SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lucija Bralić

SVOJSTVENE VRIJEDNOSTI KVADRATNE MATRICE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Ana Prlić

Zagreb, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Nezaobilazan dio linearne algebre predstavljaju linearni operatori. Linearni operatori u okviru vektorskih prostora predstavljaju preslikavanja u matematičkim strukturama koja su kompatibilna s relacijama i operacijama na tim strukturama. Brojna preslikavanja, posebice iz geometrije, predstavljaju linearne operatore. Primjerice, skalarno i vektorsko množenje, transformacije ravnine, deriviranje i integriranje, kompleksno konjugiranje nad poljem $\mathbb{R}$.

U proučavanju vektorskih prostora, a posebice linearnih operatora na tim prostorima, praktično tehničko sredstvo predstavljaju matrični zapisi linearnih operatora. Svakom linearnom operatoru, koji je jednoznačno određen djelovanjem na bazi vektorskog prostora na kojem je zadan, na jedinstveni način možemo pridružiti pripadnu matricu u zadanom paru baza. Evidentno je da matrična reprezentacija ovisi o izboru baza vektorskih prostora koji su domena, odnosno kodomena zadanog preslikavanja.

U ovom diplomskom radu posebno će nas zanimati operatori kojima se domena i kodomena podudaraju, odnosno operatori čiji je matrični prikaz kvadratna matrica. Prilikom proučavanja djelovanja linearnog operatora na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru, tražimo onu bazu vektorskog prostora u kojoj operator ima najjednostavniji matrični zapis. Idealan oblik je dijagonalna kvadratna matrica. Iz takve matrice možemo bez teškoća i računanja očitati njezinu determinantu, rang, trag, inverz, potenciju ili neki drugi podatak.
Ukoliko se linearni operator ne može dijagonalizirati, tj. ukoliko ne postoji baza u kojoj je matrični prikaz tog operatora dijagonalna matrica, možemo pronaći bazu u kojoj je matrični prikaz tog linearnog operatora jako „blizu" dijagonalnoj matrici (tzv. Jordanova forma linearnog operatora), no ponekad je dovoljno samo približno locirati gdje se svojstvene vrijednosti nalaze.

U prvom poglavlju ovog diplomskog rada definiramo svojstvene vrijednosti, navodimo nekoliko konkretnih primjera te opisujemo postupak njihova pronalaženja. U drugom poglavlju navodimo nužne i dovoljne uvjete za dijagonalizaciju linearnog operatora te proučavamo tzv. Jordanovu formu matrice. Treće poglavlje posvećeno je približnom lociranju svojstvenih vrijednosti. U četvrtom poglavlju navodimo zanimljiv primjer primjene svojstvenih vrijednosti na internetskoj tražilici.

Kratka povijest

Rješavanje sustava linearnih jednadžbi dovelo je do razvoja teorije matrica i determinanti. Poznato je da su još stare civilizacije zapisivale koeficijente sustava u tablice, a prilikom njihova rješavanja koristili su postupak koji je zapravo današnja Gaussova metoda eliminacije.

Računanje determinanti opisivali su brojni matematičari poput Leibniza, Maclaurina, Cramera i Laplacea. Ideja matrica i njenih svojstvenih vrijednosti nastala je u 19.stoljeću u smislu kvadratnih formi i diferencijalnih jednadžbi, a sam naziv uveo je britanski matematičar James Joseph Sylvester.

Francuski matematičari Jean le Rond d'Alembert i Augustin-Louis Cauchy prvi su govorili o svojstvenim vrijednostima. D'Alembert je prvi iznio ideju o svojstvenim vrijednostima u svojim radovima o sustavima diferencijalnih linearnih jednadžbi. Cauchy se bavio određivanjem svojstvenih vrijednosti matrice te njenom dijagonalizacijom prilikom preoblikovanja kvadratne forme $\sum_{i,j} a_{i,j} x_i x_j$ u oblik $\sum_i b_i y_i^2$.

Veliki doprinos teoriji matrica i njihovim primjenama dao je britanac Arthur Cayley. Cayley je apstraktno definirao matrice i operacije s matricama te opisao način kako odrediti inverz matrice preko njezine determinante. Dokazao je poznati Cayley-Hamiltonov teorem za kvadratne matrice reda 2 i 3 koji kaže da kvadratna matrica poništava svoj svojstveni polinom.

Poglavlje 1

Svojstvene vrijednosti kvadratne matrice

Jedan od ključnih pojamova ovog diplomskog rada je pojam linearnog operatora. Linearni operator definiramo kao preslikavanje između dva vektorska prostora koje poštuje strukturu vektorskih prostora. Stoga je bitno prisjetiti se jednog od osnovnih pojmova linearne algebre, pojma vektorskog prostora V nad nekim poljem $\mathbb{K}$.

Definicija 1.0.1. *Neka je $\mathbb{K}$ neprazan skup na kojem su definirane binarne operacije zbrajanja $+$ i množenja $\cdot$. Kažemo da je uređena trojka $(\mathbb{K}, +, \cdot)$* ***polje*** *ako vrijedi:*

(i) $(\mathbb{K}, +)$ *je komutativna (Abelova) grupa,*

(ii) $(\mathbb{K}\backslash\{0\}, \cdot)$ *je Abelova grupa pri čemu je neutralni element za množenje (1) različit od neutralnog elementa za zbrajanje (0),*

(iii) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$ *(distributivnost množenja prema zbrajanju).*

Elemente polja nazivamo skalari.

Definicija 1.0.2. *Neka je $\mathbb{K}$ polje, $(V, +)$ Abelova grupa. Ako je zadano preslikavanje $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$ takvo da za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{K}, v, w \in V$ vrijedi:*

(i) $\alpha \cdot (\beta v) = (\alpha\beta) \cdot v$,

(ii) $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$,

(iii) $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$,

(iv) $1 \cdot v = v$,

tada se uređena trojka $(V, +, \cdot)$ naziva ***vektorski (linearni) prostor nad poljem*** $\mathbb{K}$. *Elemente vektorskog prostora nazivamo vektori.*

Linearan operator je preslikavanje koje „poštuje” operacije zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom, tj. zadovoljava svojstva aditivnosti i homogenosti.

Definicija 1.0.3. *Neka su V i W bilo koja dva vektorska prostora nad poljem $\mathbb{K}$. Kažemo da je preslikavanje $O : V \to W$* ***linearan operator*** *ako je:*

$$O(\alpha v + \beta w) = \alpha O v + \beta O w,$$

za sve vektore v, w iz V i skalare α, β iz $\mathbb{K}$.

Skup svih linearnih operatora s V u W označavamo s $\mathcal{L}(V, W)$, a ako vrijedi $V = W$, onda pišemo $\mathcal{L}(V)$. Lako se pokaže da je skup svih linearnih operatora s V u W, odnosno s V u V, vektorski prostor.
Svojstvo operatora O iz ove definicije koje ujedinjuje svojstva homogenosti i aditivnosti operatora nazivamo **linearnost od** O. Ako imamo bazu $\{b_1, \ldots, b_n\}$ vektorskog prostora V i ako znamo kako operator O djeluje na vektore baze, onda znamo i Ov za svaki vektor v iz V.

Definicija 1.0.4. *Neka su m, n prirodni brojevi. Svako preslikavanje oblika*

$$X : \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{K}$$

nazivamo ***matrica tipa*** (m, n) *s koeficijentima iz polja $\mathbb{K}$. Ako vrijedi $m = n$, tada takvu matricu nazivamo* ***kvadratna matrica***.

Matrice najčešće koristimo u kontekstu tablica s m redaka i n stupaca:

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

gdje su $x_{ij} = X(i, j)$ elementi matrice X u i-tom retku i j-tom stupcu. Skup matrica s m redaka i n stupaca označavamo s $M_{mn}(\mathbb{K})$, a skup svih kvadratnih matrica reda n označavamo s $M_n(\mathbb{K})$. Lako se vidi da je skup matrica s m redaka i n stupaca nad nekim poljem vektorski prostor gdje su operacije zbrajanja i množenja skalarom definirane koordinatno.

Veza vektorskih prostora $\mathcal{L}(V, W)$ i $M_{mn}(\mathbb{K})$

Svakom elementu konačnodimenzionalnog vektorskog prostora možemo pridružiti matrični zapis. Neka je $(f) = \{f_1, \dots, f_n\}$ baza n-dimenzionalnog vektorskog prostora V. Za svaki $v \in V$ postoje jedinstveni $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{K}$ takvi da je

$$v = v_1 f_1 + \cdots + v_n f_n.$$

Matrični prikaz vektora v u bazi (f) je stupčasta matrica oblika

$$v(f) = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \in M_{n1}(\mathbb{K})$$

Sada možemo uspostaviti vezu između $\mathcal{L}(V, W)$ i $M_{mn}(\mathbb{K})$. Neka su $(e) = \{e_1, \dots, e_n\}$ i $(f) = \{f_1, \dots, f_m\}$ baze konačnodimenzionalnih vektorskih prostora V i W, redom te neka je $O \in \mathcal{L}(V, W)$. Elemente $Oe_1, \dots, Oe_n$ iz W možemo zapisati kao $Oe_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i$, $j = 1, \dots, n$.
Matrični prikaz operatora O u paru baza (e, f) je matrica oblika

$$O(f, e) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{bmatrix} \in M_{mn}(\mathbb{K})$$

Analogno vrijedi za operatore iz $\mathcal{L}(V)$ samo što onda za formiranje matričnog prikaza nisu potrebne dvije baze, već jedna.

Svojstvene vrijednosti

U uvodu smo spomenuli da ćemo se baviti problemom traženja baze za vektorski prostor V tako da matrični prikaz linearnog operatora $O \in \mathcal{L}(V)$ ima nule svuda osim na dijagonali, i eventualno, na gornjoj sporednoj dijagonali.

Definicija 1.0.5. *Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$ i $O \in \mathcal{L}(V)$. Kažemo da je skalar λ* ***svojstvena*** *ili* ***karakteristična vrijednost linearnog operatora*** *O ako postoji vektor $v \neq 0_V$ takav da vrijedi*

$$Ov = \lambda v.$$

Svaki takav vektor naziva se ***svojstveni*** *ili* ***karakteristični vektor operatora*** *O* ***za svojstvenu*** *ili* ***karakterističnu vrijednost*** *λ.*

Definicija 1.0.6. *Za linearni operator $O \in \mathcal{L}(V)$, gdje je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$, skup svih svojstvenih vrijednosti operatora O zovemo* **spektar**. *Spektar označavamo sa $\sigma(O)$.*

Uočimo da je svojstvena vrijednost definirana za netrivijalne vektore jer za nul-vektor 0_v vrijedi

$$O0_v = \lambda 0_v, \ \forall \lambda \in \mathbb{K},$$

odnosno svaki skalar iz polja $\mathbb{K}$ bi bio svojstvena vrijednost za svaki linearni operator.

Ako je λ svojstvena vrijednost linearnog operatora $O \in \mathcal{L}(V)$ i $v \in V$ pripadni svojstveni vektor, onda je i svaki vektor oblika αv, $\alpha \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0$ svojstveni vektor za tu svojstvenu vrijednost. Ovo slijedi iz svojstva linearnosti operatora O. Naime, ako za netrivijalan vektor $v \in V$ vrijedi $Ov = \lambda v$ za $\lambda \in \mathbb{K}$, tada

$$O(\alpha v) = \alpha O v = \alpha \lambda v = \lambda(\alpha v), \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$

Dakle, svojstveni vektor nije jedinstven. Štoviše, svaka linearna kombinacija svojstvenih vektora pridruženih istoj svojstvenoj vrijednosti je (ukoliko je različita od nul-vektora) svojstveni vektor, odnosno, skup svih svojstvenih vektora pridruženih istoj svojstvenoj vrijednosti zajedno s nul-vektorom čini vektorski prostor.

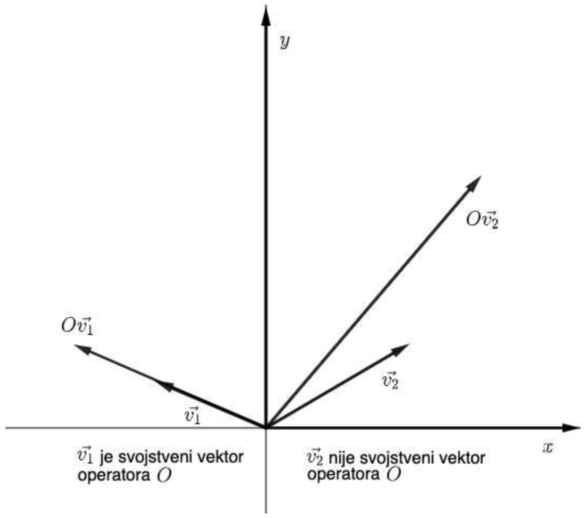
Najčešći primjeri vektorskih prostora su oni nad poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ pa su tada svojstvene vrijednosti realni, odnosno kompleksni brojevi.

1.1 Geometrijska interpretacija i primjeri

Iz $Ov = \lambda v$, $O \in \mathcal{L}(V^2(O))$, evidentno je da tražimo vektore v koji su kolinearni s Ov odnosno koji imaju isti smjer kao v. Dakle, svojstveni vektori nekog operatora u $V^2(O)$ su zapravo oni radijvektori kojima taj operator ne utječe na promjenu smjera.
Navedimo nekoliko geometrijskih primjera u kojima smo unaprijed fiksirali neku ortonormiranu bazu $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ u $V^2(O)$, odnosno ortonormiranu bazu $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ u $V^3(O)$.

Primjer 1.1.1. *Neka je $Z_x : V^2(O) \to V^2(O)$ operator zrcaljenja s obzirom na x os na prostoru radijvektora $V^2(O)$. Na prostoru $V^2(O)$, svojstveni vektori nekog operatora su oni radijvektori kojima taj operator zadržava smjer. Os x određena je vektorom $\vec{i}$ pa očito vrijedi $Z_x\vec{i} = \vec{i}$ i $Z_x\vec{j} = -\vec{j}$. Dakle, $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -1$ su svojstvene vrijednosti operatora Z_x, a pridruženi svojstveni vektori su vektori $\vec{i}$ i $\vec{j}$. Matrica operatora Z_x u bazi $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ je oblika*

$$Z_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$



Slika 1.1: Kolinearnost svojstvenih vektora

Primjer 1.1.2. *Neka je $Z_y : V^2(O) \to V^2(O)$ operator zrcaljenja s obzirom na y os na prostoru radijvektora $V^2(O)$. Analogno prethodnom primjeru, očito vrijedi $Z_y\vec{i} = -\vec{i}$ i $Z_y\vec{j} = \vec{j}$. Dakle, svojstvene vrijednosti operatora Z_y su $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 1$ dok su pripadni svojstveni vektori vektori $\vec{i}$ i $\vec{j}$. Matrica operatora Z_y je oblika*

$$Z_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Primjer 1.1.3. *Neka je $Z : V^2(O) \to V^2(O)$ operator zrcaljenja s obzirom na pravac $y = x$, odnosno simetralu prvog i trećeg kvadranta. Vektor $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ koji leži na simetrali, djelovanjem operatora Z preslikava se u samog sebe po definiciji osne simetrije, dakle $Z\vec{v} = \vec{v}$. Vektor okomit na simetralu, $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$ preslikava se u vektor $-\vec{v}$, dakle $Z\vec{v} = -\vec{v}$. Očito, 1 i -1 su svojstvene vrijednosti operatora Z, a pripadni svojstveni vektori su $\vec{i} + \vec{j}$ i $\vec{i} - \vec{j}$.*

Primjer 1.1.4. *Neka je $Z : V^3(O) \to V^3(O)$ operator zrcaljenja s obzirom na xy ravninu. Za svaki $\vec{v}$ iz ravnine xy vrijedi $Z\vec{v} = \vec{v}$, a za svaki $\vec{v}$ koji je ortogonalan na xy ravninu vrijedi $Z\vec{v} = -\vec{v}$. Matrični prikaz operatora Z u bazi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ je oblika*

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Primjer 1.1.5. *Neka je $H : V^2(O) \to V^2(O)$ operator homotetije s centrom O i koeficijentom homotetije $k \neq 0$. Iz definicije homotetije vrijedi $H\vec{v} = k\vec{v}$ pa je pripadna matrica (u* *bilo kojoj bazi) oblika*

$$H = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

Primjer 1.1.6. *Neka je $R(O, \varphi) : V^2(O) \to V^2(O)$ operator rotacije s obzirom na ishodište O za kut φ, $\varphi \in [0, 2\pi]$.*

- *Za $\varphi = 0$ je $R(O, \varphi) = I$ pa je 1 jedina svojstvena vrijednost od $R(O, \varphi)$. Tada je svaki nenul vektor svojstveni vektor te svojstvene vrijednosti.*
- *Za $\varphi = \pi$ je $R(O, \varphi) = -I$ pa je -1 jedina svojstvena vrijednost. Analogno je svaki nenul vektor svojstveni vektor.*
- *Ako je $\varphi \neq 0, \pi$, tada niti jedan nenul vektor $\vec{v}$ nije kolinearan s vektorom $R\vec{v}$. Dakle, operator $R(O, \varphi)$ nema svojstvenih vektora, pa ni svojstvenih vrijednosti.*

Primjer 1.1.7. *Neka je $D : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ operator deriviranja za $n \geq 1$, $Dp = p'$. Ako je λ svojstvena vrijednost operatora D, tada postoji nenul polinom $p \in \mathcal{P}_n$ takav da vrijedi $Dp = \lambda p$, odnosno $p' = \lambda p$. Ova jednakost vrijedi samo ako je p konstantan polinom. Inače bi se stupnjevi od λp i p' razlikovali pa jednakost ne bi vrijedila. Za konstantan nenul polinom p vrijedi $Dp = p' = 0 = 0 \cdot p$ pa je $\lambda = 0$ jedina svojstvena vrijednost od D.*

1.2 Pronalaženje svojstvenih vrijednosti

Problem pronalaženja svojstvenih vrijednosti linearnog operatora povezan je s pojmom takozvanog karakterističnog ili svojstvenog polinoma linearnog operatora. Kako svakom linearnom operatoru možemo pridružiti matrični zapis u unaprijed izabranom paru baza, prvo ćemo definirati karakteristični polinom matrice, a zatim ga povezati s pojmom linarnog operatora.

Definicija 1.2.1. *Neka je X kvadratna matrica reda n s koeficijentima iz $\mathbb{K}$.* ***Karakteristični*** *ili* ***svojstveni polinom matrice*** *X je polinom k_X oblika*

$$k_X(\lambda) = \det(X - \lambda I).$$

Ako je

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{bmatrix},$$

onda je svojstveni polinom oblika

$$k_X(\lambda) = \det(X - \lambda I) = \begin{vmatrix} x_{11} - \lambda & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} - \lambda & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (-1)^n \lambda^n + \gamma_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + \gamma_1 \lambda + \gamma_0$$

za neke $\gamma_0, \dots, \gamma_{n-1} \in \mathbb{K}$. Kako je $k_X(0) = \det(X)$, slijedi $\gamma_0 = k_X(0) = \det(X)$.

Posebni slučajevi karakterističnih polinoma

1. Zanimljivo je primjetiti da ukoliko je zadana matrica X u dvodimenzionalnom vektorskom prostoru V u nekoj bazi (f), karakteristični polinom je oblika
$$k_X(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{tr}(X)\lambda + \det(X).$$
Zaista, za
$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$
imamo
$$k_X(\lambda) = \begin{vmatrix} x_{11} - \lambda & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (x_{11} + x_{12})\lambda + x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} = \lambda^2 - \mathrm{tr}(X)\lambda + \det(X).$$

2. Za kvadratnu matricu trećeg reda
$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{12} & x_{22} & x_{23} \\ x_{13} & x_{23} & x_{33} \end{bmatrix}$$
karakteristični polinom je oblika
$$k_X(\lambda) = \lambda^3 + \mathrm{tr}(X)\lambda^2 + (X_{11} + X_{22} + X_{33})\lambda + \det(X),$$
gdje su X_{11}, X_{22}, X_{33} algebarski komplementi (kofaktori)[1] elemenata $x_{11}, x_{22}.x_{33}$.

3. Posebno jednostavan je karakteristični polinom dijagonalne matrice:
$$k_X(\lambda) = \begin{vmatrix} x_{11} - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x_{22} - \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (x_{11} - \lambda)(x_{22} - \lambda) \cdots (x_{nn} - \lambda).$$

[1] Kofaktor X_{ij} je faktor kojim je pomnožen element x_{ij} unutar sume koja čini $\det X$. To je zapravo oznaka za zbroj odgovarajućih $(n-1)!$ monoma koji su dobiveni izlučivanjem x_{ij} iz članova determinante

Sada uzmimo linearan operator $O \in \mathcal{L}(V)$ u nekoj bazi (f) vektorskog prostora V. Matrični prikaz operatora O u bazi (f) je matrica $O(f)$. Maloprije smo pokazali kako definiramo karakteristični polinom matrice, u ovom slučaju $O(f)$. Ukoliko uzmemo neku drugu bazu (f') za V, matrice $O(f)$ i $O(f')$ imaju iste karakteristične polinome. To vrijedi jer su matrice $O(f)$ i $O(f')$ slične, pa su onda slične i matrice $(O - \lambda I)(f)$ i $(O - \lambda I)(f')$. Radi jednostavnosti, pisat ćemo $O = O(f)$, $O' = O(f')$. Matrica O' je slična matrici O, tj. postoji regularna matrica $S = I(f, f')$ takva da vrijedi

$$O' = S^{-1}OS.$$

Dokažimo da slične matrice imaju iste karakteristične polinome. Primjenjujući Binet-Cauchyjev teorem dobivamo

$$\begin{aligned} k_{O'}(\lambda) &= \det(O' - \lambda I) \\ &= \det(S^{-1}OS - \lambda S^{-1}IS) = \det(S^{-1}(O - \lambda I)S) \\ &= \det S^{-1} \det(O - \lambda I) \det S = \det(O - \lambda I) \\ &= k_O(\lambda) \end{aligned}$$

Iz definicije svojstvene vrijednosti, $\lambda \in \mathbb{K}$ je svojstvena vrijednost operatora O samo ako postoji nenul vektor v takav da je $Ov = \lambda v$. Odatle je

$$Ov - \lambda v = 0,$$

što je ekvivalentno s

$$O(v) - \lambda I(v) = 0,$$

gdje je I jedinični operator vektorskog prostora V. Odavde iz definicije zbrajanja i množenja skalarom na $\mathcal{L}(V)$ slijedi

$$(O - \lambda I)(v) = 0.$$

Lako se vidi da je $O - \lambda I$ linearan operator. Kako svaki linearan operator ima svoj matrični zapis, možemo definirati karakteristični polinom linearnog operatora kao karakteristični polinom njegovog matričnog prikaza. Definicija je dobra jer smo pokazali da slične matrice imaju isti karakteristični polinom.

Definicija 1.2.2. *Neka je $O \in \mathcal{L}(V)$. Polinom $k_O(\lambda) = det(O - \lambda I)$ zovemo* ***karakteristični*** *ili* ***svojstveni polinom linearnog operatora*** *O.*

Teorem 1.2.3. *Neka je $O \in \mathcal{L}(V)$ gdje je V n-dimenzionalan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$. Skalar $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ je svojstvena vrijednost operatora O ako i samo ako je $k_O(\lambda_0) = 0$.*

Dokaz. Vektor $v \neq 0$ je svojstveni vektor linearnog operatora O za svojstvenu vrijednost λ_0 ako i samo ako je iz jezgre od $O - \lambda_0 I$, tj. ako i samo ako vrijedi $(O - \lambda_0 I)v = 0$. To vrijedi ako i samo ako operator $O - \lambda_0 I$ nije monomorfizam. Operator $O - \lambda_0 I$ nije monomorfizam ako i samo ako nije izomorfizam, odnosno ako i samo ako $O - \lambda_0 I$ nije regularan. Operator nije regularan ako i samo ako mu je determinanta jednaka nuli, odnosno ako i samo ako $k_O(\lambda_0) = 0$. □

Uočimo da je važno da je nultočka karakterističnog polinoma iz polja nad kojim je definiran linearni operator. Iz osnovnog teorema algebre znamo da svaki polinom s kompleksnim koeficijentima stupnja većeg ili jednakog 1 ima barem jednu nultočku u $\mathbb{C}$. No za polinome s realnim koeficijentima, postojanje realnih nultočaka nije nužno. Dakle, može se dogoditi da linearan operator na realnom vektorskom prostoru nema svojstvenih vektora. Tipičan primjer je operator rotacije za kut $\varphi \neq 0, \pi$.

Primjer 1.2.4. *Neka je zadan operator rotacije $\mathcal{R} \in \mathcal{L}(V^2(O))$ za kut $\frac{\pi}{3}$ oko ishodišta O. Za operator rotacije u bazi $(e) = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ vrijedi*

$$\mathcal{R}_\varphi(e) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix},$$

odnosno u ovom slučaju

$$\mathcal{R}_{\frac{\pi}{3}}(e) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Iz $k_{\mathcal{R}}(\lambda) = det\,(\mathcal{R} - \lambda I)$ lako se dobije $k_{\mathcal{R}} = \lambda^2 - \lambda + 1$ što očito nema realnih nultočaka.

Općenito, karakteristični polinom operatora rotacije $\mathcal{R}_\varphi$ je oblika

$$k_{\mathcal{R}_\varphi}(\lambda) = \lambda^2 - (2\cos\varphi)\lambda + 1.$$

Za kut $\varphi \neq 0, \pi$, nultočke su oblika $\lambda_{1,2} = \cos\varphi \pm \sqrt{\cos^2\varphi - 1}$. Kako je $|\cos\varphi| < 1$, ove nultočke ne mogu biti realne.

Vrijedi:

- Slične matrice imaju isti svojstveni polinom, stoga i iste svojstvene vrijednosti.
- Matrica i njezina transponirana matrica imaju iste svojstvene vrijednosti.

Poglavlje 2

Dijagonalizacija, Jordanova forma

Problem dijagonalizacije operatora povezan je s karakterističnim polinomom linearnog operatora te svojstvenim vrijednostima tog operatora.

Definicija 2.0.1. *Kažemo da je linearan operator $O \in \mathcal{L}(V)$ dijagonalizabilan, odnosno da se može dijagonalizirati ako postoji baza od V u kojoj je matrični prikaz linearnog operatora O dijagonalna matrica.*

Da bi prikaz linearnog operatora bio dijagonalna matrica, potrebno je pronaći takvu bazu vektorskog prostora koja se sastoji od svojstvenih vektora tog linearnog operatora (ako je to moguće). U prethodnom poglavlju smo vidjeli kako pronalazimo svojstvene vektore, a nužan uvjet da bi skup svojstvenih vektora nekog operatora bio baza vektorskog prostora je da taj skup bude linearno nezavisan.

Propozicija 2.0.2. *Neka je $O \in \mathcal{L}(V)$, V konačnodimenzionalan. Neka su $\lambda_1, ..., \lambda_m$, $\lambda_i \neq \lambda_j, \forall i \neq j, i, j = 1, ..., m$ svojstvene vrijednosti linearnog operatora O i neka su $v_1, ..., v_m$ pripadni svojstveni vektori redom pridruženi ovim svojstvenim vrijednostima. Tada je skup $\{v_1, ..., v_m\}$ linearno nezavisan.*

Dokaz ove propozicije može se pronaći u skripti kolegija Linearna algebra.

Definicija 2.0.3. *Neka je $O \in \mathcal{L}(V)$ gdje je V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad poljem $\mathbb{K}$ te neka je λ_0 svojstvena vrijednost operatora O.*

- *Skup $V_O(\lambda_0) = \mathrm{Ker}(O - \lambda_0 I) = \{v \in V : Ov = \lambda_0 v\}$ nazivamo* ***svojstveni potprostor pridružen svojstvenoj vrijednosti*** *λ_0.*
- *Kratnost $a \in \mathbb{N}$ koju svojstvena vrijednost λ_0 ima kao nultočka karakterističnog polinoma k_O nazivamo* ***algebarska kratnost*** *od λ_0 i označavamo s $a(\lambda_0)$.*

- *Dimenziju svojstvenog potprostora $V_O(\lambda_0)$ nazivamo* ***geometrijska kratnost*** *od λ_0 i označavamo s $g(\lambda_0)$.*

Uočimo da svojstveni potprostor definiramo kao jezgru operatora $O - \lambda_0 I$. Iz toga slijedi da je geometrijska kratnost od λ_0 jednaka defektu $\mathrm{d}(O - \lambda_0 I)$. Ukoliko je $\dim V = n$, iz teorema o rangu i defektu slijedi da je $g(\lambda_0) = n - r(O - \lambda_0 I)$. Dakle, zanimat će nas one svojstvene vrijednosti λ za koje je $r(O - \lambda I) < n$.
Iz Teorema 2.3.3. slijedi:

$$\lambda_0 \in \sigma(O) \Leftrightarrow \mathrm{Ker}(O - \lambda_0 I) \neq \{0_v\} \Leftrightarrow k_O(\lambda_0) = 0.$$

Dakle, ako je $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ svojstvena vrijednost od O, onda svojstveni potprostor nije $\{0_v\}$ pa slijedi

$$g(\lambda_0), a(\lambda_0) \geq 1.$$

Propozicija 2.0.4. *Neka je $O \in \mathcal{L}(V)$, V konačnodimenzionalan vektorski prostor nad $\mathbb{K}$, $\dim V = n$ te $\lambda_1, ..., \lambda_m$ međusobno različite svojstvene vrijednosti od O. Ako se iz svakog od pripadnih svojstvenih potprostora izabere linearno nezavisan podskup, tada je unija svih tih podskupova linearno nezavisan podskup u V koji ima $\sum_{i=1}^m g(\lambda_i) \leq n$ elemenata.*

Dokaz propozicije nalazi se u skripti kolegija Linearna algebra.

U n-dimenzionalnom vektorskom prostoru V, svaki linearno nezavisan skup može imati najviše n elemenata pa ako je $\sum_{i=1}^m g(\lambda_i) = n$, tada imamo bazu za V koja se sastoji od svojstvenih vektora operatora O. Iz ovoga slijedi da se svaki operator u n-dimenzionalnom vektorskom prostoru može dijagonalizirati ako i samo ako je zbroj geometrijskih kratnosti svojstvenih vrijednosti tog operatora jednak n.

Iz osnovnog teorema algebre znamo da svaki polinom stupnja $m \geq 1$ ima točno m nultočaka u polju $\mathbb{C}$, uključujući njihove kratnosti. Dakle, za vektorski prostor V takav da $\dim V = n$ i $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, postoje $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ s kratnostima $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{N}$ sa svojstvom $a_1 + \cdots + a_m = n$ tako da vrijedi

$$k_O(\lambda) = (-1)^n (\lambda - \lambda_1)^{a_1} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{a_m},$$

odnosno zbroj algebarskih kratnosti svojstvenih vrijednosti od O je n. Ako je $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, tada svojstvene vrijednosti od O mogu biti samo realni λ_i pa je zbroj njihovih kratnosti općenito bilo koja cjelobrojna vrijednost od 0 do n.

Propozicija 2.0.5. *Ako je $O \in \mathcal{L}(V)$ i $\lambda_0 \in \sigma(O)$, $\dim V = n$, tada vrijedi $g(\lambda_0) \leq a(\lambda_0)$.*

Dokaz ove propozicije može se pronaći u skripti kolegija Linearna algebra.

Ukoliko za $O \in \mathcal{L}(V)$ i $\sigma(O) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$ imamo da je $a_1 + \dots + a_m < n$, onda prema prethodnoj propoziciji treba vrijediti

$$g_1 + \dots + g_m \leq a_1 + \dots + a_m < n.$$

U ovom slučaju ne postoji baza za V koja se sastoji od svojstvenih vektora. Dakle, nužni uvjet za dijagonalizaciju operatora odnosno kreiranje baze takve da bi matrica operatora bila dijagonalna, jest da suma svih algebarskih kratnosti bude jednaka n odnosno dimenziji vektorskog prostora V. Dakle, ako imamo zadan operator na realnom vektorskom prostoru i prilikom određivanja nultočaka karakterističnog polinoma barem jedna od njih bude kompleksan broj koji nije realan, znat ćemo da bazu od svojstvenih vektora ne možemo sastaviti pa tako ni operator dijagonalizirati.

U slučaju kada je $g_i < a_i$ za neki $\lambda_i \in \sigma(O)$, tada je $g_1 + \dots + g_m < n$ pa opet ne možemo kreirati bazu od svojstvenih vektora operatora O. Zaključujemo da je još jedan nužni uvjet dijagonalizacije operatora taj da geometrijska kratnost mora biti jednaka algebarskoj kratnosti za svaki $\lambda_i \in \sigma(O), i = 1, \dots, m$.

Teorem 2.0.6. *Neka je V n-dimenzionalan vektorski prostor i $O \in \mathcal{L}(V)$. Linearan operator O se može dijagonalizirati ako i samo ako vrijedi da*
1. polinom $k_O(\lambda)$ ima n nultočaka u polju $\mathbb{K}$ računajući kratnost,
2. algebarska kratnost jednaka je geometrijskoj kratnosti za svaku svojstvenu vrijednost operatora O.

Već smo dokazali da su 1 i 2 nužni uvjeti za dijagonalizabilnost, a dokaz da su ti uvjeti dovoljni može se pronaći u skripti kolegija Linearna algebra.

2.1 Jordanova forma

Do sada smo povezivali problem određivanja svojstvenih vrijednosti s dijagonalizacijom matrice. No matricu ne možemo uvijek dijagonalizirati. Praktično rješenje ovog problema pokazalo se svođenje matrice na oblik koji je približno dijagonalna matrica. Riječ je o tzv. Jordanovoj formi matrice. Svaka matrica nad algebarski zatvorenim poljem može se prikazati upravo u ovoj formi.

Matricu oblika

$$E(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{bmatrix}$$

zovemo **elementarna Jordanova klijetka (blok)**. Elementarna Jordanova klijetka na dijagonali ima svojstvenu vrijednost λ, na gornjoj sporednoj dijagonali jedinice, dok su svi ostali elementi jednaki nuli.
Jordanova klijetka (blok) je kvazidijagonalna blok matrica sastavljena je od elementarnih Jordanovih klijetki

$$J(\lambda) = \begin{bmatrix} E_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & E_2(\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & E_k(\lambda) \end{bmatrix}$$

gdje su $E_1, \dots, E_k$ elementarne Jordanove klijetke, možda različitih redova, ali iste pripadne svojstvene vrijednosti λ.
Jordanova forma matrice je kvazidijagonalna matrica oblika

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_r \end{bmatrix}$$

gdje su $J_1, \dots, J_r$ Jordanove klijetke s međusobno različitim svojstvenim vrijednostima $\lambda_1, \dots, \lambda_r$. Ovaj oblik matrice je jedinstven do na poredak blokova na glavnoj dijagonali.

Neka je $M \in M_n(\mathbb{K})$ matrični zapis linearnog operatora M, $\sigma(M) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_r\}$. Radi boljeg razumijevanja nastavka ovog poglavlja, definirajmo pojedine pojmove:

- **Minimalni polinom**
  Promatramo niz linearno zavisnih operatora $I, M, M^2, \dots, M^{n^2}$. Tada postoji $k \in \{1, \dots, n^2\}$ takav da je niz operatora $I, M, M^2, \dots, M^k$ linearno zavisan, a niz $I, M, M^2, \dots, M^{k-1}$ linearno nezavisan. Iz toga slijedi da postoje koeficijenti $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_k$ takvi da je

  $$-\mu_0 I - \mu_1 M - \mu_2 M^2 + \cdots - \mu_{k-1} M^{k-1} + \mu_k M^k = 0.$$

  pri čemu je $\mu_k = 1$.
  Minimalni polinom $\mu_M(\lambda)$ je polinom zadan s

  $$\mu_M(\lambda) = \lambda^k - \mu_{k-1}\lambda^{k-1} - \cdots - \mu_1\lambda - \mu_0.$$

  Očito je $\mu_M(M) = 0$. Može se dokazati da minimalni polinom dijeli svaki drugi polinom koji poništava M, posebno, dijeli karakteristični polinom.

- Potprostor $\mathrm{Ker}(M - \lambda_i I)^{k_i} = \{v \in V : (M - \lambda_i I)^{k_i} v = 0\}$ nazivamo **korijeni potprostor operatora** M, gdje je k_i kratnost nultočke λ_i minimalnog polinoma operatora M.

Traženje Jordanove forme J matrice M zasniva se na sljedećim koracima:

- Nađemo minimalni polinom $\mu_M(\lambda)$
- Tražimo $d((M-\lambda_i)^{p_i})-d((M-\lambda_i)^{p_1-1})$ linearno nezavisnih vektora $u_i \in \mathrm{Ker}(M-\lambda_i I)^{p_i}$ takvih da je $\mathrm{Ker}(M-\lambda_i I)^{p_i-1}u_i \neq 0$, $p_i \in \{k_i, \ldots, 1\}$ pri čemu je k_i kratnost nultočke λ_i u minimalnom polinomu. Određujemo tzv. Jordanove lance vektora predvođenih svojstvenim vektorom $v_{i,p_i} = u_i$
$$v_{i,j-1} = (M-\lambda_i I)v_{i,j} \quad j = \{p_i, \ldots, 2\}.$$
- Formiramo invertibilnu matricu S tako da u stupce stavimo vektore $v_{i,j}$
- Odredimo $S^{-1}MS = J$

Ovi koraci slijede iz Jordanovog teorema i drugih teorema koje ovdje nećemo navoditi. Teoremi i dokazi istih mogu se pronaći u skripti kolegija Vektorski prostori.

Primjer 2.1.1. *Odredimo Jordanovu formu matrice*
$$M = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$
Svojstveni polinom je oblika
$$k_M(\lambda) = \det(M-\lambda I) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-4)^2,$$
a $\sigma(M) = \{1,2,4\}$, *gdje je* $a(1) = 1$, $a(2) = 1$, $a(4) = 2$. *Svojstveni potprostori za svojstvene vrijednosti* $1, 2$ *i* 4 *su* $V_M(1) = \mathrm{Ker}(M-I) = \{(1,-1,0,0)\}$, $V_M(2) = \mathrm{Ker}(M-2I) = \{(1,0,1,1)\}$, $V_M(4) = \mathrm{Ker}(M-4I) = \{(1,0,-1,1)\}$. *Vidimo da je* $g(1) = 1 = a(1)$, $g(2) = 1 = a(2)$, $g(4) = 1 \neq a(4)$. *Iz Teorema 3.0.6. slijedi da matrica M nije dijagonalizabilna, no možemo ju „približno" dijagonalizirati pomoću Jordanove forme. Sada tražimo bazu za* $\mathrm{Ker}(M-4I)^2$. *Lakim računom dobivamo* $\mathrm{Ker}(M-4I)^2 = \{(1,0,0,0),(0,0,1,-1)\}$. *Znamo da postoji invertibilna matrica S takva da vrijedi* $S^{-1}MS = J$, *pri čemu je J Jordanova forma matrice M. Matricu S formiramo na sljedeći način: uzmemo jedan vektor iz* $\mathrm{Ker}(M-4I)^2$ *koji nije u* $\mathrm{Ker}(M-4I)$, *na primjer vektor* $v = (1,0,0,0)$. *Iz* $(M-4I)v = u$ *dobijemo* $u = (1,0,-1,1)$. *Vektor baze iz* $\mathrm{Ker}(M-I)$ *stavimo u prvi stupac matrice S, vektor baze iz* $\mathrm{Ker}(M-2I)$ *u drugi stupac, vektor* $u = (1,0,-1,1)$ *u treći, te vektor* $v = (1,0,0,0)$ *u četvrti stupac i dobijemo*
$$S = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Slijedi

$$S^{-1}MS = J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Iz algebarske kratnosti svojstvene vrijednosti možemo odrediti dimenziju elementarne Jordanove klijetke, dok broj blokova određujemo iz dimenzije svojstvenog potprostora pridruženog toj svojstvenoj vrijednosti. Tako iz $a(4) = 2$ *slijedi da je dimenzija elementarne Jordanove klijetke jednaka* 2*, dok je broj klijetki jednak* $1 = g(4)$*, odnosno imamo jednu klijetku* 2×2*. Za svojstvene vrijednosti* 1 *i* 2 *iz algebarske i geometrijske kratnosti slijedi da je dimenzija* 1 *jednaka broju klijetki, odnosno imamo jednu klijetku* 1×1 *za svaku od tih svojstvenih vrijednosti.*

Poglavlje 3

Lociranje svojstvenih vrijednosti

Postupak traženja svojstvenih vrijednosti linearnog operatora odnosno računanje nultočaka karakterističnog polinoma ponekad je vrlo zahtjevan posao, osobito kod matrica većeg reda jer ne postoje opće formule kojima bi se, primjenom konačno mnogo operacija zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja, potenciranja i korjenovanja nad koeficijentima polinoma, mogle izračunati nultočke polinoma čiji je stupanj veći od četiri. Ponekad nije nužno odrediti konkretne svojstvene vrijednosti, već nam i približno lociranje svojstvenih vrijednosti može biti dovoljno. Činjenice poput toga da su moduli svojstvenih vrijednosti linearnog operatora manji od jedan, ili da se svojstvene vrijednosti nalaze u lijevoj otvorenoj kompleksnoj ravnini odnosno da su sa strogo negativnim realnim dijelovima mogu biti od velike važnosti, a upravo te informacije možemo zaključiti po kriterijima u nastavku ovog poglavlja.

Definicija 3.0.1. *Neka je $X \in M_n(\mathbb{C})$, $d_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |x_{ij}|$, $1 \leq i \leq n$. Skup*

$$G_i(X) = \{z \in \mathbb{C} : |z - x_{ii}| \leq d_i\}$$

zovemo i-ti ***Geršgorinov krug matrice*** *X sa središtem x_{ii} i radijusom d_i.*

Za matricu X postoji n krugova u kompleksnoj ravnini, a svaki krug ima središte u jednoj od dijagonalnih vrijednosti matrice X.

Teorem 3.0.2 (Geršgorinov teorem). *Neka je zadana $X \in M_n(\mathbb{C})$, te*

$$d_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |x_{ij}|, \ 1 \leq i \leq n.$$

Sve svojstvene vrijednosti matrice X sadržane su u uniji od n krugova

$$G(X) := \bigcup_{i=1}^n G_i.$$

Nadalje, ako unija k od n krugova, $G_k(X)$, tvori povezano područje koje je disjunktno s unijom preostalih $n-k$ krugova, tada se u $G_k(X)$ nalazi točno k svojstvenih vrijednosti od X (uključujući algebarske kratnosti).

Dokaz. Neka je λ svojstvena vrijednost matrice X, $v = [v_1\ v_2\ \cdots\ v_n]^T$ svojstveni vektor za tu svojstvenu vrijednost, odnosno $Xv = \lambda v$. Postoji koordinata $v_p \neq 0$ svojstvenog vektora v koja je po apsolutnoj vrijednosti najveća među koordinatama $v_i,\ i = 1, \ldots, n$, odnosno

$$|v_p| \geq |v_i|,\ i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Iz $Xv = \lambda v$ imamo

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} v_j = \lambda v_i,\ i = 1, \ldots, n.$$

Za $i = p$ slijedi

$$|\lambda v_p - x_{pp} v_p| = \Big| \sum_{j=1}^{n} x_{pj} v_j - x_{pp} v_p \Big| = \Big| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} x_{pj} v_j \Big| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} |x_{pj}|\, |v_j| \leq |v_p| \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq p}}^{n} |x_{pj}| = |v_p|\, d_p.$$

Dakle,

$$|v_p|\, |\lambda - x_{pp}| \leq |v_p|\, d_p,$$

odnosno

$$|\lambda - x_{pp}| \leq d_p.$$

Dakle, svojstvena vrijednost λ leži u Geršgorinovom krugu $G_p(X)$.
Dokaz drugog dijela teorema može se pronaći u knjizi Rogera A. Horna i Charlesa R. Johnsona, Matrix Analysis. □

Geršgorinov teorem govori da svaka svojstvena vrijednost leži unutar jednog od tih krugova. Međutim, iz te informacije ne možemo zaključiti da svaki krug sadrži svojstvenu vrijednost.
Ovu tvrdnju možemo primijeniti i na transponiranu matricu pa dobivamo dvije unije krugova čiji presjek može dati precizniju informaciju, odnosno $\sigma(X) \subseteq G(X) \cap G(X^T)$. Dobivenu uniju možemo presijeći i bilo kojim područjem koje sadrži svojstvene vrijednosti. Uzmimo za primjer matricu koja sadrži samo realne svojstvene vrijednosti. Tada dobivenu uniju krugova možemo presijeći s realnom osi. Uočimo da ako je X dijagonalna matrica, tada je $d_i = 0$, odnosno Geršgorinovi krugovi dijagonalne matrice su točke.

Znamo da slične matrice imaju iste svojstvene vrijednosti, pa se tako Geršgorinov teorem može primijeniti na matricu $S^{-1}XS$, pritom je najbolje uzeti dijagonalnu matricu S. Ako je zadana realna matrica, tada su njene svojstvene vrijednosti realne ili dolaze u kompleksno-konjugiranim parovima, pa onda svaki Geršgorinov krug, koji je disjunktan sa svima ostalima, sadrži točno jednu realnu svojstvenu vrijednost. Ovo svojstvo ima važnu primjenu u teoriji stabilnosti dinamičkih sustava.

Primjer 3.0.3. *Zadana je matrica*

$$X = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Formiramo Geršgorinove krugove:

$$G_1(X) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 2| \leq 3\}$$

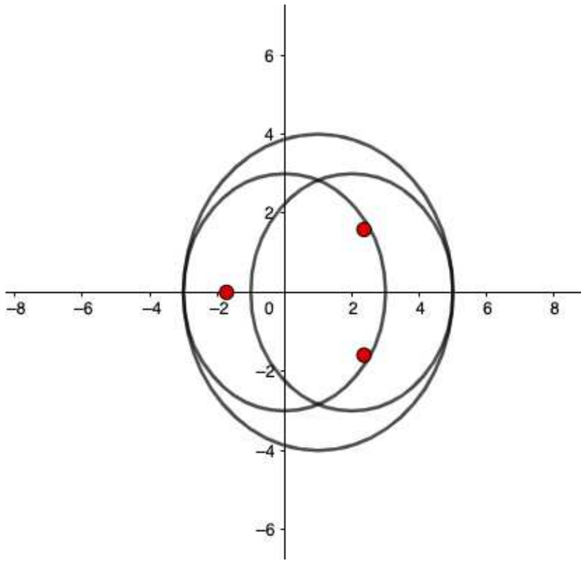
$$G_2(X) = \{z \in \mathbb{C} : |z - 1| \leq 4\}$$

$$G_3(X) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 3\}$$

Svojstveni polinom je oblika

$$k_X(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 14.$$

Dakle, svojstvene vrijednosti su $\lambda_1 \approx -1.72$, $\lambda_2 \approx 2.36+1.59i$, $\lambda_3 \approx 2.36-1.59i$. *Međutim, nije jednostavno do njih doći. Geršgorinovi krugovi nam govore otprilike gdje se one nalaze.*



Slika 3.1: Svojstvene vrijednosti matrice X

Primjer 3.0.4. *Zadana je matrica*

$$Y = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Formiramo Geršgorinove krugove:

$$G_1(Y) = \{z \in \mathbb{C} : |z+4| \leq 1\}$$

$$G_2(Y) = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leq 2\}$$

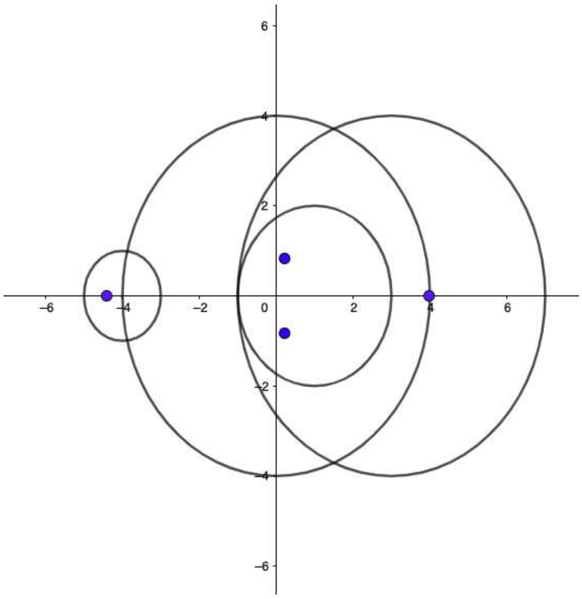
$$G_3(Y) = \{z \in \mathbb{C} : |z-3| \leq 4\}$$

$$G_4(Y) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 4\}$$

Svojstveni polinom je oblika

$$k_Y(\lambda) = \lambda^4 - 17\lambda^2 + 8\lambda - 13.$$

Dakle, svojstvene vrijednosti su $\lambda_1 \approx -4.42$, $\lambda_2 \approx 3.98$, $\lambda_3 \approx 0.22 + 0.83i$, $\lambda_4 \approx 0.22 - 0.83i$*, koje, opet, nije baš lako izračunati.*



Slika 3.2: Svojstvene vrijednosti matrice Y

Poglavlje 4

Primjena

4.1 PageRank algoritam i Google matrica

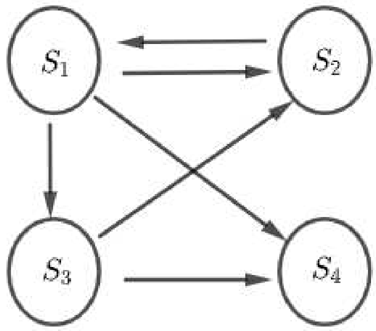
Veliki dio naše svakodnevnice je Internet. Gotovo svakodnevno upisujemo u tražilicu određene pojmove kako bismo došli do željenih informacija. Na temelju upisanog pojma, tražilica nam kao rezultat izbacuje listu relevantnih web stranica. Te web stranice ispisane su u određenom poretku. U ranim devedesetima tražilice su funkcionirale tako da su brojale koliko se puta traženi pojam pojavljuje na pojedinoj stranici, te su na temelju tog broja stvarale listu. Prva na popisu preporučenih stranica je bila ona na kojoj se traženi pojam pojavio najveći broj puta. Ovdje nailazimo na problem: pojedina web stranica može sadržavati veliki broj ponavljanja traženog pojma, a da ne sadrži informacije o tom pojmu koje su nama stvarno korisne.
Danas tražilice funkcioniraju na drugačiji način. Prilikom stvaranja popisa stranica, tražilice uzimaju u obzir ne samo broj ponavljanja unešenog pojma, nego i važnost, relevantnost te popularnost pojedine stranice. Tako na samom vrhu popisa imamo relevantnije stranice, dok su na dnu one manje relevantne. Time korisnik brže dolazi do pouzdanih informacija.

Internetska tražilica Google koristi upravo takav algoritam pretraživanja. Njezini osnivači, Larry Page i Sergey Brin uveli su takozvani PageRank algoritam čiji ćemo način funkcioniranja ukratko opisati u nastavku.
Početkom 21. stoljeća PageRank rezultat bio je javno vidljiv u sklopu alatne trake. Povećanje ranga stranice predstavljalo je dobru strategiju u optimizaciji web stranice. Međutim, sama vidljivost tog podatka dovela je do manipulacije raznim čimbenicima koji utječu na taj rezultat. Javnosti je postao važniji veliki broj linkova na stranicu od stvaranja kvalitetnog sadržaja. Godine 2016. Google je ukinuo mogućnost uvida u ovaj rezultat. Međutim, to nije značilo prestanak korištenja ovog algoritma. Danas je PageRank algoritam mnogo je kompliciraniji nego prije te se neprestano unaprijeđuje.

Slika 4.1: PageRank alat na starijoj verziji Google-a

Glavna pretpostavka PageRank algoritma je ta da je važna ona web stranica na koju se referira veliki broj drugih manje ili više važnih stranica. Ovo je prirodno za pretpostaviti jer se na ozbiljnoj web stranici neće pronaći link za neku nepouzdanu i nekvalitetnu web stranicu. Svakoj stranici pridružit ćemo pozitivan realni broj (rang) poštivajući sljedeće: ukoliko se na stranici S nalaze linkovi na n stranica, onda svakoj od tih stranica pridružujemo $\frac{1}{n}$ ranga stranice S. Kako bi ukratko objasnili ideju ovog algoritma, pretpostavimo da se naš Internet sastoji od četiri web stranice S_1, S_2, S_3, S_4. Na slici je prikazan model u kojemu vrhovi predstavljaju naše web stranice, a strelice poveznice.
Neka su r_1, r_2, r_3, r_4 rangovi stranica S_1, S_2, S_3, S_4, redom. U tom slučaju imamo

$$\begin{aligned}
r_1 &= r_2\\
r_2 &= \frac{1}{3}r_1 + \frac{1}{2}r_3\\
r_3 &= \frac{1}{3}r_1\\
r_4 &= \frac{1}{3}r_1 + \frac{1}{2}r_3.
\end{aligned}$$



Slika 4.2: Shema web stranica i poveznica

Konstruirajmo kvadratnu matricu $H = [h_{ij}]$ reda n

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix},$$

pri čemu p_{ij} predstavlja vjerojatnost da korisnik posjeti stranicu S_j slijedeći link na stranici S_i, pri čemu je početna stranica slučajno odabrana. Stoga možemo podrazumijevati da je

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 1.$$

Dakle, uvodimo vjerojatnost $\rho \in \langle 0, 1\rangle$ da će korisnik slijediti poveznicu s trenutne stranice. Iz toga slijedi da je $1 - \rho$ vjerojatnost da će sljedeća stranica biti odabrana slučajno između svih ostalih stranica.
Iz toga dobivamo:

$$r_1 = \rho\, r_2 + (1 - \rho)\frac{1}{4},$$

tj.

$$r_1 = \rho\, r_2 + (1 - \rho)\frac{1}{4}(r_1 + r_2 + r_3 + r_4).$$

Nadalje imamo sustav

$$\begin{aligned} r_1 &= \rho\, r_2 + (1-\rho)\frac{1}{4}(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) \\ r_2 &= \rho\,(\frac{1}{3}r_1 + \frac{1}{2}r_3) + (1-\rho)\frac{1}{4}(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) \\ r_3 &= \rho\,(\frac{1}{3}r_1) + (1-\rho)\frac{1}{4}(r_1 + r_2 + r_3 + r_4) \\ r_4 &= \rho\,(\frac{1}{3}r_1 + \frac{1}{2}r_3) + (1-\rho)\frac{1}{4}(r_1 + r_2 + r_3 + r_4). \end{aligned}$$

Neka je $R = [r_1\ r_2\ r_3\ r_4]^T$ i

$$G = \rho \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} + (1-\rho)\cdot\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Tada sustav možemo zapisati kao

$$GR = R.$$

Odavde zaključujemo da je R svojstveni vektor matrici G, a 1 je pripadna svojstvena vrijednost. Rangovi stranica određuju svojstveni vektor od G pripadne svojstvene vrijednosti 1.

Dobivenu matricu G nazivamo **Google matrica**. Ukoliko na Internetu imamo n stranica, tada je matrica G reda n.

Svojstva Google matrice

Definicija 4.1.1. *Neka je M kvadratna matrica nad poljem $\mathbb{R}$.*

- *Ako su svi elementi matrice M pozitivni, kažemo da je M* ***pozitivna matrica****.*
- *Ako su svi elementi matrice M nenegativni te je zbroj elemenata u svakom stupcu jednak* 1*, kažemo da je matrica M* ***stohastička po stupcima****.*

Lako se vidi da je Google matrica pozitivna i stohastička po stupcima. Iz toga slijedi da je 1 uvijek svojstvena vrijednost Google matrice.

Propozicija 4.1.2. *Neka je $M = [m_{ij}] \in M_n$ pozitivna matrica, stohastička po stupcima. Tada:*

(i) Svaki svojstveni vektor $v = [v_1\ \cdots\ v_n]^T$ pridružen svojstvenoj vrijednosti 1 *ima sve komponentne pozitivne ili sve komponente negativne.*

(ii) $\dim V_M(1) = 1$.

Dokaz.

(i) Za svojstveni vektor v matrice M pridružen svojstvenoj vrijednosti 1 vrijedi $Mv = v$ odnosno

$$\sum_{j=1}^{n} m_{ij} v_j = v_i, \ \forall i = 1, \ldots, n.$$

- Pretpostavimo da v ima i pozitivnih i negativnih komponenata. Tada vrijedi

$$|v_i| = \Big|\sum_{j=1}^{n} m_{ij} v_j\Big| < \sum_{j=1}^{n} m_{ij} |v_j|, \ \forall i = 1, \ldots, n.$$

  Zbrajanjem elemenata na lijevoj i desnoj strani nejednakosti dobijemo

$$\sum_{i=1}^{n} |v_i| < \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} |v_j|.$$

  Budući da je matrica M stohastička po stupcima, odnosno $\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = 1$, imamo kontradikciju

$$\sum_{i=1}^{n} |v_i| < \sum_{j=1}^{n} |v_j|.$$

  Dakle, komponente svojstvenog vetkora v su ili sve pozitivne ili sve negativne.

- Pretpostavimo da su $v_i \geq 0$, $\forall i$. Pretpostavimo da je neka komponenta vektora v jednaka 0, na primjer $v_1 = 0$. Slijedi da je

$$v_1 = \sum_{j=1}^{n} m_{1j} v_j,$$

  odnosno

$$\sum_{j=2}^{n} m_{1j} v_j = 0.$$

  Budući da su $m_{1j} > 0$, $v_j \geq 0$, $\forall j = 2, \ldots, n$, slijedi da je $v_j = 0$, $\forall j = 2, \ldots, n$. U tom slučaju je $v = 0$, pa v nije svojstveni vektor matrice M, što je u kontradikciji s pretpostavkom.

- Analogno dokazujemo i za $v_i \leq 0$, $\forall i$.

(ii) Pretpostavimo da su $v = [v_1 \ \cdots \ v_n]^T$, $w = [w_1 \ \cdots \ w_n]^T$ svojstveni vektori matrice M pridruženi svojstvenoj vrijednosti 1 s pozitivnim komponentama. Želimo pokazati da su v i w linearno zavisni vektori pa pretpostavimo suprotno, tj. neka su v i w linearno nezavisni. Tada postoje $i \neq j$ takvi da vrijedi

$$\frac{v_i}{w_i} \neq \frac{v_j}{w_j}.$$

Dakle, postoje realni skalari α, β takvi da je $\alpha v_i + \beta w_i = 1$ i $\alpha v_j + \beta w_j = -1$, odnosno vektor $\alpha v + \beta w$ je svojstveni vektor matrice M pridružen svojstvenoj vrijednosti 1 koji ima i pozitivne i negativne komponente što je u kontradikciji s (i). □

Ukoliko zbroj svih komponenata iznosi 1, tada je on jedinstven, a komponente predstavljaju rangove web stranica.

Bibliografija

[1] Arambašić, Lj. *Linearna algebra*, (2022), https://web.math.pmf.unizg.hr/~ljsekul/nastava/LA-knjiga-web.pdf

[2] Bakić, D. *Linearna algebra*, (2008), https://web.math.pmf.unizg.hr/~bakic/la/2019_LA_drugo_izdanje_v6.pdf

[3] Boras, L. (2012) *Matrični prikaz operatora*. Završni rad. Osijek: Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku, http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/BOR50.pdf

[4] Brückler, F. M. *Povijest matematike II*, (2009), http://www.mathos.unios.hr/~bruckler/main2.pdf

[5] Drmač, Z. *Numerička matematika*, (2010), https://web.math.pmf.unizg.hr/~drmac/na001.pdf

[6] Drmač, Z., Hari, V., Marušić, M., Rogina, M., Singer, S., Singer, S. *Numerička analiza, predavanja i vježbe*, (2003), https://web.math.pmf.unizg.hr/~rogina/2001096/num_anal.pdf

[7] Franušić, Z., Šiftar, J. *Linearna algebra 1, skripta za nastavničke studije na PMF-MO*, https://web.math.pmf.unizg.hr/~fran/predavanja-LA1.pdf

[8] Gusić, I. *Lekcije iz matematike 1, Lekcija 3: Zapis nekih transformacija ravnine i prostora - pojam matrice i linearnog operatora*, http://matematika.fkit.hr/novo/matematika%201/predavanja/Mat1_Lekcija3.pdf

[9] Horn, R. A., Johnson, C.R. *Matrix Analysis, second adition*, (2013), http://www.cse.zju.edu.cn/eclass/attachments/2015-10/01-1446086008-145421.pdf

[10] Horvat, D., Munđar, D. *Rangiranje web stranica*. Osječki matematički list 17 (2017), 51-62, https://hrcak.srce.hr/file/275074

[11] Kovačić, J., Mandić, J., Vučičić, T. *Geršgorinova lokacija spektra i primjene*. Osječki matematički list 14 (2014), 35-50, https://hrcak.srce.hr/file/184515

[12] Kraljević, H. *Vektorski prostori, predavanja*, (2007), https://web.math.pmf.unizg.hr/~hrk/nastava/2007-08/vektorski_Osijek_2007_8.pdf

[13] Krešić-Jurić, S. *Linearna algebra i matrični račun*, (2020), https://mapmf.pmfst.unist.hr/~skresic/LAMR/Skripta/Skripta_LAMR.pdf

[14] Mađarić, L. (2020) *Geršgorinovi krugovi*. Završni rad. Osijek: Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku, https://repozitorij.mathos.hr/islandora/object/mathos%3A480/datastream/PDF/view

[15] Maširević, D.J., Scitovski, R. *Linearni operatori u ravnini*. https://www.mathos.unios.hr/~dbrajkovic/Materijali/GRP/Geo_2.pdf

[16] Muić, G., Primc, M. *Vektroski prostori*. https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/vp.pdf

[17] Pleše, I. (2019) *Primjene matrica u ravninskoj geometriji*. Diplomski rad. Zagreb: Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno – matematički fakultet, https://zir.nsk.hr/islandora/object/pmf%3A8435/datastream/PDF/view

[18] Singer, S. *Numerička analiza, 23.predavanje*, https://web.math.pmf.unizg.hr/~singer/num_anal/NA_0910/23.pdf

[19] Singer, S., Bosner, N. *Numerička analiza, 11. predavanje*, https://web.math.pmf.unizg.hr/~nela/nadpredavanja/11nb.pdf

[20] Stojić, M. *Jordanova forma*, (2018), https://web.math.pmf.unizg.hr/~stojic/VP-2-Jordanova-forma.pdf

[21] Škarica, M. (2011) *Svojstvene vrijednosti linearnog operatora*. Završni rad. Osijek: Sveučilište J.J. u Osijeku, Odjel za matematiku, http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/%C5%A0KA01.pdf

[22] Valjetić, M. (2020) *Spektralna dekompozicija i primjene*. Završni rad. Osijek: Sveučilište J.J. Strossmayera, Odjel za matematiku, http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/VAL07.pdf

[23] Varagouli, E. (2020) *Everything You Need To Know About Google PageRank (Why It Still Matters)*, https://www.semrush.com/blog/pagerank/ (Pristupljeno: 7.9.2022.)

Sažetak

Ovaj diplomski rad posvećen je svojstvenim vrijednostima linearnih operatora. Diplomski rad je podijeljen na četiri poglavlja. Prvo poglavlje sadrži podsjetnik na osnovne pojmove poput pojma linearnog operatora i kvadratne matrice te veze između ta dva pojma. U tom poglavlju navedene su i definicije svojstvenih vrijednosti linearnog operatora i spektra te primjeri istih od kojih se posebno ističu operatori zrcaljenja. Također je opisan postupak pronalaženja svojstvenih vrijednosti te je iskazan i dokazan teorem za nužan i dovoljan uvjet da je skalar tražena svojstvena vrijednost. Naveden je i primjer operatora koji nema svojstvene vrijednosti. Drugo poglavlje posvećeno je nužnim i dovoljnim uvjetima za dijagonalizaciju operatora. Navodimo definicije svojstvenog potprostora, geometrijske i algebarske kratnosti. Dijagonalna matrica praktičan je oblik matrice iz kojeg možemo odrediti mnoge korisne informacije, međutim to se ponekad ne može napraviti. Dio drugog poglavlja posvećen je upravo takvim matricama. Navodimo i opisujemo postupak određivanja elegantnog oblika matrice koji nazivamo Jordanova forma matrice. U trećem poglavlju bavimo se određivanjem približne lokacije svojstvenih vrijednosti linearnih operatora kada ih je zahtjevnije pronaći postupkom opisanim u prethodnim poglavljima. Definiramo Geršgorinove krugove te navodimo i dokazujemo Geršgorinov teorem koji je primijenjen i na konkretnim primjerima. Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori imaju veliku primjenu u raznim fizikalnim područjima poput kvantne mehanike gdje se često koriste prilikom opisivanja valnih funkcija i operatora spina. Vrlo često svojstvenim vektorima opisane su neke vrste naboja čestice (u fizikalnom smislu). U zadnjem, četvrtom poglavlju navodimo zanimljivu primjenu svojstvenih vrijednosti na internetskoj tražilici. Formiramo „mali internet" na kojem pokazujemo kako funkcionira tako zvani PageRank algoritam po kojem funkcionira najpoznatija internetska tražilica Google. Sukladno tome, konstruiramo matricu koju nazivamo Google matrica te opisujemo njena svojstva.

Summary

This graduate thesis is dedicated to the eigenvalues of the matrix representation of linear operators. The thesis is divided into four chapters. The first chapter contains a reminder of basic concepts such as the concept of linear operator and square matrix and the connection between these two concepts. In the same chapter, the definitions of the eigenvalues of the linear operator and its spectrum are given, as well as examples of the same, of which the mirroring operators stand out in particular. The procedure for finding eigenvalues is also described, and the theorem for the necessary and sufficient condition that a scalar is the desired eigenvalue is stated and proved. There is also an example of an operator that has no eigenvalues. The second chapter is devoted to the necessary and sufficient conditions for the diagonalization of operators. We list the definitions of eigen subspace, geometric and algebraic multiplicity. A diagonal matrix is a practical form of matrix from which we can determine many useful information, but sometimes this cannot be done. Part of the second chapter is dedicated to such matrices. We state and describe the procedure for determining an elegant form of the matrix, which we call the Jordan form of the matrix. In the third chapter, we deal with determining the approximate location of the eigenvalues of linear operators when it's more difficult to find them using the procedure described in the previous chapters. We define Geršgorin's circles and state and prove Geršgorin's theorem, which is also interpreted with concrete examples. Eigenvalues and eigenvectors are widely used in various physical fields such as quantum mechanics, where they are often used to describe wave functions and spin operators. Very often, eigenvectors describe some types of particle charges (in the physical sense). In the last, fourth chapter, we present an interesting application of eigenvalues on an Internet search engine. We are forming a ''little internet'' where we show how the so-called PageRank algorithm works, which is the basis of the most famous internet search engine, Google. Accordingly, we construct a matrix that we call the Google matrix and describe its properties.

Životopis

Rođena sam 3. studenog 1996. godine u Zagrebu. Završila sam Osnovnu školu Josipa Račića na Srednjacima 2011. godine kada upisujem Prvu gimnaziju u Zagrebačkim Utrinama. Gimnaziju završavam 2015. godine te iste upisujem preddiplomski studij Matematike, nastavnički smjer na Prirodoslovno - matematičkom fakultetu u Zagrebu. Sveučilišnom prvostupnicom edukacije matematike postajem 2020. godine. Iste godine upisujem diplomski studij Matematike, nastavnički smjer na istom fakultetu. U zimskom semestru 2021./2022. akademske godine pohađala sam metodičku praksu iz matematike u Osnovnoj školi Augusta Šenoe u Zagrebu, dok sam u ljetnom semestru iste akademske godine pohađala metodičku praksu iz matematike u V. gimnaziji u Zagrebu. Od rujna 2022. godine radim kao Mlađi specijalist za ICT proizvode u A1 Hrvatska d.o.o.