Parcijalne diferencijalne jednadžbe paraboličkog tipa

Duspara, Marko

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:185582

Rights / Prava: In copyright/Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-16**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marko Duspara

PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE PARABOLIČKOG TIPA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Josip Tambača

Zagreb, rujan 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojim roditeljima.
Sve što je dobro u meni počelo je od vas.

Sadržaj

Uvod

Parcijalne diferencijalne jednadžbe su područje matematike koje je predmet intenzivnog proučavanja. U ovom radu prezentirani su neki rezultati teorije parcijalnih diferencijalnih jednadžbi paraboličkog tipa. Ove jednadžbe najčešće se koriste za opisivanje pojava koje evoluiraju u vremenu - od difuzije i provođenja topline do formiranja bioloških uzoraka (npr. pruge na zebrama), zarastanja rana i opisivanja toka u poroznoj sredini. U ovom radu prezentiramo neke osnovne rezultate o jednadžbama paraboličkog tipa. Prvi dio rada bavi se udžbeničkim primjerom jednadžbe provođenja, drugi i glavni dio govori nešto o teoriji egzistencije i jedinstvenosti rješenja jednadžbi linearnog tipa, dok je u završno poglavlju raspravljen nelinearni slučaj i dan je primjer u primjeni.

Poglavlje 1

Jednadžba provođenja

1.1 O paraboličkim jednadžbama

Kada je riječ o klasifikaciji parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, jedna od klasifikacija jednadžbi drugog reda je klasifikacija na eliptičke, paraboličke i hiperboličke jednadžbe. Za jednadžbu oblika:

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F = 0$$

reći ćemo da je paraboličkog tipa ukoliko je:

$$B^2 - AC = 0$$

ova definicija može se generalizirati i u ovom radu najčešće se bavimo upravo tim generalizacijama. Formu gore promatramo samo kao tipičnu motivaciju za uvođenje klasifikacije. Općenito, jednadžbu oblika:

$$u_t = -Lu$$

gdje je L eliptički operator nazivamo paraboličkom parcijalnom diferencijalnom jednadžbom. U mnogim primjenama, paraboličke jednadžbe opisuju evoluciju nekog procesa kroz vrijeme. Udžbenički primjer je jednadžba provođenja topline, zatim Fokker-Planckove i Kolomorgovljeve jednadžbe za opisivanje procesa difuzije, Black–Scholes-ov model dinamike tržišta,...

1.2 Jednadžba provođenja topline

Za primjer linearne paraboličke parcijalne diferencijalne jednadžbe uzet ćemo jednadžbu provođenja topline. U homogenom obliku ona glasi:

$$u_t - \Delta u = 0$$

odnosno u nehomogenom obliku:

$$u_t - \Delta u = f.$$

Što se tiče fizikalne interpretacije, jednadžba provođenja topline opisuje evoluciju gustoće neke fizikalne veličine (u) kao što su toplina ili kemijska koncentracija kroz vrijeme.
Neka je V neko glatko područje u $\mathbb{R}^n$. Promatramo li promjenu ukupne količine gustoće fizikalne veličine u na tom području, tada je ona jednaka negativnom integralu gustoće toka te veličine po rubu područja V. Imamo:

$$\frac{d}{dt}\int_V u\,dx = -\int_{\partial V} \mathbf{F}\cdot \nu\,dS$$

gdje je ν jedinična vanjska normala na V. Sada primjenimo teorem o divergenciji na integral s desne strane, pa imamo:

$$\frac{d}{dt}\int_V u\,dx = -\int_V \mathrm{div}\mathbf{F}\,dx.$$

Iz ovoga zapravo slijedi da su funkcije pod integralom jednake pa imamo:

$$u_t = -\mathrm{div}\mathbf{F}.$$

U mnogim fizikalnim pojavama prirodno je pretpostaviti da je gustoća toka $\mathbf{F}$ proporcionalna gradijentu koncentracije u, no u suprotnom smjeru. Stoga pišemo:

$$\mathbf{F} = -a\,\nabla u$$

gdje je a neka konstantna proporcionalnosti. Sada imamo:

$$u_t = a\mathrm{div}(\nabla u) = a\Delta u.$$

Stavimo li $a = 1$, dobili smo jednadžbu provođenja topline. Fundamentalnog rješenje jednažbe provođenja topline je funkcija dana sa:

$$\Phi(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} & x \in \mathbb{R}^n, t > 0 \\ 0 & x \in \mathbb{R}^n\ t \leq 0 \end{cases}$$

Izvod funkcije moguće je naći u [1].
Uočimo nekoliko stvari. Ponajprije, fundamentalno rješenje je radijalno u prostornoj varijabli x. Ovo svojstvo ima i fizikalnog smisla. Zamislimo li vrlo plitki beskonačni bazen smješten u koordinatni sustav u ravnini i stavimo li komad neke obojene topljive soli (npr. hipermangana) u ishodište koordinatnog sustava, tada će se, ukoliko bazen miruje, iz ishodišta hipermangan širiti radijalno po bazenu. Navedena analogija je ponešto idealizirana,

ali zapravo vjerodostojno opisuje idealnu situaciju. Promotrimo sada inicijalnu zadaću za jednadžbu provođenja:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 \ \text{ na } \mathbb{R}^n \times \langle 0, \infty \rangle, \\ \qquad\quad u = g \ \text{ na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}. \end{cases}$$

Rješenje ovog probema dano je konvolucijom:

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x-y,t) g(y)\, dy.$$

Ovako dobiveno rješenje ima i određena svojstva, tako npr. bez obzira na glatkoću od g, dovoljno je da je $g \in C(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ kako bi u bila klase C^∞. Drugim riječima, kažemo da jednadžba izglađuje početne uvjete. Ovo svojstvo jednadžbe provođenja korisno je pri obradi slika. Naime slike s "prljavim pikselima" moguće je obraditi pomoću jednadžbe provođenja kako bi nepravilnosti na slici nestale. Još jedno svojstvo jednadžbe provođenja koje ćemo koristiti u daljnjim razmatranjima je tzv. svojstvo srednje vrijednosti. Prije nego ga iskažemo uvedimo još jedan pojam.

Definicija 1.2.1. *Za fiksne $x \in \mathbb{R}^n$ i $t \in \mathbb{R}$ te $r > 0$ skup:*

$$E(x,t;r) := \left\{ (y,s) \in \mathbb{R}^{n+1} | s \le t,\ \Phi(x-y,t-s) \ge \frac{1}{r^n} \right\}$$

nazivamo ***toplinska kugla*** *radijusa r.*

Teorem 1.2.2 (Srednja vrijednost)**.** *Neka $u \in C_1^2(U_T)$ riješava jednadžbu provođenja. Tada vrijedi:*

$$u(x,t) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x,t;e)} u(y,s) \frac{|x-y|^2}{(t-s)^2}\, dyds$$

za sve $E(x,t;r) \in U_T$.

Ovdje s $U_T = U \times \langle 0, T]$ označavamo parabolički cilindar. Parabolički rub od U_T označavamo sa $\Gamma_T = \overline{U}_T \setminus U_T$

1.3 Neka svojstva rješenja jednadžbe provođenja

U prethodnoj sekciji spomenuto je da rješenje jednadžbe provođenja topline ima određena svojstva. U ovoj sekciji prezentiramo neka od njih. Napomenimo samo da postoji još svojstava rješenja jednadžbe provođenja, no ovdje navodimo samo neka.

Principi maksimuma

Prvo svojstvo koje promatramo i dokazujemo je tzv. princip maksimuma.

Teorem 1.3.1. *Neka $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U_T})$ riješava jednadžbu provođenja na U_T. Tada vrijedi slabi princip maksimuma:*

$$\max_{\overline{U_T}} u = \max_{\Gamma_T} u.$$

Nadalje, ako je U povezan skup i postoji točka $(x_0, t_0) \in U_T$ takva da:

$$u(x_0, t_0) = \max_{\overline{U_T}} u,$$

tada je u konstantna na $\overline{U}_{t_0}$. Ovu tvrdnju nazivamo jaki princip maksimuma.

Prije samog dokaza recimo nešto o interpretaciji. Ono što teorem zapravo kaže je da ako u postiže svoj maksimum (ili minimum) u nekoj točki interiora, tada je u konstantna funkcija u svim ranijim vremenima t. Što se tiče same fizikalne interpretacije, objašnjenje gore ima i fizikalno uporište. Naime ako u prestavlja temperaturu i ona je konstantna na nekom intervalu $[0, t_0]$ uz konstantne početne uvjete, tada do trenutka t_0 temperatura ostaje ista dok se rubni uvjeti ne promjene. Drugim riječima, dok se promjena temperature na rubu ne dogodi, promjena unutar interiora neće se dogoditi. Prije samog dokaza dodajmo još jednu opasku. Gornja interpretacija čitatelju će se činiti kao smislena u fizikalnom smislu, no nije a priori jasno da jednadžba doista ima ovo svojstvo. Cilj dokaza je dakle *deducirati* ovo (poželjno) svojstvo iz same jednadžbe.
Dokaz:
Pretpostavimo sada da postoji točka $(x_0, t_0) \in U_T$ takva da je:

$$u(x_0, t_0) = M := \max_{\overline{U_T}} u$$

Tada je za dovoljno male $r > 0$ $E(x_0, t_0; r) \subset U_T$. Upotrijebimo sada svojstvo srednje vrijednosti kako bi dobili:

$$M = u(x_0, t_0) = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x_0,t_0;r)} u(y, s) \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} \, dyds \leq M,$$

budući da vrijedi:

$$1 = \frac{1}{4r^n} \iint_{E(x_0,t_0;r)} \frac{|x_0 - y|^2}{(t_0 - s)^2} \, dyds.$$

Zadnja jednakost vrijedi samo ako je u identički jednako M unutar E. Posljedično,

$$u(y, s) = M, \ \forall (y, s) \in E(x_0, t_0; r).$$

Sada odaberimo neki segment L unutar U_T takav da povezuje (x_0, t_0) s nekom drugom točkom $(y_0, s_0) \in U_T$ uz uvjet da $s_0 < t_0$. Uzmimo sada:

$$r_0 := \min\{s \geq s_0 | u(x, t) = M \, \forall (x, t) \in L, s \leq t \leq t_0\}$$

kako je u neprekidna, minimum se postiže. Pretpostavimo sada da je $r_0 > s_0$. Tada je $u(z_0, r_0) = M$ za neku točku $(z_0, r_0) \in L \cap U_T$. Iz ovoga slijedi da $u \equiv M$ na L.

Dokažimo sada drugu tvrdnju. Fiksiramo li $x \in U$ i neko vrijeme $0 \leq t < t_0$. Tada postoje točke $\{x_0, x_1, \ldots, x_m = x\}$ takve da segmenti između x_{i-1} i x_i svi leže unutar U. Postojanje ovih točaka slijedi iz činjenice da skup točaka unutar U (koje se mogu tako povezati s x_0 poligonalnim putem) je neprazan, otvoren i relativno zatvoren unutar U. Odaberimo vremena $t_0 > t_1 > \cdots > t_m = t$. Tada segmenti u $\mathbb{R}^{n+1}$ između točaka (x_{i-1}, t_{i-1}) i (x_i, t_i) leže unutar U_T za sve i. Tada po prvoj tvrdnji imamo da $u \equiv M$ na svakom segmentu. Iz ovoga slijedi da je $u(x, t) = M$. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Što se tiče posljedica jakog principa maksimuma, istaknimo najprije tzv. **beskonačnu brzinu provođenja.** Naime, jaki princip maksimuma implicira da ako je U povezan skup i $u \in C_1^2(U_T) \cap C(\overline{U}_T)$ zadovoljava:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{na } U_T \\ u = 0 & \text{na } \partial U \times [0, T] \\ u = g & \text{na } U \times \{t = 0\} \end{cases}$$

gdje je $g \geq 0$. Tada je u pozitivna svuda na U_T ako je g pozitivna negdje na U. Naime, ako je u rješenje gornje zadaće za njega vrijedi i princip minimuma (iskaz je isti kao u teoremu 1.3.1, samo max zamjenimo s min). Stoga za $g \geq 0$ iz slabog principa minimuma slijedi da je $u \geq 0$. Sada, kada bi u bila nula u nekoj točki na U_T tada iz jakog principa maksimuma znamo da je u konstantna u svim ranijim vremenima. No budući da je g pozitivna, ovo je nemoguće. Nadalje, pomoću jakog principa maksimuma moguće je pokazati inicijalno rubna zadaća na ograničenim domenama ima jedinstveno rješenje te da Cauchyjeva zadaća za jednadžbu provođenja ima jedinstveno rješenje.

Jedinstvenost rješenja

Nešto jednostavniji dokaz jedinstvenosti rješenja inicijalno-rubnog problema predstavljamo pomoću tzv. energetske metode.

Teorem 1.3.2 (Jedinstvenost)**.** *Inicijalno-rubni problem:*

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f \ \ \textit{na}\ U_T, \\ \qquad u = g \ \ \textit{na}\ \Gamma_T, \end{cases}$$

ima jedinstveno rješenje.

Dokaz:
Neka je $\tilde{u}$ drugo rješenje inicijalno-rubnog problema. Tada $w := u - \tilde{u}$ isto riješava zadaću:

$$\begin{cases} w_t - \Delta w = 0 \ \ \text{na}\ U_T, \\ \qquad w = 0 \ \ \text{na}\ \Gamma_T. \end{cases}$$

Definiramo sada funkcional energije u trenutku t kao:

$$e(t) := \int_U w^2(x,t)\,dx.$$

Sada deriviranjem funkcionala imamo da:

$$\begin{aligned} \dot{e}(t) &= 2\int_U w w_t\,dx \\ &= 2\int_U w\Delta w\,dx \\ &= -2\int_U |Dw|^2\,dx \leq 0 \end{aligned}$$

pa slijedi da je $0 \leq e(t) \leq e(0) = 0$ za $t \in [0,T]$. Posljedično, sada je $w = u - \tilde{u} \equiv 0$ na U_T. Dakle $u = \tilde{u}$. Pri tome smo u zadnjoj jednakosti koristili parcijalnu integraciju. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Jedinstvenost unatrag

Rješenje jednadžbe provođenja ima još jedno zanimljivo svojstvo. Kako bismo objasnili o čemu se radi, pretpostavimo da su u i $\tilde{u}$ rješenja jednadžbi s istim rubnim uvjetima na ∂U za neku funkciju g:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 \ \ \text{na}\ U_T, \\ \qquad u = g \ \ \text{na}\ \partial U \times [0,T], \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} \tilde{u}_t - \Delta\tilde{u} = 0 & \text{na } U_T, \\ \tilde{u} = g & \text{na } \partial U \times [0,T]. \end{cases} \tag{1.2}$$

Primjetimo pri tome da ne tvrdimo da $u = \tilde{u}$ na samom početku procesa u $t = 0$. Jedinstvenost unatrag je iskazana teoremom:

Teorem 1.3.3 (Jedinstvenost unatrag)**.** *Neka su u i $\tilde{u} \in C^2(\overline{U}_T)$ rješenja od (1.1) i (1.2). Ako vrijedi:*

$$u(x,T) = \tilde{u}(x,T),\ x \in U$$

tada je $u \equiv \tilde{u}$ na cijelom U_T.

Prije samog dokaza recimo ponovno nešto o interpretaciji. Teorem zapravo kaže da ako se dvije distribucije temperature na području U slažu u nekom trenutku $T > 0$ i imaju iste rubne vrijednosti za $0 \leq t \leq T$ tada su ove dvije vrijednosti bile jednake u svakom trenutku iz prošlosti na U. Uočimo da ovo svojstvo nije apriori očito.
Dokaz:
Kao u prethodnom dokazu stavimo $w := u - \tilde{u}$ i definiramo funkcional energije kao:

$$e(t) := \int_U w^2(x,t)\,dx,\ t \in [0,T].$$

Od ranije znamo da je prva derivacija po vremenu od funkcionala e jednaka:

$$\dot{e}(t) = -2\int_U |Dw|^2\,dx.$$

Deriviramo li funkcional još jednom po vremenu tada imamo:

$$\begin{aligned} \ddot{e}(t) &= -4\int_U Dw \cdot Dw_t\,dx \\ &= \ 4\int_U \Delta w w_t\,dx \\ &= \ 4\int_U (\Delta w)^2\,dx. \end{aligned}$$

Kako je $w = 0$ na ∂U imamo da:

$$\int_U |Dw|^2\,dx = -\int_U w\Delta w\,dx \leq \left(\int_U w^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_U (\Delta w)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Iskoristimo li dane izraze za prvu i drugu derivaciju od $e(t)$ zapravo imamo da:

$$\begin{aligned}(\dot{e}(t))^2 &= 4\left(\int_U |Dw|^2\,dx\right)^2\\ &\leq \left(\int_U w^2\,dx\right)\left(4\int_U (\Delta w)^2\,dx\right)\\ &= e(t)\ddot{e}(t).\end{aligned}$$

Analizirajmo sada što se događa sa funkcionalom $e(t)$ na intervalu $[0,T]$. Ukoliko je $e(t) = 0$, $\forall t \in [0,T]$ gotovi smo. U suprotnom, postoji neki interval $[t_1,t_2] \subset [0,T]$ takav da je $e(t) > 0$, $t \in [t_1,t_2\rangle$ dok je $e(t_2) = 0$. Dakle $e(t) > 0$ za $t_1 \leq t < t_2$, $e(t_2) = 0$ Stavimo li sada:

$$f(t) := \ln e(t)$$

iz nejednakosti gore imamo da:

$$\ddot{f}(t) = \frac{\ddot{e}(t)}{e(t)} - \frac{\dot{e}(t)^2}{e(t)^2} \geq 0.$$

Drugim riječima, funkcija f je konveksna na intervalu $\langle t_1,t_2\rangle$ pa za neki $\lambda \in \langle 0,1\rangle$ vrijedi:

$$f((1-\lambda)t_1 + \lambda t) \leq (1-\lambda)f(t_1) + \lambda f(t)$$

iz čega imamo da:

$$0 \leq e((1-\lambda)t_1 + \lambda t) \leq e(t_1)^{1-\lambda}e(t)^{\lambda}.$$

Konačno sada imamo da:

$$0 \leq e((1-\lambda)t_1\lambda t_2) \leq e(t_1)^{1-\lambda}e(t_2)^{\lambda}.$$

No sada ova nejednakost implicira da je $e(t) = 0$ za sva vremena $t \in [t_1,t_2]$ zbog ranije pretpostavke, što je kontradikcija. $\mathfrak{Q}.\mathfrak{E}.\mathfrak{D}.$

1.4 Slaba formulacija

Na samom kraju ovog poglavlja recimo nešto o slaboj formulaciji problema traženja rješenja paraboličkih jednadžbi. Do sada smo problematiku traženja rješenja proučavali uz određene pretpostavke na glatkoću funkcije u. Međutim, mnoge fizikalne pojave nisu opisane derivabilnim funkcijama. Tipični primjer takve pojave je Brownovo gibanje. Za inicijalno rubni problem:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = f & \text{na } U_T,\\ \qquad u = 0 & \text{na } \partial U \times [0,T],\\ \qquad u = g & \text{na } U \times \{t=0\},\end{cases}$$

kažemo da je u jako rješenje ukoliko su jednakosti dane gore zadovoljene u klasičnom smislu. Pretpostavimo sada da nam je dana funkcija $\varphi \in C_c^\infty(U)$. Pomnožimo li prvu jednadžbu sa φ i integriramo li cijeli izraz po U dobivamo:

$$\int_U u_t \varphi \, dx + \int_U \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_U f \varphi \, dx. \tag{1.3}$$

Sada problem traženja rješenja možemo formulirati drukčije. Cilj je naći funkciju u tako da izraz (1.3) vrijedi za sve $\varphi \in C_c^\infty(U)$. Izraz (1.3) zovemo **slaba formulacija** parcijalne diferencijalne jednadžbe. Za slabu formulaciju linearne zadaće teoremi o egzistenciji i jedinstvenosti su obrađeni u poglavlju 2. O egzistenciji i jedinstvenosti slabih rješenja za nelinearne probleme bit više je rečeno u poglavlju 3. Za sada, uočimo nekoliko bitnih stavki. Najprije, ukoliko je u klase C^2, tada jako rješenje zadovoljava i slabu formulaciju problema. Obrat neće vrijediti (odatle i potiče naziv slabo rješenje). Veliku većinu parcijalnih diferencijalnih jednadžbi nije moguće riješiti eksplicitno. Umjesto toga, najčešći pristup problemu je slaba formulacija. Nakon što je problem slabo formuliran, najčešće se prelazi na neku od metoda konačnih elemenata i rješenje jednadžbe se aproksimira numerički.

Poglavlje 2

Linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe paraboličkog tipa

Kratki uvod u prostore Soboljeva

U ovom poglavlju cilj naših razmatranja bit će reći nešto o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja linearnog problema paraboličkog tipa. Prije nego se bacimo na konkretnu teoriju i primjere, moramo uvesti nekoliko pojmova iz funkcionalne analize.

Definicija 2.0.1. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren i ograničen. Dodatno, neka je $1 \leq p < \infty$. Tada definiramo prostor:*

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R} | f \text{ je izmjeriva funkcija i } \int_\Omega \|f\|^p \, dx < \infty \right\}.$$

Definiramo još i prostor $L^\infty(\Omega)$ kao skup svih funkcija f takvih da je:

$$\|f\| \leq M \text{ gotovo svuda,}$$

odnosno L^∞ je prostor svih izmjerivih esencijalno omeđenih funkcija na Ω.

Nadalje, na prostorima L^p definiramo pripadnu normu kao:

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega \|f\|^p \, dx \right)^{1/p},$$

odnosno za prostor L^∞:

$$\|f\|_\infty = \inf\{C \geq 0 : |f(x)| \leq C \text{ g.s. }\}.$$

U idućem koraku uvodimo takozvane H^k prostore. Na Ω definiramo prostor:

$$H^k(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) | \partial^\alpha f \in L^2(\Omega),\ |\alpha| \leq k\},$$

Pri tome je ∂^α standardna multiindeksna notacija. Drugim riječima, prostor H^k je prostor svih L^2 funkcija takvih da su i njihove pripadne parcijalne derivacije do k-tog reda uključujući također unutar L^2. Lako se pokaže da je prostor $H^k(\Omega)$ Hilbertov prostor uz normu i skalarni produkt zadane kao:

$$||f||_k := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} ||\partial^\alpha f||^2_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2},$$

$$\langle f, g \rangle_k := \sum_{|\alpha| \leq k} \langle \partial^\alpha f, \partial^\alpha g \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Ranije smo pri formuliranju slabog problema koristili funkciju $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$. Problem je što prostor $C_c^\infty(\Omega)$ nije gust u prostoru $H^k(\Omega)$. Stoga naša promatranja ograničavamo na specifično zatvorenje prostora $H^k(\Omega)$, pa konačno definiramo:

$$H_0^k(\Omega) := \overline{C_c^\infty(\Omega)^{H^k}},$$

ovo je zatvarač prostora $C_c^\infty(\Omega)$ u normi prostora $H^k(\Omega)$. Za $k \in \mathbb{N}$ još je prirodno promatrati prostor $H^{-k}(\Omega)$. Njega definiramo kao prostor svih neprekidnih funkcionala na $H_0^k(\Omega)$. Zbog gustoće od C_c^∞ u H_0^k vrijedi karakterizacija:

$$u \in H^{-k}(\Omega) \Leftrightarrow |\langle u, \varphi \rangle| \leq C ||u||_k,\ \varphi \in C_c^\infty(\Omega)$$

2.1 Opći oblik paraboličke jednadžbe

U nastavku, ukoliko drukčije nije naglašeno, promatramo $U \subset \mathbb{R}^n$ otvoren i ograničen skup. Nadalje, definiramo $U_T = U \times \langle 0, T]$ za neki fiksni $T > 0$. Za zadane $f \in L^2(0, T; U)$ i $g \in H^1(U)$ inicijalno - rubni problem koji promatramo je:

$$\begin{cases} u_t + Lu = f & \text{na } U_T \\ u = 0 & \text{na } \partial U \times [0, T] \\ u = g & \text{na } U \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{2.1}$$

pri tome za sva vremena t L predstavlja parcijalni diferencijalni operator drugog reda u obliku:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x,t) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b^i(x,t) u_{x_i} + c(x,t) u$$

odnosno u divergentnom obliku L je dan sa:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n}(a^{ij}(x,t)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u$$

gdje su koeficijenti $a^{ij}(x,t), b^i(x,t), c(x,t)$ zadani $\forall i, j \in \{1,\dots,n)$. Nadalje nepoznanica je naravno u, dok su još zadane realne funkcije f i g. Uočimo, ako su $a^{ij} = \delta_{ij}$, $b^i \equiv c \equiv f \equiv 0$ tada je $L = -\Delta$, pa problem koji promatramo postaje jednadžba provođenja topline. Dakle ima smisla promatrati ovakvo poopćenje paraboličke jednadžbe.

Definicija 2.1.1. *Kažemo da je parcijalni diferencijalni operator $\frac{\partial}{\partial t} + L$* ***uniformo paraboličan*** *ukoliko postoji konstantna $C > 0$ takva da:*

$$\sum_{i,j=1} a^{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geq C|\xi|^2 \; \forall (x,t) \in U_T,\; \xi \in \mathbb{R}^n.$$

U primjenama članovi drugoga reda $(a^{ij}u_{x_ix_j}))$ opisuju difuziju, članovi prvoga reda $(b^iu_{x_i})$ opisuju transport dok član nultoga reda (cu) opisuje povećanje ili smanjivanje koncentracije same tvari.

2.2 Slaba rješenja

Formulacija slabe zadaće

Ono što možemo primjetiti iz prethodne sekcije je da ćemo do eksplicitnih formula za rješenja generalne linearne paraboličke jednadžbe doći jako teško. Stoga u ovom odjeljku uvodimo slaba rješenja i raspravljamo o konstrukciji istih. Nakon toga dokazujemo njihovu egzistenciju i jedinstvenost. Najprije, uvedimo nekoliko pretpostavki. Za sve zadane funkcije pretpostavljamo: $a^{ij}, b^i, c \in L^\infty$, $i, j \in \{1,\dots,n)$. Nadalje, neka je $a^{ij} = a^{ji}$, $\forall i, j$. Uočimo da ovaj zahtjev nije problematičan, matricu ovih koeficijenata uvijek možemo prilagoditi da na pri formulaciji problema bude simetrična. Nadalje, pretpostavimo da $f \in L^2(U_T)$ i $g \in L^2(U)$. Neka je još L zadan u divergentnom obliku. Sada definiramo vremenski zavisnu bilinearnu formu B:

$$B[u,v;t] := \int_U \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(\cdot,t)u_{x_i}v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(\cdot,t)u_{x_i}v + c(\cdot,t)uv\,dx,$$

gdje su $u, v \in H_0^1(U)$ i $t \in [0,T]$. Pojasnimo malo intuiciju prije nego izvedemo slabu formulaciju. Pretpostavimo da je u glatko rješenje problema (2.1). Tada u možemo identificirati s preslikavanjem $\mathbf{u} : [0,T] \mapsto H_0^1(U)$ i to definirano kao:

$$[\mathbf{u}(t)](x) := u(x,t).$$

Ovime zapravo u više ne smatramo funkcijom od x i t nego preslikavanjem koje neko vrijeme t šalje u prostor $H_0^1(U)$ funkcija od x. Na sličan način tretiramo i ostale zadane funkcije. Funkciju f identificiramo s preslikavanjem: $\mathbf{f} : [0, T] \mapsto L^2(U)$ definiranim kao:

$$[\mathbf{f}(t)](x) := f(x, t),\ x \in U,\ t \in [0, T].$$

Sada zapravo radimo istu stvar kao kada smo pretstavljali slabu formulaciju jednadžbe provođenja. Fiksiramo li $v \in H_0^1(U)$, pomnožimo li cijelu jednadžbu s tom funkcijom i odradimo parcijalnu integraciju imamo da vrijedi:

$$(\mathbf{u}', v) + B[\mathbf{u}, v; t] = (\mathbf{f}, v),$$

gdje $'$ označava vremensku derivaciju. Sa $(\cdot, \cdot)$ označili smo skalarni produkt na $L^2(U)$. Uočimo još nekoliko stvari. Najprije, imamo da je:

$$u_t = g^0 + \sum_{j=1}^{n} g^j_{x_j} \text{ na } U_T$$

gdje smo sa g^0 označili:

$$g^0 := f - \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} - cu$$

$$g^j := \sum_{i=1}^{n} a^{ij} u_{x_j}$$

Iz teorije Soboljevljevih prostora moguće je zaključiti da desna strana izraza za u_t danoga gore leži u prostoru $H^{-1}(U)$ uz ocjenu danu sa:

$$\|u_t\|_{H^{-1}(U)} \leq \left(\sum_{j=0}^{n} \|g^j\|^2_{L^2(U)} \right)^{1/2} \leq C(\|u\|_{H_0^1(U)} + \|f\|_{L^2(U)})$$

Ocjena gore daje nam da $\mathbf{u}' \in H^{-1}(U)$. Motivirani time, uvodimo definiciju:

Definicija 2.2.1. *Neka su $f \in L^2(U_T)$ i $g \in L^2(U)$. Kažemo da je $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H_0^1(U))$ sa $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; H^{-1}(U))$* ***slabo rješenje*** *problema (2.1) ukoliko je zadovoljeno:*

1. $(\mathbf{u}', v) + B[\mathbf{u}, v; t] = (\mathbf{f}, v)\ \forall v \in H_0^1(U)$ *za gotovo sva vremena* $t \in [0, T]$,
2. $\mathbf{u}(0) = g$.

Egzistencija i jedinstvenost slabog rješenja

Objasnimo sada ideju kako dolazimo do slabih rješenja. Za problem (2.1) slabo rješenje konstruiramo tako da rješenje konstruiramo u nekim konačnodimenzionalnim prostorima aproksimacija. Nakon toga, ideja je preći na limes tih aproksimacija. Ovaj pristup poznat je kao Galerkinova metoda. Pretpostavimo da su $\forall k \in \mathbb{N}$ dane glatke funkcije $w_k = w_k(x)$. Neka još vrijedi da je $(w_k)_{k=1}^{\infty}$ ortonormirana baza za $L^2(U)$ koja je ujedno i ortogonalna baza za $H_0^1(U)$. Egzistencija ovakve baze može se naći u literaturi. Za fiksni $m \in \mathbb{N}$ sada je cilj pronaći funkciju $\mathbf{u}_m : [0, T] \mapsto H_0^1(U)$ oblika:

$$\mathbf{u}_m(t) := \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k$$

takvu da koeficijenti $d_m^k(t)$ zadovoljavaju

$$d_m^k(0) = (g, w_k),\ k = 1, \dots, m, \tag{2.2}$$

$$(\mathbf{u}_m', w_k) + B[\mathbf{u}_m, w_k; t] = (\mathbf{f}, w_k).\ k = 1, \dots, m. \tag{2.3}$$

Drugim riječima, funkcija $\mathbf{u}_m$ koju tražimo zadovoljava "projekciju" početnog problema na konačnodimenzionalni prostor razapet vektorima $(w_k)_{k=1}^{m}$.

Teorem 2.2.2 (Konstrukcija aproksimacije rješenja)**.** *Za svaki $m \in \mathbb{N}$ postoji jedinstvena $\mathbf{u}_m$ koja zadovoljava (2.2) i (2.3).*

Dokaz:
Kako je $\mathbf{u}_m$ oblika:

$$\mathbf{u}_m(t) := \sum_{k=1}^{m} d_m^k(t) w_k,$$

vidimo da je:

$$(\mathbf{u}_m'(t), w_k) = d_m^{k\prime}(t).$$

Nadalje, imamo:

$$B[\mathbf{u}_m, w_k; t] = \sum_{l=1}^{m} e^{kl}(t) d_m^l(t),$$

gdje je $e^{kl}(t) := B[w_l, w_k; t]$, $k, l \in \{1, \dots, m\}$. Označimo još sa $f^k(t) := (\mathbf{f}(t), w_k)$. Jednakost (2.3) sada postaje:

$$d_m^{k\prime}(t) + \sum_{l=1}^{m} e^{kl}(t) d_m^l(t) = f^k(t). \tag{2.4}$$

No sada smo dobili sustav običnih diferencijalnih jednadžbi za koji znamo da rješenje postoji iz teorije običnih diferencijalnih jednadžbi. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Prije dokaza egzistencije i jedinstvenosti slabe formulacije iskažimo još jedan bitan rezultat čiji dokaz preskačemo, a isti se može naći u literaturi.

Teorem 2.2.3 (Energetska ocjena)**.** *Postoji konstanta C koja ovisi samo o U, T i koeficijentima od L takva da vrijedi:*

$$\max_{0\leq t\leq T} \|\mathbf{u}_m(t)\|_{L^2(U)} + \|\mathbf{u}_m\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))} + \|\mathbf{u}_m'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))} \leq C(\|f\|_{L^2(0,T;L^2(U))} + \|g\|_{L^2(U)}) \tag{2.5}$$

Kao što je naglašeno ranije, ideja je sada konstruirati slabo rješenje problema prelaskom na limes niza u_n rješenja aproksimacijske zadaće (2.2),(2.3).

Teorem 2.2.4 (Egzistencija i jedinstvenost slabog rješenja)**.** *Slabo rješenje problema (2.1) postoji i jedinstveno je.*

Dokaz(u 4 koraka):
Korak 1: Najprije upotrijebimo energetsku ocjenu kako bismo zaključili dvije bitne stvari o nizovima $(\mathbf{u}_m)_{m=1}^{\infty}$ i $(\mathbf{u}_m')_{m=1}^{\infty}$. Naime, prvi niz je ograničen u prostoru $L^2(0,T;H_0^1(U))$,a drugi u prostoru $L^2(0,T;H^{-1}(U))$. Sukladno tome, po Banach-Alaogluovom teoremu postoji podniz $\mathbf{u}_{m_l}$ i funkcija $\mathbf{u} \in L^2(0,T;H_0^1(U))$ s njezinom slabom derivacijom $\mathbf{u}' \in L^2(0,T;H^{-1}(U))$ takva da:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_{m_l} \rightharpoonup \mathbf{u} \text{ slabo u } L^2(0,T;H_0^1(U)), \\ \mathbf{u}_{m_l}' \rightharpoonup \mathbf{u}' \text{ slabo u } L^2(0,T;H^{-1}(U)). \end{cases} \tag{2.6}$$

Korak 2: Sada fiksiramo $N \in \mathbf{N}$ i odaberimo $\mathbf{v} \in C^1([0,T];H_0^1(U))$ oblika:

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{k=1}^{n} d^k(t) w_k,$$

gdje su $\{d^k\}_{k=1}^N$ ranije zadane glatke funkcije. Sada odaberemo $m \geq N$ i izraz (2.3) množimo sa $d^k(t)$ i sumiramo sve po $k = 1,\dots,N$. Integriranjem po t dobivamo:

$$\int_0^T \langle \mathbf{u}_m', \mathbf{v}\rangle + B[\mathbf{u}_m, \mathbf{v}; t]\, dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v})\, dt. \tag{2.7}$$

Sada stavljanjem $m = m_l$ i prelaskom na limes imamo:

$$\int_0^T \langle \mathbf{u}', \mathbf{v}\rangle + B[\mathbf{u}, \mathbf{v}; t]\, dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v})\, dt. \tag{2.8}$$

Uočimo sada da je ova jednakost zadovoljena za sve funkcije iz $L^2(0,T;H_0^1(U))$ zato što su sve funkcije zadane poput funkcije $\mathbf{v}$ guste u ovom prostoru. Stoga vrijedi:

$$\langle \mathbf{u}', v\rangle + B[\mathbf{u}, v; t] = (\mathbf{f}, v),\ \forall v \in H_0^1(U) \text{ za g.s } t \in [0,T] \tag{2.9}$$

Nadalje, imamo da je $u \in C([0,T]; L^2(U))$. (Ove tvrdnje proizlaze iz teorema o ulaganju. Moguće ih je pronaći u Evansu, poglavlje 5.)

Korak 3: Preostaje još pokazati da je $\mathbf{u}(0) = g$. Iz izraza (2.8) imamo da za sve $\mathbf{v} \in C^1([0,T]; H_0^1(U))$ takve da $\mathbf{v}(T) = 0$ vrijedi:

$$\int_0^T -\langle \mathbf{v}', \mathbf{u} \rangle + B[\mathbf{u}, \mathbf{v}; t]\, dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v})\, dt + (\mathbf{u}(0), \mathbf{v}(0)),$$

Slično, iz izraza (2.7) imamo:

$$\int_0^T -\langle \mathbf{v}', \mathbf{u}_m \rangle + B[\mathbf{u}_m, \mathbf{v}; t]\, dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v})\, dt + (\mathbf{u}_m(0), \mathbf{v}(0)),$$

Ponovno stavimo $m = m_l$ i prelaskom na limes imamo:

$$\int_0^T -\langle \mathbf{v}', \mathbf{u} \rangle + B[\mathbf{u}, \mathbf{v}; t]\, dt = \int_0^T (\mathbf{f}, \mathbf{v})\, dt + (g, \mathbf{v}(0))$$

zato što $u_{m_l} \to g$ na $L^2(U)$. Oduzimanjem prve i treće jednadžbe gore dobivamo da je $(u(0) - g, \mathbf{v}(0)) = 0$. Kako je $\mathbf{v}(0)$ proizvoljno, zaključujemo $\mathbf{u}(0) = g$.

Korak 4: Na samom kraju dokazujemo jedinstvenost. Dovoljno je pokazati da ukoliko $\mathbf{f} \equiv \mathbf{g} \equiv 0$ tada problem (2.1) ima samo jedno slabo rješenje $\mathbf{u} \equiv 0$. Ovu tvrdnju dokazujemo tako da stavimo $\mathbf{v} \equiv \mathbf{u}$ u jednakosti (2.9). Tada vrijedi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(U)}\right) + B[\mathbf{u}, \mathbf{u}; t] = \langle \mathbf{u}', \mathbf{u} \rangle + B[\mathbf{u}, \mathbf{u}; t] = 0$$

Kako je:

$$B[\mathbf{u}, \mathbf{u}; t] \geq \beta \|\mathbf{u}\|^2_{J_0^1(U)} - \gamma \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(U)} \geq -\gamma \|\mathbf{u}\|^2_{L^2(U)}$$

za neke konstante β i γ. Pri tome smo iskoristili leme 2.2.5 i 2.2.6 čiji se dokaz može naći u Evansu. Sada Gronwallova nejednakost povlači tvrdnju. $\mathfrak{Q}.\mathfrak{E}.\mathfrak{D}.$

Lema 2.2.5. *Neka je* $\mathbf{u} \in L^2(0,T; H_0^1(U))$ *uz* $\mathbf{u}' \in L^2(0,T; H^{-1}(U))$. *Tada vrijedi (nakon mogućeg redefiniranja na skupu mjere 0)* $\mathbf{u} \in C([0,T]; L^2(U))$. *Nadalje, preslikavanje* $t \mapsto \|\mathbf{u}(t)\|^2_{L^2(U)}$ *je apsolutni neprekidno za gotovo sve* $t \in [0,T]$ *uz derivaciju:*

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{u}\|^2_{L^2(U)} = 2\langle \mathbf{u}'(t), \mathbf{u}(t) \rangle.$$

Dodatno, vrijedi ocjena:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{u}(t)\|_{L^2(U)} \leq C(\|\mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H_0^1(U))} + \|\mathbf{u}'\|_{L^2(0,T;H^{-1}(U))}).$$

Pri tome konstanta C ovisi samo o T.

Lema 2.2.6. *Postoje konstante $\alpha, \beta > 0$ i $\gamma \geq 0$ takve da za sve $u, v \in H_0^1(U)$ vrijedi:*

1. $|B[u,v]| \leq \alpha \|u\|_{H_0^1(U)} \|v\|_{H_0^1(U)}$,

2. $\beta \|u\|^2_{H_0^1(U)} \leq B[u,u] + \gamma \|u\|^2_{L^2(U)}$.

Kratko o svojstvima

Prirodno je postaviti pitanja vezana uz regularnost slabih rješenja zadaće (2.1). Ono što je moguće pokazati je da je uz pretpostavke da je $f \in L^2(0,T; L^2(U))$ te $g \in H_0^1(U)$ slabo rješenje u tada unutar prostora $L^2(0,T; H^2(U)) \cap L^\infty(0,T; H_0^1(U)), u' \in L^2(0,T; L^2(U))$. Općenito, jači zahtjevi na f i g daju i bolja svojstva od u. U najboljem slučaju, ukoliko su f i g beskonačno puta diferencijabilne, tada uz još neke minimalne dodatne zahtjeve na iste (uvjeti kompatibilnosti na derivacije) inicijalno rubna zadaća ima jedinstveno, beskonačno glatko rješenje. Što se tiče principa maksimuma i brzine provođenja, za općeniti parabolički problem postoje također teoremi koji ih opisuju. Oni se ponešto razlikuju od teorema koji je izrečen za jednadžbu provođenja topline, ali naglasimo da ukoliko je jednadžba uniformno parabolička tada se ponovno javlja svojstvo beskonačne brzine provođenja.

Poglavlje 3

Primjer nelinearnog problema

U ovom poglavlju dokazujemo egzistenciju i rješenja lokalnog nelinearnog problema. Nakon toga, raspravljamo specifični slučaj reakcijsko-difuzijskog sustava opisanog paraboličkom parcijalnom diferencijalnom jednadžbom. Budući da su zadani problemi nelinearani, egzistenciju i jedinstvenost rješenja dokazujemo pomoću dva teorema o fiksnoj točki. Nakon toga, provodimo raspravu oko tzv. nefizikalnih rješenja i pojave eksplozije (eng. blow up) rješenja u specifičnom slučaju kada su početni podaci "preveliki" u određenom smislu.

3.1 Teoremi o fiksnoj točki

Često u literaturi spomenut kao jedan od najjednostavnih teorema o fiksnoj točki, Banachov teorem o fiksnoj točki reprezentiran u ovoj sekciji koristi tipičan dokaz s 2. godine. Za njega je dovoljno promatrati preslikavanje koje je kontrakcija na nekom prostoru. Za takvo preslikavanje lako je pokazati da posjeduje fiksnu točku. Mi ćemo ovdje pretpostaviti da je X neki Banachov prostor i da je $A : X \to X$ nelinearno preslikavanje koje je **kontrakcija**, odnosno da za njega vrijedi:

$$||A(x) - A(y)|| \leq \gamma ||x - y||, \ x, y \in X, \ \text{za neki } 0 < \gamma < 1.$$

Kažemo da je A **stroga kontrakcija** ukoliko je nejednakost navedena gore stroga. Napomenimo još da je Banachov teorem o fiksnoj točki često korišten u popularizaciji znanosti. Tako je npr. moguće pokazati da postoje dvije točke na planetu Zemlji u kojima su i temperatura i tlak zraka isti.

Teorem 3.1.1 (Banachov teorem o fiksnoj točki)**.** *Neka je $A : X \to X$ kontrakcija kao gore. Tada A ima fiksnu točku.*

Dokaz:
Odaberimo $x_0 \in X$. Sada definiramo rekurzivno niz: $x_{n+1} = Ax_n$. Tada:

$$\|A(x_{n+1}) - Ax_n\| \leq \gamma \|x_{n+1} - x_n\| = \gamma \|A(x_n) - A(x_{n-1})\|$$

Nastavimo li dalje imamo da:

$$\|A(x_{n+1}) - A(x_n)\| \leq \gamma^n \|A(x_0) - x_0\|, \ \forall n = 1, 2 \ldots$$

Neka je sada $n \geq l$. Sada imamo:

$$\begin{aligned}\|x_k - x_l\| = \|A(x_{n-1}) - A(x_{l-1})\| &\leq \sum_{j=l-1}^{n-2} \|A(x_{j+1}) - A(x_j)\| \\ &\leq \|A(x_0) - x_0\| \sum_{j=l-1}^{n-2} \gamma^j.\end{aligned}$$

Jer je $\gamma < 1$ red $\sum_{j=l-1}^{n-2} \gamma^j$ je konvergentan pa je $(x_k)_k$Cauchyjev niz u X. Stoga postoji točka $x \in X$ takva da $x_k \to x$ u X. Stoga $A(x) = x$ pa je x fiksna točka od A. $\mathfrak{Q}.\mathfrak{E}.\mathfrak{D}.$

U nastavku ćemo koristiti još jedan teorem o fiksnoj točki:

Teorem 3.1.2 (Schauderov teorem o fiksnoj točki)**.** *Neka je X Bancachov prostor i $K \subset X$ kompaktan i konveksan skup. Nadalje, neka je preslikavanje:*

$$A : K \to K$$

neprekidno. Tada A ima fiksnu točku.

Dokaz teorema može se pronaći u literaturi. Slično kao Banachov teorem o fiksnoj točki, Schauderov teorem također je tema koja se koristi u popularizaciji znanosti. Česti primjer "primjene" Schauderovog teorema o fiksnoj točki u popularnoj znanosti je dokaz da ukoliko promješamo neki napitak u šalici, tada postoji barem jedna molekula koja je ostala na istom položaju.

3.2 Reakcijsko-difuzijski sustav

Promotrimo incijalno - rubni problem oblika:

$$\begin{cases} \mathbf{u}_t - \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \ \text{ na } U_t, \\ \mathbf{u} = 0 \ \text{ na } \partial U \times [0, T], \\ \mathbf{u} = \mathbf{g} \ \text{ na } U \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Ovdje su $\mathbf{u} = (u^1, \ldots, u^m)$ i $\mathbf{g} = (g^1, \ldots, g^m)$ vektorske funkcije. Pretpostavljamo još da je $\mathbf{g} \in H_0^1(U; \mathbf{R}^m)$. Uočimo da je funkcija $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ono što problem čini nelinearnim. Za nju za sada pretpostavimo da je Lipschitz neprekidna. U našem slučaju, to povlači da za sve $x \in \mathbb{R}^m$ vrijedi:

$$\|f(x)\| \leq C(1 + \|x\|).$$

Uz iste oznake kao u linearnom slučaju, reći ćemo da je $\mathbf{u} \in L^2(0, T; H_0^1(U; \mathbb{R}^m))$ sa derivacijom $\mathbf{u}' \in L^2(0, T; H^{-1}(U; \mathbb{R}^m))$ slabo rješenje problema (3.1) ukoliko vrijedi:

$$\langle \mathbf{u}', \mathbf{v} \rangle + B[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = (\mathbf{f}(\mathbf{u}), \mathbf{v}),\ \forall \mathbf{v} \in H_0^1(U; \mathbb{R}^m)$$

uz uvjet da: $\mathbf{u}(0) = g$. Prije samog dokaza egzistencije i jedinstvenosti, naglasimo još da je norma na $H_0^1(U; \mathbb{R}^m)$ dana sa:

$$\|\mathbf{u}\|_{H_0^1(U;\mathbb{R}^m)} = \left(\int_U |D\mathbf{u}|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Što se tiče interpretacije, zadaća zadana sa (3.1) u primjeni najčešće predstavlja evoluciju gustoće (ili koncentracije) tvari unutar nekog sustava. Pri tome kemikalije reagiraju jedna s drugom, njihove koncentracije zapravu su komponente funkcije $\mathbf{u}$ dok su kemijske reakcije između tvari opisane funkcijom $\mathbf{f}$.

Teorem 3.2.1 (Egzistencija i jedinstvenost)**.** *Postoji jedinstveno slabo rješenje problema (3.1).*

Dokaz (U 4 koraka):
Korak 1: Najprije uočimo da je prostor $X = C([0, T]; L^2(U; \mathbb{R}^m))$ Banachov uz normu:

$$\|\mathbf{v}\|_X := \max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{v}(t)\|_{L^2(U;\mathbb{R}^m)}.$$

Sada želimo specificirati operator A i povezati ga s jednadžbom. Neka je $\mathbf{u} \in X$. Stavimo li: $\mathbf{h}(t) := \mathbf{f}(\mathbf{u}(t))$ zbog Lipschitz neprekidnosti od $\mathbf{f}$ vidimo da je ovako definiran $\mathbf{h}$ iz prostora $L^2(0, T; L^2(U; \mathbf{R}^m))$. No sada iz linearne teorije znamo da sustav:

$$\begin{cases} \mathbf{w}_t - \Delta \mathbf{w} = \mathbf{h} \text{ na } U_T, \\ \mathbf{w} = 0 \text{ na } \partial U \times [0, T], \\ \mathbf{w} = \mathbf{g} \text{ na } U \times \{t = 0\}. \end{cases} \tag{3.2}$$

ima jedinstveno slabo rješenje i zadovoljava:

$$\langle \mathbf{w}', \mathbf{v} \rangle + B[\mathbf{w}, \mathbf{v}] = (\mathbf{h}, \mathbf{v}). \tag{3.3}$$

Sada definiramo operator $A : X \to X$ kao $A[\mathbf{u}] = \mathbf{w}$.
Korak 2: Sada tvrdimo da ukoliko je $T > 0$ dovoljno maleno tada je A stroga kontrakcija. Da bismo to pokazali, stavimo $A[\mathbf{u}] = \mathbf{w}$ i $\tilde{\mathbf{w}} = A[\tilde{\mathbf{u}}]$. Sada i $\mathbf{w}$ i $\tilde{\mathbf{w}}$ uz $\mathbf{h}(t) := \mathbf{f}(\mathbf{u}(t))$ i $\tilde{\mathbf{h}}(t) := \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}}(t))$ zadovoljavaju jednakost (3.3). Sada želimo ocjeniti razliku

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}\|^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)} + 2\|\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}\|^2_{H^1_0(U;\mathbb{R}^m)} = 2(\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{h} - \tilde{\mathbf{h}})$$

dobivenu oduzimanjem (3.3) i pripadne slične formulacije za $\tilde{\mathbf{w}}$. Za test funkciju ovdje smo uzeli upravo $\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}$. Računamo:

$$2(\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}, \mathbf{h} - \tilde{\mathbf{h}}) \leq \varepsilon\|\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}\|^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)} + \frac{1}{\varepsilon}\|\mathbf{f}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}})\|^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)} \tag{3.4}$$

$$\leq \varepsilon C\|\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}\|^2_{H^1_0(U;\mathbb{R}^m)} + \frac{1}{\varepsilon}\|\mathbf{f}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}})\|^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)} \tag{3.5}$$

što daje Poincaréova nejednakost. Za $\varepsilon > 0$ i dovoljno malen i zbog toga što je $\mathbf{f}$ Lipschitz neprekidna imamo:

$$\frac{d}{dt}\|\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}\|^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)} \leq C\|\mathbf{f}(\mathbf{u}) - \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{u}})\|^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)} \leq C\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)}.$$

No sada posljedično tome vrijedi i:

$$\|\mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}\|^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)} \leq C\int_0^s \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)}\,dt \leq CT\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|^2$$

Na samom kraju maksimiziramo lijevu stranu gornje nejednakosti po s. U tom slučaju, imamo da je zapravo:

$$\|A[\mathbf{u}] - A[\tilde{\mathbf{u}}]\|_X \leq \sqrt{CT}\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_X.$$

Dakle A je kontrakcija uz uvjet da je T dovoljno malo u odnosu na C.
Korak 3: Ukoliko je $T > 0$ proizvoljan, možemo naći $0 < T_1 < T$ takav da je uvjet za kontrakciju naveden u koraku 2 zadovoljen, odnosno $\sqrt{CT_1} < 1$. Tada na problem s takvim T_1 primjenimo Banachov teorem o fiksnoj točki kako bismo pronašli slabo rješenje problema 3.1 na intervalu $[0, T_1]$. Kako T_1 ovisi isključivo o Lipschitzovoj konstanti od $\mathbf{f}$, možemo naš argument proširiti na interval $[T_1, 2T_1]$. Nakon konačno mnogo ponavljanja takve konstrukcije dolazimo do pravog početnog intervala.
Korak 4: Preostaje još pokazati jedinstvenost. Pretpostavimo da su $\mathbf{u}$ i $\tilde{\mathbf{u}}$ dva slaba rješenja od problema (3.1). Tada ocjena iz koraka 3 postaje:

$$\|\mathbf{u}(s) - \tilde{\mathbf{u}}(s)\|^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)} \leq \int_0^s \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|^2_{L^2(U;\mathbb{R}^m)}\,dt,\ s \in [0, T]$$

Grownallova nejednakost sada daje $\mathbf{u} \equiv \tilde{\mathbf{u}}$. $\mathfrak{Q.E.D.}$

3.3 Općenitiji nelinearni problem

U nastavku promatramo općeniti nelinearni problem oblika:

$$\begin{cases} u_t - \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a(x,t;u)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right) + b(x,t;u)u = f \ \text{na}\ \Omega \times \langle 0, T\rangle\,, \\ u = 0 \ \text{na}\ \partial\Omega, \\ u(x,0) = u_0(x) \ \text{na}\ \Omega. \end{cases} \tag{3.6}$$

Pri tome je $\partial\Omega$ otvoren skup s Lipschitzovim rubom. Nadalje, zadane su Caratheodorijeve funkcije a i b i neka za njih vrijedi:

$$0 \leq m \leq a(x,t;u) \leq M,$$

$$0 < m \leq |b(x,t;u)| \leq M,$$

dok su $u_0 \in L^2(\Omega)$ i $f \in L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ gdje je $V = H_0^1(\Omega)$ Htjeli bismo pokazati da slabo rješenje ovakve zadaće postoji i da je jedinstveno. U samom dokazu koristit ćemo rezultat iz Poglavlja 2 o egzistenciji rješenja za linearni problem. Uz slične oznake kao ranije, vrijedi naredni teorem:

Teorem 3.3.1. *Uz pretpostavke kao gore postoji rješenje problema:*

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ \dfrac{d}{dt}(u,v) + a(u,v) = (f,v),\ \forall v \in V \ \text{na}\ \mathcal{D}'\langle 0,T\rangle\,. \end{cases} \tag{3.7}$$

Pri tome $(\cdot,\cdot)$ označava skalarni produkt na $L^2(\Omega)$,a sa $a(u,v)$ smo označili formu:

$$a(u,v) = \int_\Omega \left\{ a(x,t;u)\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i} + b(x,t;u)u\cdot v \right\} dx$$

Dokaz:
Ideja je iskoristiti Schauderov teorem o fiksnoj točki. Neka je $w \in L^2(0,TL^2(\Omega))$ Tada prema Teoremu 2.2.4 zadaća:

$$\begin{cases} u \in L^2(0,T;V),\ u_t \in L^2(0,T;V'), \\ u(0) = u_0, \\ \dfrac{d}{dt}(u,v) + a_w(u,v) = \langle f, v\rangle \ \text{na}\ \mathcal{D}'(0,T), \forall v \in V, \end{cases} \tag{3.8}$$

gdje smo sa a_w označili formu:

$$a_w(u,v) = \int_\Omega \left\{ a(x,t;w)\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial v}{\partial x_i} + b(x,t;w)u\cdot v \right\} dx \tag{3.9}$$

ima jedinstveno rješenje $u \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ pa možemo definirati $T(w) := u$. Ovo preslikavanje je definirano na $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$, a zbog ulaganja:

$$L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

slijedi da je $T : L^2(0,T;L^2(\Omega)) \to L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Pokažemo li da preslikavanje $w \mapsto T(w)$ ima fiksnu točku, gotovi smo. Stavimo li sada $v = u$ uvrštavanjem u slabu formulaciju imamo:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u,u) + a_w(u,u) = (f,u) \text{ g.s. } t \in \langle 0,T\rangle \,.$$

Koristeći strogu pozitivnost od b vrijedi ocjena:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u,u) + m\|u\|_V^2 \leq \|f\|\|u\|_V.$$

Pri tome je:

$$\|f\| = \sup_{\|v\|_V \leq 1} \langle f,v\rangle \,,$$

$$\|u\|_V^2 = \int_\Omega |\nabla u|^2 + u^2 \, dx.$$

Iskoristimo li sada Youngovu nejednakost na desnoj strani ocjene, dobivamo da:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u,u) + m\|u\|_V^2 \leq \frac{m}{2}\|u\|_V^2 + \frac{1}{2m}\|f\|^2.$$

Množenjem s 2 i sređivanjem imamo:

$$\frac{d}{dt}(u,u) + m\|u\|_V^2 \leq \frac{1}{m}\|f\|^2.$$

Sada sve integriramo na intervalu $\langle 0,T\rangle$ pa imamo:

$$|u(T)|_2^2 + m\int_0^T \|u\|_V^2 \, dt \leq |u_o|_2^2 + \frac{1}{m}\int_0^T \|f|, dt.$$

Ovime su zapravo dobivene ocjene:

$$(*) \qquad \|u\|_{L^2(0,T;V)}, \|u\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} \leq C$$

gdje je

$$C^2 = \frac{1}{m}|u_0|_2^2 + \frac{1}{m^2}\|f\|_{L^2(0,T,V')}^2.$$

Sada definirajmo skup:

$$B = \{v \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) : \ \|v\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C\}.$$

Slijedi da je $w \mapsto u = T(w)$ preslikavanje sa prostora B na njega samog. Nadalje, iz slabe formulacije imamo da:

$$(**) \qquad \|u_t\|_{L^2(0,T;V')} \leq M\|u\|_{L^2(0,T;V)} + \|f\|_{L^2(0,T;V')} \leq MC + \|f\|_{L^2(0,T;V')} = C'.$$

Prema tome, u pripada ograničenom podskupu od skupa $\{v \in L^2(0,T;V) : u' \in L^2(0,T;V')\}$ koji je relativno kompaktan u $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ (ovo znamo iz teorema o ulaganju). Da bismo mogli primjeniti teorem o fiksnoj točki, preostaje još pokazati da je preslikavanje T neprekidno na B. Neka je sada $(w_n)_n$ niz u B takav da $w_n \to w$ u B. Označimo još sa $u_n = T(w_n)$. Zbog ocjena $(*)$ i $(**)$, ovaj niz je ograničen pa možemo naći podnizove (indeksi će ostati isti, no dalje radimo s podnizovima) takve da:

$$\begin{cases} w_n \to w \ \text{ g.s } \Omega \times \langle 0,T\rangle, \\ u_n \to u_\infty \ \text{ u } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \\ \dfrac{\partial u_n}{\partial x_i} \rightharpoonup \dfrac{\partial u_\infty}{\partial x_i} \text{ u } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \\ u_{n_t} \rightharpoonup u_{\infty_t} \text{ u } L^2(0,T;V'), \end{cases} \tag{3.10}$$

gdje je $u_\infty \in L^2(0,T;V)$. Slabu formulaciju množimo sada vremenski ovisnom test funkcijom φ i sve integriramo:

$$\begin{aligned} \int_0^T -(u_n,v)\varphi'(t)\,dt + \int_0^T \int_\Omega \varphi(t)\cdot a(x,t;w_n)\frac{\partial u_n}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dxdt \\ + \int_0^T \int_\Omega \varphi(t) b(x,t;w_n) u_n \cdot v\,dxdt \\ = \int_0^T \langle f,t\rangle\,\varphi(t)\,dt\,\forall v \in V,\ \forall \varphi \in \mathcal{D}(0,T). \end{aligned}$$

Sada je ideja iskoristiti Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji. Za izraze pod integralima vrijedi:

$$\varphi(t)b(x,t;w_n)v \to \varphi(t)b(x,t;w)v$$
$$\varphi(t)a(x,t;w_n)\frac{\partial v}{\partial x_i} \to \varphi(t)a(x,t;w)\frac{\partial v}{\partial x_i}$$

na prostoru $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Sada postoje i limesi nelinearnih članova. Prelaskom na limes dobivamo da vrijedi:

$$\frac{d}{dt}(u_\infty,v) + a_w(u_\infty,v) = \langle f,v\rangle \ \text{ na } \mathcal{D}'(0,T).$$

Sada za gotovo svaki $t \in \langle 0,T\rangle$ i za sve $v \in V$ možemo pisati:

$$(u_n(t),v) - (u_0,v) = \int_0^t \langle u_{n_t}, v\rangle\,dt.$$

Ponovnim prelaskom na limes gornji izraz zapravo postaje:

$$(u_\infty(t), v) - (u_0, v) = \int_0^t \langle u_\infty, v \rangle \, dt = (u_\infty(t), v) - (u_\infty(0), v).$$

Iskoristili smo i činjenicu da iz (3.6) možemo zaključiti da $u_n(t) \to u_\infty(t)$ u $L^2(\Omega)$ za gotovo sve $t \in \langle 0, T \rangle$. Prema tome, $u_\infty(0) = u_0$. Iz svega navedenoga zaključujemo da je $u_\infty = T(w)$. Stoga je u_∞ jedino gomilište niza u_n, pa onda i čitav niz u_n konvergira k u_∞.

3.4 "Blow-up" rješenja

U ranijem razmatranju reakcijsko-difuzijskog sustava opisanog problemom (3.1) pretpostavka na funkciju **f** je bila da je ona Lipschitz neprekidna i to globalno. U realnim modelima funkcija **f** najčešće je polinom u varijabli **u**. U ovom djelu rada pokazujemo da postoje slučajevi u kojima uz određene početne uvjete rješenje neće postojati. Inicijalno - rubni problem koji promatramo je naizgled jednostavan, a nelinearnost je manifestirana pomoću obične kvadratne funkcije:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u^2 \text{ na } U_T \\ \qquad\quad u = 0 \text{ na } \partial u \times \langle 0, T \rangle \\ \qquad\quad u = g \text{ na } U \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{3.11}$$

Pokazat ćemo da ukoliko su $T > 0$ i $g \geq 0$ dovoljno veliki u određenom smislu, tada rješenje problema ne postoji. Nepostojanje rješenja dokazujemo tako da pretpostavimo da rješenje postoji, a onda pomoću određenih nejednakosti svedemo tu tvrdnju na kontradikciju. Analizirajmo prvo problem (3.11). Kada bi zanemarili član Δu tada jednadžba postaje obična diferencijalna jednadžba:

$$u_t = u^2.$$

Jasno je da ako je početni uvjet $u(0) > 0$, tada rješenje jednadžbe sigurno raste neograničeno u beskonačnosti. S druge strane, u jednadžbi je prisutan i član Δu koji u obzir uzima difuzijske efekte, pa ukoliko zanemarimo član u^2, tada se radi o jednadžbi provođenja koja općenito izglađuje nepravilnosti. Možemo reći da se na određeni način članovi u^2 i Δu "natječu" u smislu da su njihovi učinci na konačno rješenje različiti. Cilj analize problema u ovom slučaju je tada dokučiti kako svaki od tih članova utječe na konačno rješenje jednadžbe.

Uvedimo za početak najprije nekoliko oznaka. Neka je λ_1 najmanja svojstvena vrijednost operatora $-\Delta$ na $H_0^1(U)$ i neka je w_1 njezina pripadajuća svojstvena funkcija, odnosno neka je

$$\begin{cases} -\Delta w_1 = \lambda_1 w_1 & \text{na } U, \\ \quad w_1 = 0 & \text{na } \partial U, \end{cases} \tag{3.12}$$

Nadalje, može se dokazati da postoji rješenje $w_1 > 0$ na U te da:

$$\int_U w_1 \, dx = 1.$$

Dokaz tvrdnje dan je u poglavlju 6 u Evansu. Pretpostavimo sada da je u glatko rješenje problema (3.6). Neka je i $g \geq 0$ i $g \not\equiv 0$. Tada je $u > 0$ unutar U_T po jakom principu maksimuma. Uz ove pretpostavke vrijedi teorem:

Teorem 3.4.1 (Blow-up za velike podatke)**.** *Neka vrijedi:*

$$\int_U g w_1 \, dx > \lambda_1.$$

Tada ne postoji glatko rješenje od (3.11) za sva vremena $T > 0$.

Dokaz:
Definiramo funkciju:

$$\eta(t) := \int_U u(x,t) w_1(x) \, dx, \; t \in [0,T],$$

Deriviramo li $\eta(t)$ dobivamo:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \int_U u_t w_1 \, dx = \int_U (\Delta u + u^2) w_1 \, dx \\ &= \int_U u \Delta w_1 + u^2 w_1 \, dx = -\lambda_1 \eta + \int_U u^2 w_1 \, dx. \end{aligned}$$

Nadalje, imamo da vrijedi:

$$\eta = \int_U u w_1^{1/2} w_1^{1/2} \, dx \leq \left(\int_U u^2 w_1 \, dx \right)^{1/2} \left(\int_U w_1 \, dx \right)^{1/2} = \left(\int_U u^2 w_1 \, dx \right)^{1/2}.$$

Iskoristimo li tu nejednakost u izrazu za derivaciju imamo:

$$\dot{\eta} \geq -\lambda_1 \eta + \eta^2,$$

Stavimo li $\xi(t) := e^{\lambda_1 t} \eta(t)$ imamo:

$$\dot{\xi} = e^{\lambda_1 t} \dot{\eta} + \lambda_1 e^{\lambda_1 t} \eta \geq e^{\lambda_1 t} \eta^2 = e^{-\lambda_1 t} \xi^2.$$

Stoga je:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{-1}{\xi}\right) = \frac{\dot{\xi}}{\xi^2} \geq e^{-\lambda_1 t},$$

pa imamo:

$$\frac{-1}{\xi(t)} \geq \frac{-1}{\xi(0)} + \frac{1 - e^{-\lambda_1 t}}{\lambda_1}.$$

Sada sređivanjem izraza dobivamo da je:

$$\xi(t) \geq \frac{\xi(0)\lambda_1}{\lambda_1 - \xi(0)(1 - e^{-\lambda_1 t})}$$

uz uvjet da nazivnik izraza nije nula. No ukoliko sada vrijedi pretpostavka teorema tako da $\eta(0) = \xi(0) > \lambda_1$ tada $\xi(t) \to \infty$ kada $t \to -\frac{1}{\lambda_1}\ln(\frac{\eta(0)-\lambda_1}{\eta(0)})$. $\mathfrak{Q.E.D.}$

Drugim riječima, rješenje koje dobivamo ili nije dovoljno glatko da opravda račun dan ranije u dokazu, ili se za neki $0 < t_* \leq t^*$ dobiva da:

$$\lim_{t \to t_*} \int_U u(x,t) w_1(x)\, dx = \infty$$

Kažemo da rješenje eksplodira u beskonačnosti (odatle i naziv blow-up na engleskom). Problem može nastati i za male inicijalne podatke. Naime, promatramo li zadaću:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = u^p & \text{na } \mathbb{R}^n \times \langle 0, T\rangle \\ u = g & \text{na } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases} \tag{3.13}$$

uz pretpostavku da je g glatka funkcija s kompaktnim nosačem tada vrijedi teorem:

Teorem 3.4.2. *Neka je:*

$$1 < p < \frac{n+2}{n}$$

tada ne postoji nenegativno, integrabilno i glatko rješenje problema (3.13) za sva vremena $T > 0$.

Dokaz ovog teorema može se pronaći u [1].

Zahvale

Na samom kraju rada, htio bih se zahvaliti mnogim kolegama, prijateljima i ostalima zbog kojih je ovo putovanje kroz studij matematike bilo moguće. Ponajprije, hvala mojim roditeljima Nenadu i Mari na neograničenoj podršci za vrijeme studiranja. Zahvaljujem se i baki i djedu na svakom pozivu i pružanju podrške. Mojem bratu Ivici zahvaljujem se na svakoj večeri koju smo proveli žaleći se na to kako je studirati teško. Zahvaljujem se svojem najboljem prijatelju Marku Hodaku za svako bodrenje i svaki motivacijski govor. Hvala i Davidu i Karlu za šaljive videe i slike koje su slali i količini glazbe koju sam preslušao s njima učeći po noći. Hvala Darku i Ivanu na nezaboravnim odmorima kad bih se vratio u Osijek. Hvala Kristijanu i Mariji na svakom savjetu. Osobito hvala svim mojim kolegama i kolegicama, a ponajviše Marinu Gunji, Ani Alagić, Franu Boriću, Marijeti Pleskini, Domagoju Bošnjaku i Iskri Gašparić za svaku večer provedenu na pivu i za svaki ispit za koji smo učili zajedničkim snagama. Hvala Marinu, Vedranu i ponovno Franu što su me ugostili dok sam vodio bitke sa studentskim centrom. Veliko hvala i mojem mentoru prof. Josipu Tambači jer je imao strpljenja za mene. Zahvaljujem se i ostalim profesorima čija sam predavanja slušao. Zahvaljujem se Lovri koji se za mene brinuo kad sam se zarazio COVID-om. Hvala Carlu za rasprave o filozofiji i mehanici fluida do zore. Hvala i Mirjam za najbolju juhu koju sam probao. Zahvaljujem se Rebeki za dugačke šetnje i filozofiranja kasno u noć. Zahvaljujem se Ivanu, Mariji, Jeleni, Nikolini, Doris, Eleonori i Mariju za nezaboravan život u studentskom domu. Na samom kraju zahvaljujem se Google-u, autorima silnih članaka na Wikipediji i Libgenu za znanje koje su mi pružili na dlanu.

Bibliografija

[1] L. C. Evans, *Partial differential equations*, AMS, 1998.

[2] M. Chipot, *Elements of nonlinear analysis*, Springer Science & Business Media, 2000.

Sažetak

U ovom radu obrađen je jedan dio teorije paraboličkih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

U prvom poglavlju opisani su neki rezultati vezani uz jednadžbu provođenja topline koja je školski primjer paraboličke parcijalne diferencijalne jednadžbe. Dokazan je jaki princip maksimuma, jedinstvenost rješenja i jedinstvenost unatrag.

Nakon toga, u drugom poglavlju definiran je opći oblik linearne paraboličke parcijalne diferencijalne jednadžbe. Izvedena je slaba formulacija zadaće i dokazani su teoremi o egzistenciji i jedinstvenosti slabog rješenja.

U trećem poglavlju obrađen je dio teorije vezane uz nelinearne probleme. Najprije je analizirana nelinearna zadaća koja opisuje reakcijsko-difuzijski sustav. Nakon toga je za opći nelinearni problem dokazan rezultat o egzistenciji rješenja. U zadnjem odjeljku još je raspravljena pojava eksplozije (eng. blow-up) rješenja.

Summary

In this paper we discuss some parts of theory of parabolic partial differential equations. In the first chapter we describe some results related to the heat equation which is a classic example of parabolic partial differential equation. We prove the maximum principle, uniqueness of the solution and backwards in time uniqueness.

In the second chapter we define the general form of linear parabolic partial differential equation. After that, we define the weak solution of the problem and we prove its existence and uniqueness.

In the final chapter, we turn to nonlinear problems. First, we analyze a specific nonlinear problem that describes the reaction-diffusion system. After that we prove the existence of weak solutions for general nonlinear problem. In the final section we discuss the blow-up of solutions in some cases.

Životopis

Rođen sam u Münchenu 21.4.1996. 1999. godine doselio sam u Hrvatsku u mjesto Tenja kraj Osijeka. Tamo sam pohađao vrtić i osnovnu školu. 2011. godine upisujem Prirodoslovno-matematičku gimnaziju u Osijeku. U srednjoj školi posebno me uz matematiku zanimala i kemija pa sam tako za vrijeme srednje škole tri puta išao na državno natjecanje iz kemije.

2015. položio sam državnu maturu i upisao matematiku na PMF-u u Zagrebu. 2019. završio sam preddiplomski studij i upisao diplomski studij-smjer primjenjena matematika.