

# Kvazinormalni modovi crnih rupa

---

**Dulibić, Lovro**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:019333>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-03-14**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Lovro Dulibić

KVAZINORMALNI MODOVI CRNIH RUPA

Diplomski rad

Zagreb, 2022.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

**Lovro Dulibić**

Diplomski rad

**Kvazinormalni modovi crnih rupa**

Voditelj diplomskog rada: izv. prof. dr. sc. Ivica Smolić

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2022.

Posebno hvala mojem mentoru izv. prof. dr. sc. Ivici Smoliću na susretljivosti, znanju i zavidnom strpljenju.

Obitelji i prijateljima zahvaljujem na dugogodišnjoj podršci, bez koje ne bih ovo postigao.

## Sažetak

Prostorvremena crnih rupa stabilna su rješenja Einsteinove jednadžbe. Usljed neke perturbacije one će se vratiti u prvobitno stanje prilikom čega će izgubiti dio energije zračenjem gravitacijskih valova. Svojtveni načini titranja disipativnih sustava, stoga i crnih rupa, nazivaju se kvazinormalni modovi. U ovome radu dan je teorijski pregled kvazinormalnih modova kroz teoriju perturbacija crnih rupa. U prvom neiščekavajućem redu promotrena je dinamika perturbacije prostorvremena te dinamika skalarnih i vektorskih polja uronjenih u pozadinsko prostorvrijeme Schwarzschildove crne rupe. Proučeno je nekoliko poznatih, aproksimativnih i egzaktnih, metoda računanja kvazinormalnih modova te su njihovi rezultati također i reproducirani.

Ključne riječi: kvazinormalni modovi, crne rupe, teorija perturbacija, Schwarzschildovo prostorvrijeme

# Quasinormal modes of black holes

## Abstract

Black hole spacetimes are stable solutions to Einstein's equations. After a perturbation they will return to their equilibrium state during which they will lose energy through gravitational radiation. Eigenmodes of dissipative systems, including black holes, are called quasinormal modes. In this thesis, a theoretical overview of quasinormal modes is given through black hole perturbation theory. The dynamics of spacetime perturbations, as well as scalar and vector field dynamics in Schwarzschild spacetime is analysed in leading order of perturbation theory. A couple of well-known, approximative and exact, methods of calculating quasinormal modes is given and their results are reproduced.

Keywords: quasinormal modes, black holes, perturbation theory, Schwarzschild spacetime

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
1.1	Crne rupe . . . . .	2
1.2	Teorijska i eksperimentalna motivacija . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Teorija perturbacija crnih rupa</b>	<b>6</b>
2.1	Gravitacijske perturbacije . . . . .	6
2.2	Elektromagnetske perturbacije . . . . .	10
2.3	Skalarne perturbacije . . . . .	14
2.4	Kvazinormalni modovi . . . . .	15
2.4.1	Definicija kvazinormalnih modova . . . . .	15
2.4.2	Izospektralnost aksijalnih i polarnih perturbacija . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Računanje kvazinormalnih modova</b>	<b>23</b>
3.1	Leaverova metoda . . . . .	24
3.2	Nariai prostorvrijeme i Pöschl-Teller potencijal . . . . .	26
3.3	Asimptotski kvazinormalni modovi . . . . .	29
3.4	WKB metoda . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Nova istraživanja</b>	<b>37</b>
4.1	Hodova hipoteza . . . . .	37
4.2	Kvantna perspektiva . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Zaključak</b>	<b>40</b>
	<b>Dodaci</b>	<b>42</b>
<b>A</b>	<b>D’Alambertov operator u zakrivljenom prostorvremenu</b>	<b>42</b>
<b>B</b>	<b>Specijalne funkcije od važnosti</b>	<b>43</b>
B.1	Gegenbauerovi polinomi . . . . .	43
B.2	Pridruženi Legendreovi polinomi . . . . .	43
	<b>Literatura</b>	<b>45</b>

# 1 Uvod

Kada pričamo o gravitaciji dva imena nikada nećemo izostaviti — Isaac Newton i Albert Einstein. Newton je, još u 17. stoljeću, objavio svoj univerzalni zakon gravitacije koji opisuje kako masivna tijela međudjeluju. Objasnio je kako se nebeska tijela kreću, kako gravitacija stvara plimu te, između ostalog, dao teorijsku pozadinu Keplerovim zakonima. Međutim, postoje fenomeni koje Newtonovom gravitacijom nismo mogli dosljedno opisati kao što je, primjerice, precesija Merkura. Sve što je Newtonova gravitacija dobro opisivala, Einsteinova opća teorija relativnosti morala je uspješno reproducirati i uz to objasniti ono što prethodna teorija nije. Einstein je radikalno drugačijim pristupom upravo to i uspio. Prema njegovoj teoriji, gravitacija nije sila u smislu u kojem ju je Newton opisao, već posljedica zakrivljenog prostora, odnosno prostorvremena, kroz koje se tijela gibaju.

Unutar njegove teorije pronađena su rješenja jednadžbi koja odgovaraju tada vrlo egzotičnim objektima — crnim rupama. Danas je njihovo postojanje neosporivo te se tijekom 20. stoljeća fokus istraživanja pomaknuo s pitanja postoje li, na pitanje što sve znamo o njima. Rješenje Einsteinovih jednadžbi koje odgovara crnim rupama općenito je dinamično te ako ga perturbiramo ono će na neki način odgovoriti. Takve titraje u prostorvremenu prepoznavamo kao gravitacijske valove koji su nedavno, 2015. godine, eksperimentalno i izmjereni [1].

Velika motivacija u teorijskom i eksperimentalnom promatranju gravitacijskih valova dolazi iz toga što nam pružaju jedan potpuno novi svijet informacija koje možemo saznati o masivnim objektima u svemiru. Na neki način predstavljaju još jedno 'čulo' kroz koje možemo testirati postojeću, ali i alternativne teorije s uvijek prisutnim ciljem stvaranja kvantne teorije gravitacije. Budući da je gravitacija relativno slaba sila, gravitacijske valove možemo promatrati isključivo iz najmasivnijih izvora kao što su neutronske zvijezde i crne rupe. Svojeviti načini titranja crnih rupa opisani su kvazinormalnim modovima, koji su u središtu ovoga rada. Proučavanjem kvazinormalnih modova zapravo proučavamo dinamiku raznih polja (uključujući gravitacijskog) koja se nalaze u pozadinskom prostorvremenu crne rupe. Njihova dinamika ne ovisi o perturbaciji koja ju je uzrokovala, već o svojstvima same crne rupe; kao što ton kojim čaša zvoniti kad ju kucnemo ne ovisi o tome čime smo ju kucnuli, već o svojstvima same čaše. Stoga, dobro razumijevanje kvazinormalnih



modova ključno je za dobro razumijevanje crnih rupa i gravitacijskih valova koje one stvaraju.

## 1.1 Crne rupe

Einsteinova jednadžba (1.1) daje nam odgovor na pitanje kako je prostorvrijeme zakrivljeno obzirom na raspodjelu materije u njemu. S lijeve strane jednakosti stoji metrika  $g_{\mu\nu}$  koju tražimo, a s desne tenzor energije i impulsa  $T_{\mu\nu}$  koji govori o raspodjeli materije. Općenito, Einsteinove jednadžbe nam za bilo koju raspodjelu energije i impulsa mogu reći kako će prostorvrijeme biti zakrivljeno. Rješenja koja odgovaraju crnim rupama imaju specifičan tenzor energije i impulsa. Za Schwarzschildovu i Kerr-ovu crnu rupu on je identički nula, dok će za nabijene crne rupe biti jednak tenzoru energije i impulsa pripadajućeg elektromagnetskog polja.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (1.1)$$

Za vakuumska rješenja, dakle kada je  $T_{\mu\nu} = 0$ , vrijedi  $R = 0$  te se Einsteinove jednadžbe svode na veoma kompaktan oblik

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (1.2)$$

	Nerotirajuća	Rotirajuća
Nenabijena	Schwarzschild	Kerr
Nabijena	Reissner-Nordström	Kerr-Newman

Tablica 1.1: Klasifikacija rješenja crnih rupa.

Kroz dobar dio 20. stoljeća crne rupe su bile relativno egzotični i nepoznati objekti. Einsteinova opća teorija relativnosti objavljena je 1915. godine, a godinu kasnije Schwarzschild je pronašao rješenje Einsteinovih jednadžbi koje odgovara nenabijenoj, nerotirajućoj crnoj rupi. Između 1916. i 1921. godine Reissner i Nordström pronašli su rješenje za nabijenu, nerotirajuću crnu rupu, dok su rješenja za rotirajuće pronašli Kerr i Newman 60-tih godina prošlog stoljeća. Njihovo rješenje za rotirajuću i nabijenu crnu rupu je najbliže realnoj situaciji u svemiru budući da niti jedna crna rupa neće biti savršeno simetrična, niti savršeno neutralna.

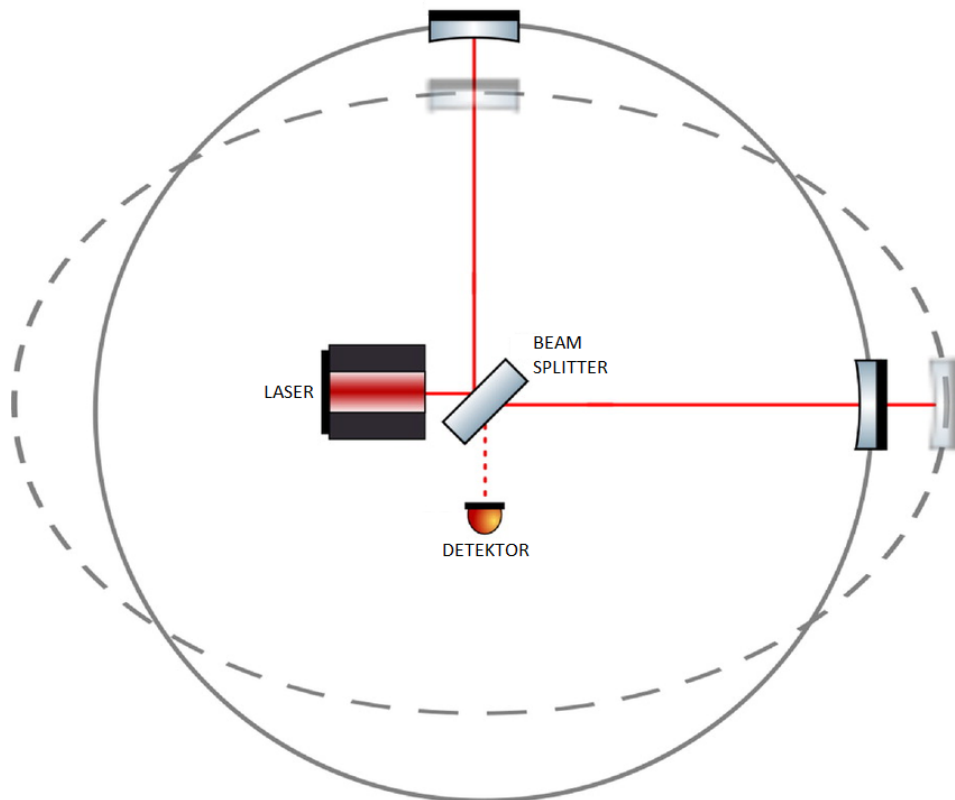
Prostorvremena crnih rupa sadrže značajku zbog koje su posebna u odnosu na

druga zakrivljena prostorvremena. Crne rupe imaju horizont događaja koji predstavlja kauzalnu granicu između unutrašnjosti crnih rupa i prostorvremena oko njih. Naime, prostorvrijeme unutar crnih rupa tako je zakrivljeno da je sav prostor koji bi promatrač (brzinom manjom od brzine svjetlosti) mogao dostići i dalje unutar crne rupe. Bilo koji događaj koji se dogodi unutar crne rupe ne može utjecati na događaj izvan nje. Sav učinak crne rupe, koji mi možemo promotriti, koji može utjecati na svemir oko nje, je onaj koji dolazi od prostorvremena crne rupe *izvan* horizonta. Međutim, kod nekih crnih rupa tu priča ne staje. Rotirajuće crne rupe imaju dva horizonta koje nazivamo unutarnji i vanjski. Vanjski je analogan horizontu događaja nerotirajućih crnih rupa, dok unutarnji dijeli prostorvrijeme na područje unutar kojega postoje zatvorene vremenske krivulje, odnosno dio prostorvremena u kojem nije moguće dobro zadati Cauchyjevu zadaću. Upravo zbog toga, taj se unutarnji horizont zove Cauchyjev horizont. Budući da smo usredotočeni na kvazinormalne mode crnih rupa i zanima nas dinamika polja u njihovom prostorvremenu, to možemo itekako adekvatno odraditi na primjeru crne rupe koja nema takvih komplikacija.

Koncentriranje na jednostavnije prostorvrijeme, kao što je Schwarzschildovo, daje nam jasniju kvalitativnu sliku, a pojedinosti kod više kompleksnih crnih rupa mogu se naći u referencama. Stoga, na primjeru Schwarzschildove crne rupe promatrat ćemo dinamiku skalarnog, vektorskog i tenzorskog polja u njenom prostorvremenu. Skalarno i vektorsko polje gledamo kao uronjene u zakrivljenu pozadinu, a kada pričamo o tenzorskom (odnosno gravitacijskom) polju proučavamo perturbaciju same metrike, odnosno dinamiku te perturbacije u zakrivljenoj pozadini. Interes nam je usmjeren prije svega na tenzorske, odnosno gravitacijske perturbacije, ali ćemo proučiti sličnosti odnosno razlike i s drugim perturbacijama.

## **1.2 Teorijska i eksperimentalna motivacija**

Gravitacijske perturbacije od velikog su interesa zato što su one te koje se eksperimentalno pokušavaju (i uspijevaju) mjeriti. Početke detektora gravitacijskih valova naći ćemo još u drugoj polovici 20. stoljeća kod njihovog idejnog začetnika Josepha Webbera. Zamislio je detektor sačinjen od čvrste šipke koja bi, izolirana od vibracija, trebala rezonirati s nadolazećim gravitacijskim valovima tako da dovoljno pojača signal kako bi ga se detektiralo. Prije svega, njihova iznimno niska cijena (tek djelić



Slika 1.1: Skica interferometrijskog detektora gravitacijskih valova. [3]

cijene interferometra koji se danas koriste) bila je jasna motivacija za gradnju takvog tipa detektora, pogotovo kad se radilo o prvim pothvatima u tom polju. Međutim, nedugo kasnije na samom kraju 90-tih godina te kroz 21. stoljeće počinju se pojavljivati interferometrijski detektori koji iskorištavaju interferencijska svojstva laserskih snopova kako bi detektirali pomak. Duž dva okomita kraka prolazi podijeljeni snop laserske svjetlosti koja se odbija od njihovih krajeva te na povratku recombiniра i usmjerava u detektor. Učinak gravitacijskih valova trebao bi jedan krak skratiti, a drugi izdužiti. Stoga, u detektoru ćemo vidjeti različitu fazu dvaju signala nego kada su krakovi nedeformirani. [2]

Skrećući pozornost na slabost gravitacijske sile bitno je naglasiti kako će pomak uzrokovan gravitacijskim valovima biti iznimno malen i stoga njegova detekcija predstavlja popriličan tehnički izazov. Jedan od trenutno najpoznatijih detektora gravitacijskih valova — LIGO (*Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory*) ima krakove duge oko 4 km, a promjene koje pokušava mjeriti su reda veličine  $10^{-18}$  m [2]. LIGO kolaboracija je 2015. godine prvi puta detektirala gravitacijske valove (dvaju crnih rupa koje su se sudarile) [1]. Nakon prvotne detekcije niz drugih događaja se i dalje bilježi. Donedavno su Virgo i LIGO bili jedini detektori na svijetu

koji su uspješno detektirali gravitacijske valove, a 2021. im se pridružila i japanska KAGRA kolaboracija (*Kamioka Gravitational-Wave Detector*). LIGO-va dva detektora (u Hanfordu i Livingstoneu), Virgo detektor u malenom selu u Italiji (Santo Stefano a Macerata) te KAGRA-in detektor u Hidi, u Japanu smatraju se interferometrima druge generacije (njihove verzije prije trenutnih nadogradnji spadaju u prvu generaciju). Postoje velika očekivanja za nadolazeću, treću generaciju detektora koji bi trebali čak za red veličine produžiti krakove (*Cosmic Explorer*) te primjerice direktno mjeriti polarizaciju valova zanimljivim dizajnom koji koristi tri kraka postavljena u trokut (*Einstein Telescope*). Nadalje, dugodosežni planovi od 2030. godine pa nadalje uključuju ne samo nove detektore na Zemlji, već i detektore u svemiru. LISA (*Laser Interferometer Space Antenna*) bi trebala 2034. biti sačinjena od tri satelita postavljenih u trokut. U takvom postavu efektivna duljina njenih krakova bila bi (prema trenutno predloženom dizajnu) 2.5 milijuna kilometara, povećavajući osjetljivost na neusporedivu razinu. Doduše, zemaljski detektori nisu u potpunosti za otpisati budući da se osjetljivost na gravitacijske valove niskog perioda smanjuje ako su duljine krakova iznimno velike.

Gravitacijski valovi otvaraju novo čulo s kojim možemo proučavati Svemir. Promatranje promjena u prostorvremenu samom po sebi pruža direktan pogled na gravitaciju. Njima bismo mogli ispitivati postojeću, ali i modificirane teorije gravitacije pa u konačnici i kvantne teorije. Sve navedeno zajedno s eksperimentalnom izvedivosti u dobroj mjeri ocrta gravitacijske valove kao jednu od popularnijih tema u fizici danas te daje jasnu motivaciju za međunarodne projekte na velikoj razini na kojoj se i planiraju.

## 2 Teorija perturbacija crnih rupa

U ovome radu ćemo se usredotočiti na crne rupe kao izvore gravitacijskih valova. Točnije, njihove svojstvene načine titranja koje zovemo kvazinormalni modovi. Proučavanje titranja prostorvremena crnih rupa radit ćemo kroz teoriju perturbacija. Pretpostavivši da se metrika neke crne rupe blago promijenila zanima nas na koji će način sustav evoluirati u vremenu. Odnosno, zanima nas dinamika perturbiranog prostorvremena crne rupe. Također, nećemo se zaustaviti samo na perturbaciji metrike, već ćemo pogledati i kako se (u prvom neiščezavajućem redu) ponašaju skalarno i vektorsko polje u zakrivljenom prostorvremenu crne rupe. Na taj način kategoriziramo perturbacije crne rupe po njihovom spinu. Dijelimo ih na tenzorske (gravitacijske), vektorske (elektromagnetske), i skalarne. Naziv ‘gravitacijske’ pridodajemo tenzorskim perturbacijama jer promatramo direktno dinamiku metrike kao takve, a za dinamiku vektorskih perturbacija promatramo vektorski potencijal elektromagnetskog polja, stoga i naziv ‘elektromagnetske’.

U ovom poglavlju izvest ćemo običnu diferencijalnu jednadžbu tzv. glavnu jednadžbu (eng. *master equation* koja opisuje dinamiku perturbirane Schwarzschildove crne rupe. Pokazat ćemo kako se ona svodi na jednostavan *Schrödinger-oliki* oblik. U izvodu, posebnu pozornost dajemo fizikalnoj interpretaciji podjele gravitacijskih perturbacija obzirom na njihov paritet. Za elektromagnetske i skalarne perturbacije ćemo također izvesti jednadžbu koju one zadovoljavaju s ciljem da pokažemo sličnosti i razlike između efektivnih potencijala koji vladaju odgovarajućim perturbacijama.

### 2.1 Gravitacijske perturbacije

Slijedeći pristup Chandrasekhara [4] pogledat ćemo kako izgleda perturbacija Schwarzschildove metrike. Općenito, metriku neke crne rupe možemo dokučiti oslanjajući se na simetrije koje očekujemo da će to prostorvrijeme imati. Primjerice, ako se radi o Schwarzschildovoj crnoj rupi tražit ćemo takvu metriku koja je statična i sfernosimetrična, dok su rotirajuće crne rupe općenitije — osnosimetrične i stacionarne. Ukoliko promotrimo najopćenitije prostorvrijeme koje može imati neka crna rupa zapravo promatramo točno onaj oblik kojega bi, recimo Schwarzschildova crna rupa imala uslijed općenite perturbacije. Stoga, uspoređujući članove

općenite metrike s onima u Schwarzschildovoj možemo vidjeti (i interpretirati) promjene koje dovodi perturbacija. Metriku općenito perturbirane Schwarzschildove crne rupe možemo promatrati kao osnosimetričnu metriku ovisnu o svim drugim koordinatama [4]. Naime, ne postoji preferirani smjer u Schwarzschildovom prostorvremenu što znači da rotacijom osnosimetrične perturbacije možemo rekonstruirati uistinu općenitu perturbaciju. Takva, osnosimetrična metrika oblika je

$$ds^2 = e^{2\nu} dt^2 - e^{2\psi} (d\varphi - q_0 dt - q_2 dr - q_3 d\theta)^2 - e^{2\mu_2} dr^2 - e^{2\mu_3} d\theta^2, \quad (2.1)$$

gdje su  $\nu$ ,  $\psi$ ,  $\varphi$ ,  $q_0$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ ,  $\mu_2$  i  $\mu_3$  funkcije ovisne o  $t$ ,  $r$ ,  $\theta$ . Taj se oblik svodi na Schwarzschildovu uz posebno odabrane funkcije

$$\begin{aligned} e^{2\nu} &= e^{-2\mu_2} = 1 - \frac{2M}{r}, \quad e^{2\mu_3} = r^2, \\ e^{2\psi} &= r^2 \sin^2 \theta, \quad q_0 = q_2 = q_3 = 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Stoga, općenitu perturbaciju Schwarzschildove crne rupe možemo opisati kao male varijacije funkcija oko njihovih Schwarzschildovih vrijednosti.

Općenite perturbacije Schwarzschildove crne rupe, sada opisane preko općenite metrike, kategoriziramo u dvije skupine — aksijalne i polarne perturbacije. Podjela se radi obzirom na njihovo ponašanje na paritetnu transformaciju. Aksijalne perturbacije prilikom paritetne transformacije dobivaju predznak  $(-)^{l+1}$ , dok polarne dobivaju predznak  $(-)^l$ . Ukoliko napravimo transformaciju  $\varphi \rightarrow -\varphi$  tada će funkcije  $q_0$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  sve morati promijeniti predznak kako bi metrika ostala invarijantna, dok ostale funkcije  $\nu$ ,  $\psi$ ,  $\mu_2$ ,  $\mu_3$  ne mijenjaju predznak. Perturbacije koje proizlaze iz prvih kategoriziramo kao aksijalne, dok iz drugih polarne. Nadalje interpretirajući fizikalno, način na koji funkcije  $q_0$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  sudjeluju u metrici je da miješaju vrijeme s koordinatama i tako induciraju rotaciju, pa i efekt povlačenja inercijalnog sustava [4]. Uzmimo za primjer da  $q_0 \neq 0$ ,  $q_2 = q_3 = 0$ . U tom slučaju postojat će dio prostorvremena u kojem promatrač neće moći mirovati u odnosu na promatrača u beskonačnosti, već će crna rupa povući njegov inercijalni sustav u gibanje oko nje. Taj se efekt često spominje kod rotirajućih crnih rupa i u kontekstu izvlačenja energije iz crne rupe (Penroseov proces) [5].

Što se aksijalnih perturbacija tiče  $q_0$ ,  $q_2$ ,  $q_3 = 0$  za Schwarzschildovo prostorvrijeme, stoga oni sami će predstavljati male veličine prvog reda  $\varepsilon$ , dok za polarne per-

turbacije kao male veličine prvog reda smatramo varijacije tih funkcija  $\delta\nu$ ,  $\delta\psi$ ,  $\delta\mu_2$ ,  $\delta\mu_3$ . Sljedeći je korak raspisati Einsteinove jednađžbe (u prvom redu perturbativnog računa) te svesti ih na oblik poznat u literaturi.

Promotrimo Einsteinove jednađžbe u prvom redu perturbativnog računa uz pretpostavku da za funkcije u metrici koje predstavljaju polarne perturbacije uzimamo njihove Schwarzschildove vrijednosti. Točnije, pretpostavljamo da je perturbacija isključivo aksijalna. Raspisujući metriku (2.1) i uzimajući u obzir samo male veličine prvog reda, komponente aksijalno perturbirane metrike  $g_{\mu\nu}^A$  su sljedeće

$$g_{\mu\nu}^A = \begin{pmatrix} e^{2\nu} & 2e^{2\psi}q_0 & 0 & 0 \\ 2e^{2\psi}q_0 & -e^{2\psi} & 2e^{2\psi}q_2 & 2e^{2\psi}q_3 \\ 0 & 2e^{2\psi}q_2 & -e^{2\mu_2} & 0 \\ 0 & 2e^{2\psi}q_3 & 0 & -e^{2\mu_3} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

Kako bismo izvrijednili Einsteinove jednađžbe (1.1) trebamo izračunati komponente Riccijevog tenzora. Radi brzine i jednostavnosti preuzet ćemo analitičke izraze za komponente Riccijevog tenzora izračunate u [4]. Za Riccijev skalar znamo da je  $R = 0$  budući da se radi o vakuumskom rješenju.

Einsteinova jednađžba općenito ima deset komponenti te raspisivanje i promatranje svake posebno nema puno smisla, budući da nam je cilj uspoređivati konačni oblik običnih diferencijalnih jednađžbi za aksijalne i polarne perturbacije. U ovom dijelu usredotočeni smo na aksijalne perturbacije te ćemo odmah pogledati točno one jednađžbe koje upravo opisuju te perturbacije, a to su komponente  $(\mu, \nu) = (0, 1), (1, 2), (1, 3)$ . Valja spomenuti kako ostale jednađžbe (nezavisne o ovoj) opisuju isključivo polarne perturbacije. Stoga, ispada da su polarne i aksijalne perturbacije međusobno razvezane (u prvom redu perturbativnog računa) iako dolaze iz istog sustava diferencijalnih jednađžbi. Raspisujući relevantne jednađžbe imamo

$$\begin{aligned} R_{12} = 0 &\rightarrow \frac{\partial}{\partial\theta} (e^{3\psi+\nu-\mu_2-\mu_3}Q_{23}) = -\frac{\partial}{\partial t} (e^{3\psi-\nu-\mu_2+\mu_3}Q_{02}), \\ R_{13} = 0 &\rightarrow \frac{\partial}{\partial r} (e^{3\psi+\nu-\mu_2-\mu_3}Q_{23}) = +\frac{\partial}{\partial t} (e^{3\psi-\nu+\mu_2-\mu_3}Q_{03}), \end{aligned} \quad (2.4)$$

gdje je  $Q_{\mu\nu} = \partial_\nu q_\mu - \partial_\mu q_\nu$ . Nadalje, uz supstituciju  $\chi(t, r, \theta) = r^2 f Q_{23} \sin^3 \theta$  imamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^4 \sin^3 \theta} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial q_0}{\partial r} - \frac{\partial q_2}{\partial t} \right), \\ \frac{f}{r^2 \sin^3 \theta} \frac{\partial \chi}{\partial r} &= +\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial q_0}{\partial \theta} - \frac{\partial q_3}{\partial t} \right),\end{aligned}\tag{2.5}$$

gdje je  $f \equiv f(r) = 1 - \frac{2M}{r}$ . Pretpostavljajući vremensku ovisnost  $q_\mu \propto e^{-i\omega t}$ , derivirajući gornju jednadžbu po  $\theta$  i donju po  $r$  te zbrajanjem riješit ćemo se člana s  $q_0$  i preostaje nam

$$r^4 \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{f}{r^2} \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) + \sin^3 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{1}{\sin^3 \theta} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) + \omega^2 \frac{r^2}{f} \chi = 0.\tag{2.6}$$

Separiramo kutni dio pomoću Gegenbaureovih polinoma  $C_n^\alpha(\theta)$  (vidi dodatak B.1) koji zadovoljavaju

$$\frac{d}{d\theta} \left( \sin^{2\alpha} \theta \frac{dC_n^\alpha(\theta)}{d\theta} \right) + n(n+2\alpha) \sin^{2\alpha} \theta C_n^\alpha(\theta) = 0\tag{2.7}$$

a za radijalni nam ostaje

$$r^2 f \frac{d}{dr} \left( \frac{f}{r^2} \frac{d\chi}{dr} \right) - 2n \frac{f}{r^2} \chi + \omega^2 \chi = 0,\tag{2.8}$$

gdje  $2n$  dolazi iz Gegenbaureove jednadžbe i povezan je s poznatom konstantom  $l$  korištenom u Legendreovim polinomima kao  $2n = (l-1)(l+2)$ . Uz dodatnu supstituciju  $\psi^A = r\chi$  i uvođenjem Eddington-Finkelsteinove radijalne koordinate  $\frac{dx}{dr} = (1 - \frac{2M}{r})^{-1}$  (često zvane ‘kornjačina koordinata’) dolazimo do poznatog *Schrödingerolikog* oblika

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 - V_{s=2}^A(x) \right) \psi^A = 0,\tag{2.9}$$

$$V_{s=2}^A(r) = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left( \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3} \right).\tag{2.10}$$

Potencijal (2.10) je izražen preko standardne radijalne koordinate radi preglednosti i lakšeg uočavanja asimptotskog ponašanja blizu horizonta te u beskonačnosti. Također, tu je i praktična prepreka jer eksplicitna ovisnost  $x(r) = r + 2M \ln(\frac{r}{2M} - 1)$  se može izvrnuti koristeći Lambertovu  $W$ -funkciju [6] što nam daje oblik

$$r(x) = 2M (1 + W(e^{(x-2M)/2M}))\tag{2.11}$$



koji ipak nije pretjerano koristan (barem za naše potrebe). Ova tzv. glavna jednadžba (2.9) (eng. *master equation*) zove se Regge-Wheelerova u čast onima koji su je originalno i pronašli [7]. Doduše Regge i Wheeler su pristupili problemu na nešto drugačiji način. Perturbaciju metrike razvijaju po tenzorskim sfernim harmonicima te se na taj način ‘riješ’ kutnog dijela i svedu jednadžbu na konačni oblik. Uz moderniju notaciju taj je pristup dobro pokazan i u [8]. U daljnjim poglavljima vidjet ćemo kako izgledaju efektivni potencijali za skalarnu i vektorsku perturbaciju te koliko su svi međusobno slični. Za sada, još se držimo gravitacijskih perturbacija i kratko prebacujemo pažnju na polarne gravitacijske perturbacije.

Za polarne perturbacije opet imamo izazov rješavanja (sada još većeg) sustava diferencijalnih jednadžbi. Analogno postupku kod aksijalnih perturbacija, moramo gledati jednadžbe koje sadrže funkcije, odnosno varijacije funkcija, odgovorne za polarne perturbacije. Uzimajući da su perturbacije isključivo polarne, odnosno uzimajući za  $q_0 = q_2 = q_3 = 0$  radimo niz supstitucija i redefinicija koje nas opet vode do konačnog oblika vremenski neovisne Schrödingerove jednadžbe nazvane prema Zerilliju [9]

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 - V_{s=2}^P(x) \right) \psi^P = 0, \quad (2.12)$$

ovoga puta s potencijalom

$$V_{s=2}^P(r) = 2 \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{n^2(n+1)r^3 + 3Mn^2r^2 + 9M^2nr + 9M^3}{r^3(nr + 3M)^2}, \quad (2.13)$$

gdje je  $2n = (l-1)(l+2)$ . Iznimno bitan rezultat koji ćemo kasnije u detalje pogledati kaže da, makar su njihovi potencijali drastično različiti, kvazinormalni modovi polarnih i aksijalnih gravitacijskih perturbacija su isti. Ne samo to, već i ako gledamo problem raspršenja koeficijenti refleksije i transmisije bit će isti. Razlog tomu je duboka (i očito netrivialna) veza između ovih potencijala koju je prvi upazio Chandrasekhar [4, 10].

## 2.2 Elektromagnetske perturbacije

Spuštajući spin za jedan, dolazimo do vektorskih, odnosno elektromagnetskih perturbacija. Uzimajući drugačiji, više matematički pristup uvest ćemo *vektorske sferne*

harmonike te pomoću njih razviti elektromagnetski potencijal, vektorsko polje  $A_\mu$ . Raspisujući Maxwellove jednadžbe pokazat ćemo kako opet, kao i kod gravitacijskih perturbacija, dolazimo do relativno jednostavnog oblika vremenski neovisne Schrödingerove jednadžbe.

Kako se skalarno polje može razviti po Legendreovim polinomima, odnosno sfernim harmonicima zato što čine potpun skup stanja, isto možemo napraviti i za vektorska polja. Definiramo vektorske sferne harmonike u kojima ćemo razviti vektorski potencijal

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_A(\theta, \varphi) &= (Y_{lm}, Y_{lm}) \\ \mathbf{Y}_B^+(\theta, \varphi) &= (\partial_\theta Y_{lm}, \partial_\varphi Y_{lm}) \\ \mathbf{Y}_B^-(\theta, \varphi) &= \left( \frac{1}{\sin \varphi} \partial_\varphi Y_{lm}, -\sin \theta \partial_\theta Y_{lm} \right)\end{aligned}\tag{2.14}$$

gdje indeksi idu po  $A \in \{t, r\}$  i  $B \in \{\theta, \varphi\}$  te gdje smo notacijski ispustili ovisnost  $Y_{lm}(\theta, \varphi)$  radi preglednosti. Kod vektorskih harmonika  $\mathbf{Y}_B^+$  i  $\mathbf{Y}_B^-$  indeksi +, odnosno – označavaju njihovo ponašanje s obzirom na paritetnu transformaciju (analogno rastavu koji smo napravili u slučaju gravitacijskih perturbacija). Dakle, ako operator paritetne transformacije označimo s  $\mathcal{P}$  vrijedi

$$\begin{aligned}\mathcal{P}[\mathbf{Y}_B^+] &= (-)^l \mathbf{Y}_B^+ \\ \mathcal{P}[\mathbf{Y}_B^-] &= (-)^{l+1} \mathbf{Y}_B^-\end{aligned}\tag{2.15}$$

Prema tome, od sada nadalje zvat ćemo ih polarni i aksijalni, redom. Razvoj vektorskog polja  $A_\mu$  onda izgleda kao

$$A_\mu(t, r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a(t, r) \frac{\partial_\varphi Y_{lm}}{\sin \theta} \\ -a(t, r) \sin \theta \partial_\theta Y_{lm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g(t, r) Y_{lm} \\ h(t, r) Y_{lm} \\ k(t, r) \partial_\theta Y_{lm} \\ k(t, r) \partial_\varphi Y_{lm} \end{pmatrix} \right], \tag{2.16}$$

gdje smo odvojili po stupcima one dijelove koji su aksijalni od onih koji su polarni, redom.

Raspisujemo Maxwellove jednadžbe

$$\nabla_\mu F^{\mu\nu} = 0, \quad (2.17)$$

uz pomoć dodatka A znamo kako kovarijantna derivacija djeluje

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} F^{\mu\nu}) = 0. \quad (2.18)$$

Preostalo je samo raspisati Maxwellov tenzor  $F^{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)$  te konačno imamo

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} (\partial_\alpha A_\beta - \partial_\beta A_\alpha)) = 0. \quad (2.19)$$

Uz malo muke od  $t$  i  $r$  komponenti dobivamo po jednu jednadžbu, a od  $\theta$  i  $\varphi$  komponenti po dvije, ali iste. Dakle, imamo ukupno četiri jednadžbe, jednako s koliko smo i počeli

$$l(l+1)(g - (\partial_t k)) - f(2r(\partial_r g) - 2r(\partial_t h) + r^2(\partial_r^2 g) - r^2(\partial_r \partial_t h)) = 0, \quad (2.20a)$$

$$l(l+1)(h - (\partial_r k)) + \frac{r^2}{f} ((\partial_t^2 h) - (\partial_r \partial_t g)) = 0, \quad (2.20b)$$

$$f(\partial_r f)(h - (\partial_r k)) + f^2((\partial_r h) - (\partial_r^2 k)) - (\partial_t g) + (\partial_t^2 k) = 0, \quad (2.20c)$$

$$\frac{l(l+1)}{r^2} f a - f(\partial_r f)(\partial_r a) - f^2(\partial_r^2 a) + (\partial_t^2 a) = 0, \quad (2.20d)$$

gdje su notacijski ispuštene ovisnosti funkcija  $a(t, r)$ ,  $g(t, r)$ ,  $h(t, r)$ ,  $k(t, r)$ ,  $f(r)$  radi preglednosti. Zanimljivo je kako se jedna jednadžba odmah u potpunosti odvezala od ostatka sustava. Jednadžba (2.20d) je upravo ona koja opisuje aksijalne perturbacije i odvezala se od ostalih, polarnih perturbacija. Brzo vidimo da uvođenje kornjačine koordinate  $\frac{dx}{dr} = (1 - \frac{2M}{r})^{-1}$  daje

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 - V_{s=1}^A(x) \right) a(x) = 0 \quad (2.21)$$

$$V_{s=1}^A = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{l(l+1)}{r^2}$$

Preostale tri jednadžbe, koje opisuju polarne perturbacije, nisu nezavisne. Prvo ćemo pokazati kako dolazimo do konačnog oblika, a onda i koje veze postoje među funkcijama koje tražimo. Raspis  $(\partial_r(2.20a)) - (\partial_t(2.20b))$  uz supstituciju  $u(r) =$

$\frac{r^2}{l(l+1)} ((\partial_t h) - (\partial_r g))$  daje

$$l(l+1)\frac{u}{r^2} + \frac{r^2}{f} \cdot \frac{\partial_t^2 u}{r^2} - (\partial_r f) (\partial_r u) - f (\partial_r^2 u) = 0 \quad (2.22)$$

što se, nakon uvođenja kornjačine koordinate, svodi na

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 - V_{s=1}^P(x) \right) u(x) = 0 \quad (2.23)$$

$$V_{s=1}^P = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \frac{l(l+1)}{r^2}$$

Dakle, potencijal polarnih i aksijalnih elektromagnetskih, odnosno vektorskih perturbacija su identični  $V_{s=1}^A = V_{s=1}^P$ .

Veze između triju jednačbi koje opisuju polarne perturbacije mogu se naći kroz razne manipulacije. Jedan način za doći do veze između funkcija  $h$  i  $k$  je sljedeći. Uzmimo  $(\partial_r(2.20a))$  i pomnožimo s  $f/l(l+1)$  te iskoristimo jednačbu (2.23), dok  $(\partial_t(2.20b))$  pomnožimo s  $f/r^2$  te rezultate zbrojimo kako bismo dobili

$$\partial_t h = \partial_r \partial_t k. \quad (2.24)$$

Vežu  $g$  i  $k$  možemo pronaći deriviranjem treće jednačbe  $(\partial_t(2.20c))$  te korištenjem (2.24)

$$\partial_t^2 g = \partial_t^3 k. \quad (2.25)$$

Iz njih zajedno možemo povezati  $h$  i  $g$ .

Počevši od četiri Maxwellove jednačbe, razvoj vektorskog potencijala  $A_\mu$  po vektorskim sfernim harmonicima dao nam je jednu nevezanu diferencijalnu jednačbu i sustav od tri vezane. Nevezana jednačba opisuje aksijalne perturbacije te smo ju sveli na poznati oblik. Za preostali sustav od tri jednačbe pokazali smo kako nije sastavljen od nezavisnih jednačbi te se u stvari svodi na jednu diferencijalnu jednačbu drugog reda do koje dolazimo linearnom kombinacijom jednačbi iz sustava. Ona opisuje polarne perturbacije te ima identičan efektivni potencijal kao što se nalazi i kod aksijalnih perturbacija.

### 2.3 Skalarnе perturbacije

Daleko najjednostavnije perturbacije, upravo zbog manjeg broja stupnjeva slobode u odnosu na vektorske ili tenzorske, ukratko ćemo obraditi raspisujući Klein-Gordonovu jednadžbu u Schwarzschildovom prostorvremenu. U dodatku A vidimo kako izgleda D'Alambertov operator u općenito zakrivljenom prostorvremenu. Uzimajući za metriku konkretno

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

uz pomoć (A.4) raspisuјemo  $\square\phi = 0$

$$-\frac{1}{f(r)}\partial_t^2\phi + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\partial_r(r^2 \sin\theta f(r)\partial_r\phi) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\partial_\theta(\sin\theta\partial_\theta\phi) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\partial_\varphi^2\phi = 0, \quad (2.27)$$

gdje je  $f(r) = 1 - \frac{2M}{r}$ . Pretpostavljamo rješenje razvijeno po sfernim harmonicima

$$\phi(t, r, \theta, \varphi) = e^{-i\omega t} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{\psi_{lm}(r)}{r} \mathcal{P}_{lm}(\theta) e^{-im\varphi}, \quad (2.28)$$

i koristimo pridruženu Legendreovu jednadžbu (B.5) kako bi se riješili kutnog dijela te dobili

$$f(r)^2 \frac{d^2\psi}{dr^2} + f(r)f'(r) \frac{d\psi}{dr} + \left(\omega^2 - f(r) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{f'(r)}{r}\right)\right) \psi = 0, \quad (2.29)$$

gdje smo ispustili indekse  $l, m$  te  $f'(r) = \frac{df(r)}{dr}$ . Uvođenjem kornjača koordinate  $\frac{dx}{dr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$  odmah dolazimo do

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (\omega^2 - V_{s=0}(x)) \psi = 0, \quad (2.30)$$

$$V_{s=0}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3}\right),$$

gdje je opet radi preglednosti i praktičnosti potencijal izražen preko standardne radijalne koordinate  $r$ .

## 2.4 Kvazinormalni modovi

Prije svega precizno ćemo definirati kvazinormalne modove<sup>1</sup> i vidjeti kako ta definicija daje diskretni spektar frekvencija. Ilustrirat ćemo koji se problemi javljaju u analitičkom računu i kakve izazove predstavljaju za numeričke izračune. Nadalje, posvetit ćemo se specifično gravitacijskim perturbacijama i pokazati veoma bitan rezultat koji govori da su potencijali aksijalnih i polarnih gravitacijskih perturbacija izospektralni. Nadalje, gledajući problem raspršenja gravitacijskih valova na crnoj rupi pokazat ćemo da izospektralnost implicira jednakost koeficijenata refleksije i transmisije za polarne i aksijalne perturbacije. Naravno, skalarne perturbacije se ni ne dijele na aksijalne i polarne, dok vektorske imaju identične potencijale za jedne i druge. Međutim, gravitacijske perturbacije imaju drastično različite analitičke oblike potencijala što čini ovaj rezultat tim više iznenađujućim. Konačno, to znači da potragu za kvazinormalnim frekvencijama možemo provoditi samo na aksijalnim perturbacijama čiji potencijal je puno jednostavniji, a ukoliko ih pronađemo vrijede i za polarne perturbacije.

### 2.4.1 Definicija kvazinormalnih modova

Radi pristupačnosti zapisat ćemo odjednom jednadžbu za sve spinove perturbacija

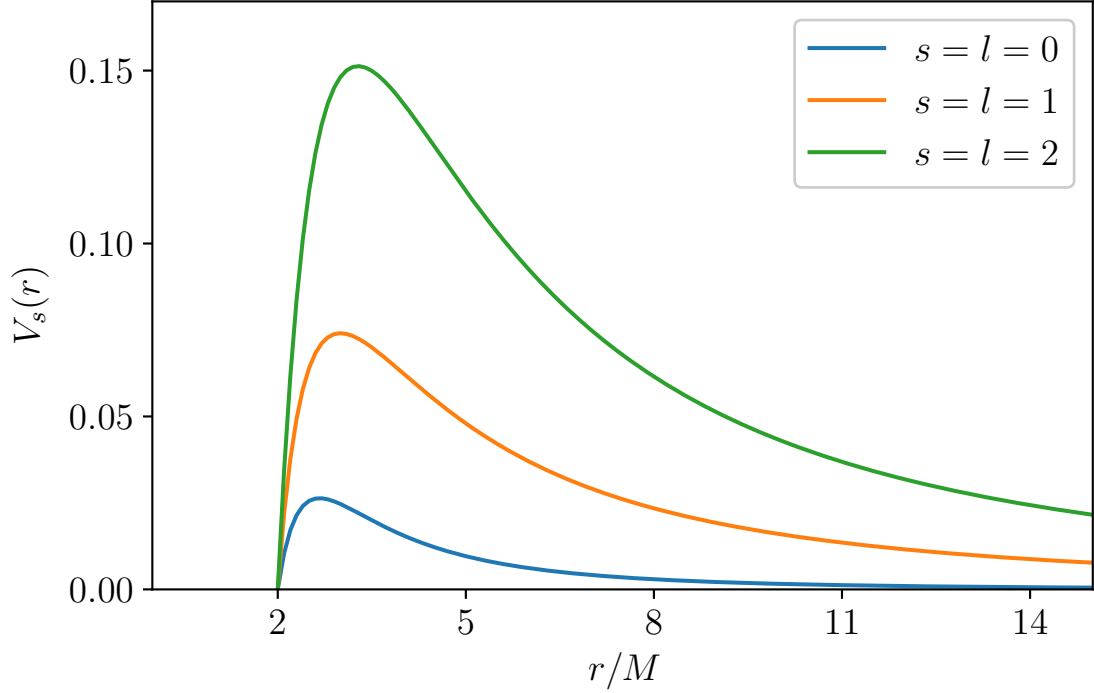
$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \omega^2 - V_s(x) \right) \psi = 0, \quad (2.31)$$
$$V_s(r) = \left( 1 - \frac{2M}{r} \right) \left( \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} (1 - s^2) \right),$$

gdje  $s = 2$  reproducira aksijalne gravitacijske perturbacije. Prije svega, bitno nam je razumjeti kako se potencijal ponaša na rubovima prostora kako bismo onda mogli i zahtijevati dobre rubne uvjete. Na slici 2.1 je nacrtan potencijal (2.31) za različite spinove perturbacija. Kako idemo prema beskonačnosti vidimo da potencijal trne prema nuli neovisno o spinu perturbacije. Možemo zaključiti da će u beskonačnosti onda jednadžba (2.31) davati za rješenja ravne valove. Ista stvar događa se i na horizontu - potencijal trne prema nuli i rješenja su ravni valovi.

Budući da imamo tu sreću da se potencijal ponaša vrlo jednostavno na rubovima

---

<sup>1</sup>Naziv 'kvazinormalni modovi crnih rupa' mogao bi se tehnički interpretirati da se odnosi *isključivo* na crnu rupu te stoga samo na gravitacijske perturbacije. U ovome radu kada kažemo kvazinormalni modovi općenito mislimo na svojstvene načine titranja ne samo perturbacije gravitacijskog polja, već i skalarnog i vektorskog polja uronjenog u pozadinsko prostorvrijeme crne rupe.



Slika 2.1: Potencijal prikazan za različite perturbacije.

prostora, lagano ćemo dokučiti rubne uvjete za ovaj problem. Ništa ne smije izlaziti iz horizonta crne rupe te ništa ne smije dolaziti iz beskonačnosti. Dakle, na horizontu su dozvoljeni samo ulazeći ravni valovi, a u beskonačnosti samo izlazeći. Općenita rješenja u asimptotskim područjima, prije primjene definirajućih rubnih uvjeta, možemo zapisati prema uzoru na [11] koristeći njihovu notaciju *in*, *out*, *up*, *down* za dva para nezavisnih rješenja

$$\psi^{in}(x) = \begin{cases} e^{-i\omega x} & ; x \rightarrow -\infty \\ A_{out}(\omega)e^{i\omega x} + A_{in}(\omega)e^{-i\omega x} & ; x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (2.32)$$

$$\psi^{up}(x) = \begin{cases} B_{out}(\omega)e^{i\omega x} + B_{in}(\omega)e^{-i\omega x} & ; x \rightarrow -\infty \\ e^{i\omega x} & ; x \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (2.33)$$

koja su međusobno povezana kompleksnom konjugacijom na sljedeći način  $\psi^{out}(x) = [\psi^{in}(x)]^*$ ,  $\psi^{down}(x) = [\psi^{up}(x)]^*$ . Dakle, dva rješenja su nam već dovoljna da njihovom linearnom kombinacijom pokrijemo sva rješenja. U daljnjem tekstu koristit ćemo kao bazu  $\psi^{in}$  i  $\psi^{up}$  kako su i napisani u (2.32) i (2.33).

Nametanje rubnih uvjeta za kvazinormalne modove značilo bi  $A_{in}(\omega) = B_{out}(\omega) =$

0. Ako pogledamo kako izgleda Wronskijan ovih rješenja vidjet ćemo da je proporcionalan upravo tim koeficijentima

$$\begin{aligned}
 x \rightarrow -\infty & & x \rightarrow +\infty \\
 W &= e^{-i\omega x} i\omega (B_{out}(\omega)e^{i\omega x} - B_{in}(\omega)e^{-i\omega x}) & W &= (A_{out}(\omega)e^{i\omega x} + A_{in}(\omega)e^{-i\omega x}) e^{i\omega x} i\omega \\
 &+ i\omega e^{-i\omega x} (B_{out}(\omega)e^{i\omega x} + B_{in}(\omega)e^{-i\omega x}) & &- i\omega (A_{out}(\omega)e^{i\omega x} - A_{in}(\omega)e^{-i\omega x}) e^{i\omega x} \\
 &= 2i\omega B_{out}(\omega) & &= 2i\omega A_{in}(\omega)
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Neovisno izvrijednimo li ga na horizontu ili u beskonačnosti znamo da mora biti konstantan pa zato zaključujemo  $A_{in}(\omega) = B_{out}(\omega)$ . Upravo ti koeficijenti su oni koji trebaju biti nula ako želimo da rubni uvjeti za kvazinormalne modove vrijede. Stoga, taj uvjet  $W = 0$  daje jednadžbu koja definira kvazinormalne modove  $\omega$ . Valja također napomenuti, ako napišemo Greenovu funkciju ove diferencijalne jednadžbe drugog reda imamo

$$G(x, y) = \frac{1}{W} \begin{cases} \psi^{in}(x)\psi^{up}(y); & x < y \\ \psi^{in}(y)\psi^{up}(x); & x > y \end{cases} \tag{2.35}$$

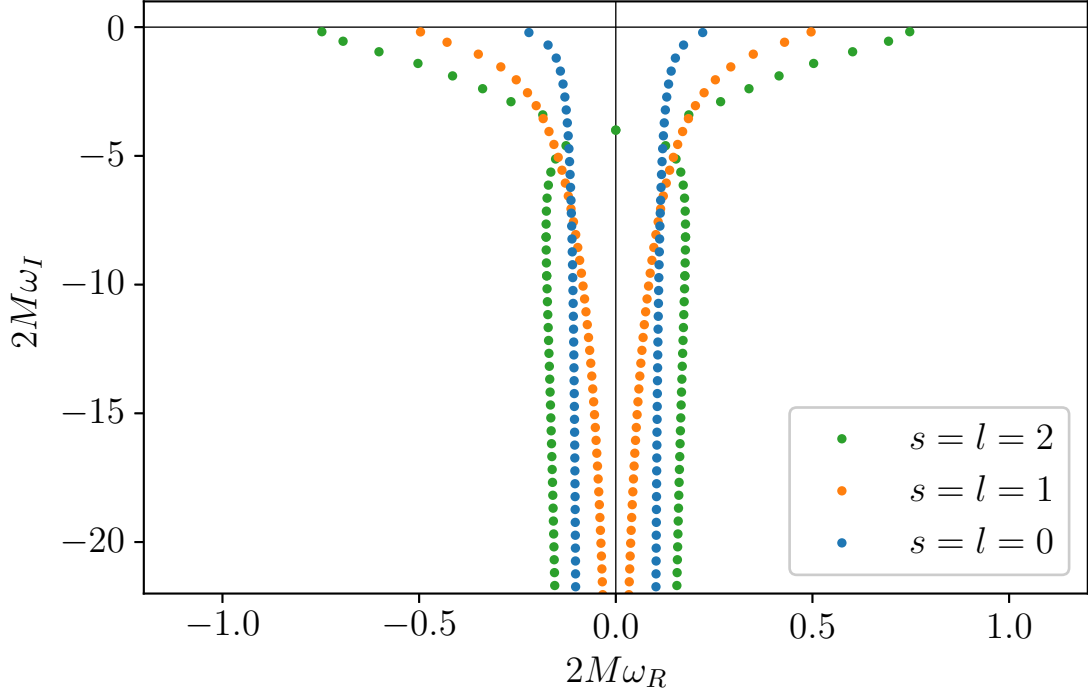
Što znači da traženje kvazinormalnih modova možemo također promatrati kao potragu za polovima Greenove funkcije. Na slici 2.2 možemo vidjeti gdje se nalaze prvih nekoliko modova za različite spinove perturbacija.

Naravno, kvazinormalni modovi se nalaze u kompleksnoj ravnini budući da se radi o disipativnom sustavu, imaginarni dio frekvencije zaslužan je za gušenje. Vidjeli smo da su kompleksni konjugati prethodnih rješenja i sami po sebi rješenja te isto vrijedi i za frekvencije. Fizikalno relevantne frekvencije bit će one čiji predznak imaginarnog dijela se slaže s onime izabranom u odabiru vremenske ovisnosti (ovdje koristimo  $e^{-i\omega t}$ ). Razlog tomu je jasan: budući da vrijedi  $e^{-i(\omega_R+i\omega_I)t} = e^{-i\omega_R t} e^{\omega_I t}$ , mora vrijediti  $\omega_I < 0$  kako bismo dobili željeno gušeno ponašanje.

Nastavno na temu predznaka, nailazimo na prepreku kada pogledamo kako izgleda potpuno rješenje u beskonačnosti

$$\begin{aligned}
 \psi_\infty(x) &= e^{-i\omega t} e^{i\omega x} \\
 &= e^{-i\omega_R t} e^{i\omega_R x} e^{\omega_I t} e^{-\omega_I x}.
 \end{aligned} \tag{2.36}$$





Slika 2.2: Prvih trideset kvazinormalnih modova za različite spinove perturbacija.

Vremensko ponašanje koje smo zahtijevali maloprije sada zadaje prostorne probleme, jer naime ako je  $\omega_I < 0$  onda za  $x \rightarrow +\infty$  rješenje eksplodira. Isto tako i za drugi kraj prostora, prema horizontu. Tamo je rješenje

$$\begin{aligned} \psi_H(x) &= e^{-i\omega t} e^{-i\omega x} \\ &= e^{-i\omega_R t} e^{-i\omega_R x} e^{\omega_I t} e^{\omega_I x}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Dakle, za  $x \rightarrow -\infty$  imamo problem jer  $\omega_I < 0$  i opet rješenje eksplodira. Vraćajući se natrag u standardnu radijalnu koordinatu problem na horizontu elegantno rješavamo, odnosno pokazujemo da se radi samo o artefaktu koordinatnog sustava. Naime, uz  $x = r + 2M \ln(r/2M - 1)$  imamo

$$\psi_H(r) = e^{-i\omega_R t} e^{-i\omega_R r} e^{\omega_I t} e^{\omega_I r} \left( \frac{r}{2M} - 1 \right)^{2M(-i\omega_R + \omega_I)}, \quad (2.38)$$

gdje uvrštavanjem  $r = 2M$  dobivamo neproblematičnu nulu.

Ponašanje u beskonačnosti ostaje, naizgled, problematično. Opravdanje leži u činjenici da perturbaciji treba beskonačno vremena da stigne do beskonačnosti te bi jedna eksponencijala trebala kompenzirati drugu [11]. Formalnije, kvazinormalni

modovi su *kvazistacionarna* stanja koja *ne tvore* potpun skup stanja, već opisuju perturbaciju koja ne postoji vječno niti svugdje, nego je bila pobuđena u nekom danom trenutku i na nekom mjestu [10]. Osim teorijskih pitanja vezanih za regularnost rješenja, zbog ovog problema javljaju se numerički izazovi. Naime, ukoliko je ponašanje rješenja takvo, onda numerički moramo množiti jako velike brojeve (prostorni dio koji eksplodira) s jako malenim brojevima (vremenski dio koji trne) i vrlo brzo nam ponestaju dostupna decimalna mjesta za račun, umanjujući time preciznost izračuna.

## 2.4.2 Izospektralnost aksijalnih i polarnih perturbacija

U ovom dijelu usredotočit ćemo se na gravitacijske perturbacije i promotriti razlike, odnosno sličnosti aksijalnih i polarnih perturbacija. Elektromagnetskim perturbacijama potencijal je identičan za aksijalne i polarne, dok se skalarne perturbacije ne dijele na aksijalne i polarne. Kod gravitacijskih perturbacija potencijali aksijalnih, odnosno polarnih perturbacija su sljedeći

$$\begin{aligned} V_{s=2}^A(r) &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{6M}{r^3}\right), \\ V_{s=2}^P(r) &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{2n^2(n+1)r^3 + 6n^2Mr^2 + 18nM^2r + 18M^2}{r^3(nr + 3M)^2}\right), \end{aligned} \quad (2.39)$$

gdje je  $2n = (l-1)(l+2)$ . Chandrasekhar i Detweiler su prvi [10] otkrili da će koeficijenti refleksije i transmisije u problemu raspršenja na potencijalima aksijalnih i polarnih perturbacija biti isti te da su im frekvencije kvazinormalnih modova identične [12]. Također, Chandrasekhar je pronašao vezu između ta dva potencijala [13] te se oni općenito znaju nazivati superpartner potencijali [10, 14]. Dubina veze ovih potencijala također se može naći i u Darbouxovim transformacijama [15]. Zadržavajući fokus na gravitacijskim perturbacijama Schwarzschildove crne rupe pišemo točno kako izgleda veza dvaju potencijala

$$V_{1,2} = \pm \beta \frac{dg}{dx} + \beta^2 g^2 + \kappa g, \quad (2.40)$$

gdje su  $\beta = 6M$ ,  $g = \frac{f}{r(\mu^2 r + \beta)}$ ,  $\kappa = \mu^2(\mu^2 + 2)$ ,  $\mu^2 = l(l+1) - 2$ , a same potencijale smo preimenovali tako da su  $V_1 \equiv V_{s=2}^P$ ,  $V_2 \equiv V_{s=2}^A$  i redom odgovaraju predznaku

+, odnosno –. Ova relacija dovodi potencijale u takvu vezu da oba proizlaze iz iste funkcije  $g$  što za posljedicu ima niz iznenađujućih rezultata.

Idući korak u pokazivanju izospektralnosti je vidjeti kako je moguće rješenje za polarne perturbacije napisati kao linearnu kombinaciju rješenja za aksijalne perturbacije i njegove derivacije (i obrnuto). Pretpostavit ćemo vezu

$$\psi_1 = p\psi_2 + q\psi_2', \quad (2.41)$$

gdje  $\psi_1$  i  $\psi_2$  odgovaraju rješenjima za polarne odnosno aksijalne perturbacije, redom. Slijedi pokazati da postoje  $p$ ,  $q$  takvi da relacija vrijedi. Derivirajući dva puta izraz (2.41) imamo

$$\begin{aligned} \psi_1'' &= \psi_2 (p'' + (p + 2q') (V_2 - \omega^2) + qV_2') + \\ &+ \psi_2' (2p' + q'' + q (V_2 - \omega^2)) \end{aligned} \quad (2.42)$$

gdje smo se riješili drugih derivacija drugog rješenja korištenjem glavne jednadžbe  $\psi_2'' = (V_2 - \omega^2)\psi_2$ . Sada raspisujemo  $\psi_1'' = (V_1 - \omega^2)\psi_1$  i uspoređujemo izraze uz  $\psi_1$  i  $\psi_1'$  s lijeve, odnosno desne strane jednadžbe. Dobivamo diferencijalne jednadžbe za  $p$  i  $q$

$$\begin{aligned} p'' + (V_2 - \omega^2)(p + 2q') + qV_2' &= (V_1 - \omega^2)p \\ 2p' + q'' + q(V_2 - \omega^2) &= (V_1 - \omega^2)q. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Drugu jednadžbu uvrštavamo u prvu koju smo pomnožili s  $q$  kako bismo došli do

$$q''p - qp'' + 2p'p - 2q'q(V_2 - \omega^2) - q^2V_2' = 0, \quad (2.44)$$

što lako integriramo i konačno dobivamo

$$(q'p - qp') + p^2 - q^2(V_2 - \omega^2) = \text{const.} \quad (2.45)$$

Birajući za konstantu  $\text{const.} = \kappa^2 + 4\beta^2\omega^2$  lako se vidi kako sljedeća rješenja zadovoljavaju jednadžbu

$$\begin{aligned}
p &= \kappa + 2\beta^2 g, \\
q &= 2\beta.
\end{aligned}
\tag{2.46}$$

Isti se postupak može provesti počevši od  $\psi_2 = r\psi_1 + s\psi_1'$  kako bi se izrazilo drugo rješenje preko prvoga i njegove derivacije. Birajući dobru normalizaciju [4] pišemo oba konačna izraza

$$\begin{aligned}
(\kappa + 2i\omega\beta)\psi_1 &= (\kappa + 2\beta^2 g)\psi_2 + 2\beta\psi_2' \\
(\kappa - 2i\omega\beta)\psi_2 &= (\kappa + 2\beta^2 g)\psi_1 - 2\beta\psi_1'
\end{aligned}
\tag{2.47}$$

Ove relacije jasno pokazuju kako rješenja aksijalnih i polarnih perturbacija dolaze u paru. Za svako aksijalno rješenje s određenom frekvencijom kvazinormalnih modova, možemo konstruirati (odnosno, postoji) rješenje polarnih s istom frekvencijom. Nadalje, zanima nas i problem raspršenja, pa stoga i izgled rješenja u asimptotskim područjima pogledat ćemo (2.47) na horizontu i u beskonačnosti (gdje je  $g = 0$ )

$$x \rightarrow -\infty \qquad x \rightarrow +\infty \tag{2.48}$$

$$\psi_1 = e^{i\omega x} \rightarrow \psi_2 = \psi_1 \qquad \psi_1 = e^{-i\omega x} \rightarrow \psi_2 = \frac{\kappa + 2i\beta\omega}{\kappa - 2i\beta\omega} \psi_1 \tag{2.49}$$

Oblik općenitog rješenja  $\psi_1$  u problemu raspršenja je

$$\psi_1 = \begin{cases} e^{i\omega x} + R_1(\omega)e^{-i\omega x} & ; x \rightarrow +\infty \\ T_1(\omega)e^{i\omega x} & ; x \rightarrow -\infty \end{cases} \tag{2.50}$$

Gledajući u (2.49) dolazimo do oblika koje ima rješenje  $\psi_2$  te prepoznamo njegove koeficijente refleksije i transmisije

$$\psi_2 = \begin{cases} e^{i\omega x} + \underbrace{R_1(\omega) \frac{\kappa + 2i\omega\beta}{\kappa - 2i\omega\beta}}_{R_2(\omega)} e^{-i\omega x} & ; x \rightarrow +\infty \\ \underbrace{T_1(\omega)}_{T_2(\omega)} e^{i\omega x} & ; x \rightarrow -\infty \end{cases} \tag{2.51}$$

Zaključujemo kako izospektralni potencijali za skalarne i aksijalne perturbacije također imaju iste koeficijente refleksije i transmisije u problemu raspršenja. Točnije koeficijent refleksije među polarnim i aksijalnim transformacijama različit je do na fazu, dok je koeficijent transmisije identičan.

$$R_2(\omega) = R_1(\omega) \frac{\kappa + 2i\omega\beta}{\kappa - 2i\omega\beta} \quad \longrightarrow \quad |R_2(\omega)|^2 = |R_1(\omega)|^2 \quad (2.52)$$

$$T_2(\omega) = T_1(\omega) \quad \longrightarrow \quad |T_2(\omega)|^2 = |T_1(\omega)|^2 \quad (2.53)$$

### 3 Računanje kvazinormalnih modova

U ovom poglavlju posvetit ćemo vrijeme traženju kvazinormalnih modova, točnije njihovih frekvencija. Predstaviti ćemo probleme koji se javljaju pri numeričkom računanju i izazove s kojima se borimo ako ih pokušamo analitički pronaći. Prisjetimo se jednadžbe čije modove uopće i tražimo

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + (\omega^2 - V_s(x))\psi(x) = 0, \quad (3.1)$$

gdje je potencijal izražen u standardnoj radijalnoj koordinati za pojedini spin perturbacije

$$V_s(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3}(1 - s^2)\right). \quad (3.2)$$

Potencijal prikazan u (3.2) za  $s = 0, 1, 2$  redom reproducira potencijal skalarnih perturbacija, polarnih i aksijalnih elektromagnetskih perturbacija, te aksijalnih gravitacijskih perturbacija. Potencijal polarnih gravitacijskih perturbacija ima veoma kompliciranu analitičku strukturu, a kako smo vidjeli on je izospektralan s potencijalom aksijalnih gravitacijskih perturbacija. Stoga, za naše potrebe promatranja kvazinormalnih modova, odnosno spektara diferencijalnih jednadžbi gravitacijskih perturbacija, svejedno je koji potencijal promatramo. U daljnjem tekstu, što se tiče gravitacijskih perturbacija, promatrat ćemo isključivo aksijalne zbog ljepšeg analitičkog oblika.

Komplikacije u rješavanju problema karakterističnih vrijednosti s kojim se ovdje borimo krije se u potencijalu  $V(x)$  diferencijalnih jednadžbi koje promatramo. Općenito, kada gledamo potencijal od nama poznatih crnih rupa, ne možemo riješiti ovu jednadžbu analitički<sup>2</sup>, pa tako niti doći do kvazinormalnih frekvencija  $\omega$ . U ovom poglavlju ćemo promotriti različite metode računanja kvazinormalnih modova. Leaverova metoda analitički uspijeva doći barem do implicitne jednadžbe za kvazinormalne modove Schwarzschildove crne rupe. Nadalje, zamjenom potencijala za neki jednostavnijeg oblika, ali dovoljno sličnog, vidjet ćemo kako je moguće analitički dobiti *aproksimaciju* niskih modova kvazinormalnih frekvencija. Također, vidjet ćemo kako realna frekvencija kvazinormalnih modova asimptotski teži  $\ln(3)$  te ćemo posebnom tehnikom to analitički i pokazati. Sve navedeno, kao i do sada, radimo na

primjeru Schwarzschildove crne rupe.

### 3.1 Leaverova metoda

Efektivni potencijal perturbacija za Schwarzschildovu crnu rupu (3.2) izveli smo u prethodnom poglavlju. U ovom slučaju kvazinormalne frekvencije ne možemo eksplicitno pronaći analitički. Međutim, moguće je analitički doći do implicitne jednadžbe za kvazinormalne frekvencije zbog čega i dalje svrstavamo ovu metodu pod analitičke. Povijesno, do ovog rješenja je došlo jer je diferencijalna jednadžba u pitanju (3.1) sličnog oblika kao jedna specifična Schrödingerova jednadžba koja je već prije bila riješena. Još davne 1934. godine je George Jaffé pronašao rješenja te jednadžbe dok je tražio spektar iona molekule vodika [16]. Onda se 1985. godine E. W. Leaver dosjetio iskoristiti Jafféove rezultate (odnosno generalizaciju koju su napravili Baber i Hassé [17]) za traženje kvazinormalnih modova [18]. U nastavku ćemo proučiti po njemu nazvanu — Leaverovu metodu.

Ako raspišemo nazad jednadžbu (3.1) u koordinati  $r$  dobit ćemo sljedeće (za općenite perturbacije spina  $s$ )

$$r(r - 2M) \frac{d^2\psi}{dr^2} + 2M \frac{d\psi}{dr} + \left[ \frac{r^3\omega^2}{r - 2M} - l(l + 1) - \frac{2M}{r} (1 - s^2) \right] \psi = 0. \quad (3.3)$$

Na rubovima prostora za jednadžbu (3.1), dakle za  $x \rightarrow \pm\infty$  imali smo za rješenja ravne valove. Izražena preko koordinate  $r$ , dakle za  $r \rightarrow 2M$  i  $r \rightarrow +\infty$ , rješenja izgledaju kao

$$\begin{aligned} \psi &\sim e^{+i\omega r} \left( \frac{r}{2M} \right)^{+i\omega 2M} & r \rightarrow +\infty \\ \psi &\sim \left( \frac{r}{2M} - 1 \right)^{-i\omega 2M} & r \rightarrow 2M \end{aligned} \quad (3.4)$$

Leaver, po uzoru na Jafféa pretpostavlja rješenje kao beskonačnu sumu sljedećeg oblika

$$\psi(r) = (r - 2M)^{-i\omega} r^{2i\omega} e^{i\omega(r-2M)} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left( \frac{r - 2M}{r} \right)^n \quad (3.5)$$

što kada se uvrsti u jednadžbu (3.3) daje rekurzivne relacije

$$\alpha_0 a_1 + \beta_0 a_0 = 0, \quad (3.6)$$

$$\alpha_n a_{n+1} + \beta_n a_n + \gamma_n a_{n-1} = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

u kojima su koeficijenti definirani kao

$$\begin{aligned} \alpha_n &= n^2 + (2 - 2i\omega)n - 2i\omega + 1, \\ \beta_n &= -(2n^2 + (2 - 8i\omega)n - 8\omega^2 - 4i\omega + l(l+1) - s^2), \\ \gamma_n &= n^2 - 4i\omega n - 4\omega^2 - s^2 - 1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Najbitniji korak jest primijeniti rubne uvjete koje želimo za kvazinormalne modove. Leaver to radi pozivajući se na teoriju rekurzivnih relacija te zaključuje da će rubni uvjeti za kvazinormalne modove biti ispunjeni ukoliko suma u rješenju uniformno konvergira. Koristeći Pincherleov teorem o verižnim razlomcima znamo da će suma konvergirati ukoliko vrijedi

$$0 = \beta_0 - \frac{\alpha_0 \gamma_1}{\beta_1 - \frac{\alpha_1 \gamma_2}{\beta_2 - \frac{\alpha_2 \gamma_3}{\beta_3 - \dots}}}, \quad (3.8)$$

gdje se često radi preglednosti koristi notacija

$$0 = \beta_0 - \frac{\alpha_0 \gamma_1}{\beta_1 - \frac{\alpha_1 \gamma_2}{\beta_2 - \frac{\alpha_2 \gamma_3}{\beta_3 - \dots}}} \dots \quad (3.9)$$

Ta se jednadžba, radi stabilnijeg numeričkog izračuna [18], može zapisati kao

$$\beta_n - \frac{\alpha_{n-1} \gamma_n}{\beta_{n-1} - \frac{\alpha_{n-2} \gamma_{n-1}}{\beta_{n-2} - \dots}} - \frac{\alpha_0 \gamma_1}{\beta_0} = \frac{\alpha_n \gamma_{n+1}}{\beta_{n+1} - \frac{\alpha_{n+1} \gamma_{n+2}}{\beta_{n+2} - \frac{\alpha_{n+2} \gamma_{n+3}}{\beta_{n+3} - \dots}}} \dots \quad (3.10)$$

te će biti ekvivalentna (3.9) za  $n > 0$ .

Leaver je ovom metodom uspješno izračunao prvih šezdeset kvazinormalnih modova gravitacijskih perturbacija za  $l = 2$  i  $l = 3$  te prvih deset za  $l \in [4, 12]$ . Također, naslućivao je kako bi realni dio kvazinormalnih frekvencija trebao težiti konačnoj vrijednosti različitoj od nule za snažno gušene modove, što ćemo kasnije analitički pokazati. Danas se i dalje njegova metoda smatra jednom od najpreciznijih za računanje kvazinormalnih modova [10].



### 3.2 Nariai prostorvrijeme i Pöschl-Teller potencijal

Potencijal koji dobivamo iz Schwarzschildovog prostorvremena (3.2) opada relativno sporo s udaljenosti što možemo fizikalno interpretirati kao situaciju u kojoj se valovi povratno odbijaju od potencijala što otežava rješavanje numeričkim metodama [10]. Dobru aproksimaciju stvarnog potencijala možemo dobiti koristeći tzv. Pöschl-Teller potencijal za koji se mogu analitički pronaći frekvencije kvazinormalnih modova, što su prvi i pokazali Ferrari i Mashhoon [19]. Također, Mashhoon i Blome su pronašli frekvencije kvazinormalnih modova i za Eckartov potencijal [20]:

$$V(x) = V_0 [1 - (\tanh(\alpha(x - x_0)) - \tanh(\mu))]^2, \quad (3.11)$$

koji se za  $\mu = 0$  svodi na Pöschl-Tellerov:

$$V(x) = \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha(x - x_0))}, \quad (3.12)$$

gdje parametre  $V_0$ ,  $x_0$  i  $\alpha$  namješamo iz potencijala kojeg želimo aproksimirati. Dakle, uzimamo da je  $V_0$  maksimalni iznos Schwarzschildovog potencijala za perturbaciju željenog spina  $s$ ,  $x_0$  točka u kojoj ga postiže, a  $\alpha^2 = -\frac{1}{2V_0} \cdot \frac{d^2 V_s}{dx^2} \Big|_{x=x_0}$ , gdje je  $V_s$  Schwarzschildov potencijal za perturbaciju spina  $s$ .

Dakle, sada smo u poziciji promotriti diferencijalnu jednadžbu s ovim potencijalom te za nju pronaći frekvencije kvazinormalnih modova

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \left( \omega^2 - \frac{V_0}{\cosh^2(\alpha(x - x_0))} \right) \psi = 0. \quad (3.13)$$

Ako napravimo supstituciju  $\xi(x) = (1 + e^{-2\alpha(x-x_0)})^{-1}$  uz malo muke dobivamo sljedeće

$$\xi^2(1 - \xi)^2 \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} - \xi(1 - \xi)(2\xi - 1) \frac{d\psi}{d\xi} + \left[ \frac{\omega^2}{4\alpha^2} - \frac{V_0}{\alpha^2} \xi(1 - \xi) \right] \psi = 0. \quad (3.14)$$

Dodatnom supstitucijom  $\psi(\xi) = (\xi(1 - \xi))^{-i\omega/(2\alpha)} y(\xi)$  i imenovanjem parametara  $a = (\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4V_0} - 2i\omega)/(2\alpha)$ ,  $b = (\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4V_0} - 2i\omega)/(2\alpha)$ ,  $c = 1 - i\omega/\alpha$  dobivamo standardnu hipergeometrijsku diferencijalnu jednadžbu [21]

$$\xi(1-\xi)\frac{d^2y}{d\xi^2} + [c - (a+b+1)\xi]\frac{dy}{d\xi} - aby = 0, \quad (3.15)$$

čija rješenja su hipergeometrijske funkcije. Same kvazinormalne modove dobivamo postavljanjem rubnih uvjeta kojima su i definirani. Dakle, na horizontu ćemo imati isključivo ulazeće valove, dok u beskonačnosti isključivo izlazeće. Podsjećamo da i Pöschl-Tellerov potencijal, kao i fizikalni potencijali ranije, trne na horizontu i u beskonačnosti što znači da na tim rubovima imamo ravne valove.

Općenita rješenja jednadžbe (3.15), uzimajući u obzir prethodnu supstituciju su

$$\begin{aligned} \psi(\xi) = & A\xi^{i\omega/2\alpha}(1-\xi)^{-i\omega/2\alpha}F(a-c+1, b-c+1, 2-c, \xi) \\ & + B(\xi(1-\xi))^{-i\omega/2\alpha}F(a, b, c, \xi), \end{aligned} \quad (3.16)$$

gdje su  $A$  i  $B$  neke konstante. Sada namećemo rubne uvjete koji definiraju kvazinormalne modove, prvo na horizontu. Uvedena varijabla  $\xi$  na horizontu, tj. za  $r \rightarrow 2M$ , odnosno  $x \rightarrow -\infty$  se ponaša kao  $\xi \rightarrow e^{2\alpha(x-x_0)}$ . Dakle,  $\xi$  će ići u nulu kako idemo prema horizontu, a znamo da  $F(a, b, c, 0) = 1$  pa nam preostaje samo prepoznati prvi član (uz konstantu  $A$ ) kao izlazeći val

$$\begin{aligned} \xi^{i\omega/2\alpha}(1-\xi)^{-i\omega/2\alpha} &= \left[ (1 + e^{-2\alpha(x-x_0)}) \left( 1 - (1 + e^{-2\alpha(x-x_0)})^{-1} \right) \right]^{-i\omega/2\alpha} \\ &= [1 + e^{-2\alpha(x-x_0)} - 1]^{-i\omega/2\alpha} \\ &= e^{i\omega(x-x_0)}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Rubni uvjeti nam kažu kako na horizontu možemo imati samo ulazeće valove i stoga stavljamo  $A = 0$ .

Preostalom članu moramo posvetiti malo više pažnje, naime u beskonačnosti se  $\xi$  ponaša kao  $\xi \rightarrow 1 - e^{-2\alpha(x-x_0)} \rightarrow 1$  što znači da se ne možemo tako lako riješiti hipergeometrijske funkcije iz razmatranja. Srećom, pomoću identiteta iz [21] lako ju možemo zapisati kao funkciju  $1 - \xi$  tako da opet u beskonačnosti dobijemo  $F(a, b, c, 0) = 1$ .

$$\begin{aligned}
F(a, b, c, \xi) &= (1 - \xi)^{c-a-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} F(c-a, c-b, c-a-b+1, 1-\xi) \\
&+ \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} F(a, b, -c+a+b+1, 1-\xi).
\end{aligned} \tag{3.18}$$

Dakle, član uz konstantu  $B$  iz rješenja (3.16) množi (3.18). Računamo ponašanje prvog člana iz umnoška

$$\begin{aligned}
(\xi(1-\xi))^{-i\omega/2\alpha} (1-\xi)^{c-a-b} &= (\xi(1-\xi))^{-i\omega/2\alpha} (1-\xi)^{i\omega/\alpha} \\
&= \xi^{-i\omega/2\alpha} (1-\xi)^{i\omega/2\alpha} = e^{-i\omega(x-x_0)},
\end{aligned} \tag{3.19}$$

dok je drugi član

$$\begin{aligned}
(\xi(1-\xi))^{-i\omega/2\alpha} &= \left[ (1 + e^{-2\alpha(x-x_0)})^{-1} \left( 1 - (1 + e^{-2\alpha(x-x_0)})^{-1} \right) \right]^{-i\omega/2\alpha} \\
&= \left[ (1 + e^{-2\alpha(x-x_0)})^{-1} - (1 + e^{-2\alpha(x-x_0)})^{-2} \right]^{-i\omega/2\alpha} \\
&= [1 - e^{-2\alpha(x-x_0)} - 1 + 2e^{-2\alpha(x-x_0)}]^{-i\omega/2\alpha} \\
&= [e^{-2\alpha(x-x_0)}]^{-i\omega/2\alpha} = e^{i\omega(x-x_0)},
\end{aligned} \tag{3.20}$$

gdje smo u trećem redu koristili  $e^{-2\alpha(x-x_0)} \ll 1$  za  $x \rightarrow +\infty$ . Sada vidimo kako prvi član predstavlja ulazeće valove u beskonačnosti, a drugi izlazeće. Prema rubnim uvjetima koji definiraju kvazinormalne modove zahtijevamo da je prvi član nula. Stoga, konstanta koja stoji uz njega u mora biti jednaka nuli, a to se ostvaruje (vidi prvi član u (3.18)) ako

$$\frac{1}{\Gamma(a)} = 0 \quad \text{ili} \quad \frac{1}{\Gamma(b)} = 0. \tag{3.21}$$

Uvjet je zapravo analogan traženju polova  $\Gamma$  funkcije, a oni se kriju u nuli te u negativnim cijelim brojevima. Budući da se  $a$  i  $b$  razlikuju samo do na predznak u jednom članu, istovremeno ćemo pisati i jedan i drugi uvjet. Uzimajući da gornji predznak stoji za  $a$ , a donji za  $b$  imamo

$$-n = \left( \alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4V_0 - 2i\omega_n} \right) / 2\alpha, \tag{3.22}$$

što brzo daje kvazinormalne modove Pöschl-Tellerovog potencijala koji dobro opisuju

niske modove

$$\omega_n = \mp \sqrt{V_0 - \frac{\alpha^2}{4}} - i\alpha \left( n + \frac{1}{2} \right). \quad (3.23)$$

Pöschl-Tellerov potencijal koji se koristi kao aproksimacija za niske modove Schwarzschildovog potencijala, može se pokazati, proizlazi iz Nariai prostorvremena. To je prostorvrijeme pronađeno kao rješenje Einsteinovih jednažbi još 1951. godine [22]. Ukoliko promatramo ovaj problem ne samo kao uzimanje nekog aproksimativnog potencijala i računanje, već kao konkretnu potragu za kvazinormalnim modovima Nariai prostorvremena naići ćemo na pojedine zanimljivosti. Naime, gledajući strukturu svjetlosnih stožaca u Nariai prostorvremenu Venancio i Batista zaključili su kako bi rubni uvjeti trebalo biti drugačiji nego kako smo ih dosad navodili [23]. Ispada da su svjetlosni stošci okrenuti tako da ništa ne može izići iz horizonta (kao i slučaju Schwarzschilda), ali i da ništa ne može doseći beskonačnost. Takva je struktura analogna crnoj rupi s kozmološkim horizontom. Naime, Nariai prostorvrijeme može se konstruirati kao ekstremni slučaj Schwarzschild-de Sitterovog prostorvremena odakle je onda i jasnija struktura prostorvremena [24]. Bitno je za naglasiti da Venancio i Batista u [23] nailaze na problem jer za fizikalno smislene rubne uvjete koje smo upravo diskutirali ne dobivaju uvjet za kvazinormalne modove, već za parametre prostorvremena koji bi od prije trebali biti fiksirani. Stoga zaključuju kako rješenje s takvim rubnim uvjetima ne postoji, nego tek ako nametnu uvjete iste kao u Schwarzschildovom slučaju nalaze rezultat koji smo i mi pokazali (3.23).

### **3.3 Asimptotski kvazinormalni modovi**

Za Schwarzschildovu crnu rupu dosta dugo su bili dostupni Leaverovi rezultati kvazinormalnih modova te drugi numerički izračuni. Iako je bilo relativno jasno da bi realni dio kvazinormalne frekvencije trebao težiti konačnoj vrijednosti različitoj od nule [25, 26], prije Motla i Neitzkea [27] ta asimptotska vrijednost nije bila izračunata analitički. U ovom dijelu pokazat ćemo tehniku koju su koristili Motl i Neitzke u svojem izračunu asimptotskih kvazinormalnih modova te reproducirati njihove rezultate.

Metoda Motla i Neitzkea uvelike se oslanja na iskorištavanje analitičkih svojstava

diferencijalne jednađbe (3.1). Glavnu jednađbu analitički produljujemo na kompleksnu ravninu te ju analiziramo i trađimo njezine singularitete. Raspisana u standardnoj radijalnoj koordinati ona glasi

$$\psi'' + \frac{2M}{r^2} \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \psi' - \left[ \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} \left( \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} (1 - s^2) \right) + \omega^2 \right] \psi = 0 \quad (3.24)$$

Na horizontu  $r = 2M$  i u ishodištu  $r = 0$  imamo po jedan regularni singularitet, dok u beskonačnosti  $r \rightarrow +\infty$  imamo iregularni singularitet. Osnova ove metode leđi u proučavanju monodromija, odnosno faktora koji rješenja dobiju kada zaokružimo singularitet. Iskorištavajući činjenicu da bi taj faktor, tj. monodromija morala biti jednaka neovisno o krivulji kojom singularitet zaokružimo, želimo u različitim asimptotskim područjima (gdje znamo oblik rješenja) izračunati monodromiju te usporediti rezultate i zahtijevati da budu jednaki. To će nam u konačnici dati relaciju iz koje možemo dobiti frekvencije asimptotskih kvazinormlanih modova.

Promotrimo, sada analitički produljeno, rješenje blizu horizonta u  $r$ -ravnini

$$e^{i\omega x} = e^{i\omega r + i\omega 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right)} = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{2M\omega i} e^{i\omega r}. \quad (3.25)$$

Računamo monodromiju rješenja tako da pogledamo koji faktor će rješenje dobiti prilikom  $2\pi$  rotacije u  $r$ -ravnini u smjeru kazaljke na satu

$$\frac{\psi(x(re^{-2\pi i}))}{\psi(x(r))} = \frac{\left(\frac{re^{-2\pi i}}{2M} - 1\right)^{2M\omega i}}{\left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{2M\omega i}} = e^{2\pi\omega 2M}. \quad (3.26)$$

Ključno je za istaknuti da je ovo monodromija (općenitog) rješenja jednađbe (3.1) oko horizonta, a ne samo monodromija rješenja *pored* horizonta. Drugim riječima, monodromija (oko horizonta) izračunata po *proizvoljnoj* krivulji u  $r$ -ravnini također mora dati isti rezultat.

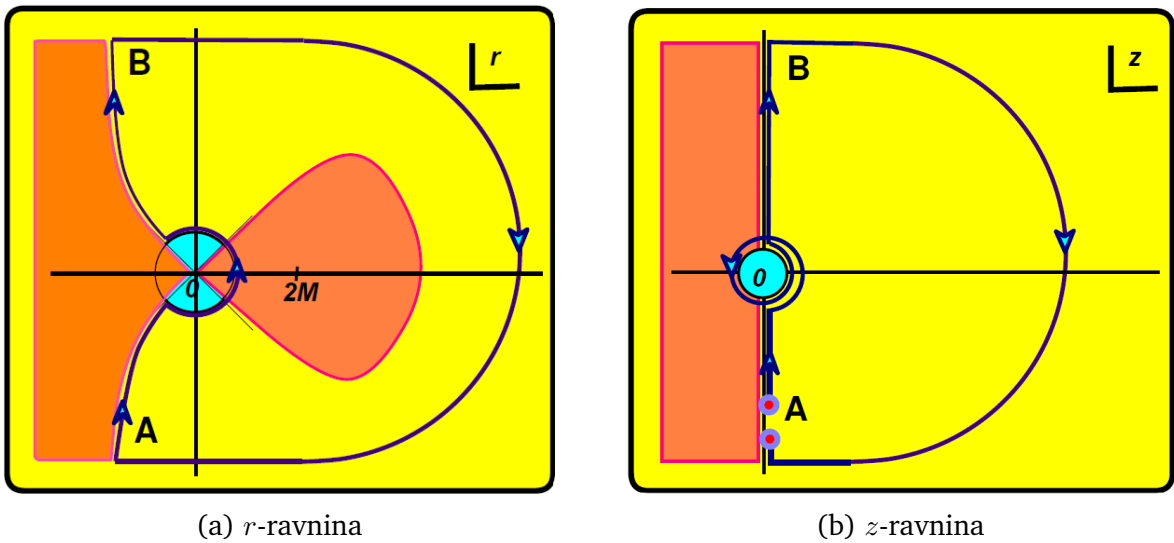
U beskonačnosti nam je nešto teđe nametati rubne uvjete, budući da smo u kompleksnoj ravnini jer bi rješenja mogla nepoželjno divergirati. Stoga, rubni uvjet u beskonačnosti namjestit ćemo tako da se do beskonačnosti prošecemo po pravcu duđ kojega je rješenje isključivo oscilatorno, odnosno duđ kojega

$$0 = \text{Im}(\omega x) = \omega_I x_R + \omega_R x_I, \quad (3.27)$$

$$x_I = -\frac{\omega_I}{\omega_R} x_R,$$

uzimajući  $\omega_I \gg \omega_R$  fokusiramo se isključivo na kvazinormalne modove u asimptotskom režimu velikog gušenja te vidimo da taj pravac leži točno na imaginarnoj osi.

Sada imamo plan za nametanje dobrih rubnih uvjeta te mijenjamo koordinatni sustav u od prije poznatu kornjača koordinatu  $x$ , a onda pak nju mijenjamo u  $z = x - 2Mi\pi$ . Kada iz  $r$  pređemo u  $x$  onda iregularni singularitet u beskonačnosti ostaje u beskonačnosti. Singularitet u horizontu  $r = 2M$  prebacuje se u  $x \rightarrow -\infty$ , dok preostali singularitet u ishodištu  $r = 0$  dolazi na  $x = 2Mi\pi$ . Stoga, prelazak na  $z$  koordinatu ima za cilj spustiti singularitet iz središta crne rupe u ishodište  $z$ -ravnine. Maloprije definiran pravac  $\text{Im}(\omega x) = 0$  sada je na  $\text{Im}(\omega z) = 0$ , te uvjet na monodromiju oko horizonta također ostaje isti.



Slika 3.1: Plava linija ukazuje na krivulju duž koje ćemo računati monodromiju rješenja. Tamno područje označava  $\text{Im}(r) < 0$ , odnosno  $\text{Im}(x) < 0$ . Slike preuzete iz [27].

Računajući eksplicitno rješenja u asimptotskim područjima gdje znamo ponašanje daje nam mogućnost da, korak po korak, pratimo kako se mijenja koeficijent ispred ulazećih odnosno izlazećih valova. Krivulja na slici 3.1a, odnosno 3.1b pokazuje kojim smjerom i kuda ćemo pratiti kako izgleda rješenje, počevši od područja A s ciljem da monodromiju za tu krivulju usporedimo s monodromijom (3.26) koju smo dobili koristeći rubne uvjete. U beskonačnosti znamo ponašanje, ali bitno nam je i kako se rješenje ponaša za  $z \rightarrow 0$  budući da u  $z$ -ravnini kružimo oko ishodišta. Stoga,

razvijajući potencijal oko  $z \rightarrow 0$  imamo

$$z = r + 2M(i\pi - \frac{r}{2M} - \frac{r^2}{8M} - \dots) - 2Mi\pi \approx -\frac{r^2}{4M}$$

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \left(\omega^2 - \frac{s^2 - 1}{4z^2}\right)\psi = 0 \quad (3.28)$$

čija rješenja su, uz pogled na [21], Besselove funkcije. One se u kompleksnoj ravnini, oko ishodišta, ponašaju kao

$$\mathcal{J}_{\pm s/2} \propto z^{\pm s/2} \phi(z), \quad (3.29)$$

gdje je  $\phi(z)$  holomorfna.

Sada smo u poziciji gdje je sve spremno za pratiti faktor ispred rješenja. Dakle, rješenja (3.28) su Besselove funkcije

$$\psi \propto A_+ c_+ \sqrt{\omega z} \mathcal{J}_{s/2}(\omega z) + A_- c_- \sqrt{\omega z} \mathcal{J}_{-s/2}(\omega z) \quad (3.30)$$

gdje biramo koeficijente  $c_{\pm}$  tako da za  $\omega z \rightarrow +\infty$  vrijedi razvoj

$$c_{\pm} \sqrt{\omega z} \mathcal{J}_{\pm s/2}(\omega z) \rightarrow 2 \cos(\omega z - \alpha_{\pm}), \quad (3.31)$$

gdje su  $\alpha_{\pm} = \frac{\pi}{4}(1 \pm s)$ . Faktor ispred izlazećih valova u području A dobivamo upravo raspisom ovog asimptotskog oblika Besselovih funkcija preko ravnih valova te primjenjujući rubni uvjet da u beskonačnosti nemamo ulazećih valova odnosno

$$A_+ e^{-i\alpha_+} + A_- e^{-i\alpha_-} = 0. \quad (3.32)$$

Tako rješenje u području A  $\psi_A$ , do kojega smo došli razvojem (3.31) od rješenja (3.28), ima konačan oblik

$$\psi_A \propto (A_+ e^{i\alpha_+} + A_- e^{i\alpha_-}) e^{-i\omega z}. \quad (3.33)$$

Sada nailazimo na ishodište oko kojega (u  $z$ -ravnini) radimo  $3\pi$  rotaciju. Uzimajući u obzir da se Besselova funkcija ponaša kao (3.29) te da ju množi još i  $\sqrt{z}$  vidimo da će rješenje pokupiti faktor  $e^{6i\alpha_{\pm}}$  jer vrijedi

$$\sqrt{ze^{3\pi i}} (ze^{3\pi i})^{\pm s/2} \phi(ze^{3\pi i}) = e^{6i\alpha_{\pm}} \sqrt{z} z^{\pm s/2} \phi(z). \quad (3.34)$$

Rješenje u području B dobivamo razvojem prema  $\omega z \rightarrow -\infty$  gdje vrijedi

$$c_{\pm} \sqrt{\omega z} \mathcal{J}_{\pm s/2}(\omega z) \propto 2 \cos(-\omega z - \alpha_{\pm}). \quad (3.35)$$

Opet, raspisujemo kosinus preko ravnih valova kako bismo jasno pratili koeficijent ispred izlazećih valova te pribrajućii koeficijent od rotacije oko ishodišta (3.34) uz izlazeće valove dobivamo

$$\psi_B \propto (A_+ e^{5i\alpha_+} + A_- e^{5i\alpha_-}) e^{-i\omega z}. \quad (3.36)$$

Preostalo je zaokružiti duž polukruga u beskonačnosti nazad do područja A te usporediti konačni rezultat s (3.26). Kada napravimo puni krug u smjeru kazaljke na satu ne smijemo zaboraviti da funkcija  $e^{-i\omega z}$  dobiva faktor  $e^{-2\pi\omega 2M}$ , što se ne treba pomiješati s monodromijom cijelog rješenja jednadžbe koja je  $e^{2\pi\omega 2M}$ . Dakle, prateći što se događa ispred izlazećih valova, počeli smo s faktorom kojeg smo izračunali u području A (3.33), a završili smo s faktorom (3.36) kojeg još množi  $e^{-2\pi\omega 2M}$ . Kada izračunate faktore podijelimo kako bismo dobili ukupnu monodromiju imamo

$$e^{2\pi\omega 2M} = \frac{(A_+ e^{5i\alpha_+} + A_- e^{5i\alpha_-}) e^{-2\pi\omega 2M}}{(A_+ e^{i\alpha_+} + A_- e^{i\alpha_-})}, \quad (3.37)$$

gdje smo s lijeve strane jednakosti stavili ukupnu monodromiju rješenja izračunatu blizu horizonta (3.26) jer naša izračunata duž plave linije na slici 3.1b mora biti ista. Kratki raspis eksponencijala daje

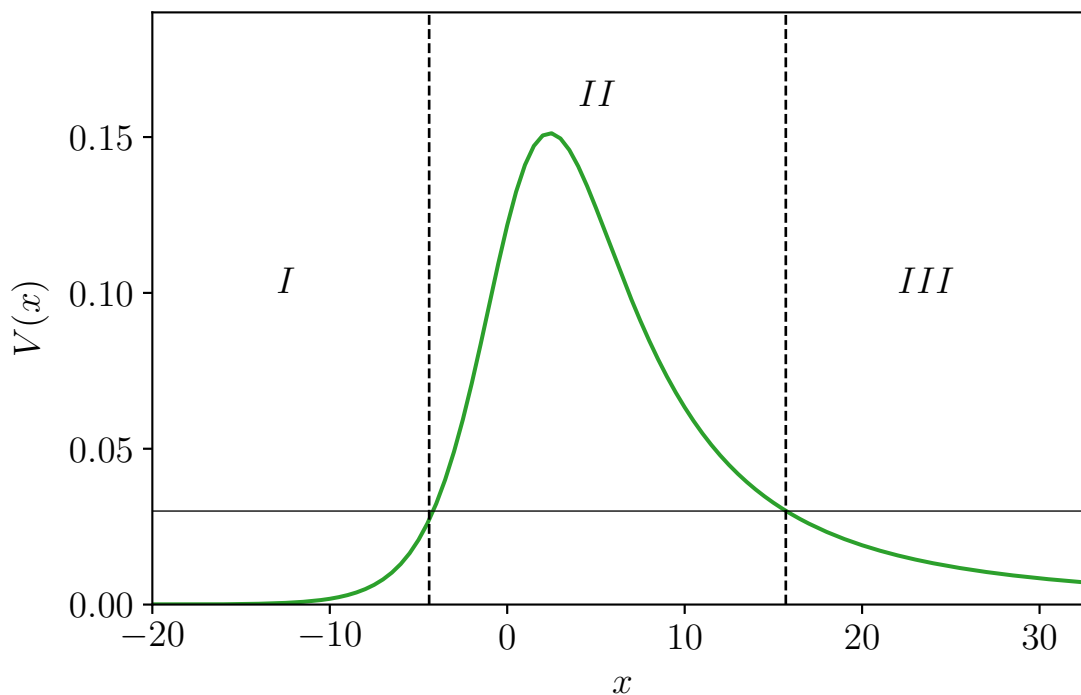
$$e^{\pm 4\pi\omega 2M} = -(1 + 2 \cos(\pi s)), \quad (3.38)$$

gdje smo s  $\pm$  uključili slučaj u kojemu sve prethodno radimo isto samo u suprotnom smjeru. Konačno, kvazinormalni modovi u asimptotskom režimu velikog gušenja  $\omega_I \gg \omega_R$  su sljedeći

$$4\pi\omega 2M = \pm \ln(1 + 2 \cos(\pi s)) + (2n + 1)i\pi. \quad (3.39)$$

Ako se prisjetimo slike 2.2 vidimo kako za  $s = l = 1$  realni dio modova teži prema nuli, dok za  $s = l = 0$  i  $s = l = 2$  teži nekoj konačnoj vrijednosti — upravo to ponašanje smo analitički pokazali.





Slika 3.2: Efektivni potencijal za  $s = l = 2$  sa skiciranim područjima u kojima zasebno tražimo rješenja.

### 3.4 WKB metoda

Veoma prisutna metoda u računanju kvazinormalnih modova je WKB metoda. Svima je poznata iz kvantne fizike, nazvana prema trojici Wentzel–Kramers–Brillouin, kojima se nekada dodaje i Jeffreys te se sva četiri slova znaju pojavljivati u raznim permutacijama. Najčešće se referira na nju kraticom WKB kako ćemo i mi u daljnjem tekstu.

Problem računanja kvazinormalnih modova, pokazali smo, svodi se na rješavanje obične diferencijalne jednačbe, odnosno na rješavanje problema svojstvenih vrijednosti. Glavnu jednačbu i sami smo nazivali *Schrödinger-olikom* stoga sličnost s kvantnom fizikom nikako nije iznenađenje. Ako se sjetimo, u problemima u kvantnoj fizici WKB metoda koristila se kao semiklasična aproksimacija, dakle za čestice visokih energija u sporo mijenjajućem potencijalu. U takvoj je situaciji problem bio kod točaka obrata, gdje bi energija bila jednaka potencijalu te je proces rješavanja bio sljedeći: aproksimativna rješenja bi se našla u područjima daleko od točke obrata te je cilj bio spojiti njihove asimptotske razvoje. U kvantnoj fizici taj bi proces spajanja najčešće davao kvantizacijski uvjet na energiju.

U računanju kvazinormalnih modova možemo primijeniti istu tehniku. Referi-

rajući se na sliku 3.2, u područjima *I* i *III* aproksimativno ćemo izračunati rješenja u tzv. aproksimaciji geometrijske optike, koja odgovara uzimanju  $l \rightarrow +\infty$ . U području *III* dominirat će centrifugalni član u potencijalu pa će slaganje rješenja između područja *I* i *III* najbolje vrijediti kada taj član dominira i u području *II*, a to vrijedi upravo za  $l \rightarrow +\infty$ . Naš problem lagano možemo pogledati u notaciji koja se standardno koristi za WKB metodu gdje definiramo  $Q(x) = V_s(x) - \omega^2$ , a rješavamo glavnu jednadžbu u kojoj smo pretpostavili da je druga derivacija mala [28]

$$\epsilon^2 \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} = Q(x) \psi(x). \quad (3.40)$$

Pretpostavivši rješenje oblika

$$\psi(x) \propto \exp \left[ \frac{1}{\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n S_n(x) \right] \quad (3.41)$$

dobivamo (za prva dva neiščezavajuća reda) tzv. eikonalnu i transportnu jednadžbu, redom

$$\begin{aligned} (S'_0)^2 &= Q(x) \\ 2S'_0 S'_1 + S''_0 &= 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Ako stanemo na prvom neiščezavajućem redu, odnosno riješimo samo eikonalnu jednadžbu kažemo da radimo u aproksimaciji geometrijske optike. Odnosno, promatramo širenje gravitacijskih valova ignorirajući njihovu valnu prirodu, analogno promatranju elektromagnetskih valova kao ‘zraka svjetlosti’. Pomoću  $S_n(x)$  možemo rekonstruirati, red po red, rješenja u područjima *I* i *III*.

Uvjet za kvazinormalne modove dobit ćemo kada pronađemo rješenje u području *II* te ga pokušamo spojiti na točkama obrata. Znamo da će naš potencijal ima maksimum te ćemo oko njega razviti funkciju  $Q(x) = Q_0 + \frac{1}{2} Q''_0 (x - x_0)^2 + \dots$ , gdje je  $x_0$  točka u kojoj potencijal postiže maksimum. Uvodeći  $k = Q''_0/2$  te  $z = (4k)^{1/4} e^{i\pi/4} (x - x_0)$  glavna jednadžba svodi se na

$$\frac{d^2 \psi}{dz^2} + \left( n + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} z^2 \right) \psi = 0, \quad (3.43)$$

gdje je

$$n + \frac{1}{2} = -\frac{iQ_0}{(2Q_0'')^{1/2}}. \quad (3.44)$$

Rješenja ove jednadžbe su parabolične cilindarske funkcije [29]. Pokraj horizonta može se pokazati [28] da se ponašaju kao

$$\psi \propto Ae^{-i\pi n} z^n e^{-z^2/4} - i\sqrt{2\pi} A[\Gamma(-n)]^{-1} e^{5i\pi/4} z^{-n-1} e^{z^2/4}, \quad (3.45)$$

te stavljanjem rubnih uvjeta kojima branimo izlazeće valove na horizontu dobivamo uvjet za kvazinormalne modove  $1/\Gamma(-n) = 0$  što daje

$$\omega^2 = V(x_0) + i(n + \frac{1}{2})\sqrt{2V''(x_0)}. \quad (3.46)$$

U kontekstu kvazinormalnih modova među prvima su WKB metodu počeli koristiti Shutz i Will [30], a uslijedilo je i razvijanje u veće redove [31]. Zbog relativno jednostavnog postupka i činjenice da je konačni oblik analitički i eksplicitan ova metoda se često koristi u izračunu kvazinormalnih modova.

## 4 Nova istraživanja

### 4.1 Hodova hipoteza

Shahar Hod 2007. godine donio je hipotezu o frekvenciji osnovnog kvazinormalnog moda za razne crne rupe [32]. Koristeći argumente kvantne teorije informacija te poveznicu informacije i entropije u kontekstu crnih rupa, došao je do relacije koja ograničava frekvenciju osnovnog kvazinormalnog moda crnih rupa.

Počevši od teorije informacija oslanja se na rezultat od [33, 34] o maksimalno dozvoljenoj stopi prijenosa informacija  $\dot{I}_{max}$

$$\dot{I}_{max} = \frac{\pi \Delta E}{\hbar \ln 2}. \quad (4.1)$$

A onda pak, također uz potporu rezultata iz teorije informacija [35–37], povezuje informaciju s entropijom. Entropiju smatra kao mjeru neznanja ili manjka informacija o sustavu. Time od (4.1) dolazi do gornje granice za promjenu entropije  $\Delta S$  u danom vremenskom razdoblju  $\tau$

$$\frac{\Delta S}{\tau} \leq \frac{\pi \Delta E}{\hbar}. \quad (4.2)$$

Nadalje, u standardnoj termodinamičkoj relaciji  $\frac{\Delta E}{\Delta S} = T$  uzimamo za temperaturu Bekenstein-Hawkingovu temperaturu crne rupe  $T_{BH}$ . Konačno, ovime dobivamo donju granicu za period, odnosno gornju granicu za imaginarnu komponentu frekvencije crnih rupa u ovisnosti o njihovoj temperaturi

$$\omega_I \leq \frac{\pi T_{BH}}{\hbar}, \quad (4.3)$$

koja vrijedi za frekvenciju najdulje živućeg, odnosno osnovnog moda.

Hod je navedenu relaciju provjerio (gdje je moguće) analitički i numerički na nizu primjera crnih rupa. Za Kerrovu i Kerr-Newmanovu nalazi da poštuju granicu te da u ekstremalnom slučaju  $a/M \rightarrow 1$  saturiraju granicu, odnosno u (4.3) vrijedi jednakost. Za Reissner-Nördstromovu također dolazi do istog zaključka. Pokazuje da poštuju granicu još i  $D$ -dimenzionalna Schwarzschildova crna rupa u asimptotski ravnom i de Sitter prostorvremenu, te velike (u odnosu na kozmološku konstantu) AdS crne rupe. [32]

Međutim, za ovu relaciju jasno možemo reći da *nije* univerzalna. Primjere koje je Hod pokazao su se naravno slagali s njegovom hipotezom, ali za niz prostorvremena relacija ne vrijedi. Primjerice, Ortega je pokazao da relaciju ne poštuju  $D$ -dimenzionalno de Sitter prostorvrijeme, trodimenzionalna rotirajuća BTZ crna rupa, i  $D$ -dimenzionalna bezmasena topološka crna rupa [38]. Preostaje pitanje, ukoliko uopće izvod same relacije možemo smatrati preciznim, postoji li nešto inherentno primjerima crnih rupa kao što su Kerrova ili Kerr-Newmanova zbog čega se drugačije ponašaju.

## 4.2 Kvantna perspektiva

Kvazinormalni modovi sami po sebi predstavljaju uvid u svojstva crnih rupa. Oni ovise o parametrima crnih rupa kao što su masa, angularni moment i naboj. Buduća mjerenja gravitacijskih valova otvorit će prozor u kvantitativnu analizu kvazinormalnih modova te dati priliku da se dugo provjeravane teorije ispituju. Primjerice, mjerenjem kvazinormalnih modova lako se može ispitati teorem o odsudstvu kose (eng. *no-hair theorem*) [39]. Trenutne značajke opće teorije relativnosti svakako će biti detaljno ispitivane sve boljim nadolazećim zemaljskim i svemirskim detektorima. Međutim, tu se nameće i pitanje je li moguće kvazinormalnim modovima dobiti uvid u kvantnu strukturu prostorvremena?

Kao što smo i ranije naveli Hod je predložio vezu između osnovnog kvazinormalnog moda crne rupe i njezine temperature oslanjajući se na kvantnu teoriju informacija. Nešto ranije, Hod je koristio Bohrov princip korespondencije kako bi izračunao kvantizaciju površine horizonta crne rupe [26]. Podsjetimo se, Bohrov princip korespondencije nalaže da bi frekvencije na visokim kvantnim brojevima trebale odgovarati klasičnim vrijednostima. Uzimajući za površinu  $A = 16\pi M^2$  i za energiju  $dM = E = \hbar\omega$  pronalazi da je  $\Delta A = 4l_p^2 \ln(3)$ , gdje je  $l_p$  Planckova duljina. Hod je ovaj rad napisao prije nego što su Motl i Neitzke analitički pronašli asimptotske kvazinormalne modove tako da nije mogao jednostavno pogledati (3.39). Međutim, znalo se za Schwarzschildovu crnu rupu (numerički) da realni dio frekvencije teži prema  $\ln(3)$ .

Također vezano za površinu crne rupe Motl i Neitzke u [27] motiviraju svoj rad pretpostavljenom vezom između asimptotskih kvazinormalnih modova i frekvencije

koju crna rupa izrača kada izgubi kvant površine. Konkretno, motivaciju grade na ideji iz [40] te argumentiraju kako rezultat  $\ln(3)$  daje indicaciju da bi baždarna grupa za LQG (*loop quantum gravity*) trebala biti  $SO(3)$ , a ne  $SU(2)$ .

Iako smo ovdje pokazali perspektivu na pokojem specifičnom primjeru, niz drugih su itekako prisutni u literaturi. Zadnje poglavlje u [10] prikuplja na jedno mjesto tadašnja nova istraživanja gdje se može pronaći ne samo ove primjere, već i razne druge, a detalji se naravno nalaze u tamošnjim referencama.

## 5 Zaključak

Detaljno je proučena teorija perturbacija crnih rupa na primjeru Schwarzschildovog prostorvremena. Podijelivši perturbacije po njihovom spinu, moguće je promatrati njihovu dinamiku u zakrivljenom prostorvremenu koje prikladno nazivamo pozadinsko. Promatrajući njima odgovarajuće jednačbe moguće je opisati kako perturbacije različitih polja evoluiraju u pozadinskom prostorvremenu. Gravitacijske perturbacije su perturbacije same metrike čija je evolucija kroz pozadinsko prostorvrijeme dana Einsteinovom jednačbom. Pretpostavivši najopćenitiji oblik metrike možemo one dijelove različite od Schwarzschildove metrike prozvati malim veličinama i na taj način raspisati komponente Einsteinovih jednačbi kako bismo izveli tzv. glavnu jednačbu koju poštuju perturbacije. Gravitacijske perturbacije moguće je, prema njihovom utjecaju na prostorvrijeme i ponašanju na paritetnu transformaciju, podijeliti u dvije skupine — aksijalne i polarne. Aksijalne perturbacije induciraju rotaciju te pri paritetnoj transformaciji dobivaju predznak  $(-)^{l+1}$ , dok polarne dobivaju predznak  $(-)^l$ . Sustav parcijalnih diferencijalnih jednačbi koji tvore komponente Einsteinovih jednačbi odvezuje aksijalne od polarnih perturbacija te su međusobno nezavisne. Konačni oblik diferencijalne jednačbe koja opisuje gravitacijske (i ostale) perturbacije je oblik vremenski neovisne Schrödingerove jednačbe s efektivnim potencijalom. Razlika među aksijalnim i polarnim gravitacijskim perturbacijama vidljiva je u međusobno različitom efektivnom potencijalu.

Obje vrste gravitacijskih perturbacija daju isti spektar kvazinormalnih modova, iako diferencijalne jednačbe koje ih opisuju imaju drastično različite potencijale. Razlog tomu krije se u dubokoj vezi tih potencijala koju je prvi pronašao Chandrasekhar. Uspješno je zapisao oba potencijala kao proizlazeće iz trećeg. U literaturi se takvi parovi potencijala znaju nazivati superpartner potencijali. Ne samo da su frekvencije kvazinormalnih modova iste za aksijalne i polarne gravitacijske perturbacije, već će u problemu raspršenja koeficijenti refleksije i transmisije također biti jednaki.

Računanje samih kvazinormalnih modova jest izazov visokih razmjera. Numerički nalijećemo na razne tehničke prepreke, dok analitički pristupi često moraju pribjevati aproksimacijama ili asimptotskim slučajevima. Egzaktna i potpuna rješenja glavne jednačbe za gravitacijske perturbacije i dalje nisu pronađena. Leaver je uspio analitički izračunati implicitni uvjet za kvazinormalne modove, time stvorivši

najprecizniju metodu računanja kvazinormalnih modova. Oslanjajući se na analogiju problema s kvantnom fizikom, pronašao je matematički identičan (odavno riješen) problem u kojem je Jaffé izračunao energetski spektar iona molekule vodika. Njegove rezultate uspješno je primijenio u traženju kvazinormalnih modova. Također, često se koriste aproksimacije kao što je primjerice stavljanje Pöschl-Tellerovog potencijala za koji znamo riješiti glavnu jednadžbu umjesto Schwarzschildovog.

Motivirani kvantnom teorijom gravitacije, Motl i Neitzke analitički su pronašli asimptotske kvazinormalne modove u režimu snažnog gušenja. Oslanjajući se na rezultate koji povezuju asimptotske kvazinormalne modove s kvantizacijom površine crnih rupa daju naslutiti neke rezultate iz LQG. Kvazinormalni modovi su prisutni u diskusijama o kvantnoj gravitaciji, a i o testovima opće teorije relativnosti. Zbog njihovog eksperimentalnog legitimiteta daju savršeni uvid u teoriju unutar koje su izračunati. Moguće ih je koristiti za ispitivanje teorema o odsudstvu kose (eng. *no-hair theorem*), za mjerenje parametara crnih rupa, za ispitivanje modificiranih teorija gravitacije te mnoge druge stvari. Nove generacije detektora gravitacijskih valova moći će upravo takve analize i provoditi s drastično većom preciznošću nego sada.



# Dodaci

## Dodatak A D’Alambertov operator u zakrivljenom prostorvremenu

U izvodu jednadžbe koja opisuje dinamiku skalarnog polja u Schwarzschildovom prostorvremenu separiramo Klein-Gordonovu jednadžbu

$$\square\phi = 0. \quad (\text{A.1})$$

Pitanje je kako izgleda operator  $\square = \nabla_\mu \nabla^\mu$  ukoliko metrika nije ravna? Prva kovarijantna derivacija djeluje na vektor  $\nabla^\mu$  što nam je dobro poznato te glasi

$$\nabla_\mu V^\mu = \partial_\mu V^\mu + \Gamma_{\mu\alpha}^\mu V^\alpha. \quad (\text{A.2})$$

Raspisujući  $\Gamma_{\mu\alpha}^\mu$  imamo

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu\alpha}^\mu &= \frac{1}{2} g^{\mu\beta} (\partial_\alpha g_{\mu\beta} + \partial_\mu g_{\alpha\beta} - \partial_\beta g_{\alpha\mu}) \\ &= \frac{1}{2} g^{\mu\beta} \partial_\alpha g_{\mu\beta} \\ &= \frac{1}{2g} \partial_\alpha g = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\alpha \sqrt{-g}, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

gdje je  $g = \det[g_{\mu\nu}]$ . U drugoj jednakosti smo koristili Jacobijevu formulu koja povezuje trag matrice s derivacijom njezine determinante  $\partial \det M = \det M \text{Tr}(M^{-1} \partial M)$ .

Konačno imamo

$$\begin{aligned} \square\phi &= \nabla_\mu \nabla^\mu \phi \\ &= \partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{1}{\sqrt{-g}} (\partial_\mu \sqrt{-g}) \partial^\mu \phi. \\ &= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (g^{\mu\nu} \partial_\nu \phi) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

gdje smo koristili da je djelovanje kovarijantne derivacije na skalarno polje isto što i djelovanje parcijalnom derivacijom  $\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi$ .

## Dodatak B Specijalne funkcije od važnosti

Više o svim ovim specijalnim funkcijama može se saznati na raznim mjestima, primjerice [21] odakle su i preuzete informacije napisane ovdje.

### B.1 Gegenbauerovi polinomi

U izvodu aksijalnih gravitacijskih perturbacija razvijamo rješenje po Gegenbauerovim, odnosno ultrasferičnim polinomima  $C_n^\alpha(x)$ . Oni su ortogonalni polinomi koji tvore potpun skup na intervalu  $[-1, 1]$  s obzirom na težinsku funkciju

$$w(x) = (1 - x^2)^{\alpha-1/2}. \quad (\text{B.1})$$

Zadovoljavaju Gegenbauerovu diferencijalnu jednadžbu

$$(1 - x^2) \frac{d^2 C_n^\alpha(x)}{dx^2} - (2\alpha + 1)x \frac{dC_n^\alpha(x)}{dx} + n(n + 2\alpha)C_n^\alpha(x) = 0, \quad (\text{B.2})$$

koja se supstitucijom  $x = \cos \theta$  lagano svodi na jednadžbu (2.7). Moguće ih je definirati i preko generirajuće funkcije

$$\frac{1}{(1 - 2xt + t^2)^\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(\alpha)}(x)t^n; \quad |t| < 1, \alpha \neq 0. \quad (\text{B.3})$$

Normalizacija im je

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^{\alpha-1/2} (C_n^\alpha(x))^2 dx = \frac{\pi 2^{1-2\alpha} \Gamma(n + 2\alpha)}{n!(n + \alpha)\Gamma^2(\alpha)} \quad (\text{B.4})$$

Za  $\alpha = 1/2$  Gegenbauerova jednadžba (B.2) svodi se na dobro poznatu Legendreovu jednadžbu, pa se tako i Gegenbauerovi polinomi svode na Legendreove  $C_n^{1/2}(x) = \mathcal{P}_n(x)$ .

### B.2 Pridruženi Legendreovi polinomi

Odavno svima dobro poznati, ali svejedno ćemo ih u dodatku spomenuti kako bismo sve korišteno imali na jednom mjestu. Rješenja su pridružene Legendreove diferencijalne jednadžbe

$$(1 - x^2) \frac{d^2 \mathcal{P}_{lm}(x)}{dx^2} - 2x \frac{d\mathcal{P}_{lm}(x)}{dx} + \left( l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) \mathcal{P}_{lm}(x) = 0, \quad (\text{B.5})$$

koja se za  $m = 0$  svodi na (nepridruženu) Legendreovu jednadžbu, odnosno na specijalan  $\alpha = 1/2$  slučaj Gegenbauerove jednadžbe. Opet, uvođenjem supstitucije  $x = \cos \theta$  možemo iz (B.5) doći do jednadžbe u koordinatama u kojima se i koristi prilikom rješavanja recimo jednadžbe za skalarnе perturbacije

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{d\mathcal{P}_{lm}(\theta)}{d\theta} \right) + \left( l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \mathcal{P}_{lm} = 0. \quad (\text{B.6})$$

Povezani su s (nepridruženim) Legendreovim polinomima

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} (P_l(x)). \quad (\text{B.7})$$

Pridruženi Legendreovi polinomi nisu općenito svi međusobno ortogonalni, ali za  $0 \leq m \leq l$  zadovoljavaju

$$\int_{-1}^1 P_{km}(x) P_{lm}(x) dx = \frac{2(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!} \delta_{k,l}, \quad (\text{B.8})$$

što im definira normalizaciju.

## Literatura

- [1] L. S. Collaboration and V. Collaboration, “Observation of gravitational waves from a binary black hole merger,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 116, p. 061102, Feb 2016.
- [2] F. Ronga, “Detection of gravitational waves with resonant antennas,” in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 39, p. 005, IOP Publishing, 2006.
- [3] S. Hild and M. Pitkin, “Advanced technologies for future laser-interferometric gravitational wave detectors,” *Journal of Modern Optics*, vol. 61, 02 2014.
- [4] S. Chandrasekhar, *The mathematical theory of black holes*. 1985.
- [5] R. M. Wald, *General relativity*. University of Chicago press, 2010.
- [6] P. Boonserm and M. Visser, “Bounding the greybody factors for Schwarzschild black holes,” *Physical Review D*, vol. 78, nov 2008.
- [7] T. Regge and J. A. Wheeler, “Stability of a schwarzschild singularity,” *Physical Review*, vol. 108, no. 4, p. 1063, 1957.
- [8] H.-P. Nollert, “Quasinormal modes: the characteristic sound of black holes and neutron stars,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 16, no. 12, p. R159, 1999.
- [9] F. J. Zerilli, “Effective potential for even-parity Regge-Wheeler gravitational perturbation equations,” *Physical Review Letters*, vol. 24, no. 13, p. 737, 1970.
- [10] E. Berti, V. Cardoso, and A. O. Starinets, “Quasinormal modes of black holes and black branes,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 26, no. 16, p. 163001, 2009.
- [11] V. Frolov and I. Novikov, *Black hole physics: Basic concepts and new developments*, vol. 96. Springer Science & Business Media, 2012.
- [12] S. Chandrasekhar and S. Detweiler, “The quasi-normal modes of the Schwarzschild black hole,” *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 344, no. 1639, pp. 441–452, 1975.

- [13] S. Chandrasekhar, “On algebraically special perturbations of black holes,” *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 392, no. 1802, pp. 1–13, 1984.
- [14] F. Cooper, A. Khare, and U. Sukhatme, “Supersymmetry and quantum mechanics,” *Physics Reports*, vol. 251, no. 5-6, pp. 267–385, 1995.
- [15] M. Lenzi and C. F. Sopuerta, “Darboux covariance: A hidden symmetry of perturbed Schwarzschild black holes,” *Physical Review D*, vol. 104, dec 2021.
- [16] G. Jaffé, “Zur theorie des wasserstoffmolekülions,” *Zeitschrift für Physik*, vol. 87, no. 7, pp. 535–544, 1934.
- [17] W. G. Baber and H. R. Hassé, “The Two Centre Problem in Wave Mechanics,” *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, vol. 31, p. 564, Jan. 1935.
- [18] E. W. Leaver, “An analytic representation for the quasi-normal modes of Kerr black holes,” *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, vol. 402, no. 1823, pp. 285–298, 1985.
- [19] V. Ferrari and B. Mashhoon, “New approach to the quasinormal modes of a black hole,” *Physical Review D*, vol. 30, no. 2, p. 295, 1984.
- [20] H.-J. Blome and B. Mashhoon, “Quasi-normal oscillations of a Schwarzschild black hole,” *Physics Letters A*, vol. 100, no. 5, pp. 231–234, 1984.
- [21] M. Abramowitz, I. A. Stegun, and R. H. Romer, *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. American Association of Physics Teachers, 1988.
- [22] H. Nariai, “On a new cosmological solution of Einstein’s field equations of gravitation,” *Sci. Rep. Tohoku Univ. Ser. I*, vol. 35, p. 62, 1951.
- [23] J. Venâncio and C. Batista, “Quasinormal modes in generalized Nariai spacetimes,” *Physical Review D*, vol. 97, no. 10, p. 105025, 2018.
- [24] V. Cardoso, O. J. Dias, and J. P. Lemos, “Nariai, Bertotti-Robinson, and anti-Nariai solutions in higher dimensions,” *Physical review D*, vol. 70, no. 2, p. 024002, 2004.

- [25] H.-P. Nollert, “Quasinormal modes of Schwarzschild black holes: The determination of quasinormal frequencies with very large imaginary parts,” *Physical Review D*, vol. 47, no. 12, p. 5253, 1993.
- [26] S. Hod, “Bohr’s correspondence principle and the area spectrum of quantum black holes,” *Physical Review Letters*, vol. 81, no. 20, p. 4293, 1998.
- [27] L. Motl and A. Neitzke, “Asymptotic black hole quasinormal frequencies,” *Advances in Theoretical and Mathematical Physics*, vol. 7, no. 2, pp. 307–330, 2003.
- [28] E. Berti, “A black-hole primer: Particles, waves, critical phenomena and super-radiant instabilities,” 2014.
- [29] C. M. Bender, S. Orszag, and S. A. Orszag, *Advanced mathematical methods for scientists and engineers I: Asymptotic methods and perturbation theory*, vol. 1. Springer Science & Business Media, 1999.
- [30] B. F. Schutz and C. M. Will, “Black hole normal modes: a semianalytic approach,” *The Astrophysical Journal*, vol. 291, pp. L33–L36, 1985.
- [31] S. Iyer, “Black-hole normal modes: A WKB approach. II. Schwarzschild black holes,” *Phys. Rev. D*, vol. 35, pp. 3632–3636, Jun 1987.
- [32] S. Hod, “Universal bound on dynamical relaxation times and black-hole quasinormal ringing,” *Physical Review D*, vol. 75, no. 6, p. 064013, 2007.
- [33] J. D. Bekenstein, “Energy cost of information transfer,” *Physical Review Letters*, vol. 46, no. 10, p. 623, 1981.
- [34] H. J. Bremermann, “Quantum noise and information,” in *Proceedings of the fifth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability*, vol. 4, pp. 15–20, University of California Press Berkeley, CA, 1967.
- [35] C. E. Shannon, “A mathematical theory of communication,” *The Bell system technical journal*, vol. 27, no. 3, pp. 379–423, 1948.
- [36] S. Goldman, *Information Theory*. Dover books on intermediate and advanced mathematics, Prentice-Hall, 1953.

- [37] L. Brillouin, *Science and information theory*. Courier Corporation, 2013.
- [38] A. Lopez-Ortega, “On the time times temperature bound,” *International Journal of Modern Physics D*, vol. 19, no. 12, pp. 1973–1985, 2010.
- [39] M. Isi, M. Giesler, W. M. Farr, M. A. Scheel, and S. A. Teukolsky, “Testing the no-hair theorem with GW150914,” *Physical Review Letters*, vol. 123, no. 11, p. 111102, 2019.
- [40] O. Dreyer, “Quasinormal modes, the area spectrum, and black hole entropy,” *Physical Review Letters*, vol. 90, feb 2003.