Primjene linearne algebre u dokazivanju nejednakosti

Gornik, Lucija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lucija Gornik

PRIMJENE LINEARNE ALGEBRE U DOKAZIVANJU NEJEDNAKOSTI

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Juraj Šiftar

Zagreb, rujan, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mojoj majci i mojem suprugu.

Sadržaj

Uvod

Linearna algebra je grana matematike koja se bavi proučavanjem vektorskih prostora, sustava linearnih jednadžbi i linearnih operatora. Njezina je primjena jako široka, ne samo u matematici nego i u ostalim znanostima. U ovom ćemo radu pokazati kako se linearna algebra može iskoristiti za dokazivanje raznih nejednakosti, koristeći samo onaj dio linearne algebre koji je sadržan u programu kolegija Linearna algebra 1 i 2 na studiju matematike - nastavnički smjer.

U prvom poglavlju ovog rada dat ćemo kratku rekapitulaciju nekih definicija i svojstava skupova vektora, matrica i sustava linearnih jednadžbi od kojih ćemo većinu koristiti i u samim dokazima nejednakosti. Nadalje, prikazat ćemo općenitiji oblik Binet-Cauchyjevog teorem zajedno sa skicom dokaza na primjeru matrice tipa $(3,4)$.

Na početku drugog poglavlja promatrat ćemo nekvadratnu matricu A kako bi pokazali pozitivnost determinante $\det A^{\tau}A$ u slučaju kad A ima najveći mogući rang. Nakon toga, dat ćemo nekoliko primjera nejednakosti koje se rješavaju primjenom pozitivnosti, odnosno nenegativnosti determinante. Poglavlje ćemo završiti primjerom kojeg ćemo dokazati na dva načina. Prvo, raspisivanjem dane nejednakosti do oblika pogodnog za primjenu pozitivnosti determinante. Drugo, primjenom vektora i skalarnog množenja, kako bi došli do Gramove matrice odnosno determinante.

U trećem poglavlju ključna će nam biti činjenica da homogeni sustav ima netrivijalno rješenje ako i samo ako je determinanta matrice sustava jednaka nuli, čiju ćemo primjenu pokazati na četiri primjera.

Četvrto poglavlje će prikazati primjenu linearne algebre u kombinatorici. Počinjemo od poznate Fisherove nejednakosti, u terminima dizajniranja eksperimenata, koja će dobiti i svoje poopćenje dokazano pomoću incidencijske matrice. Slijedi još jedna nejednakost o kombinatornim strukturama sa zadanim svojstvima, čiji ćemo dokaz, zbog posebnosti uvjeta, provoditi nad poljem $\mathbb{F}_2$. Poglavlje završava metričko-geometrijskim problemom o postojanju konačnog skupa točaka u euklidskoj ravnini koju ćemo promatrati kao unitarni prostor $\mathbb{R}^2$.

U petom ćemo poglavlju izvesti osnovni rezultat iz već dugo aktualne problematike ekviangularnih skupova pravaca. Bit će to gornja međa za broj ekviangularnih pravaca koja vrijedi u bilo kojem konačnodimenzionalnom euklidskom prostoru, a samo u rijetkim slučajevima se i efektivno postiže.

Poglavlje 1

Pregled osnova linearne algebre

1.1 Neke definicije i svojstva

U prvom poglavlju ovoga rada prisjetit ćemo se nekih definicija i svojstava vektora, matrica i sustava linearnih jednadžbi koje ćemo koristiti u dokazima. Uz to, prikazat ćemo i općenitiji oblik Binet-Cauchyjevog teorema.

Napomenimo samo da ćemo pojmove poput vektorskog prostora, skalarnog umnoška, linearne nezavisnosti, dimenzije, matrice kao i osnovna svojstva smatrati poznatima (iz kolegija Linearna algebra 1 i 2) te ih nećemo do u detalje navoditi nego ćemo uvesti oznake koje ćemo koristiti u daljnjem radu:

- $M_{mn}(\mathbb{F})$- skup svih matrica tipa (m, n) nad poljem $\mathbb{F}$
- $M_n(\mathbb{F})$ - skup svih matrica reda n
- A^τ - transponirana matrica matrice A
- $\operatorname{tr} A$ - trag matrice A
- $r(A)$ - rang matrice A
- $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle$ - skalarni produkt vektora $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$.

Također ćemo podrazumijevati da su nam poznati pojam unitarnog prostora i normiranog prostora, kao i činjenica da se na unitarnom prostoru V sa skalarnim produktom $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle$ norma standardno uvodi kao $||\mathbf{a}|| = \sqrt{\langle \mathbf{a} | \mathbf{a} \rangle}$.

U nastavku ćemo definirati, iskazati i dokazati one pojmove i rezultate s kojima smo se manje susretali na samim kolegijima, kao i one koje ćemo konkretno koristiti u nejednakostima.

Definicija 1.1.1. *Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Ako je $I \subset \{1, \ldots, m\}$ i $J \subset \{1, \ldots, n\}$, tada* ***podmatricom*** *matrice A, u oznaci $A[I, J]$, zovemo blok matrice A dobiven odabirom redaka s indeksima iz I i stupaca s indeksima iz J.*

Propozicija 1.1.2. *Neka je $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Tada vrijedi:*

1. $r(A) \leq min(m, n)$,
2. $r(A^\tau) \leq min(m, n)$.

Korolar 1.1.3. *Neka je dana matrica $A \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Vrijedi $r(A) = r(A^\tau)$.*

Propozicija 1.1.4. *Neka su A i B ulančane matrice, $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$. Tada rang njihovog umnoška nije veći od ranga pojednih matrica, odnosno $r(AB) \leq r(A), r(B)$.*

Dokaz. Neka je $C = AB$ i neka je $(S_1, \ldots, S_n)$ stupčana reprezetacija matrice A te $(T_1, \ldots, T_p)$ stupčana reprezentacija matrice C. Tada je linearna ljuska $[T_1, \ldots, T_p]$ potprostor vektorskog prostora $M_{m1}(\mathbb{F})$. Nadalje, potprostor $[T_1, \ldots, T_p]$ je sadržan u u potprostoru $[S_1, \ldots, S_n]$ zato što se svaki od stupaca T_k, $k = 1, \ldots, p$ može prikazati kao linearna kombinacija stupaca $S_1, \ldots, S_n$ matrice A. Stoga je $\dim[T_1, \ldots, T_n] \leq \dim[S_1, \ldots, S_n]$ to jest, $r(AB) \leq r(A)$.

Primijenimo li sada isti dokaz na matricu $B^\tau A^\tau$ dobivamo $r(B^\tau A^\tau) \leq r(B^\tau)$ iz čega slijedi $r((AB)^\tau) = r(B^\tau A^\tau) \leq r(B^\tau)$. Na kraju, koristeći prethodni korolar, dobivamo $r(AB) \leq r(B)$. □

Teorem 1.1.5. *Matrica reda n je regularna ako i samo ako je ranga n.*

Definicija 1.1.6. *Neka su $m, n \in \mathbb{N}$. Sustav od m linearnih jednadžbi s n nepoznanica nad poljem $\mathbb{F}$ je sustav čiji je matrični prikaz jednak $AX = B$, to jest*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

pri čemu je A matrica tipa (m, n) čiji su elementi koeficijenti sustava, X matrica tipa $(n, 1)$ s nepoznanicama i B matrica tipa $(m, 1)$ sa slobodnim koeficijentima.

Definicija 1.1.7. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$.* ***Determinanta*** *matrice A je skalar iz polja $\mathbb{F}$ koji se definira kao:*

$$det\ A = \sum_{p \in S_n} (sign\ p) a_{1_{p(1)}} a_{2_{p(2)}} \cdots a_{n_{p(n)}},$$

gdje je S_n grupa permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, a $sign\ p \in \{-1, 1\}$ predznak permutacije.

Predznak permutacije p definira se kao

$$p = (-1)^{I(p)},$$

gdje je $I(p)$ broj inverzija permutacija p. Inverzija permutacije p je svaki par (i, j) takav da je $1 \leq i < j \leq n$ i $p(i) > p(j)$.

Propozicija 1.1.8. *Ako su elementi j-tog stupca (retka) matrice $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{F})$ prikazani kao zbroj po dva pribrojnika, onda je determinanta det A jednaka zbroju dviju determinanti koje se podudaraju s det A u svim stupcima (redcima) osim j-tog.*

Propozicija 1.1.9. *Transponiranjem matrice se ne mijenja determinanta, to jest*

$$\det A = \det A^{\tau}.$$

Propozicija 1.1.10. *Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$. Ako je B dobivena iz A:*

1. *međusbnom zamjenom dva retka (stupca), onda $\det B = -\det A$,*
2. *množenjem skalarom $\lambda \neq 0$ nekog retka (stupca), onda $\det B = \lambda(\det A)$,*
3. *pribrajanjem nekog retka (stupca) pomnoženog s λ nekom drugom retku (stupcu), onda $\det B = \det A$.*

Korolar 1.1.11. *Ako matrica A ima neki stupac u kojem su svi elementi jednaki nuli, onda je $\det A = 0$.*

Korolar 1.1.12. *Ako su u matrici A dva retka (stupca) jednaka, onda $\det A = 0$.*

Teorem 1.1.13. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. *A je regularna,*
2. *$r(A) = n$,*
3. *$\det A \neq 0$.*

Napomena 1.1.14. *Iz $\det A \neq 0$ zaključujemo da je $r(A) = n$. No, ako je $\det A = 0$, onda ne znamo točnu vrijednost ranga matrice nego samo da je $r(A) < n$.*

Definicija 1.1.15. *Neka je $A = [a_{ij}] \in M_{mn}(\mathbb{F})$.* ***Minora*** *matrice A reda k je determinanta bilo koje kvadratne $k \times k$ podmatrice od A.*

Definicija 1.1.16. *Sustav $AX = B$ je* ***Cramerov sustav*** *ako je A kvadratna matrica punog ranga, odnosno $\det A \neq 0$.*

Cramerov sustav ima jedinstveno rješenje $X = A^{-1}B$.

Teorem 1.1.17. *(Cauchy-Schwarzova nejednakost) Neka je V unitarni prostor. Za sve* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in V$ *vrijedi* $|\langle \boldsymbol{a}|\boldsymbol{b}\rangle|^2 \leq \langle \boldsymbol{a}|\boldsymbol{a}\rangle\langle \boldsymbol{b}|\boldsymbol{b}\rangle$. *Jednakost se postiže ako i samo ako je* $\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\}$ *linearno zavisan skup.*

Definicija 1.1.18. *Matrica* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *je* ***pozitivno definitna*** *ako za svaki ne-nul vektor* $\mathbf{x}$ *vrijedi da je* $\mathbf{x}^\tau A\mathbf{x} > 0$. *Ukoliko je* $\mathbf{x}^\tau A\mathbf{x} \geq 0$, *tada za matricu A kažemo da je* ***pozitivno semidefinitna***.

Lema 1.1.19. *Ako je matrica* $A \in M_n(\mathbb{F})$ *pozitivno definitna, onda je i regularna.*

Dokaz. Pretpostavimo da je A pozitivno definitna i singularna. Tada postoji ne-nul vektor $\mathbf{x}$ takav da je $A\mathbf{x} = 0$. Množenjem slijeva s $\mathbf{x}^\tau$ dobivamo da je $\mathbf{x}^\tau A\mathbf{x} = 0$, što je u kontradikciji jer je A pozitivno definitna matrica. □

Definicija 1.1.20. *Neka je V unitarni prostor i* $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \subset V$. *Matrica reda k dana s*

$$G(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \begin{pmatrix} \langle x_1|x_1\rangle & \langle x_1|x_2\rangle & \ldots & \langle x_1|x_k\rangle \\ \langle x_2|x_1\rangle & \langle x_2|x_2\rangle & \ldots & \langle x_2|x_k\rangle \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \langle x_k|x_1\rangle & \langle x_k|x_2\rangle & \ldots & \langle x_k|x_k\rangle \end{pmatrix}$$

zove se ***Gramova matrica****. Njezina determinanta naziva se* ***Gramova determinanta*** *i označava s* $\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_k)$. *Dakle,*

$$\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_k) = det\, G(x_1, x_2, \ldots, x_k).$$

Propozicija 1.1.21. *Neka je V unitarni prostor i* $S = \{x_1, x_2, \ldots x_k\} \subset V$. *Skup S je linearno nezavisan ako i samo ako je* $\Gamma(x_1, x_2, \ldots, x_k) \neq 0$.

Napomena 1.1.22. *Iz Teorema 1.1.17 slijedi istinitost Propozicije 1.1.21 u slučaju* $k = 2$ *i to s preciznijom tvrdnjom da je Gramova determinanta linearno nezavisnog skupa vektora strogo pozitivna. Zapravo vrijedi općenita tvrdnja da je Gramova determinanta k-članog linearno nezavisnog skupa vektora strogo pozitivna. Ta važna nejednakost bit će predmet razmatranja i primjene u 2. poglavlju.*

Teorem 1.1.23. *Neka je V unitarni prostor, te* $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *linearno nezavisan podskup od V. Tada postoji ortonormirani podskup* $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ *u V takav da je*

$$[a_1, \ldots, a_j] = [e_1, \ldots, e_j],$$

za sve $j = 1, \ldots, k$.

U svakom konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru postoji ortonormirana baza.

Dokaz ovog teorema provodi se primjenom Gram-Schmidtovog postupka ortogonalizacije.

Definicija 1.1.24. *Neka je A kvadratna matrica reda n.* ***svojstveni ili karakteristični polinom*** *matrice A, u oznaci k_A, definiramo kao*

$$k_A(\lambda) = det\,(A - \lambda I),$$

gdje je I jedinična kvadratna matrica reda n.

1.2 Binet-Cauchyev teorem

Jedan od važnih rezultata o determinanti matrice, Binet-Cauchyev teorem, upoznali smo na kolegiju Linearna algebra 1 u sljedećem obliku:

Teorem 1.2.1. *Neka su A i B kvadratne matrice jednakog reda. Tada je*

$$det\,AB = det\,A\;det\,B.$$

U daljnjem izlaganju prikazat ćemo općenitiji oblik teorema, u kojem su matrice tipa (m, n), pri čemu m i n mogu biti različiti.

Teorem 1.2.2. *Neka su $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ matrice tipa (m, n). Označimo $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{jk}$ te definiramo kvadratnu matricu C reda m sa $C = [c_{ij}]$, za $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Nadalje, neka je M uređen m-člani podskup skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, pri čemu je $m \leq n$. Označimo s $A[M]$ odnosno $B[M]$ minore m-tog reda matrice A, odnosno B, određene stupcima koji odgovaraju elementima skupa M. Tada vrijedi:*

$$det\,C = \sum_{M} A[M]B[M],$$

pri čemu se sumira po svim uređenim m-članim podskupovima $M \subset \{1, 2, \ldots, n\}$.

Uočimo da za kvadratne matrice A i B reda n postoji samo po jedna minora reda n i to je upravo $\det A$, odnosno $\det B$. Tada je $\det C = \det A \det B$, a matrica C definirana je tako da je u ovom slučaju $C = AB^\tau$. Dakle, $\det C = \det A \det B^\tau = \det A \det B$, što je tvrdnja Binet-Cauchyjevog teorema.

Ideju dokaza ovog teorema ilustrirati ćemo raspisom za matrice tipa $(3, 4)$.

Skica dokaza. Neka su

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \end{pmatrix}.$$

Tada je determinanta matrice C jednaka

$$\det C = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{13}b_{13} + a_{14}b_{14} & \dots & a_{11}b_{31} + a_{12}b_{32} + a_{13}b_{33} + a_{14}b_{34} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{12} + a_{23}b_{13} + a_{24}b_{14} & \dots & a_{21}b_{31} + a_{22}b_{32} + a_{23}b_{33} + a_{24}b_{34} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{12} + a_{33}b_{13} + a_{34}b_{14} & \dots & a_{31}b_{31} + a_{32}b_{32} + a_{33}b_{33} + a_{34}b_{34} \end{vmatrix}.$$

Determinantu $\det C$ rastavimo po stupcima u sumu determinanti, po Propoziciji 1.1.8. Proširimo li ovo svojstvo na slučaj kada su elementi nekog stupca prikazani kao zbroj od po n pribrojnika dobit ćemo da se determinanta rastavlja u zbroj n determinanti. Nadalje, ako su elementi svakog stupca prikazan kao zbroj od po n pribrojnika, postupnim rastavom po svim stupcima determinanta će biti prikazana kao zbroj n^m determinanti budući da stupaca ima n.

Dakle, rastavom determinante $\det C$, po svim stupcima dobiti ćemo sumu $4^3 = 64$ determinanti s općim elementima oblika $a_{ik}b_{jk}$, pri čemu u j-tom stupcu faktor b_{jk} je konstantan te se može izlučiti iz pojedine dotične determinante. U pojedinoj determinanti ostaju samo elementi oblika a_{ij}, a izlučen je umnožak od n elemenata oblika b_{jk}. Stoga

$$\det C = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{21} & a_{11}b_{31} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{21} & a_{21}b_{31} \\ a_{31}b_{11} & a_{31}b_{21} & a_{31}b_{31} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} & a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} & a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} & a_{32}b_{22} & a_{33}b_{33} \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_{14}b_{14} & a_{14}b_{24} & a_{14}b_{34} \\ a_{24}b_{14} & a_{24}b_{24} & a_{24}b_{34} \\ a_{34}b_{14} & a_{34}b_{24} & a_{34}b_{344} \end{vmatrix}$$

$$= b_{11}b_{21}b_{31} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} & a_{21} \\ a_{31} & a_{31} & a_{31} \end{vmatrix} + b_{11}b_{22}b_{33} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \cdots + b_{14}b_{24}b_{34} \begin{vmatrix} a_{14} & a_{14} & a_{14} \\ a_{24} & a_{24} & a_{24} \\ a_{34} & a_{34} & a_{34} \end{vmatrix}.$$

Pritom neke od determinanti imaju jednakih stupaca pa im je vrijednost 0. Dalje je potrebno uzeti samo takve izbore indeksa k među kojima nema jednakih za pojedinu determinantu pa se zapravo izdvajaju oni pribrojnici kojima su vrijednosti indeksa permutacije od po m različitih elemenata skupa $\{1, 2, \dots, n\}$. Na taj način dobiva se suma umnožaka minora reda m od $\det A$ i $\det B$ koje odgovaraju pojedinim permutacijama.

Primijenimo sada Teorem 1.2.2 na matricu A tipa (m, n) i matricu $B = A$ pa ćemo dobiti umnoške jednakih minora to jest kvadrate minora reda m. Determinanta matrice C bit će stoga nenegativan broj, a strogo pozitivan ako i samo ako postoji minora reda $m \neq 0$, što je ekvivalentno tome da je $r(A) = m$. Uočimo da su u tom slučaju umnošci odgovarajućih minora jednaki umnošcima koji se dobivaju množenjem matrica A i A^τ, budući da se transponiranjem ne mijenja determinanta.

Odatle možemo izvesti:

Korolar 1.2.3. *Neka je A realna matrica tipa (m, n) pri čemu je $m \leq n$. Tada vrijedi $\det AA^\tau \geq 0$. Nejednakost je stroga ako i samo ako je $r(A) = m$.*

Uočimo još da za matricu A tipa (n, m), pri čemu je $m \leq n$, vrijedi $\det A^{\tau} A \geq 0$, uz strogu nejednakost ako i samo ako je $r(A) = m$.

Tvrdnja Korolara 1.2.3 i njezine primjene bit će glavna tema idućeg poglavlja. Pozitivnost $\det A^{\tau} A$ bit će tamo dokazana na drugačiji način, koji je za našu svrhu i prirodniji, a to je povezivanje s Gramovom determinantom, dakle u okviru unitarnog prostora. Također, budući da je matrica $A^{\tau} A$ simetrična i pozitivno (semi)definitna, može se dijagonalizirati nad poljem $\mathbb{R}$. Njezine svojstvene vrijednosti su nenegativni realni brojevi čijim se umnoškom dobiva vrijednost determinante, dakle pozitivan realan broj čim je matrica regularna.

Sadržaj prethodnog Korolara ne ovisi o strukturi unitarnog prostora, odnosno skalarnom produktu, a može se dokazati i na još neke načine osim pomoću poopćenog Binet-Cauchyjevog teorema. U jednom pristupu, koji bi zahtijevao detaljnu teorijsku razradu, promatra se svojstveni (karakteristični) polinom umnoška MN matrice M tipa (k, n) i matrice N tipa (n, k). Poznato je da su koeficijenti svojstvenog polinoma $p_C(t)$ kvadratne matrice C reda k jednaki sumama glavnih minora, tako da je $\det A$ jednaka slobodnom članu, a koeficijent uz t^{k-1} jednak je $(-1)^{k-1}\mathrm{tr}\, C$. Glavna minora reda m, $1 \leq m \leq k$, određena je s prvih m redaka i m stupaca matrice C. Za $C = MN$ koeficijenti svojstvenog polinoma mogu se izraziti u obliku kojim se poopćava tvrdnja Teorema 1.2.2 uz nužne preinake. Odatle se može izvesti pozitivnost $\det A^{\tau} A$ za matricu A tipa (n, k) i ranga k.

Poglavlje 2

Pozitivnost determinante $A^\tau A$

2.1 Pozitivnost determinante $A^\tau A$

Teorem 2.1.1. *Neka je A matrica tipa $n \times k$, za $k \leq n$. Tada je*

$$det\, A^\tau A \geq 0.$$

Dokaz. Neka je $\mathbb{R}^n$ unitaran prostor sa standardnim skalarnim množenjem. U slučaju da je A kvadratna, to jest $k = n$, tvrdnja slijedi izravno pomoću Binet-Cauchyjevog Teorema 1.2.1 jer $\det A^\tau A = (\det A)^2 \geq 0$.

Pretpostavimo da je $k < n$. Pokazat ćemo da je $\det A^\tau A > 0$ ako je rang $r(A) = k$. Znamo da za $r(A) < k$ vrijedi $r(A^\tau A) \leq r(A) < k$ pa je tada $\det A^\tau A = 0$.

Stupce matrice $A = [a_{ij}] \in M_{nk}(\mathbb{R})$ promatrajmo kao stupčane zapise vektora $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^n$, u standardnoj bazi $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $\mathbf{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$. Dakle, $\mathbf{a}_1$ ima zapis $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$, a transponiranjem imamo vektor redak $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \end{bmatrix}$ i tako za sve $\mathbf{a}_i, i = 1, \ldots, k$. Važno je uočiti da je skalarni produkt (u ortonormiranoj bazi) vektora $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ jednak sumi $\sum_{i=1}^n x_i y_i$, koja se može izraziti i kao umnožak retčane matrice $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{bmatrix}$ i stupčane matrice $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$. Stoga, ako s $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ označimo stupčane zapise tih vektora, onda je njihov skalarni produkt jednak $\langle \mathbf{x} | \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^\tau \mathbf{y}$. Primijenimo li prethodno na skalarne umnoške vektora $\mathbf{a}_i$ i $\mathbf{a}_j$, za sve $i, j = 1, 2, \ldots k$, dobivamo da je matrica $A^\tau A$, matrica reda k kojoj je opći element skalarni umnožak $\langle \mathbf{a}_i | \mathbf{a}_j \rangle$. To je upravo Gramova matrica $\mathbf{G}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ skupa $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\}$.

Dokažimo sada da je $\det A^\tau A > 0$, ako je skup $\{\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k\}$ linearno nezavisan, to jest ako je $r(A) = k$. Umjesto $A^\tau A$ možemo promatrati $\mathbf{G}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$, naime to je ista matrica, samo ćemo kod izražavanja skalarnih umnožaka koristiti činjenicu da vrijednost tog produkta ne ovisi o izboru baze. Želimo pronaći kvadratnu matricu B, reda k, takvu da je $\det B^\tau B = \det A^\tau A$, gdje je A polazna, nekvadratna matrica. Po Teoremu 1.1.23 znamo da se može konstruirati ortonormirana baza unitarnog prostora, tako da prvih k vektora te baze čine bazu zadanog potprostora dimenzije k. Ovdje to primijenimo na potprostor $[a_1, a_2, \ldots, a_k]$. U takvoj bazi koordinate svih vektora a_i, poslije k-te koordinate, jednake su 0. Neka su $(b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{kj})$ prikazi vektora a_j u toj novoj bazi. Skalarni produkt $\langle \mathbf{a}_i | \mathbf{a}_j \rangle = \sum_{t=1}^{k} b_{ti} b_{tj}$, zato što je to opet ortonormirana baza.

Sada je $\mathbf{G}(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k) = B^\tau B$, pri čemu je matrica B kvadratna reda k i to:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \ldots & b_{kk} \end{pmatrix}.$$

Dakle, vrijednost Gramove determinante nije se promijenila, samo se promijenio način njezinog računanja i time smo zamijenili $\det A^\tau A$ s $\det B^\tau B$. Dobili smo da je $\det A^\tau A = \det B^\tau B = \det B \cdot \det B = (\det B)^2 > 0$, jer je $r(B) = k$. Time je teorem dokazan. □

Naglašavamo još jedanput da se može govoriti o pozitivnosti, preciznije nenegativnosti determinante matrice $A^\tau A$ kao i matrice AA^τ, no ako A nije kvadratna onda nam je od interesa onaj umnožak koji predstavlja kvadratnu matricu nižeg reda, budući da je determinanta drugog umnoška svakako jednaka 0.

Kad god je riječ o matricama tipa $(n, 2)$ odnosno $(2, n)$, uz $n \geq 2$, od interesa je umnožak koji je matrica reda 2, a nenegativnost njegove determinante zapravo je Cauchy-Schwarzova nejednakost. To će u primjenama doći više puta do izražaja, a ideja dokaza bit će u izboru dva vektora za koje će $A^\tau A$ ili AA^τ biti Gramova matrica uz standardni skalarni produkt. Primjerice, pogledajmo matricu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Vrijedi nenegativnost determinante $\det A^\tau A$ jer

$$\det A^\tau A = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 8 \\ 3 & 8 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

No, vrijedi i $\det AA^\tau \geq 0$ jer

$$\det AA^\tau = \left| \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 14 \end{vmatrix} = 21.$$

Ortonormirana baza potprostora $\mathbb{R}^3$ razapetog vektorima $(0, 2, 1)$ i $(1, 2, 3)$ je $\{\frac{1}{\sqrt{5}}(0, 2, 1), \frac{1}{\sqrt{105}}(5, -4, 8)\}$. Kada se vektori (redci) iz matrice prikažu u toj ortonormiranoj bazi, dobivamo $(\sqrt{5}, 0, 0)$ i $(\frac{7}{\sqrt{5}}, \frac{\sqrt{105}}{5}, 0)$. Uočimo da su treće koordinate 0, što smo i htjeli, a za ove vektore Gramova determinanta je

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 14 \end{vmatrix} = 21 = \det AA^\tau.$$

U nastavku ćemo pokazati i dokazati nekoliko nejednakosti u kojima se izravno primjenjuje pozitivnost determinante $A^\tau A$.

2.2 Primjeri

Primjer 2.2.1. *Neka su a, b, c i d realni brojevi takvi da $ad - bc = 1$. Dokažite da vrijedi*

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ac + bd \geq \sqrt{3}.$$

Dokaz. Definiramo kvadratnu matricu A kao

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

Tada je $\det A = \det A^\tau = 1$. Isto tako, po Binet-Cauchyjevom teoremu za kvadratne matrice slijedi

$$\det A^\tau A = \begin{vmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{vmatrix} = 1.$$

Dakle,

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = 1 + (ac + bd)^2.$$

Budući da su obje strane jednakosti nenegativne, ekvivalentno je promatrati sljedeću jednakost

$$\sqrt{(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)} = \sqrt{1 + (ac + bd)^2}.$$

Neka je $x = ac + bd$. Tada, primjenom aritmetičko-geometrijske nejednakosti (AG nejednakosti) vrijedi

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 + d^2 &\geq 2\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \\ &= 2\sqrt{1 + (ac+bd)^2} \\ &= 2\sqrt{1+x^2}. \end{aligned}$$

Dovoljno je pokazati da je

$$2\sqrt{1+x^2} + x \geq \sqrt{3}.$$

Za $x > \sqrt{3}$ nejednakost očito vrijedi. Inače, ako je $x \leq \sqrt{3}$, onda tražena nejednakost postaje

$$\begin{gathered} 2\sqrt{1+x^2} \geq \sqrt{3} - x \;/^2 \\ 3x^2 + 2x\sqrt{3} + 1 \geq 0 \\ (x\sqrt{3}+1)^2 \geq 0, \end{gathered}$$

što je očito istinito. □

Napominjemo da se ovaj primjer može riješiti i na druge načine, bez determinanti. Može se primijeniti poznati Lagrangeov identitet $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ad-bc)^2 + (ac+bd)^2$ pa samo uvrstimo $ad - bc = 1$.

Nadalje, u rješenju ovdje nije korištena pozitivnost $\det A^\tau A$ nego samo $(\det A^\tau A)^2 = (\det A)^2$, ali pisanjem determinante ističe se geometrijska interpretacija, jer vrijednost $|ad - bc|$ izražava površinu paralelograma određenog vektorima (a, b) i (c, d). Stoga nejednakost u primjeru možemo shvatiti kao nejednakost koja se odnosi na paralelogram površine 1.

Primjer 2.2.2. *Neka su a, b i c pozitivni brojevi, takvi da vrijedi $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Pokažite da vrijedi sljedeća nejednakost:*

$$(a+c)(1+b) \leq 4.$$

Dokaz. Definiramo matricu A kao

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & b \\ b & c \\ c & 1 \end{pmatrix}.$$

Tada je

$$A^\tau A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ a & b & c & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & b \\ b & c \\ c & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + a^2 + b^2 + c^2 & a + ab + bc + c \\ a + ab + bc + c & a^2 + b^2 + c^2 + 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & (a+c)(1+b) \\ (a+c)(1+b) & 4 \end{pmatrix}.$$

Odavde dobivamo $\det A^\tau A = 16-[(a+c)(1+b)]^2$. Po Teoremu 2.1.1 vrijedi da je $\det A^\tau A \geq 0$, iz čega slijedi $[(a+c)(1+b)]^2 \geq 16$, odnosno $(a+c)(1+b) \leq 4$. □

Primjer 2.2.3. *Neka su x, y, z, t pozitivni brojevi takvi da vrijedi $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$. Dokažite da vrijedi sljedeća nejednakost:*

$$(x+z)(y+t) \leq 1.$$

Dokaz. Dokaz ovog primjera analogan je dokazu prethodnog primjera, samo što sada matricu A definiramo kao:

$$A = \begin{pmatrix} x & t \\ y & z \\ z & y \\ t & x \end{pmatrix}.$$

Dobivamo da je matrica $A^\tau A$ jednaka

$$\begin{pmatrix} 1 & (x+z)(y+t) \\ (x+z)(y+t) & 1 \end{pmatrix},$$

čija je determinanta $\det A^\tau A = 1 - [(x+z)(y+t)]^2$. Sada primjenom Teorema 2.1.1 slijedi tražena nejednakost, to jest $(x+z)(y+t) \leq 1$. □

Primjer 2.2.4. *Dokažite da za dva pozitivna, realna broja vrijedi*

$$a^2 + b^2 + 1 \geq a + ab + b.$$

Dokaz. Neka su a i b dva pozitivna realna broja. Definiramo matricu A kao

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & b \\ b & 1 \end{pmatrix}.$$

Nadalje,

$$A^\tau A = \begin{pmatrix} 1 + a^2 + b^2 & a + ab + b \\ a + ab + b & a^2 + b^2 + 1 \end{pmatrix},$$

a $\det A^\tau A = (1 + a^2 + b^2)^2 - (a + ab + b)^2$. Po Teorema 2.1.1 znamo da je $\det A^\tau A \geq 0$, pa slijedi tražena nejednakost. □

Primjer 2.2.5. *Dokažite da za tri realna broja a, b i c, takva da je $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, vrijedi sljedeća nejednakost:*

$$a + ac + b \leq 2.$$

Dokaz. Definiramo matricu A kao

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \\ c & a \end{pmatrix},$$

gdje su a, b i c realni brojevi. Odredimo matricu $A^\tau A$:

$$A^\tau A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 1 \\ c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 + c^2 & a + ac + b \\ a + ac + b & 2 + a^2 \end{pmatrix}.$$

Prema Teoremu 2.1.1 znamo da je $\det A^\tau A \geq 0$. Ali $\det A^\tau A = (a^2 + b^2 + c^2)(2 + a^2) - (a + ac + b)^2 \geq 0$, odnosno $2 + a^2 = (a + ac + b)^2$. S obzirom da je $a^2 \leq a^2 + b^2 + c^2 = 1$, zaključujemo da je $3 \geq 2 + a^2 \geq (a + ac + b)^2$, to jest $a + ac + b \leq \sqrt{3}$, što je jača nejednakost od tražene. □

Primjer 2.2.6. *Neka su a, b, i c nenegativni. Dokažite nejednakost*

$$2(a + b + c)(a + 2b + 3c) \geq (\sqrt{b(a + b)} + 2\sqrt{c(b + c)} + \sqrt{a(c + a)})^2.$$

Dokaz. Definiramo matricu

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{a + b} & \sqrt{b + c} & \sqrt{a} & \sqrt{c} \\ \sqrt{b} & \sqrt{c} & \sqrt{a + c} & \sqrt{b + c} \end{pmatrix}.$$

Produkt

$$AA^\tau = \begin{pmatrix} a + b + b + c + a + c & \sqrt{a(a + b)} + 2\sqrt{c(b + c)} + \sqrt{a(a + c)} \\ \sqrt{a(a + b)} + 2\sqrt{c(b + c)} + \sqrt{a(a + c)} & a + b + b + c + a + c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2a + 2b + 2c & \sqrt{a(a + b)} + 2\sqrt{c(b + c)} + \sqrt{a(a + c)} \\ \sqrt{a(a + b)} + 2\sqrt{c(b + c)} + \sqrt{a(a + c)} & a + 2b + 3c \end{pmatrix}$$

je kvadratna matrica reda 2, čija je determinanta $\det AA^\tau = (2a + 2b + 2c)(a + 2b + 3c) - (\sqrt{a(a + b)} + 2\sqrt{c(b + c)} + \sqrt{a(a + c)})^2$. Izlučimo li 2 iz prve zagrade i primijenimo li pozitivnost determinante $\det AA^\tau$, dobivamo traženu nejednakost. □

Primjer 2.2.7. *Neka je $a_i > 0$, $i = \{1, \ldots, n\}$. Neka su $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i = \{1, \ldots, n\}$, $n \geq 2$, takvi da je*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0 \qquad i \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1.$$

Tada vrijedi sljedeća nejednakost

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{a_i} \right) \left(\sum_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j (x_i y_j - x_j y_i)^2 \right) \geq \sum_{i=1}^{n} a_i y_i^2.$$

Dokaz. Ovaj primjer riješit ćemo na dva načina. Najprije ćemo transformirati danu nejednakost na sljedeći način. Drugu sumu u nejednakosti razvit ćemo tako da prvo kvadriramo izraz u zagradi te nakon toga razdvojimo sume:

$$\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j (x_i y_j - x_j y_i)^2 = \sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j x_i^2 y_j^2 - 2\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j x_i y_j x_j y_i + \sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j x_j^2 y_i^2$$

Zatim, zbroj prve i treće sume desne strane gornje jednakosti možemo zapisati kao

$$\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j x_i^2 y_j^2 + \sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j x_j^2 y_i^2 = \sum_{1\le i\ne j\le n} a_i a_j x_i^2 y_j^2.$$

Isto tako,

$$2\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j x_i y_j x_j y_i = \sum_{1\le i\ne j\le n} a_i a_j x_i y_j x_j y_i.$$

Sada je

$$\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j (x_i y_j - x_j y_i)^2 = \sum_{1\le i\ne j\le n} a_i a_j x_i^2 y_j^2 + \sum_{1\le i\ne j\le n} a_i a_j x_i y_j x_j y_i.$$

Za $i = j$ sume bi se poništile, to jest imali bismo $\sum_{i=1}^n a_i^2 x_i^2 y_j^2 - \sum_{i=1}^n a_i^2 x_i^2 y_i^2 = 0$.

Stoga, možemo uključiti slučaj kada je $i = j$ u početnu sumu kvadrata koja je na kraju jednaka:

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le n} a_i a_j (x_i y_j - x_j y_i)^2 &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j x_i^2 y_j^2 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j x_i y_j x_j y_i \\ &= \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 \sum_{i=1}^n a_i y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i y_i\right)^2.\end{aligned}$$

Uvrstimo dobiveno u početnu nejednakost

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^2 \sum_{i=1}^n a_i y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i y_i\right)^2\right) \ge \sum_{i=1}^n a_i y_i^2$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n a_i y_i^2\right) - \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i y_i\right)^2 \ge \sum_{i=1}^n a_i y_i^2,$$

te na taj način dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n a_i y_i^2\right) \ge \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i y_i\right)^2 + \sum_{i=1}^n a_i y_i^2,$$

koja je pogodna za primjenu Teorema 2.1.1.

Stoga, promotrimo matricu $B = [b]_{ij}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq 3$, gdje je $b_{i1} = \frac{x_i}{\sqrt{a_i}}$, $b_{i2} = x_i\sqrt{a_i}$, $b_{i3} = y_i\sqrt{a_i}$. Tada je, primjenjujući dane uvjete umnožak B^τ i B jednak:

$$B^\tau B = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i} & 1 & 0 \\ 1 & \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 & \sum_{i=1}^n a_i x_i y_i \\ 0 & \sum_{i=1}^n a_i x_i y_i & \sum_{i=1}^n a_i y_i^2 \end{pmatrix}.$$

Dobivamo da je determinata

$$\det B^\tau B = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i} \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 \sum_{i=1}^n a_i y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i y_i\right)^2 \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i} - \sum_{i=1}^n a_i y_i^2.$$

Po Teoremu 2.1.1 znamo da je $\det B^\tau B \geq 0$, iz čega slijedi

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n a_i y_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i y_i\right)^2 + \sum_{i=1}^n a_i y_i^2.$$

Jednakost vrijedi za $n = 2$. Doista, budući da je $r(B) = r(B^\tau) \leq 2$ tada je, po Propoziciji 1.1.4, $r(B^\tau B) \leq 2$. Stoga je $\det B^\tau B = 0$.

Drugi način na koji možemo riješiti ovaj primjer jest primjenom vektora i skalarnog množenja. Naime, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ su ortogonalni vektori jer $\langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = 0$, a $\mathbf{x}$ jedinični vektor jer $||\mathbf{x}|| = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1$. Množenjem koordinata vektora $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$ redom s $\sqrt{a_i}$, odnosno $\sqrt{\frac{1}{a_i}}$ dobivamo vektore $\mathbf{v} = (\sqrt{a_1}x_1, \sqrt{a_2}x_2, \dots \sqrt{a_n}x_n)$, $\mathbf{w} = (\sqrt{\frac{1}{a_1}}x_1, \sqrt{\frac{1}{a_2}}x_2, \dots \sqrt{\frac{1}{a_n}}x_n)$ i $\mathbf{z} = (\sqrt{a_1}y_1, \sqrt{a_2}y_2, \dots \sqrt{a_n}y_n)$, čiji su međusobni skalarni umnošci elementi Gramove matrice $G(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{z})$.

Primijetmo da je $\langle \mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = ||\mathbf{x}||^2 = 1$ te $\langle \mathbf{w}|\mathbf{z}\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = \langle \mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = 0$.

Sada je

$$G(\mathbf{w}, \mathbf{v}, \mathbf{z}) = \begin{pmatrix} ||\mathbf{w}||^2 & 1 & 0 \\ 1 & ||\mathbf{v}||^2 & \langle \mathbf{v}|\mathbf{z}\rangle \\ 0 & \langle \mathbf{v}|\mathbf{z}\rangle & ||\mathbf{z}||^2 \end{pmatrix}.$$

Nenegativnost determinante daje $||\mathbf{w}||^2||\mathbf{v}||^2||\mathbf{z}||^2 \geq (\langle \mathbf{v}|\mathbf{z}\rangle)^2||\mathbf{w}||^2 + ||\mathbf{z}||^2$.

Matrica je ranga 3, osim kada su svi a_i međusobno jednaki pa su vektori $\mathbf{v}$ i $\mathbf{w}$ kolinearni. Kada je ranga 3, nejednakost je stroga. □

Poglavlje 3

Primjena sustava linearnih jednadžbi

3.1 Primjena sustava linearnih jednadžbi

U ovom poglavlju koristit ćemo činjenicu da homogeni Cramerov sustav $AX = 0$ ima samo trivijalno rješenje. Drugačije, da homogeni sustav $AX = 0$ s kvadratnom matricom A ima netrivijalno rješenje ako i samo ako je $\det A = 0$.

Primjer 3.1.1. *Neka su a, b i c u parovima različiti realni brojevi. Tada vrijedi*

$$\left(\frac{a}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c-a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a-b}\right)^2 \geq 2$$

Dokaz. Neka su

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{b-c} \Rightarrow a = xb - xc \Rightarrow a - xb + xc = 0 \\ y &= \frac{b}{c-a} \Rightarrow b = yc - ya \Rightarrow ya + b - yc = 0 \\ z &= \frac{c}{a-b} \Rightarrow c = za - zb \Rightarrow za - zb - c = 0. \end{aligned}$$

Time smo dobili sustav tri jednadžbe s tri nepoznanice. Zapišemo li dobiveni sustav u matrični zapis dobivamo:

$$\begin{pmatrix} 1 & -x & x \\ y & 1 & -y \\ z & -z & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

to jest $AX = 0$, gdje je A matrica čiji su elementi koeficijenti sustava, a X stupčana matrica s nepoznanicama. Ako je matrica A invertibilna jedino rješenje koje sustav može imati je trivijalno $a = b = c = 0$, ali, po uvjetu, sustav ima netrivijalno rješenje, što implicira da je determinanta matrice A jednaka nuli.

Stoga, $\det A = -1 - xz - yz - xy = 0$, odnosno $xy + yz + zx = -1$. Uvrstimo li x, y i z u transformiranu početnu nejedakost dobivamo

$$\left(\frac{a}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c-a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a-b}\right)^2 - 2 \geq 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2 \geq 0$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \geq 0$$

$$(x + y + z)^2 \geq 0,$$

što vrijedi za svaki $x, y, z \in \mathbb{R}$ □

Primjer 3.1.2. *Neka su a, b i c u parovima različiti realni brojevi i neka je $k \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi*

$$\left(\frac{a}{a-b} + k\right)^2 + \left(\frac{b}{b-c} + k\right)^2 + \left(\frac{c}{c-a} + k\right)^2 \geq 2k^2 + 2k + 1$$

Dokaz ovog primjer biti će sličan dokazu prethodnog primjera.

Dokaz. Promotrimo matricu

$$A = \begin{pmatrix} 1-x & x & 0 \\ 0 & 1-y & y \\ z & 0 & 1-z \end{pmatrix},$$

pri čemu je $x = \frac{a}{a-b}$, $y = \frac{b}{b-c}$ i $z = \frac{c}{c-a}$. Matrični zapis sustava $AX = 0$, jednak je

$$\begin{pmatrix} 1-x & x & 0 \\ 0 & 1-y & y \\ z & 0 & 1-z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Budući da su a, b i c u parovima različiti realni brojevi sustav ima netrivijalno rješenje, to jest $\det A = 0$, iz čega slijedi $\det A = 1-z-y+yz-x+zx+xy = 0 \Rightarrow xy+yz+zx = x+y+z-1$. Nadalje, neka je $t = x + y + z$. Tada je nejednakost

$$\left(\frac{a}{a-b} + k\right)^2 + \left(\frac{b}{b-c} + k\right)^2 + \left(\frac{c}{c-a} + k\right)^2 - 2k^2 - 2k - 1 \geq 0$$

ekvivalentna sljedećoj nejednakosti

$$(x + 3)^2 + (y + 3)^2 + (z + 3)^2 - 2k^2 - 2k + 1 \geq 0,$$

iz koje dobivamo

$$\begin{gathered}
x^2 + y^2 + z^2 + 2k(x + y + z) + 3k^2 - 2k^2 - 2k - 1 \geq 0 \\
(x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) + 2k(x + y + z) + k^2 - 2k + 1 \geq 0 \\
t^2 - 2(t - 1) + 2kt + k^2 - 2k + 1 \geq 0 \\
t^2 - 2t + 2 + 2kt + k^2 - 2k + 1 \geq 0 \\
t^2 - 2t + 2kt - 2k + k^2 + 1 \geq 0 \\
(t + k - 1)^2 \geq 0.
\end{gathered}$$

Kao i u prethodnom primjeru, jednakost se postiže za beskonačno mnogo trojki a, b, c. □

Primjer 3.1.3. *Neka su a, b i c u parovima različiti realni brojevi. Tada vrijedi*

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 + \left(\frac{b+c}{b-c}\right)^2 + \left(\frac{c+a}{c-a}\right)^2 \geq 2$$

Dokaz. Neka su $x = \frac{a+b}{a-b}$, $y = \frac{b+c}{b-c}$ i $z = \frac{c+a}{c-a}$. Promotrimo matrični zapis sustava:

$$\begin{pmatrix} 1-x & 1+x & 0 \\ 0 & 1-y & 1+y \\ 1+z & 0 & 1-z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Znamo da je

$$\det A = \begin{vmatrix} 1-x & 1+x & 0 \\ 0 & 1-y & 1+y \\ 1+z & 0 & 1-z \end{vmatrix} = 0$$

jer sustav ima netrivijalno rješenje.

Stoga, $2 + 2yz + 2zx + 2xy = 0 \Rightarrow 2(xy + yz + zx) = -2$. Uvrstimo li dobiveno u početnu nejednakost dobivamo

$$\begin{gathered}
x^2 + x^2 + z^2 - 2 \geq 0 \\
(x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) - 2 \geq 0 \\
(x + y + z)^2 - (-2) - 2 \geq 0 \\
(x + y + z)^2 \geq 0,
\end{gathered}$$

što vrijedi za svaki $x, y, z \in \mathbb{R}$ □

Primjer 3.1.4. *Neka su $a, b, c > 0$. Dokažite nejedankost:*

$$\frac{a^3+2}{b+2c} + \frac{b^3+2}{c+2a} + \frac{c^3+2}{a+2b} \geq 3.$$

Ovaj primjer kompliciraniji je od prošlih primjera. Zato ćemo danu nejednakost svesti na "jednostavniju" te ju dokazati pomoću nje.

Dokaz. Promotrimo brojnike danih razlomaka.

Uz uvjet $a, b, c > 0$, vrijedi da je $a^3 + 2 \geq 3a$, jer je $a^3 - 3a + 2 \geq 0$, odnosno $(a-1)^2(a+2) \geq 0$. Analogno se pokaže za preostala dva brojnika $b^3 + 2 \geq 3b$ i $c^3 + 2 \geq 3c$. Dakle, dovoljno je pokazati sljedeću nejednakost

$$\frac{a}{b+2c} + \frac{b}{c+2a} + \frac{c}{a+2b} \geq 1.$$

Nadalje, neka su $x = \frac{a}{b+2c}, y = \frac{b}{c+2a}$ i $z = \frac{c}{a+2b}$. Tada su i $x, y, z > 0$ te imamo sustav jednadžbi

$$\begin{cases} -a + xb + 2xc = 0 \\ 2ya - b + yc = 0 \\ za + 2zb - c = 0 \end{cases}.$$

Sustav ima netrivijano rješenje pa je

$$\begin{vmatrix} -1 & x & 2x \\ 2y & -1 & y \\ z & 2z & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Iz toga slijedi $-1 + 9xyz + 2xz + 2yz + 2xy = 0$, odnosno $2(xy + yz + zx) + 9xyz = 1$. Neka je sada $t = x + y + z$. Znamo, po AG nejednakosti, da je $\frac{1}{3}t^3 \geq 9xyz$. Uz to vrijedi i $\frac{2}{3}t^2 \geq 2(xy + yz + zx)$. Naime,

$$\frac{2}{3}t^2 \geq 2(xy + yz + zx) \; / \cdot 3$$
$$2(x + y + z)^2 \geq 6(xy + yz + zx)$$
$$2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4xy + 4yz + 4zx \geq 6xy + 6yz + 6zx$$
$$x^2 - 2xy + y^2 + y^2 - 2yz + z^2 + z^2 - 2zx + x^2 \geq 0$$
$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2 \geq 0.$$

Dakle, dobivamo

$$\frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{3}t^2 \geq 1$$

iz čega slijedi

$$t^3 + 2t^2 \geq 3,$$

to jest

$$(t - 1)(t^2 + 3t + 3) \geq 0,$$

pa je $t \geq 1$, što smo i trebali pokazati. $\square$

Poglavlje 4

Neke primjene u kombinatorici

U području kombinatorike često se proučavaju strukture oblika $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$, pri čemu je $\mathcal{P}$ konačan skup, a $\mathcal{B}$ familija podskupova od $\mathcal{P}$ koji ispunjavaju određena svojstva. Neka od takvih tipičnih svojstava su *uniformnost*, što znači da su svi skupovi iz $\mathcal{B}$ jednakobrojni (uobičajena oznaka k) i *regularnost*, svojstvo da se svaki element od $\mathcal{P}$ nalazi u konstantnom broju (oznaka r) skupova iz $\mathcal{B}$. Ako je card $\mathcal{P} = v$ i card $\mathcal{B} = b$, a struktura je uniformna i regularna, očito vrijedi jednakost $vr = bk$. Problematika optimalnog planiranja (dizajniranja) eksperimenata u biologiji i drugim znanostima te statističke obrade dobivenih podataka dovela je do razvoja teorije dizajna, u kojoj je jedna od tipičnih struktura tzv. $t - (v, k, \lambda)$ blok-dizajn.

U ovom poglavlju prikazat ćemo nekoliko primjera osnovnih nejednakosti iz teorije dizajna i slične rezultate.

4.1 Fisherova nejednakost

Definicija 4.1.1. *Neka su $t, v, k, \lambda \in \mathbb{N}$, pri čemu je $1 < k < v$. Nadalje, neka je $\mathcal{P}$ skup od v elemenata i $\mathcal{B}$ familija k-članih podskupova od $\mathcal{P}$. Uređen par $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$ naziva se $t - (v, k, \lambda)$* ***blok-dizajn*** *ako je svaki t-člani podskup od $\mathcal{P}$ sadržan u točno λ skupova iz familije $\mathcal{B}$.*

Riječ je dakle o uniformnoj strukturi s dodatnim uvjetom tzv. *balansiranosti* koja je izražena pomoću parametra t i λ. Kod planiranja eksperimenata skup $\mathcal{P}$ čine uzorci, a skupovi familije $\mathcal{B}$ su blokovi, koji zapravo predstavljaju grupiranje uzoraka za provedbu eksperimenata. Uniformnost i balansiranost važni su uvjeti radi ujednačenosti. Uvjeti se mogu trivijalno ispuniti tako da se uzmu svi k-člani podskupovi od $\mathcal{P}$ (tzv. potpuni blok dizajn), ali to je obično nepraktično i previše skupo. Za postojanje $t - (v, k, \lambda)$ blok-dizajna trebaju biti ispunjeni neki nužni uvjeti, a oni nisu općenito i dovoljni. Ovdje ćemo istaknuti samo slučaj $t = 2$.

Teorem 4.1.2. *Ako je* $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$ $2-(v,k,\lambda)$ *blok-dizajn, onda vrijedi:*

(i) $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$ *je regularna struktura s parametrom* $r = \lambda\frac{v-1}{k-1}$.

(ii) Broj blokova $b = \frac{vr}{k} = \lambda\frac{v(v-1)}{k(k-1)}$.

Uočavamo da *(i)* znači da je r cijeli broj to jest da je $\lambda(v-1)$ djeljiv s $k-1$. *(ii)* pokazuje da je $\lambda v(v-1)$ nužno djeljiv s $k(k-1)$. Dakle, broj blokova u kojima se nalazi bilo koji element iz $\mathcal{P}$ ne ovisi o izboru tog elementa. Tvrdanja *(ii)* proizlazi primjenom *(i)* na relaciju $vr = bk$. *(i)* se dokazuje prebrojavanjem na dva načina svih uređenih parova (x, S), pri čemu je $x \in \mathcal{P}$ različit od nekog izabranog elementa x_0, a S je blok koji sadrži x_0.

Primjerice, za $2-(15,3,1)$ i za $2-(46,6,1)$ ispunjeni su uvjeti djeljivosti iz Teorema 4.1.2. U prvom slučaju $r = 7$, $b = 35$, a u drugom $r = 9$, $b = 69$. No, dok s jedne strane $2-(15,3,1)$ blok-dizajni postoje i to točno 80 takvih neizomorfnih struktura, za $2-(46,6,1)$ uopće ne postoji takav blok-dizajn i to je vrlo teško dokazati.

Teorem 4.1.3. *(Fisherova nejednakost) Za* $2-(v,k,\lambda)$ *blok-dizajn s* b *blokova vrijedi* $v \leq b$.

U terminima dizajniranja eksperimenata, ovo znači da broj eksperimenata ne može biti manji od broja uzoraka, uz uvjete zadane definicijom blok-dizajna.

Zbog relacije $vr = bk$ ekvivalentne su nejednakosti $v \leq b$ i $k \leq r$. Fisherova nejednakost ne proizlazi iz aritmetičkih uvjeta postojanja dizajna iz Teorema 4.1.2 jer, primjerice, za $2-(16,6,1)$ ti su uvjeti ispunjeni, ali za $r = 3$, $b = 8$, što po Teoremu 4.1.3 nije moguće.

Dokaz. Ovdje, kao i za mnoge druge rezultate iz teorije dizajna prikladno je poslužiti se *incidencijskom matricom*. Za strukturu $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$ s v točaka i b blokova to je matrica $A = [a_{ij}]$ tipa (v, b) s koeficijentima iz skupa $\{0, 1\}$. Redcima te matrice pridruženi su elementi od $\mathcal{P}$ kao uređenog skupa, a stupcima su priruženi blokovi u nekom uređaju skupa $\mathcal{B}$. Tada je $a_{ij} = 1$ ako i samo ako i-ti element od $\mathcal{P}$ pripada j-tom bloku, odnosno 0 ako nije tako.

Incidencijska matrica potpuno određuje dizajn. I ovdje je korisno promatrati umnožak AA^τ, kvadratnu matricu reda v te ocijeniti njezin rang. Budući da $r(A)$ nije veći od broja stupaca b, a $r(AA^\tau) \leq r(A)$, dovoljno je dokazati da je AA^τ regularna matrica. Tada će biti $v = r(AA^\tau) \leq b$.

Uočimo da se na svim mjestima dijagonale matrice AA^τ nalazi r, a na svim ostalim pozicijama λ. Naime, pri množenju i-tog retka i stupca dobivenog transponiranjem k-tog retka dobiva se pribrojnik 1 ako i samo ako je koeficijent 1 na obje odgovarajuće pozicije, recimo j-toj, u tim redcima, što znači da se priruženi elementi iz $\mathcal{P}$ nalaze zajedno u j-tom bloku. To se događa točno r puta za $i = k$, odnosno λ puta za $i \neq k$.

Imamo poznati oblik matrice za koji nije teško izračunati determinantu te je det $AA^\tau = (r-\lambda)^{v-1}(r + (v-1)\lambda)$. Uvrstimo još $r + (v-1)\lambda = rk$ radi sažetijeg izraza, premda je već jasno da je determinanta strogo pozitivna. Primijetimo da je $r > \lambda$ jer inače bi svaka dva elementa od $\mathcal{P}$ bila zajedno sadržana u svakom bloku. Ako ne dopustimo "ponavljanje" blokova, to bi značilo da postoji samo jedan blok, ali pretpostavljamo da je $k < v$ pa taj trivijalni slučaj ne dolazi u obzir. Dobivamo $\det AA^\tau = (r-\lambda)^{v-1} rk$. Rang $r(AA^\tau) = v$ pa je teorem dokazan. □

4.2 Skupovi s jednakobrojnim presjecima

Razmotrimo tvrdnju sljedećeg teorema

Teorem 4.2.1. *Ako su $C_1, C_2, \ldots, C_m$ različiti, neprazni podskupovi n-članog skupa takvi da svi presjeci, $C_i \bigcap C_j$, $i \neq j$, imaju jednak broj elemenata, tada je $n \geq m$.*

Formulacija i tvrdnja svakako podsjećaju na Teorem 4.1.3 to jest na Fisherovu nejednakost, premda očito nije riječ o uniformnoj strukturi pa time ni o blok-dizajnu, a osim toga zaključak glasi "obrnuto". Naime, uz zadane uvjete na familiju podskupova konačnog skupa, broj tih podskupova nije veći od broja elemenata njihovog zajedničkog nadskupa. Međutim, čini se kako bismo ponovno mogli primijeniti incidencijsku matricu i izraziti zadane uvjete na način sličan kao u dokazu Fisherove nejednakosti.

Dokaz. Pogledajmo prvo neke posebne slučajeve.

Ako su svaka dva od skupova C_i, $i = 1, \ldots, m$ disjunktna, to jest broj zajedničkih elemenata im je 0, očito vrijedi $m \leq n$ jer su skupovi neprazni, sveukupno sadrže barem m različitih elemenata, a njihova disjunktna unija sadržana je u n-članom skupu.

Označimo dalje s t, $t \geq 1$, broj elemenata u svakom od skupova $C_i \bigcap C_j$, $i \neq j$. Pretpostavimo najprije da se neki od skupova, možemo bez gubitka općenitosti uzeti da je to C_1, sastoji od točno t elemenata. Tada svaki od ostalih skupova mora sadržavati C_1 pa su zato svi skupovi $C_j \setminus C_1$, za $1 < j \leq m$ neprazni i međusobno disjunktni. Tih $m-1$ skupova ukupno sadrži barem $m-1+t$ različitih elemenata pa je $m-1+t \leq n$. Zato je $m \leq n-t+1 \leq n$, budući da je $n-t \leq n-1$.

Pretpostavimo nadalje da je card $C_i > t$ za svaki $i = 1, \ldots, m$. Formirajmo incidencijsku matricu D koja je sada tipa (n, m) za skup od n točaka i familiju podskupova C_i. Zadane uvjete ovaj put moći ćemo iskoristiti promatranjem umnoška $D^\tau D$. Množenjem stupaca matrice D dobivamo rezultat c_i kad se i-ti stupac množi sa samim sobom (to je umnožak retka matrice D^τ i stupca matrice D), odnosno t za svaka dva različita stupca matrice D. Matrica $D^\tau D$ je kvadratna reda m s dijagonalom $(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ i t na svim ostalim pozicijama. Rang te matrice nije veći ni od m ni od n. Analogno kao u 4.1.3, ako bismo znali da je matrica regularna, imali bismo $m = r(D^\tau D) \leq r(D) \leq n$.

Regularnost matrice $D^\tau D$ može se ustanoviti na više načina. Elementarnim transformacijama ona se može dovesti do ekvivalentne (jednakog ranga) gornjetrokutaste matrice koja na dijagonali ima redom $d_{11} = 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{t}{c_i - t}$, $d_{jj} = 1$, za $j = 2, \ldots, n$. Zbog $c_i > t$ za svaki i očito je det $D^\tau D > 0$ pa je $r(D^\tau D) = m$.

Drugi je način da pokažemo da je matrica $B = D^\tau D$ pozitivno definitna, odnosno B je simetrična i $\mathbf{x}^\tau B\mathbf{x} > 0$ za svaki ne-nul vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Zapišimo matricu B kao $B = tJ_n + E$, gdje je J_n matrica čiji je svaki element jednak 1, a E je dijagonalna matrica koja poprima vrijednosti $e_1 - t, e_2 - t, \ldots, e_n - t$ na dijagonali. Neka je $\mathbf{x}$ proizvoljan ne-nul vektor iz $\mathbb{R}^n$. Očito je E pozitivno definitna jer $\mathbf{x}^\tau E\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n}(e_i - t)\mathbf{x}_i^2 > 0$. Za J_n imamo $\mathbf{x}^\tau J_n\mathbf{x} = \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{x}_i\mathbf{x}_j = (\sum_{i=1}^{n} \mathbf{x}_i)^2 \geq 0$, stoga J_n je pozitivno semidefinitna. Naposlijetku, matrica B je pozitivno definitna jer vrijedi

$$\mathbf{x}^\tau B\mathbf{x} = \mathbf{x}^\tau(tJ_n + E)\mathbf{x} = t\mathbf{x}^\tau J_n\mathbf{x} + \mathbf{x}^\tau E\mathbf{x} > 0.$$

Dolazimo do činjenice da je zbroj pozitivno definitne matrice i pozitivno semidefinitne, pozitivno definitna matrica. Prema Lemi 1.1.19 slijedi da je B regularna matrica. □

Usporedimo sada tvrdnje i dokaze Teorema 4.1.3 i 4.2.1. Matrica dobivena množenjem incidencijske matrice s njezinom transponiranom matricom kompliciranija je utoliko što su na dijagonali općenito različiti brojevi, ali to ipak, uz zadane uvjete, ne otežava bitno izračunavanje ranga odnosno determinante. Jednakost elemenata dijagonale kod Fisherove nejednakosti proizlazi iz svojstva blok-dizajna, jer uniformnost i 2-balansiranost impliciraju regularnost. Množenjem u obrnutom redosljedu, matrica $A^\tau A$ reda b ima po dijagonali k, a izvan dijagonale su elementi koji pokazuju broj zajedničkih točaka parova različitih blokova. Općenito u blok-dizajnu ti brojevi poprimaju različite vrijednosti, a iznimno za $2-(v, k, \lambda)$ dizajne s $v = b$, takozvane *simetrične dizajne* (što ne znači da im je incidencijska matrica simetrična) vrijedi da je veličina presjeka svaka dva različita bloka konstantna te iznosi upravo λ.

Ako bismo u Teoremu 4.2.1 formalno promatrali $(\mathcal{B}, \mathcal{P})$, u kojoj su zamijenjene uloge $\mathcal{P}$ i $\mathcal{B}$, a incidencijska relacija mijenja se iz $\in$ u $\ni$, ta struktura bila bi 2-balansirana, ali ne i uniformna. Naime svaka dva elementa iz $\mathcal{B}$ imaju točno t zajedničkih elemenata iz $\mathcal{P}$, pri čemu ovdje pretpostavimo $t > 0$.

Možemo zaključiti da teorem 4.2.1 predstavlja poopćenje Fisherove nejednakosti u sljedećem smislu: Neka je $(\mathcal{P}, \mathcal{B})$ struktura koju čine v-člani skup $\mathcal{P}$ i familija $\mathcal{B}$ koja se sastoji od b podskupova skupa $\mathcal{P}$ ("blokova"). Ako postoji cijeli broj $\lambda > 0$ takav da su svaka dva elementa od $\mathcal{P}$ zajedno sadržana u točno λ blokova, onda vrijedi $v \leq b$. Dakle, ključno je svojstvo 2-balansiranosti. U geometrijskom kontekstu, česti su primjeri struktura u kojima 2-balansiranost jednostavno znači da su svake dvije točke spojene točno jednim pravcem, npr. afina ravnina.

4.3 Skupovi s neparnim brojem elemenata

U ovom odjeljku promatraju se također strukture tipa familija skupova kao u prethodnima, no ovdje će uvjeti biti postavljeni u obliku neparnosti odnosno parnosti.

Teorem 4.3.1. *Neka je $\mathcal{P}$ skup od n elemenata, a $\mathcal{B}$ familija njegovih podskupova takva da*

- *svaki skup iz $\mathcal{B}$ ima neparan broj elemenata.*
- *u presjeku svaka dva skupa iz $\mathcal{B}$ nalazi se paran broj elemenata.*

Tada se $\mathcal{B}$ sastoji od najviše n podskupova skupa $\mathcal{P}$.

Kao i u prethodnim odjeljcima, povoljno je poslužiti se incidencijskom matricom, a razlika će biti u tome da će se, zbog postavljenih uvjeta, račun provoditi nad poljem $\mathbb{F}_2$. U nastavi smo najčešće promatrali matrice nad poljima $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$, dok u ovom dokazu promatramo polje reda 2, dakle $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ s operacijama modulo 2 zato što se gleda samo parnost ili neparnost.

Dokaz. Neka je A incidencijska matrica tipa (m, n) koju ovaj put definiramo tako da redci odgovaraju podskupovima $K_1, \ldots, K_m \in \mathcal{B}$, a stupci elementima skupa $\mathcal{P} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Gledamo produkt AA^τ. Ovo je matrica reda m čiji je element na poziciji (i, k) jednak $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{kj}$ te predstavlja broj elemenata u $K_i \bigcap K_k$. Naime, pribrojnik je u ovoj sumi jednak 1 ako i samo ako je $a_{ij} = a_{kj} = 1$, što znači da element j pripada i skupu K_i i skupu K_k.

Nadalje, uvjeti teorema impliciraju da je $AA^\tau = I_m$, gdje je I_m jedinična matrica reda m. (Podsjećamo da sve pozitivne cijele brojeve reduciramo $\mod 2$). Dakle, rang matrice AA^τ je m. S druge strane, rang produkta nije veći od minimuma rangova faktora, stoga vrijedi i $r(A) \geq m$, pa je $m \leq n$. □

4.4 Neparne udaljenosti

Ovdje ćemo razmotriti jedan zanimljiv metričko-geometrijski problem o postojanju konačnog skupa točaka u euklidskoj ravnini s posebnim uvjetom na njihove međusobne udaljenosti.

Teorem 4.4.1. *Ne postoje četiri točke u ravnini takve da je udaljenost između svakog para točaka neparan cijeli broj.*

U dokazu ovog teorema, ravninu ćemo promatrati kao vektorski prostor $\mathbb{R}^2$, štoviše to je unitarni pa onda i normirani prostor.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, to jest da postoje četiri točke u ravnini čije su sve udaljenosti neparne. Nadalje, pretpostavimo da je jedna od točaka $\mathbf{0}$, a preostale tri označimo s $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{c}$. Tada su sve duljine $||\mathbf{a}||$, $||\mathbf{b}||$, $||\mathbf{c}||$, $||\mathbf{a}\text{-}\mathbf{b}||$, $||\mathbf{b}\text{-}\mathbf{c}||$ i $||\mathbf{c}\text{-}\mathbf{a}||$ neparni cijeli brojevi.

Primjećujemo da ako je $m = 4k + 1$ neparan cijeli broj, tada je $m^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 8(2k^2 + k) + 1 \equiv 1 \pmod 8$. Stoga su kvadrati svih razmatranih udaljenosti kongruentni s 1 po modulu 8.

Zatim, primjenjujemo kosinusov poučak na dva vektora $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ i dobivamo $||\mathbf{a}-\mathbf{b}||^2 = ||\mathbf{a}||^2 + ||\mathbf{b}||^2 - 2\langle\mathbf{a}|\mathbf{b}\rangle$, odnosno $2\langle\mathbf{a}|\mathbf{b}\rangle = ||\mathbf{a}||^2 + ||\mathbf{b}||^2 - ||\mathbf{a} - \mathbf{b}||^2 \equiv 1 \pmod 8$. Isto vrijedi i za $2\langle\mathbf{a}|\mathbf{c}\rangle$ i za $2\langle\mathbf{b}|\mathbf{c}\rangle$.

Nadalje, neka je $B = G(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ Gramova matrica skupa $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.

Tada je matrica $2B$ jednaka

$$\begin{pmatrix} 2\langle\mathbf{a}|\mathbf{a}\rangle & 2\langle\mathbf{a}|\mathbf{b}\rangle & 2\langle\mathbf{a}|\mathbf{c}\rangle \\ 2\langle\mathbf{b}|\mathbf{a}\rangle & 2\langle\mathbf{b}|\mathbf{b}\rangle & 2\langle\mathbf{b}|\mathbf{c}\rangle \\ 2\langle\mathbf{c}|\mathbf{a}\rangle & 2\langle\mathbf{c}|\mathbf{b}\rangle & 2\langle\mathbf{c}|\mathbf{c}\rangle \end{pmatrix}$$

i kongruentna matrici R

$$R := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

po modulu 8.

Vrijedi

$$\det R = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Svaki element matrice $2B$ kongruentan je modulo 8 s odgovarajućim elementom matrice R. Iz definicije determinante jasno je da je stoga $\det 2B \equiv \det R \pmod 8$. Zato je $\det 2B \equiv 4 \pmod 8$. Dakle, $\det 2B \neq 0$ pa i $\det B \neq 0$. Time je $r(B) = 3$.

Kao u poglavlju 2, možemo napisati $B = A^\tau A$, pri čemu je

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix},$$

za vektore $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$ i $\mathbf{c} = (c_1, c_2)$. Tada je $r(B) \leq r(A) \leq 2$, što je u proturječju s prethodnim zaključkom da je $r(B) = 3$. Time je teorem dokazan. $\square$

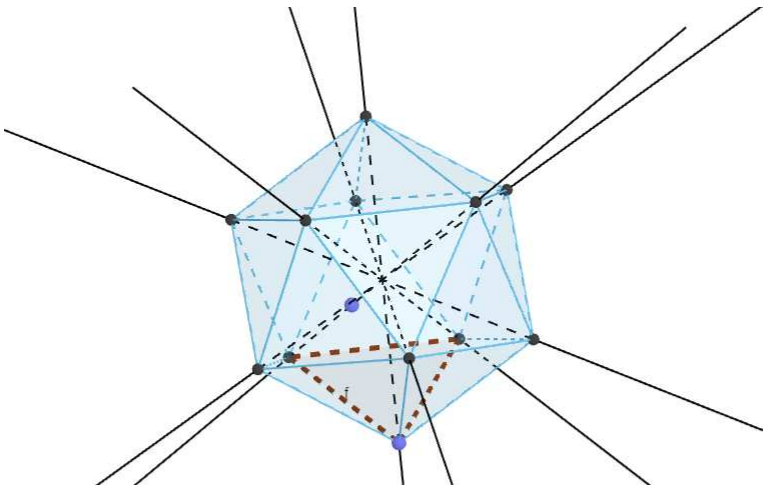
Poglavlje 5

Ekviangularni pravci

5.1 Ekviangularni pravci

Koliko ima pravaca u $\mathbb{R}^3$ takvih da su kutovi između svaka dva pravca jednake mjere?

Znamo da u $\mathbb{R}^3$ ne mogu biti više od 3 međusobno okomita pravca, no kada se radi o kutovima različitim od 90° situacija je kompliciranija. Primjerice, u pravilnom ikosaedru, šest najduljih dijagonala (koje spajaju parove nasuprotnih vrhova) zatvaraju sukladne kutove mjere ϕ, pri čemu je $\phi = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}}$, približno 63.43° odnosno 1.107 radijana.



Slika 5.1: Pravilni ikosaedar

Pravce koji u parovima međusobno zatvaraju sukladne kutove zovemo **ekviangularni pravci**. Podrazumijevat ćemo, radi jednostavnosti, da ekviangularni pravci prolaze jednom zajedničkom točkom, jer to se može postići translacijama.

Teorem 5.1.1. *Njaveći broj ekviangularnih pravaca u* $\mathbb{R}^3$ *je 6, a općenito, u euklidskom prostoru* $\mathbb{R}^d$ *ne može biti više od* $\binom{d+1}{2}$ *ekviangularnih pravaca.*

Dokaz. Razmotrimo konfiguraciju od n pravaca, gdje svi parovi pravaca zatvaraju kut mjere $\phi \in (0, \frac{\pi}{2}]$. Neka je $\mathbf{v}_i$ jedinični vektor u smjeru i-tog pravca (proizvoljno odaberemo jednu od dvije moguće orijentacije vektora $\mathbf{v}_i$). Uvjet sukladnosti kutova je ekvivalentan s

$$|\langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_j \rangle| = \cos\phi, \qquad \text{za sve } i \neq j.$$

S obzirom na ove uvjete Gramova matrica ekviangularnog skupa od n jediničnih vektora ima jednostavan oblik:

$$\begin{pmatrix} 1 & \cos\phi & \dots & \cos\phi \\ \cos\phi & 1 & \dots & \cos\phi \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos\phi & \cos\phi & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Nije teško izračunati determinantu ove matrice:

$$\Gamma(v_1, \dots, v_n) = (1 - \cos\phi)^{n-1}(1 + (n-1)\cos\phi). \tag{5.1}$$

Međutim, odatle se ne vidi u kakvom su odnosu broj vektora n i dimenzija prostora d. Primjerice, za $n = d = 3$ očito je $\Gamma(v_1, \dots, v_n) = 0$ u slučaju $1 + 2\cos\phi = 0$, to jest $\cos\phi = -\frac{1}{2}$, odnosno $\phi = 120^\circ$, to je geometrijski jasno, budući da su tri vektora koji međusobno zatvaraju kutove od 120° komplanarni. Za dokaz teorema treba se dakle poslužiti nešto drugačijim pristupom, u kojem će ipak bitnu ulogu imati skalarni produkt $\langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_j \rangle$.

Promotrimo vektor $\mathbf{v}_i$ kao vektor stupac ili kao matricu tipa $(d, 1)$. Tada je $\mathbf{v}_i^\tau \mathbf{v}_j$ skalarni produkt $\langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_j \rangle$ ili preciznije, matrica čiji je jedini element $\langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_j \rangle$. S druge strane, $\mathbf{v}_i \mathbf{v}_j^\tau$ je kvadratna matrica reda d.

Pokažimo sada da matrice $\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^\tau$, $i = 1, 2, \dots, n$ čine linearno nezavisan skup u prostoru simetričnih matrica reda d. Budući da je dimenzija tog prostora jednaka $\binom{d+1}{2}$, iz linearne nezavisnosti skupa vidjet ćemo da vrijedi $n \leq \binom{d+1}{2}$, što je upravo tvrdnja teorema.

Da bismo provjerili linearnu nezavisnost, pretpostavimo da je linearna kombinacija matrica $\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^\tau$, $i = 1, \dots, n$ jednaka nulmatrici

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^\tau = O,$$

gdje su $a_i \in \mathbb{R}$ koeficijenti. Nadalje, obje strane jednakosti pomnožimo vektor-retkom $\mathbf{v}_j^\tau$ s lijeve strane, a vektor stupcem $\mathbf{v}_j$ s desne strane. Za svaki $j = 1, \dots, n$ dobivamo skalarnu jednakost:

$$0 = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_j^\tau (\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^\tau) \mathbf{v}_j = \sum_{i=1}^{n} a_i \langle \mathbf{v}_i | \mathbf{v}_j \rangle^2 = a_j + \sum_{i \neq j} a_i \cos^2\phi.$$

Za pojedini j ovu jednakost napišimo u obliku $a_j(1-\cos^2\phi)+\cos^2\phi\sum_{i=1}^n a_i = 0$. Definiramo matricu $M = (1-\cos^2\phi)I_n + \cos^2\phi J_n$, pri čemu je I_n jedinična matrica, a J_n matrica čiji je svaki element jednak 1. Iz prethodnog računa vidimo da vrijedi $M\mathbf{a} = 0$, pri čemu je $\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad \dots \quad a_n]^\tau$. Otprije (5.1) znamo da za determinantu ovog oblika vrijedi $\det M = (1-\cos^2\phi)^{n-1}(1+(n-1)\cos^2\phi)$. Determinanta $\det M \neq 0$, zato što su vektori različitih smjerova pa je $\cos\phi \neq 1$ i $\cos\phi \neq -1$, iz čega slijedi da je M regularna i jedino rješenje jednadžbe $M\mathbf{a} = \mathbf{0}$ je trivijalno $\mathbf{a} = 0$. Dakle, $a_i = 0$ za sve $i = 1, \dots, n$, pa matrice $\mathbf{v}_i\,\mathbf{v}_i^\tau$ čine linearno nezavisan skup. Time je teorem dokazan. □

Prethodni rezultat daje najbolju moguću gornju među za broj ekviangularnih pravaca u nekim dimenzijama, gdje se taj broj efektivno postiže. To očito vrijedi za $d = 2, n = 3$ i $d = 3, n = 6$ (primjer ikosaedra).

Također, za $d = 7$ postoji ekviangularni skup od $\binom{8}{2} = 28$ pravaca. Primjer konstrukcije za 7-dimenzionalni prostor polazi od vektora $(-3,-3,1,1,1,1,1,1) \in \mathbb{R}^8$. Skup različitih vektora dobivenih permutiranjem koordinata ovog vektora ima točno 28 elemenata, a svi ti vektori očito su ortogonalni na vektor $(1,1,1,1,1,1,1,1)$ pa se nalaze u ortogonalnom komplementu 1-dimenzionalnog potprostora razapetog tim vektorom. Stoga se ovih 28 vektora nalazi u prostoru dimenzije 7. Nije teško provjeriti da skalarni produkt parova vektora iznosi ili 8 ili -8 pa oni čine ekviangularni skup. I za ovu konstrukciju dostatna je elementarna linearna algebra.

Međutim, vrlo su rijetki primjeri dimenzija d u kojima se gornja međa $\binom{d+1}{2}$ efektivno postiže. Većinom su stvarne maksimalne vrijednosti znatno manje. Poznato je npr. da je maksimalna vrijednost jednaka 28 ne samo za $d = 7$, gdje se podudara s ocjenom iz teorema, nego također i za svaki d, $8 \leq d \leq 14$. Dakle, za vrijednost d u navedenom intervalu teorem ne pruža precizan rezultat jer "dopušta" znatno veće brojeve od stvarno mogućih.

Poučavanje skupova ekviangularnih pravaca traje već desetljećima, a primjenjuju se metode koje izlaze izvan područja linearne algebre, osobito u teoriju grafova. Ipak, Gramova matrica i dalje je jedno od prirodnih polazišta za prikaz skupa ekviangularnih pravaca.

Osim gornje i donje međe njihovog broja za pojedine dimenzije, istražuju se i maksimalni ekviangularni skupovi za unaprijed zadanu vrijednost mjere kuta. Dosad najbolji rezultati u tom smjeru objavljeni su 2019. godine i izraženi su u terminima teorije grafova.

Bibliografija

[1] D. Bakić, *Linearna algebra,* Školska knjiga, Zagreb, 2008.

[2] A.J. Hoffman, Ch. W. Wu, *A Simple Proof of Generalized Cauchy-Binet Theorem,* Amer. Math. Monthly 123(9) (2016), 928-930.

[3] J. Matoušek, *Thirty-three Miniatures: Mathematical and Algorithmic Applications of Linear Algebra,* AMS Student Mathematical Library vol. 53, Providence, 2010.

[4] Linear Algebra Tools for Proving Inequalities, URL `https://www.cut-the-knot.org/arithmetic/algebra/LinearAlgebraForInequalities.shtml` (kolovoz, 2022.)

[5] Z. Franušić, J. Šiftar *Linearna algebra 1 i 2*-skripta, Sveučilište u Zagrebu, 2022.

[6] *A New Path to Equal-Angle Lines,* URL `https://www.quantamagazine.org/a-new-path-to-equal-angle-lines-20170411/` (kolovoz, 2022.)

Sažetak

U ovom radu je pokazano kako se poznavanjem osnovnih pojmova i činjenica iz linearne algebre mogu dokazati zanimljive, često i važne nejednakosti iz različitih matematičkih disciplina. Primjerima su ilustrirane neke primjene u algebri, kombinatorici, kombinatornoj geometriji te teoriji dizajna. Pri dokazivanju samih nejednakosti korištene su poznate činjenice poput svojstava ranga matrice, dimenzije potprostora vektorskih prostora, kriterij postojanja netrivijalnog rješenja homogenog sustava linearnih jednadžbi te Cauchy-Schwarzove nejednakosti. Zastupljen je i poopćeni oblik Binet-Cauchyjevog teorema o determinanti umnoška matrica, koji je također koristan u primjenama.

Među rezultatima dokazanima u radu obuhvaćene su Fisherova nejednakost za kombinatorne dizajne te gornja međa veličine ekviangularnog skupa pravaca u d-dimenzionalnom euklidskom prostoru, što pripada problemima kombinatorne geometrije koji već desetljećima zaokupljaju matematičare i o kojima su posljednjih godina postignuti neki značajni rezultati.

Summary

In this paper, it is shown how some interesting, often important inequalities from various mathematical disciplines can be proved by using basic concepts and facts from linear algebra. Some applications in algebra, combinatorics, combinatorial geometry and design theory are illustrated by examples.

Several well-known statements on the properties of the rank of a matrix, dimensions of subspaces of vector spaces, the criterion of the existence of a non-trivial solution of a homogeneous system of linear equations and the Cauchy-Schwarz inequality were used in the proofs. A generalized form of the Binet-Cauchy theorem on the determinant of the product of matrices is also included, as it is useful in applications.

Among the results proved in the paper are Fisher's inequality for combinatorial designs and the upper limit of the size of the equiangular set of directions in the d-dimensional Euclidean space. The latter result belongs to the topics in combinatorial geometry that have been investigated by mathematicians for decades and about which some significant results have been achieved in recent years.

Životopis

Rođena sam 02. ožujka 1996. godine u Zagrebu. Pohađala sam Osnovnu školu Ljubo Babić u Jastrebarskom, nakon koje sam upisala Srednju školu Jastrebarsko, smjer opća gimnazija. Nakon mature 2014. godine upisujem preddiplomski sveučilišni studij matematika, smjer nastavnički, na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, koji završavam 2019. godine. Iste te godine, na istom fakultetu upisujem diplomski studij matematike, također, smjer nastavnički.