $E_k = \dfrac{\partial}{\partial x_k}$, svi Christoffelovi simboli su $\Gamma_{ij}^k = 0$ ([1]), pa je

$$\tilde{\nabla}_X Y = \sum_{k=1}^n XY_k E_k. \tag{2.21}$$

Izraz XY_k je primjena derivacije $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ na komponentnu funkciju $Y_k : M \to \mathbb{R}$. Trebamo izračunati taj izraz za polja $X = Y = \mathbf{x}_u \circ \mathbf{x}^{-1}$. Tada je $Y_k = \partial_u x_k$ (jer smo odabrali standardni reper). Za plohe kojima je ambijentalni prostor $\mathbb{R}^n$, djelovanje derivacije na funkciju je dano izomorfizmom $\mathbb{R}^n_p \to T_p\mathbb{R}^n$, $v \mapsto \tilde{v}$, gdje je

$$\tilde{v} f = D_v f(p) = \frac{d}{dt} f(p + tv) \mid_{t=0} = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

Ako uvrstimo $n = 3$, $v = \mathbf{x}_u \circ \mathbf{x}^{-1}$, $f = \partial_u x_k \circ \mathbf{x}^{-1}$, vidimo da je $v_i = \partial_u x_i \circ \mathbf{x}^{-1}$, a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial(\partial_u x_k \circ \mathbf{x}^{-1})}{\partial x_i}(p)$$

je element (k,i) Jacobijeve matrice preslikavanja $\mathbf{x}_u \circ \mathbf{x}^{-1}$, tj.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = (\partial_{x_i} u)\partial_u^2 x_k + (\partial_{x_i} v)\partial_v \partial_u x_k.$$

Sada to uvrstimo u formulu (2.21) i računamo.

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_{\mathbf{x}_u}\mathbf{x}_u &= \sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3}(\partial_{x_i} u)\partial_u^2 x_k + (\partial_{x_i} v)\partial_v \partial_u x_k\right)\frac{\partial}{\partial x^k} \\
&= \sum_{i=1}^{3}\left((\partial_u x_i)(\partial_{x_i} u)\sum_{k=1}^{3}(\partial_u x_k)^2\frac{\partial}{\partial x^k} + (\partial_u x_i)(\partial_{x_i} v)\sum_{k=1}^{3}(\partial_v \partial_u x_k)\frac{\partial}{\partial x^k}\right) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{3}(\partial_u x_i)(\partial_{x_i} u)\right)\mathbf{x}_{uu} + \left(\sum_{i=1}^{3}(\partial_u x_i)(\partial_{x_i} v)\right)\mathbf{x}_{uv} = \alpha\mathbf{x}_{uu} + \beta\mathbf{x}_{uv}
\end{aligned}$$

Koristili smo da je $\mathbf{x}_{uu} \circ \mathbf{x}^{-1} = \sum_{k=1}^{3}(\partial_u x_k)^2\frac{\partial}{\partial x^k}$ i $\mathbf{x}_{uv} \circ \mathbf{x}^{-1} = \sum_{k=1}^{3}(\partial_v \partial_u x_k)\frac{\partial}{\partial x^k}$ jer iz gornjeg izomorfizma imamo da je $\frac{\partial}{\partial x^k} = \tilde{e_k}$, a parcijalne derivacije su derivacije u smjeru vektora e_k. Izraz α je umnožak prvog retka i prvog stupca matrica $\nabla\mathbf{x}^{-1}\nabla\mathbf{x} = \nabla(\mathbf{x}^{-1} \circ \mathbf{x}) = I$, dakle $\alpha = 1$, a izraz β je umnožak drugog retka i prvog stupca, dakle $\beta = 0$. ■

Sada imamo sljedeći rezultat za potpuno geodetske svjetlosne plohe.

Teorem 2.3.4. *Svjetlosna ploha S, dana Weierstrassovom parametrizacijom s podacima* (f,g)*, je potpuno geodetska ako i samo ako funkcija* $\operatorname{Im} g$ *ovisi samo o u.*

Dokaz. Budući da je Weierstrassova parametrizacija $\mathbf{x} : U \to S$ konformna, za svežanj $S(TS)$ možemo odabrati svežanj razapet poljem $\mathbf{x}_u$, a polje $\xi = \mathbf{x}_v$ razapinje svežanj $TS^{\perp}$. Nadalje, budući da je $II(X,Y) = (\tilde{\nabla}_X Y)\cdot\xi$ i $II(X,\xi) = 0$ (lema 1.4.7), uvjet $II = 0$ je ekvivalentan uvjetu

$$0 = II(\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_u) = (\tilde{\nabla}_{\mathbf{x}_u}\mathbf{x}_u)\cdot\xi = \mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_v$$

jer je zbog bilinearnosti dovoljno da bude $II = 0$ na bazi $\{\mathbf{x}_u,\mathbf{x}_v\}$ za svežanj TS.

S druge strane, deriviranjem jednakosti $F = \mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v = 0$ po u dobivamo

$$\mathbf{x}_{uu}\cdot\mathbf{x}_v + \mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_{vu} = 0,$$

odakle slijedi da je gornji uvjet ekvivalentan uvjetu $\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_{uv} = 0$. No, deriviranjem jednakosti $\lambda = E = \mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_u$ po v dobivamo

$$\lambda_v = 2(\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_{uv}).$$

Dakle, $II = 0 \Leftrightarrow \lambda_v = 0$. Budući da je $\lambda = (\operatorname{Re} f)^2(\operatorname{Im} g)^2$ i da zbog holomorfnosti funkcija $\operatorname{Re} f$ ne ovisi o v, slijedi da je uvjet $II = 0$ ekvivalentan uvjetu da funkcija $\operatorname{Im} g$ ne ovisi o v. ■

Sljedeći teorem je dokazan u [17], a ovdje ćemo ga dokazati na drugi način, koristeći činjenicu da je $II = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_u = 0$.

Teorem 2.3.5. **(Inoguchi-Lee)** *Jedina potpuno geodetska svjetlosna ploha u $\mathbb{M}^3$ je ravnina.*

Dokaz. Neka je S potpuno geodetska svjetlosna ploha u $\mathbb{M}^3$ i $\mathbf{x}(u,v) = c(u) + ve(u)$ konformna pravčasta parametrizacija plohe S. Za svežanj $S(TS)$ biramo svežanj razapet poljem $\mathbf{x}_u$. Deriviranjem uvjeta $G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v = 0$ po u dobivamo

$$\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_v = 0.$$

Kako je ploha S potpuno geodetska, imamo još da je $\mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_u = 0$. Kako polja $\mathbf{x}_u$ i $\mathbf{x}_v$ razapinju svežanj TS, slijedi da je polje $\mathbf{x}_{uv} = e'$ prerez svežnja $TS^{\perp}$, odakle slijedi da je to polje kolinearno s poljem $\mathbf{x}_v = e$. Dakle, mora biti

$$e' = \alpha e$$

za neku glatku funkciju α, a opće rješenje te diferencijalne jednadžbe (po komponentama dobijemo separabilne jednadžbe) je

$$e(u) = \pm \exp\left(\int \alpha(u)\, du\right) \tilde{e},$$

gdje je $\tilde{e} \in \mathbb{M}^3$ neki konstantan (svjetlosni) vektor. No, tada se ploha može reparametrizirati tako da je $e = const$. Tada je

$$(c \cdot e)' = c' \cdot e = F = 0 \Rightarrow c \cdot e = const. = C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow x \cdot e = (c \cdot e) + v(e \cdot e) = C + v \cdot 0 = C.$$

Ako je sada $p_0 = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ neka fiksna točka na plohi S, onda za bilo koju točku $p = \mathbf{x}(u,v)$ plohe S vrijedi

$$(p - p_0) \cdot e = \mathbf{x}(u,v) \cdot e - \mathbf{x}(u_0, v_0) \cdot e = C - C = 0.$$

Dakle, svaka točka plohe S zadovoljava implicitnu jednadžbu ravnine koja prolazi točkom p_0 i okomita je na vektor e. ■

Sada možemo zaključiti koja klasa funkcija (f,g) reprezentira ravnine (sve konformne pravčaste parametrizacije, ne samo afine).

Korolar 2.3.6. *Svjetlosna ploha S, dana Weierstrassovom parametrizacijom s podacima (f,g), je svjetlosna ravnina ako i samo ako funkcija* $\operatorname{Im} g$ *ovisi samo o u.*

Želimo definirati asociranu familiju i adjungiranu plohu svjetlosne plohe. U prostornom i vremenskom slučaju, asociranu familiju i adjungiranu plohu imaju samo maksimalne, odnosno

minimalne plohe. Budući da su sve svjetlosne plohe u $\mathbb{M}^3$ minimalne, svaka bi trebala imati asociranu familiju i adjungiranu plohu.

Gorkaviy je tražio asociranu familiju $(S_t)_{t\in\mathbb{R}}$ svjetlosne plohe S tako što je rješavao sustav

$$\partial_u \mathbf{x}_t = A\mathbf{x}_u + B\mathbf{x}_v$$
$$\partial_v \mathbf{x}_t = C\mathbf{x}_u + D\mathbf{x}_v,$$

gdje je $AD - BC \neq 0$. Pokazao je (vidi dokaz teorema 1.5.12) da netrivijalno rješenje postoji ako i samo ako je $A = D = 1$, $C = 0$ i funkcija $B = B(t,u)$ po volji (tj. ne ovisi o v). Budući da plohe S_t sve moraju biti svjetlosne (time su automatski i minimalne), možemo u te jednadžbe uvrstiti pravčaste parametrizacije $\mathbf{x}(u,v) = c(u) + ve(u)$ i $\mathbf{x}_t(u,v) = c_t(u) + ve_t(u)$. Dobivamo

$$c_t' + ve_t' = c' + ve' + Be$$
$$e_t = e.$$

Iz toga slijedi da je $c_t' = c' + Be$, pa integriranjem dobivamo

$$\mathbf{x}_t(u,v) = c(u) + \int B(t,u)e(u)\,du + ve(u).$$

Ako odaberemo $B = B(t)$ (tj. funkciju koja ovisi samo o t), dobivamo

$$\mathbf{x}_t(u,v) = c(u) + ve(u) + B(t)\int e(u)\,du = \mathbf{x}(u,v) + B(t)\tilde{\mathbf{x}}(u),$$

gdje je $\tilde{x}_k$, $k \in \{1,2,3\}$ upravo nadopunjenje komponente x_k do holomorfne dualne funkcije $f_k = \tilde{x}_k + \varepsilon x_k$ iz konstrukcije Weierstrassove parametrizacije. Ovo je sada analogna konstrukcija kao za prostorne plohe (teorem 1.3.27) jer smo i tamo parametrizaciju $\mathbf{x}_t$ dobili kao linearnu kombinaciju preslikavanja $\mathbf{x}$ i $\tilde{\mathbf{x}}$, gdje su komponente preslikavanja $\tilde{\mathbf{x}}$ nadopunjenja do holomorfnih kompleksnih funkcija. Funkcija B može biti bilo koja glatka injekcija takva da je $B(0) = 0$ (jer mora biti $S_0 = S$). Injektivnost je potrebna da bude $\mathbf{x}_{t_2} \circ \mathbf{x}_{t_1}^{-1} \neq id_{S_{t_1}}$ za $t_1 \neq t_2$, tj. kako bi sve G-transformacije bile netrivijalne.

Želimo jednu konkretnu familiju, pa se postavlja pitanje koju funkciju B treba izabrati da dobijemo analogiju s prostornim i vremenskim slučajem. U prostornom slučaju, komponentne funkcije preslikavanja $\tilde{\mathbf{x}}_t$ u prikazu kao linearne kombinacije preslikavanja $\mathbf{x}$ i $\tilde{\mathbf{x}}$ su

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i},$$

a u vremenskom slučaju (teorem 1.3.29) su

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^{t} + e^{-t}}{2}, \quad \operatorname{sh} t = \frac{e^{t} - e^{-t}}{2}.$$

U [26] je dano holomorfno proširenje eksponencijalne funkcije

$$e^{x+y\varepsilon} = e^x(1+y\varepsilon), \tag{2.22}$$

koje ima sva svojstva kao i realna, uključujući $(e^z)' = e^z$. U svjetlosnom slučaju već imamo gore da komponenta od $\mathbf{x}$ u svjetlosnom slučaju mora biti 1, što se može zapisati kao

$$1 = \frac{1+1}{2} = \frac{e^0(1+\varepsilon t)+e^0(1-\varepsilon t)}{2} = \frac{e^{\varepsilon t}+e^{-\varepsilon t}}{2}.$$

Budući da je $\sin t = \operatorname{Im} e^{it}$ (koristimo taj oblik jer ne možemo dijeliti brojem ε), slijedi da za funkciju B moramo uzeti

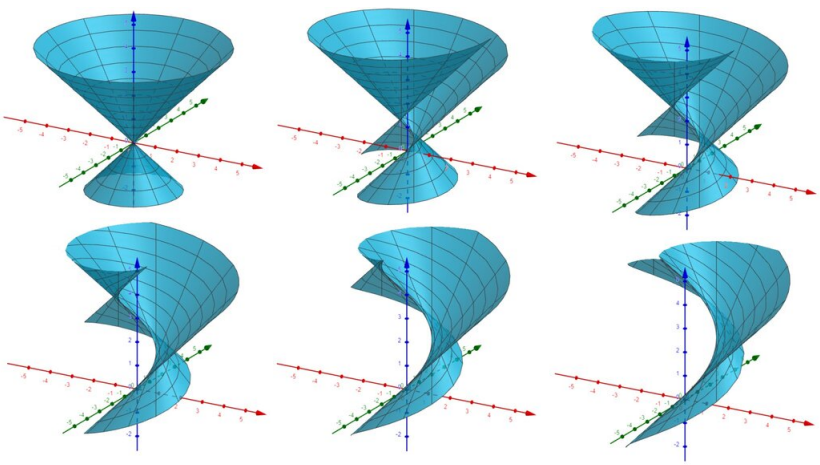
$$B(t) = \operatorname{Im} e^{\varepsilon t} = \operatorname{Im} e^0(1+t\varepsilon) = t.$$

Zaključujemo da je asocirana familija $(S_t)_{t\in\mathbb{R}}$ svjetlosne plohe S, koja je analogon prostornog i vremenskog slučaja, dana parametrizacijama

$$\mathbf{x}_t(u,v) = \mathbf{x}(u,v)+t\tilde{\mathbf{x}}(u) = \left(c(u)+t\int e(u)\,du\right)+ve(u).$$

Primjer. Asocirana familija svjetlosnog stošca $(S_t)_{t\in\mathbb{R}}$ je dana parametrizacijama

$$\mathbf{x}_t(u,v) = t(u,\sin u,-\cos u)+v(1,\cos u,\sin u). \tag{2.23}$$



Slika 2.1: Plohe iz asocirane familije svjetlosnog stošca za $t \in \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1.25\}$

Ako to usporedimo s plohama iz asocirane familije prostornog katenoida $y^2+z^2 = \operatorname{sh}^2 x$, vidimo da se radi o istoj G-deformaciji.

Sada ćemo konstruirati analogon adjungirane plohe $\tilde{S}$ za svjetlosne plohe. Za prostornu plohu

S, ploha $\tilde{S}$ je dana parametrizacijom $\tilde{\mathbf{x}} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$, gdje je funkcija $\tilde{x}_k$ nadopunjenje funkcije x_k do holomorfne kompleksne funkcije $f_k = x_k + i\tilde{x}_k$. Za svjetlosnu plohu S ne možemo napraviti takvu konstrukciju jer nadopunjenje $\tilde{x}_k$ do holomorfne dualne funkcije ovisi samo o u, pa preslikavanje $\tilde{\mathbf{x}}$ ne parametrizira plohu, nego krivulju.

Za vremensku plohu S, parametrizacija je oblika $\mathbf{x}(u,v) = c_1(u) + c_2(v)$, gdje su c_1 i c_2 svjetlosne krivulje i onda je ploha $\tilde{S}$ dana parametrizacijom $\tilde{\mathbf{x}}(u,v) = c_1(u) - c_2(v)$. Za svjetlosnu plohu S, parametrizacija je oblika $\mathbf{x}(u,v) = c(u) + ve(u)$. Ako stavimo $\tilde{\mathbf{x}}(u,v) = c(u) - ve(u)$, dobijemo samo reparametrizaciju plohe S. Ako stavimo

$$\mathbf{x}(u,v) = -c(u) + ve(u) = -(c(u) - ve(u)),$$

dobijemo opet istu plohu, samo centralnosimetričnu s obzirom na ishodište. Dakle, treba nam drugačiji pristup.

Kako god definirali adjungiranu plohu, njena parametrizacija svakako mora biti oblika

$$\tilde{\mathbf{x}}(u,v) = \tilde{c}(u) + v\tilde{e}(u),$$

pa je ideja da odaberemo krivulju $\tilde{c}$ i polje $\tilde{e}$ tako da ploha $\tilde{S}$, parametrizirana preslikavanjem $\tilde{\mathbf{x}}$, ima što više svojstava koje ima adjungirana ploha u prostornom i vremenskom slučaju.

Ako je $\tilde{S}$ adjungirana ploha plohe S, mora postojati netrivijalna G-transformacija (tj. lokalna izometrija koja čuva paralelnost tangencijalnih ravnina) $S \to \tilde{S}$. Već smo prilikom konstrukcije asocirane familije pokazali da to vrijedi ako i samo ako je parametrizacija $\tilde{\mathbf{x}}$ oblika

$$\tilde{\mathbf{x}}(u,v) = c(u) + \int B(u)e(u)\,du + ve(u).$$

Najvažnije svojstvo adjungirane plohe je da je $\tilde{\tilde{S}} = S$, tj. plohe S i $\tilde{S}$ čine par adjungiranih ploha. Međutim, kako je

$$\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}(u,v) = c(u) + 2\int B(u)e(u)\,du + ve(u),$$

ako želimo da bude $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{x}$, mora biti $B = 0$. No, tada dobijemo $\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$, tj. dobijemo istu plohu. Dakle, moramo uzeti $\tilde{c} = c$, a za polje $\tilde{e}$ moramo onda odabrati neko svjetlosno polje različito od e. Drugim riječima, paralelnost tangencijalnih ravnina u točkama p i $\tilde{p}$ se ne može postići. To je jasno i geometrijski jer nikoje dvije izvodnice svjetlosnog stošca nisu paralelne (jer se sve sijeku u ishodištu). Jedno svjetlosno polje različito od e je N, tj. ideja je da uzmemo

$$\tilde{\mathbf{x}}(u,v) = c(u) + vN(u). \tag{2.24}$$

Polje N ovisi o izabranom svežnju $S(TS)$ plohe S. Polje N mora ovisiti samo o u te parametrizacija $\tilde{\mathbf{x}}$ mora biti konformna. To se sve postiže ako odaberemo $S(TS) = [c']$, što možemo jer je c prostorna krivulja i $c'(u) \in T_{\mathbf{x}(u,v)}S$ jer je

$$c' \cdot \mathbf{x}_v = c' \cdot e = F = 0,$$

a polje $\mathbf{x}_v = e$ razapinje svežanj $TS^{\perp}$. Tada iz formule (1.15) dobivamo da je

$$N = \frac{1}{e \cdot c''}\left(c'' - \frac{c'' \cdot c''}{2(e \cdot c'')}e\right)$$

jer je $\xi = e$, a možemo uzeti $V = c''$ jer polje N ne ovisi o izboru polja V, a uvjet za polje V je da je potprostor $F_p = [V_p]$ direktan komplement potprostora $T_pS^{\perp}$ u prostoru $S(T_pS)^{\perp}$, što vrijedi ako krivulju c reparametriziramo duljinom luka te ako i samo ako polje $c'' \neq 0$ nije kolinearno s poljem e, što vrijedi ako i samo ako ploha S nije potpuno geodetska, tj. ravnina. Za sada ćemo isključiti ravnine iz razmatranja. Sada vidimo iz formule da polje N ovisi samo o u.

Nadalje, iz teorema 1.4.4 imamo da je $N \cdot N = 0$, $N \cdot e = 1$ i $N \cdot X = 0$ za svaki prerez X svežnja $S(TS)$ (posebno, za $X = c'$), odakle slijedi da je parametrizacija $\tilde{\mathbf{x}}$ konformna.

Pokažimo sada da će biti $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{x}$. Ako za polje $\xi = N$ idemo konstruirati pripadno transverzalno polje (nazovimo ga $\tilde{N}$), možemo u formuli (1.15) odabrati $V = e$ (to polje zadovoljava sve uvjete za polje V). No, tada zbog $N \cdot e = 1$ i $e \cdot e = 0$ slijedi da je

$$\tilde{N} = \frac{1}{N \cdot e}\left(e - \frac{e \cdot e}{2(N \cdot e)}N\right) = e.$$

Dakle, $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}(u,v) = c(u) + v\tilde{N}(u) = c(u) + ve(u) = \mathbf{x}(u,v)$. Provjerimo sada je li preslikavanje $p = \mathbf{x}(u,v) \mapsto \tilde{p} = \tilde{\mathbf{x}}(u,v)$ lokalna izometrija. Budući da su obje parametrizacije konformne, odmah imamo $F = \tilde{F} = G = \tilde{G} = 0$. Računamo

$$\begin{aligned}
\tilde{E} &= \tilde{\mathbf{x}}_u \cdot \tilde{\mathbf{x}}_u = c' \cdot c' + 2v(c' \cdot N') + v^2(N' \cdot N') \\
E &= \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u = c' \cdot c' + 2v(c' \cdot e') + v^2(e' \cdot e') \\
\tilde{E} - E &= 2v(c' \cdot N' - c' \cdot e') + v^2(N' \cdot N' - e' \cdot e').
\end{aligned}$$

Budući da mora biti $\tilde{E} - E = 0$ za svaki v, mora biti

$$c' \cdot (N' - e') = N' \cdot N' - e' \cdot e' = 0. \tag{2.25}$$

To ne mora vrijediti. Zato ćemo u formuli (2.24) zamijeniti polje N kolinearnim poljem αN za neku glatku funkciju $\alpha \neq 0$, tj.

$$\tilde{\mathbf{x}}(u,v) = c(u) + v\alpha(u)N(u).$$

To možemo jer je uvjet $\tilde{\tilde{S}} = S$ zapravo slabiji od uvjeta $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}} = \mathbf{x}$. Dovoljno je da preslikavanja $\tilde{\tilde{\mathbf{x}}}$ i $\mathbf{x}$ parametriziraju istu plohu, a ako polje N zamijenimo poljem αN, dobili smo samo reparametrizaciju. Računamo

$$\begin{aligned}(\alpha N)' \cdot (\alpha N') &= (\alpha' N + \alpha N') \cdot (\alpha' N + \alpha N') \\ &= (\alpha')^2 \underbrace{(N \cdot N)}_{=0} + 2\alpha'\alpha \underbrace{(N \cdot N')}_{=0} + \alpha^2 (N' \cdot N') = \alpha^2 (N' \cdot N')\end{aligned}$$

Sada drugi uvjet iz jednakosti (2.25) postaje

$$\alpha^2 (N' \cdot N') - e' \cdot e' = 0 \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{\frac{e' \cdot e'}{N' \cdot N'}}.$$

Provjeri se da je $e' \cdot e' \neq 0$ i $N' \cdot N' \neq 0$. Nadalje, polja e' i N' su oba okomita na neko svjetlosno polje ($e' \perp e$ i $N' \perp N$), odakle slijedi da su oba polja prostorna (iz propozicije 1.2.3 slijedi da ne mogu biti vremenska, a svjetlosna ne mogu biti jer plohe S i $\tilde{S}$ nisu ravnine). Dakle, izraz pod korijenom je pozitivan. Želimo pokazati da je tada zadovoljen i prvi uvjet u (2.25), tj.

$$0 = c' \cdot ((\alpha N)' - e') = c' \cdot (\alpha' N + \alpha N' - e') = c' \cdot (\alpha N' - e').$$

Za sada uzmimo da funkcija α ima pozitivan predznak. Svežanj $S(TS)$ je razapet poljem c', pa je $S(TS)^\perp$ vremenski svežanj razapet poljima N i e. Dakle, gornji uvjet okomitosti je ekvivalentan

$$\alpha' N - e' = \beta N + \gamma e$$

za neke skalarne funkcije β i γ. Ako obje strane te jednakosti pomnožimo skalarno poljem e, dobivamo $\beta = \alpha(N' \cdot e)$, a ako pomnožimo poljem N, dobivamo $\gamma = -e' \cdot N$. Dakle, moramo dokazati da je

$$\alpha N' - e' = \alpha (N' \cdot e) N - (e' \cdot N) e \Leftrightarrow \alpha \underbrace{(N' - (N' \cdot e) N)}_{=X} = \underbrace{e' - (e' \cdot N) e}_{=Y}.$$

Pokazat ćemo da su polja αX i Y jednaka geometrijski. Pokažimo prvo da imaju istu normu.

$$\begin{aligned}X \cdot X &= N' \cdot N' - 2(N' \cdot e) \underbrace{(N' \cdot N)}_{=0} + (N' \cdot e)^2 \underbrace{(N \cdot N)}_{=0} = N' \cdot N' \\ Y \cdot Y &= e' \cdot e' - 2(e' \cdot N) \underbrace{(e' \cdot e)}_{=0} + (e' \cdot N)^2 \underbrace{(e \cdot e)}_{=0} = e' \cdot e' \\ (\alpha X) \cdot (\alpha X) &= \alpha^2 (X \cdot X) = \frac{e' \cdot e'}{N' \cdot N'} \cdot (N' \cdot N') = e' \cdot e' = Y \cdot Y.\end{aligned}$$

Pokažimo sada da su polja X i Y kolinearna. Uočimo da je

$$\begin{aligned}
X \cdot N &= N' \cdot N - (N' \cdot e)(N \cdot N) = 0 - (N' \cdot e) \cdot 0 = 0 \\
X \cdot e &= N' \cdot e - (N' \cdot e)(N \cdot e) = N' \cdot e - (N' \cdot e) \cdot 1 = 0 \\
Y \cdot N &= e' \cdot N - (e' \cdot N)(e \cdot N) = e' \cdot N - (e' \cdot N) \cdot 1 = 0 \\
Y \cdot e &= e' \cdot e - (e' \cdot N)(e \cdot e) = 0 - (e' \cdot N) \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Dakle, polja X i Y oba leže u svežnju $[N,e]^{\perp} = S(TS) = [c']$, tj. oba polja su kolinearna s poljem c'. Ako polja αX i Y imaju suprotne orijentacije, odaberemo negativan predznak funkcije α.
Ako je ploha S ravnina, može se parametrizirati konformnom parametrizacijom $\mathbf{x}(u,v) = c(u) + ve$, gdje je $e \in \mathbb{M}^3$ konstantan svjetlosni vektor. Tada je pripadno polje N također konstantno i onda možemo uzeti

$$\tilde{\mathbf{x}}(u,v) = c(u) + vN.$$

Naime, tada će biti $E = c' \cdot c' = \tilde{E}$, tj. preslikavanje $p \mapsto \tilde{p}$ će opet biti izometrija. Adjungirana ploha ravnine je ponovo ravnina, kao u prostornom i vremenskom slučaju.
Za prostorne plohe, preslikavanje $p \mapsto \tilde{p}$ je G-transformacija. Štoviše, ploha $\tilde{S}$ pripada asociranoj familiji plohe S, tj. $\tilde{S} = S_{\pi/2}$. Za vremenske plohe, preslikavanje $p \mapsto \tilde{p}$ čuva paralelnost tangencijalnih ravnina, ali nije lokalna izometrija. Ploha $\tilde{S}$ ne pripada asociranoj familiji plohe S. Za svjetlosne plohe, preslikavanje $p \mapsto \tilde{p}$ je lokalna izometrija, ali ne čuva paralelnost tangencijalnih ravnina. Ploha $\tilde{S}$ također ne pripada asociranoj familiji.
Za kraj ćemo pronaći svjetlosni analogon katenoida i helikoida. Katenoid je ploha nastala rotacijom lančanice oko njene osi. Lančanica je krivulja u gornjoj poluravnini koja ima svojstvo da za svaki segment na x-osi, omjer površine ispod krivulje na tom segmentu i duljine segmenta je konstanta $a > 0$.
U [25] je dokazano da je, do na tip osi i tip ravnine u kojoj leži generatrisa, katenoid jedina rotacijska maksimalna, odnosno minimalna ploha. Ako tu karakterizaciju koristimo kao definiciju, iz teorema 1.5.18 slijedi da je jedini svjetlosni katenoid svjetlosni stožac. S druge strane, lančanica je po definiciji ravninska krivulja, a jedina ravninska svjetlosna krivulja je pravac. No, pravac zadovoljava geometrijsku definiciju lančanice samo za $a = 0$, pa svjetlosni analogon lančanice zapravo ne postoji.
Helikoid je pravčasta ploha čija je generatrisa zavojnica. U prostornom slučaju, helikoid pripada asociranoj familiji katenoida za $t = \pi/2$. Možemo helikoid definirati kao plohu S_t iz asocirane familije svjetlosnog stošca za neki određeni t. U radu [17] su proučavane tzv. A-namotajne

plohe. Ako je c svjetlosna krivulja i (A,B,C) Frenetov trobrid krivulje c, onda plohu

$$\mathbf{x}(u,v) = c(u) + vA(u)$$

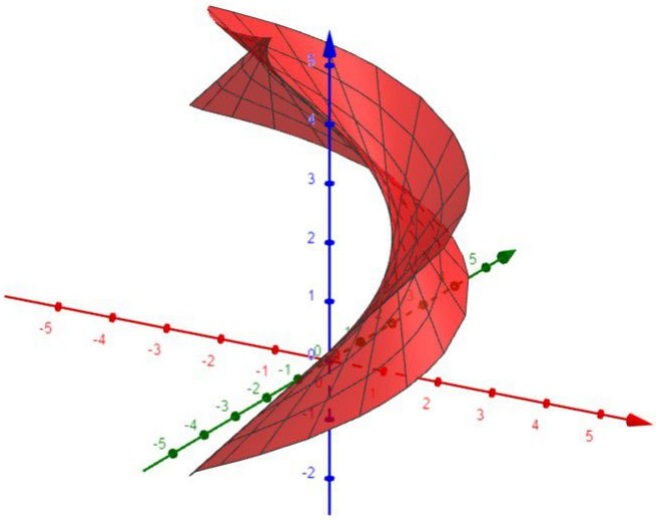
zovemo A-namotajna ploha. Za razliku od lančanice, zavojnica nije ravninska krivulja, pa imamo tri tipa svjetlosnih zavojnica (do na predznak njene zakrivljenosti). Zavojnice imaju konstantnu svjetlosnu zakrivljenost. Zavojnica zakrivljenosti $k = 1$ je dana parametrizacijom

$$\gamma(s) = \left(-\frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\sin(\sqrt{2}s), \frac{1}{2}\cos(\sqrt{2}s)\right).$$

Uočimo da ako uvrstimo $t = 1$ u formulu (2.23), dobijemo upravo A-namotajnu plohu zavojnice

$$\mathbf{x}(u,v) = (u, \sin u, -\cos u) + v(1, \cos u, \sin u). \tag{2.26}$$

Naime, samo za $t = 1$ je $e(u) = c'(u) = A(u)$. Krivulju $c(u) = (u, \sin u, -\cos u)$ dobivamo tako da krivulju γ reparametriziramo $u = \sqrt{2}s$, zrcalimo s obzirom na xz-ravninu i skaliramo. Dakle, krivulja c je zavojnica, pa zaključujemo da je ploha (2.26) svjetlosni analogon helikoida.



Slika 2.2: Svjetlosni helikoid $x = y^2 + z^2 - 1 + 2\operatorname{arctg}\dfrac{y \pm \sqrt{y^2+z^2-1}}{z+1}$

2.4. WEIERSTRASSOVE PARAMETRIZACIJE POZNATIH PLOHA

Kroz primjere ćemo odrediti Weierstrassove podatke najvažnijih maksimalnih i minimalnih ($H = 0$) te pravih cmc-ploha ($H = const. \neq 0$). Za te plohe su u [10] dokazani odgovarajući rezultati da se radi o jedinim takvim plohama iz odgovarajuće klase ploha. Nadalje, dat ćemo rezultat o broju različitih Weierstrassovih parametrizacija plohe S, ali samo za maksimalne i minimalne plohe. Klasične minimalne plohe su ravnina, helikoid i katenoid. Ako u Weierstrassovu formulu uvrstimo konstante, dobivamo afinu konformnu parametrizaciju ravnine.

Primjer. (svjetlosna ravnina) Ako uvrstimo konstante $f = a + b\varepsilon$ i $g = c + d\varepsilon$, gdje su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ i $ad \neq 0$, u formulu (2.18) te integriramo po putu $t \mapsto (1-t)z_0 + tz$, dobivamo konformnu parametrizaciju svjetlosne ravnine

$$\begin{aligned}
x_1(u,v) &= \frac{1}{2}[(2acd + b(1+c^2))u + a(1+c^2)v] + C_1 \\
x_2(u,v) &= -\frac{1}{2}[(-2acd + b(1-c^2))u + a(1-c^2)v] + C_2 \\
x_3(u,v) &= (ad+bc)u + acv + C_3,
\end{aligned}$$

gdje su $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$. Konformni faktor ove parametrizacije je $\lambda = a^2d^2 > 0$.

Prostorni (vremenski) katenoidi su jedine maksimalne (minimalne) rotacijske plohe. Os katenoida može biti prostorni, vremenski ili svjetlosni pravac. Budući da u slučaju vremenskog katenoida s prostornom osi imamo dvije različite plohe, ukupno je 7 katenoida. Za katenoide sa svjetlosnom osi nemamo jednostavnu konformnu parametrizaciju.

Primjer. (prostorni katenoidi)

a) Ako u formulu (2.1) uvrstimo funkcije $f = \cos u \operatorname{sh} v - i(\sin u \operatorname{ch} v + 1)$ i $g = \dfrac{\operatorname{sh} v + i \cos u}{\sin u + \operatorname{ch} v}$, dobivamo parametrizaciju

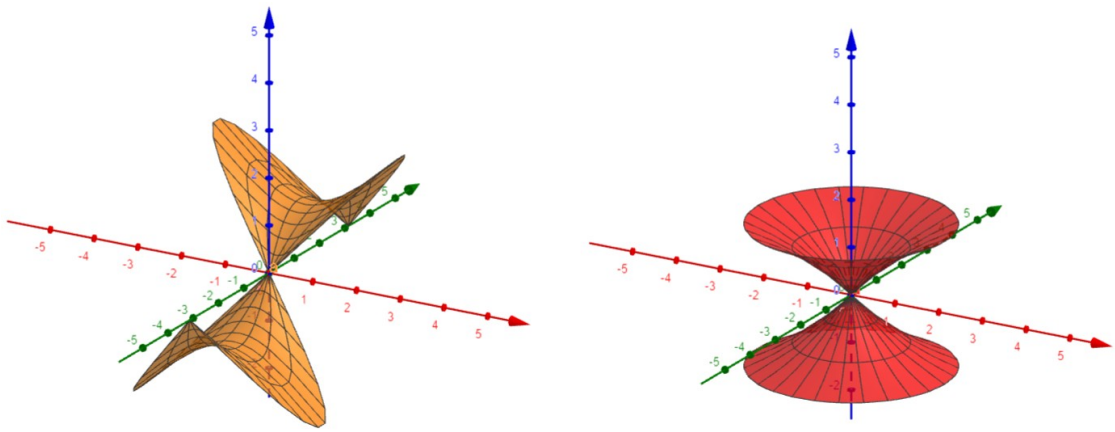
$$\mathbf{x}(u,v) = (\sin u \operatorname{ch} v, \sin u \operatorname{sh} v, u)$$

prostornog katenoida oko z-osi.

b) Ako u formulu (2.1) uvrstimo funkcije $f = e^{-z}$ i $g = e^z$, dobivamo parametrizaciju

$$\mathbf{x}(u,v) = (u, \operatorname{sh} u \cos v, \operatorname{sh} u \sin v)$$

prostornog katenoida oko x-osi.



Slika 2.3: Prostorni katenoidi $x^2 - y^2 = \sin^2 z$ i $y^2 + z^2 = \mathrm{sh}^2 x$

Primjer. (vremenski katenoidi)

a) Ako u formulu (2.11) uvrstimo funkcije $q = -e^{-2u}$, $f = e^{2u}$, $r = e^{-2v}$, $g = -e^{2v}$ i reparametriziramo (da bude $F = 0$), dobivamo parametrizaciju

$$\mathbf{x}(u,v) = (\mathrm{sh}\, u\, \mathrm{ch}\, v, \mathrm{sh}\, u\, \mathrm{sh}\, v, u)$$

vremenskog katenoida oko z-osi (I).

b) Ako u formulu (2.11) uvrstimo funkcije $q = e^{-2u}$, $f = -e^{2u}$, $r = e^{-2v}$, $g = -e^{2v}$ i reparametriziramo, dobivamo parametrizaciju

$$\mathbf{x}(u,v) = (\mathrm{ch}\, u\, \mathrm{sh}\, v, \mathrm{ch}\, u\, \mathrm{ch}\, v, u)$$

vremenskog katenoida oko z-osi (II).

c) Ako u formulu (2.11) uvrstimo funkcije $q = \mathrm{ctg}\, u$, $f = 2\sin^2 u$, $r = \mathrm{tg}\, v$, $g = -2\cos^2 v$ i reparametriziramo, dobivamo parametrizaciju

$$\mathbf{x}(u,v) = (u, \sin u \cos v, \sin u \sin v)$$

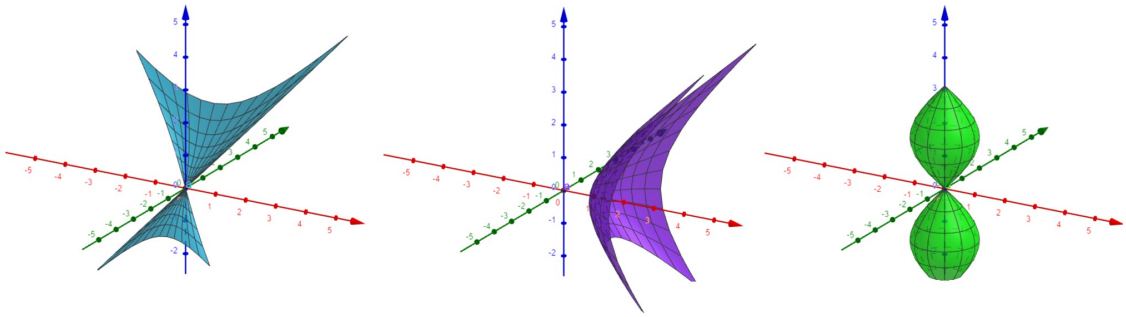
vremenskog katenoida oko x-osi.

Primjer. (svjetlosni stožac/katenoid/sfera) Ako u formulu (2.18) uvrstimo funkcije

$$f = 1 - \cos u + \varepsilon v \sin u, \quad g = \frac{\sin u}{1 - \cos u} + \varepsilon \frac{v}{1 - \cos u},$$

dobivamo parametrizaciju svjetlosnog stošca

$$\mathbf{x}(u,v) = v(1, \cos u, \sin u).$$



Slika 2.4: Vremenski katenoidi $x^2 - y^2 = \operatorname{sh}^2 z$, $-x^2 + y^2 = \operatorname{ch}^2 z$ i $y^2 + z^2 = \sin^2 x$

Standardne pravčaste parametrizacije helikoida nisu konformne. Kako bismo dobili konformnu parametrizaciju, iskoristit ćemo činjenicu da je helikoid adjungirana ploha katenoida. Dakle, trebamo samo konstruirati adjungiranu plohu za katenoide iz prethodnih primjera.

Primjer. (prostorni helikoidi)

a) Ako u formulu (2.1) uvrstimo funkcije $f = -\sin u \operatorname{ch} v - 1 - i \cos u \operatorname{sh} v$ i $g = \dfrac{\operatorname{sh} v + i \cos u}{\sin u + \operatorname{ch} v}$, dobivamo parametrizaciju

$$\mathbf{x}(u,v) = (\cos u \operatorname{sh} v, \cos u \operatorname{ch} v, v)$$

prostornog helikoida oko z-osi.

b) Ako u formulu (2.1) uvrstimo funkcije $f = -e^{-\bar{z}}$ i $g = e^z$, dobivamo parametrizaciju

$$\mathbf{x}(u,v) = (v, \operatorname{ch} u \sin v, -\operatorname{ch} u \cos v)$$

prostornog helikoida oko x-osi.

Primjer. (vremenski helikoidi)

a) Ako u formulu (2.11) uvrstimo funkcije $q = -e^u$, $f = e^{-u}/2$, $r = e^{-v}$, $g = -e^v/2$, dobivamo parametrizaciju

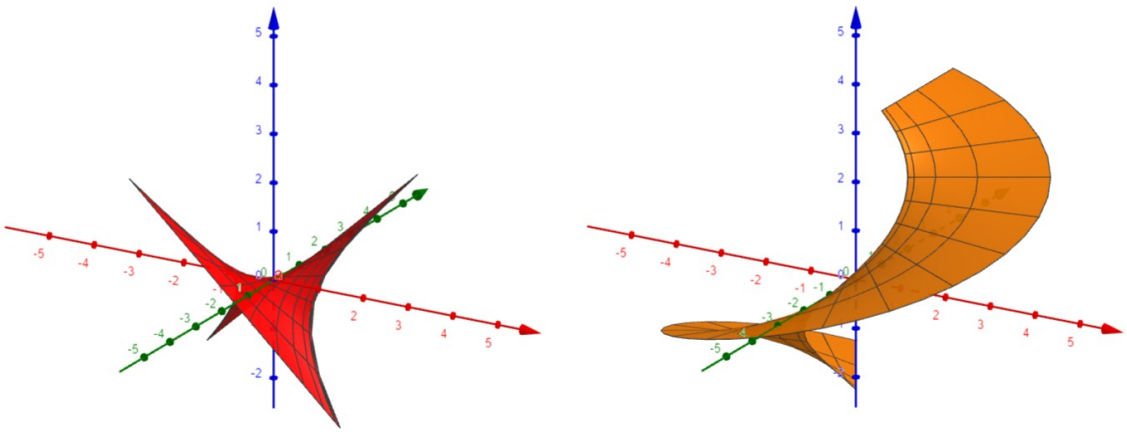
$$\mathbf{x}(u,v) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} u + \operatorname{sh} v, \operatorname{ch} u + \operatorname{ch} v, u + v)$$

vremenskog helikoida oko z-osi (I).

b) Ako u formulu (2.11) uvrstimo funkcije $q = -e^u$, $f = e^{-u}/2$, $r = -e^{-v}$, $g = e^v/2$, dobivamo parametrizaciju

$$\mathbf{x}(u,v) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} u - \operatorname{sh} v, \operatorname{ch} u - \operatorname{ch} v, u + v)$$

vremenskog helikoida oko z-osi (II).

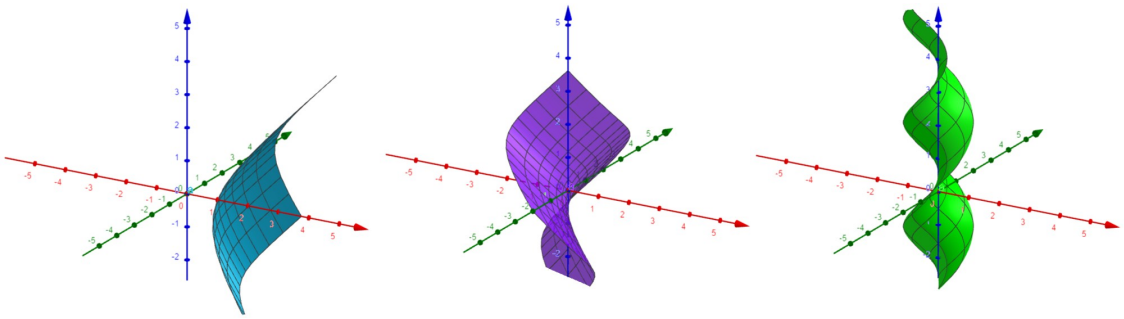


Slika 2.5: Prostorni helikoidi $x = y\,\mathrm{th}\,z$ i $y = -z\,\mathrm{tg}\,x$

c) Ako u formulu (2.11) uvrstimo funkcije $q = \dfrac{\sin u}{\cos u - 1}$, $f = \dfrac{1-\cos u}{2}$, $r = \dfrac{\sin v}{\cos v + 1}$, $q = -\dfrac{1+\cos v}{2}$, dobivamo parametrizaciju

$$\mathbf{x}(u,v) = \frac{1}{2}\left(u+v, \sin u + \sin v, -\cos u - \cos v\right)$$

vremenskog helikoida oko x-osi.



Slika 2.6: Vremenski helikoidi $x = \sqrt{y^2 - x^2}\,\mathrm{sh}\,z$, $x^2 = (y^2 - x^2)\,\mathrm{ch}^2\,z$ i $z^2 = (y^2 + z^2)\cos^2 x$

Primjer. (svjetlosni helikoid) Ako u formulu (2.18) uvrstimo funkcije

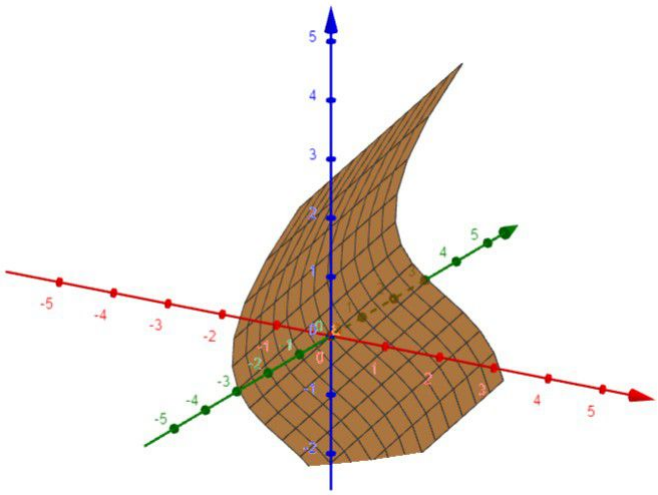
$$f = 1 - \cos u + \varepsilon(1 - \cos u + v \sin u), \quad g = \frac{\sin u}{1 - \cos u} + \varepsilon \frac{v(\cos u - \cos(2u)) - \sin(2u)}{(1 - \cos u)^2},$$

dobivamo parametrizaciju (2.26) svjetlosnog helikoida.

Primjer. (parabolički nul-cilindar) Ako u formulu (2.11) uvrstimo funkcije $q = -u$, $f = 2$, $r = 0$ i $g = -2$, dobivamo parametrizaciju paraboličkog nul-cilindra

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(\frac{u^3}{3} + u, \frac{u^3}{3} - u, u^2\right) + v(1,1,0).$$

Parabolički nul-cilindar je minimalna ploha. Štoviše, $H = K = 0$, pa je parabolički nul-cilindar tzv. B-namotajna ploha. To su vremenske plohe za koje je $H^2 = K$ i sve su pravčaste oblika $\mathbf{x}(u,v) = c(u) + vB(u)$, gdje je c svjetlosna ploha i (A,B,C) njen Frenetov trobrid.



Slika 2.7: Parabolički nul-cilindar $(x-y)^2 = 4z$

Primjer. (Enneperova ploha)

a) Ako u formulu (2.1) uvrstimo funkcije $f = 2$ i $g = z$, dobivamo Enneperovu maksimalnu plohu

$$\mathbf{x}(u,v) = \left(u^2 - v^2, \frac{u^3}{3} - uv^2 + u, \frac{v^3}{3} - u^2 v - v\right).$$

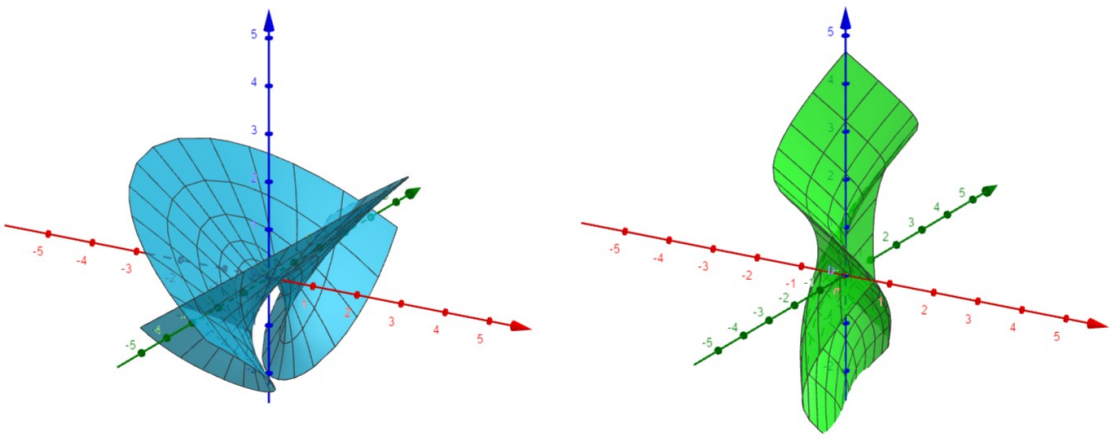
b) Ako u formulu (2.11) uvrstimo funkcije $q = -u$, $r = v$ i $f = g = 1$, dobivamo Enneperovu minimalnu plohu

$$\mathbf{x}(u,v) = \frac{1}{2}\left(u + \frac{u^3}{3} - v - \frac{v^3}{3}, -u + \frac{u^3}{3} - v + \frac{v^3}{3}, u^2 - v^2\right).$$

Enneperova ploha je samopresjecajuća.

Iz teorema 1.3.23 slijedi da se maksimalne i minimalne plohe mogu rekonstruirati iz normalnog polja plohe. Zanimljivo je da vrijedi i obrat tog teorema, koji ćemo sada pokazati (za euklidske plohe je naveden bez dokaza u [8]).

Teorem 2.4.1. *Neka je (S,n) prostorna (vremenska) ploha u $\mathbb{M}^3$ bez umbiličkih točaka. Tada je ploha S maksimalna (minimalna) ako i samo ako za svaku konformnu parametrizaciju $\mathbf{x} : U \to S$, parametrizacija $n \circ \mathbf{x}$ jedinične sfere je također konformna.*



Slika 2.8: Enneperova maksimalna i minimalna ploha

Dokaz. Pretpostavimo da je ploha S maksimalna ili minimalna. Neka je $\mathbf{x} : U \to S$ konformna parametrizacija. Tada zbog $E = \pm G$ i $F = 0$ imamo da je

$$H = \frac{EN - 2FM + GL}{2(EG - F^2)} = \frac{N \pm L}{\pm 2E}.$$

Sada iz $H = 0$ slijedi $N = \mp L$. Ako to uvrstimo u Weingartenove formule, dobivamo

$$\begin{aligned}(n \circ \mathbf{x})_u &= -\frac{L}{E}\mathbf{x}_u \mp \frac{M}{E}\mathbf{x}_v \\ (n \circ \mathbf{x})_v &= -\frac{M}{E}\mathbf{x}_u + \frac{L}{E}\mathbf{x}_v.\end{aligned}$$

Iz toga slijedi da je

$$\begin{aligned}(n \circ \mathbf{x})_u \cdot (n \circ \mathbf{x})_u &= \frac{L^2}{E^2}\underbrace{(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)}_{=E} \pm \frac{2LM}{E^2}\underbrace{(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)}_{=F=0} + \frac{M^2}{E^2}\underbrace{(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v)}_{=G=\pm E} = \frac{L^2 \pm M^2}{E} \\ (n \circ \mathbf{x})_u \cdot (n \circ \mathbf{x})_v &= \frac{LM}{E^2}\underbrace{(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)}_{=E} + \frac{-L^2 \pm M^2}{E^2}\underbrace{(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v)}_{=F=0} \mp \frac{ML}{E^2}\underbrace{(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v)}_{=G=\pm E} = 0 \\ (n \circ \mathbf{x})_u \cdot (n \circ \mathbf{x})_v &= \frac{M^2}{E^2}\underbrace{(\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u)}_{=E} - \frac{2ML}{E^2}\underbrace{(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v)}_{=F=0} + \frac{L^2}{E^2}\underbrace{(\mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v)}_{=G=\pm E} = \frac{M^2 \pm L^2}{E} = \pm\frac{L^2 \pm M^2}{E}.\end{aligned}$$

Neka je $p \in \mathbf{x}(U)$ bilo koja točka. Budući da točka p nije umbilička, iz teorema o inverznom preslikavanju slijedi da se skup U može smanjiti tako da preslikavanje $n \circ \mathbf{x}$ bude difeomorfizam, tj. lokalna parametrizacija jedinične sfere. Ako je ploha S maksimalna (minimalna), onda je vektor $n(\mathbf{x}(u,v))$ vremenski (prostorni), dakle pripada prostornoj (vremenskoj) jediničnoj sferi. Dakle, preslikavanje $n \circ \mathbf{x}$ zadovoljava uvjete konformnosti za prostorne (vremenske) plohe.

Obratno, pretpostavimo sada da je parametrizacija $n \circ \mathbf{x}$ konformna za svaku konformnu para-

metrizaciju $\mathbf{x} : U \to S$. Kao i gore, iz Weingartenovih formula imamo da je

$$(n \circ \mathbf{x})_u \cdot (n \circ \mathbf{x})_u = \frac{L^2 \pm M^2}{E}, \quad (n \circ \mathbf{x}_v) \cdot (n \circ \mathbf{x})_v = \frac{M^2 \pm N^2}{E}$$

Budući da je parametrizacija $n \circ \mathbf{x}$ konformna, iz Weingartenovih formula slijedi

$$(n \circ \mathbf{x})_u \cdot (n \circ \mathbf{x})_u = \pm (n \circ \mathbf{x})_v \cdot (n \circ \mathbf{x})_v \Rightarrow \frac{L^2 \pm M^2}{E} = \pm \frac{M^2 \pm N^2}{E} \Rightarrow L^2 = N^2.$$

Sada treba pokazati da iz toga u prostornom slučaju slijedi $L = -N$, a u vremenskom $L = N$. Pretpostavimo suprotno, da je $L = \pm N$ (u nekoj točki $p \in \mathbf{x}(U)$). Budući da je parametrizacija $n \circ \mathbf{x}$ konformna, mora biti

$$(n \circ \mathbf{x})_u \cdot (n \circ \mathbf{x})_v = \frac{LM}{E} \pm \frac{MN}{E} = \frac{(L \pm N)M}{E} = 0.$$

No, kako je $L \mp N = 0$, mora biti $L \pm N \neq 0$. U suprotnom bi bilo $L = N = 0$, što ne može biti jer tada u prostornom slučaju slijedi $(n \circ \mathbf{x})_u = (n \circ \mathbf{x})_v = 0$, što je kontradikcija s regularnošću sfere, a u vremenskom slučaju slijedi da su polja $(n \circ \mathbf{x})_u$ i $(n \circ \mathbf{x})_v$ svjetlosna, a kako su zbog regularnosti linearno nezavisna, ne mogu biti okomita (propozicija 1.2.5), dakle opet dobivamo kontradikciju. Sada iz $L \pm N \neq 0$ slijedi da mora biti $M = 0$. No, tada je

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{\pm L^2}{\pm E^2} = \frac{L^2}{E^2}, \quad H = \frac{N \pm L}{\pm 2E} = \frac{\pm L \pm L}{\pm 2E} = \frac{L}{E}.$$

No, tada je $H^2 - K = 0 \Rightarrow k_1(p) = k_2(p)$ (gdje su k_1 i k_2 tzv. normalne zakrivljenosti plohe S, tj. svojstvene vrijednosti operatora $S_p = -dn_p$), što povlači da je točka p umbilička.
Dakle, mora biti $L = \mp N$, pa je $H = \dfrac{L \pm N}{2E} = 0$, tj. ploha S je maksimalna (minimalna). ■

Iz teorema 1.3.23 i jednog smjera teorema 2.4.1 slijedi da ako je (S, n) maksimalna (minimalna) ploha bez umbiličkih točaka i $p \in S$ točka, onda postoji 1-1 korespondencija između konformnih parametrizacija $\mathbf{x} : U \to S$ takvih da je $p \in \mathbf{x}(U)$ i konformnih parametrizacija jedinične prostorne (vremenske) sfere. Iz toga zaključujemo da ploha S ima onoliko Weierstrassovih podataka koliko ima konformnih parametrizacija jedinične sfere.

Za svjetlosne plohe rezultat ne vrijedi jer je problem što transverzalno polje N nije jedinstveno (tj. ovisi o izboru mreže plohe S), pa iz njega ne možemo jednoznačno rekonstruirati plohu. Iz istog razloga se rezultat ne može poopćiti na plohe u $\mathbb{M}^n$, $n \geq 4$ (tada je $\dim N_p S = n - 2 > 1$, pa ploha nema jedinstveno normalno polje). Obrat u teoremu 2.4.1 nam govori da se rezultat ne može poopćiti na plohe za koje je $H \neq 0$.

Sada ćemo kroz primjere navesti Weierstrassove podatke najvažnijih cmc-ploha.

Jedine rotacijske cmc-plohe su sfera, cilindar, unduloid i nodoid, koje zovemo Delaunayeve

plohe. Za unduloid i nodoid nemamo eksplicitnu konformnu parametrizaciju.

Primjer. (jedinična prostorna i vremenska sfera)

a) Ako u formulu (2.1) uvrstimo funkcije

$$f = \frac{4(u^2 - v^2) - 8iuv}{(1 - u^2 - v^2)^2}, \quad g = \frac{u^3 + 3uv^2 + i(v^3 + u^2 v)}{(u^2 + v^2)^2},$$

dobivamo parametrizaciju (1.10) prostorne sfere $-x^2 + y^2 + z^2 = -1$.

b) Ako u formulu (2.11) uvrstimo funkcije

$$q = \frac{-2}{(u-v)^2 + 1}, \quad f = \frac{2(u-v)^2 + 2}{(1 - u^2 + v^2)^2}, \quad r = \frac{2}{(u-v)^2 - 1}, \quad g = \frac{2(u-v)^2 - 2}{(1 - u^2 + v^2)^2},$$

dobivamo parametrizaciju (1.11) vremenske sfere $-x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Imamo prostorni i vremenski cilindar s prostornom osi te vremenski cilindar s vremenskom osi. Prostorni cilindar s vremenskom osi ne postoji, a cilindri sa svjetlosnom osi nisu cmc-plohe.

Primjer. (kružni cilindar)

a) Ako u formulu (2.1) uvrstimo funkcije $f = -i(\operatorname{ch} v + 1)$ i $g = \dfrac{\operatorname{sh} v}{\operatorname{ch} v + 1}$, dobivamo parametrizaciju

$$\mathbf{x}(u, v) = (\operatorname{ch} v, \operatorname{sh} v, u)$$

prostornog cilindra oko z-osi.

b) Ako u formulu (2.11) uvrstimo funkcije $f = -\operatorname{ch} v$, $q = \operatorname{ch}^{-1} v$, $r = 0$, $g = -\operatorname{ch} v - \operatorname{sh} v$, dobivamo parametrizaciju

$$\mathbf{x}(u, v) = (\operatorname{sh} v, \operatorname{ch} v, u)$$

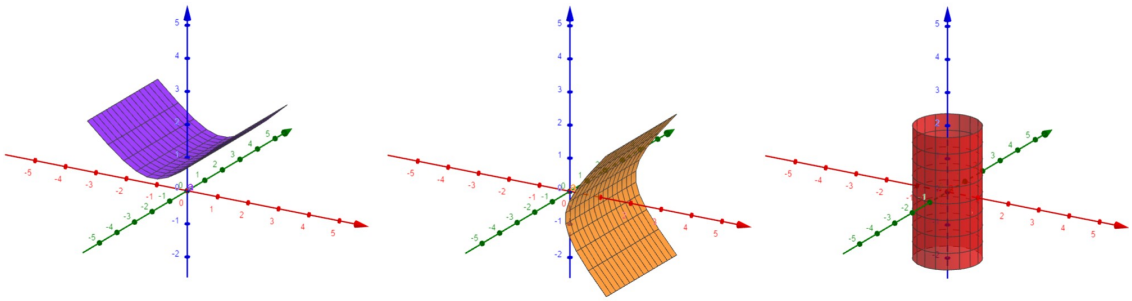
vremenskog cilindra oko z-osi.

c) Ako u formulu (2.11) uvrstimo funkcije $q = 0$, $f = 1$, $r = -\operatorname{ctg} v$, $g = \sin v$, dobivamo parametrizaciju

$$\mathbf{x}(u, v) = (u, \cos v, \sin v)$$

vremenskog cilindra oko x-osi.

Helikoidalna ploha je ploha koja je invarijantna na grupe preslikavanja prostora $\mathbb{M}^3$ koje zovemo helikoidalna gibanja. Helikoid je helikoidalna pravčasta ploha.



Slika 2.9: Cilindri $-x^2+y^2=-1$, $-x^2+y^2=1$ i $y^2+z^2=1$

Jedine helikoidalne (ne nužno pravčaste) cmc-plohe kojima su izvodnice grafovi polinoma su helikoid, kružni cilindar, parabolički nul-cilindar i plohe

$$\left(x-\operatorname{arctg}\frac{z}{y}\right)^2=y^2+z^2,\quad \frac{z^2-x^2}{2}=1-\left(\frac{x-\operatorname{ch}y}{\operatorname{sh}y\pm\operatorname{ch}y}\right)^2\mp\frac{x-\operatorname{ch}y}{\operatorname{sh}y\pm\operatorname{ch}y},$$

koje nemaju jednostavnu konformnu parametrizaciju (vidi [10]). Prva ploha je prava cmc-ploha, a druga je minimalna.

Jedina helikoidalna ploha kojoj su izvodnice kružnice je cilindar s prostornom osi.

Jedine helikoidalne B-namotajne plohe (ne nužno cmc-plohe) čija je generatrisa graf polinoma su gornje dvije implicitno zadane plohe i parabolički nul-cilindar.

3. Weierstrassova parametrizacija za plohe u $\mathbb{M}^4$

3.1. Weierstrassova parametrizacija za prostorne plohe u $\mathbb{M}^4$

Sljedeća reprezentacijska formula je pronađena u radu [23] i parametrizira prostorne 2-plohe u $\mathbb{M}^4$. Radi se o parametrizaciji koja je sličnog oblika kao formula McNertney. Prostornu plohu u $\mathbb{M}^4$ reprezentiraju tri kompleksne (odnosno šest realnih) funkcija kompleksne varijable.

Teorem 3.1.1. **(Liu)** *Neka je S regularna prostorna ploha u $\mathbb{M}^4$ i $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{M}^4$ konformna parametrizacija. Tada je*

$$\begin{aligned} x_1(u,v) &= \mathrm{Re} \int \rho(1+fg)\,dz \\ x_2(u,v) &= \mathrm{Re} \int \rho(f+g)\,dz \\ x_3(u,v) &= \mathrm{Re} \int -i\rho(f-g)\,dz \\ x_4(u,v) &= \mathrm{Re} \int \rho(1-fg)\,dz, \end{aligned} \tag{3.1}$$

gdje su $\rho, f, g : U \to \mathbb{C}$ funkcije kojima su realni i imaginarni dio klase C^∞, $\rho \neq 0$, $f \neq \overline{g}$ te zadovoljavaju jednakosti

$$\begin{aligned} \partial_{\bar{z}}\rho &= \partial_z\overline{\rho} \\ \partial_{\bar{z}}(\rho f) &= \partial_z(\overline{\rho g}) \\ \partial_{\bar{z}}(\rho f g) &= \partial_z(\overline{\rho f g}). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Konformni faktor parametrizacije $\mathbf{x}$ *i srednja zakrivljenost plohe S dani su formulama*

$$\lambda = 4|\rho|^2|f-\overline{g}|^2$$
$$H = \frac{4|\rho|}{\lambda}\sqrt{|(\partial_{\overline{z}}f)(\partial_{\overline{z}}g)|}.$$

Dokaz. Ako reparametriziramo pomoću kompleksne varijable $z = u+vi$, onda je $E = G = 0$ i $F = \lambda/2$. Iz $E = -(\partial_z x_1)^2 + (\partial_z x_2)^2 + (\partial_z x_3)^2 + (\partial_z x_4)^2 = 0$ imamo

$$(\partial_z x_2 - i\partial_z x_3)(\partial_z x_2 + i\partial_z x_3) = (\partial_z x_1 - \partial_z x_4)(\partial_z x_1 + \partial_z x_4).$$

Definirajmo funkcije

$$\begin{aligned} f &= \frac{\partial_z x_2 + i\partial_z x_3}{\partial_z x_1 + \partial_z x_4} = \frac{\partial_z x_1 - \partial_z x_4}{\partial_z x_2 - i\partial_z x_3} \\ g &= \frac{\partial_z x_2 - i\partial_z x_3}{\partial_z x_1 + \partial_z x_4} = \frac{\partial_z x_1 - \partial_z x_4}{\partial_z x_2 + i\partial_z x_3} \\ \rho &= \frac{\partial_z x_1 + \partial_z x_4}{2}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Iz toga slijedi da je

$$\begin{aligned} \partial_z x_2 + i\partial_z x_3 &= 2\rho f \\ \partial_z x_2 - i\partial_z x_3 &= 2\rho g \\ \partial_z x_1 + \partial_z x_4 &= 2\rho \\ \partial_z x_1 - \partial_z x_4 &= 2\rho f g, \end{aligned}$$

Sada iz teorema 1.1.10 slijede formule (3.1) (realni dio zbog linearnosti integrala komutira s integralom). Uvjeti (3.2) slijede iz Schwarzovog pravila za operatore ∂_z i $\partial_{\overline{z}}$.

Obratno, neka su $f, g, \rho : U \to \mathbb{C}$ funkcije koje zadovoljavaju uvjete (3.2). Tada je

$$\begin{aligned} E = \mathbf{x}_z \cdot \mathbf{x}_z &= -(\partial_z x_1)^2 + (\partial_z x_2)^2 + (\partial_z x_3)^2 + (\partial_z x_4)^2 \\ &= -\rho^2(1+fg)^2 + \rho^2(f+g)^2 - \rho^2(f-g)^2 + \rho^2(1-fg)^2 \\ &= \rho^2(1-fg-1-fg)(1-fg+1+fg) + \rho^2(f+g-f+g)(f+g+f-g) \\ &= -4\rho^2 fg + 4\rho^2 fg = 0 \end{aligned}$$

Nadalje, $G = \mathbf{x}_{\overline{z}} \cdot \mathbf{x}_{\overline{z}} = \overline{\mathbf{x}_z \cdot \mathbf{x}_z} = 0$. Dakle, parametrizacija $\mathbf{x}$ je konformna s konformnim faktorom

$$\begin{aligned} \lambda = 2F &= 2[-(\partial_z x_1)(\partial_{\overline{z}} x_1) + (\partial_z x_2)(\partial_{\overline{z}} x_2) + (\partial_z x_3)(\partial_{\overline{z}} x_3) + (\partial_z x_4)(\partial_{\overline{z}} x_4)] \\ &= 2\rho\overline{\rho}[-(1+fg)(1+\overline{fg}) + (f+g)(\overline{f}+\overline{g}) + (f-g)(\overline{f}-\overline{g}) + (1-fg)(1-\overline{fg})] \\ &= 4\rho\overline{\rho}[-\overline{fg} - fg + f\overline{f} + g\overline{g}] = 4\rho\overline{\rho}(f-\overline{g})(\overline{f}-g) = 4|\rho|^2|f-\overline{g}|^2 \end{aligned}$$

Zbog regularnosti mora biti $\lambda > 0$, što je ekvivalentno $\rho \neq 0$ i $f \neq \overline{g}$. Nadalje,

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{z}}\partial_z x_{1,4} &= (\partial_{\bar{z}}\rho)(1 \pm fg) \pm \rho\partial_{\bar{z}}(fg) \\
\partial_{\bar{z}}\partial_z x_2 &= (\partial_{\bar{z}}\rho)(f+g) + \rho(\partial_{\bar{z}}f + \partial_{\bar{z}}g) \\
\partial_{\bar{z}}\partial_z x_3 &= -i(\partial_{\bar{z}})(f-g) - i\rho(\partial_{\bar{z}}f - \partial_{\bar{z}}g),
\end{aligned}$$

odakle slijedi da je

$$\begin{aligned}
H &= \frac{2}{\lambda}\|\mathbf{x}_{z\bar{z}}\| = \frac{2}{\lambda}\sqrt{|-(\partial_{\bar{z}}\partial_z x_1)^2 + (\partial_{\bar{z}}\partial_z x_4)^2 + (\partial_{\bar{z}}\partial_z x_2)^2 + (\partial_{\bar{z}}\partial_z x_3)^2|} \\
&= \frac{2}{\lambda}\sqrt{|-4(\partial_{\bar{z}}\rho)^2 fg - 4(\rho\partial_{\bar{z}}\rho)\partial_{\bar{z}}(fg) + 4(\partial_{\bar{z}}\rho)^2 fg + 4(\rho\partial_{\bar{z}}\rho)\partial_{\bar{z}}(fg) + 4\rho^2(\partial_{\bar{z}}f)(\partial_{\bar{z}}g)|} \\
&= \frac{4|\rho|}{\lambda}\sqrt{|(\partial_{\bar{z}}f)(\partial_{\bar{z}}g)|}
\end{aligned}$$

■

Formula (3.1) je poopćenje formule McNertney za prostorne plohe u $\mathbb{M}^3$. Naime, ako zamijenimo funkcije f i g te zatim uvrstimo $\rho = \frac{\tilde{f}\tilde{g}}{2}$, $f = \frac{1}{\tilde{g}}$, $g = \tilde{g}$, dobivamo formulu (2.1) s Weierstrassovim podacima $(\tilde{f}, \tilde{g})$ te $x_4 = const$. S druge strane, 3-ravnina $x_4 = const.$ u $\mathbb{M}^4$ je kongruentna prostoru $\mathbb{M}^3$. Budući da je $\rho \neq 0$, vidimo da je $H = 0$ ekvivalentno $\partial_{\bar{z}}f = 0$ ili $\partial_{\bar{z}}g = 0$, što nam daje sljedeći rezultat.

Korolar 3.1.2. *Prostorna ploha S, dana Weierstrassom parametrizacijom s podacima (ρ, f, g), je maksimalna ako i samo ako je barem jedna od funkcija f i g holomorfna.*

Vidimo da je rezultat sličan kao u $\mathbb{M}^3$, tj. holomorfne funkcije reprezentiraju maksimalne plohe. Uočimo da je formula (3.1) algebarski više slična formuli (2.11) za vremenske plohe (dok parametrizacija prostorne i svjetlosne plohe u $\mathbb{M}^3$ izgleda drukčije).

Nadalje, upravo formule (3.3), kojima su u radu [23] eksplicitno dani Weierstrassovi podaci, dale su nam ideju za izvod Weierstrassove parametrizacije u vremenskom slučaju te za geometrijsku interpretaciju.

Kao što smo naveli ranije, Konopelchenko je dao još jednu Weierstrassovu parametrizaciju za prostorne plohe u $\mathbb{M}^4$ ([20]), koju smo specijalizirali za $\mathbb{M}^3$ (formule (2.8)) jer formula u trodimenzionalnom slučaju je navedena samo za euklidski prostor u [21].

Teorem 3.1.3. **(Konopelchenko)** *Neka je $U \subseteq \mathbb{C}$ otvoren jednostavno povezan skup i $s_1, t_1, s_2, t_2 : U \to \mathbb{C}$ funkcije kojima su realni i imaginarni dio klase C^∞ te su parovi (s_1, t_1) i (s_2, t_2) linearno nezavisna rješenja sustava*

$$\begin{aligned}
\partial_z t_k &= p s_k \\
\partial_{\bar{z}} s_k &= q t_k
\end{aligned} \tag{3.4}$$

za neke realne funkcije $p,q \in C^\infty(U)$. Tada je formulama

$$\begin{aligned}
x_1(u,v) &= \frac{1}{2}\int (s_1\overline{t_1}+s_2\overline{t_2})\,dz + (\overline{s_1}t_1+\overline{s_2}t_2)\,d\overline{z}\\
x_2(u,v) &= \frac{1}{2}\int (s_1\overline{t_2}+s_2\overline{t_1})\,dz + (\overline{s_2}t_1+\overline{s_1}t_2)\,d\overline{z}\\
x_3(u,v) &= \frac{1}{2i}\int (s_1\overline{t_2}-s_2\overline{t_1})\,dz + (\overline{s_2}t_1-\overline{s_1}t_2)\,d\overline{z}\\
x_4(u,v) &= \frac{1}{2}\int (s_1\overline{t_1}-s_2\overline{t_2})\,dz + (\overline{s_1}t_1-\overline{s_2}t_2)\,d\overline{z}.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

dana konformna parametrizacija $\mathbf{x} = (x_1,x_2,x_3,x_4) : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{M}^4$. Metrički tenzor parametrizacije $\mathbf{x}$ i srednja zakrivljenost plohe $S = \mathbf{x}(U)$ su dani formulama

$$\begin{aligned}
ds^2 &= |s_1t_2 - s_2t_1|^2\,dzd\overline{z}\\
H &= \frac{2\sqrt{|pq|}}{\sqrt{\lambda}}.
\end{aligned}$$

Dokaz. Neka su $s_1,t_1,s_2,t_2 : U \to \mathbb{C}$ funkcije koje zadovoljavaju sustav (3.4). Tada za diferencijalne 1-forme

$$\begin{aligned}
\omega_{1,4} &= (s_1\overline{t_1} \pm s_2\overline{t_2})\,dz + (\overline{s_1}t_1 \pm \overline{s_2}t_2)\,d\overline{z}\\
\omega_{2,3} &= (s_1\overline{t_2} \pm s_2\overline{t_1})\,dz + (\overline{s_2}t_1 \pm \overline{s_1}t_2)\,d\overline{z}
\end{aligned}$$

vrijedi

$$\begin{aligned}
d\omega_{1,4} &= (\partial_z(\overline{s_1}t_1 \pm \overline{s_2}t_2) - \partial_{\overline{z}}(s_1\overline{t_1} \pm s_2\overline{t_2}))\,dzd\overline{z}\\
&= ((\partial_z\overline{s_1})t_1 + \overline{s_1}\partial_z t_1 \pm (\partial_z\overline{s_2})t_2 \pm \overline{s_2}\partial_z t_2 - (\partial_{\overline{z}}s_1)\overline{t_1} - s_1\partial_{\overline{z}}\overline{t_1} \mp (\partial_{\overline{z}}s_2)\overline{t_2} \mp s_2\partial_{\overline{z}}\overline{t_2})\,dzd\overline{z}\\
&= (q\overline{t_1}t_1 + \overline{s_1}ps_1 \pm q\overline{t_2}t_2 \pm \overline{s_2}ps_2 - qt_1\overline{t_1} - s_1p\overline{s_1} \mp qt_2\overline{t_2} \mp s_2p\overline{s_2})\,dzd\overline{z} = 0\\
d\omega_{2,3} &= (\partial_z(\overline{s_1}t_2 \pm \overline{s_2}t_1) - \partial_{\overline{z}}(s_2\overline{t_1} \pm s_1\overline{t_2}))\,dzd\overline{z}\\
&= ((\partial_z\overline{s_1})t_2 + \overline{s_1}\partial_z t_2 \pm (\partial_z\overline{s_2})t_1 \pm \overline{s_2}\partial_z t_1 - (\partial_{\overline{z}}s_2)\overline{t_1} - s_2\partial_{\overline{z}}\overline{t_1} \mp (\partial_{\overline{z}}s_1)\overline{t_2} \mp s_1\partial_{\overline{z}}\overline{t_2})\,dzd\overline{z}\\
&= (q\overline{t_1}t_2 + \overline{s_1}ps_2 \pm q\overline{t_2}t_1 \pm \overline{s_2}ps_1 - qt_2\overline{t_1} - s_2p\overline{s_1} \mp qt_1\overline{t_2} \mp s_1p\overline{s_2})\,dzd\overline{z} = 0
\end{aligned}$$

Dakle, forme ω_k su zatvorene, pa iz Poincaréove leme slijedi da su egzaktne, tj. postoje funkcije $x_k : U \to \mathbb{C}$ takve da vrijede formule (3.5). Za parametrizaciju $\mathbf{x}$ je

$$\begin{aligned}
E = \mathbf{x}_z \cdot \mathbf{x}_z &= -\frac{1}{4}(s_1\overline{t}_1 + s_2\overline{t_2})^2 + \frac{1}{4}(s_1\overline{t}_1 - s_2\overline{t_2})^2 - \frac{1}{4}(s_1\overline{t_2} - s_2\overline{t_1})^2 + \frac{1}{4}(s_1\overline{t_2} + s_2\overline{t_1})^2\\
&= \frac{1}{4}(-s_1\overline{t_1} - s_2\overline{t_2} + s_1\overline{t_1} - s_2\overline{t_2})(s_1\overline{t_1} + s_2\overline{t_2} + s_1\overline{t_1} - s_2\overline{t_2})\\
&+ \frac{1}{4}(-s_1\overline{t_2} + s_2\overline{t_1} + s_1\overline{t_2} + s_2\overline{t_1})(s_1\overline{t_2} - s_2\overline{t_1} + s_1\overline{t_2} + s_2\overline{t_1}) = -s_2\overline{t_2}s_1\overline{t_1} + s_2\overline{t_1}s_1\overline{t_2} = 0
\end{aligned}$$

Još imamo da je $G = \mathbf{x}_{\bar{z}} \cdot \mathbf{x}_{\bar{z}} = \overline{\mathbf{x}_z \cdot \mathbf{x}_z} = 0$ te

$$\begin{aligned}
F = \mathbf{x}_z \cdot \mathbf{x}_{\bar{z}} &= -\frac{1}{4}(s_1\bar{t}_1 + s_2\overline{t_2})(\overline{s_1}t_1 + \overline{s_2}t_2) + \frac{1}{4}(s_1\bar{t}_1 - s_2\overline{t_2})(\overline{s_1}t_1 - \overline{s_2}t_2) \\
&- \frac{1}{4}(s_1\overline{t_2} - s_2\overline{t_1})(\overline{s_2}t_1 - \overline{s_1}t_2) + \frac{1}{4}(s_1\overline{t_2} + s_2\overline{t_1})(\overline{s_2}t_1 + \overline{s_1}t_2) \\
&= \frac{1}{4}(-|s_1\overline{t_1}|^2 - s_1\overline{t_1 s_2}t_2 - s_2\overline{t_2 s_1}t_1 - |s_2\overline{t_2}|^2 + |s_1\overline{t_1}|^2 - s_1\overline{t_1 s_2}t_2 - s_2\overline{t_2 s_1}t_1 + |s_2\overline{t_2}|^2) \\
&+ \frac{1}{4}(-s_1\overline{t_2 s_2}s_1 + |s_1\overline{t_2}|^2 + |s_2\overline{t_1}|^2 - s_2\overline{t_1 s_1}t_2 + s_1\overline{t_2 s_2}s_1 + |s_1\overline{t_2}|^2 + |s_2\overline{t_1}|^2 + s_2\overline{t_1 s_1}t_2) \\
&= \frac{1}{2}(-s_1\overline{t_1 s_1}t_2 - s_2\overline{t_2 s_1}t_1 + s_1\overline{t_2 s_1}t_2 + s_2\overline{t_1 s_2}t_1) = \frac{1}{2}(s_1t_2(-\overline{t_1 s_2} + \overline{t_2 s_1}) + s_2t_1(-\overline{t_2 s_1} + \overline{t_1 s_2})) \\
&= \frac{1}{2}(s_1t_2 - s_2t_1)(\overline{t_2 s_1} - \overline{t_1 s_2}) = \frac{1}{2}|s_1t_2 - s_2t_1|^2
\end{aligned}$$

Dakle, parametrizacija $\mathbf{x}$ je konformna s konformnim faktorom $\lambda = 2F = |s_1t_2 - s_2t_1|^2$. Nadalje,

$$s_1t_2 - s_2t_1 = \begin{vmatrix} s_1 & t_1 \\ s_2 & t_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

jer su parovi (s_1, t_1) i (s_2, t_2) linearno nezavisni, odakle slijedi da je $\lambda > 0$, tj. ploha S je regularna. U koordinatama (u, v) imamo da je $E = G = \lambda$ i $F = 0$, pa je $F^2 - EG < 0$, odakle slijedi da je ploha S prostorna. Još trebamo izračunati srednju zakrivljenost. Imamo

$$\begin{aligned}
\partial_{\bar{z}}\partial_z x_{1,4} &= \frac{1}{2}\partial_{\bar{z}}\partial_z(s_1\overline{t_1} \pm s_2\overline{t_2}) = \frac{1}{2}((\partial_{\bar{z}}s_1)\overline{t_1} + s_1\partial_{\bar{z}}\overline{t_1} \pm (\partial_{\bar{z}}s_2)\overline{t_2} \pm s_2\partial_{\bar{z}}\overline{t_2}) \\
&= \frac{1}{2}(qt_1\overline{t_1} + s_1p\overline{s_1} \pm qt_2\overline{t_2} \pm s_2p\overline{s_2}) \\
\partial_{\bar{z}}\partial_z x_2 &= \frac{1}{2}\partial_{\bar{z}}(s_1\overline{t_2} + s_2\overline{t_1}) = \frac{1}{2}(qt_1\overline{t_2} + s_1p\overline{s_2} + qt_2\overline{t_1} + s_2p\overline{s_1}) \\
\partial_{\bar{z}}\partial_z x_3 &= \frac{1}{2i}\partial_{\bar{z}}(s_1\overline{t_2} - s_2\overline{t_1}) = \frac{1}{2i}((\partial_{\bar{z}}s_1)\overline{t_2} + s_1\partial_{\bar{z}}\overline{t_2} - (\partial_{\bar{z}}s_2)\overline{t_1} - s_2\partial_{\bar{z}}\overline{t_1}) \\
&= \frac{1}{2i}(qt_1\overline{t_2} + s_1p\overline{s_2} - qt_2\overline{t_1} - s_2p\overline{s_1})
\end{aligned}$$

Ako to uvrstimo u formulu za srednju zakrivljenost, dobivamo

$$\begin{aligned}
H &= \frac{2}{\lambda}\sqrt{|(-\partial_{\bar{z}}\partial_z x_1 + \partial_{\bar{z}}\partial_z x_2)(\partial_{\bar{z}}\partial_z x_1 + \partial_{\bar{z}}\partial_z x_2) + (-i\partial_{\bar{z}}\partial_z x_3 + \partial_{\bar{z}}\partial_z x_4)(i\partial_{\bar{z}}\partial_z x_3 + \partial_{\bar{z}}\partial_z x_4)|} \\
&= \frac{2}{\lambda}\sqrt{|(-qt_2\overline{t_2} - s_2p\overline{s_2})(qt_1\overline{t_1} + s_1p\overline{s_1}) + (qt_2\overline{t_1} + s_2p\overline{s_1})(qt_1\overline{t_2} + s_1p\overline{s_2})|} \\
&= \frac{2}{\lambda}\sqrt{|-pqt_2\overline{t_2}s_1\overline{s_1} - pqs_2\overline{s_2}t_1\overline{t_1} + pqt_2\overline{t_1}s_1\overline{s_2} + pqs_2\overline{s_1}t_1\overline{t_2}|} \\
&= \frac{2\sqrt{|pq|}}{\lambda}\sqrt{(t_2s_1 - s_2t_1)(\overline{t_2 s_1} - \overline{t_1 s_2})} = \frac{2\sqrt{|pq|}}{\lambda}|s_1t_2 - s_2t_1| = \frac{2\sqrt{|pq|}}{\lambda}\sqrt{\lambda} = \frac{2\sqrt{|pq|}}{\sqrt{\lambda}}
\end{aligned}$$

■

Prema [20], za svaku regularnu prostornu plohu S u $\mathbb{M}^4$ postoji lokalna parametrizacija oblika (3.5). Mi ćemo dati jedan dokaz za maksimalne plohe.

Teorem 3.1.4. *Neka je S maksimalna ploha u $\mathbb{M}^4$ takva da njeno vektorsko polje srednje zakrivljenosti nije svjetlosno i $p \in S$ točka. Tada postoji parametrizacija oblika (3.5) plohe S takva da je $p \in \mathbf{x}(U)$.*

Dokaz. Prema teoremu 1.3.19, postoji konformna parametrizacija $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ takva da je $p \in \mathbf{x}(U)$. Bez smanjenja općenitosti (zbog regularnosti) pretpostavimo da je $\partial_z(x_1 + x_4) \neq 0$. Formule (3.5) su ekvivalentne jednadžbama

$$\begin{aligned} s_1\overline{t_1} &= \partial_z(x_1 + x_4) \\ s_2\overline{t_2} &= \partial_z(x_1 - x_4) \\ s_1\overline{t_2} &= \partial_z(x_2 + ix_3) \\ s_2\overline{t_1} &= \partial_z(x_2 - ix_3). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Budući da je $E = 0$, tj. $(\partial_z x_2 - i\partial_z x_3)(\partial_z x_2 + i\partial_z x_3) = (\partial_z x_1 - \partial_z x_4)(\partial_z x_1 + \partial_z x_4)$, ovaj sustav ima rješenje. Jednu funkciju, recimo $s_1 \neq 0$, možemo birati po volji i onda je

$$t_1 = \frac{\partial_{\bar z}(x_1 + x_4)}{\overline{s_1}}, \quad t_2 = \frac{\partial_{\bar z}(x_2 - ix_3)}{\overline{s_1}}, \quad s_2 = \frac{\partial_z(x_2 - ix_3)}{\partial_z(x_1 + x_4)} s_1.$$

Trebamo pokazati da je moguće izabrati funkciju s_1 tako da budu zadovoljene jednadžbe (3.4). Jednadžbe $\partial_z t_1 = p s_1$ i $\partial_z t_2 = p t_2$ se mogu zapisati kao

$$\begin{aligned} \frac{\partial_z t_1}{s_1} &= \frac{\partial_z t_2}{s_2} \\ \frac{(\partial_z\partial_{\bar z}(x_1 + x_4))\overline{s_1} - (\partial_{\bar z}(x_1 + x_4))\partial_z\overline{s_1}}{s_1\overline{s_1}^2} &= \frac{\partial_z(x_1 + x_4)}{\partial_z(x_2 - ix_3)} \cdot \frac{(\partial_z\partial_{\bar z}(x_2 - ix_3))\overline{s_1} - (\partial_{\bar z}(x_2 - ix_3))\partial_z\overline{s_1}}{s_1\overline{s_1}^2} \\ \left(\partial_z\partial_{\bar z}(x_1 + x_4) - \frac{\partial_z(x_1 + x_4)}{\partial_z(x_2 - ix_3)}\partial_z\partial_{\bar z}(x_2 - ix_3)\right)\overline{s_1} &= \left(\partial_{\bar z}(x_1 + x_4) - \frac{\partial_z(x_1 + x_4)}{\partial_z(x_2 - ix_3)}\partial_{\bar z}(x_2 - ix_3)\right)\partial_z\overline{s_1} \end{aligned}$$

Dakle, jednadžba je separabilna, tj. oblika $\alpha\overline{s_1} = \beta\,\partial_z\overline{s_1}$ i ima rješenje

$$\overline{s_1} = \exp\left(C(z)\int \frac{\beta(z)}{\alpha(z)}\,dz\right),$$

gdje je C funkcija takva da je $\partial_z C = 0$. Iz jednadžbe $\partial_{\bar z} s_1 = q t_1$ slijedi da je

$$q = \frac{\partial_{\bar z} s_1}{t_1} = \frac{\overline{s_1}\partial_{\bar z} s_1}{\partial_{\bar z}(x_1 + x_4)}.$$

Želimo pokazati da će biti zadovoljena i jednadžba $\partial_{\bar z} s_2 = q t_2$. Imamo da je

$$q t_2 = \frac{\overline{s_1}\partial_{\bar z} s_1}{\partial_{\bar z}(x_1 + x_4)} \cdot \frac{\partial_{\bar z}(x_2 - ix_3)}{\overline{s_1}} = \frac{\partial_{\bar z}(x_2 - ix_3)}{\partial_{\bar z}(x_1 + x_4)}\partial_{\bar z} s_1 = \frac{\partial_{\bar z}(x_1 - x_4)}{\partial_{\bar z}(x_2 + ix_3)}\partial_{\bar z} x_1.$$

U zadnjoj jednakosti smo koristili činjenicu da je $G = 0$, tj.

$$(\partial_{\bar z} x_2 - i\partial_{\bar z} x_3)(\partial_{\bar z} x_2 + i\partial_{\bar z} x_3) = (\partial_{\bar z} x_1 - \partial_{\bar z} x_4)(\partial_{\bar z} x_1 + \partial_{\bar z} x_4).$$

S druge strane, iz gornje formule za s_2 imamo

$$\partial_{\bar{z}} s_2 = \partial_{\bar{z}}\left(\frac{\partial_z(x_2 - ix_3)}{\partial_z(x_1 + x_4)}\right) s_1 + \frac{\partial_z(x_2 - ix_3)}{\partial_z(x_1 + x_4)} \partial_{\bar{z}} s_1.$$

Budući da je ploha S maksimalna, prema korolaru 3.1.2, funkcija

$$g(z) = \frac{\partial_z(x_2 - ix_3)}{\partial_z(x_1 + x_4)}$$

je holomorfna (ako nije, možemo zamijeniti funkcije f i g jer je formula (3.1) simetrična), odakle slijedi da je

$$\partial_{\bar{z}}\left(\frac{\partial_z(x_2 - ix_3)}{\partial_z(x_1 + x_4)}\right) = 0. \tag{3.7}$$

Primjenom pravila za derivaciju kvocijenta dobivamo

$$\frac{(\partial_{\bar{z}}\partial_z(x_2 - ix_3))\partial_z(x_1 + x_4) - (\partial_z(x_2 - ix_3))\partial_{\bar{z}}\partial_z(x_1 + x_4)}{(\partial_z(x_1 + x_4))^2} = 0$$

$$(\partial_{\bar{z}}\partial_z(x_2 - ix_3))\partial_z(x_1 + x_4) = (\partial_z(x_2 - ix_3))\partial_{\bar{z}}\partial_z(x_1 + x_4)$$

$$\frac{\partial_z(x_2 - ix_3)}{\partial_z(x_1 + x_4)} = \frac{\partial_{\bar{z}}\partial_z(x_2 - ix_3)}{\partial_{\bar{z}}\partial_z(x_1 + x_4)}$$

S druge strane, konjugiranjem lijeve i desne strane jednakosti (3.7) dobivamo

$$\partial_z\left(\frac{\partial_{\bar{z}}(x_2 + ix_3)}{\partial_{\bar{z}}(x_1 + x_4)}\right) = 0 \Rightarrow \partial_z\left(\frac{\partial_{\bar{z}}(x_1 - x_4)}{\partial_{\bar{z}}(x_2 - ix_3)}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial_{\bar{z}}(x_1 - x_4)}{\partial_{\bar{z}}(x_2 - ix_3)} = \frac{\partial_z\partial_{\bar{z}}(x_1 - x_4)}{\partial_z\partial_{\bar{z}}(x_2 - ix_3)}.$$

Naime, ako polje srednje zakrivljenosti h plohe S nije svjetlosno, zbog maksimalnosti mora biti $\mathbf{x}_{z\bar{z}} = 0$, odakle slijedi da je $\partial_z\partial_{\bar{z}}x_k = 0$. Dakle,

$$\frac{\partial_z(x_2 - ix_3)}{\partial_z(x_1 + x_4)} = \frac{\partial_{\bar{z}}(x_1 - x_4)}{\partial_{\bar{z}}(x_2 + ix_3)} = 0.$$

Dakle, $\partial_{\bar{z}} s_2 = q t_2 = 0$. ■

Iz formule za srednju zakrivljenost dobivamo sljedeću karakterizaciju maksimalnih ploha.

Korolar 3.1.5. *Neka je S regularna prostorna ploha u $\mathbb{M}^4$ dana Weierstrassovom parametrizacijom (3.5) s podacima (s_1, t_1, s_2, t_2). Tada je ploha S maksimalna ako i samo ako je $p = 0$ ili $q = 0$.*

Ako u formule (3.5) uvrstimo $s = s_1 = \overline{t_2}$, $t = t_1 = \overline{s_2}$ i $p = q$, dobivamo parametrizaciju (2.8) za prostorne plohe u $\mathbb{M}^3$ uz $x_4 = const$.

Propozicija 3.1.6. *Neka je S prostorna ploha u $\mathbb{M}^4$ dana Weierstrassovim podacima (ρ, f, g), odnosno (s_1, t_1, s_2, t_2). Tada je*

$$\rho = \frac{s_1\overline{t_1}}{2}, \quad f = \frac{\overline{t_2}}{\overline{t_1}}, \quad g = \frac{s_2}{s_1}.$$

Dokaz. Iz relacija (3.3) i (3.7) slijedi

$$s_1\overline{t_1} = \partial_z x_1 + \partial_z x_4 = 2\rho$$
$$s_1\overline{t_2} = \partial_z x_2 + i\partial_z x_3 = 2\rho f$$
$$s_2\overline{t_1} = \partial_z x_2 - i\partial_z x_3 = 2\rho g.$$

■

3.2. Weierstrassova parametrizacija za vremenske plohe u $\mathbb{M}^4$

Ako želimo poopćiti formule (2.11) i (2.15) na vremenske plohe u $\mathbb{M}^4$, moramo za regularnu vremensku plohu S u $\mathbb{M}^4$ i konformu parametrizaciju $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ nekako rastaviti jednakosti $E = G = 0$ na linearne faktore (vidi (2.12)). No, sada to više ne možemo napraviti nad poljem $\mathbb{R}$, nego nad poljem $\mathbb{C}$ na sljedeći način

$$\begin{aligned}(\partial_u x_1 - \partial_u x_2)(\partial_u x_1 + \partial_u x_2) &= (\partial_u x_3 + i\partial_u x_4)(\partial_u x_3 - i\partial_u x_4)\\ (\partial_v x_1 - \partial_v x_2)(\partial_v x_1 + \partial_v x_2) &= (\partial_v x_3 + i\partial_v x_4)(\partial_v x_3 - i\partial_v x_4).\end{aligned} \tag{3.8}$$

Taj rastav nam sugerira da za parametrizaciju trebamo koristiti kompleksne funkcije dviju realnih varijabli. Budući da se u vremenskom slučaju parametrizacija s veličinama $E = G = 0$ dobiva reparametrizacijom $u = -\tilde{u} + \tilde{v}$, $v = \tilde{u} + \tilde{v}$, ne možemo u domeni $\mathbb{R}^2$ poistovjetiti s poljem $\mathbb{C}$, barem ne ako želimo analogiju s prostornim slučajem. Parametrizacije koje ćemo ovdje pokazati su objavljene u radu [11].

Teorem 3.2.1. *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren jednostavno povezan skup, $f, g : U \to \mathbb{R}$ glatke funkcije te $q, r : U \to \mathbb{C}$ funkcije koje imaju realni i imaginarni dio klase C^∞ takve da je*

$$\begin{aligned}\partial_v f &= -\partial_u(|r|^2 g)\\ \partial_u g &= -\partial_v(|q|^2 f)\\ \partial_v(qf) &= \partial_u(rg)\end{aligned} \tag{3.9}$$

te $fg > 0$ i $q\overline{r} \neq -1$. Tada je parametrizacija $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) : U \to \mathbb{M}^4$, dana formulama

$$\begin{aligned}x_1(u,v) &= \frac{1}{2}\int (1 + q\overline{q}) f\, du - (1 + r\overline{r}) g\, dv\\ x_2(u,v) &= -\frac{1}{2}\int (1 - q\overline{q}) f\, du + (1 - r\overline{r}) g\, dv\\ x_3(u,v) &= -\frac{1}{2}\int (q + \overline{q}) f\, du + (r + \overline{r}) g\, dv\\ x_4(u,v) &= \frac{i}{2}\int (q - \overline{q}) f\, du + (r - \overline{r}) g\, dv,\end{aligned} \tag{3.10}$$

konformna. Ploha $S = \mathbf{x}(U)$ je regularna i vremenska. Metrički tenzor i srednja zakrivljenost plohe S dani su formulama

$$\begin{aligned}ds^2 &= |1 + q\overline{r}|^2 fg\, du dv\\ H &= \frac{2}{\lambda}\sqrt{|(\partial_v f)(\partial_u g) + (\partial_v(qf))(\partial_u(\overline{r}g))|}.\end{aligned}$$

Obratno, svaka regularna vremenska ploha u $\mathbb{M}^4$ može se lokalno parametrizirati takvom parametrizacijom.

Dokaz. Neka su $f,g : U \to \mathbb{R}$ i $q,r : U \to \mathbb{C}$ funkcije koje zadovoljavaju jednadžbe (3.9). Tada za diferencijalne 1-forme

$$\omega_{1,2} = (\pm 1 + q\overline{q})f\,du - (1 \pm r\overline{r})g\,dv$$
$$\omega_{3,4} = (q \pm \overline{q})f\,du + (r \pm \overline{r})g\,dv$$

vrijedi

$$\begin{aligned}
d\omega_{1,2} &= (-\partial_u((1 \pm r\overline{r})g) - \partial_v((\pm 1 + q\overline{q})f))\,dudv \\
&= (-\partial_u g \mp \partial_u(|r|^2 g) \mp \partial_v f - \partial_v(|q|^2 f))\,dudv = 0 \\
d\omega_{3,4} &= (\partial_u((r \pm \overline{r})g) - \partial_v((q \pm \overline{q})f))\,dudv \\
&= (\partial_u(rg) \pm \partial_u(\overline{r}g) - \partial_v(qf) \mp \partial_v(\overline{q}f))\,dudv = 0
\end{aligned}$$

Ovdje smo iskoristili činjenicu da su funkcije f i g realne, pa je $f = \overline{f}$ i $g = \overline{g}$. Dakle, forme ω_k su zatvorene, pa iz Poincaréove leme slijedi da su egzaktne, tj. postoje glatke funkcije $x_k : U \to \mathbb{R}$ takve da vrijede formule (3.10). Nadalje,

$$\begin{aligned}
E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u &= -\frac{1}{4}(1+q\overline{q})^2 f^2 + \frac{1}{4}(1-q\overline{q})^2 f^2 + \frac{1}{4}(q+\overline{q})^2 f^2 - \frac{1}{4}(q-\overline{q})^2 f^2 \\
&= -\frac{1}{4}(1+2q\overline{q}+q^2\overline{q}^2)f^2 + \frac{1}{4}(1-2q\overline{q}+q^2\overline{q}^2)f^2 + \frac{1}{4}(q^2+2q\overline{q}+\overline{q}^2)f^2 \\
&- \frac{1}{4}(q^2-2q\overline{q}+\overline{q}^2)f^2 = -q\overline{q}f^2 + q\overline{q}f^2 = 0 \\
F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v &= \frac{1}{4}(1+q\overline{q})(1+r\overline{r})fg + \frac{1}{4}(1-q\overline{q})(1-r\overline{r})fg + \frac{1}{4}(q+\overline{q})(r+\overline{r})fg \\
&- \frac{1}{4}(q-\overline{q})(r-\overline{r})fg = \frac{1}{4}(1+r\overline{r}+q\overline{q}+|qr|^2)fg + \frac{1}{4}(1-r\overline{r}-q\overline{q}+|qr|^2)fg \\
&+ \frac{1}{4}(qr+q\overline{r}+\overline{q}r+\overline{q}\overline{r})fg - \frac{1}{4}(qr-q\overline{r}-\overline{q}r+\overline{q}\overline{r})fg = \frac{1}{2}(1+qr\overline{q}\overline{r}+q\overline{r}+\overline{q}r)fg \\
&= \frac{1}{2}(1+\overline{q}r+q\overline{r}(\overline{q}r+1))fg = \frac{1}{2}(1+\overline{q}r)(1+q\overline{r})fg = \frac{1}{2}|1+q\overline{r}|^2 fg \\
G = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_v &= -\frac{1}{4}(1+r\overline{r})^2 g^2 + \frac{1}{4}(1-r\overline{r})^2 g^2 + \frac{1}{4}(r+\overline{r})^2 g^2 - \frac{1}{4}(r-\overline{r})^2 g^2 \\
&= -r\overline{r}g^2 + r\overline{r}g^2 = 0
\end{aligned}$$

Dakle, parametrizacija $\mathbf{x}$ je konformna s konformnim faktorom $\lambda = 2F = |1+q\overline{r}|^2 fg$. Zbog $fg > 0$ i $q\overline{r} \neq -1$ je $\lambda > 0$. Iz $E = G = 0$ slijedi da su vektorska polja $\mathbf{x}_u$ i $\mathbf{x}_v$ svjetlosna. Kad bi još bila kolinearna, slijedilo bi da su okomita, tj. da je $F = 0$. Dakle, za svaku točku $p \in \mathbf{x}(U)$ prostor T_pS sadrži dva linearno nezavisna svjetlosna vektora, odakle slijedi da je ploha

S regularna i vremenska.

Trebamo još izračunati srednju zakrivljenost. Iz jednakosti (3.9) imamo da je

$$\begin{aligned}
\partial_v\partial_u x_{1,2} &= \frac{1}{2}\partial_v((\pm 1+q\overline{q})f) = \frac{1}{2}(\pm\partial_v f+\partial_v(|q|^2 f)) = \frac{1}{2}(\pm\partial_v f-\partial_u g)\\
\partial_v\partial_u x_3 &= -\frac{1}{2}\partial_v((q+\overline{q})f) = -\frac{1}{2}(\partial_v(qf)+\partial_v(\overline{q}f)) = -\frac{1}{2}(\partial_v(qf)+\partial_u(\overline{r}g))\\
\partial_v\partial_u x_4 &= \frac{i}{2}\partial_v((q-\overline{q})f) = \frac{i}{2}(\partial_v(qf)-\partial_v(\overline{q}f)) = \frac{i}{2}(\partial_v(qf)-\partial_u(\overline{r}g)).
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem toga u formulu (2.9) dobivamo

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{\lambda}\sqrt{|-(-\partial_v f+\partial_u g)^2+(-\partial_v f-\partial_u g)^2+(\partial_v(qf)+\partial_u(\overline{r}g))^2-(\partial_v(qf)-\partial_u(\overline{r}g))^2|}\\
&= \frac{1}{\lambda}\sqrt{|4(\partial_v f)(\partial_u g)+4(\partial_v(qf))(\partial_u(\overline{r}g))|} = \frac{2}{\lambda}\sqrt{|(\partial_v f)(\partial_u g)+(\partial_v(qf))(\partial_u(\overline{r}g))|}
\end{aligned}$$

Obratno, ako je S regularna vremenska ploha i $p\in S$ točka, onda prema teoremu 1.3.21 postoji konformna parametrizacija $\mathbf{x}: U\subseteq\mathbb{R}^2\to S$ takva da je $p\in\mathbf{x}(U)$. Definirajmo funkcije $f,g: U\to\mathbb{R}$ i $q,r: U\to\mathbb{C}$ formulama

$$\begin{aligned}
q &= -\frac{\partial_u x_3+i\partial_u x_4}{\partial_u x_1-\partial_u x_2} = -\frac{\partial_u x_1+\partial_u x_2}{\partial_u x_3-i\partial_u x_4}\\
f &= \partial_u x_1-\partial_u x_2\\
r &= \frac{\partial_v x_3+i\partial_v x_4}{\partial_v x_1+\partial_v x_2} = \frac{\partial_v x_1-\partial_v x_2}{\partial_v x_3-i\partial_v x_4}\\
g &= -(\partial_v x_1+\partial_v x_2).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Pri tome smo primijenili jednakosti (3.8). Tada je

$$\begin{aligned}
\partial_u x_3+i\partial_u x_4 &= -qf\\
\partial_u x_1+\partial_u x_2 &= q\overline{q}f\\
\partial_v x_3+i\partial_v x_4 &= -rg\\
\partial_v x_1-\partial_v x_2 &= -r\overline{r}g,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

odakle slijede formule (3.10). Jednakosti (3.9) slijede primjenom Schwarzovog pravila na funkcije $x_1\pm x_2$ i $x_3\pm ix_4$, a jednakosti $fg>0$ i $q\overline{r}\neq -1$ slijede iz $\lambda>0$.

Posebno trebamo riješiti slučaj kad je $\partial_u x_1-\partial_u x_2=0$. Tada iz jednakosti (3.8) slijedi da je $\partial_u x_3=\partial_u x_4=0$. Iz toga primjenom Schwarzovog pravila dobivamo da je $\partial_v x_2=\partial_v x_1+c_1(u)$, $\partial_v x_3=c_2(u)$ i $\partial_v x_4=c_3(u)$, gdje su c_k glatke funkcije koje ovise samo o u. Mora biti $c_1\neq 0$, u suprotnom iz jednakosti (3.8) slijedi da su polja $\mathbf{x}_u$ i $\mathbf{x}_v$ kolinearna, što je u kontradikciji s regularnošću plohe S. Sada možemo zamijeniti varijable u i v te definirati funkcije f i q kao

gore te $g = -\partial_v x_1$ i $r = 0$. Slučaj kad je $\partial_v x_1 + \partial_v x_2 = 0$ se rješava slično. ■

Ako u formule (3.10) uvrstimo realne funkcije q i r, dobivamo Magidovu formulu za vremenske plohe u $\mathbb{M}^3$ uz $x_4 = const$. Ta parametrizacija je ujedno i analogon formule (3.1) za vremenske plohe. Uočimo da je u oba slučaja ploha reprezentirana istim brojem funkcija (šest realnih funkcija ako brojimo po komponentama). Rezultat za minimalne plohe u $\mathbb{M}^3$ se izravno poopćava na $\mathbb{M}^4$.

Korolar 3.2.2. *Vremenska ploha S u $\mathbb{M}^4$, dana Weierstrassovim podacima (q, f, r, g), je minimalna ako i samo ako je*

$$f_v = g_u = q_v = r_u = 0.$$

Dokaz. Budući da je ploha S vremenska, u svakoj točki $p \in S$ normalni prostor N_pS je prostorni potprostor (ovdje je $\dim N_pS = 2$). Dakle, svaki vektor $w \in N_pS$ je prostorni. Budući da je vektor srednje zakrivljenosti normalan, slijedi da je $H = 0$ ekvivalentno $\mathbf{x}_{uv} = 0$. Zatim tvrdnja slijedi iz formula (3.11). ■

Sada ćemo poopćiti Leejevu formulu za vremenske plohe na plohe u $\mathbb{M}^4$.

Teorem 3.2.3. *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren jednostavno povezan skup i $s_1, t_1, s_2, t_2 : U \to \mathbb{C}$ funkcije kojima su realni i imaginarni dio klase C^∞ takve da su parovi $(s_1, -t_2)$ i (t_1, s_2) linearno nezavisna rješenja sustava*

$$\begin{aligned} \partial_u t_2 &= -p s_1 \\ \partial_v s_1 &= p t_2 \\ \partial_u s_2 &= p t_1 \\ \partial_v t_1 &= -p s_2 \end{aligned} \tag{3.13}$$

za neku funkciju $p \in C^\infty(U)$. Tada je parametrizacija $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) : U \to \mathbb{M}^4$, dana formulama

$$\begin{aligned} x_1(u,v) &= \frac{1}{2}\int (s_1\overline{s_1} + t_1\overline{t_1})\,du - (s_2\overline{s_2} + t_2\overline{t_2})\,dv \\ x_2(u,v) &= \frac{1}{2}\int (s_1\overline{s_1} - t_1\overline{t_1})\,du + (s_2\overline{s_2} - t_2\overline{t_2})\,dv \\ x_3(u,v) &= -\frac{1}{2}\int (s_1\overline{t_1} + \overline{s_1}t_1)\,du + (s_2\overline{t_2} + \overline{s_2}t_2)\,dv \\ x_4(u,v) &= \frac{i}{2}\int (s_1\overline{t_1} - \overline{s_1}t_1)\,du - (s_2\overline{t_2} - \overline{s_2}t_2)\,dv, \end{aligned} \tag{3.14}$$

konformna. Ploha $S = \mathbf{x}(U)$ je regularna i vremenska. Metrički tenzor parametrizacije $\mathbf{x}$ i

srednja zakrivljenost plohe S su dani formulama

$$ds^2 = |s_1 s_2 + t_1 t_2|^2 \, du dv$$
$$H = \frac{2p}{\sqrt{\lambda}}.$$

Dokaz. Za diferencijalne 1-forme

$$\omega_{1,2} = (s_1\overline{s_1} \pm t_1\overline{t_1})\, du \mp (s_2\overline{s_2} \pm t_2\overline{t_2})\, dv$$
$$\omega_{3,4} = (s_1\overline{t_1} \pm \overline{s_1}t_1)\, du \pm (s_2\overline{t_2} \pm \overline{s_2}t_2)\, dv$$

iz jednadžbi (3.13) slijedi da je

$$\begin{aligned}
d\omega_{1,2} &= (\mp\partial_u(s_2\overline{s_2} \pm t_2\overline{t_2}) - \partial_v(s_1\overline{s_1} \pm t_1\overline{t_1}))\, dudv \\
&= (\mp(\partial_u s_2)\overline{s_2} \mp s_2\partial_u\overline{s_2} - (\partial_u t_2)\overline{t_2} - t_2\partial_u\overline{t_2} - (\partial_v s_1)\overline{s_1} - s_1\partial_v\overline{s_1} \mp (\partial_v t_1)\overline{t_1} \mp t_1\partial_v\overline{t_1})\, dudv \\
&= (\mp pt_1\overline{s_2} \mp s_2 p\overline{t_1} + ps_1\overline{t_2} + t_2 p\overline{s_1} - pt_2\overline{s_1} - s_1 p\overline{t_2} \pm ps_2\overline{t_1} \pm t_1 ps_2)\, dudv = 0 \\
d\omega_{3,4} &= (\pm\partial_u(s_2\overline{t_2} \pm \overline{s_2}t_2) - \partial_v(s_1\overline{t_1} \pm \overline{s_1}t_1))\, dudv \\
&= (\pm(\partial_u s_2)\overline{t_2} \pm s_2\partial_u\overline{t_2} + (\partial_u\overline{s_2})t_2 + \overline{s_2}\partial_u t_2 - (\partial_v s_1)\overline{t_1} - s_1\partial_v\overline{t_1} \mp (\partial_v\overline{s_1})t_1 \mp \overline{s_1}\partial_v t_1)\, dudv \\
&= (\pm pt_1\overline{t_2} \mp s_2 p\overline{s_1} + p\overline{t_1}t_2 - \overline{s_2}ps_1 - pt_2\overline{t_1} + s_1 p\overline{s_2} \mp p\overline{t_2}t_1 \pm \overline{s_1}ps_2)\, dudv = 0
\end{aligned}$$

Dakle, forme ω_k su zatvorene, pa iz Poincaréove leme slijedi da su egzaktne, tj. postoje funkcije $x_k : U \to \mathbb{C}$ takve da vrijede formule (3.14). Nadalje, komponente formi ω_k, tj. parcijalne derivacije funkcija x_k, su realne funkcije, što i treba biti. Nadalje,

$$\begin{aligned}
E = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u &= -\frac{1}{4}(s_1\overline{s_1} + t_1\overline{t_1})^2 + \frac{1}{4}(s_1\overline{s_1} - t_1\overline{t_1})^2 + \frac{1}{4}(s_1\overline{t_1} + \overline{s_1}t_1)^2 - \frac{1}{4}(s_1\overline{t_1} - \overline{s_1}t_1)^2 \\
&= -\frac{1}{4}(s_1^2\overline{s_1}^2 + 2s_1\overline{s_1}t_1\overline{t_1} + t_1^2\overline{t_1}^2) + \frac{1}{4}(s_1^2\overline{s_1}^2 - 2s_1\overline{s_1}t_1\overline{t_1} + t_1^2\overline{t_1}^2) \\
&+ \frac{1}{4}(s_1^2\overline{t_1}^2 + 2s_1\overline{t_1s_1}t_1 + \overline{s_1}^2t_1^2) - \frac{1}{4}(s_1^2\overline{t_1}^2 - 2s_1\overline{t_1s_1}t_1 + \overline{s_1}^2t_1^2) = -s_1\overline{s_1}t_1\overline{t_1} + s_1\overline{t_1s_1}t_1 = 0 \\
F = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v &= \frac{1}{4}(s_1\overline{s_1} + t_1\overline{t_1})(s_2\overline{s_2} + t_2\overline{t_2}) + \frac{1}{4}(s_1\overline{s_1} - t_1\overline{t_1})(s_2\overline{s_2} - t_2\overline{t_2}) \\
&+ \frac{1}{4}(s_1\overline{t_1} + \overline{s_1}t_1)(s_2\overline{t_2} + \overline{s_2}t_2) + \frac{1}{4}(s_1\overline{t_1} - \overline{s_1}t_1)(s_2\overline{t_2} - \overline{s_2}t_2) \\
&= \frac{1}{4}(s_1\overline{s_1}s_2\overline{s_2} + s_1\overline{s_1}t_2\overline{t_2} + t_1\overline{t_1}s_2\overline{s_2} + t_1\overline{t_1}t_2\overline{t_2}) + \frac{1}{4}(s_1\overline{s_1}s_2\overline{s_2} - s_1\overline{s_1}t_2\overline{t_2} - t_1\overline{t_1}s_2\overline{s_2} + t_1\overline{t_1}t_2\overline{t_2}) \\
&+ \frac{1}{4}(s_1\overline{t_1}s_2\overline{t_2} + s_1\overline{t_1s_2}t_2 + \overline{s_1}t_1s_2\overline{t_2} + \overline{s_1}t_1\overline{s_2}t_2) + \frac{1}{4}(s_1\overline{t_1}s_2\overline{t_2} - s_1\overline{t_1s_2}t_2 - \overline{s_1}t_1s_2\overline{t_2} + \overline{s_1}t_1\overline{s_2}t_2) \\
&= \frac{1}{2}(s_1\overline{s_1}s_2\overline{s_2} + t_1\overline{t_1}t_2\overline{t_2} + s_1\overline{t_1}s_2\overline{t_2} + \overline{s_1}t_1\overline{s_2}t_2) = \frac{1}{2}(s_1s_2 + t_1t_2)(\overline{s_1s_2} + \overline{t_1t_2}) \\
&= \frac{1}{2}|s_1s_2 + t_1t_2|^2
\end{aligned}$$

Na isti način kao $E = 0$ se vidi da je i $G = 0$, samo promijenimo indekse. Dakle, parametrizacija $\mathbf{x}$ je konformna s konformnim faktorom $\lambda = 2F = |s_1 s_2 + t_1 t_2|^2$. Budući da su parovi $(s_1, -t_2)$ i (t_1, s_2) linearno nezavisni, slijedi da je

$$s_1 s_2 + t_1 t_2 = \begin{vmatrix} s_1 & -t_2 \\ t_1 & s_2 \end{vmatrix} > 0.$$

Iz $E = G = 0$ slijedi da su vektorska polja $\mathbf{x}_u$ i $\mathbf{x}_v$ svjetlosna, a iz $F > 0$ da nisu okomita, odakle slijedi da su linearno nezavisna. Dakle, ploha S je regularna i vremenska. Još trebamo izračunati srednju zakrivljenost. Računamo:

$$\begin{aligned}
\partial_v \partial_u x_{1,2} &= \frac{1}{2}\partial_v(s_1\overline{s_1} \pm t_1\overline{t_1}) = \frac{1}{2}((\partial_v s_1)\overline{s_1} + s_1\partial_v\overline{s_1} \pm (\partial_v t_1)\overline{t_1} \pm t_1\partial_v\overline{t_1}) \\
&= \frac{1}{2}(pt_2\overline{s_1} + s_1 p\overline{t_2} \mp ps_2\overline{t_1} \mp t_1 p\overline{s_2}) = p\mathrm{Re}\,(s_1\overline{t_2} \mp s_2\overline{t_1}) \\
\partial_v \partial_u x_3 &= -\frac{1}{2}\partial_v(s_1\overline{t_1} + \overline{s_1}t_1) = -\frac{1}{2}((\partial_v s_1)\overline{t_1} + s_1\partial_v\overline{t_1} + (\partial_v\overline{s_1})t_1 + \overline{s_1}\partial_v t_1) \\
&= -\frac{1}{2}(pt_2\overline{t_1} - s_1 p\overline{s_2} + p\overline{t_2}t_1 - \overline{s_1}ps_2) = p\mathrm{Re}\,(s_1\overline{s_2} - \overline{t_1}t_2) \\
\partial_v \partial_u x_4 &= \frac{i}{2}\partial_v(s_1\overline{t_1} - \overline{s_1}t_1) = \frac{i}{2}((\partial_v s_1)\overline{t_1} + s_1\partial_v\overline{t_1} - (\partial_v\overline{s_1})t_1 - \overline{s_1}\partial_v t_1) \\
&= \frac{i}{2}(pt_2\overline{t_1} - s_1 p\overline{s_2} - p\overline{t_2}t_1 + \overline{s_1}ps_2) = p\mathrm{Im}\,(s_1\overline{s_2} - \overline{t_1}t_2)
\end{aligned}$$

Uvrštavanjem u formulu (2.9) dobivamo

$$\begin{aligned}
H &= \frac{2p}{\lambda}\sqrt{-(\mathrm{Re}\,s_1\overline{t_2} - \mathrm{Re}\,s_2\overline{t_1})^2 + (\mathrm{Re}\,s_1\overline{t_2} + \mathrm{Re}\,s_2\overline{t_1})^2 + (\mathrm{Re}\,(s_1\overline{s_2} - \overline{t_1}t_2))^2 + (\mathrm{Im}\,(s_1\overline{s_2} - \overline{t_1}t_2))^2} \\
&= \frac{2p}{\lambda}\sqrt{4(\mathrm{Re}\,s_1\overline{t_2})(\mathrm{Re}\,s_2\overline{t_1}) + (s_1\overline{s_2} - \overline{t_1}t_2)\overline{s_1\overline{s_2} - \overline{t_1}t_2}} \\
&= \frac{2p}{\lambda}\sqrt{4 \cdot \frac{s_1\overline{t_2} + \overline{s_1}t_2}{2} \cdot \frac{s_2\overline{t_1} + \overline{s_2}t_1}{2} + (s_1\overline{s_2} - \overline{t_1}t_2)(\overline{s_1}s_2 - t_1\overline{t_2})} \\
&= \frac{2p}{\lambda}\sqrt{s_1\overline{t_2}s_2\overline{t_1} + s_1\overline{t_2s_2}t_1 + \overline{s_1}t_2s_2\overline{t_1} + \overline{s_1}t_2\overline{s_2}t_1 + s_1\overline{s_2s_1}s_2 - s_1\overline{s_2}t_1\overline{t_2} - \overline{t_1}t_2\overline{s_1}s_2 + \overline{t_1}t_2t_1\overline{t_2}} \\
&= \frac{2p}{\lambda}\sqrt{s_1s_2(\overline{t_2t_1} + \overline{s_2s_1}) + t_2t_1(\overline{s_1s_2} + \overline{t_1t_2})} = \frac{2p}{\lambda}\sqrt{(s_1s_2 + t_1t_2)\overline{s_1s_2 + t_1t_2}} = \frac{2p}{\lambda}\sqrt{\lambda} = \frac{2p}{\sqrt{\lambda}}
\end{aligned}$$

■

Formula (3.14) je poopćenje Leejeve formule za vremenske plohe u $\mathbb{M}^3$ na plohe u $\mathbb{M}^4$. Ako uvstimo realne funkcije s_k, t_k, dobivamo formulu (2.15) uz $x_4 = const$. Ta formula je ujedno i analogon Konopelchenkove formule (3.5) za vremenske plohe. Obje formule koriste isti broj funkcija za reprezentaciju plohe. Formula za srednju zakrivljenost je identična kao za prostorne plohe i kao u $\mathbb{M}^3$.

Uočimo da je $H = 0$ ako i samo ako je $p = 0$. Sada ćemo pokazati da se svaka minimalna ploha

može lokalno parametrizirati takvim preslikavanjem. Iz teorema 1.3.21 slijedi da za svaku točku $p \in S$ postoji konformna parametrizacija $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ takva da je $p \in \mathbf{x}(U)$.

Teorem 3.2.4. *Neka je S minimalna vremenska ploha u $\mathbb{M}^4$ i $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ konformna parametrizacija. Tada postoje funkcije $s_1, t_1, s_2, t_2 : U \to \mathbb{C}$ kojima su realni i imaginarni dio klase C^∞ takve da je*

$$\partial_u t_2 = \partial_v s_1 = \partial_u s_2 = \partial_v t_1 = 0 \tag{3.15}$$

i da vrijede formule (3.14).

Dokaz. Budući da je parametrizacija $\mathbf{x}$ konformna, vrijede jednakosti (3.8). Iz toga slijedi da su funkcije $\partial_u(x_1 + x_2)$ i $\partial_u(x_1 - x_2)$ istog predznaka te funkcije $\partial_v(x_1 \pm x_2)$ također. Možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti da je $\partial_u(x_1 + x_2) \geq 0$ i $\partial_v(x_1 \pm x_2) \leq 0$.

Ako nije tako, reparametriziramo pomoću funkcije prijelaza $(u, v) \mapsto (v, u)$ ako sve četiri funkcije imaju drugi predznak ili jednom od funkcija $(u, v) \mapsto (-u, v)$ i $(u, v) \mapsto (u, -v)$ ako samo dvije funkcije nemaju predznak kako smo pretpostavili. Uočimo da reparametrizacija i dalje ostaje konformna.

Formule za x_1 i x_2 u (3.14) su ekvivalentne sustavu

$$\begin{aligned}
\partial_u x_1 + \partial_u x_2 &= s_1 \overline{s_1} \\
\partial_u x_1 - \partial_u x_2 &= t_1 \overline{t_1} \\
\partial_v x_1 + \partial_v x_2 &= -t_2 \overline{t_2} \\
\partial_v x_1 - \partial_v x_2 &= -s_2 \overline{s_2},
\end{aligned} \tag{3.16}$$

što vrijedi ako i samo ako je

$$\begin{aligned}
s_1 &= e^{i\alpha} \sqrt{\partial_u(x_1 + x_2)} \\
t_1 &= e^{i\beta} \sqrt{\partial_u(x_1 - x_2)} \\
t_2 &= e^{i\gamma} \sqrt{-\partial_v(x_1 + x_2)} \\
s_2 &= e^{i\delta} \sqrt{-\partial_v(x_1 - x_2)},
\end{aligned} \tag{3.17}$$

gdje su $\alpha, \beta, \gamma, \delta : U \to \mathbb{R}$ glatke funkcije po volji. Rješenja su dana u tzv. trigonometrijskom obliku kompleksnog broja. Formule za x_3 i x_4 u (3.14) su ekvivalentne sustavu

$$\begin{aligned}
\partial_u x_3 + i \partial_u x_4 &= -s_1 \overline{t_1} \\
\partial_v x_3 + i \partial_v x_4 &= -\overline{s_2} t_2.
\end{aligned}$$

Ako gornje funkcije uvrstimo u taj sustav, dobivamo

$$\begin{aligned} \partial_u x_3 + i\partial_u x_4 &= -e^{i(\alpha-\beta)}\sqrt{(\partial_u x_1)^2 - (\partial_u x_2)^2} \\ \partial_v x_3 + i\partial_v x_4 &= -e^{i(\gamma-\delta)}\sqrt{(\partial - vx_1)^2 - (\partial_v x_2)^2}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Zbog $|e^{it}| = 1$ za $t \in \mathbb{R}$, ove jednadžbe imaju rješenje ako i samo ako je

$$\left| \frac{\partial_u x_3 + i\partial_u x_4}{\sqrt{(\partial_u x_1)^2 - (\partial_u x_2)^2}} \right| = \left| \frac{\partial_v x_3 + i\partial_v x_4}{\sqrt{(\partial_v x_1)^2 - (\partial_v x_2)^2}} \right| = 1,$$

što vrijedi zbog jednakosti (3.8).

Još treba pokazati da je moguće postići da funkcije s_k i t_k zadovoljavaju uvjete (3.15). Budući da je ploha S minimalna, iz formule (2.9) slijedi da je $\|\mathbf{x}_{uv}\| = 0$. Budući da je ploha S vremenska, normalni prostor N_pS plohe S u svakoj točki $p \in S$ je prostorni. No, kako je vektorsko polje srednje zakrivljenosti $\mathbf{x}_{uv}$ normalno, iz toga slijedi da je to polje prostorno, pa mora biti $\mathbf{x}_{uv} = \mathbf{x}_{vu} = 0$. Dakle, dovoljno je odabrati funkcije α, β, γ, δ koje zadovoljavaju sustav (3.18) takve da je $\partial_u\alpha = \partial_u\beta = \partial_v\gamma = \partial_v\delta = 0$. ■

Primjer. (vremenska ravnina) Ako u formulu (3.14) uvrstimo konstante $s_k = a_k + b_k i$, $t_k = c_k + d_k i$, $a_k, b_k, c_k, d_k \in \mathbb{R}$, $k \in \{1,2\}$ i integriramo duž puta $t \mapsto (ut, vt)$ od točke $(0,0)$ do točke (u,v), dobivamo konformnu afinu parametrizaciju vremenske ravnine

$$\begin{aligned} x_1(u,v) &= \frac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2)u - \frac{1}{2}(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2)v + C_1 \\ x_2(u,v) &= \frac{1}{2}(a_1^2 + b_1^2 - c_1^2 - d_1^2)u + \frac{1}{2}(a_2^2 + b_2^2 - c_2^2 - d_2^2) + C_2 \\ x_3(u,v) &= -(a_1c_1 + b_1d_1)u - (a_2c_2 + b_2d_2)v + C_3 \\ x_4(u,v) &= (a_1d_1 - b_1c_1)u - (a_2d_2 - b_2c_2)v + C_4, \end{aligned}$$

gdje su $C_k \in \mathbb{R}$ konstante. Konformni faktor ove parametrizacije je

$$\lambda = (a_1a_2 - b_1b_2 + c_1c_2 - d_1d_2)^2 + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 + d_1c_2)^2.$$

Ovdje nećemo razmatrati za koje plohe postoji parametrizacija (3.14). Samo ćemo istaknuti da za svaku plohu postoje funkcije s_k i t_k tako da vrijede formule (3.14) i one su dane formulama (3.17), ali otvoreno je pitanje može li se postići da te funkcije zadovoljavaju i sustav (3.13). Dakle, postojanje funkcija s_k, t_k za danu plohu S i konformnu parametrizaciju $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ ovisi samo o rješivosti sustava (3.13) za funkciju

$$p = \frac{H\sqrt{\lambda}}{2}.$$

Ovdje ćemo samo dati primjere koji pokazuju da uvjet da ploha bude minimalna nije nužan da bi ploha imala reprezentaciju (3.14).

Primjer. Funkcije

$$\begin{aligned} s_1(u,v) &= e^{(u+v)i} \\ t_1(u,v) &= e^{-(u+v+\pi/2)i} \\ s_2(u,v) &= e^{-(u+v)i} \\ t_2(u,v) &= e^{(u+v+\pi/2)i} \end{aligned}$$

zadovoljavaju sustav (3.13) za $p = 1$. Te funkcije reprezentiraju vremensku plohu koja ima

$$\begin{aligned} \lambda &= |e^{(u+v)i} \cdot e^{-(u+v)i} + e^{-(u+v+\pi/2)i} \cdot e^{(u+v+\pi/2)i}|^2 = 4 \\ H &= \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{4}} = 1 \end{aligned}$$

Dakle, dana ploha je primjer prave cmc-plohe koja ima reprezentaciju (3.14).

Sustav oblika (3.14) se može lako riješiti u nekim posebnim slučajevima, npr. kada je p konstanta i tražimo rješenja sa separiranim varijablama, tj. oblika $a(u)b(v)$. Tada su jedina rješenja eksponencijalne funkcije a i b.

Primjer. Funkcije

$$\begin{aligned} s_1(u,v) &= s_2(u,v) = \sin(u+v) + i\,\mathrm{ch}\,(u-v) \\ t_1(u,v) &= \cos(u+v) + i\,\mathrm{sh}\,(-u+v) \\ t_2(u,v) &= \cos(u+v) + i\,\mathrm{sh}\,(u-v) \end{aligned}$$

također zadovoljavaju sustav (3.13) za $p = 1$. Dana ploha ima srednju zakrivljenost

$$H = \frac{\sqrt{2}}{\sin(u+v)\,\mathrm{ch}\,(u-v)}.$$

Dakle, radi se o plohi koja nema konstantnu srednju zakrivljenost, a ima reprezentaciju (3.14).

Ako oslabimo sustav (3.13) tako da bude oblika

$$\begin{aligned} \partial_u t_2 &= -p s_1 \\ \partial_v s_1 &= p t_2 \\ \partial_u s_2 &= q t_1 \\ \partial_v t_1 &= -q s_2, \end{aligned}$$

onda su prve dvije jednadžbe ekvivalentne

$$\frac{\partial_u t_2}{s_1} = -\frac{\partial_v s_1}{t_2} \Leftrightarrow \partial_u(t_2^2) = -\partial_v(s_1^2).$$

Ako uvrstimo funkcije (3.17), dobivamo

$$-e^{e^{2i\gamma}} \cdot 2i(\partial_u \gamma)\partial_v(x_1+x_2) - e^{2i\gamma}\partial_u\partial_v(x_1+x_2) = -e^{2i\alpha} \cdot 2i(\partial_v \alpha)\partial_u(x_1+x_2) - e^{2i\alpha}\partial_v\partial_u(x_1+x_2).$$

Vidimo da je ova jednadžba zadovoljena za $\alpha = \gamma = x_1 + x_2$. Na isti način se vidi da su druge dvije jednadžbe zadovoljene za $\beta = \delta = x_1 - x_2$. Međutim, općenito ne mora biti $p = q$.

Propozicija 3.2.5. *Neka je S minimalna vremenska ploha u $\mathbb{M}^4$ reprezentirana konformnom parametrizacijom s Weierstrassovim podacima (q, f, r, g), odnosno (s_1, t_1, s_2, t_2). Tada je*

$$|s_1|^2 = |q|^2 f, \quad |t_1|^2 = f, \quad |s_2|^2 = |r|^2 g, \quad |t_2|^2 = g.$$

Dokaz. Iz jednakosti (3.11), (3.12) i (3.16) imamo da je

$$\begin{aligned} |q|^2 f &= \partial_u x_1 + \partial_u x_2 = |s_1|^2 \\ f &= \partial_u x_1 - \partial_u x_2 = |t_1|^2 \\ |r|^2 g &= -\partial_v x_1 + \partial_v x_2 = |s_2|^2 \\ g &= -\partial_v x_1 - \partial_v x_2 = |t_2|^2. \end{aligned}$$

■

3.3. Weierstrassova parametrizacija za svjetlosne plohe u $\mathbb{M}^4$

Da bismo dobili parametrizaciju svjetlosne plohe koja ima fundamentalne veličine $E = G = 0$, moramo konformnu parametrizaciju reparametrizirati pomoću dualnih varijabli $z = u + v\varepsilon$ i $\bar{z} = u - v\varepsilon$. S druge strane, faktorizacija na linearne faktore poput (3.8) se ne može napraviti ni nad prstenom $\mathbb{D}$, što sugerira da bismo za parametrizaciju svjetlosnih ploha u $\mathbb{M}^4$ trebali koristiti funkcije $U \subseteq \mathbb{D} \to \mathbb{C}$. Međutim, tada Weierstrassova parametrizacija ne može poopćavati formulu za $\mathbb{M}^3$ jer već tamo imamo dualne funkcije. Dakle, moramo imati dualne brojeve i u kodomeni funkcije, što je problem jer ne možemo pomnožiti $i \cdot \varepsilon$ u skupu $\{a + bi + c\varepsilon : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ (drugim riječima, taj skup nije polje). Naime, ako je $i\varepsilon = a + bi + c\varepsilon$ za neke $a, b, c \in \mathbb{R}$, onda kvadriranjem dobivamo

$$\begin{aligned} i^2\varepsilon^2 &= a^2 - b^2 + 2abi + 2ac\varepsilon + 2bci\varepsilon \\ -1 \cdot 0 &= a^2 - b^2 + 2abi + 2ac\varepsilon + 2bc(a + bi + c\varepsilon) \\ 0 &= a^2 - b^2 + 2abc + (2ab + 2b^2c)i + (2ac + 2bc^2)\varepsilon \end{aligned}$$

Iz toga slijedi da je $a^2 - b^2 + 2abc = 2ab + 2b^2c = 2ac + 2bc^2 = 0$. Ako je $b = 0$, slijedi da je $a = 0$, pa je $i\varepsilon = c\varepsilon$, tj. $(i - c)\varepsilon = 0$. Budući da je $c \in \mathbb{R}$, slijedi da je $i - c \in \mathbb{C}^\times$, pa dijeljenjem tim brojem slijedi da je $\varepsilon = 0$, što je kontradikcija.
Ako je $b \neq 0$, iz druge jednadžbe slijedi $bc = -a$. No, tada prva jednadžba postaje $a^2 + b^2 = 0$, odakle slijedi $a = b = 0$, što je opet kontradikcija.
Uočimo da je u $\mathbb{M}^3$ izvod formule za svjetlosne plohe sličan izvodu za prostorne plohe (McNertney), samo što umjesto kompleksnih koristimo dualne funkcije, dok za vremenske plohe imamo drugačiji izvod. S druge strane, za prostorne plohe u $\mathbb{M}^4$ također koristimo kompleksne funkcije (Liu), pa je ideja opet napraviti analogni izvod i koristiti samo dualne funkcije.
Ako je $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{D} \to S$ konformna parametrizacija, možemo nad $\mathbb{D}$ samo faktorizirati

$$(\partial_z x_1 - \partial_z x_2)(\partial_z x_1 + \partial_z x_2) = (\partial_z x_3)^2 + (\partial_z x_4)^2.$$

Ideja je da desnu stranu uopće ne faktoriziramo, nego probamo postići da kad se primijeni formula za kvadrat binoma na $-(\partial_z x_1)^2 + (\partial_z x_2)^2$, srednji članovi budu kvadrati koji će se poništiti s kvadratima od $(\partial_z x_3)^2 + (\partial_z x_4)^2$ kako bi bilo $E = 0$. Ova razmatranja nas dovode do sljedeće Weierstrassove parametrizacije za svjetlosne plohe.

Teorem 3.3.1. *Neka je S regularna svjetlosna ploha u $\mathbb{M}^4$ i $p \in S$ točka. Tada se ploha S može parametrizirati konformnom parametrizacijom $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ oblika*

$$\begin{aligned} x_1(u,v) &= \operatorname{Im} \int \rho(1+f^2+g^2)\,dz \\ x_2(u,v) &= -\operatorname{Im} \int \rho(1-f^2-g^2)\,dz \\ x_3(u,v) &= \sqrt{2}\operatorname{Im} \int \rho(f+g)\,dz \\ x_4(u,v) &= \sqrt{2}\operatorname{Im} \int \rho(f-g)\,dz, \end{aligned} \tag{3.19}$$

gdje je $p \in \mathbf{x}(U)$, $z = u + v\varepsilon$ te $\rho, f, g : U \subseteq \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ funkcije kojima su realni i imaginarni dio klase C^∞.

Dokaz. Iz korolara 1.5.7 slijedi da postoji konformna parametrizacija $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S$ takva da je $p \in \mathbf{x}(U)$. Stavimo $z = u + v\varepsilon$ i definirajmo funkcije $f_k : U \subseteq \mathbb{D} \to \mathbb{D}$, $k \in \{1,2,3,4\}$ formulama

$$f_k = \int \partial_v x_k\,du + \varepsilon x_k.$$

Budući da koristimo poopćenje derivacije $\partial_z = \partial_u$ za dualne funkcije koje nisu holomorfne, onda slijedi da je

$$\partial_z f_k = \partial_v x_k + \varepsilon \partial_u x_k. \tag{3.20}$$

Dobijemo istu formulu kao kad smo u $\mathbb{M}^3$ nadopunjavali komponente x_k do holomorfnih dualnih funkcija. Dakle, ovo je poopćenje za slučaj kad parametrizacija $\mathbf{x}$ nije pravčasta.

Budući da je parametrizacija $\mathbf{x}$ konformna, slijedi da je

$$\begin{aligned} &-(\partial_z f_1)^2 + (\partial_z f_2)^2 + (\partial_z f_3)^2 + (\partial_z f_4)^2 \\ &= -(\partial_v x_1 + \varepsilon\partial_u x_1)^2 + \partial_v x_2 + \varepsilon\partial_u x_2)^2 + (\partial_v x_3 + \varepsilon\partial_u x_3)^2 + (\partial_v x_4 + \varepsilon\partial_u x_4)^2 \\ &= [-(\partial_v f_1)^2 + (\partial_v f_2)^2 + (\partial_v f_3)^2 + (\partial_v f_4)^2] + \varepsilon^2[-(\partial_u f_1)^2 + (\partial_u f_2)^2 + (\partial_u f_3)^2 + (\partial_u f_4)^2] \\ &+ 2\varepsilon[-(\partial_u x_1)(\partial_v x_1) + (\partial_u x_2)(\partial_v x_2) + (\partial_u x_3)(\partial_v x_3) + (\partial_u x_4)(\partial_v x_4)] \\ &= G + \varepsilon^2 \cdot E + 2\varepsilon \cdot F = 0 + 0 \cdot E + 2\varepsilon \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Sada definirajmo funkcije $\rho, f, g : U \subseteq \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ formulama

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{\partial_z f_1 - \partial_z f_2}{2} \\ f &= \frac{\partial_z f_3 + \partial_z f_4}{2\sqrt{2}\rho} \\ g &= \frac{\partial_z f_3 - \partial_z f_4}{2\sqrt{2}\rho}. \end{aligned}$$

Ako je funkcija ρ imaginarna, stavimo $f = \dfrac{\operatorname{Im}(\partial_z f_3 + \partial_z f_4)}{2\sqrt{2}\operatorname{Im}\rho}$, $g = \dfrac{\operatorname{Im}(\partial_z f_3 - \partial_z f_4)}{2\sqrt{2}\operatorname{Im}\rho}$. Tada je

$$\begin{aligned}
\partial_z f_1 - \partial_z f_2 &= 2\rho \\
\partial_z f_3 + \partial_z f_4 &= 2\sqrt{2}\rho f \\
\partial_z f_3 - \partial_z f_4 &= 2\sqrt{2}\rho g.
\end{aligned}$$

Iz zadnjih dviju jednakosti slijedi da je

$$\begin{aligned}
\partial_z f_3 &= \sqrt{2}\rho(f+g) \\
\partial_z f_4 &= \sqrt{2}\rho(f-g).
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Iz toga dalje slijedi da je

$$(\partial_z f_3)^2 + (\partial_z f_4)^2 = 2\rho^2(f+g)^2 + 2\rho^2(f-g)^2 = 4\rho^2(f^2+g^2).$$

No, kako je

$$(\partial_z f_3)^2 + (\partial_z f_4)^2 = (\partial_z f_1 - \partial_z f_2)(\partial_z f_1 + \partial_z f_2),$$

slijedi da je

$$\partial_z f_1 + \partial_z f_2 = \frac{4\rho^2(f^2+g^2)}{4\rho^2} = f^2 + g^2,$$

odakle slijedi da je

$$\begin{aligned}
\partial_z f_1 &= \rho(1+f^2+g^2) \\
\partial_z f_2 &= -\rho(1-f^2-g^2).
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Sada iz jednakosti (3.20) i činjenice da je $\partial_z = \partial_u$ slijede formule (3.19). ■

Ova formula je analogna reprezentaciji (3.1) za prostorne plohe, samo što koristi polinome $1 \pm (f^2+g^2)$ umjesto $1 \pm fg$ (oba polinoma su kvadratna). Nadalje, ta formula poopćava Weierstrassovu reprezentaciju za svjetlosne plohe u $\mathbb{M}^3$. Ako uvrstimo $\rho = \dfrac{\tilde{f}}{2}$ i $f = g = \dfrac{\tilde{g}}{\sqrt{2}}$, dobivamo parametrizaciju u $\mathbb{M}^3$ s Weierstrassovim podacima $(\tilde{f}, \tilde{g})$ uz $x_4 = const$.

Možemo izračunati i konformni faktor parametrizacije (3.19), ali ta formula se ne može puno pojednostavniti.

$$\begin{aligned}
\lambda = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_u &= -(\operatorname{Im}\partial_z f_1)^2 + (\operatorname{Im}\partial_z f_2)^2 + (\operatorname{Im}\partial_z f_3)^2 + (\operatorname{Im}\partial_z f_4)^2 \\
&= -(\operatorname{Im}\rho + \operatorname{Im}\rho f^2 + \operatorname{Im}\rho g^2)^2 + (-\operatorname{Im}\rho + \operatorname{Im}\rho f^2 + \operatorname{Im}\rho g^2)^2 \\
&+ 2(\operatorname{Im}\rho f + \operatorname{Im}\rho g)^2 + 2(\operatorname{Im}\rho f - \operatorname{Im}\rho g)^2 \\
&= -2(\operatorname{Im}\rho)(\operatorname{Im}\rho f^2) - 2(\operatorname{Im}\rho)(\operatorname{Im}\rho g^2) + 4(\operatorname{Im}\rho f)^2 + 4(\operatorname{Im}\rho g)^2 \\
&= -2(\operatorname{Im}\rho)\operatorname{Im}\rho(f^2+g^2) + 4(\operatorname{Im}\rho f)^2 + 4(\operatorname{Im}\rho g)^2
\end{aligned}$$

Zbog toga ne možemo dobiti rezultat poput teorema 2.3.4 za potpuno geodetske plohe u $\mathbb{M}^4$. Ako umjesto holomorfnih i meromorfnih dualnih funkcija koristimo širu klasu funkcija kojima su samo realni i imaginarni dio glatki, ali ne zadovoljavaju nužno Cauchy-Riemannove uvjete, možemo parametrizirati svaku svjetlosnu plohu u $\mathbb{M}^4$ iako nisu sve minimalne kao u $\mathbb{M}^3$. Dakle, moguće je supstituirati dualne varijable i ako parametrizacija nije pravčasta.
U parametrizaciju za plohe u $\mathbb{M}^3$ možemo uvrstiti i funkcije f i g koje nisu holomorfne. Tada ćemo također dobiti konformnu parametrizaciju, ali ne nužno pravčastu. Međutim, nećemo dobiti veću klasu ploha jer svaka svjetlosna ploha u $\mathbb{M}^3$ ima pravčastu parametrizaciju. Dakle, razlikujemo pojmove pravčasta ploha i pravčasta parametrizacija. Pravčasta ploha ima i parametrizacije koje nisu pravčaste, tj. oblika $\mathbf{x}(u,v) = c(u) + ve(u)$. U $\mathbb{M}^4$ dobijemo veću klasu ploha kad koristimo i funkcije koje nisu holomorfne jer tada možemo svaku plohu parametrizirati, a nisu sve pravčaste.
Minimalne svjetlosne plohe smo definirali kao regularne svjetlosne plohe koje imaju netrivijalnu G-deformaciju. Pokazali smo da postoje dvije disjunktne klase ploha koje zadovoljavaju tu definiciju: pravčaste plohe sa svjetlosnim izvodnicama i l-minimalne plohe. U $\mathbb{M}^4$ postoje plohe iz obiju klasa, kao i plohe koje uopće nisu minimalne. Zanima nas koje funkcije (ρ, f, g) reprezentiraju minimalne svjetlosne plohe.

Teorem 3.3.2. *Svjetlosna ploha S u $\mathbb{M}^4$, dana Weierstrassovim podacima (ρ, f, g), je minimalna ako i samo ako je*

$$(\partial_u \operatorname{Re} f)(\partial_v \operatorname{Re} g) = (\partial_u \operatorname{Re} g)(\partial_v \operatorname{Re} f). \tag{3.23}$$

Posebno, ploha S je pravčasta ako i samo ako je

$$\partial_v \operatorname{Re} f = \partial_v \operatorname{Re} g = 0.$$

Dokaz. Iz jednakosti (3.20) slijedi da je $\partial_v x_k = \operatorname{Re} \partial_z f_k$ za sve $1 \leq k \leq 4$. Dakle,

$$\mathbf{x}_v = (\operatorname{Re}\rho(1+f^2+g^2), \operatorname{Re}\rho(-1+f^2+g^2), \sqrt{2}\operatorname{Re}\rho(f+g), \sqrt{2}\operatorname{Re}\rho(f-g)).$$

Stavimo $\rho = \rho_1 + \varepsilon\rho_2$, $f = f_1 + \varepsilon f_2$ (ovo nisu iste funkcije kao f_k gore, koje nećemo više koristiti u dokazu) i $g = g_1 + \varepsilon g_2$. Budući da za dualne brojeve vrijedi $\operatorname{Re}(z_1 z_2) = (\operatorname{Re} z_1)(\operatorname{Re} z_2)$, slijedi da je

$$\mathbf{x}_v = \rho_1(1+f_1^2+g_1^2, -1+f_1^2+g_1^2, \sqrt{2}(f_1+g_1), \sqrt{2}(f_1-g_1)). \tag{3.24}$$

Deriviranjem po v dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{vv} &= (\partial_v\rho_1)(1+f_1^2+g_1^2,-1+f_1^2+g_1^2,\sqrt{2}(f_1+g_1),\sqrt{2}(f_1-g_1))\\ &+\rho_1(2(f_1\partial_v f_1+g_1\partial_v g_1),(f_1\partial_v f_1+g_1\partial_v g_1),\sqrt{2}(\partial_v f_1+\partial_v g_1),\sqrt{2}(\partial_v f_1-\partial_v g_1))\end{aligned}$$

Ovo možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{vv} &= (\partial_v\rho_1)(1+f_1^2+g_1^2,-1+f_1^2+g_1^2,\sqrt{2}(f_1+g_1),\sqrt{2}(f_1-g_1))\\ &+\rho_1(\partial_v f_1)(2f_1,2f_1,\sqrt{2},\sqrt{2})+\rho_1(\partial_v g_1)(2g_1,2g_1,\sqrt{2},-\sqrt{2})\end{aligned}$$

Zbog regularnosti plohe S je $\mathbf{x}_v \neq 0$ i prema teoremu 1.5.11, ploha S je pravčasta ako i samo ako je $\mathbf{x}_{vv} = \alpha\mathbf{x}_v$, što vrijedi ako i samo ako je

$$\rho_1(\partial_v f_1)(2f_1,2f_1,\sqrt{2},\sqrt{2})+\rho_1(\partial_v g_1)(2g_1,2g_1,\sqrt{2},-\sqrt{2})=0.$$

Budući da su gornja dva vektora linearno nezavisna, to je ekvivalentno

$$\partial_v f_1 = \partial_v g_1 = 0$$

(mora biti $\rho_1 \neq 0$ jer bi u suprotnom bilo $\mathbf{x}_v = 0$). Nadalje, prema teoremu 1.5.13, ploha S je l-minimalna ako i samo ako su polja $\mathbf{x}_v$ i $\mathbf{x}_{vv}$ linearno nezavisna, a polje $\mathbf{x}_{uv}$ je njihova linearna kombinacija. Pretpostavimo da je $\partial_v f_1 \neq 0$ ili $\partial_v g_1 \neq 0$. Želimo naći nužne i dovoljne uvjete da bude $\mathbf{x}_{uv} = \alpha\mathbf{x}_v + \beta\mathbf{x}_{vv}$. Polja $\mathbf{x}_v$ i $\mathbf{x}_{vv}$ se mogu još rastaviti kao

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_v &= \rho_1(1,-1,0,0)+\rho_1 f_1(f_1,f_1,\sqrt{2},\sqrt{2})+\rho_1 g_1(g_1,g_1,\sqrt{2},-\sqrt{2})\\ \mathbf{x}_{vv} &= (\partial_v\rho_1)(1,-1,0,0)+(\partial_v\rho_1)f_1(f_1,f_1,\sqrt{2},\sqrt{2})+(\partial_v\rho_1)g_1(g_1,g_1,\sqrt{2},-\sqrt{2})\\ &+\rho_1(\partial_v f_1)(2f_1,2f_1,\sqrt{2},\sqrt{2})+\rho_1(\partial_v g_1)(2g_1,2g_1,\sqrt{2},-\sqrt{2})\\ &=(\partial_v\rho_1)(1,-1,0,0)+(\partial_v(\rho_1 f_1))(f_1,f_1,\sqrt{2},\sqrt{2})+(\partial_v(\rho_1 g_1))(g_1,g_1,\sqrt{2},-\sqrt{2})\\ &+\frac{\rho_1}{2}(\partial_v(f_1^2+g_1^2))(1,1,0,0)\end{aligned}$$

Uočimo da su gornja četiri vektora linearno nezavisna, tj. čine bazu za $\mathbb{M}^4$. Iz toga slijedi da je

$$\begin{aligned}\alpha\mathbf{x}_v+\beta\mathbf{x}_{vv} &= (\alpha\rho_1+\beta\partial_v\rho_1)(1,-1,0,0)+(\alpha\rho_1 f_1+\beta\partial_v(\rho_1 f_1))(f_1,f_1,\sqrt{2},\sqrt{2})\\ &+(\alpha\rho_1 g_1+\beta\partial_v(\rho_1 g_1))(g_1,g_1,\sqrt{2},-\sqrt{2})+\frac{\beta\rho_1}{2}(\partial_v(f_1^2+g_1^2))(1,1,0,0)\end{aligned}$$

S druge strane, deriviranjem jednakosti (3.24) po u i sređivanjem dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{uv} &= (\partial_u\rho_1)(1,-1,0,0)+(\partial_u(\rho_1 f_1))(f_1,f_1,\sqrt{2},\sqrt{2})+(\partial_u(\rho_1 g_1))(g_1,g_1,\sqrt{2},-\sqrt{2})\\ &+\frac{\rho_1}{2}(\partial_u(f_1^2+g_1^2))(1,1,0,0)\end{aligned}$$

Zbog linearne nezavisnosti je sada jednakost $\mathbf{x}_{uv} = \alpha \mathbf{x}_v + \beta \mathbf{x}_{vv}$ ekvivalentna sustavu

$$\begin{aligned}
\partial_u \rho_1 &= \alpha \rho_1 + \beta \partial_v \rho_1 \\
\partial_u (\rho_1 f_1) &= \alpha \rho_1 f_1 + \beta \partial_v (\rho_1 f_1) \\
\partial_u (\rho_1 g_1) &= \alpha \rho_1 g_1 + \beta \partial_v (\rho_1 g_1) \\
\frac{\rho_1}{2} \partial_u (f_1^2 + g_1^2) &= \frac{\beta \rho_1}{2} \partial_v (f_1^2 + g_1^2).
\end{aligned}$$

Dakle, moramo vidjeti pod kojim uvjetima taj sustav ima rješenje. Iz prve tri jednadžbe slijedi

$$\frac{\partial_u \rho_1 - \beta \partial_v \rho_1}{\rho_1} = \frac{\partial_u (\rho_1 f_1) - \beta \partial_v (\rho_1 f_1)}{\rho_1 f_1} = \frac{\partial_u (\rho_1 g_1) - \beta \partial_v (\rho_1 g_1)}{\rho_1 g_1}.$$

Prva od tih dviju jednakosti je ekvivalentna

$$f_1 \partial_u \rho_1 - \beta f_1 \partial_v \rho_1 = (\partial_u \rho_1) f_1 + \rho_1 \partial_u f_1 - \beta ((\partial_v \rho_1) f_1 + \rho_1 \partial_v f_1)$$

$$\Leftrightarrow \beta \rho_1 \partial_v f_1 = \rho_1 \partial_u f_1 \Leftrightarrow \beta = \frac{\partial_u f_1}{\partial_v f_1}.$$

Analogno se dobije da mora biti i $\beta = \dfrac{\partial_u g_1}{\partial_v g_1}$. Dakle, mora biti

$$\frac{\partial_u f_1}{\partial_v f_1} = \frac{\partial_u g_1}{\partial_v g_1} \Leftrightarrow (\partial_u f_1) \partial_v g_1 = (\partial_u g_1) \partial_v f_1.$$

Taj uvjet je dovoljan da bude zadovoljena i četvrta jednadžba jer je

$$\begin{aligned}
\frac{\beta \rho_1}{2} \partial_v (f_1^2 + g_1^2) &= \frac{\rho_1}{2} \beta \cdot 2 f_1 \partial_v f_1 + \frac{\rho_1}{2} \beta \cdot 2 g_1 \partial_v g_1 \\
&= \frac{\rho_1}{2} \cdot \frac{\partial_u f_1}{\partial_v f_1} \cdot 2 f_1 \partial_v f_1 + \frac{\rho_1}{2} \cdot \frac{\partial_u g_1}{\partial_v g_1} \cdot 2 g_1 \partial_v g_1 = \frac{\rho_1}{2} \partial_u (f_1^2 + g_1^2)
\end{aligned}$$

Uočimo da uvjet $(\partial_u f_1) \partial_v g_1 = (\partial_u g_1) \partial_v f_1$ zadovoljavaju i pravčaste plohe (tada su obje strane jednake 0), odakle slijedi taj uvjet karakterizira sve minimalne plohe. ■

Vidimo da u $\mathbb{M}^4$ funkcije f i g moraju zadovoljavati samo jedan Cauchy-Riemannov uvjet da bi ploha S bila pravčasta. Budući da sama činjenica da je ploha S pravčasta ne povlači da je i parametrizacija (3.19) pravčasta, zanima nas koji su nužni i dovoljni uvjeti da bi sama parametrizacija bila pravčasta. Jedan dovoljan uvjet je izravno poopćenje rezultata iz $\mathbb{M}^3$.

Teorem 3.3.3. *Neka je S svjetlosna ploha u $\mathbb{M}^4$ dana Weierstrassovom parametrizacijom $\mathbf{x} : U \to S$ s podacima (ρ, f, g). Ako su funkcije ρ, f i g holomorfne, onda je parametrizacija $\mathbf{x}$ pravčasta sa svjetlosnim izvodnicama.*

Dokaz. Ako su funkcije ρ, f i g holomorfne, iz jednakosti (3.21) i (3.22) slijedi da su funkcije

$\partial_z f_k$ holomorfne za sve $1 \leq k \leq 4$. No, tada iz jednakosti (3.20) i Cauchy-Riemannovih uvjeta za dualne funkcije slijedi da je $\partial_{vv} x_k = \partial_v \operatorname{Re} \partial_z f_k = 0$. Integriranjem dva puta po v dobivamo da je parametrizacija $\mathbf{x}$ oblika

$$\mathbf{x}(u,v) = c(u) + ve(u)$$

za neke funkcije $c, e : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{M}^4$. Budući da je parametrizacija $\mathbf{x}$ konformna, iz $G = 0$ slijedi da polje e mora biti svjetlosno. Dakle, ploha S je pravčasta sa svjetlosnim izvodnicama. ■

Ovaj uvjet je dovoljan, ali nije nužan. Čak ni uvjet da su funkcije $\partial_z f_k$ holomorfne (što se može postići i ako funkcije ρ, f, g nisu sve holomorfne) nije nužan.

Teorem 3.3.4. *Neka je S svjetlosna ploha u $\mathbb{M}^4$ dana Weierstrassovom parametrizacijom $\mathbf{x} : U \to S$ s podacima (ρ, f, g). Tada je parametrizacija $\mathbf{x}$ pravčasta ako i samo ako je*

$$\partial_v \operatorname{Re} \rho = \partial_v \operatorname{Re} f = \partial_v \operatorname{Re} g = 0.$$

Dokaz. Parametrizacija $\mathbf{x}$ je pravčasta ako i samo ako je $\mathbf{x}_{vv} = 0$, što je ekvivalentno

$$(\partial_v \rho_1)(1,-1,0,0) + (\partial_v(\rho_1 f_1))(f_1, f_1, \sqrt{2}, \sqrt{2})$$

$$+(\partial_v(\rho_1 g_1))(g_1, g_1, \sqrt{2}, -\sqrt{2}) + \frac{\rho_1}{2}(\partial_v(f_1^2 + g_1^2))(1,1,0,0) = 0,$$

gdje je $\rho_1 = \operatorname{Re} \rho$, $f_1 = \operatorname{Re} f$, $g_1 = \operatorname{Re} g$. Ovo je zbog linearne nezavisnosti dalje ekvivalentno

$$\partial_v \rho_1 = \partial_v(\rho_1 f_1) = \partial_v(\rho_1 g_1) = \frac{\rho_1}{2} \partial_v(f_1^2 + g_1^2) = 0.$$

Ako je parametrizacija $\mathbf{x}$ pravčasta, onda je i ploha S pravčasta, pa svakako mora biti

$$\partial_v f_1 = \partial_v g_1 = 0,$$

tj. funkcije f_1 i g_1 ovise samo o u. Sad vidimo da je dovoljno da i funkcija ρ_1 ovisi samo o u da bi vrijedile gornje jednakosti. Taj uvjet je i nužan jer je jedan od uvjeta $\partial_v \rho_1 = 0$. ■

U $\mathbb{M}^3$ su sve svjetlosne plohe potpuno umbiličke, pa posebno slijedi da je svjetlosna ploha u $\mathbb{M}^3$ minimalna ako i samo ako je potpuno umbilička. Zato bi jedan od načina poopćavanja pojma minimalne plohe bio da to budu potpuno umbiličke plohe (a ne one koje imaju netrivijalnu G-deformaciju). Međutim, tada ne bismo imali analogiju s činjenicom da maksimalne i minimalne vremenske plohe imaju familiju asociranih ploha (teoremi 1.3.27 i 1.3.29).

Nadalje, uočimo da ako uvrstimo $f = g$, što reducira Weierstrassovu parametrizaciju na $\mathbb{M}^3$, u jednakost (3.23), vidimo da je ona uvijek zadovoljena (za bilo koju funkciju), što je u skladu

s činjenicom da je u $\mathbb{M}^3$ svaka ploha minimalna. Iz teorema 3.3.2 slijedi i da je Gorkaviyeva definicija minimalne plohe u skladu s činjenicom da su minimalne plohe reprezentirane funkcijama koje ovise o samo jednoj varijabli (barem kad su u pitanju pravčaste plohe).
Još jedna definicija minimalne plohe je dana u [14], prema kojoj je polusvjetlosna ploha minimalna ako je $\varepsilon_1(\xi) = 0$ i $\operatorname{trace} h\,|_{S(TS)} = 0$. Ova definicija je analogon definicije minimalne hiperplohe dane u radu [5], prema kojoj je svjetlosna hiperploha S u $\mathbb{M}^n$ minimalna ako je $\operatorname{trace} II\,|_{S(TS)} = 0$. No, u $\mathbb{M}^3$ tu definiciju zadovoljavaju samo potpuno geodetske plohe (ravnine), tj. mora biti $II = 0$. Zanimljivo je da to pod određenim uvjetima vrijedi i za polusvjetlosne plohe. Imamo sljedeći rezultat iz [14], koji ćemo navesti bez dokaza. Pri tome koristimo gornju definiciju minimalne plohe.

Teorem 3.3.5. *Neka je S potpuno umbilička polusvjetlosna ploha u $\mathbb{M}^n$. Tada je ploha S minimalna ako i samo ako je potpuno geodetska.*
Ovo je zapravo poopćenje rezultata iz $\mathbb{M}^3$ jer su tamo sve svjetlosne plohe potpuno umbiličke. Općenito vrijedi sljedeći rezultat.

Teorem 3.3.6. *Svaka potpuno geodetska polusvjetlosna ploha u $\mathbb{M}^n$ je minimalna.*
Dokaz. Ako je ploha S potpuno geodetska, po definiciji je $h = 0$, odakle slijedi $D_1 = D_2 = 0$. Želimo pokazati da tada mora biti i $\varepsilon_1 = 0$.
Ako u jednakost (1.14) uvrstimo $Y = U$, $Z = \xi$, zbog $U \cdot \xi = 0$ dobivamo

$$\underbrace{\tilde{\nabla}_X(U \cdot \xi)}_{=0} = (\tilde{\nabla}_X U) \cdot \xi + U \cdot \tilde{\nabla}_X \xi,$$

odakle slijedi da je

$$\varepsilon_1(X) = (\tilde{\nabla}_X U) \cdot \xi = -U \cdot \tilde{\nabla}_X \xi = -D_2(X, \xi) = 0.$$

■

Mi ćemo dodati još jedan sličan rezultat, koji vrijedi samo u $\mathbb{M}^4$. Naime, zbog bilinearnosti preslikavanja h, uvjet $\operatorname{trace} h\,|_{S(TS)} = 0$ je ekvivalentan

$$\sum_{i=1}^{n-3} D_1(e_i, e_i) = \sum_{i=1}^{n-3} D_2(e_i, e_i) = 0,$$

gdje je $\{e_1, \ldots, e_{n-3}\}$ neka ortonormirana baza za svežanj $S(TS)$, što se za $n = 4$ reducira na

$$D_1(e_1, e_1) = D_2(e_1, e_1) = 0.$$

Teorem 3.3.7. *Neka je S regularna svjetlosna ploha u $\mathbb{M}^4$ takva da je njena inducirana koneksija metrička. Tada je ploha S minimalna ako i samo ako je potpuno geodetska.*

Dokaz. Jedan smjer slijedi iz prethodnog teorema, treba samo pokazati obrat.

Pretpostavimo da je ploha S minimalna. Budući da je inducirana koneksija plohe S metrička, odmah slijedi da je $D_1 = 0$. Nadalje, iz Gauss-Weingartenovih formula slijedi da je

$$\begin{aligned}\varepsilon_1(\xi) &= (\nabla_\xi U)\cdot\xi = (\tilde{\nabla}_\xi U - h(\xi,U))\cdot\xi \\ &= (\tilde{\nabla}_\xi U)\cdot\xi - h(\xi,U)\cdot\xi \\ &= \underbrace{D_1(\xi,U)}_{=0} - D_2(\xi,U)\underbrace{(U\cdot\xi)}_{=0} = 0\end{aligned}$$

Ranije smo pokazali da je $\varepsilon_1(X) = -D_2(X,\xi)$. Ako u to uvrstimo $X = \xi$, dobivamo

$$D_2(\xi,\xi) = -\varepsilon_1(\xi) = 0.$$

Ovo smo mogli dobiti i primjenom jednakosti (1.14) na $(\nabla_\xi \xi)\cdot U$ jer je sada koneksija ∇ metrička. Neka je e_1 glatko jedinično vektorsko polje takvo da je $S(TS) = [e_1]$. Budući da je ploha S minimalna, slijedi da je $D_2(e_1,e_1) = 0$. Nadalje, budući da je $\xi\cdot U = 0$ u parovima ortogonalna, iz jednakosti (1.14) slijedi da je

$$D_2(e_1,\xi) = (\tilde{\nabla}_{e_1}\xi)\cdot U = -(\tilde{\nabla}_{e_1}U)\cdot\xi = -D_1(e_1,U) = 0.$$

Kako je forma h simetrična, slijedi i da je $D_2(\xi,e_1) = 0$. No, kako polja e_1 i ξ razapinju svežanj TS i preslikavanje D_2 je bilinearno, sada slijedi da je $D_2 = 0$. Sada iz $D_1 = D_2 = 0$ slijedi $h = 0$, tj. ploha S je potpuno geodetska. ■

Za kraj ćemo navesti par primjera svjetlosnih ploha u $\mathbb{M}^4$ i izračunati njihove Weierstrassove podatke. Prvi primjer je ploha iz [14].

Primjer. Ploha u $\mathbb{M}^4$ dana implicitno jednadžbama $x_3 = h(x_2)$, $x_1 = x_4$ je pravčasta, tj. minimalna jer se može parametrizirati konformnom parametrizacijom

$$\mathbf{x}(u,v) = (0,u,h(u),0) + v(1,0,0,1).$$

Neka je X vektorsko polje koje razapinje svežanj $S(TS)$. Za ovu plohu se može izračunati da je $D_1 = 0$, $D_2(X,\xi) = D_2(\xi,\xi) = 0$ i $D_2(X,X) = h_2(X,X)$, gdje je

$$h_2(p) = \frac{h''(p_2)}{(1+(h'(p_2))^2)^2}.$$

Iz teorema 1.4.12 slijedi da je ta ploha potpuno umbilička i zbog $D_1 = 0$ njena inducirana koneksija je metrička. Ako odaberemo funkciju h tako da je $h'' \neq 0$, dobivamo pravu potpuno

umbiličku plohu (tj. plohu koja nije potpuno geodetska).

Za gornju parametrizaciju pripadni Weierstrassovi podaci su

$$\rho = \frac{1-\varepsilon}{2}, \quad f = \frac{1+\varepsilon(h'(u)+1)}{\sqrt{2}}, \quad g = \frac{-1+\varepsilon(h'(u)-1)}{\sqrt{2}}.$$

Vidimo da te funkcije ne ovise o v, što i treba biti prema teoremu 3.3.4.

Zatim slijedi zanimljiv primjer plohe koja nije minimalna ni potpuno umbilička, a dana je konformnom parametrizacijom.

Primjer. Za plohu u $\mathbb{M}^4$ danu parametrizacijom

$$\mathbf{x}(u,v) = (\operatorname{sh} v, \operatorname{ch} v, v\cos u, v\sin u)$$

vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u(u,v) &= (0,0,-v\sin u, v\cos u)\\
\mathbf{x}_v(u,v) &= (\operatorname{ch} v, \operatorname{sh} v, \cos u, \sin u)\\
\mathbf{x}_{uv}(u,v) &= (0,0,-\sin u, \cos u)\\
\mathbf{x}_{vv}(u,v) &= (\operatorname{sh} v, \operatorname{ch} v, 0, 0).
\end{aligned}$$

Vidimo da je parametrizacija konfomna (tj. $F = G = 0$) te da je skup $\{\mathbf{x}_v, \mathbf{x}_{uv}, \mathbf{x}_{vv}\}$ linearno nezavisan, odakle slijedi da ploha nije minimalna. Možemo uzeti $\xi = \mathbf{x}_v$ i $U = \mathbf{x}_{vv}$ (to polje zadovoljava sve uvjete iz konstrukcije) i tada je

$$D_2(\xi,\xi) = (\tilde{\nabla}_{\mathbf{x}_v}\mathbf{x}_v)\cdot\mathbf{x}_{vv} = \mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_{vv} = 1 \neq 0.$$

Ovdje smo primijenili lemu 2.3.3 (samo zamijenimo varijable u i v). Sada iz teorema 1.4.12 slijedi da ploha nije potpuno umbilička. Weierstrassovi podaci te parametrizacije su

$$\rho = \frac{\operatorname{ch} v - \operatorname{sh} v}{2}, \quad f = \frac{\cos u + \sin u + \varepsilon v(\cos u - \sin u)}{\sqrt{2}(\operatorname{ch} v - \operatorname{sh} v)}, \quad g = \frac{\cos u - \sin u - \varepsilon v(\cos u + \sin u)}{\sqrt{2}(\operatorname{ch} v - \operatorname{sh} v)}.$$

Može se provjeriti da je $(\partial_u \operatorname{Re} f)(\partial_v \operatorname{Re} g) \neq (\partial_u \operatorname{Re} g)(\partial_v \operatorname{Re} f)$.

Zadnji primjer je l-minimalna ploha koju dobijemo malom modifikacijom prethodnog primjera.

Primjer. Ploha u $\mathbb{M}^4$ dana parametrizacijom

$$\mathbf{x}(u,v) = (\operatorname{sh} v, \operatorname{ch} v, \cos u, \sin u) \tag{3.25}$$

je l-minimalna. U radu [15] je dana općenita konstrukcija l-minimalne translacijske plohe u $\mathbb{M}^n$, $n \geq 4$: odaberemo $q \in \{2,3,\ldots,n-2\}$ i rastavimo $\mathbb{M}^n = \mathbb{M}^q \oplus \mathbb{E}^{n-q}$, gdje je $\mathbb{M}^q$ potprostor

$x_{q+1} = x_{q+2} = \cdots = x_n = 0$, a $\mathbb{E}^{n-q}$ potprostor $x_1 = x_2 = \cdots = x_q = 0$. Zatim odaberemo bilo koju regularnu krivulju c_1 u potprostoru $\mathbb{M}^q$ koja nije dio svjetlosnog pravca i bilo koju regularnu krivulju c_2 u potprostoru $\mathbb{E}^{n-q}$. Tada je ploha

$$\mathbf{x}(u,v) = c_1(u) + c_2(v)$$

l-minimalna. Jedna familija netrivijalnih izometričnih G-deformacija plohe je generirana netrivijalnom izometričnom G-deformacijom krivulje (tj. 1-plohe) c_1 (ona čuva paralelnost tangenti na krivulju u odgovarajućim točkama), a krivulja c_2 je fiksna do na translacije. Ploha nije pravčasta jer krivulja c_1 nije dio svjetlosnog pravca.

Parametrizacija (3.25) nije konformna. Štoviše, uočimo da u $\mathbb{M}^4$ ne možemo imati parametrizaciju koja je translacijska i konformna. Naime, jedini način da rastavimo $\mathbb{M}^4$ na dva potprostora je $\mathbb{M}^2 \oplus \mathbb{E}^2$. No, da bi parametrizacija $\mathbf{x}$ bila konformna, krivulja c_1 mora biti svjetlosna, a jedina svjetlosna krivulja u ravnini je pravac.

U $\mathbb{M}^5 = \mathbb{M}^3 \oplus \mathbb{E}^2$ možemo dobiti translacijsku konformnu parametrizaciju ako za krivulju c_1 uzmemo npr. nul-zavojnicu

$$\gamma(s) = \left(\frac{s^3}{4} + \frac{s}{3}, \frac{s^2}{2}, \frac{s^3}{4} - \frac{s}{3}\right),$$

koja je primjer svjetlosne krivulje koja nije ravninska.

3.4. Weierstrassova parametrizacija za prostorne plohe u $\mathbb{M}^N$

U radu [21] dana je Weierstrassova parametrizacija za 2-plohe u $\mathbb{M}^N$. Metoda kojom se konstruira ta parametrizacija može se izravno primijeniti i u $\mathbb{M}^N$. Dobivamo različite parametrizacije ovisno o dimenziji N prostora.

Ideja je da koordinate podijelimo u blokove po tri ili četiri koordinate. Presjek plohe S u $\mathbb{M}^N$ i neke 3-ravnine (4-ravnine) je ploha u potprostoru $\mathbb{M}^3$ ili $\mathbb{E}^3$ ($\mathbb{M}^4$ ili $\mathbb{E}^4$), koju onda možemo parametrizirati Weierstrassovom parametrizacijom za plohe u $\mathbb{M}^3$ ili $\mathbb{E}^3$ ($\mathbb{M}^4$ ili $\mathbb{E}^4$). Ono što ideju čini dobrom jest činjenica da se koordinate mogu podijeliti u takve blokove za sve $N \neq 5$.

Propozicija 3.4.1. *Neka je $N \in \mathbb{N}$. Tada postoje $m, n \in \mathbb{N}_0$ takvi da je*

$$N = 3m + 4n$$

ako i samo ako je $N \neq 1, 2, 5$.

Dokaz. Za $N \in \{1, 2, \ldots, 6\}$ traženi prikaz postoji za $N = 3, 4, 6$ (jer je $6 = 3 + 3$), a ne postoji za $N = 1, 2, 5$. Ako je $N > 6$, prema teoremu o dijeljenju s ostatkom je $N = 6k + r$ za jedinstvene $k \in \mathbb{N}$ i $r \in \{0, 1, \ldots, 5\}$. Ako je $r = 0, 3, 4$, prikaz očito postoji, a ako je $r = 1, 2, 5$, napišemo N u obliku

$$N = 6(k-1) + 6 + r.$$

Tada je $k - 1 \in \mathbb{N}_0$, a $6 + r \in \{7, 8, 11\}$. No, svaki od ta tri broja se može prikazati kao linearna kombinacija 3 i 4 ovako: $7 = 3 + 4$, $8 = 4 + 4$, $11 = 3 + 4 \cdot 2$. ■

Particioniranjem koordinata na blokove zapravo rastavljamo prostor $\mathbb{M}^N$ u ortogonalnu sumu trodimenzionalnih i/ili četverodimenzionalnih potprostora, npr. $\mathbb{M}^6 = \mathbb{M}^3 \oplus \mathbb{E}^3$, $\mathbb{M}^7 = \mathbb{M}^3 \oplus \mathbb{E}^4 = \mathbb{M}^4 \oplus \mathbb{E}^3$. Rastav nije jedinstven, čak i ako su veličine blokova jedinstvene. Možemo po dogovoru uzeti da zadnji blok uvijek bude $\mathbb{E}^4$ (ako je moguće) tako da redukcijom tog bloka na $\mathbb{E}^3$ možemo reducirati čitavu parametrizaciju na $\mathbb{M}^{N-1}$ uz $x_N = const$. Veličine blokova su jedinstvene do $N = 11$. Kako je $N = 12 = 3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$, možemo particionirati na tri bloka po četiri koordinate ili na četiri bloka po tri koordinate. Ako duljine blokova nisu jedinstvene, možemo ih birati tako da nam treba što manje funkcija za parametrizaciju plohe.

Budući da pseudometrika Minkowskog ima negativan predznak samo za prvu koordinatu, samo jedan potprostor u dekompoziciji je potprostor Minkowskog, a svi ostali su euklidski. Zato

nam za te blokove treba Weierstrassova parametrizacija za plohe u $\mathbb{E}^3$ i $\mathbb{E}^4$ ([21]). Nećemo ih zasebno navoditi, nego ćemo ih vidjeti kroz primjere.

Primjer. (prostorne plohe u $\mathbb{M}^6$, I) Ako su $s_1, t_1, s_2, t_2 : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funkcije takve da je

$$\begin{aligned}
\partial_z t_1 &= p_1 s_1 \\
\partial_{\bar{z}} s_1 &= p_1 t_1 \\
\partial_z t_2 &= p_2 s_2 \\
\partial_z s_2 &= -p_2 t_2,
\end{aligned}$$

onda je formulama

$$\begin{aligned}
x_1(u,v) &= \int s_1 \overline{t_1}\, dz + \overline{s_1} t_1\, d\bar{z} \\
x_2(u,v) &= \frac{1}{2} \int (s_1^2 + \overline{t_1}^2)\, dz + (\overline{s_1}^2 + t_1^2)\, d\bar{z} \\
x_3(u,v) &= \frac{1}{2i} \int (s_1^2 - \overline{t_1}^2)\, dz + (-\overline{s_1}^2 + t_1^2)\, d\bar{z} \\
x_4(u,v) &= \frac{i}{2} \int (s_2^2 + \overline{t_2}^2)\, dz - (\overline{s_2}^2 + t_2^2)\, d\bar{z} \\
x_5(u,v) &= \frac{1}{2} \int (-s_2^2 + \overline{t_2}^2)\, dz + (\overline{s_2}^2 - t_2^2)\, d\bar{z} \\
x_6(u,v) &= -\int s_2 \overline{t_2}\, dz + \overline{s_2} t_2\, d\bar{z}
\end{aligned}$$

dana konformna parametrizacija $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{M}^6$, čiji je metrički tenzor

$$ds^2 = (u_1^2 + u_2^2)\, dz d\bar{z},$$

gdje je $u_1 = |s_1|^2 - |t_1|^2$ i $u_2 = |s_2|^2 + |t_2|^2$. Ovdje smo napravili dekompoziciju $\mathbb{M}^6 = \mathbb{M}^3 \oplus \mathbb{E}^3$ i prve tri komponente $\mathbf{x}_1 = (x_1, x_2, x_3)$ su formule (2.8), a zadnje tri $\mathbf{x}_2 = (x_4, x_5, x_6)$ su Weierstrassova parametrizacija za plohe u $\mathbb{E}^3$ iz [21].

Općenito, ako je S regularna prostorna ploha u $\mathbb{M}^n$ i ako smo napravili dekompoziciju

$$\mathbb{M}^n = \mathbb{M}^{n_1} \oplus \mathbb{E}^{n_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{E}^{n_k},$$

gdje su $n_j \in \{3,4\}$ i $n_1 + \cdots + n_k = n$, onda su u koordinatama (u,v) uvjeti konformnosti za parametrizaciju $\mathbf{x}_j : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^{n_j}$, koja parametrizira j-ti blok, $E_j = G_j = \lambda_j$ i $F_j = 0$. No, tada za parametrizaciju $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k) = (x_1, \ldots, x_N) : U \to S$ imamo da je

$$E = \sum_{j=1}^{k} E_j = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j, \quad F = \sum_{j=1}^{k} F_j = 0, \quad G = \sum_{j=1}^{k} G_j = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j.$$

Dakle, parametrizacija $\mathbf{x}$ je konformna (jer je $E = G$). Uočimo da prema teoremu 1.3.19 ploha S ima parametrizaciju $\mathbf{x} : U \to S$ takvu da je $E = G$ i $F = 0$, ali ne mora biti po blokovima $E_j = G_j$ i $F_j = 0$. Zato se ideja da particioniramo koordinate u blokove ne može primijeniti na svaku konformnu parametrizaciju.

Uočimo da ako je ploha S vremenska ili svjetlosna, onda uvjeti konformnosti za blok $\mathbf{x}_1$ nisu isti kao u euklidskom prostoru u koordinatama (u,v). Dakle, tada parametrizacija konstruirana podjelom na blokove neće biti konformna. U koordinatama $(z,\bar{z})$ sve plohe imaju iste uvjete konformnosti $E = G = 0$ i $F = \dfrac{\lambda}{2}$. Međutim, za različite blokove imamo različite reparametrizacije u koordinate $(z,\bar{z})$ (za prvi blok koristimo hiperboličke ili dualne varijable, a za ostale kompleksne), što znači da parametrizacija $\tilde{\mathbf{x}}(z,\bar{z})$ neće biti reparametrizacija parametrizacije $\mathbf{x}(u,v)$ (tj. one neće parametrizirati isti skup točaka). Naime, reparametrizacija mora biti oblika

$$\tilde{\mathbf{x}}(z,\bar{z}) = (\mathbf{x} \circ \varphi)(z,\bar{z}),$$

gdje je φ glatki difeomorfizam otvorenih skupova u $\mathbb{R}^2$. Dakle, mora biti isti difeomorfizam za sve komponentne funkcije, npr.

$$\varphi(z,\bar{z}) = \left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2i}\right),$$

što se može koristiti samo za prostorne plohe.

Uočimo da se broj funkcija koje koristimo može smanjiti tako da koristimo ista rješenja Diracovog sustava za generiranje više blokova. Na primjer, u $\mathbb{M}^{10}$ sada možemo uz (s_2,t_2) uzeti još jedno linearno nezavisno rješenje (s_3,t_3) sustava

$$\partial_z t = p_2 s$$
$$\partial_{\bar{z}} = -p_2 s,$$

i onda generirati blok $\mathbf{x}_3 = (x_7,x_8,x_9,x_{10})$ pomoću Weierstrassove formule za plohe u $\mathbb{E}^4$. Takva parametrizacija ima metrički tenzor

$$ds^2 = (u_1^2 + u_2^2 + u_2 u_3)\, dz d\bar{z},$$

gdje je $u_3 = |s_3|^2 + |s_4|^2$. Na taj način općenito dobivamo metrički tenzor oblika

$$ds^2 = \left(\tilde{u}^2 + \sum_{\alpha} u_\alpha^2 + \sum_{\alpha \neq \beta} u_\alpha u_\beta\right) dz d\bar{z},$$

gdje je $\tilde{u}^2$ konformni faktor koji dolazi od potprostora Minkowskog $\mathbb{M}^3$ ili $\mathbb{M}^4$, a ostatak od euklidskih potprostora u dekompoziciji. Može li se na taj način parametrizirati svaka ploha je

otvoreno pitanje jer dobivamo isti problem kao kod formula za vremenske plohe u $\mathbb{M}^3$ i $\mathbb{M}^4$, gdje općenito ne mora biti $p = q$, tj. funkcije p_j ne moraju biti sve jednake.

Međutim, možemo parametrizirati svaku prostornu plohu ako za različite blokove $\mathbf{x}_j$ koristimo rješenja Diracovog sustava za različite funkcije p_j. Naime, presjek plohe S i j-tog potprostora je 2-ploha S_j u trodimenzionalnom ili četverodimenzionalnom prostoru, pa onda postoji konformna parametrizacija $\mathbf{x}_j : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to S_j$ (opet prema teoremu 1.3.19). Plohu S_j parametriziramo pomoću Weierstrassovih podataka za funkcije p_j i onda će parametrizacija $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_k)$ plohe S biti konformna. Formulu McNertney također možemo poopćiti na plohe u $\mathbb{M}^n$ koristeći istu metodu.

Primjer. (prostorne plohe u $\mathbb{M}^6$, II) Neka su $f_1, g_1, f_2, g_2 : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ funkcije kojima su realni i imaginarni dio klase C^∞. Tada je formulama

$$\begin{aligned}
x_1(u,v) &= \operatorname{Re} \int f_1 g_1 \, dz \\
x_2(u,v) &= \operatorname{Re} \int \frac{f_1}{2}(1+g_1^2)\, dz \\
x_3(u,v) &= \operatorname{Re} \int \frac{i f_1}{2}(1-g_1^2)\, dz \\
x_4(u,v) &= \operatorname{Re} \int \frac{f_2}{2}(1-g_2^2)\, dz \\
x_5(u,v) &= \operatorname{Re} \int \frac{i f_2}{2}(1+g_2^2)\, dz \\
x_6(u,v) &= \operatorname{Re} \int f_2 g_2 \, dz
\end{aligned}$$

dana konformna parametrizacija $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{M}^6$, koja je poopćenje formule McNertney. Blok $\mathbf{x}_1 = (x_1, x_2, x_3)$ je parametrizacija (2.1), a blok $\mathbf{x} = (x_4, x_5, x_6)$ je euklidski analogon, tj. izvorna Weierstrass-Enneperova parametrizacija.

Primjer. (maksimalne plohe u $\mathbb{M}^8$) Neka su $s_k, t_k : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, $1 \leq k \leq 4$ funkcije takve da

$$\partial_z t_k = \partial_{\bar{z}} s_k = 0.$$

Tada je formulama

$$\begin{aligned}
x_1(u,v) &= \frac{1}{2}\int (s_1\overline{t_1} + s_2\overline{t_2})\, dz + (\overline{s_1}t_1 + \overline{s_2}t_2)\, d\bar{z} \\
x_2(u,v) &= \frac{1}{2}\int (s_1\overline{t_2} + s_2\overline{t_1})\, dz + (\overline{s_2}t_1 + \overline{s_1}t_2)\, d\bar{z} \\
x_3(u,v) &= \frac{1}{2i}\int (s_1\overline{t_2} - s_2\overline{t_1})\, dz + (\overline{s_2}t_1 - \overline{s_1}t_2)\, d\bar{z} \\
x_4(u,v) &= \frac{1}{2}\int (s_1\overline{t_1} - s_2\overline{t_2})\, dz + (\overline{s_1}t_1 - \overline{s_2}t_2)\, d\bar{z}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_5(u,v) &= \frac{i}{2}\int (\overline{t_3t_4}+s_3s_4)\,dz-(t_3t_4+\overline{s_3s_4})\,d\overline{z}\\
x_6(u,v) &= \frac{1}{2}\int (\overline{t_3t_4}-s_3s_4)\,dz-(t_3t_4-\overline{s_3s_4})\,d\overline{z}\\
x_7(u,v) &= -\frac{1}{2}\int (\overline{t_3}s_4+\overline{t_4}s_3)\,dz+(t_3\overline{s_4}+t_4\overline{s_3})\,d\overline{z}\\
x_8(u,v) &= \frac{i}{2}\int (\overline{t_3}s_4-\overline{t_4}s_3)\,dz-(t_3\overline{s_4}-t_4\overline{s_3})\,d\overline{z}
\end{aligned}
$$

dana konformna parametrizacija $\mathbf{x}: U\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{M}^8$, koja je poopćenje Konopelchenkove formule. Ploha $S=\mathbf{x}(U)$ je maksimalna. Prve četiri komponente su parametrizacija (3.5), a preostale četiri komponente su euklidski analogon iz [21]. Ako uvrstimo $s_3=s_4$ i $t_3=t_4$, dobivamo parametrizaciju za maksimalne plohe u $\mathbb{M}^7$ uz $x_8=const$. Ako želimo parametrizaciju dalje reducirati na $\mathbb{M}^6$, jedini način je da uvrstimo $s_1=\overline{t_2}$ i $t_1=\overline{s_2}$ pa da bude $x_4=const.$, tj. ne možemo postići da bude $x_7=const$.

U prošlom primjeru redukcijom na $\mathbb{M}^7$ dobijemo formulu koja odgovara rastavu $\mathbb{M}^7=\mathbb{M}^4\oplus\mathbb{E}^3$. Možemo konstruirati i reprezentaciju tako da rastavimo $\mathbb{M}^7=\mathbb{M}^3\oplus\mathbb{E}^4$.

Primjer. (maksimalne plohe u $\mathbb{M}^7$) Neka su $s_k,t_k: U\subseteq\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $1\le k\le 3$ funkcije takve da

$$\partial_z t_k=\partial_{\overline{z}}s_k=0.$$

Tada je formulama

$$
\begin{aligned}
x_1(u,v) &= \int s_1\overline{t_1}\,dz+\overline{s_1}t_1\,d\overline{z}\\
x_2(u,v) &= \frac{1}{2}\int (s_1^2+\overline{t_1}^2)\,dz+(\overline{s_1}^2+t_1^2)\,d\overline{z}\\
x_3(u,v) &= \frac{1}{2i}\int (s_1^2-\overline{t_1}^2)\,dz+(-\overline{s_1}^2+t_1^2)\,d\overline{z}\\
x_4(u,v) &= \frac{i}{2}\int (\overline{t_2t_3}+s_2s_3)\,dz-(t_2t_3+\overline{s_2s_3})\,d\overline{z}\\
x_5(u,v) &= \frac{1}{2}\int (\overline{t_2t_3}-s_2s_3)\,dz-(t_2t_3-\overline{s_2s_3})\,d\overline{z}\\
x_6(u,v) &= -\frac{1}{2}\int (\overline{t_2}s_3+\overline{t_3}s_2)\,dz+(t_2\overline{s_3}+t_3\overline{s_2})\,d\overline{z}\\
x_7(u,v) &= \frac{i}{2}\int (\overline{t_2}s_3-\overline{t_3}s_2)\,dz-(t_2\overline{s_3}-t_3\overline{s_2})\,d\overline{z}
\end{aligned}
$$

dana konformna parametrizacija $\mathbf{x}: U\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{M}^7$. Ploha $S=\mathbf{x}(U)$ je maksimalna. Ova parametrizacija može se reducirati na $\mathbb{M}^6$ tako da bude $x_7=const$. ako uvrstimo $s_2=s_3$ i $t_2=t_3$.

Metodom koju smo opisali ne može se konstruirati Weierstrassova reprezentacijska formula za prostorne plohe u $\mathbb{M}^5$, što ne znači da ne postoji, nego je to otvoren problem i potreban je drugačiji pristup.

Budući da je $\mathbb{M}^6 = \mathbb{M}^3 \oplus \mathbb{E}^3$ i $\mathbb{M}^9 = \mathbb{M}^3 \oplus \mathbb{E}^3 \oplus \mathbb{E}^3$ i to su jedinstveni rastavi, reprezentacije za plohe u $\mathbb{M}^6$ i $\mathbb{M}^9$ ne mogu se reducirati na nižu dimenziju. Za sve ostale dimenzije se mogu jer za $N = 7, 8$ smo vidjeli u primjerima, a za $N \geq 10$ je $N - 4 \geq 6$, pa možemo zadnji blok uzeti da bude $\mathbb{E}^4$ i onda rastavimo $N - 4 = 3m + 4n$. Redukcija se ne može napraviti više puta zaredom jer kad napravimo jednom, zadnji blok se pretvori u $\mathbb{E}^3$ i dalje ga ne možemo smanjiti (da bude $x_{N-1} = const.$ i $x_N = const.$), nego moramo drugačije rasporediti blokove.

Za kraj ćemo još navesti jednu jednostavnu primjenu Weierstrassove reprezentacije u geometriji. Ta parametrizacija se može koristiti za generiranje ploha koje imaju unaprijed zadanu srednju zakrivljenost. Na primjer, ako želimo generirati prostornu plohu u $\mathbb{M}^3$ koja ima srednju zakrivljenost $H = 1$, možemo dodatno pretpostaviti da je recimo $\lambda = 4$ i onda je dovoljno pogoditi bilo koje funkcije s i t koje zadovoljavaju sustav (2.7) za $p = 1$. Jedan takav primjer smo dali za vremenske plohe u $\mathbb{M}^4$.

Ako za neki potencijal p možemo riješiti pripadni Diracov sustav, onda možemo generirati čitavu klasu ploha koji imaju unaprijed zadanu srednju zakrivljenost. Mi ćemo navesti jedan primjer za koji nam treba Fourierova pretvorba ([3]). Fourierova pretvorba funkcije $f(x_1, \ldots, x_n)$ je funkcija $\hat{f}(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ dana formulom

$$\hat{f}(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n)) e^{-i(x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n)} \, dx_1 \cdots dx_n.$$

S druge strane, inverzna Fourierova pretvorba funkcije $F(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ je funkcija $\check{F}(x_1, \ldots, x_n)$ dana formulom

$$\check{F}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^n} F(\xi_1, \ldots, \xi_n) e^{i(x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n)} \, d\xi_1 \cdots d\xi_n.$$

Ova dva operatora se poništavaju, tj. $\check{\hat{f}} = f$. Oba operatora su linearna i imaju mnoga svojstva, od kojih nama trebaju samo

$$\widehat{\partial_{x_j} f} = i\xi_j \hat{f}, \quad (x_j f)^\wedge = i\partial_{\xi_j} \hat{f}.$$

Pomoću Furierove pretvorbe možemo neke parcijalne diferencijalne jednadžbe pretvoriti u jednostavnije jednadžbe koje se potom mogu riješiti elementarnim metodama.

Primjer. Nađimo sve vremenske konformne parametrizacije $\mathbf{x} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{M}^3$ za koje je

$$H^2 \lambda = 4v,$$

gdje je λ konformni faktor parametrizacije $\mathbf{x}$ i H srednja zakrivljenost plohe $S = \mathbf{x}(U)$. Ako to usporedimo s formulom za srednju zakrivljenost, vidimo da trebamo riješiti sustav jednadžbi

(2.14) za $p = \sqrt{v}$.

Prvo rješavamo sustav

$$\partial_u t_2 = -\sqrt{v} s_1$$
$$\partial_v s_1 = \sqrt{v} t_2.$$

Trebamo eliminirati jednu nepoznanicu, pa deriviramo lijevu i desnu stranu druge jednadžbe po u i dobivamo

$$\partial_u \partial_v s_1 = \sqrt{v} \partial_u t_2$$
$$\partial_u \partial_v s_1 = -v s_1$$

Sada možemo primijeniti Fourierovu pretvorbu na obje strane jednadžbe i dobivamo

$$i\xi \widehat{\partial_v s_1} = -i\partial_\xi \widehat{s_1}$$
$$-\xi\eta \widehat{s_1} = -i\partial_\xi \widehat{s_1}$$

Ova jednadžba je separabilna ODE. Separiranjem varijabli dobivamo

$$\xi\eta \widehat{s_1} = i\frac{\partial \widehat{s_1}}{\partial \xi}$$
$$\eta\xi\partial\xi = i\frac{\partial \widehat{s_1}}{\widehat{s_1}}.$$

Zatim integriranjem lijeve i desne strane jednadžbe dobivamo

$$\eta \cdot \frac{\xi^2}{2} + C_1(\eta) = i \ln \widehat{s_1}$$
$$\ln \widehat{s_1} = -\frac{i}{2}\xi^2\eta - iC_1(\eta)$$
$$\widehat{s_1} = \exp\left(-\frac{i}{2}\xi^2\eta - iC_1(\eta)\right),$$

gdje je C_1 glatka funkcija jedne varijable po volji. Sada funkciju s_1 dobijemo primjenom inverzne Fourierove transformacije, tj.

$$s_1(u,v) = \left(\exp\left(-\frac{i}{2}\xi^2\eta - iC_1(\eta)\right)\right)^\vee.$$

Ovo rješenje ne možemo općenito izračunati pomoću elementarnih funkcija jer to ovisi o tome kakvu funkciju C_1 biramo (postoji tablica Fourierovih transformacija za neke funkcije). Zatim

$$t_2 = \frac{\partial_v s_1}{\sqrt{v}} = \frac{1}{\sqrt{v}}\partial_v\left[\left(\exp\left(-\frac{i}{2}\xi^2\eta - iC_1(\eta)\right)\right)^\vee\right].$$

Još trebamo riješiti sustav

$$\partial_u s_2 = \sqrt{v} t_1$$
$$\partial_v t_1 = -\sqrt{v} s_2.$$

Koristimo istu metodu i dobivamo da je

$$t_1(u,v) = \left(\exp\left(-\frac{i}{2}\xi^2\eta - iC_2(\eta)\right)\right)^{\vee}$$
$$s_2(u,v) = -\frac{\partial_v t_1}{\sqrt{v}} = -\frac{1}{\sqrt{v}}\partial_v\left[\left(\exp\left(-\frac{i}{2}\xi^2\eta - iC_2(\eta)\right)\right)^{\vee}\right],$$

gdje je C_2 glatka funkcija jedne varijable po volji. I sada su sve takve parametrizacije $\mathbf{x}$ dane formulama (2.15) za funkcije (s_1, t_1, s_2, t_2) koje smo dobili kao rješenja sustava.

4. MAKSIMALNE I MINIMALNE PLOHE U TEORIJI RELATIVNOSTI

4.1. PROSTOR-VRIJEME I CRNE RUPE

U teoriji relativnosti svemir je četverodimenzionalni ambijent koji zovemo prostor-vrijeme. Svaka točka u njemu ima četiri koordinate (t,x,y,z), gdje je t vrijeme, a (x,y,z) položaj točke u prostoru. Drugim riječima, na vrijeme se gleda kao na četvrtu dimenziju i događaji se kronološki odvijaju kako t raste. Za fiksirani t, pripadni trodimenzionalni (euklidski) potprostor je svemir u trenutku t. Teorija relativnosti proučava geometriju svemira.

U prostor-vremenu možemo izabrati koordinatni sustav tako da točka $(0,0,0,0)$ bude trenutak velikog praska (prema teoriji velikog praska tada je čitav svemir bio sadržan u jednoj točki) i onda ima smisla promatrati samo potprostor $t > 0$. Međutim, možemo i promijeniti koordinatni sustav tako da u središtu bude neki promatrač. Tada za $t < 0$ dobivamo događaje u prošlosti, a za $t > 0$ u budućnosti. Poprostor $t = 0$ je svemir u sadašnjem trenutku. Za svakog promatrača pripadni odabrani koordinatni sustav zovemo referentni sustav. Inercijalni referentni sustavi su oni u kojima vrijedi prvi Newtonov zakon. Svaka takva dva sustava se gibaju jedan u odnosu na drugi konstantnom brzinom.

U fizici je prije otkrića teorije relativnosti više od dva stoljeća bila općeprihvaćena Newtonova klasična mehanika, prema kojoj je prostor-vrijeme euklidski prostor $\mathbb{E}^4$, a promjene koordinata između inercijalnih referentnih sustava su tzv. Galilejeve transformacije ([4]), afine transformacije koje čuvaju euklidsku metriku. Problemi s tom teorijom su nastali kad je nastala Maxwellova elektrodinamika. Naime, fizika se zasniva na principu relativnosti: zakoni fizike ne ovise o izboru inercijalnog referentnog sustava. Međutim, Galilejeve transformacije ne ču-

vaju Maxwellove jednadžbe.
Taj problem će riješiti Albert Einstein u svom članku objavljenom u *Annalen der Physik* 1905. godine. Ispostavit će se da je Maxwellova teorija ispravna bez ograničenja, a Newtonova teorija je ispravna samo za male brzine u odnosu na brzinu svjetlosti. Einsteinova teorija relativnosti je mnogo puta potvrđena eksperimentalno i smatra se temeljem moderne fizike.
Već se i prije Einsteinovog otkrića znalo da Maxwellove jednadžbe čuvaju tzv. Lorentzove transformacije koordinata. Einstein je u svom radu dao dva aksioma na kojima se temelji njegova specijalna teorija relativnosti.

1. Zakoni fizike ne ovise o izboru inercijalnog referentnog sustava.

2. U svakom inercijalnom referentnom sustavu brzina svjetlosti u vakuumu je c.

Drugi aksiom je novost u odnosu na Newtonovu teoriju. Sada ćemo pokazati da iz ova dva aksioma slijedi da transformacije koordinata pri promjeni inercijalnog referentnog sustava moraju biti Lorentzove transformacije. Koristimo izvod iz skripte [4].
Neka su (t,x,y,z) i $(\tilde{t},\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ koordinate u starom i novom inercijalnom referentnom sustavu. Pretpostavimo da sustavi imaju paralelne koordinatne osi te da im se u trenutku $t=\tilde{t}=0$ ishodišta podudaraju. Radi jednostavnosti, a bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da se, kako vrijeme prolazi, novi sustav kreće u odnosu na stari duž pozitivnog dijela x-osi konstantnom brzinom v. Pretpostavimo da se u ishodištu starog sustava nalazi izvor svjetlosti (koji se onda giba duž $\tilde{x}$-osi brzinom $-v$ u odnosu na novi sustav).
Iz prvog aksioma slijedi da se u oba referentna sustava val svjetlosti širi jednako u svim smjerovima kako vrijeme prolazi, dakle u obliku sfere, a iz drugog aksioma slijedi da se u oba sustava val širi istom brzinom. Ako je u trenutku t, odnosno $\tilde{t}$ svjetlosni val došao u točku (x,y,z), odnosno $(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$, mora biti

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2 &= c^2t^2 \\ \tilde{x}^2+\tilde{y}^2+\tilde{z}^2 &= c^2\tilde{t}^2. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Vidimo da Galilejeve transformacije $\tilde{x}=x-vt$, $\tilde{y}=y$, $\tilde{z}=z$, $\tilde{t}=t$ ne zadovoljavaju te jednadžbe.
Iz prvog aksioma slijedi da su prostor i vrijeme homogeni i izotropni, odakle slijedi da veza između starih i novih koordinata mora biti afina. Dakle, mora biti

$$\tilde{x}=a_1x+a_2t,\quad \tilde{y}=y,\quad \tilde{z}=z,\quad \tilde{t}=b_1t+b_2x$$

jer je brzina usmjerena u smjeru x-osi. Pri tome su a_k i b_k funkcije varijable v, tj. ne ovise o točki koordinatnog sustava. Budući da je Newtonova teorija potvrđena eksperimentalno za male brzine, za $v \to 0$ moramo dobiti Galilejeve transformacije, tj. mora biti

$$a_1(0) = b_1(0) = 1, \;\; a_2(0) = b_2(0) = 0.$$

Budući da se ishodište $\tilde{O}$ novog sustava giba u odnosu na ishodište O starog sustava duž x-osi, mora biti $\tilde{x} = vt$. Kako u novom sustavu ishodište $\tilde{O}$ ima sve koordinate 0, mora biti

$$0 = a_1 vt + a_2 t \Rightarrow a_2 = -a_1 v,$$

pa općenito za bilo koju točku (ne nužno $\tilde{O}$) imamo da je

$$\tilde{x} = a_1(x - vt).$$

Ako to uvrstimo u drugu jednadžbu u (4.1), dobivamo

$$a_1^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = c^2(b_1 t + b_2 x)^2.$$

Ako od toga oduzmemo prvu jednadžbu, dobivamo

$$\begin{aligned} a_1^2(x - vt)^2 - x^2 &= c^2(b_1 t + b_2 x)^2 - c^2 t^2 \\ (a_1^2 - 1)x^2 - 2a_1^2 xvt + a_1^2 v^2 t^2 &= c^2(b_1^2 - 1)t^2 + 2c^2 b_1 b_2 tx + c^2 b_2^2 x^2 \end{aligned}$$

Kako to mora vrijediti za sve $x, t \in \mathbb{R}$, slijedi da je

$$\begin{aligned} a_1^2 - 1 &= c^2 b_2^2 \\ -2a_1^2 v &= 2c^2 b_1 b_2 \\ a_1^2 v^2 &= c^2(b_1^2 - 1) \end{aligned}$$

Ako iz prve i treće jednadžbe izrazimo b_1^2 i b_2^2, kvadriramo drugu jednadžbu i uvrstimo, imamo

$$\begin{aligned} a_1^4 v^2 &= (a_1^2 - 1)(a_1^2 v^2 + c^2) \\ a_1^4 v^2 &= a_1^4 v^2 + a_1^2 c^2 - a_1^2 v^2 - c^2 \\ c^2 &= a_1^2(c^2 - v^2) \\ a_1^2 &= \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \end{aligned}$$

Iz toga zbog početnih uvjeta slijedi

$$a_1 = b_1 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad b_2 = -\frac{v}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Time smo dobili $\tilde{x} = \gamma(x - vt)$, $\tilde{y} = y$, $\tilde{z} = z$, $\tilde{t} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$, gdje je $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$, što su upravo Lorentzove transformacije.

Jedna od najvažnijih posljedica Lorentzovih transformacija jest da se ništa u prirodi ne može gibati brže od svjetlosti. Naime, kako su koordinate realni brojevi, izraz pod korijenom mora biti strogo veći od 0, odakle slijedi da je $v < c$.

Druga posljedica je da, za razliku od Newtonove mehanike, vrijeme više nije apsolutno, tj. ne prolazi u svim inercijalnim sustavima jednakom brzinom. Kako v raste, tako se vremenski interval povećava, što zovemo dilatacija vremena. Nadalje, kako v raste, prostorne koordinate (u našem slučaju samo $\tilde{x}$) se smanjuju, što zovemo kontrakcija duljine.

Pokažimo sada da Lorentzove transformacije čuvaju pseudometriku Minkowskog. Ako je (t, x, y, z) točka u starom inercijalnom sustavu, onda je

$$\begin{aligned}
-(c\tilde{t})^2 + \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 &= -c^2\gamma^2\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)^2 + \gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 \\
&= -\gamma^2\left(ct - \frac{v}{c}x\right)^2 + \gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 \\
&= \gamma^2(-c^2 + v^2)t^2 + \gamma^2(2tvx - 2xvt) + \gamma^2\left(-\frac{v^2}{c^2} + 1\right)^2 x^2 + y^2 + z^2 \\
&= \frac{c^2}{c^2 - v^2}(-c^2 + v^2)t^2 + \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}\left(-\frac{v^2}{c^2} + 1\right)x^2 + y^2 + z^2 \\
&= -(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2
\end{aligned}$$

Iz toga zaključujemo da ambijentalni prostor koji zadovoljava aksiome specijalne teorije relativnosti ima geometriju Minkowskog, tj. radi se o prostoru $\mathbb{M}^4$.

Prostor-vrijeme je prostor Minkowskog samo uz pretpostavku da je njegova zakrivljenost 0 (više o zakrivljenosti u [27]), što ne mora biti. Zato je Einstein popravio svoju teoriju i 1915. godine u *Annalen der Physik* objavio tzv. Einstenove jednadžbe polja, sustav diferencijalnih jednadžbi drugog reda koji metrički tenzor prostor-vremena mora zadovoljavati, a koje uzimaju u obzir i zakrivljenost prostora. Lorentzov metrički tenzor

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

je najjednostavniji tenzor koji zadovoljava Einsteinove jednadžbe. Prvo egzaktno rješenje Einsteinove jednadžbe koje nema zakrivljenost 0 dao je 1916. godine Karl Schwarzschild i radi se o metričkom tenzoru

$$ds^2 = -c^2\left(1-\frac{r_s}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{r_s}{r}\right)^{-1}dr + r^2\,d\theta^2 + (r^2\sin\theta)\,d\varphi^2,$$

gdje su (t,r,θ,φ) tzv. sferne koordinate, tj. $x = r\cos\varphi\sin\theta$, $y = \sin\varphi\sin\theta$, $z = r\cos\theta$. Schwarzschildov prostor je najjednostavniji model prostor-vremena koji sadrži crnu rupu.

Crna rupa je dio prostor-vremena u kojemu je gravitacija toliko jaka da ništa što uđe u taj dio svemira više ne može izaći iz njega, čak ni svjetlost. Ako bacimo neko tijelo okomito prema gore s površine Zemlje, nakon nekog vremena će tijelo pod utjecajem gravitacije pasti natrag na Zemlju. Međutim, ako je početna brzina dovoljno velika (npr. ispaljivanje rakete u svemir), onda će tijelo uspijeti izaći iz gravitacijskog polja Zemlje i neće pasti na tlo. Ako tijelo uđe u crnu rupu, da bi izašlo iz nje, potrebna mu je beskonačna početna brzina, što se ne može postići jer brzina ne može biti veća od c.

Crna rupa nije fizički objekt, nego prazan dio prostora koji eventualno sadrži neka tijela koja stvaraju gravitacijsko polje. Naziv crna rupa dolazi od činjenice da izvana taj dio prostora izgleda kao apsolutno crno tijelo jer svjetlost ne može izaći iz njega. Vanjski rub crne rupe, tj. hiperplohu koja ju okružuje, zovemo horizont događaja. Kad tijelo izvan crne rupe prođe kroz horizont događaja, više se ne može vratiti na drugu stranu. Horizont događaja sam po sebi nije fizička barijera i tijelo koje je ušlo u crnu rupu zapravo nema saznanja da je prešlo taj rub.

Prostor-vrijeme sadrži crnu rupu ako pripadna pseudometrika ima singularitet. Prostor Minkowskog je primjer prostor-vremena bez crne rupe. Schwarzschildova pseudometrika ima singularitet u točkama $r = r_s$, ali to je samo singularitet vezan uz izbor koordinata i može se ukloniti promjenom koordinata. Pravi singularitet samog prostora se postiže za $r = 0$.

Schwarzschildov prostor sadrži jednu crnu rupu u središtu svemira koja je sfernog oblika polumjera r_s (tzv. Schwarzschildov polumjer). Gravitacija nastaje pod utjecajem materijalne točke mase m koja se nalazi u ishodišu te je $r_s = \dfrac{2Gm}{c^2}$, gdje je G univerzalna gravitacijska konstanta. Horizont događaja u Schwarzschildovom prostoru je sfera $r = r_s$ (odnosno cilindar nad sferom ako uzmemo u obzir i vremensku koordinatu). Za $r = +\infty$ dobivamo pseudometriku Minkowskog u sfernim koordinatama. Dakle, pseudometrika Minkowskog aproksimira Schwarzschildovu pseudometriku za velike r.

Sada ćemo pokazati da Schwarzschildova metrika zadovoljava Netwonov zakon gravitacije, ali nećemo općenito pokazati da zadovoljava Einsteinove jednadžbe, nego ćemo dati pojednos-

tavljeni račun iz [6] koji vrijedi samo za materijalne točke s cirkularnom putanjom i koristi elementarnu fiziku. Brzina takve materijalne točke je dana formulom

$$\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 = B(r)\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + A(r)\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2,$$

gdje je τ vrijeme koje mjeri sat koji se giba zajedno s materijalnom točkom te A i B koeficijenti koje trebamo odrediti. U formuli nemamo koordinatu θ jer je cirkularno gibanje gibanje u ravnini. Sada ćemo iskoristiti činjenicu da se točka ne može kretati brže od svjetlosti, pa slijedi da je konstantna funkcija $\tau \mapsto c^2$ stacionarna točka funkcionala duljine luka

$$J = \int_{r_1}^{r_2} -\left(\frac{ds}{d\tau}\right)^2 d\tau.$$

Koristimo negativan predznak jer je putanja vremenska krivulja, a korijen u formuli za duljinu luka možemo izostaviti jer je drugi korijen rastuća funkcija.

Lema 4.1.1. *Neka je $L(t,q,q')$ realna funkcija klase C^2 i P skup svih puteva $q : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ klase C^1 takvih da je $q(a) = x_a$ i $q(b) = x_b$. Tada linearni funkcional*

$$J(q) = \int_a^b L(t,q(t),q'(t))\,dt$$

ima stacionarnu točku $q \in P$ ako i samo ako funkcija q zadovoljava tzv. Euler-Lagrangeove jednadžbe

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_i'}\right) = 0$$

za $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Euler-Lagrangeov sustav za gornji funkcional je

$$\begin{aligned} B'(r)\dot{t}^2 + 2r\dot{\varphi}^2 + A'(r)\dot{r}^2 &= 2A'(r)\dot{r}^2 + 2A(r)\ddot{r} \\ 0 &= 2r\dot{r}\dot{\varphi} + r^2\ddot{\varphi} \\ 0 &= B'(r)\dot{r}\dot{t} + B(r)\ddot{t}. \end{aligned}$$

Ovdje točka označava derivaciju po τ. Budući da se točka giba po kružnici, r je konstanta, dakle $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, pa iz prve jednadžbe slijedi da je

$$B'(r) = -\frac{2r\dot{\varphi}^2}{\dot{t}^2} - 2r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

jer se $d\tau$ skrati. Iz Keplerovog trećeg zakona o gibanju planeta imamo da je

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{(m+m_1)G},$$

gdje je T vremenski period u kojem tijelo prođe puni krug, m je masa Sunca (u našem slučaju masa materijalne točke u središtu koja inducira gravitaciju crne rupe), a m_1 masa planeta koji se giba oko Sunca (u našem slučaju materijalne točke). Budući da je orbita kružna, period iznosi

$$T = \frac{2\pi}{d\varphi/dt},$$

a kako pretpostavljamo da materijalna točka ima zanemarivu masu u odnosu na masu u središtu svemira (tj. $m_1 = 0$), slijedi da je

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{mG}{r^3}.$$

Dakle,

$$B'(r) = -\frac{2mG}{r^2} \Rightarrow B(r) = \frac{2mG}{r} + C$$

za neku konstantu C, koju odredimo tako da uvrstimo $m = 0$. Tada dobijemo prostor Minkowskog, pa je tada $B(r) = -c^2$. Dakle, $C = -c^2$ te je

$$B(r) = \frac{2mG}{r} - c^2 = c^2\left(\frac{2mG}{c^2 r} - 1\right) = c^2\left(\frac{r_s}{r} - 1\right).$$

Sada ćemo dodatno pretpostaviti da je materijalna točka privremeno stacionarna, što znači da u početnoj pseudometrici imamo samo član koji dolazi od varijable t, tj.

$$-c^2 = \dot{s}^2 = B(r)\dot{t}^2 \Rightarrow \dot{t}^2 = -\frac{c^2}{B(r)}.$$

Iz prve Euler-Lagrangeove jednadžbe (uvrstimo $\dot{r} = \dot{\varphi} = 0$) dobivamo

$$A(r) = \frac{B'(r)\dot{t}^2}{2\ddot{r}}.$$

No, kad je tijelo privremeno stacionarno, onda je $\ddot{r}$ akceleracija koja dolazi od gravitacije, dakle $\ddot{r} = -\frac{mG}{r^2}$, odakle slijedi da je

$$A(r) = B'(r)\dot{t}^2 \cdot \frac{1}{2\ddot{r}} = -\frac{2mG}{r^2} \cdot \frac{-c^2}{\frac{2mG}{r} - c^2} \cdot \frac{-r^2}{2mG} = \frac{1}{1 - \frac{2mG}{rc^2}} = \frac{1}{1 - \frac{r_s}{r}}.$$

Dakle, dobili smo da prostor-vrijeme s masom m u središtu koja inducira gravitacijsko polje mora imati Schwarzschildovu pseudometriku.

Osim Schwarzschildove pseudometrike pronađena su i druga rješenja Einsteinovih jednadžbi. U radu [18] je proučavan i Reissner-Nordströmov model u kojem masa u središtu koja inducira gravitaciju ima i električni naboj te Oppenheimer-Snyder model.

Dodajmo još da je postojanje crnih rupa potvrđeno eksperimentalno. Prva crna rupa u svemiru

Cygnus X-1 je pronađena 1971. godine nezavisno od strane nekoliko istraživača. Prva fotografija crne rupe je objavljena 2019. godine, a dobivena je pomoću Event Horizon teleskopa. Radi se o supermasivnoj crnoj rupi u središtu galaksije Messiner 87. Do 2021. godine najbliža poznata crna rupa je The Unicorn na udaljenosti 1500 svjetlosnih godina od Zemlje. U Mliječnoj stazi, galaksiji u kojoj se nalazi Sunčev sustav, do sada je pronađeno nekoliko desetaka crnih rupa, a smatra se da ih ima stotine milijuna i većina ih ne uzrokuje emisiju radijacije.

4.2. ZAROBLJENE I FOTONSKE PLOHE

Zbog činjenice da prolazak kroz horizont događaja nema nikakav fizikalni učinak, problem je kako detektirati crnu rupu. Umjesto da tražimo horizont događaja, traži se tzv. pojavni horizont. Zarobljena ploha je zatvorena (ili kompaktna prema nekim izvorima) 2-ploha u svemiru (to je apstraktna granica, tj. nije fizička barijera) koja ima svojstvo da zrake svjetlosti koje dođu do nje s unutarnje strane se odbiju i konvergiraju, a zrake svjetlosti koje dođu s vanjske strane se odbiju prema van i divergiraju. Drugim riječima, svjetlost ne može proći tu granicu ni sa koje strane. Kako vrijeme prolazi, zarobljene plohe formiraju vanjsku granicu koja ih okružuje i to je hiperploha u prostor-vremenu koju zovemo pojavni horizont. Zarobljene plohe koje su sadržane u toj hiperplohi zovemo rubno zarobljene plohe. Ako je u svemiru prisutan pojavni horizont, znači da je formirana crna rupa, a ako je on osvjetljen iz nekog izvora svjetlosti, može ga se detektirati. Zarobljene plohe opisuju unutrašnjost crne rupe. Naime, zrake koje dođu do horizonta događaja prolaze kroz njega i ne mogu se vratiti na drugu stranu.

O geometriji zarobljenih ploha se malo zna i njihova klasifikacija je otvoreni problem ([9]). Postoji više tipova zarobljenih ploha, ovisno o predznacima funkcija θ_+ i θ_- (vidi [18]). Ako je S prostorna ploha u $\mathbb{M}^4$ i $p \in S$ točka, normalni prostor N_pS je vremenski, pa sadrži dva linearno nezavisna svjetlosna vektora (propozicija 1.2.8). Pretpostavimo da je ploha S sadržana u prostornoj hiperplohi Σ. Ako odaberemo vremenski jedinični normalni vektor n orijentiran tako da mu je vremenska komponenta pozitivna te vanjski prostorni jedinični normalni vektor s, koji leži u hiperplohi Σ i okomit je na vektor n, onda su

$$k_\pm = n \pm s$$

svjetlosni vektori u ravnini N_pS. Kako je $\dim N_pS = 2$, oni čine bazu za N_pS. Prema teoremu 1.3.24, vektor srednje zakrivljenosti h plohe S je normalni vektor, pa ima jedinstveni rastav

$$h = \theta_+ k_+ + \theta_- k_-.$$

Ako je ploha S rubno zarobljena, mora biti maksimalna (za dokaz vidi [2]). Preciznija definicija je da je ploha S rubno zarobljena ako je $\theta_+ = 0$.

U prostoru Minkowskog ne postoje rubno zarobljene plohe. Naime, maksimalne plohe postoje, ali maksimalna ploha ne može biti zatvorena. Radi se o netrivijalnom rezultatu čiji je dokaz za euklidski prostor dan u [8] i zahtjeva predznanje o tzv. potpunim plohama (vidi zadatak s Ossermanovom lemom). Lema kaže da minimalna euklidska ploha ne može biti potpuna, a s

druge strane svaka zatvorena (i svaka kompaktna) ploha je potpuna.

Weierstrassovu parametrizaciju svejedno možemo iskoristiti da nađemo lokalnu aproksimaciju svake zarobljene plohe u Schwarzschildovom prostoru. Naime, pseudometrika Minkowskog aproksimira Schwarzschildovu metriku za velike r. Već smo vidjeli tu parametrizaciju, ali moramo još odrediti uvjete za Weierstrassove podatke da bi ploha bila unutar crne rupe. Aproksimacija će biti bolja što je veći polumjer r_s, odnosno što je veća masa m singulariteta.

Ovdje ćemo dati jedan dovoljan uvjet na Weierstrassove podatke da bi ploha bila sadržana u Schwarzschildovoj crnoj rupi koristeći lemu o ocjeni integrala ([31]).

Lema 4.2.1. *Neka je $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ gladak put duljine $l(\gamma)$, $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{C}$ neprekidna funkcija i $M = \max\{|f(z)| : z \in \gamma([a,b])\}$. Tada je*

$$\left| \int_\gamma f(z)\, dz \right| \leq M l(\gamma).$$

Teorem 4.2.2. *Neka je $\delta > 0$, $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \delta\}$ i $\rho, f, g : U \to \mathbb{C}$ funkcije kojima su realni i imaginarni dio klase C^∞ takve da vrijede jednadžbe (3.2) i da je*

$$6\delta((\operatorname{Re}\rho(1+fg))^2 + |\rho|^2|f-\overline{g}|^2) \leq r_s^2.$$

Tada je formulama (3.1) dana lokalna aproksimacija zarobljene plohe u Schwarzschildovom prostoru polumjera r_s. Nadalje, ta ploha je rubno zarobljena ako i samo ako je barem jedna od funkcija f i g holomorfna.

Dokaz. Horizont događaja u Schwarzschildovom prostoru je cilindar nad sferom, tj. za fiksni t dobivamo euklidsku sferu polumjera r_s. Dakle, ploha S će biti u crnoj rupi ako i samo ako je

$$x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 < r_s^2.$$

Iz leme o ocjeni integrala imamo da je

$$\int_{z_0}^{z} \operatorname{Re}\partial_z x_k(w)\, dw < 2M_k(z)\delta,$$

gdje integriramo po putu od fiksne točke $z_0 \in U$ do točke $z \in U$. Duljina tog puta je strogo manja od promjera kruga 2δ. Pri tome je

$$M_k(z) = \max\{\operatorname{Re}\partial_z x_k((1-t)z_0 + tz) : t \in [0,1]\}.$$

Taj maksimum se postiže u nekoj točki $z_k \in U$, pa je

$$M_k(z)^2 = (\operatorname{Re}\partial_z x_k(z_k))^2 \leq (\operatorname{Re}\partial_z x_1(z_k))^2 + (\operatorname{Re}\partial_z x_2(z_k))^2 + (\operatorname{Re}\partial_z x_3(z_k))^2.$$

S druge strane, iz uvjeta konformnosti $E = G = 0$ i $\lambda = 2F$ slijedi

$$\begin{aligned}
&(\operatorname{Re}\partial_z x_2)^2 + (\operatorname{Re}\partial_z x_3)^2 + (\operatorname{Re}\partial_z x_4)^2 = \sum_{j=2}^{4}\left(\frac{\partial_z x_j + \partial_{\bar z} x_j}{2}\right)^2 \\
&= \frac{1}{4}\sum_{j=2}^{4}(\partial_z x_j)^2 + \frac{1}{4}\sum_{j=2}^{4} 2(\partial_z x_j)(\partial_{\bar z} x_j) + \frac{1}{4}\sum_{j=2}^{4}(\partial_{\bar z} x_j)^2 \\
&= \frac{1}{4}(\partial_z x_1)^2 + \frac{1}{4}(\lambda + 2(\partial_z x_1)(\partial_{\bar z} x_1)) + \frac{1}{4}(\partial_{\bar z} x_1)^2 \\
&= \left(\frac{\partial_z x_1 + \partial_{\bar z} x_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\lambda = (\operatorname{Re}\partial_z x_1)^2 + \frac{1}{4}\lambda \\
&= (\operatorname{Re}\rho(1+fg))^2 + |\rho|^2|f-\bar g|^2
\end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned}
x_2(z)^2 + x_3(z)^2 + x_4(z)^2 &= \int_{z_0}^{z} \operatorname{Re}\partial_z x_2(w)\,dw + \int_{z_0}^{z} \operatorname{Re}\partial_z x_3(w)\,dw + \int_{z_0}^{z} \operatorname{Re}\partial_z x_4(w)\,dw \\
&< 2\delta(M_2(z)^2 + M_3(z)^2 + M_4(z)^2) \\
&= 2\delta((\operatorname{Re}\partial_z x_1(z_1))^2 + (\operatorname{Re}\partial_z x_2(z_2))^2 + (\operatorname{Re}\partial_z x_3(z_3))^2) \\
&\le 2\delta\left(\sum_{j=2}^{4}(\operatorname{Re}\partial_z x_j(z_1))^2 + \sum_{j=2}^{4}(\operatorname{Re}\partial_z x_j(z_2))^2 + \sum_{j=2}^{4}(\operatorname{Re}\partial_z x_j(z_3))^2\right) \\
&\le 6\delta((\operatorname{Re}\rho(1+fg))^2 + |\rho|^2|f-\bar g|^2)
\end{aligned}$$

Ako je zadnji izraz manji ili jednak r_s^2, čitava ploha leži u kugli polumjera r_s. Tvrdnja za rubno zarobljene plohe slijedi iz korolara 3.1.2. ■

Da bismo pronašli parametrizacije svjetlosnih zarobljenih ploha (tzv. nul-zarobljene plohe) u Schwarzschildovom prostoru, treba nam analogon leme o ocjeni integrala za dualne funkcije. Kako taj rezultat nije dan u [26], dokazat ćemo ga ovdje.

Lema 4.2.3. *Neka je $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{D}$ gladak put duljine $l(\gamma)$, $f : \gamma([a,b]) \to \mathbb{D}$ neprekidna funkcija i $M = \max\{|f(z)| : z \in \gamma([a,b])\}$. Tada je*

$$\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le M l(\gamma).$$

Dokaz. Označimo

$$J = \int_\gamma f(z)\,dz = |J|e^{\varepsilon\theta},$$

gdje je $\theta = \dfrac{\operatorname{Im} J}{\operatorname{Re} J}$ argument funkcije J. Naime, za dualne funkcije je $|J| = (\operatorname{Re} J)^2$, pa je

$$J = \operatorname{Re} J + \varepsilon \operatorname{Im} J = |J|\left(1 + \frac{\operatorname{Im} J}{\operatorname{Re} J}\right) = |J|e^{\varepsilon\theta}.$$

Ovdje smo iskoristili jednakost (2.22). Iz toga slijedi da je

$$\begin{aligned}|J| &= e^{-\varepsilon\theta} J = e^{-\varepsilon\theta} \int_\gamma f(z)\,dz = e^{-\varepsilon\theta} \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt \\ &= \int_a^b e^{-\varepsilon\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\end{aligned}$$

Iz toga slijedi da je

$$\begin{aligned}|J| &= \operatorname{Re}|J| = \int_a^b \operatorname{Re}(e^{-\varepsilon\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t))\,dt \\ &\leq \int_a^b |e^{-\varepsilon\theta} f(\gamma(t))\gamma'(t)|\,dt \leq M \int_a^b |\gamma'(t)|\,dt = Ml(\gamma)\end{aligned}$$

jer je

$$|e^{-\varepsilon\theta}|^2 = |1-\varepsilon\theta|^2 = 1^2 = 1.$$

■

Teorem 4.2.4. *Neka je $\delta > 0$, $U = \{z \in \mathbb{D} : |z| < \delta\}$ i $\rho, f, g : U \to \mathbb{D}$ funkcije kojima su realni i imaginarni dio klase C^∞. Ako je*

$$6\delta((\operatorname{Im}\rho(-1+f^2+g^2))^2 + 4(\operatorname{Im}\rho f)^2 + 4(\operatorname{Im}\rho g)^2) \leq r_s,$$

onda je formulama (3.19) dana lokalna aproksimacija nul-zarobljene plohe u Schwarzschildovom prostoru polumjera r_s.

Dokaz. Ovaj put iz leme o ocjeni integrala imamo da je

$$\int_{z_0}^{z} \operatorname{Im}\partial_z f_k(w)\,dw < 2M_k(z)\delta,$$

gdje je f_k funkcija dana formulom (3.20) i

$$M_k(z) = \max\{\operatorname{Im}\partial_z f_k((1-t)z_0 + tz) : t \in [0,1]\} = \operatorname{Im}\partial_z f_k(z_k).$$

za neku točku $z_k \in U$. Sada opet imamo

$$M_k(z)^2 \leq (\operatorname{Im}\partial_z f_2(z_k))^2 + (\operatorname{Im}\partial_z f_3(z_k))^2 + (\operatorname{Im}\partial_z f_4(z_k))^2.$$

No, kako je

$$\begin{aligned}&(\operatorname{Im}\partial_z f_2)^2 + (\operatorname{Im}\partial_z f_3)^2 + (\operatorname{Im}\partial_z f_4)^2 = (\operatorname{Im}\partial_z f_1)^2 + \lambda \\ &= (\operatorname{Im}\rho(-1+f^2+g^2))^2 + 4(\operatorname{Im}\rho f)^2 + 4(\operatorname{Im}\rho g)^2,\end{aligned}$$

slijedi da je

$$\begin{aligned} x_2^2(z)+x_3^2(z)+x_4^2(z) &= \int_{z_0}^{z} \operatorname{Im}\partial_z f_2(w)\,dw + \int_{z_0}^{z} \operatorname{Im}\partial_z f_3(w)\,dw + \int_{z_0}^{z} \operatorname{Im}\partial_z f_4(w)\,dw \\ &< 2\delta(M_2(z)^2+M_3(z)^2+M_4(z)^2) \\ &\leq 6\delta((\operatorname{Im}\rho(-1+f^2+g^2))^2+4(\operatorname{Im}\rho f)^2+4(\operatorname{Im}\rho g)^2) \end{aligned}$$

■

U nekim izvorima se rubno zarobljena ploha definira kao ploha kojoj je vektor srednje zakrivljenosti svjetlosni, što znači da mora biti $h \neq 0$. Za svjetlosne plohe je potprostor $T_pS^{\perp}$ svjetlosni, pa u njemu imamo jedan svjetlosni pravac (razapet vektorom $\mathbf{x}_v$).

Kad bismo imali analogon vektora srednje zakrivljenosti za svjetlosne plohe, mogli bismo definirati rubnu nul-zarobljenu plohu.

Za prostorne plohe je vektor h dan formulom

$$h = \frac{1}{2\lambda}(\mathbf{x}_{uu}+\mathbf{x}_{vv}) = \frac{1}{2\lambda}(1\cdot\mathbf{x}_{uu}+\mathbf{x}_{vv}),$$

a za vremenske plohe

$$h = \frac{1}{2\lambda}(-\mathbf{x}_{uu}+\mathbf{x}_{vv}) = \frac{1}{2\lambda}(-1\cdot\mathbf{x}_{uu}+\mathbf{x}_{vv}).$$

To nam daje ideju da za svjetlosne plohe definiramo

$$h = \frac{1}{2\lambda}(0\cdot\mathbf{x}_{uu}+\mathbf{x}_{vv}) = \frac{1}{2\lambda}\mathbf{x}_{vv}.$$

Vektor $\mathbf{x}_{vv}$ je normalni vektor plohe S jer deriviranjem $\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_v = 0$ po u i po v dobivamo

$$\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_v = \mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_v = 0.$$

Zatim deriviranjem $\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_v = 0$ po v dobivamo

$$\underbrace{\mathbf{x}_{uv}\cdot\mathbf{x}_v}_{=0}+\mathbf{x}_u\cdot\mathbf{x}_{vv} = 0 \Rightarrow \mathbf{x}_{vv}\cdot\mathbf{x}_u = 0.$$

Dakle, vektor $\mathbf{x}_{vv}$ je okomit na vektore $\mathbf{x}_u$ i $\mathbf{x}_v$, odakle slijedi da je normalan na plohu S.

Vidimo da će tada ploha S biti rubno zarobljena ako i samo ako je vektor $\mathbf{x}_{vv}$ svjetlosni, tj. kolinearan s vektorom $\mathbf{x}_v$, što vrijedi ako i samo ako je ploha S pravčasta.

Dakle, definicija neće obuhvatiti l-minimalne plohe, ali će svaka rubno zarobljena svjetlosna ploha biti minimalna, kao u slučaju prostornih ploha. Nadalje, znamo i da su takve plohe dane Weierstrassovim podacima za koje je

$$\partial_v \operatorname{Re} f = \partial_v \operatorname{Re} g = 0.$$

Ako je ploha S minimalna vremenska, onda je njen normalni prostor N_pS u točki $p \in S$ prostorni potprostor, odakle slijedi da je vektor h ne može biti svjetlosni.

Vremenske plohe se pojavljuju u teoriji relativnosti kao tzv. fotonske plohe. Fotonska ploha je vremenska pravčasta ploha

$$\mathbf{x}(u,v) = c(u) + ve(u),$$

gdje je c svjetlosna krivulja i e svjetlosno vektorsko polje duž krivulje c takvo da je $c' \cdot e = 1$, koja ima svojstvo da svaka svjetlosna geodetska krivulja plohe S ostane na plohi (za neki interval parametra krivulje). Svjetlosne geodetske krivulje su putanje fotona u prostor-vremenu. Imamo sljedeći rezultat iz [14].

Teorem 4.2.5. *Vremenska ploha S u $\mathbb{M}^4$ je fotonska ako i samo ako je potpuno umbilička.*

Pravčaste plohe gornjeg oblika zovemo B-namotajne plohe i one su u $\mathbb{M}^3$ karakterizirane uvjetom $H^2 = K$. Uvjete na Weierstrassove podatke da ploha dana parametrizacijom (3.10) bude pravčasta je teško pronaći izravno iz parametrizacije. Ako želimo da sama parametrizacija (3.10) bude pravčasta, što nije nužno da bi ploha bila pravčasta, mora biti $\mathbf{x}_{vv} = 0$. Kako je

$$\mathbf{x}_v = \frac{1}{2}(-(1+|r|^2)g, -(1-|r|^2)g, -(r+\bar{r})g, i(r-\bar{r})g),$$

to je ekvivalentno uvjetima $\partial_u r = \partial_u g = 0$. No, tada iz jednakosti (3.9) slijedi da je $\partial_v f = \partial_v g = 0$, odnosno $\mathbf{x}_{uv} = 0$, što znači da je parametrizacija oblika

$$\mathbf{x}(u,v) = c(u) + ve,$$

gdje je $e \in \mathbb{M}^3$ konstantan svjetlosni vektor, što ne obuhvaća čitavu klasu pravčastih ploha, nego samo (neke) minimalne plohe (teorem 1.3.28).

U radijalno simetričnom prostor-vremenu, fotonska sfera je vremenska hiperploha u kojoj je gravitacija toliko jaka da se fotoni gibaju po krivuljama koje ne mogu izaći iz plohe. Svaka crna rupa je okružena takvom plohom. Za Schwarzschildov prostor je polumjer fotonske sfere $\frac{3}{2}r_s$. Dat ćemo skicu dokaza ove poznate tvrdnje iz fizike.

Budući da je Schwarzschildov prostor sferno simetričan, sve kružne orbite fotona moraju imati isti polumjer. Dakle, za foton koji se giba po kružnoj putanji u smjeru koordinate φ je $dr = 0$. Budući da se radi o fotonskoj čestici, mora biti $ds = 0$. Možemo rotirati koordinatni sustav tako da θ bude konstanta, pa je i $d\theta = 0$. Sada iz formule za Schwarzschildovu metriku dobivamo

$$\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) c^2 dt^2 = r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \Rightarrow \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{c^2}{r^2 \sin^2\theta}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right).$$

S druge strane, s obzirom da se foton giba po geodetskoj krivulji, možemo u diferencijalnim jednadžbama za geodetske krivulje izračunati Christoffelove simbole i iz toga se dobije da je

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{c^2 r_s}{2r^3 \sin^2\theta}.$$

Izjednačavanjem tih izraza dobivamo

$$\frac{c^2}{r^2 \sin^2\theta}\left(1 - \frac{r_s}{r}\right) = \frac{c^2 r_s}{2r^3 \sin^2\theta} \Rightarrow r = \frac{3}{2} r_s.$$

Foton je subatomska čestica koja je nositelj sile u elektromagnetnom polju. Spada u veću klasu subatomskih čestica koje zovemo bozoni. Najpoznatija čestica iz te klase je Higgsov bozon, prema znanstveniku Peteru Higgsu, koji ju je teorijski opisao 1964. godine. Naziv Božja čestica dolazi iz istoimene knjige nobelovca Leona Ledermana iz 1993. godine. Postojanje Higgsovog bozona je potvrđeno eksperimentalno 2012. godine u CERN-ovom laboratoriju u Ženevi, a godinu dana kasnije je Higgsu dodijeljena Nobelova nagrada za fiziku.

ZAKLJUČAK

U euklidskom prostoru $\mathbb{E}^3$ svaka ploha može se lokalno konformno reprezentirati parom kompleksnih funkcija (f,g), pri čemu klasu minimalnih ploha ($H=0$) reprezentiraju parovi holomorfne i meromorfne funkcije. U prostoru Minkowskog $\mathbb{M}^3$ imamo različite Weierstrassove parametrizacije za različite tipove ploha. Za prostorne plohe, kao u euklidskom prostoru, koristimo kompleksne funkcije ([25]), a za vremenske plohe koristimo realne funkcije dviju varijabli ([24], [22]). Kod prostornih ploha klasu maksimalnih ploha opet dobivamo za parove holomorfnih i meromorfnih funkcija, dok su kod vremenskih ploha minimalne plohe reprezentirane funkcijama koje ovise o samo jednoj od dviju varijabli.

Da bi Weierstrassova reprezentacija za svjetlosne plohe imala analogna svojstva kao za prostorne i vremenske plohe, moramo svjetlosnu plohu parametrizirati parom (f,g) dualnih funkcija. Prsten dualnih brojeva je skup $\mathbb{D}=\{x+y\varepsilon : x,y\in\mathbb{R}\}$, gdje je $\varepsilon\notin\mathbb{R}$ imaginarna jedinica takva da je $\varepsilon^2=0$ uz standardno zbrajanje i množenje. Funkciju $f:U\subseteq\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ zovemo dualna funkcija. Pojam srednje zakrivljenosti ne može se proširiti na svjetlosne plohe, ali može se pojam minimalne plohe ([15], [12]) te se ispostavlja da su u $\mathbb{M}^3$ sve svjetlosne plohe minimalne, što ne vrijedi u višim dimenzijama. Minimalnu svjetlosnu plohu definiramo kao plohu koja ima netrivijalnu izometričnu G-deformaciju. Za svjetlosne plohe postoji samo analogon Weierstrassove parametrizacije koju je pronašla McNertney, a analogon Konopelchenkove parametrizacije ne postoji jer ne možemo dijeliti brojem ε.

Koristeći analogiju s prostornim i vremenskim slučajem, gdje je katenoid jedina rotacijska ploha srednje zakrivljenosti $H=0$, zaključujemo da je svjetlosni analogon katenoida svjetlosni stožac. Zatim korištenjem veze s dualnim brojevima konstruiramo eksplicitno netrivijalnu izometričnu G-deformaciju svjetlosnog stošca koja je analogon onih koje je pronašla McNertney ([25]) za maksimalne i minimalne vremenske plohe. Zatim definiramo svjetlosni analogon helikoida kao jedinu plohu u toj klasi koja je helikoidalna te time postižemo da i u svjetlosnom slučaju helikod i katenoid pripadaju istoj asociranoj familiji ploha. Može se definirati i adjungirana ploha svje-

tlosne plohe, ali ima slabija svojstva nego u prostornom i vremenskom slučaju. Adjungirane svjetlosne plohe su lokalno izometrične, ali nemaju paralelne tangencijalne ravnine u odgovarajućim točkama.

Rezultat o broju različitih Weierstrassovih parametrizacija plohe iz euklidskog prostora ([8]) može se proširiti i za prostor Minkowskog: ako je ploha maksimalna ili minimalna vremenska, postoji 1-1 korespondencija između konformnih parametrizacija plohe i konformnih parametrizacija jedinične sfere. Rezultat se ne može poopćiti na više dimenzije, na plohe za koje je $H \neq 0$ niti na svjetlosne plohe.

Sve Weierstrassove parametrizacije za plohe u $\mathbb{M}^3$ mogu se poopćiti na 2-plohe u $\mathbb{M}^4$. Za prostorne plohe je to već napravljeno ([23], [20]) i opet se koriste kompleksne funkcije (ρ, f, g). Za vremenske plohe zbog nemogućnosti faktorizacije jednakosti $E = G = 0$ na linearne faktore nad $\mathbb{R}$ više ne možemo koristiti realne funkcije, nego moramo koristiti kompleksne funkcije dviju realnih varijabli (q, r) i realne funkcije (f, g) kako bi reprezentacija imala sva svojstva koja treba imati ([11]). Za svjetlosne plohe ponovo koristimo dualne funkcije (ρ, f, g), ali sada više nije svaka svjetlosna ploha u $\mathbb{M}^4$ minimalna. Minimalne plohe reprezentiraju funkcije za koje je $(\partial_u \operatorname{Re} f)(\partial_v \operatorname{Re} g) = (\partial_u \operatorname{Re} g)(\partial_v \operatorname{Re} f)$, što je slabiji uvjet nego holomorfnost.

Metoda poopćenja Weierstrassove reprezentacijske formule na 2-plohe u $\mathbb{E}^n$ iz [21] može se primijeniti i na prostorne plohe u $\mathbb{M}^n$ (ali ne na vremenske i svjetlosne). U teoriji relativnosti možemo pomoću Weierstrassove reprezentacije lokalno opisati tzv. zarobljene plohe, što je napravljeno za Schwarzschildov prostor, najjednostavniji model prostor-vremena koji sadrži crnu rupu.

BIBLIOGRAFIJA

[1] *Christoffel Symbols in Flat Space-Time*. https://math.stackexchange.com/questions/1412869/christoffel-symbols-in-flat-space-time. Zadnje: 2022-03-23. ↑ 76.

[2] *Is any apparent horizon a minimal surface?* https://physics.stackexchange.com/questions/87648/is-any-apparent-horizon-a-minimal-surface. Zadnje: 2022-03-22. ↑ 140.

[3] Antonić, N.: *Parcijalne diferencijalne jednadžbe*. (skripta) PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu. ↑ 129.

[4] Antunović, Ž.: *Specijalna teorija relativnosti*. (skripta) PMF, Sveučilište u Splitu. ↑ 132, 133.

[5] Bejancu, A., A. Ferrandez i P. Lucas: *A new viewpoint on geometry of a lightlike hypersurface in semi-Euclidean space*. Saitama Math. J., 16:31–38, 1998. ↑ 2, 120.

[6] Brown, K.: *Reflections on Relativity*. Lulu.com, 2015. ↑ 137.

[7] Carlsen, B. i J. N. Clelland: *The Geometry of Lightlike Surfaces in Minkowski Space*. J. Geom. Phys., 74:43–55, 2013. ↑ 52.

[8] Carmo, M. P.: *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall Inc., 1976. ↑ 27, 28, 43, 90, 140, 148.

[9] Chen, B. Y.: *Classification of marginally trapped surfaces*. Symposium on the differential geometry of Submanifolds, Valenciennes, France, stranice 51–66, 2007. ↑ 140.

[10] Devald, D.: *Plohe konstantne srednje zakrivljenosti u Minkowskijevom prostoru*. (diplomski rad) PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu, 2017. ↑ 2, 7, 17, 19, 22, 31, 32, 86, 94.

[11] Devald, D.: *Weierstrass Representation for Timelike Surfaces in Minkowski 4-Space*. J. Geom., 113, 2021. ↑ 3, 103, 148.

[12] Devald, D. i Ž. Milin: *Weierstrass Representation for Lightlike Surfaces in Lorentz-Minkowski 3-Space*. J. Geom. Phys., 166, 2021. ↑ 3, 72, 76, 147.

[13] Duggal, K. L. i A. Bejancu: *Lightlike Submanifolds of semi-Riemannian Manifolds and Applications, Mathematics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers, 1996. ↑ 37, 38.

[14] Duggal, K. L. i B. Sahin: *Differential Geometry of Lightlike Submanifolds*. Birkhauser Basel, 2010. ↑ 2, 33, 37, 39, 41, 120, 121, 145.

[15] Gorkaviy, V.: *On Minimal Lightlike Surfaces in Minkowski Space-time*. Differ. Geom. Appl., 26:133–139, 2008. ↑ 2, 42, 122, 147.

[16] Imayoshi, Y. i M. Taniguchi: *An Introduction to Teichmüller spaces*. Springer-Verlag, 1992. ↑ 23.

[17] Inoguchi, J. i S. Lee: *Lightlike Surfaces in Minkowski 3-space*. Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., 6:267–283, 2009. ↑ 50, 77, 84.

[18] Jakobsson, E.: *Black Holes and Trapped Surfaces*. (magistarski rad), Stockholm University, 2014. ↑ 138, 140.

[19] Kenmotsu, K.: *Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature*. Math. Ann., 245:89–99, 1979. ↑ 1, 3.

[20] Konopelchenko, B. G.: *Weierstrass representations for surfaces in 4D spaces and their integrable deformations via DS hierarchy*. Ann. Glob. Anal. Geom., 18:61–74, 2000. ↑ 2, 57, 97, 99, 148.

[21] Konopelchenko, B. G. i G. Landolfi: *Generalized Weierstrass representation for surfaces in multidimensional Riemann spaces*. J. Geom. Phys., 29:319–333, 1999. ↑ 4, 57, 97, 124, 125, 128, 148.

[22] Lee, S.: *Weierstrass representation for timelike minimal surfaces in Minkowski 3-space*. Commun. Math. Anal., stranice 11–19, 2008. ↑ 2, 60, 65, 66, 70, 147.

[23] Liu, H.: *Weierstrass type representation for marginally trapped surfaces in Minkowski 4-space*. Math. Phys. Anal. Geom., 16:171–178, 2013. ↑ 2, 95, 97, 148.

[24] Magid, M. A.: *Timelike surfaces in Lorentz 3-space with prescribed mean curvature and Gauss map*. Hokkaido Math. J., 20:447–464, 1991. ↑ 2, 62, 147.

[25] McNertney, L. V.: *One-parameter Families of Surfaces With Constant Curvature in Lorentz 3-Space*. (doktorska disertacija) Department of Mathematics, Brown University, 1980. ↑ 2, 3, 30, 54, 84, 147.

[26] Messelmi, F.: *Analysis of Dual Functions*. Annual Review of Chaos Theory, Bifurcations and Dynamical Systems, 4:37–54, 2013. ↑ 2, 11, 80, 142.

[27] Milin, Ž. i J. Šiftar: *Glatke i Riemannove mnogostrukosti*. (skripta) PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu, 2014. ↑ 25, 32, 76, 135.

[28] O'Neill, B.: *Elementary Differential Geometry, Revisited Second Edition*. Elsevier Inc., 2006. ↑ 59.

[29] Ryan, P. J.: *Euclidean and Non-Euclidean Geometry. An Analytic Approach*. Cambridge University Press, 1986. ↑ 17.

[30] Spivak, M.: *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish Inc., 1999. ↑ 25.

[31] Ungar, Š.: *Kompleksna analiza*. (skripta) PMF-MO, Sveučilište u Zagrebu, 2009. ↑ 2, 7, 8, 141.

[32] Weinstein, T.: *An Introduction to Lorentz Surfaces*. De Gruyter, 1996. ↑ 24.

ŽIVOTOPIS

Davor Devald rođen je 25. 11. 1992. u Našicama. Završio je osnovnu školu u Osnovnoj školi Dore Pejačević u Našicama i zatim prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Srednjoj školi Isidora Kršnjavoga u Našicama. Tijekom osnove i srednje škole redovito je sudjelovao na natjecanjima iz matematike, informatike i hrvatskog jezika. Njegovi najveći rezultati na natjecanjima su 4. mjesto na regionalnom natjecanju iz matematike u 4. razredu osnovne škole (tada najviši rang natjecanja), 10. mjesto i pohvala na državnom natjecanju iz matematike u 4. razredu srednje škole te 7. mjesto na državnom natjecanju iz hrvatskog jezika također u 4. razredu srednje škole. Sudjelovao je i na Hrvatskom otvorenom natjecanju u informatici, natjecanju u programiranju na razini države koje traje čitavu godinu, osvojivši 8. mjesto u 3. razredu i 9. mjesto u 4. razredu srednje škole.

Nakon mature, 2011. godine upisuje preddiplomski studij Elektrotehnika i informacijska tehnologija i računarstvo na Fakultetu elektrotehnike i računarstva Sveučilišta u Zagrebu, ali ispisuje se sa studija nakon godinu dana studiranja. Iduće godine upisuje preddiplomski studij Matematika na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu, koji završava 2015. godine i stječe naziv prvostupnik matematike (bacc. math.).

Iste godine upisuje diplomski studij Teorijska matematika na Matematičkom odsjeku PMF-a, koji završava 2017. godine obranom diplomskog rada *Plohe konstantne srednje zakrivljenosti u Minkowskijevom prostoru* pod mentorstvom prof. dr. sc. Željke Milin Šipuš s pohvalom *cum laude* te stječe naziv magistar matematike (mag. math.). Tijekom diplomskog studija jedan semestar održavao je demonstrature iz kolegija Metrički prostori. Nakon studija par mjeseci je radio kao učitelj matematike u Osnovnoj školi Suhopolje u Suhopolju te upisao i završio Pedagoško-psihološko-didaktičko-metodičku izobrazbu na Filozofskom fakultetu Sveučilišta J. J. Strossmayera u Osijeku.

Doktorski studij upisuje 2018. godine pod mentorstvom prof. dr. sc. Željke Milin Šipuš i na njemu je položio pristupne ispite Geometrija i topologija i Algebra s ocjenom vrlo dobar te

napredne kolegije Diofantovi skupovi, Uvod u diskretnu geometriju, Konkretna matematika i Enumerativna kombinatorika s ocjenom izvrstan. Objavio je dva znanstvena rada:

1. Devald, D.: *Weierstrass Representation for Timelike Surfaces in Minkowski 4-Space*. J. Geom., 113, 2021.

2. Devald, D, Milin Šipuš, Ž.: *Weierstrass Representation for Lightlike Surfaces in Lorentz-Minkowski 3-Space*, J. Geom. Phys., 166, 2021.

Tijekom doktorskog studija radio je kratko kao profesor matematike i informatike u X. gimnaziji u Zagrebu te godinu dana kao asistent na Zavodu za matematiku Građevinskog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu. Trenutno radi kao vanjski suradnik tvrtke Quizlet Inc. iz San Francisca.