

# Točke trokuta s ekstremalnim svojstvima

---

**Bradarić, Danka**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:928891>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-31**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



# Točke trokuta s ekstremalnim svojstvima

---

**Bradarić, Danka**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:928891>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2022-10-25**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Danka Bradarić

**TOČKE TROKUTA S EKSTREMALNIM**  
**SVOJSTVIMA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
prof. dr. sc. Sanja Varošanec

Zagreb, rujan 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Ovaj diplomski rad posvećujem svojim roditeljima i braći  
zbog potpore koju su mi pružili tijekom studija, svome dragome  
T. K. i svim prijateljima koji su bili uz mene kroz sve ove godine.*

*Zahvaljujem prof. dr. sc. Sanji Varošanec na svim dobronamjernim  
savjetima i pomoći pri izradi ovoga rada.*

*(Sirah 5, 9) "Ne povijaj se sa svakim vjetrom  
i ne idi po svakoj stazi."*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Trokut</b>	<b>2</b>
1.1 Cevin teorem . . . . .	2
1.2 Simedijane i Lemoineova točka . . . . .	7
1.3 Pripisane kružnice . . . . .	13
1.4 Leibnizova formula . . . . .	14
<b>2 Pomoćni teoremi</b>	<b>20</b>
2.1 Cauchy-Schwarzova nejednakost . . . . .	20
2.2 Nejednakosti među srediinama . . . . .	21
2.3 Ptolomejev teorem . . . . .	22
<b>3 Točke trokuta s ekstremalnim svojstvima</b>	<b>25</b>
3.1 Težište trokuta . . . . .	25
3.2 Fermat-Torricellijeva točka . . . . .	32
3.3 Lemoineova točka . . . . .	35
3.4 Središte trokutu opisane kružnice . . . . .	37
3.5 Središte trokutu pripisane kružnice . . . . .	42
3.6 Središte trokutu upisane kružnice . . . . .	44
3.7 Ortocentar . . . . .	49
<b>Bibliografija</b>	<b>54</b>

# Uvod

Određeni geometrijski izrazi vezani uz trokut imaju ekstrem, odnosno minimum ili maksimum, koji postižu u nekim posebnim točkama trokuta poput težišta, središta opisane i središta upisane kružnice, ortocentra, Lemoineove točke i slično.

U prvom poglavlju navedeni su teoremi vezani uz neke posebne pravce i točke trokuta. Neki od njih nisu sastavni dio redovnoga osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja, no zanimljivi su i korisni u geometriji.

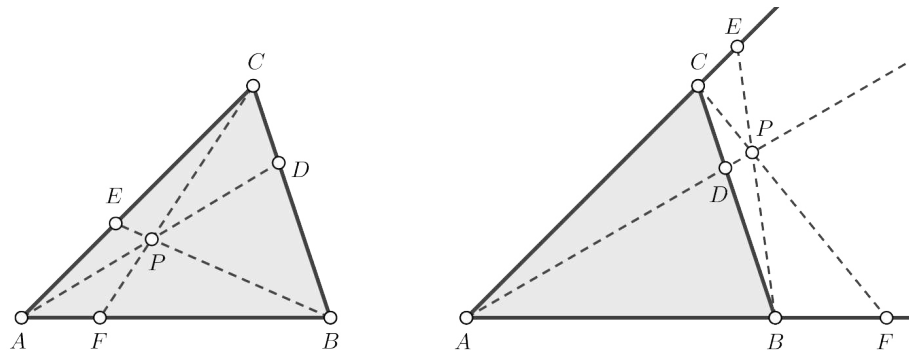
U drugom poglavlju rada nalaze se još neki teoremi i formule koji će biti od koristi u rješavanju zadataka o ekstremima funkcija koji se postižu u nekim posebnim točkama trokuta. Ti su zadatci većinom preuzeti iz [1] i dio su trećeg, a ujedno i glavnog, poglavlja ovoga diplomskog rada.

# Poglavlje 1

## Trokut

### 1.1 Cevin teorem

Uvjet konkurentnosti triju pravaca koji prolaze vrhovima trokuta dan je Cevinim<sup>1</sup> teoremom, koji će u ovome radu biti iskazan samo za neorijentirane dužine jer će točke  $D, E, F$  ležati na stranicama danog trokuta, a ne na njegovim produžecima (slika 1.1). Kada su te točke na stranicama danog trokuta, onda se točka  $P$  nalazi u unutrašnjosti trokuta.



Slika 1.1: Dva slučaja Cevinog teorema

**Teorem 1.1.1. (Cevin teorem)** Neka je dan trokut  $ABC$  i točke  $D, E, F$  redom na redom na stranicama  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ . Ako su pravci  $AD, BE$  i  $CF$  konkurentni, onda vrijedi

$$\frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|} = 1.$$

---

<sup>1</sup>Giovanni Ceva (1647. – 1734.), talijanski matematičar



*Dokaz.* U ovom ćemo dokazu koristiti površine trokuta. Budući da trokuti  $\triangle AFC$  i  $\triangle FBC$  imaju zajedničku visinu (slika 1.2), vrijedi

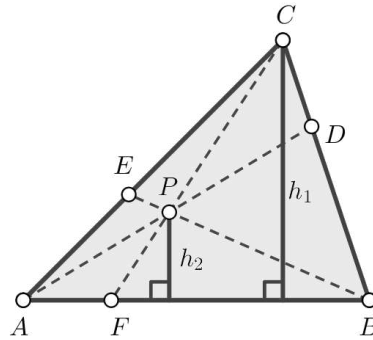
$$\frac{P_{\triangle AFC}}{P_{\triangle FBC}} = \frac{\frac{|AF| \cdot h_1}{2}}{\frac{|FB| \cdot h_1}{2}} = \frac{|AF|}{|FB|}. \quad (1.1)$$

Na istoj slici vidi se da i trokuti  $\triangle AFP$  i  $\triangle FBP$  imaju zajedničku visinu pa analogno vrijedi

$$\frac{P_{\triangle AFP}}{P_{\triangle FBP}} = \frac{|AF|}{|FB|}. \quad (1.2)$$

Iz (1.1) i (1.2) slijedi

$$\frac{P_{\triangle AFC}}{P_{\triangle FBC}} = \frac{P_{\triangle AFP}}{P_{\triangle FBP}}.$$



Slika 1.2

Svojstvo razmjera  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$  povlači

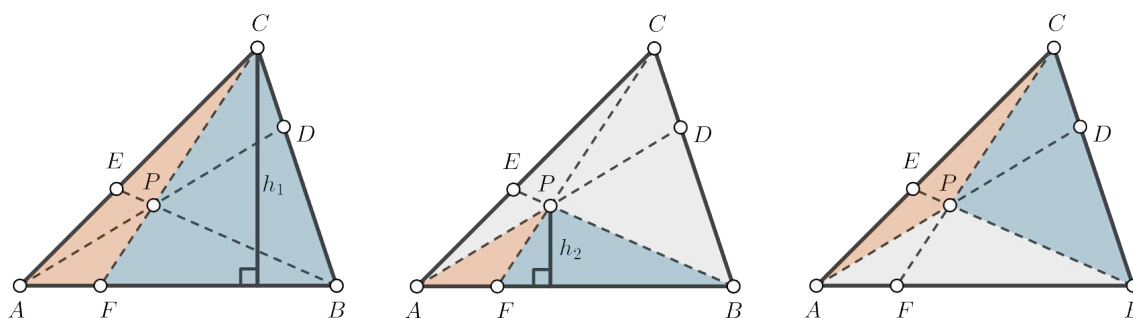
$$\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{P_{\triangle AFC} - P_{\triangle AFP}}{P_{\triangle FBC} - P_{\triangle FBP}} = \frac{P_{\triangle APC}}{P_{\triangle PBC}}, \quad (1.3)$$

što je prikazano i na nizu slika 1.3. Analogno dobivamo

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{P_{\triangle BDA}}{P_{\triangle DCA}} = \frac{P_{\triangle BDP}}{P_{\triangle DCP}}.$$

Sada slijedi

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{P_{\triangle BDA} - P_{\triangle BDP}}{P_{\triangle DCA} - P_{\triangle DCP}} = \frac{P_{\triangle ABP}}{P_{\triangle ACP}}. \quad (1.4)$$



Slika 1.3

Sada opet analogno dobivamo

$$\frac{|CE|}{|EA|} = \frac{P_{\triangle CEB}}{P_{\triangle EAB}} = \frac{P_{\triangle CEP}}{P_{\triangle EAP}}.$$

To nam pak daje

$$\frac{|CE|}{|EA|} = \frac{P_{\triangle CEB} - P_{\triangle CEP}}{P_{\triangle EAB} - P_{\triangle EAP}} = \frac{P_{\triangle CPB}}{P_{\triangle PAB}}. \quad (1.5)$$

Sada pomnožimo (1.3), (1.4) i (1.5) kako bismo dobili željeni rezultat

$$\frac{|AF|}{|FB|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} = \frac{P_{\triangle APC}}{P_{\triangle PBC}} \cdot \frac{P_{\triangle ABP}}{P_{\triangle APC}} \cdot \frac{P_{\triangle CPB}}{P_{\triangle PAB}} = 1.$$

□

Vrijedi i obrat Cevinovog teorema, koji ćemo sada dokazati.

**Teorem 1.1.2. (Obrat Cevinovog teorema)** Neka je dan trokut  $\triangle ABC$  i točke  $D, E, F$  redom na stranicama  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ . Ako vrijedi

$$\frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|} = 1,$$

onda su pravci  $AD, BE$  i  $CF$  konkurentni.

*Dokaz.* Neka vrijedi

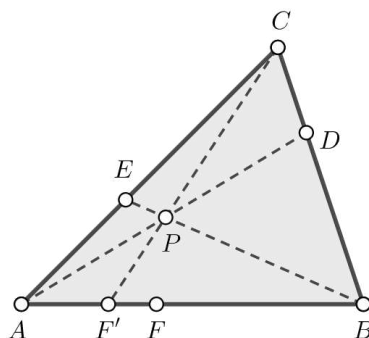
$$\frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|} = 1. \quad (1.6)$$

Želimo pokazati da su tada pravci  $AD, BE, CF$  konkurentni, odnosno da se sijeku u jednoj točki.

Označimo sjecište pravaca  $AD$  i  $BE$  s  $P$ , a sjecište pravaca  $CP$  i  $AB$  s  $F'$  (slika 1.4). Budući da su  $D$  i  $E$  na stranicama trokuta  $\triangle ABC$ , točka  $P$  se nalazi unutar trokuta pa je onda i točka  $F'$  na stranici trokuta.

Budući da pravci  $AD$ ,  $BE$  i  $CF'$  prolaze točkom  $P$ , vrijedi

$$\frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF'|}{|F'B|} = 1. \quad (1.7)$$



Slika 1.4

Izjednačimo (1.6) i (1.7) čime dobivamo

$$\frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|CE|}{|EA|} \cdot \frac{|AF'|}{|F'B|}$$

pa je

$$\frac{|AF|}{|FB|} = \frac{|AF'|}{|F'B|}.$$

Zaključujemo da točke  $F$  i  $F'$  dijele dužinu  $\overline{AB}$  u istom omjeru. Dakle, riječ je o istoj točki.  $\square$

Cevin teorem se može iskazati i trigonometrijski na sljedeći način.

**Teorem 1.1.3.** *Neka je dan trokut  $\triangle ABC$  i točke  $D, E, F$  redom na stranicama  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ . Pravci  $AD, BE$  i  $CF$  su konkurentni ako i samo ako vrijedi*

$$\frac{\sin |\angle EBA|}{\sin |\angle CBE|} \cdot \frac{\sin |\angle FCB|}{\sin |\angle ACF|} \cdot \frac{\sin |\angle DAC|}{\sin |\angle BAD|} = 1.$$

*Dokaz.* Ako su  $AD, BE, CF$  konkurentni, odnosno sijeku se u točki  $P$ , onda se primjenom poučka o sinusu u trokutima  $\triangle ABP, \triangle BCP, \triangle CPA$  redom dobiva

$$\frac{\sin |\angle BAP|}{\sin |\angle PBA|} = \frac{|BP|}{|AP|} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin |\angle BAD|}{\sin |\angle EBA|} = \frac{|BP|}{|AP|}, \quad (1.8)$$

$$\frac{\sin |\angle CBP|}{\sin |\angle PCB|} = \frac{|CP|}{|BP|} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin |\angle CBE|}{\sin |\angle FCB|} = \frac{|CP|}{|BP|}, \quad (1.9)$$

$$\frac{\sin |\angle ACP|}{\sin |\angle PAC|} = \frac{|AP|}{|CP|} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sin |\angle ACF|}{\sin |\angle DAC|} = \frac{|AP|}{|CP|}. \quad (1.10)$$

Množenjem (1.8), (1.9) i (1.10) dobiva se traženi rezultat.

Sada dokažimo obrat Cevinog teorema. Neka za točke  $D, E, F$  vrijedi

$$\frac{\sin |\angle EBA|}{\sin |\angle CBE|} \cdot \frac{\sin |\angle FCB|}{\sin |\angle ACF|} \cdot \frac{\sin |\angle DAC|}{\sin |\angle BAD|} = 1. \quad (1.11)$$

Cilj je pokazati da su tada pravci  $AD, BE, CF$  konkurentni.

Označimo sjecište pravaca  $AD$  i  $BE$  s  $P$ , a neka pravac  $CP$  siječe  $AB$  u točki  $F'$ . Tada po Cevinom teoremu za pravce  $AD, BE, CF'$  vrijedi

$$\frac{\sin |\angle EBA|}{\sin |\angle CBE|} \cdot \frac{\sin |\angle F'CB|}{\sin |\angle ACF'|} \cdot \frac{\sin |\angle DAC|}{\sin |\angle BAD|} = 1. \quad (1.12)$$

Izjednačavanjem (1.11) i (1.12) dobivamo

$$\frac{\sin |\angle F'CB|}{\sin |\angle ACF'|} = \frac{\sin |\angle FCB|}{\sin |\angle ACF|}.$$

Promatranjem trokuta  $\triangle ACF'$  i  $\triangle CF'B$ , prema poučku o sinusu dobivamo

$$\frac{\sin |\angle ACF'|}{\sin \delta} = \frac{|AF'|}{|AC|},$$

$$\frac{\sin |\angle F'CB|}{\sin(180^\circ - \delta)} = \frac{|BF'|}{|BC|},$$

gdje je  $\delta = |\angle CF'A|$ . Budući da je  $\sin \delta = \sin(180^\circ - \delta)$ , slijedi da nakon dijeljenja tih dviju jednakosti imamo

$$\frac{\sin |\angle ACF'|}{\sin |\angle F'CB|} = \frac{|AF'|}{|BF'|} \cdot \frac{|BC|}{|AC|}.$$

Na analogan način, iz trokuta  $\triangle ACF$  i  $\triangle CFB$  slijedi

$$\frac{\sin |\angle ACF|}{\sin |\angle FCB|} = \frac{|AF|}{|BF|} \cdot \frac{|BC|}{|AC|}.$$

Budući da su lijeve strane jednake, slijedi da su i desne strane jednake te vrijedi

$$\frac{|AF'|}{|BF'|} = \frac{|AF|}{|BF|},$$

to jest točke  $F$  i  $F'$  dijele  $\overline{AB}$  u istom omjeru, što znači da se radi o jednoj točki, odnosno  $F = F'$ .  $\square$

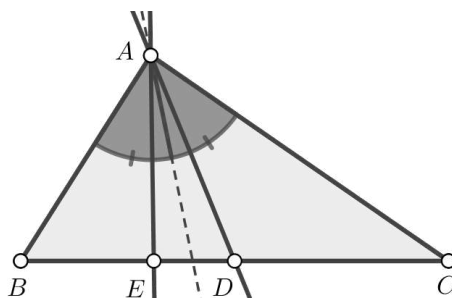
Korištenjem navedenog Cevinovog teorema, između ostaloga, može se dokazati konkurentnost težišnica, visina šiljastokutnog trokuta, simetrala unutarnjih kutova trokuta, te simedijana trokuta.

## 1.2 Simedijane i Lemoineova točka

Postoji više načina definiranja pojma simedijane trokuta, a za potrebe ovoga rada koristit će se sljedeća definicija.

**Definicija 1.2.1.** *Pravac koji prolazi vrhom  $A$  danog trokuta  $\triangle ABC$  i koji je simetričan težišnici  $t_a$  iz toga vrha s obzirom na simetralu unutarnjeg kuta pri vrhu  $A$  naziva se **simedijana vrha  $A$** .*

Analogno se definiraju simedijane za preostale vrhove danog trokuta. Onda kada je trokut jednakokračan, jedna njegova simedijana se preklapa sa simetralom kuta i pravcem na kojem leži težišnica, odnosno riječ je o istom pravcu.



Slika 1.5: Pravac  $AE$  simedijana je trokuta  $\triangle ABC$

Slijedi iskaz i dokaz Steinerovog<sup>2</sup> teorema, koji će nam od koristi biti u dokazivanju nekoliko sljedećih teorema o omjerima vezanim uz simedijane. Dokazi su prilagođeni prema [9] i [10].

<sup>2</sup>Jakob Steiner (1796. – 1863.), švicarski matematičar

**Teorem 1.2.2. (Steinerov teorem)** Neka je  $D$  točka na stranici  $\overline{BC}$  trokuta  $\triangle ABC$  te neka osnosimetrična slika pravca  $AD$  s obzirom na simetralu kuta pri vrhu  $A$  siječe pravac  $BC$  u točki  $E$ . Tada vrijedi

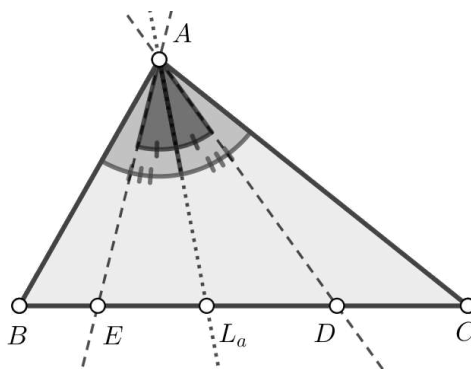
$$\frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|BE|}{|EC|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}.$$

*Dokaz.* Prema poučku o sinusu primijenjenom na trokute  $\triangle BDA$  i  $\triangle DCA$  vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{|BD|}{|AB|} &= \frac{\sin |\angle BAD|}{\sin |\angle ADB|} \\ \frac{|DC|}{|AC|} &= \frac{\sin |\angle DAC|}{\sin |\angle ADC|} = \frac{\sin |\angle DAC|}{\sin |\angle BDA|}. \end{aligned}$$

Dijeljenjem tih jednakosti dobiva se

$$\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|} \cdot \frac{\sin |\angle BAD|}{\sin |\angle DAC|}. \quad (1.13)$$



Slika 1.6

Slično se dobije i

$$\frac{|BE|}{|EC|} = \frac{|AB|}{|AC|} \cdot \frac{\sin |\angle BAE|}{\sin |\angle EAC|}. \quad (1.14)$$

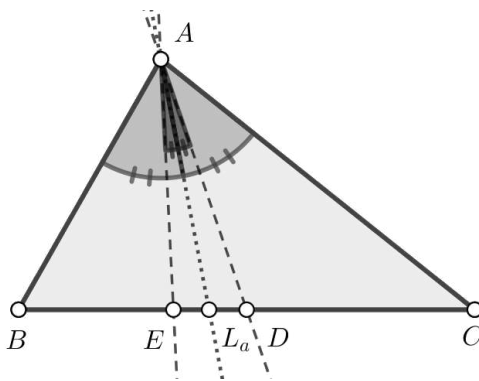
Množenjem (1.13) i (1.14) dobiva se tražena jednakost

$$\frac{|BD|}{|DC|} \cdot \frac{|BE|}{|EC|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}$$

jer je po konstrukciji  $|\angle BAD| = |\angle EAC|$  i  $|\angle BAE| = |\angle DAC|$ .  $\square$

**Teorem 1.2.3.** *Sjecište  $E$  simedijane vrha  $A$  sa suprotnom stranicom  $\overline{BC}$  danog trokuta  $\triangle ABC$  dijeli tu stranicu u omjeru kvadrata priležećih stranica, to jest*

$$\frac{|BE|}{|EC|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}.$$



Slika 1.7

*Dokaz.* Budući da je  $AE$  simedijana trokuta  $\triangle ABC$ , prema definiciji 1.2.1, vrijedi da su težišnica iz vrha  $A$  i taj pravac osnosimetrični s obzirom na simetralu kuta pri vrhu  $A$ . Označimo sjecište spomenute težišnice sa stranicom  $\overline{BC}$  s  $D$ . Budući da je  $D$  polovište stranice  $\overline{BC}$ , slijedi  $|BD| = |DC|$ . Dalje vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{|BE|}{|EC|} \cdot \frac{|BD|}{|DC|} &= \frac{|BE|}{|EC|} \cdot 1 \\ &= \frac{|BE|}{|EC|} \end{aligned}$$

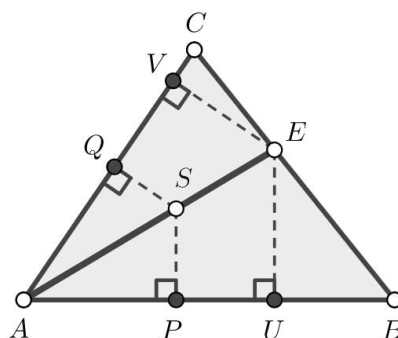
pa iz Steinerovog teorema (tm. 1.2.2) slijedi tvrdnja

$$\frac{|BE|}{|EC|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2}.$$

□

**Teorem 1.2.4.** *Ako točka  $S$  leži na simedijani vrha  $A$  trokuta  $\triangle ABC$ , onda su joj udaljenosti do stranica  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$  proporcionalne duljinama tih stranica, odnosno vrijedi*

$$\frac{|SP|}{|SQ|} = \frac{|AB|}{|AC|}.$$



Slika 1.8

*Dokaz.* Neka je točka  $E$  sjecište simedijane iz vrha  $A$  sa stranicom  $\overline{BC}$ , točke  $U$  i  $V$  nožišta okomica iz točke  $E$  na stranice  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$ , a točka  $S$  proizvoljna točka na  $\overline{AE}$  (slika 1.8). Trokuti  $\triangle APS$  i  $\triangle AUE$  su slični pa vrijedi

$$\frac{|SP|}{|EU|} = \frac{|AS|}{|AE|}. \quad (1.15)$$

Trokuti  $\triangle AQS$  i  $\triangle AVE$  također su slični pa vrijedi

$$\frac{|SQ|}{|EV|} = \frac{|AS|}{|AE|}. \quad (1.16)$$

Izjednačavanjem (1.15) i (1.16) dobiva se

$$\frac{|SP|}{|EU|} = \frac{|SQ|}{|EV|}, \quad (1.17)$$

što je ekvivalentno s

$$\frac{|SP|}{|SQ|} = \frac{|EU|}{|EV|}. \quad (1.18)$$

Neka je  $|\angle CBA| = \beta$  i  $|\angle BCA| = \gamma$ . Sa slike 1.8 vidi se da vrijedi  $|\angle EBU| = \beta$  te  $|\angle ECV| = \gamma$ . Promatranjem pravokutnih trokuta  $\triangle UBE$  i  $\triangle VEC$  redom dobivamo

$$\sin \beta = \frac{|EU|}{|BE|} \implies |EU| = |BE| \sin \beta, \quad (1.19)$$

$$\sin \gamma = \frac{|EV|}{|EC|} \implies |EV| = |EC| \sin \gamma. \quad (1.20)$$

Kada se jednakosti (1.19) i (1.20) uvrste u (1.18), dobiva se

$$\frac{|SP|}{|SQ|} = \frac{|BE| \sin \beta}{|EC| \sin \gamma}. \quad (1.21)$$



Primjenom poučka o sinusu na trokut  $\triangle ABC$  vrijedi

$$\frac{|AB|}{\sin \gamma} = \frac{|AC|}{\sin \beta},$$

to jest

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{\sin \gamma}{\sin \beta}. \quad (1.22)$$

Uvrštavanjem (1.22) u (1.21) slijedi

$$\frac{|SP|}{|SQ|} = \frac{|BG|}{|EC|} \cdot \frac{|AC|}{|AB|} \quad (1.23)$$

Prema teoremu 1.2.2 vrijedi

$$\frac{|BE|}{|EC|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2},$$

zbog čega sada konačno slijedi

$$\begin{aligned} \frac{|SP|}{|SQ|} &= \frac{|AB|^2}{|AC|^2} \cdot \frac{|AC|}{|AB|} \\ &= \frac{|AB|}{|AC|}. \end{aligned}$$

□

**Teorem 1.2.5.** *Simedijane nekog trokuta  $\triangle ABC$  sijeku se u jednoj točki  $K$ .*

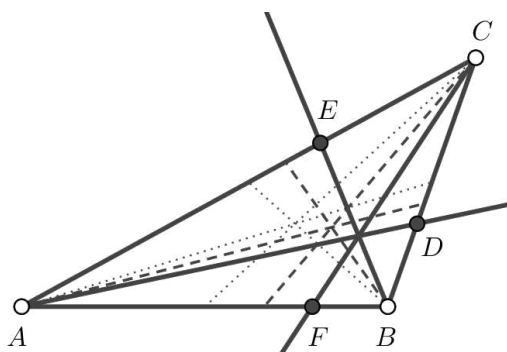
*Dokaz.* Neka su  $AD, BE, CF$  simedijane trokuta  $\triangle ABC$  (slika 1.9). Iz teorema 1.2.3 slijedi

$$\begin{aligned} \frac{|BD|}{|CD|} &= \frac{|AB|^2}{|AC|^2}, \\ \frac{|CE|}{|AE|} &= \frac{|BC|^2}{|AB|^2}, \\ \frac{|AF|}{|BF|} &= \frac{|AC|^2}{|BC|^2}. \end{aligned}$$

Množenjem dobivenih jednakosti slijedi

$$\frac{|BD|}{|CD|} \cdot \frac{|CE|}{|AE|} \cdot \frac{|AF|}{|BF|} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2} \cdot \frac{|BC|^2}{|AB|^2} \cdot \frac{|AC|^2}{|BC|^2} = 1$$

pa prema obratu Cevinog teorema (tm. 1.1.2) slijedi da se simedijane  $AD, BE, CF$  sijeku u jednoj točki.

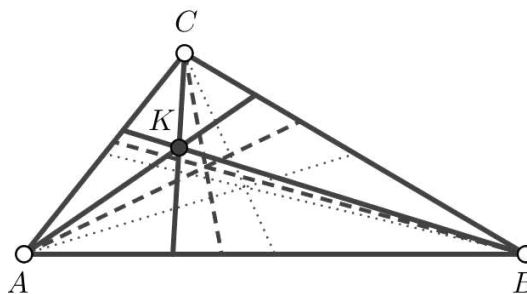


Slika 1.9

□

**Definicija 1.2.6.** Sjecište  $K$  simedijana trokuta  $\triangle ABC$  naziva se **Lemoineovom<sup>3</sup> točkom**.

U [6] Lemoineova točka navedena je kao  $X(6)$  i naziva se još i simedijalna točka (engl. *symmedian point*) te Grebeova točka.



Slika 1.10: Točka  $K$  je Lemoineova točka trokuta  $\triangle ABC$

Sljedeći teorem je izravna posljedica teorema 1.2.4.

**Teorem 1.2.7.** Neka je dan trokut  $\triangle ABC$  i točka  $K$  unutar toga trokuta koja predstavlja njegovu Lemoineovu točku. Tada vrijedi da su udaljenosti točke  $K$  do stranica trokuta proporcionalne pripadnim stranicama tog trokuta

$$d_a : d_b : d_c = a : b : c.$$

*Dokaz.* Neka su s  $d_a, d_b, d_c$  redom udaljenosti Lemoineove točke  $K$  od stranica  $a, b, c$  trokuta  $\triangle ABC$ . Prema teoremu 1.2.4 ako točka leži na simedijani, njezine udaljenosti od stranica trokuta koje se ne sijeku s tom simedijanom proporcionalne su duljinama tih dviju

<sup>3</sup>Émile Lemoine (1840. – 1912.), francuski matematičar

stranica trokuta. Budući da Lemoineova točka  $K$  leži na svim trima simedijanama danog trokuta  $\triangle ABC$ , vrijedi

$$\frac{d_a}{d_b} = \frac{a}{b},$$

$$\frac{d_b}{d_c} = \frac{b}{c}.$$

Zapisujući te dvije jednakosti u obliku produženog omjera, dobiva se željeni izraz

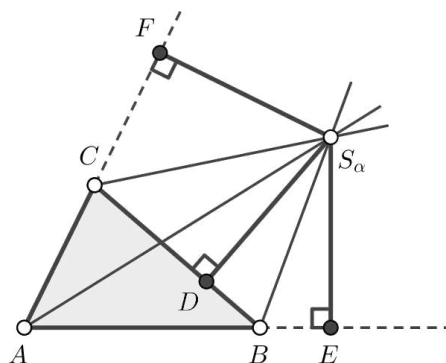
$$d_a : d_b : d_c = a : b : c.$$

□

### 1.3 Pripisane kružnice

Svaki trokut ima tri pripisane kružnice, a prije same definicije potrebno je pronaći gdje se nalazi središte jedne takve kružnice.

**Teorem 1.3.1.** *Simetrale bilo koja dva vanjska kuta trokuta i simetrala preostalog trećeg unutrašnjeg kuta trokuta sijeku se u jednoj točki.*



Slika 1.11

*Dokaz.* Neka su konstruirane simetrale vanjskih kutova trokuta  $\triangle ABC$  pri vrhovima  $B$  i  $C$ , kao na slici 1.11 i neka je  $S_\alpha$  sjecište tih simetrala. Neka je točka  $D$  sjecište okomice iz točke  $S_\alpha$  na stranicu  $\overline{BC}$ . Budući da  $S_\alpha$  leži na simetrali vanjskog kuta pri vrhu  $B$ , slijedi da je

$$|S_\alpha D| = |S_\alpha E|. \tag{1.24}$$

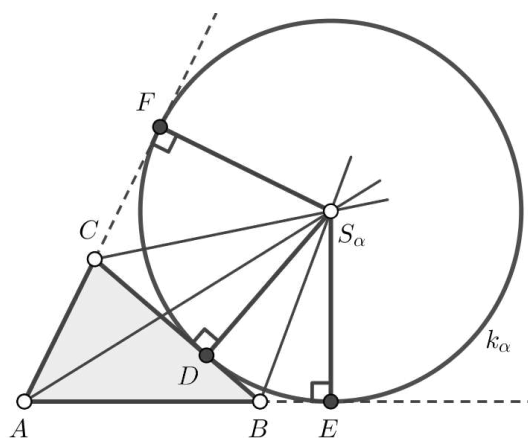
No, točka  $S_\alpha$  pripada i simetrali vanjskog kuta pri vrhu  $C$  pa vrijedi

$$|S_\alpha D| = |S_\alpha F|. \quad (1.25)$$

Iz (1.24) i (1.25) slijedi  $|S_\alpha E| = |S_\alpha F|$ , što znači da točka  $S_\alpha$  pripada simetrali kuta  $\angle EAF$ , odnosno kuta  $\angle BAC$ . Dakle, simetrale vanjskih kutova trokuta pri vrhovima  $B$  i  $C$  i simetrala unutarnjeg kuta pri vrhu  $A$  sijeku se u točki  $S_\alpha$ , a točke  $D, E, F$  su konciklične.  $\square$

**Definicija 1.3.2.** *Kružnicu  $k_\alpha$  koja dira stranicu  $\overline{BC}$  s vanjske strane i produžetke ostalih dviju stranica trokuta  $\triangle ABC$  zovemo **pripisanom kružnicom** uz stranicu  $\overline{BC}$ .*

Analogno se definiraju pripisane kružnice  $k_\beta$  i  $k_\gamma$ .



Slika 1.12: Pripisana kružnica  $k_\alpha$

## 1.4 Leibnizova formula

Od koristi u rješavanju zadataka u glavnom dijelu rada bit će i Leibnizova formula, koja povezuje zbroj kvadrata udaljenosti neke točke ravnine od vrhova trokuta sa zbrojem trostrukog kvadrata udaljenosti te točke od težišta trokuta i kvadrata udaljenosti vrhova trokuta od težišta. No, prije iskaza Leibnizove<sup>4</sup> formule, potrebno je pronaći duljinu težišnica trokuta te dokazati Stewartov<sup>5</sup> teorem. Prema [7] prvi poznati dokaz Stewartovog teorema dao je Simson<sup>6</sup> 1751. godine.

<sup>4</sup>Gottfried Wilhelm Leibniz (1646. – 1716.), njemački matematičar

<sup>5</sup>Matthew Stewart (1717. – 1785.), škotski matematičar

<sup>6</sup>Robert Simson (1687. – 1768.), škotski matematičar

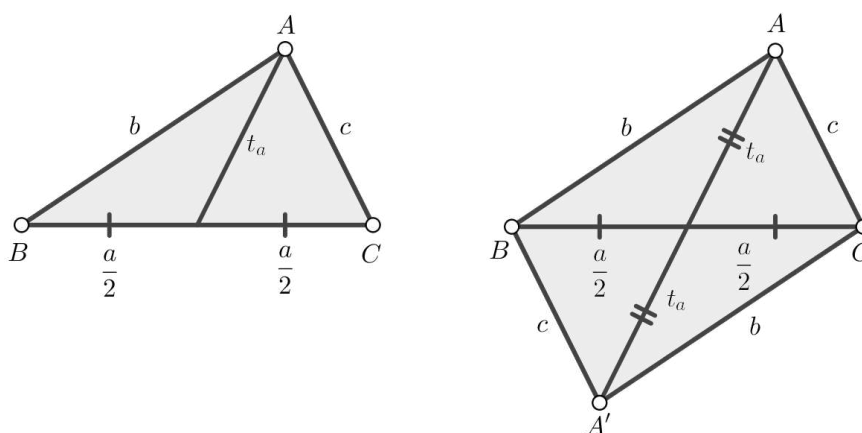
**Propozicija 1.4.1.** Neka je dan trokut  $\triangle ABC$  i duljine težišnica  $t_a, t_b, t_c$ . Tada vrijedi:

$$t_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2),$$

$$t_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2),$$

$$t_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2).$$

*Dokaz.* Dokaz bez riječi rekonstruiran je iz [8] i nalazi se na slici 1.13.



Slika 1.13

*Objašnjenje.* Zadan je trokut  $\triangle ABC$  od kojega je nastao paralelogram  $ABA'C$ . U svakom paralelogramu vrijedi da je zbroj kvadrata duljina dijagonala jednak dvostrukom zbroju kvadrata duljina njegovih stranica

$$(2t_a)^2 + \left(2 \cdot \frac{a}{2}\right)^2 = 2(b^2 + c^2),$$

odnosno

$$4t_a^2 + a^2 = 2b^2 + 2c^2$$

iz čega na kraju slijedi

$$t_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2).$$

Analogno se dokažu i jednakosti

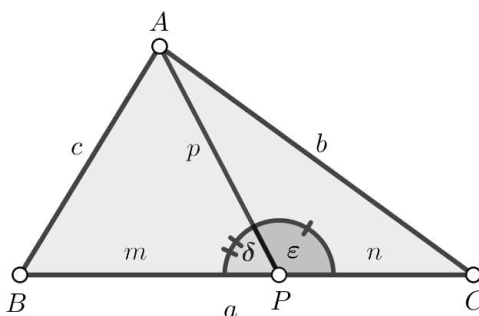
$$t_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2),$$

$$t_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2).$$

□

**Teorem 1.4.2. (Stewartov teorem)** Neka je dan trokut  $\triangle ABC$  i točka  $P$  na  $\overline{BC}$ . Uz oznake kao na slici 1.14 vrijedi

$$a(p^2 + mn) = mb^2 + nc^2.$$



Slika 1.14

*Dokaz.* Budući da vrijedi  $\epsilon = 180^\circ - \delta$ , slijedi

$$\cos \epsilon = -\cos \delta. \tag{1.26}$$

Koristeći poučak o kosinusu u trokutu  $\triangle ABP$  dobije se

$$c^2 = m^2 + p^2 - 2mp \cos \delta$$

iz čega slijedi

$$\cos \delta = \frac{m^2 + p^2 - c^2}{2mp}.$$

Slično se u trokutu  $\triangle ACP$  dobije

$$\cos \epsilon = \frac{n^2 + p^2 - b^2}{2np}.$$

Zbog (1.26) slijedi

$$\frac{n^2 + p^2 - b^2}{2np} = -\frac{m^2 + p^2 - c^2}{2mp},$$

što množenjem s  $2nmp$  daje

$$m(n^2 + p^2 - b^2) = -n(m^2 + p^2 - c^2),$$

odnosno

$$mn^2 + mp^2 - mb^2 = -nm^2 - np^2 + nc^2.$$

Sređivanjem se dalje dobiva

$$p^2(m+n) + mn(n+m) = mb^2 + nc^2.$$

Zbog toga što je  $a = m + n$  sada slijedi

$$a(p^2 + mn) = mb^2 + nc^2.$$

□

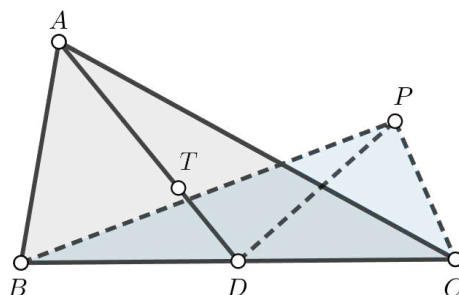
**Teorem 1.4.3. (Leibnizova formula)** Neka je  $T$  težište trokuta  $\triangle ABC$ . Za bilo koju točku  $P$  u ravnini, različitu od vrhova danog trokuta, vrijedi

$$|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 = 3|PT|^2 + |TA|^2 + |TB|^2 + |TC|^2.$$

*Dokaz.* Neka je  $D$  polovište stranice  $\overline{BC}$ . Tada je  $\overline{PD}$  težišnica trokuta  $\triangle PBC$ , a  $\overline{AD}$  težišnica trokuta  $\triangle ABC$  (slika 1.15.) Prema propoziciji 1.4.1 iz toga redom slijedi

$$|PD|^2 = \frac{1}{4} (2|PB|^2 + 2|PC|^2 - |BC|^2), \quad (1.27)$$

$$|AD|^2 = \frac{1}{4} (2|AB|^2 + 2|AC|^2 - |BC|^2). \quad (1.28)$$



Slika 1.15

Budući da je  $T$  težište trokuta  $\triangle ABC$ , vrijedi sljedeće

$$\begin{aligned} |AT| &= \frac{2}{3}|AD|, \\ |TD| &= \frac{1}{3}|AD|. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Prema Stewartovom teoremu (tm. 1.4.2) u trokutu  $\triangle PAD$  vrijedi

$$|AD| \cdot |PT|^2 = |AT| \cdot |PD|^2 + |TD| \cdot |PA|^2 - |AD| \cdot |AT| \cdot |TD|.$$

Zbog (1.29) to je ekvivalentno s

$$|AD| \cdot |PT|^2 = \frac{2}{3}|AD| \cdot |PD|^2 + \frac{1}{3}|AD| \cdot |PA|^2 - |AD| \cdot \frac{2}{3}|AD| \cdot \frac{1}{3}|AD|,$$

što dijeljenjem s  $|AD|$  daje

$$|PT|^2 = \frac{2}{3}|PD|^2 + \frac{1}{3}|PA|^2 - \frac{2}{9}|AD|^2.$$

Sada iz (1.27) i (1.28) slijedi

$$\begin{aligned} |PT|^2 &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} (2|PB|^2 + 2|PC|^2 - |BC|^2) + \frac{1}{3}|PA|^2 - \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4} (2|AB|^2 + 2|AC|^2 - |BC|^2) \\ &= \frac{1}{3}|PB|^2 + \frac{1}{3}|BC|^2 - \frac{1}{6}|BC|^2 + \frac{1}{3}|PA|^2 - \frac{1}{9}|AB|^2 + \frac{1}{9}|AC|^2 + \frac{1}{18}|BC|^2 \\ &= \frac{1}{3} (|PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2) - \frac{1}{9} (|BC|^2 + |AC|^2 + |AB|^2). \end{aligned}$$

Množenjem s 3 dobiva se

$$3|PT|^2 = |PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 - \frac{1}{3} (|BC|^2 + |AC|^2 + |AB|^2). \quad (1.30)$$

Neka su duljine težišnica u trokutu  $\triangle ABC$  na stranice  $\overline{BC}$ ,  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  redom označene s  $t_a$ ,  $t_b$  i  $t_c$ . Njihove duljine su dobivene u propoziciji 1.4.1 pa zbrajanjem slijedi

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{3}{4} (|BC|^2 + |AC|^2 + |AB|^2),$$

odnosno

$$|BC|^2 + |AC|^2 + |AB|^2 = \frac{4}{3} (t_a^2 + t_b^2 + t_c^2). \quad (1.31)$$

Budući da je  $T$  težište trokuta  $\triangle ABC$ , vrijede sljedeće jednakosti

$$\begin{aligned} t_a &= \frac{3}{2}|AT|, \\ t_b &= \frac{3}{2}|BT|, \\ t_c &= \frac{3}{2}|CT|, \end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$t_a^2 + t_b^2 + t_c^2 = \frac{9}{4} (|AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2).$$



Uvrštavanjem izračunatog izraza u (1.31) dobiva se

$$\begin{aligned} |BC|^2 + |AC|^2 + |AB|^2 &= \frac{4}{3} (t_a^2 + t_b^2 + t_c^2) \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{4} (|AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2) \\ &= 3(|AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2). \end{aligned}$$

Sada konačno slijedi da je (1.30) ekvivalentno s

$$\begin{aligned} |PA|^2 + |PB|^2 + |PC|^2 &= 3|PT|^2 + \frac{1}{3} (|BC|^2 + |AC|^2 + |AB|^2) \\ &= 3|PT|^2 + \frac{1}{3} \cdot 3 (|AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2) \\ &= 3|PT|^2 + |AT|^2 + |BT|^2 + |CT|^2. \end{aligned}$$

□

# Poglavlje 2

## Pomoćni teoremi

### 2.1 Cauchy-Schwarzova nejednakost

U raznim zadacima ćemo koristiti Cauchy-Schwarzova nejednakost pa slijedi njezin iskaz i dokaz prilagođen prema [5].

**Teorem 2.1.1.** *Za sve realne brojeve  $a_1, a_2, \dots, a_n$  i  $b_1, b_2, \dots, b_n$  vrijedi*

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2.$$

*Jednakost vrijedi ako i samo ako je  $\frac{a_i}{b_i} = \text{const.}, \forall i = 1, 2, \dots, n$ .*

*Dokaz.* Promotrimo sljedeću funkciju

$$f(x) = (a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \dots + (a_nx - b_n)^2. \quad (2.1)$$

Budući da je funkcija  $f$  zbroj kvadrata, slijedi da je ona uvijek nenegativna. Sada  $f(x)$  možemo zapisati kao

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)x^2 - 2\sum_{i=1}^n a_i b_i x + \sum_{i=1}^n b_i^2,$$

što je kvadratna funkcija po  $x$  i njezin graf je konveksna parabola. Budući da je  $f \geq 0$ , graf dodiruje  $x$ -os ili se nalazi iznad nje. To znači da  $f$  ima dvostruku realnu nultočku ili da nema nijednu realnu nultočku.

Ako  $f$  nema realnih nultočaka, onda joj je diskriminanta negativna, odnosno vrijedi

$$4 \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 - 4 \left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) < 0.$$

Dijeljenjem s 4 dobivamo nejednakost

$$\left( \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left( \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) > \left( \sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2. \quad (2.2)$$

Ako  $f$  ima dvostruku realnu nultočku, onda joj je diskriminanta jednaka nuli pa vrijedi jednakost u (2.2). Zbroj kvadrata jednak je 0 ako i samo ako su oba pribrojnika jednaka 0 pa primjenjujući to svojstvo na (2.1), dobivamo

$$a_i x - b_i = 0 \quad \implies \quad \frac{b_i}{a_i} = x, \quad \forall i \in 1, \dots, n.$$

□

## 2.2 Nejednakosti među sredinama

U nekim zadacima ćemo koristiti nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine te aritmetičke i geometrijske sredine. Slijede samo iskazi tih teorema.

### Aritmetičko-kvadratna nejednakost

**Teorem 2.2.1.** (Nejednakost između aritmetičke i kvadratne sredine). Neka su  $a_1, a_2, \dots, a_n$  proizvoljni pozitivni realni brojevi. Tada vrijedi

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}, \quad (2.3)$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

### Aritmetičko-geometrijska nejednakost

**Teorem 2.2.2.** (Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine). Neka su  $a_1, a_2, \dots, a_n$  proizvoljni pozitivni realni brojevi. Tada vrijedi

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 + a_2 + \dots + a_n}, \quad (2.4)$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je  $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ .

## 2.3 Ptolomejev teorem

Prije iskaza samog Ptolomejevog teorema slijedi definicija tetivnog četverokuta.

**Definicija 2.3.1.** Četverokut oko kojega se može opisati kružnica, odnosno kojemu su sve stranice tetive jedne te iste kružnice, zove se tetivni četverokut.

**Teorem 2.3.2.** Četverokut je tetivni onda i samo onda ako je zbroj njegovih unutarnjih dvaju nasuprotnih kutova jednak  $180^\circ$ , odnosno

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ.$$

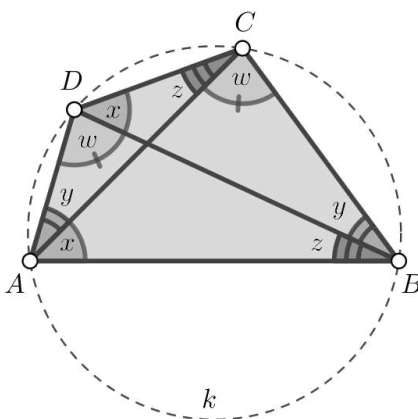
*Dokaz.* Neka je u ravnini dan proizvoljni tetivni četverokut  $ABCD$  i neka je  $|\angle BAD| = \alpha$ ,  $|\angle CBA| = \beta$ ,  $|\angle DCB| = \gamma$  te  $|\angle ADC| = \delta$ . Promatranjem obodnih kutova unutar kružnice  $k$  pronalazimo sukladne kutove. Oni su označeni na slici 2.1.

Vrijedi

$$(y + x) + (z + y) + (w + z) + (x + w) = 360^\circ,$$

odnosno

$$x + y + z + w = 180^\circ. \quad (2.5)$$



Slika 2.1

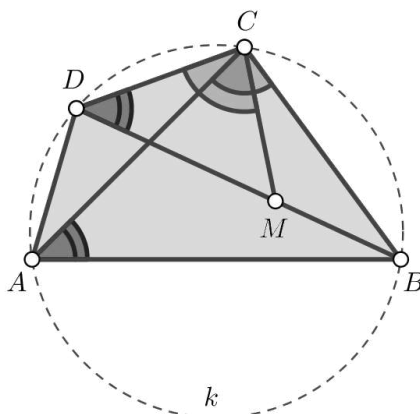
Vidimo da je  $\alpha = x + y$  i  $\gamma = z + w$  pa uvrštavanjem u (2.5) dobivamo upravo  $\alpha + \gamma = 180^\circ$ . Također vrijedi da je  $\beta = y + z$  i  $\delta = x + w$  pa primjenom komutativnosti u (2.5) dobivamo  $\beta + \delta = 180^\circ$  i time je tvrdnja dokazana.  $\square$

Ptolomejev teorem će nam biti od koristi u rješavanju nekih zadataka pa slijedi njegov iskaz i dokaz. Dokaz teorema prilagođen je prema [3].

**Teorem 2.3.3. (Ptolomejev teorem)** U svakom tetivnom četverokutu umnožak duljina dijagonala jednak je zbroju umnožaka duljina nasuprotnih stranica.

*Dokaz.* Neka je  $ABCD$  tetivni četverokut. Uz oznake kao na slici 2.2 tvrdnja Ptolomejevog teorema zapravo glasi

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|.$$



Slika 2.2

Neka je točka  $M$  na dijagonali  $\overline{BD}$  takva da vrijedi da su kutovi  $\angle ACB$  i  $\angle DCM$  sukladni. Budući da su kutovi  $\angle BAC$  i  $\angle BDC$  nad istim kružnim lukom  $BC$ , oni su također sukladni. Stoga su trokuti  $\triangle ABC$  i  $\triangle DMC$  slični prema  $K-K$  poučku o sličnosti trokuta. Iz toga slijedi

$$\frac{|CD|}{|MD|} = \frac{|AC|}{|AB|},$$

odnosno

$$|AB| \cdot |CD| = |AC| \cdot |MD|. \quad (2.6)$$

Kutovi  $\angle BCM$  i  $\angle DCA$  su sukladni pa su trokuti  $\triangle BCM$  i  $\triangle ACD$  slični iz čega slijedi

$$\frac{|BC|}{|BM|} = \frac{|AC|}{|AD|},$$

odnosno

$$|BC| \cdot |AD| = |AC| \cdot |BM|. \quad (2.7)$$

Zbrajanjem jednakosti (2.6) i (2.7) dobiva se

$$\begin{aligned} |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD| &= |AC| \cdot |MD| + |AC| \cdot |BM| \\ &= |AC| \cdot (|MD| + |BM|) \\ &= |AC| \cdot |BD|. \end{aligned}$$

□

Vrijedi i Ptolomejeva nejednakost za četiri proizvoljne točke ravnine. Dokaz teorema preuzet je iz [1].

**Teorem 2.3.4. (Ptolomejeva nejednakost)** *Neka su  $A, B, C, D$  proizvoljne točke u ravnini. Tada vrijedi*

$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| \geq |AC| \cdot |BD|.$$

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti može se pretpostaviti da su sve četiri točke međusobno različite. Inače dana nejednakost vrijedi trivijalno.

Neka su  $B', C', D'$  točke redom na polupravcima  $AB, AC$  i  $AD$  takve da vrijedi

$$|AB'| \cdot |AB| = |AC'| \cdot |AC| = |AD'| \cdot |AD| = 1.$$

Tada vrijedi

$$\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC'|}{|AB'|},$$

iz čega se zaključuje da su trokuti  $\triangle ABC$  i  $\triangle AB'C'$  slični. Stoga vrijedi

$$|B'C'| = \frac{|BC|}{|AB| \cdot |AC|}.$$

Analogno se dobiva

$$|C'D'| = \frac{|CD|}{|AC| \cdot |AD|},$$

$$|B'D'| = \frac{|BD|}{|AB| \cdot |AD|}.$$

Sada iz nejednakosti trokuta  $|B'C'| + |C'D'| \geq |B'D'|$  slijedi

$$|AB| \cdot |CD| + |AD| \cdot |BC| \geq |AC| \cdot |BD|.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je četverokut  $ABCD$  tetivan. □

## Poglavlje 3

# Točke trokuta s ekstremalnim svojstvima

U svakom trokutu postoje razne točke definirane nekim posebnim geometrijskim svojstvima. Primjerice težište, središte upisane, središte opisane kružnice, Lemoineova točka i slično. Ispostavlja se da je mnoge od ovih točaka moguće karakterizirati kao točke u kojima neke funkcije u ravnini ili prostoru postižu svoj ekstrem, odnosno maksimum ili minimum.

U nastavku slijede zadatci u kojima su navedene neke točke trokuta u kojima određene funkcije postižu ekstrem. Osim u četirima karakterističnim točkama trokuta, ekstremi funkcija koje slijede u nastavku postižu se i u nekim manje poznatim točkama poput Lemoineove točke i Fermat-Torricellijeve točke.

### 3.1 Težište trokuta

**Zadatak 3.1.1.** *Za bilo koju točku  $P$  u danom trokutu  $ABC$  neka su njezine udaljenosti od stranica  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ ,  $\overline{AB}$  redom označene s  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Pronađite položaj točke  $P$  za koji je izraz*

$$\frac{1}{ax} + \frac{1}{by} + \frac{1}{cz},$$

*minimalan, pri čemu je  $|BC| = a$ ,  $|CA| = b$ ,  $|AB| = c$ .*

*Rješenje.* Vrijedi

$$\begin{aligned} P_{\triangle ABC} &= P_{\triangle ABP} + P_{\triangle BCP} + P_{\triangle CAP} \\ &= \frac{c \cdot z}{2} + \frac{a \cdot x}{2} + \frac{b \cdot y}{2}, \end{aligned}$$

to jest

$$2P_{\triangle ABC} = ax + by + cz. \quad (3.1)$$

Iz A-G nejednakosti za brojeve  $a, b, c$  slijedi

$$ax + by + cz \geq 3\sqrt[3]{ax \cdot by \cdot cz}, \quad (3.2)$$

pri čemu jednakost vrijedi za  $ax = by = cz$ . S druge strane, za brojeve  $\frac{1}{ax}, \frac{1}{by}, \frac{1}{cz}$  slijedi

$$\frac{1}{ax} + \frac{1}{by} + \frac{1}{cz} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{ax} \cdot \frac{1}{by} \cdot \frac{1}{cz}}, \quad (3.3)$$

pri čemu jednakost vrijedi za  $ax = by = cz$ .

Množenjem (3.2) i (3.3) dobiva se

$$(ax + by + cz) \left( \frac{1}{ax} + \frac{1}{by} + \frac{1}{cz} \right) \geq 9.$$

Sada se uvrštavanjem (3.1) dobiva

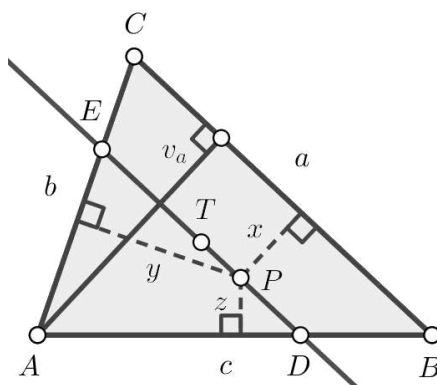
$$2P_{\triangle ABC} \left( \frac{1}{ax} + \frac{1}{by} + \frac{1}{cz} \right) \geq 9,$$

odnosno

$$\frac{1}{ax} + \frac{1}{by} + \frac{1}{cz} \geq \frac{9}{2P_{\triangle ABC}},$$

pri čemu se jednakost postiže samo kada vrijedi  $ax = by = cz$ , a upravo tada traženi izraz postiže minimum.

Sada je cilj pokazati da se taj minimum postiže kada je  $P$  težište trokuta  $\triangle ABC$ .



Slika 3.1



Usmjerimo sada pažnju na točku  $P$  i njezinu udaljenost do stranice  $\overline{BC}$ . Presječne točke te paralele sa stranicama  $\overline{AB}$  i  $\overline{AC}$  označimo s  $D$  i  $E$ . Trokuti  $\triangle ADE$  i  $\triangle ABC$  su slični po  $K-K$  poučku. Budući da je  $ax = by = cz$ , a zbroj ta tri broja je  $2P_{\triangle ABC}$ , slijedi da je

$$ax = \frac{2}{3}P_{\triangle ABC}. \quad (3.4)$$

Iz točke  $A$  povucimo visinu  $v_a$  na stranicu  $\overline{BC}$ . Vrijedi

$$av_a = 2P_{\triangle ABC}. \quad (3.5)$$

Dijeljenjem jednakosti (3.4) i (3.5) dobivamo

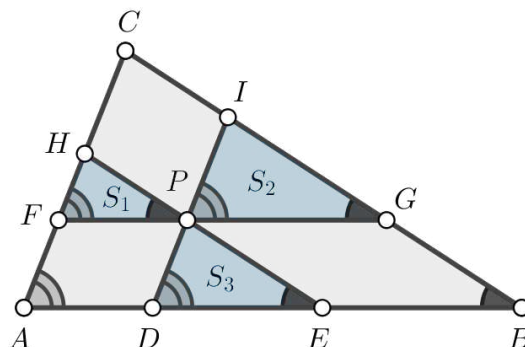
$$x : v_a = 1 : 3,$$

to jest duljina visine iz vrha  $A$  u trokutu  $\triangle ADE$  jednaka je  $2/3$  duljine visine  $v_a$ . To znači da je koeficijent sličnosti ta dva trokuta  $2 : 3$ . Ali težište  $T$  trokuta  $\triangle ABC$  dijeli težišnicu iz vrha  $A$  također u tom omjeru. To znači da se težište  $T$  trokuta  $\triangle ABC$  nalazi se na paraleli  $DE$  kroz  $P$ .

Sada se isto razmišljanje provede i za paralelu kroz  $P$  sa stranicom  $\overline{AB}$  te sa stranicom  $\overline{AC}$ . Tako se dobije da se težište  $T$  nalazi na sve te tri paralele, a to može biti samo ako se  $T$  nalazi u njihovom presjeku. Ali u njihovom presjeku je već točka  $P$  čime se dolazi do zaključka da je  $P = T$ .

□

**Zadatak 3.1.2.** Neka je dana točka  $P$  u unutrašnjosti trokuta  $\triangle ABC$  i neka su povučene paralele sa stranicama trokuta kroz tu točku. Ti pravci dijele trokut na šest dijelova, od kojih su tri trokuti s površinama  $S_1, S_2, S_3$ . Pronađite položaj točke  $P$  takav da je zbroj  $S_1 + S_2 + S_3$  minimalan.



Slika 3.2

*Rješenje.* Trokuti s površinama  $S_1$ ,  $S_2$  i  $S_3$  slični su trokutu  $\triangle ABC$  prema  $K-K$  poučku o sličnosti trokuta jer su im odgovarajući kutovi sukladni. Naime, prema konstrukciji u zadatku, ti kutovi se nalaze uz presječnicu paralelnih pravaca pa su sukladni (slika 3.2). Osim tih triju trokuta nastaju i tri paralelograma.

Ako su dva trokuta slična, onda im se površine odnose u omjeru kvadrata duljina njihovih sličnih stranica. Neka je  $P_{\triangle ABC} = S$ . Tako vrijedi

$$\begin{aligned}\frac{S_1}{S} &= \frac{|FP|^2}{|AB|^2} \implies |FP|^2 = \frac{S_1 \cdot |AB|^2}{S}, \\ \frac{S_2}{S} &= \frac{|PG|^2}{|AB|^2} \implies |PG|^2 = \frac{S_2 \cdot |AB|^2}{S}, \\ \frac{S_3}{S} &= \frac{|DE|^2}{|AB|^2} \implies |DE|^2 = \frac{S_3 \cdot |AB|^2}{S}.\end{aligned}$$

Iz toga redom slijedi

$$|FP| = \frac{|AB| \sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}, \quad (3.6)$$

$$|PG| = \frac{|AB| \sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}, \quad (3.7)$$

$$|DE| = \frac{|AB| \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}. \quad (3.8)$$

Budući da su  $ABPF$ ,  $EBGP$  i  $HPIC$  prema konstrukciji paralelogrami, slijedi  $|FP| = |AD|$ ,  $|PG| = |EB|$ . Također vrijedi

$$|AB| = |AD| + |DE| + |EB| = |FP| + |DE| + |PG|.$$

Sada iz (3.6), (3.7) i (3.8) slijedi

$$|AB| = \frac{|AB| \sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} + \frac{|AB| \sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} + \frac{|AB| \sqrt{S_3}}{\sqrt{S}},$$

što dijeljenjem s  $|AB| \neq 0$  daje

$$1 = \frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}} + \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}.$$

Dalje slijedi

$$\sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3},$$

što kvadriranjem konačno postaje

$$S = \left( \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} \right)^2.$$

Sada prema A-K nejednakosti za brojeve  $\sqrt{S_1}$ ,  $\sqrt{S_2}$  i  $\sqrt{S_3}$  vrijedi

$$\sqrt{\frac{\sqrt{S_1^2} + \sqrt{S_2^2} + \sqrt{S_3^2}}{3}} \geq \frac{\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3}}{3}.$$

Obje strane nejednakosti su nenegativni brojevi jer su i  $S_1, S_2, S_3$  nenegativni pa se kvadriranjem dobiva

$$\frac{S_1 + S_2 + S_3}{3} \geq \frac{\left( \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} \right)^2}{9},$$

što množenjem s 3 postaje

$$S_1 + S_2 + S_3 \geq \frac{\left( \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} \right)^2}{3} = \frac{S}{3}.$$

Jednakost između aritmetičke i kvadratne sredine postiže se ako i samo ako vrijedi  $\sqrt{S_1} = \sqrt{S_2} = \sqrt{S_3}$ , odnosno  $S_1 = S_2 = S_3$ .

Promatrani trokuti su međusobno slični i u ovom slučaju su im površine jednake pa su stoga oni međusobno sukladni. Drugim riječima,  $|HP| = |PE|$ , to jest  $P$  je polovište stranice  $\overline{HE}$  trokuta  $\triangle AEH$ . Dakle,  $\overline{AP}$  je težišnica toga trokuta. Nadalje, trokut  $\triangle AEH$  je sličan (štoviše, homotetičan) trokutu  $\triangle ABC$  pa težišnica trokuta  $\triangle ABC$  iz vrha  $A$  leži na pravcu  $AP$ .

Slično se zaključi da težišnice iz vrhova  $B$  i  $C$  leže redom na pravcima  $BP$  i  $CP$  iz čega se vidi da je točka  $P$  zajednička svim trima težišnicama, odnosno da je  $P$  težište trokuta  $\triangle ABC$ . To znači da je zbroj  $S_1 + S_2 + S_3$  minimalan kada je  $P$  težište trokuta  $\triangle ABC$ .  $\square$

**Zadatak 3.1.3.** *Neka je dana točka  $P$  u unutrašnjosti trokuta  $\triangle ABC$  i neka pravci  $AP$ ,  $BP$ ,  $CP$  sijeku stranice  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$  i  $\overline{AB}$  redom u točkama  $D$ ,  $E$ ,  $F$ . Pronađite položaj točke  $P$  tako da je površina trokuta  $\triangle DEF$  maksimalna.*

*Rješenje.* Neka je  $\lambda := \frac{|AF|}{|FB|}$ ,  $\mu := \frac{|BD|}{|DC|}$  i  $\nu := \frac{|CE|}{|EA|}$ . Prema obratu Cevinog teorema vrijedi

$$\lambda\mu\nu = 1. \tag{3.9}$$

Vrijedi da je

$$P_{\triangle DEF} = P_{\triangle ABC} - P_{\triangle AFE} - P_{\triangle BDF} - P_{\triangle CED},$$

što dijeljenjem s  $P_{\triangle ABC}$  postaje

$$\frac{P_{\triangle DEF}}{P_{\triangle ABC}} = 1 - \frac{P_{\triangle AFE}}{P_{\triangle ABC}} - \frac{P_{\triangle BDF}}{P_{\triangle ABC}} - \frac{P_{\triangle CED}}{P_{\triangle ABC}}. \quad (3.10)$$

Neka su s  $E'$  i  $C'$  redom označene ortogonalne projekcije točaka  $E$  i  $C$  na  $AB$ . Trokuti  $\triangle AEE'$  i  $\triangle ACC'$  su pravokutni s pravim kutom u vrhu  $E'$ , odnosno  $C'$ . Neka je  $|\angle E'AE| = \alpha$ . Tada u trokutima  $\triangle AEE'$  i  $\triangle ACC'$  redom vrijedi:

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{|EE'|}{|AE|}, \\ \sin \alpha &= \frac{|CC'|}{|AC|}, \end{aligned}$$

odakle dalje slijedi

$$\begin{aligned} |EE'| &= |AE| \sin \alpha, \\ |CC'| &= |AC| \sin \alpha. \end{aligned}$$

Sada se za omjer površina trokuta  $\triangle AFE$  i  $\triangle ABC$  dobiva

$$\frac{P_{\triangle AFE}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{\frac{|AF| \cdot |EE'|}{2}}{\frac{|AB| \cdot |CC'|}{2}} = \frac{|AF| \cdot |EE'|}{|AB| \cdot |CC'|} = \frac{|AF| \cdot |AE| \sin \alpha}{|AB| \cdot |AC| \sin \alpha} = \frac{|AF|}{|AB|} \cdot \frac{|AE|}{|AC|}.$$

Dobiveni se omjer može zapisati ovako:

$$\frac{P_{\triangle AFE}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{|AF| \cdot |FB| \cdot |AE|}{|AB| \cdot |FB| \cdot |AC|} = \frac{\frac{|AF|}{|FB|}}{\frac{|AB|}{|FB|} \cdot \frac{|CA|}{|EA|}} = \frac{\lambda}{\frac{|AF| + |FB|}{|FB|} \cdot \frac{|CE| + |EA|}{|EA|}} = \frac{\lambda}{(\lambda + 1)(\nu + 1)}.$$

Slično se pokaže da vrijedi:

$$\begin{aligned} \frac{P_{\triangle BDF}}{P_{\triangle ABC}} &= \frac{|BD|}{|BC|} \cdot \frac{|BF|}{|BA|} = \frac{\mu}{(\mu + 1)(\lambda + 1)}, \\ \frac{P_{\triangle CED}}{P_{\triangle ABC}} &= \frac{|CE|}{|CA|} \cdot \frac{|CD|}{|CB|} = \frac{\nu}{(\nu + 1)(\mu + 1)}. \end{aligned}$$

Sada se (3.10) može zapisati kao

$$\begin{aligned}
\frac{P_{\triangle DEF}}{P_{\triangle ABC}} &= 1 - \frac{\lambda}{(\lambda+1)(\nu+1)} - \frac{\mu}{(\mu+1)(\lambda+1)} - \frac{\nu}{(\nu+1)(\mu+1)} \\
&= \frac{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1) - \lambda(\mu+1) - \mu(\nu+1) - \nu(\lambda+1)}{\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)} \\
&= \frac{(\lambda\mu + \lambda + \mu + 1)(\nu+1) - \lambda\mu - \lambda - \mu\nu - \mu - \nu\lambda - \nu}{\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)} \\
&= \frac{\lambda\mu\nu + \lambda\nu + \mu\nu + \nu + \lambda\mu + \lambda + \mu + 1 - \lambda\mu - \lambda - \mu\nu - \mu - \nu\lambda - \nu}{\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)} \\
&= \frac{1 + \lambda\mu\nu}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)},
\end{aligned}$$

što je zbog (3.9) ekvivalentno s

$$\frac{P_{\triangle DEF}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{2}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)}. \quad (3.11)$$

Za  $\lambda, \mu, \nu$  vrijede sljedeće nejednakosti

$$(1 - \sqrt{\lambda})^2 \geq 0,$$

$$(1 - \sqrt{\mu})^2 \geq 0,$$

$$(1 - \sqrt{\nu})^2 \geq 0,$$

odnosno

$$1 + \lambda \geq 2\sqrt{\lambda}, \quad (3.12)$$

$$1 + \mu \geq 2\sqrt{\mu}, \quad (3.13)$$

$$1 + \nu \geq 2\sqrt{\nu}. \quad (3.14)$$

Množenjem nejednakosti (3.12), (3.13) i (3.14) dobiva se

$$(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1) \geq 2\sqrt{\lambda} \cdot 2\sqrt{\mu} \cdot 2\sqrt{\nu} = 8\sqrt{\lambda\mu\nu} = 8\sqrt{1} = 8.$$

Zbog toga se (3.11) sada može zapisati kao

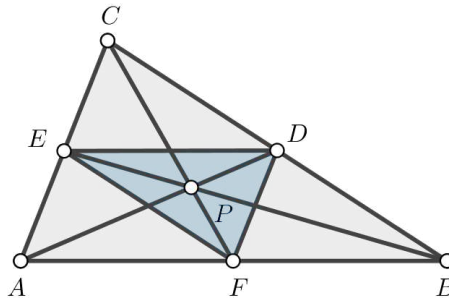
$$\frac{P_{\triangle DEF}}{P_{\triangle ABC}} = \frac{2}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)} \leq \frac{2}{8} = \frac{1}{4},$$

odnosno

$$P_{\triangle DEF} \leq \frac{1}{4}P_{\triangle ABC}.$$

Jednakost vrijedi kada je  $\lambda = \mu = \nu = 1$ , odnosno kada su točke  $D, E, F$  polovišta stranica trokuta  $\triangle ABC$ . Tada su dužine  $\overline{AD}, \overline{BE}$  i  $\overline{CF}$  težišnice trokuta  $\triangle ABC$ . Budući da su te dužine konkurentne, slijedi da je točka  $P$  težište trokuta.

Dakle, kada je  $P$  težište trokuta  $\triangle ABC$ , površina trokuta  $\triangle DEF$  maksimalna.



Slika 3.3: Površina  $\triangle DEF$  maksimalna je kada je  $P$  težište trokuta  $\triangle ABC$

□

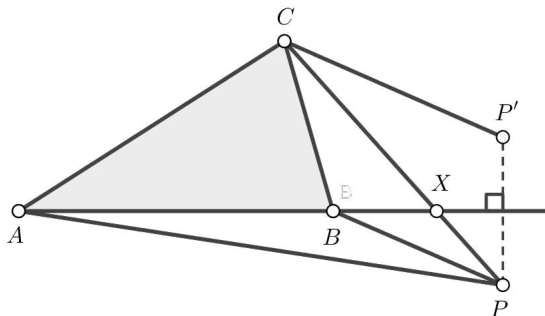
## 3.2 Fermat-Torricellijeva točka

**Zadatak 3.2.1.** Pronađite točku  $P$  u unutrašnjosti trokuta  $\triangle ABC$  tako da je zbroj

$$t(P) = |AP| + |BP| + |CP|$$

minimalan.

*Rješenje.* Ako je točka  $P$  izvan trokuta  $\triangle ABC$ , onda postoji točka  $P'$  takva da vrijedi  $t(P') < t(P)$ . Doista, pretpostavimo da je  $P$  izvan trokuta. Tada jedan od pravaca  $AB, BC, CA$ , recimo  $AB$ , ima svojstvo da trokut  $\triangle ABC$  i točka  $P$  leže u različitim poluravninama određenima ovim pravcem (slika 3.4).



Slika 3.4

Neka je točka  $P'$  osnosimetrična slika točke  $P$  s obzirom na pravac  $AB$ . Tada vrijedi

$$|AP'| = |AP|, \quad |BP'| = |BP|.$$

Također vrijedi da dužina  $\overline{CP}$  siječe pravac  $AB$  u nekoj točki  $X$  te da je  $|PX| = |P'X|$ . Sada iz nejednakosti trokuta slijedi

$$|CP'| < |CX| + |P'X| = |CX| + |PX| = |CP|,$$

što povlači da je  $t(P') < t(P)$ .

Promatrajmo sada sve točke  $P$  u unutrašnjosti ili na rubu trokuta  $\triangle ABC$ . Neka su  $\alpha, \beta, \gamma$  kutovi trokuta  $\triangle ABC$ . Bez smanjenja općenitosti može se pretpostaviti da vrijedi  $\gamma \geq \alpha \geq \beta$ . Tada su  $\alpha$  i  $\beta$  šiljasti kutovi.

Neka je s  $\rho$  označena rotacija oko točke  $A$  za kut od  $60^\circ$ . Za svaku točku  $M$  ravnine neka je  $M' = \rho(M)$ . Tada je  $AMM'$  jednakostranični trokut. Tako je, primjerice, za  $C' = \rho(C)$  trokut  $\triangle ACC'$  jednakostraničan.

Neka je točka  $P$  u unutrašnjosti trokuta  $\triangle ABC$ . Tada je  $|AP| = |PP'|$ . Rotacije  $\rho(P) = P'$  i  $\rho(C) = C'$  povlače  $|CP| = |C'P'|$ . Posljedica toga je da vrijedi

$$t(P) = |BP| + |PP'| + |P'C'|,$$

odnosno  $t(P)$  jednak je duljini izlomljene linije  $BPP'C'$ . Sada je potrebno razmotriti tri slučaja.

### Prvi slučaj.

Neka je  $\gamma < 120^\circ$ . Tada je  $|\angle BCC'| = \gamma + 60^\circ < 180^\circ$ . Budući da je  $\alpha < 90^\circ$ , vrijedi  $|\angle BAC'| < 180^\circ$  pa dužina  $\overline{BC'}$  siječe stranicu  $\overline{AC}$  u nekoj točki  $D$  (slika 3.5). Neka je  $P_0$  sjecište pravca  $BC'$  s kružnicom opisanom trokutu  $\triangle ACC'$ . Zbog toga što je  $|\angle C'P_0A| = |\angle C'CA| = 60^\circ$ , točka  $P_0$  leži na dužini  $\overline{BD}$ , a točka  $P'_0$  leži na dužini  $\overline{C'P_0}$ .

Vrijedi i

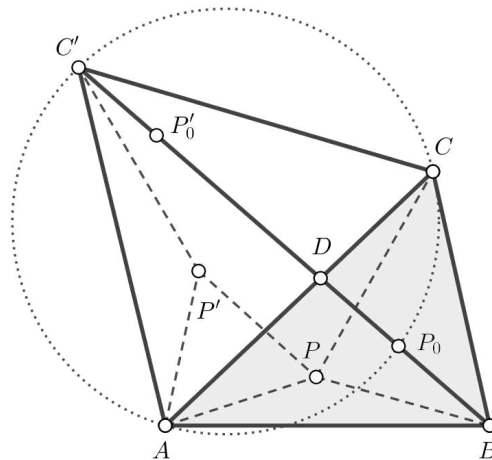
$$t(P_0) = |BP_0| + |P_0P'_0| + |P'_0C'| = |BC'|,$$

pa je  $t(T_0) \leq t(P)$  za svaku točku u unutrašnjosti trokuta  $\triangle ABC$ . Jednakost vrijedi samo kada  $P$  i  $P'$  leže na  $\overline{BC'}$ , što je moguće samo kada je  $P = P_0$ .

Može se primijetiti da točka  $P_0$  konstruirana na opisan način zadovoljava sljedeću jednakost

$$|\angle AP_0C| = |\angle AP_0B| = |\angle BP_0C| = 120^\circ.$$

Ta se točka naziva **Fermat-Torricellijevom točkom** trokuta  $\triangle ABC$ .



Slika 3.5

**Drugi slučaj.**

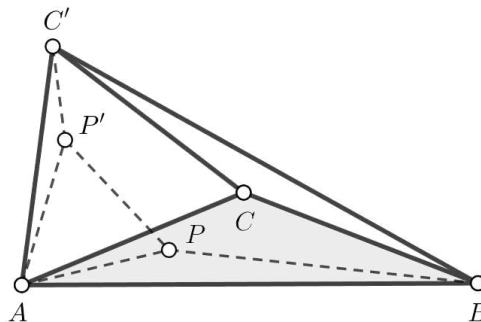
Neka je  $\gamma = 120^\circ$ . U ovom slučaju dužina  $\overline{BC'}$  sadrži točku C i

$$t(P) = |BP| + |PP'| + |P'C'| = |BC'|$$

vrijedi točno onda kada je  $P = C$ .

**Treći slučaj.**

Neka je  $\gamma > 120^\circ$ . Tada  $BC'$  nema zajedničkih točaka s  $AC$  (slika 3.6).



Slika 3.6

Ako je  $|AP| \geq |AC|$ , onda prema nejednakosti trokuta slijedi

$$t(P) = |AP| + |BP| + |CP| \geq |AC| + |BC|.$$

Ako je  $|AT| < |AC|$ , onda  $P'$  leži unutar trokuta  $\triangle ACC'$  i vrijedi

$$t(P) = |BT| + |PP'| + |P'C'| \geq |AC| + |BC|$$



zato što  $C$  leži unutar četverokuta  $BC'P'P$  (slika 3.6). U oba slučaja jednakost vrijedi točno onda kada je  $P = C$ .

Dakle, ako su mjere svih kutova trokuta  $\triangle ABC$  manje od  $120^\circ$ , onda je  $t(P)$  minimalno kada se točka  $P$  podudara s Torricellijevom točkom trokuta  $\triangle ABC$ . Ako je mjera jednog od kutova manja od  $120^\circ$ , onda je  $t(P)$  minimalno kada se točka  $P$  podudara s vrhom toga kuta.  $\square$

### 3.3 Lemoineova točka

U prvom poglavlju je pokazano da je Lemoineova točka nekog trokuta sjecište njegovih simedijana. Sada slijede zadatci koji daju dva ekstremalna svojstva ove posebne točke trokuta.

**Zadatak 3.3.1.** Za bilo koju točku  $P$  unutar trokuta  $\triangle ABC$  neka su udaljenosti od pravaca  $BC$ ,  $AC$  i  $AB$  označeni redom s  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Pronađite položaj točke  $P$  za koju je zbroj  $x^2 + y^2 + z^2$  minimalan.

*Rješenje.* Neka je  $|BC| = a$ ,  $|CA| = b$ ,  $|AB| = c$  (slika 3.7). Kao i u rješenju zadatka 3.1.1 lako se pokaže da vrijedi

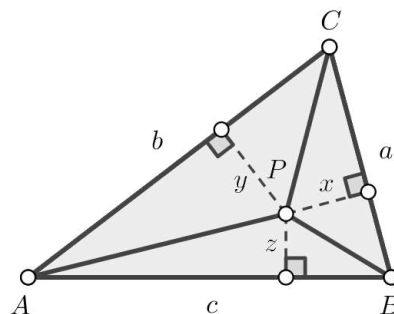
$$ax + by + cz = 2P_{\triangle ABC}.$$

Iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti slijedi

$$4P_{\triangle ABC}^2 = (ax + by + cz)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2).$$

Stoga vrijedi

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{4P_{\triangle ABC}^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \text{const.}$$



Slika 3.7

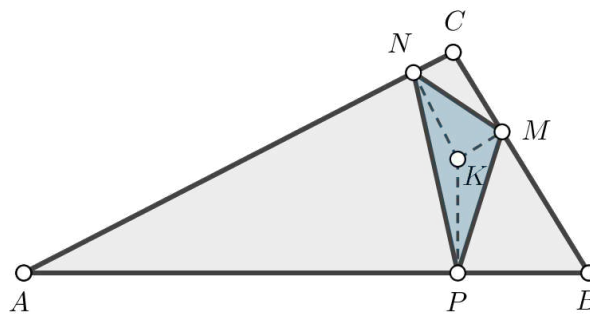
Budući da je  $\frac{4P_{\Delta ABC}^2}{a^2 + b^2 + c^2}$  neka konstanta, slijedi da je zbroj  $x^2 + y^2 + z^2$ , u ovisnosti o točki  $P$ , minimalan kada je ispunjena Cauchy-Schwarzova jednakost, odnosno kada je

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}.$$

Prema teoremu 1.2.7 to vrijedi u slučaju kada je  $P$  Lemoineova točka trokuta  $\Delta ABC$ . □

**Zadatak 3.3.2.** U dani trokut  $\Delta ABC$  upišite trokut kojemu je zbroj kvadrata duljina stranica minimalan.

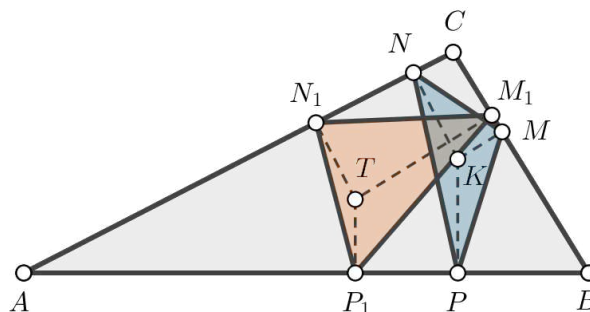
*Rješenje.* Neka je  $K$  Lemoineova točka trokuta  $\Delta ABC$  i neka su  $M, N$  i  $P$  redom ortogonalne projekcije točke  $K$  na stranice  $\overline{BC}, \overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  (vidi sliku 3.8). Neka je  $|KM| = d(K, a) = x$ ,  $|KN| = d(K, b) = y$  te  $|KP| = d(K, c) = z$ .



Slika 3.8

Cilj je pokazati da je  $\Delta MNP$  traženi trokut i da je to jedini trokut koji zadovoljava uvjet iz zadatka.

Najprije je potrebno pokazati da je  $K$  težište trokuta  $\Delta MNP$ . Označimo s  $T$  težište trokuta  $\Delta MNP$  i  $d(T, a) = x_1$ ,  $d(T, b) = y_1$  i  $d(T, c) = z_1$ .



Slika 3.9

Prema zadatku 3.3.1, za  $x = |KM|$ ,  $y = |KN|$  i  $z = |KP|$  imamo

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq x_1^2 + y_1^2 + z_1^2,$$

pri čemu jednakost vrijedi ako je  $T = K$ .

S druge strane, Leibnizova formula (tm. 1.4.3) primijenjena na trokut  $\triangle MNP$  daje

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= 3|KT|^2 + |TM|^2 + |TN|^2 + |TP|^2 \\ &\geq 3|KT|^2 + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \\ &\geq x^2 + y^2 + z^2. \end{aligned}$$

Iz ovoga slijedi da je  $K = T$ , odnosno da je  $K$  težište trokuta  $\triangle MNP$ .

Sada promatrajmo proizvoljni trokut  $\triangle M_1N_1P_1$  upisan u trokut  $\triangle ABC$  i neka je  $T$  njegovo težište (slika 3.9). Označimo s  $M_2, N_2$  i  $P_2$  ortogonalne projekcije točke  $T$  na stranice  $\overline{BC}, \overline{CA}$  i  $\overline{AB}$ , redom. Sada iz propozicije 1.4.1 slijedi

$$\begin{aligned} |M_1N_1|^2 + |N_1P_1|^2 + |P_1M_1|^2 &= 3(|TM_1|^2 + |TN_1|^2 + |TP_1|^2) \\ &\geq 3(|TM|^2 + |TN|^2 + |TP|^2) \\ &\geq 3(x^2 + y^2 + z^2) = |MN|^2 + |NP|^2 + |PM|^2, \end{aligned}$$

pri čemu jednakost vrijedi samo kada je  $M_1 = M_2, N_1 = N_2, P_1 = P_2$  te  $T = K$ , odnosno kada je  $M_1 = M, N_1 = N$  i  $P_1 = P$ .  $\square$

### 3.4 Središte trokutu opisane kružnice

**Zadatak 3.4.1.** Pronađite točke  $P$  unutar šiljastokutnog trokuta  $\triangle ABC$  tako da trokut kojemu su vrhovi ortogonalne projekcije točke  $P$  na stranice trokuta  $\triangle ABC$  ima najveću površinu.

*Rješenje.* Neka je  $P$  proizvoljna točka unutar trokuta  $\triangle ABC$  te neka su  $D, E$  i  $F$  redom ortogonalne projekcije točke  $P$  na  $BC, CA, AB$ . Neka je  $R$  radijus, a  $O$  središte opisane kružnice  $k$  trokuta  $\triangle ABC$  (slika 3.10), a kutovi pri vrhovima  $A, B, C$  trokuta neka su redom označeni s  $\alpha, \beta, \gamma$ .

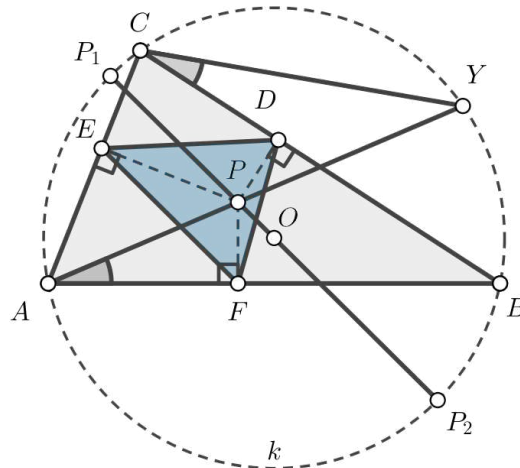
Cilj je pokazati da je površina  $P_{\triangle DEF}$  maksimalna kada je  $P = O$ . Najprije je potrebno dokazati sljedeću Eulerovu formulu:

$$P_{\triangle DEF} = \left(1 - \frac{d^2}{R^2}\right) \frac{P_{\triangle ABC}}{4},$$

pri čemu je  $d = |OP|$ .

Vrijedi

$$P_{\triangle DEF} = \frac{1}{2}|DE| \cdot |EF| \cdot \sin|\angle DEF|.$$



Slika 3.10

Neka je

$$P_{\triangle DEF} = \frac{1}{2}|AP| \cdot |CP| \cdot \sin \alpha \cdot \sin \gamma \cdot \sin|\angle DEF|.$$

Neka je  $Y$  sjecište polupravca  $AP$  s opisanom kružnicom  $k$  trokuta  $\triangle ABC$ . Tvrdimo da je  $|\angle DEF| = |\angle PCY|$ .

Četverokut  $AFPE$  je tetivan jer je

$$|\angle PFA| + |\angle AEP| = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

zbog čega vrijedi i  $|\angle FAE| + |\angle EPF| = 180^\circ$ . Kada mu se opiše kružnica, dobiva se da je  $|\angle PEF| = |\angle PAF|$  jer su to obodni kutovi nad lukom  $FP$ . S druge strane, vrijedi i

$$|\angle PAF| = |\angle YAB| = |\angle YCB|.$$

Kutovi  $\angle YAB$  i  $\angle YCB$  su obodni kutovi nad lukom  $BY$  pa su zato sukladni.

Četverokut  $CEPD$  je također tetivan pa slijedi da je  $|\angle PED| = |\angle PCD|$  što dalje povlači

$$|\angle DEF| = |\angle DEP| + |\angle PEF| = |\angle PCD| + |\angle YCB| = |\angle PCY|. \quad (3.15)$$

Dakle, može se primijetiti da je

$$|\angle CYP| = |\angle CYA| = |\angle ABC| = \beta. \quad (3.16)$$

Primjenom poučka o sinusu na trokut  $\triangle PYC$  dobiva se

$$\frac{|CP|}{\sin |\angle CYP|} = \frac{|PY|}{\sin |\angle PCY|},$$

što je zbog (3.15) i (3.16) ekvivalentno s

$$\frac{|CP|}{\sin \beta} = \frac{|PY|}{\sin |\angle FED|},$$

odnosno

$$|CP| \sin |\angle FED| = |PY| \sin \beta. \quad (3.17)$$

Tetivni četverokut  $AFPE$  upisan je u kružnicu čija je duljina promjera jednaka  $|AP|$  pa prema poučku o sinusu slijedi

$$|FE| = |AP| \cdot \sin \alpha. \quad (3.18)$$

Slično se pokaže da za tetivni četverokut  $CEPD$  vrijedi

$$|DE| = |CP| \cdot \sin \gamma. \quad (3.19)$$

Zbog (3.18) i (3.19) vrijedi

$$\begin{aligned} P_{\triangle DEF} &= \frac{1}{2} |FE| \cdot |DE| \cdot \sin |\angle FED| \\ &= \frac{1}{2} |AP| \cdot |CP| \sin \alpha \sin \gamma \sin |\angle FED|, \end{aligned}$$

što je zbog (3.17) ekvivalentno s

$$\begin{aligned} P_{\triangle DEF} &= \frac{1}{2} |AP| \cdot |PY| \cdot \frac{\sin \beta}{\sin |\angle FED|} \cdot \sin \alpha \sin \gamma \sin |\angle FED| \\ &= \frac{1}{2} |AP| \cdot |PY| \cdot \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Neka je  $\overline{P_1P_2}$  promjer kružnice  $k$  takav da prolazi točkom  $P$ . Pretpostavimo da se točka  $O$  nalazi između točaka  $P_1$  i  $P$ . Tada je  $|P_1P_2| = R + d$  i  $|P_2P| = R - d$ . Budući da se tetive  $\overline{AY}$  i  $\overline{P_1P_2}$  sijeku u točki  $P$ , slijedi

$$|AP| \cdot |PY| = |P_1P| \cdot |PP_2| = (R + d)(R - d) = R^2 - d^2$$

pa se uvrštavanjem u (3.20) dobiva

$$P_{\triangle DEF} = \frac{R^2 - d^2}{2} \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

S druge strane, vrijedi

$$\begin{aligned} P_{\triangle ABC} &= \frac{1}{2} |BC| \cdot |CA| \cdot \sin \gamma \\ &= \frac{1}{2} (2R \sin \alpha) \cdot (2R \sin \beta) \cdot \sin \gamma \\ &= 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma. \end{aligned}$$

Stoga je

$$P_{\triangle DEF} = \frac{R^2 - d^2}{2} \cdot \frac{P_{\triangle ABC}}{2R^2} = \left(1 - \frac{d^2}{R^2}\right) \frac{P_{\triangle ABC}}{4}$$

i time je dokazana Eulerova formula.

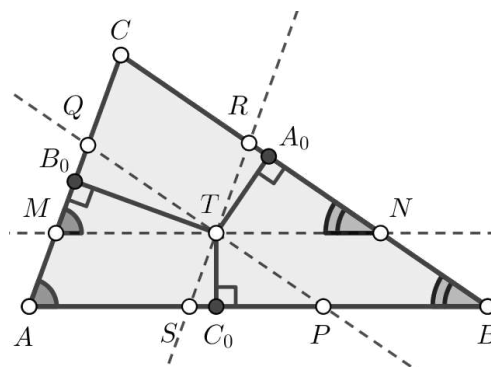
Sada je očito da je  $P_{\triangle DEF}$  maksimalna kada je  $d = 0$ , odnosno kada je  $P$  središte opisane kružnice trokuta  $\triangle ABC$  ( $P = O$ ). □

**Zadatak 3.4.2.** Neka je dana točka  $T$  unutar šiljastokutnog trokuta  $\triangle ABC$  te neka su povučene paralele kroz  $T$  sa stranicama trokuta  $\triangle ABC$ , koje sijeku stranice trokuta u točkama  $M \in \overline{AC}$ ,  $N \in \overline{BC}$ ,  $MN \parallel AB$ ,  $P \in \overline{AB}$ ,  $Q \in \overline{AC}$ ,  $PQ \parallel BC$ , te  $R \in \overline{BC}$ ,  $S \in \overline{AB}$ ,  $SR \parallel AC$ . Pronađite položaj točke  $T$  tako da je zbroj

$$|TM| \cdot |TN| + |TP| \cdot |TQ| + |TR| \cdot |TS|$$

maksimalan.

*Rješenje.* Neka su  $A_0, B_0, C_0$  redom nožišta okomica iz točke  $T$  na stranice  $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ . Zbog jednostavnijeg zapisivanja neka je  $\alpha = |\angle BAC|$ ,  $\beta = |\angle CBA|$  i  $\gamma = |\angle ACB|$ .



Slika 3.11

Vrijedi  $|\angle TNB_0| = \alpha$  te  $|\angle A_0MT| = \beta$  jer su to kutovi uz presječnicu paralelnih pravaca (slika 3.11). U pravokutnim trokutima  $\triangle B_0MT$  i  $\triangle A_0TN$  redom vrijedi

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{|TB_0|}{|TM|}, \\ \sin \beta &= \frac{|TA_0|}{|TN|}.\end{aligned}$$

Iz toga slijedi

$$|TM| \cdot |TN| = \frac{|TB_0|}{\sin \alpha} \cdot \frac{|TA_0|}{\sin \beta}. \quad (3.21)$$

Površina trokuta  $\triangle TA_0B_0$  može se izračunati kao

$$P_{\triangle TA_0B_0} = \frac{1}{2} \cdot |TB_0| \cdot |TA_0| \cdot \sin(|\angle A_0TB_0|). \quad (3.22)$$

Prema konstrukciji točaka  $A_0$  i  $B_0$  vrijedi da je  $|\angle CA_0T| = |\angle TB_0C| = 90^\circ$ , odnosno  $|\angle CA_0T| + |\angle TB_0C| = 180^\circ$  pa je  $TA_0CB_0$  je tetivni četverokut. Dakle, vrijedi

$$|\angle A_0TB_0| = 180^\circ - |\angle B_0CA_0| = 180^\circ - \gamma.$$

Sada se (3.22) može zapisati kao

$$\begin{aligned}P_{\triangle TA_0B_0} &= \frac{1}{2} \cdot |TB_0| \cdot |TA_0| \cdot \sin(180^\circ - \gamma) \\ &= \frac{1}{2} \cdot |TB_0| \cdot |TA_0| \cdot \sin \gamma.\end{aligned}$$

Tada je (3.21) ekvivalentno s

$$\begin{aligned}|TN| \cdot |TM| &= \frac{|TB_0|}{\sin \alpha} \cdot \frac{|TA_0|}{\sin \beta} \\ &= \frac{2P_{\triangle TA_0B_0}}{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma} \\ &= \frac{2P_{\triangle TA_0B_0}}{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}.\end{aligned}$$

Slično se dobije

$$|TP| \cdot |TQ| = \frac{2P_{TB_0C_0}}{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}$$

te

$$|TR| \cdot |TS| = \frac{2P_{TC_0A_0}}{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}.$$

Stoga je

$$\begin{aligned} |TM| \cdot |TN| + |TP| \cdot |TQ| + |TR| \cdot |TS| &= \frac{2P_{\triangle TA_0B_0} + 2P_{TB_0C_0} + 2P_{TC_0A_0}}{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma} \\ &= \frac{2P_{\triangle A_0B_0C_0}}{\sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma}. \end{aligned}$$

Sada se, koristeći rješenje zadatka 3.4.1, zaključuje da je traženi zbroj maksimalan upravo onda kada je  $T$  središte opisane kružnice trokuta  $\triangle ABC$ .  $\square$

### 3.5 Središte trokutu pripisane kružnice

**Zadatak 3.5.1.** *Neka je zadan trokut  $\triangle ABC$  i neka je  $A'$  točka u ravnini različita od  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Neka su  $L$  i  $M$  nožišta okomica spuštenih iz točke  $A$  redom na pravce  $A'B$  i  $A'C$ . Pronađite položaj točke  $A'$  tako da je duljina dužine  $\overline{LM}$  maksimalna.*

*Rješenje.* Budući da su trokuti  $\triangle ACM$  i  $\triangle ABL$  pravokutni, točka  $M$  za bilo koji odabir točke  $A'$  leži na kružnici  $k_1$  s promjerom  $\overline{AC}$ , a točka  $L$  na kružnici  $k_2$  s promjerom  $\overline{AB}$  (slika 3.12a). Zbog toga vrijedi

$$\begin{aligned} |LF| &= |AF| = \frac{|AB|}{2}, \\ |EM| &= |EA| = \frac{|AC|}{2} \end{aligned}$$

te je  $|LM|$  maksimalna upravo onda kada središta  $E$  i  $F$  kružnica  $k_1$  i  $k_2$  leže na  $\overline{LM}$  (slika 3.12b). Dakle, vrijedi

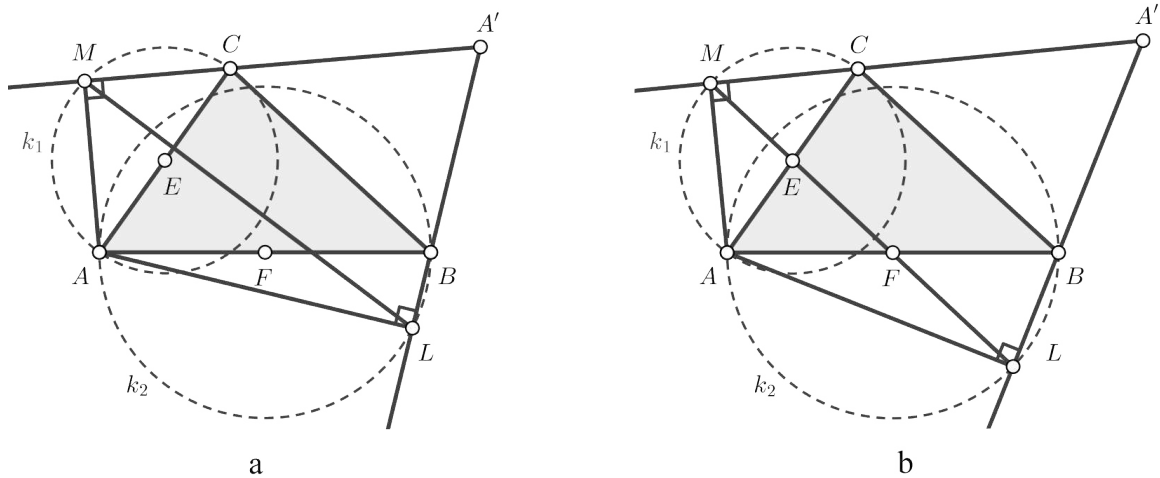
$$\begin{aligned} |LM| &= |LF| + |FE| + |EM| \\ &= |AF| + |FE| + |EA| \\ &= \frac{|AB|}{2} + |FE| + \frac{|AC|}{2}. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Točke  $E$  i  $F$  su polovišta dužina  $\overline{AC}$  i  $\overline{AB}$  pa slijedi da je  $\overline{EF}$  srednjica trokuta  $\triangle ABC$ . Zato vrijedi  $|EF| = |BC|/2$ .

Sada se (3.23) može zapisati kao

$$|LM| = \frac{|AB|}{2} + \frac{|BC|}{2} + \frac{|AC|}{2} = \frac{o}{2} = s. \tag{3.24}$$





Slika 3.12

Kutovi  $\angle MEC$  i  $\angle AEF$  su sukladni jer su to vršni kutovi, a zbog toga što je  $\overline{EF}$  srednjica trokuta  $\triangle ABC$ , ona je paralelna s  $BC$  pa vrijedi

$$|\angle CEM| = |\angle AEF| = \gamma. \quad (3.25)$$

Trokut  $\triangle CME$  je jednakokračan jer vrijedi  $|EC| = |EM|$  pa slijedi da je

$$|\angle MCE| = |\angle EMC|. \quad (3.26)$$

Zbroj mjera kutova u tom trokutu je

$$|\angle MCE| + |\angle CEM| + |\angle EMC| = 180^\circ,$$

odnosno zbog (3.25) i (3.26) to se može zapisati kao

$$2|\angle MCE| = 2|\angle EMC| = 180^\circ - \gamma$$

iz čega slijedi

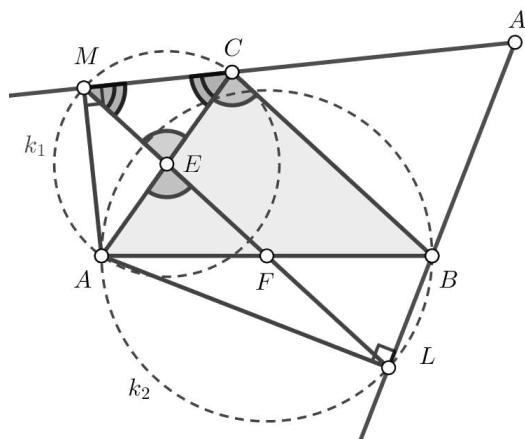
$$|\angle MCE| = |\angle CME| = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

Budući da kutovi  $\angle EMC$  i  $\angle BCA'$  imaju paralelne krakove, slijedi da su oni sukladni, odnosno vrijedi

$$|\angle BCA'| = 90^\circ - \frac{\gamma}{2},$$

što je upravo jednako polovici mjere vanjskog kuta pri vrhu  $C$  trokuta  $\triangle ABC$ . Zbog toga zaključujemo da je  $MC$  simetrala vanjskog kuta pri vrhu  $C$ . Za pravac  $LB$  se pokaže da ima

slično svojstvo - on je simetrala vanjskog kuta pri vrhu  $B$  trokuta  $\triangle ABC$ .



Slika 3.13

Dakle, točka  $A'$  je sjecište simetrala dvaju vanjskih kutova trokuta  $\triangle ABC$  pa iz teorema 1.3.1 slijedi da je  $A'$  središte pripisane kružnice  $k_\alpha$  trokuta  $\triangle ABC$ .  $\square$

### 3.6 Središte trokutu upisane kružnice

Idući je zadatak preuzet iz [1] i [2], a bio je jedan od zadataka s IMO-a 1981. godine.

**Zadatak 3.6.1.** *Za bilo koju točku  $P$  u danom trokutu  $\triangle ABC$  neka su njezine udaljenosti od stranica  $\overline{BC}$ ,  $\overline{CA}$ ,  $\overline{AB}$  redom označeni s  $x, y, z$ . Pronađite položaj točke  $P$  za koji je zbroj*

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$$

*minimalan, pri čemu je  $|BC| = a, |CA| = b, |AB| = c$ .*

*Rješenje.* Kao i u rješenju zadatka 3.1.1 jednostavno se pokaže da vrijedi

$$ax + by + cz = 2P_{\triangle ABC}.$$

Neka je

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{ax}, & a_2 &= \sqrt{by}, & a_3 &= \sqrt{cz}, \\ b_1 &= \sqrt{\frac{a}{x}}, & b_2 &= \sqrt{\frac{b}{y}}, & b_3 &= \sqrt{\frac{c}{z}}. \end{aligned}$$

Iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti slijedi

$$(a + b + c)^2 \leq (ax + by + cz) \cdot \left( \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right),$$

odnosno

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \geq \frac{(a + b + c)^2}{2P_{\triangle ABC}},$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3},$$

što je ekvivalentno s

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{y^2} = \sqrt{z^2},$$

odnosno

$$x = y = z.$$

Dakle, točka  $P$  mora biti jednako udaljena od stranica trokuta  $\triangle ABC$  što znači da se minimalna vrijednost zbroja  $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$  postiže kada je točka  $P$  središte upisane kružnice trokuta  $\triangle ABC$ .  $\square$

**Zadatak 3.6.2.** Neka je  $P$  proizvoljna točka ravnine, različita od vrhova  $A, B, C$  danog trokuta  $\triangle ABC$ . Neka je  $x = |AP|$ ,  $y = |BP|$ ,  $z = |CP|$ ,  $\alpha_1 = |\angle BPC|$ ,  $\beta_1 = |\angle CPA|$ ,  $\gamma_1 = |\angle APB|$ . Pronađite položaj točke  $P$  tako da je zbroj

$$q(P) = x \sin \alpha_1 + y \sin \beta_1 + z \sin \gamma_1$$

maksimalan.

*Rješenje.* Neka je  $k$  kružnica opisana trokutu  $\triangle BPC$ , te  $A'$  sjecište kružnice  $k$  i pravca  $AP$  tako da se  $A'$  i  $P$  nalaze s različitih strana pravca  $BC$  (slika 3.14). Neka su  $L$  i  $M$  nožišta okomica povučeni iz  $A$  na pravce  $A'B$  i  $A'C$ . Može se pokazati da je  $q(P) = |LM|$ .

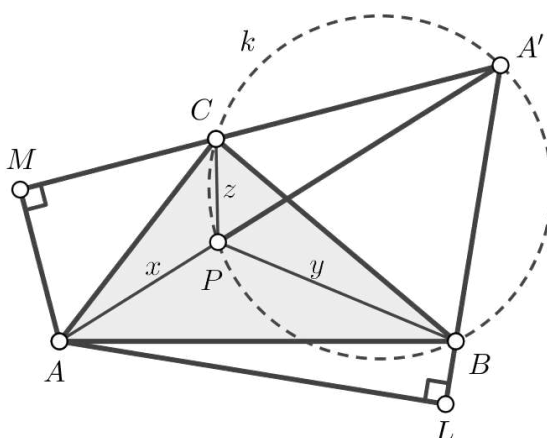
Vrijedi

$$|\angle PCB| = |\angle PA'B| = |\angle AML|,$$

$$|\angle CBP| = |\angle CA'P| = |\angle MLA|.$$

Zbog toga su, prema  $K-K$  poučku o sličnosti trokuta, trokuti  $\triangle PBC$  i  $\triangle ALM$  slični pa slijedi

$$\frac{a}{z} = \frac{|LM|}{|AM|}.$$



Slika 3.14

S druge strane, vrijedi

$$|\angle BCA'| = |\angle BPA'| = 180^\circ - \gamma_1.$$

Zato vrijedi

$$|\angle ACM| = 180^\circ - \gamma - (180^\circ - \gamma_1) = \gamma_1 - \gamma,$$

iz čega slijedi da je  $|AM| = b \sin(\gamma_1 - \gamma)$ . To pak povlači da vrijedi

$$z = \frac{a |AM|}{|LM|} = \frac{ab \sin(\gamma_1 - \gamma)}{|LM|}.$$

Analogno se dobije

$$x = \frac{bc \sin(\alpha_1 - \alpha)}{|LM|},$$

$$y = \frac{ac \sin(\beta_1 - \beta)}{|LM|}.$$

Četverokut  $ALA'M$  je tetivan jer mu je zbroj mjera nasuprotnih kutova jednak  $180^\circ$  pa iz Ptolomejevog teorema (tm. 2.3.3) slijedi

$$|AA'| \cdot |LM| = |AM| \cdot |A'L| + |A'M| \cdot |AL|,$$

dok poučak o sinusu primijenjen na trokut  $\triangle A'BC$  povlači

$$|A'B| = \frac{a \sin \gamma_1}{\sin \alpha_1},$$

$$|A'C| = \frac{a \sin \beta_1}{\sin \alpha_1}.$$

Budući da je  $\overline{AA'}$  promjer kružnice opisane četverokutu  $ALA'M$ , slijedi

$$\frac{|LM|}{\sin \alpha_1} = \frac{|LM|}{\sin \angle MAL} = |AA'|.$$

Također se može primijetiti da vrijedi

$$\begin{aligned} |A'L| &= |A'B| + |BL| = \frac{a \sin \gamma_1}{\sin \alpha_1} + c \cos \beta_1 - \beta, \\ |A'M| &= |A'C| + |CM| = \frac{a \sin \beta_1}{\sin \alpha_1} + b \cos \gamma_1 - \gamma. \end{aligned}$$

Sada gornji identitet povlači

$$\begin{aligned} \frac{|LM|^2}{\sin \alpha_1} &= |AA'| \cdot |LM| \\ &= b \cos \gamma_1 - \gamma \left( c \cos \beta_1 - \beta + \frac{a \sin \gamma_1}{\sin \alpha_1} \right) + c \sin \beta_1 \left( b \cos \gamma_1 - \gamma + \frac{a \sin \beta_1}{\sin \alpha_1} \right). \end{aligned}$$

Stoga je

$$\begin{aligned} |LM|^2 &= bc (\sin \gamma_1 - \gamma \cos \beta_1 - \beta + \sin \beta_1 - \beta \cos \gamma_1 - \gamma) \\ &\quad + ac \sin \beta_1 \sin \beta_1 - \beta + ab \sin \gamma_1 \sin \gamma_1 - \gamma \\ &= bc \sin \alpha_1 \sin \alpha_1 - \alpha + ac \sin \beta_1 \sin \beta_1 - \beta + ab \sin \gamma_1 \sin \gamma_1 - \gamma. \end{aligned}$$

S druge strane, vrijedi

$$\begin{aligned} bc \sin \alpha_1 - \alpha &= x|LM|, \\ ac \sin \beta_1 - \beta &= y|LM|, \\ ab \sin \gamma_1 - \gamma &= z|LM|. \end{aligned}$$

Koristeći ove tri jednakosti, za  $|LM|^2$  se dobije

$$|LM| = x \sin \alpha_1 + y \sin \beta_1 + z \sin \gamma_1 = q(P).$$

Sada iz zadatka 3.5.1 slijedi da je zbroj  $q(P)$  maksimalan kada je  $A'$  središte odgovarajuće pripisane kružnice. U ovom je slučaju  $\gamma_1 = 90^\circ + \gamma/2$  te  $|\angle BAP| = \alpha/2$  pa vrijedi i  $|\angle ABP| = \beta/2$ . Slijedi da  $P$  leži na simetralama unutarnjih kutova trokuta  $\triangle ABC$  što znači da je  $P$  središte upisane kružnice toga trokuta i da je upravo tada zbroj  $q(P)$  maksimalan.

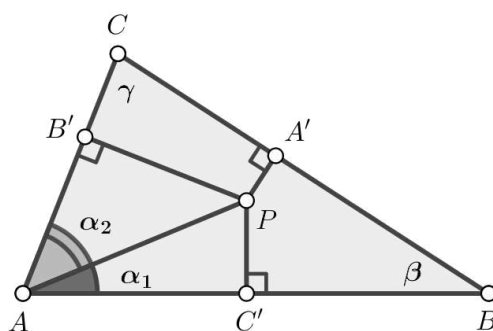
□

**Zadatak 3.6.3.** Neka je dana točka  $P$  unutar trokuta  $\triangle ABC$  i neka su  $A', B'$  i  $C'$  redom nožišta okomica iz točke  $P$  na pravce  $BC, CA$  i  $AB$ . Pronađite položaj točke  $P$  u ravnini tako da je omjer

$$\frac{|PA'| \cdot |PB'| \cdot |PC'|}{|PA| \cdot |PB| \cdot |PC|}$$

maksimalan.

*Rješenje.* Neka su  $\alpha, \beta, \gamma$  redom kutovi pri vrhovima  $A, B, C$  trokuta. Neka je  $\alpha_1 = |\angle BAP|$  i  $\alpha_2 = |\angle PAC|$ , kao na slici 3.15.



Slika 3.15

Trokuti  $\triangle APC'$  i  $\triangle APB'$  su pravokutni pa vrijedi

$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 &= \frac{|PC'|}{|PA|}, \\ \sin \alpha_2 &= \frac{|PB'|}{|PA|}. \end{aligned}$$

Množenjem dobivenih izraza dobiva se

$$\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 = \frac{|PB'| \cdot |PC'|}{|PA|^2}. \quad (3.27)$$

Također vrijedi

$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 &= \frac{1}{2} [(\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - \cos(\alpha_1 + \alpha_2))] \\ &\leq \frac{1}{2} (1 - \cos \alpha) = \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \end{aligned}$$

pri čemu jednakost vrijedi kada je  $\alpha_1 = \alpha_2$ , to jest kada se  $P$  nalazi na simetrali kuta  $\alpha$ . Stoga iz (3.27) slijedi

$$\frac{|PB'| \cdot |PC'|}{|PA|^2} \leq \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (3.28)$$

Slično se dobije i

$$\frac{|PA'| \cdot |PC'|}{|PB|^2} \leq \sin^2 \frac{\beta}{2}, \quad (3.29)$$

$$\frac{|PB'| \cdot |PA'|}{|PC|^2} \leq \sin^2 \frac{\gamma}{2}. \quad (3.30)$$

Množenjem jednakosti (3.28), (3.29) i (3.30) dobiva se

$$\frac{|PA'|^2 \cdot |PB'|^2 \cdot |PC'|^2}{|PA|^2 \cdot |PB|^2 \cdot |PC|^2} \leq \sin^2 \frac{\alpha}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \sin^2 \frac{\gamma}{2}.$$

Objе strane dobivene nejednakosti su nenegativne pa korjenovanjem slijedi

$$\frac{|PA'| \cdot |PB'| \cdot |PC'|}{|PA| \cdot |PB| \cdot |PC|} \leq \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}. \quad (3.31)$$

Jednakosti u (3.29) i (3.30) po analogiji na slučaj s kutom  $\alpha$  vrijede onda kada  $P$  leži na simetralama kutova  $\beta$  i  $\gamma$ . Zaključujemo da je  $P$  središte upisane kružnice jer pripada simetralama svih triju unutarnjih kutova trokuta  $\triangle ABC$ . Dakle, jednakost u (3.31) vrijedi kada je  $P$  središte upisane kružnice trokuta  $\triangle ABC$  i u tom slučaju je traženi izraz maksimalan.  $\square$

### 3.7 Ortocentar

Sljedeći je zadatak poznat i kao Schwarzov problem trokuta te Fagnanov problem. Rješenje koje slijedi predstavio je mađarski matematičar Lipót Fejér 1900. godine i prilagođeno je prema [1] i [4].

**Zadatak 3.7.1.** *Neka je dana točka  $P$  u unutrašnjosti trokuta  $\triangle ABC$ , te  $D, E, F$  redom sjecišta pravaca  $AP, BP$  i  $CP$  sa stranicama trokuta  $\triangle ABC$ . Pronađite položaj točke  $P$  tako da je opseg trokuta  $\triangle DEF$  minimalan.*

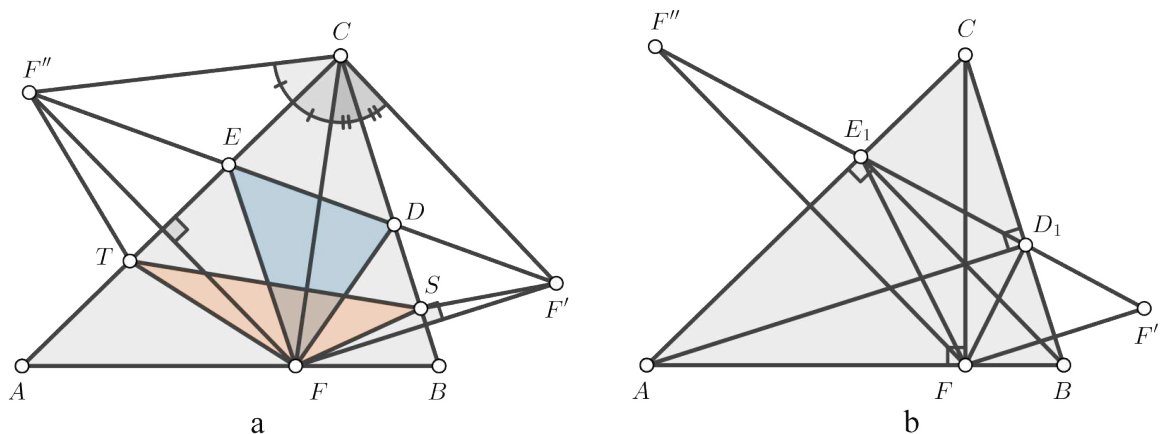
*Rješenje.* Najprije možemo promatrati jednostavniji problem - neka je  $F$  proizvoljna točka na  $\overline{AB}$ . Sada ćemo pronaći točke  $D$  i  $E$  na  $BC$  i  $CA$ , takve da je površina trokuta  $\triangle DEF$  minimalna. Taj će minimum, naravno, ovisiti o izboru točke  $F$ .

Neka je  $F'$  osnosimetrična slika točke  $F$  s obzirom na pravac  $BC$ , a  $F''$  osnosimetrična slika točke  $F$  s obzirom na pravac  $AC$  (slika 3.16a). Tada je  $|CF'| = |CF| = |CF''|$ ,  $|\angle BCF'| = |\angle FCB|$  te  $|\angle F''CA| = |\angle ACF|$ . Stavimo li da je  $\gamma = |\angle ACB|$ , imamo da je  $|\angle F''CF'| = 2\gamma$ .

Štoviše, vrijedi  $2\gamma < 180^\circ$  budući da je po pretpostavci  $\gamma < 90^\circ$ . Zbog toga dužina  $\overline{F'F''}$  siječe stranice  $\overline{BC}$  i  $\overline{AC}$  u točkama  $D$  i  $F$ . Budući da je  $F'$  osnosimetrična slika točke  $F$  s obzirom na pravac  $BC$ , za svaku točku  $M$  na pravcu  $BC$  vrijedi  $|MF| = |MF'|$ . Dakle,  $|DF| = |DF'|$ . Na sličan se način pokaže da je  $|EF| = |EF''|$ . Tada je opseg trokuta  $\triangle DEF$  jednak

$$\begin{aligned} O_{\triangle DEF} &= |FD| + |DE| + |EF| \\ &= |DF'| + |DE| + |EF''| \\ &= |F'F''|. \end{aligned}$$

Slično tako, ako je  $S$  bilo koja točka na  $BC$  i  $T$  bilo koja točka na  $AC$ , onda je opseg trokuta  $\triangle FST$  jednak duljini izlomljene linije  $F'STF''$ , koja je veća ili jednaka  $|F'F''|$ . Zbog toga je opseg trokuta  $\triangle FST$  veći ili jednak opsegu trokuta  $\triangle FDE$ , a jednakost vrijedi točno onda kada je  $S = D$  i  $T = E$ .



Slika 3.16

Stoga je potrebno pronaći točku  $S$  na  $AB$  takvu da dužina  $\overline{F'F''}$  ima najmanju duljinu. Primijetimo da je ova dužina osnovica jednakokravnog trokuta  $\triangle F'F''C$  s konstantnim kutom  $2\gamma$  pri vrhu  $C$  i stranicama  $|CF'| = |CF''| = |CF|$ . Dakle, moramo odabrati točku  $F$  na  $AB$  takvu da je  $|CF'| = |CF|$  minimalna, a to se postiže onda kada je  $F$  nožište visine iz vrha  $C$  u trokutu  $\triangle ABC$ .

U slučaju kada je  $F$  nožište okomice visine iz vrha  $C$ , točke  $D$  i  $E$  su nožišta drugih dviju visina. Kako bismo to dokazali, neka su  $D_1$  i  $E_1$  redom nožišta visina trokuta  $\triangle ABC$  iz vrhova  $A$  i  $B$  (slika 3.16b).



Pogledajmo jednakokrani trokut  $\triangle FF'D_1$ . Na pravcu  $BC$  leži simetrala kuta  $\angle FD_1F'$  pa vrijedi  $|\angle FD_1B| = |\angle BD_1F'|$ . Kutovi  $\angle BD_1F'$  i  $\angle CD_1E_1$  su vršni pa su sukkladni iz čega slijedi  $|\angle CD_1E_1| = |\angle FD_1B| = x$ . Na sličan se način pokaže da vrijedi  $|\angle AE_1F| = |\angle D_1E_1C| = y$ ,  $|\angle BFD_1| = |\angle E_1FA| = z$ . Sada u trokutu  $\triangle D_1E_1F$  vrijedi

$$(180^\circ - 2x) + (180^\circ - 2y) + (180^\circ - 2z) = 180^\circ,$$

odnosno

$$x + y + z = 180^\circ.$$

Iz toga, promatranjem trokuta  $\triangle AFE_1$ ,  $\triangle FBD_1$  i  $\triangle D_1CE_1$  slijedi

$$|\angle F'AE| = x, \quad |\angle D_1BF| = y, \quad |\angle E_1CD_1| = z.$$

Dakle, dobili smo

$$|\angle BD_1F'| = |\angle FD_1B| = |\angle BAC| = |\angle CD_1E_1|,$$

što nam govori da točka  $F'$  leži na pravcu  $D_1E_1$ .

Slično se pokaže da  $F''$  leži na pravcu  $D_1E_1$  pa je stoga  $D = D_1$ ,  $E = E_1$ . Sada možemo zaključiti da od svih trokuta upisanih u trokut  $\triangle ABC$  najmanji opseg ima upravo onaj kojemu su vrhovi nožišta visina trokuta  $\triangle ABC$ .

Znamo da se visine trokuta sijeku u jednoj točki - ortocentru. Dakle, ako s  $P$  označimo sjecište visina  $AD$ ,  $BE$  i  $CF$ , zaključujemo da je  $P$  ortocentar trokuta i upravo tada je opseg trokuta  $\triangle DEF$  minimalan.  $\square$

**Zadatak 3.7.2.** Pronađite položaj točke  $P$  unutar šiljastokutnog trokuta  $\triangle ABC$  tako da je zbroj

1.  $|AP| \cdot |BC| + |BP| \cdot |AC| + |CP| \cdot |AB|$ ,
2.  $|AP| \cdot |BP| \cdot |AB| + |BP| \cdot |CP| \cdot |BC| + |CP| \cdot |AP| \cdot |CA|$

minimalan.

Rješenje.

1. Neka su  $AA_1$  i  $PP_1$  redom visine trokuta  $\triangle ABC$  i  $\triangle PBC$  (slika 3.17). Tada je

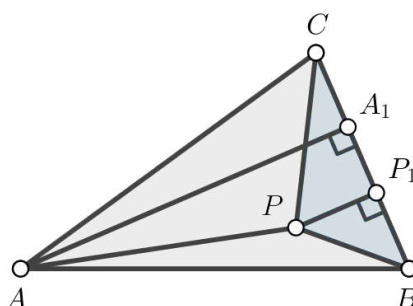
$$\begin{aligned} P_{\triangle APB} + P_{\triangle APC} &= P_{\triangle ABC} - P_{\triangle PBC} = \frac{|BC| \cdot |AA_1|}{2} - \frac{|BC| \cdot |PP_1|}{2} \\ &= \frac{(|AA_1| - |PP_1|) \cdot |BC|}{2} \leq \frac{|AP| \cdot |BC|}{2}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

pri čemu jednakost vrijedi samo ako su  $AP$  i  $BC$  okomiti.

Slično se dobiju i nejednakosti

$$P_{\triangle APB} + P_{\triangle BPC} \leq \frac{|BP| \cdot |AC|}{2}, \quad (3.33)$$

$$P_{\triangle BPC} + P_{\triangle APC} \leq \frac{|CP| \cdot |AB|}{2}. \quad (3.34)$$



Slika 3.17

Zbrajanjem (3.32), (3.33) i (3.34) dobiva se

$$|AP| \cdot |BC| + |BP| \cdot |AC| + |CP| \cdot |AB| \geq 4P_{\triangle ABC}.$$

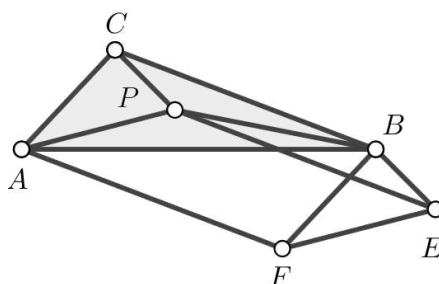
Dakle, minimum dobivenog zbroja jednak je  $4P_{\triangle ABC}$ , a postiže se samo ako je  $P$  ortocentar trokuta  $\triangle ABC$ .

2. Neka su  $E$  i  $F$  takve da su četverokuti  $BCPE$  i  $BCAF$  paralelogrami. Tada je i  $EPAF$  paralelogram (slika 3.18). Stoga je

$$|AF| = |EP| = |BC|, \quad |EF| = |AP|, \quad |EB| = |CP|, \quad |BF| = |AC|.$$

Prema Ptolomejevoj nejednakosti (tm. 2.3.4) primijenjenoj na četverokute  $ABEF$  i  $AEBP$  dobiva se

$$\begin{aligned} |AB| \cdot |AP| + |BC| \cdot |CP| &= |AB| \cdot |EF| + |AF| \cdot |BE| \geq |AE| \cdot |BF| = |AE| \cdot |AC|, \\ |BP| \cdot |AE| + |AP| \cdot |CP| &= |BP| \cdot |AE| + |AP| \cdot |BE| \geq |AB| \cdot |EP| = |AB| \cdot |BC|. \end{aligned}$$



Slika 3.18

Sada slijedi

$$\begin{aligned}
 & |PA| \cdot |PB| \cdot |AB| + |PB| \cdot |PC| \cdot |BC| + |PC| \cdot |PA| \cdot |CA| \\
 &= |PB| (|PA| \cdot |AB| + |PC| \cdot |BC|) + |PC| \cdot |PA| \cdot |CA| \\
 &\geq |PB| \cdot |AE| \cdot |AC| + |PC| \cdot |PA| \cdot |CA| \\
 &= |AC| (|PB| \cdot |AE| + |PC| \cdot |PA|) \\
 &\geq |AC| \cdot |AB| \cdot |BC|.
 \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su četverokuti  $ABEF$  i  $AEBP$  tetivni, što povlači da je četverokut  $AFEP$  također tetivan.

Budući da je  $AFEP$  paralelogram, slijedi da je  $AP \perp EP$ , odnosno  $AP \perp BC$ .

Zbog toga što je  $AEBP$  tetivan četverokut, vrijedi  $|\angle ABE| = |\angle APE|$  iz čega slijedi  $BE \perp AB$ , odnosno  $CP \perp AB$ . Stoga je  $P$  ortocentar trokuta  $\triangle ABC$ .

□

# Bibliografija

- [1] T. Andreescu, O. Mushkarov i L. Stoyanov, *Geometric problems on maxima and minima*, Birkhauser, 2006.
- [2] AoPS, *1981 IMO Problems/Problem 1*, [https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/1981\\_IMO\\_Problems/Problem\\_1](https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/1981_IMO_Problems/Problem_1), (pristupljeno 29. srpnja 2022.).
- [3] A. Bogomolny, *Ptolemy's theorem*, <https://www.cut-the-knot.org/proofs/ptolemy.shtml>, (pristupljeno 18. srpnja 2022.).
- [4] A. Bogomolny, *Fagnano's Problem*, <https://www.cut-the-knot.org/triangle/Fagnano.shtml>, (pristupljeno 31. kolovoza 2022.).
- [5] Brilliant.org, *Cauchy-Schwarz Inequality*, <https://brilliant.org/wiki/cauchy-schwarz-inequality>, (pristupljeno 28. kolovoza 2022.).
- [6] C. Kimberling, *Encyclopedia of Triangle Centers*, <https://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/ETC.html>, 1988., (pristupljeno 18. srpnja 2022.).
- [7] B. Kisačanin, *Mathematical Problems and Proofs*, Kluwer Academic Publishers, 2002.
- [8] C. P. Lawes, *Proof Without Words: The Length of a Triangle Median via the Parallelogram Law*, *Mathematics Magazine* **86** (2017.), br. (2), str. 146.
- [9] S. Luo i C. Pohoata, *Let's Talk About Symmedians!*, [https://www.awesomemath.org/wp-pdf-files/math-reflections/mr-2013-04/lets\\_talk\\_about\\_symmedians.pdf](https://www.awesomemath.org/wp-pdf-files/math-reflections/mr-2013-04/lets_talk_about_symmedians.pdf), (pristupljeno 28. kolovoza 2022.), 2013.
- [10] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, 2004.

# Sažetak

U ovom su diplomskom radu navedeni neki primjeri točaka trokuta za koje određene funkcije postižu svoju minimalnu ili maksimalnu vrijednost. Tako su se ekstremi raznih funkcija postizali u četiri karakteristične točke trokuta - težištu, ortocentru, središtu upisane i opisane kružnice, ali i u drugim točkama trokuta koje nisu sastavni dio kurikuluma nastavnog predmeta Matematike u osnovnim i srednjim školama poput Fermat-Torricellijeve točke, Lemoineove točke te središta trokutu pripisanih kružnica. Te su točke u radu definirane te su navedena i dokazana neka njihova posebna svojstva.

**Ključne riječi:** trokut, težište, ortocentar, središte opisane kružnice trokuta, središte upisane kružnice trokuta, središte pripisane kružnice trokuta, simedijane, Lemoineova točka, Fermat-Torricellijeva točka, ekstremi

# Summary

In this thesis, some examples of triangle points for which certain functions reach their minimum or maximum value are given. Thus, it could be seen that the extremal values of various functions were reached in the four characteristic points of the triangle - the centroid, the orthocenter, the center of the inscribed and circumscribed circle, but also in other points of the triangle that are not an integral part of the curriculum of the subject of Mathematics in primary and secondary schools, such as the Fermat-Torricelli point, the Lemoine point and the excentres. These points were defined and some of their special properties were stated and proven.

**Keywords:** triangle, centroid, orthocentre, circumcentre, incentre, excentre, symmedians, Lemoine point, Fermat-Torricelli point, extrema

# Životopis

Zovem se Danka Bradarić i rođena sam 5. listopada 1994. godine u Tomislavgradu, BiH. Godine 1998. s obitelji se doseljavam u Knin u kojemu 2009. godine završavam Osnovnu školu dr. Franje Tuđmana. Iste te godine upisujem opću gimnaziju u kninskoj srednjoj školi Lovre Montija, koju završavam 2013. godine.

Upisujem preddiplomski studij Matematike; smjer nastavnički na PMF-u Sveučilišta u Zagrebu u listopadu 2015. godine, a u listopadu 2019. godine krećem na diplomski studij Matematike i informatike; smjer nastavnički na istom fakultetu.

U zimskom semestru akademske godine 2021./2022. pohađala sam praksu iz matematike u Osnovnoj školi Marina Držića u Zagrebu te praksu iz informatike u Osnovnoj školi Augusta Harambašića također u Zagrebu. U ljetnom semestru te akademske godine, praksu iz istih predmeta pohađala sam u zagrebačkoj XV. gimnaziji.

U sklopu kolegija *Metodika informatike 2* u lipnju 2022. godine sudjelovala sam na radionicama *Uvod u robotiku HDR-a*, čiji je cilj bio približiti robotiku svoj zainteresiranoj djeci iz osnovnih i srednjih škola. U istom tom mjesecu sudjelovala sam i na metodičkoj radionici *Inquiry based activities for the learning STEM*, koju je vodio dr. Stuart Kohlhagen, poznat kao The Science Nomad. Na toj su radionici predstavljene razne aktivnosti koje se mogu koristiti na nastavi predmeta iz tzv. STEM područja kako bi se učenicima lakše predstavili koncepti iz nekog konkretnog nastavnog sadržaja - primjerice zakoni refleksije, računanje ukupnog broja rukovanja u grupi od  $n$  osoba (jednostavniji vjerojatnosni koncepti) i slično.