Apolonijev problem

Hanževački, Martina

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Martina Hanževački

APOLONIJEV PROBLEM

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Mea Bombardelli

Zagreb, rujan, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

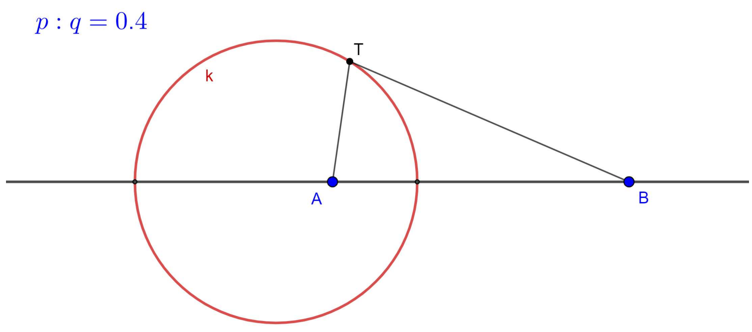
Zahvaljujem svojoj mentorici Mei Bombardelli na ogromnom strpljenu i silnom trudu. Također, veliko hvala kolegama koji su ovaj put dijelili sa mnom, a i mnogo ga olakšali. Posebno hvala Magdaleni, Veroniki i Ivanu. Zahvaljujem i svim svojim prijateljima koji su bili cijelo ovo vrijeme uz mene i velika podrška. Hvala mom suprugu Ivanu koji je najviše ispaštao. Najveće hvala mojoj mami koja je slavila svaki moj položeni ispit, bila neosporivo najveća podrška tijekom studija i u životu općenito te sigurno bez nje ništa od ovog ne bi bilo moguće. Hvala vam od srca.

Sadržaj

Predgovor

Apolonijev problem je konstruktivni geometrijski zadatak što ga je prvi postavio i riješio Apolonije u djelu *O dodirima*. Apolonije iz Perge (262.pr.n.e. - 190.pr.n.e.) grčki je matematičar. Studirao je u Aleksandriji, gdje su ga podučavali Euklidovi sljedbenici. U djelu *Elementi konika* u 15 knjiga, od kojih je sačuvano sedam, obradio je teoriju presjeka stošca i ravnine geometrijskim pristupom. Današnja euklidska geometrija nije se mnogo odmakla od Apolonijevih spoznaja. On je prvi za konike upotrebio naziv elipsa i hiperbola te ustanovio je da se presijecanjem stošca ravninom mogu dobiti sve tri vrste presjeka. Apolonije je poznat po pojmovima Apolonijeva kružnica, Apolonijeva mreža i Apolonijev problem. [6]

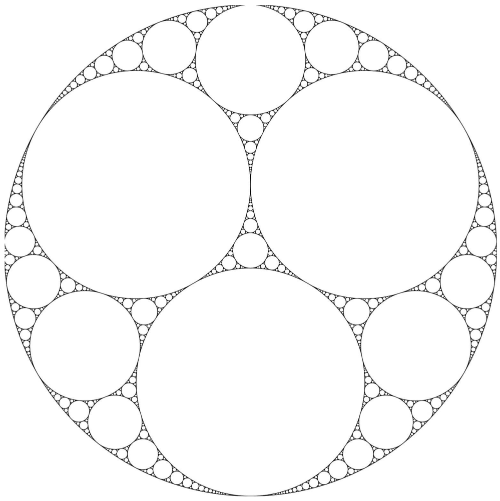
Apolonijeva kružnica je skup svih točaka T ravnine za koje je omjer udaljenosti od dviju zadanih točaka A i B konstantan i iznosi $p : q$, tj. vrijedi $|AT| : |BT| = p : q$.



Slika 1: Apolonijeva kružnica

Ako je omjer jednak jedinici, Apolonijeva kružnica postaje simetrala dužine koja spaja zadane točke.

U kombinatorici, Apolonijeva mreža je fraktal sastavljen od kružnica. Može se geometrijski realizirati i to tako da se započne s tri kružnice koje se međusobno dodiruju, zatim upisati u prazninu koju čine još jednu koja dodiruje sve tri (Apolonijev problem), dalje se nastavlja rekurzivno za nove praznine koje kružnice čine. (Slika 2)



Slika 2: Apolonijeva mreža (preuzeto iz: [8])

U ovom radu proučavat ćemo Apolonijev problem koji glasi:

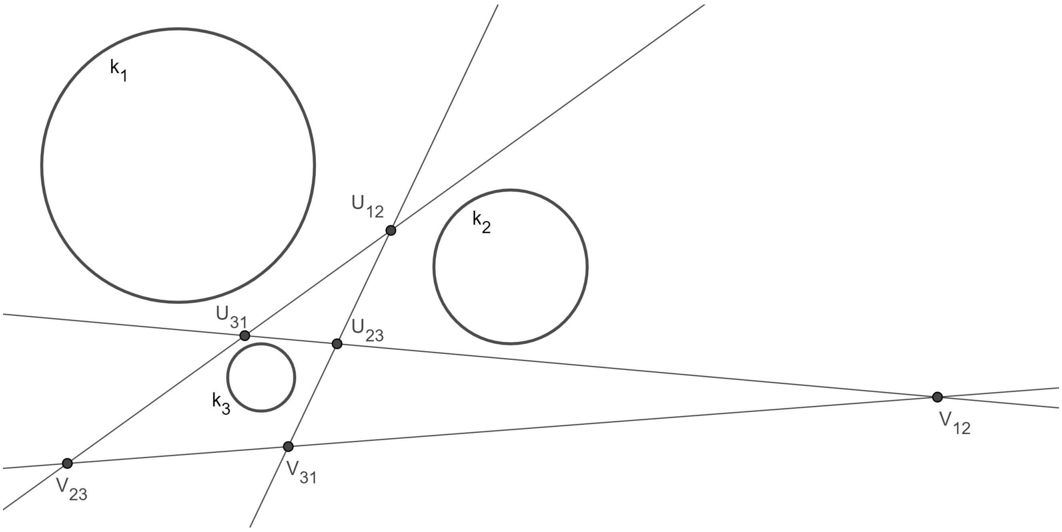
Dani su tri objekta, krug, pravac ili točka. Konstruiraj kružnicu koja dodiruje sva tri dana objekta.

Apolonijev problem proučavali i riješili su, među ostalim, François Viète[1], Isaac Newton[2], Joseph-Diaz Gergonne[3]. Svaki od njih imao je drugačiji pristup problemu. Viète se držao osnova geometrije. Riješio je svih deset slučajeva od jednostavnijih do složenijih slučajeva. Započeo je s tri točke i jednu po jednu mijenjao ih pravcima ili kružnicama da bi na kraju došao do slučaja s tri kružnice. Newton je proučavao konike. U svom djelu *Principia mathematica* (1687.) rješavao je problem gdje su zadane tri točke te treba konstruirati četvrtu, a poznata je razlika udaljenosti tražene točke i danih točaka te to opisuje presjek triju hiperbola. U svome djelu ne spominje kružnice, ali se njegovo rješenje može primijeniti na tri kružnice pošto su centri triju kružnica i razlike udaljenosti među njihovim radijusima ekvivalentni Newtonovim uvjetima. Gergonne je problem riješio tako da je kružnice promatrao u parovima i konstruirao njihove centre sličnosti. (Slika 3) [2]

[1]François Viète (1540. – 1603.), francuski matematičar

[2]Isaac Newton (1642. – 1727.), engleski fizičar, matematičar i astronom

[3]Joseph-Diaz Gergonne (1771. - 1859.) francuski matematičar i logičar



Slika 3: Centri sličnosti triju kružnica

Uvod

Apolonijev problem konstruktivni je zadatak gdje su zadana tri objekta, krug, pravac ili točka te treba konstruirati kružnicu koja dodiruje sve troje. Promatranjem svih slučajeva Apolonijev problem može se podijeliti u deset zasebnih problema:

Problem 1 (TTT)**.** *Konstrukcija kružnice koja prolazi kroz tri zadane točke.*

Problem 2 (TTp)**.** *Konstrukcija kružnice koja prolazi kroz dvije zadane točke i dodiruje zadani pravac.*

Problem 3 (Tpp)**.** *Konstrukcija kružnice koja prolazi kroz zadanu točku i dodiruje dva zadana pravca.*

Problem 4 (ppp)**.** *Konstrukcija kružnice koja dodiruje tri zadana pravca.*

Problem 5 (TTk)**.** *Konstrukcija kružnice koja prolazi kroz dvije zadane točke i dodiruje zadanu kružnicu.*

Problem 6 (Tpk)**.** *Konstrukcija kružnice koja prolazi zadanom točkom i dira dani pravac i danu kružnicu.*

Problem 7 (Tkk)**.** *Konstrukcija kružnice koja prolazi kroz zadanu točku i dira dvije zadane kružnice.*

Problem 8 (ppk)**.** *Konstrukcija kružnice koja dira dva zadana pravca i danu kružnicu.*

Problem 9 (pkk)**.** *Konstrukcija kružnice koja dira zadani pravac i dvije dane kružnice*

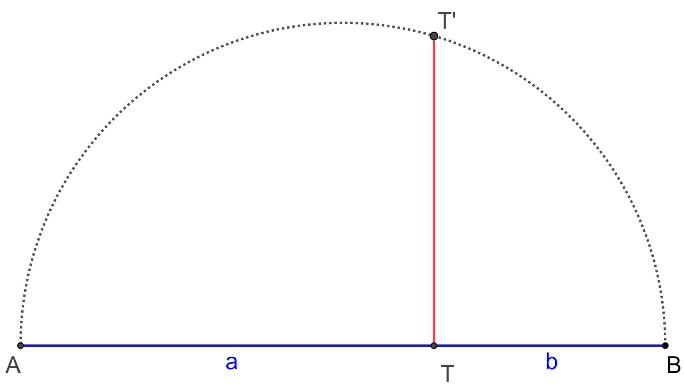
Problem 10 (kkk)**.** *Konstrukcija kružnice koja dira tri zadane kružnice.*

Rješenja ovih problema podijelit ćemo na tri poglavlja. Odabrat ćemo po jedan ili dva načina rješavanja pojedinog slučaja. U prvom poglavlju konstruirat ćemo rješenja jednostavnijih problema (prva četiri), u drugom poglavlju od petog do devetog problema te zatim posvetiti treće poglavlje konstrukciji kružnice koja dira tri dane kružnice. Sve konstrukcije popratit ćemo slikama. Na slici će crvenom bojom biti označena tražena kružnica, a plavom bojom zadani objekti.

Navedimo neke osnovne definicije, teoreme i konstrukcije.

Konstrukcija 1. *Zadane su duljine a i b. Konstruirajmo dužinu duljine $d = \sqrt{ab}$.*

Neka je $\overline{AB}$ dužina te neka je točka T na toj dužini tako da je $|AT| = a$ i $|BT| = b$. Konstruiramo u točki T okomicu na pravac AB te njen presjek s polukružnicom promjera $|AB|$ označimo s T'. Tada je $|TT'| = \sqrt{|AT| \cdot |BT|} = \sqrt{ab} = d$ pa je $\overline{TT'}$ tražena dužina.

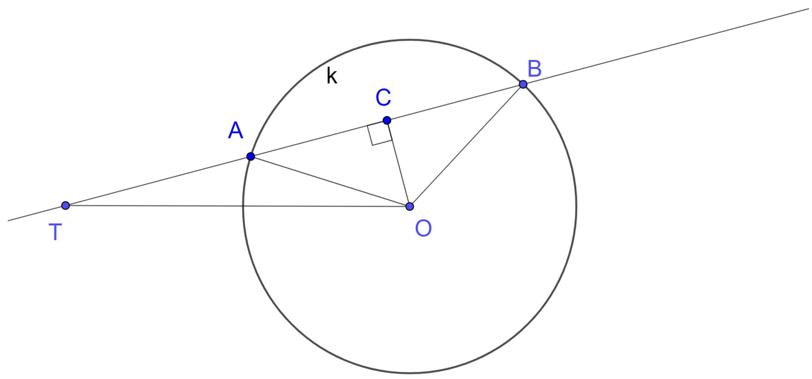


Slika 4: Konstrukcija dužine duljine $d = \sqrt{ab}$

Teorem 1 (Teorem o potenciji točke)**.** *Dana je kružnica $k(O, r)$ i točka T. Ako je p bilo koji pravac kroz T koji siječe k u točkama A, B tada za orijentirane duljine vrijedi $TA \cdot TB = OT^2 - r^2 = konst.$*

Konstantni umnožak $p(k, T) = TA \cdot TB = OT^2 - r^2$ zove se potencija točke T s obzirom na kružnicu k.

Dokaz. Neka je C polovište tetive $\overline{AB}$. Tada imamo:
$TA \cdot TB = (TC + CA) \cdot (TC + CB) = (TC + CA)(TC - CA) = |TC|^2 - |CA|^2$
$= (|TO|^2 - |OC|^2) - (|OA|^2 - |OC|^2) = |TO|^2 - |OA|^2 = |OT|^2 - r^2.$ □

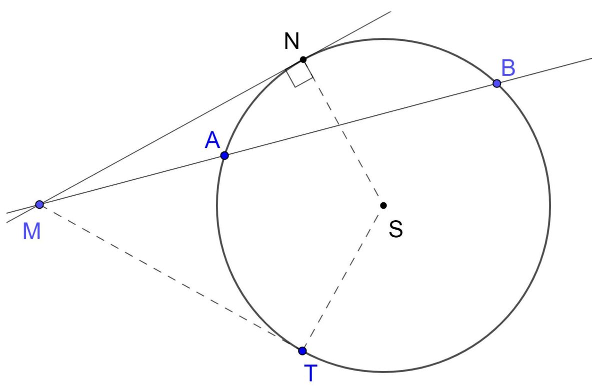


Slika 5: Teorem 1

Napomena. *Ako pravac p dira kružnicu u samo jednoj točki D tada potencija točke T u odnosu na tu kružnicu iznosi $|TD|^2$.*

Teorem 2 (Obrat teorema o potenciji točke)**.** *Neka je k kružnica, M točka izvan kružnice te A, B i T točke na kružnici k. Ako su točke A, B i M kolinearne te vrijedi $MA \cdot MB = MT^2$, onda je pravac MT tangenta kružnice k.*

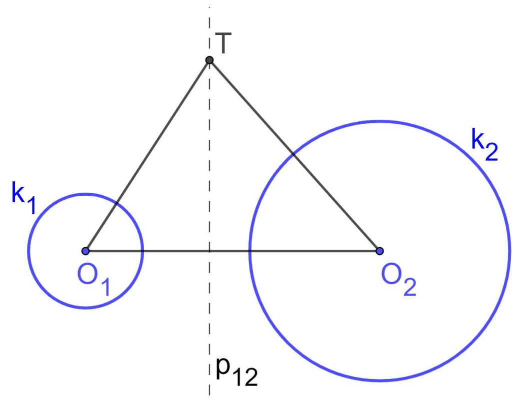
Dokaz. Neka je S središte kružnice k. Neka je N dirалište tangente iz točke M na kružnicu k. Kut $\angle SNM$ je pravi. Po teoremu o potenciji točke vrijedi $MA \cdot MB = MN^2$.
Iz uvjeta teorema znamo: $MA \cdot MB = MT^2$. Dakle $|MT| = |MN|$. Pošto vrijedi $|MT| = |MN|$ i $|SN| = |ST|$ trokuti $\triangle MTS$ i $\triangle MNS$ su sukladni po SSS poučku o sukladnosti trokuta pa vrijedi $\angle MTS = \angle SNM = 90°$ pa je MT tangenta na kružnicu. [Slika 6] □



Slika 6: Teorem 2

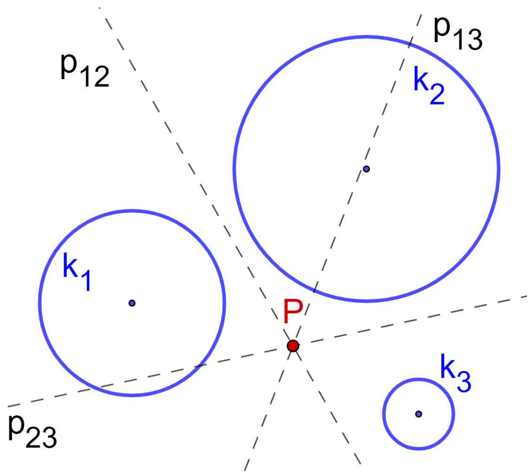
Teorem 3. *Dane su kružnice $k_1(O_1, r_1)$ i $k_2(O_2, r_2)$. Skup svih točaka s jednakim potencijama s obzirom na kružnice k_1, k_2 je pravac p_{12} okomit na pravac O_1O_2, koji prolazi kroz zajedničke točke kružnica k_1, k_2 ako ih one imaju.*

Pravac p_{12} zovemo *potencijalom* ili *radikalnom osi* kružnica k_1 i k_2.



Slika 7: Teorem 3

Teorem 4. *Dane su kružnice k_1, k_2, k_3 čija središta nisu kolinearna. Neka su redom p_{12}, p_{13}, p_{23} potencijale parova kružnica $k_1, k_2; k_1, k_3; k_2, k_3$. Tada se pravci p_{12}, p_{13}, p_{23} sijeku u jednoj točki P.*



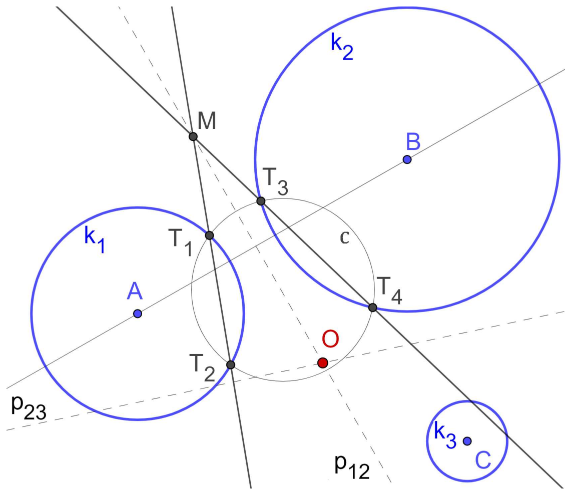
Slika 8: Teorem 4

Konstrukcija 2. *Zadane su kružnice k_1, k_2 i k_3. Nikoje dvije kružnice se ne sijeku. Konstruirajmo njihovo radikalno središte.*

Neka je A središte kružnice k_1, B središte kružnice k_2 i C središte kružnice k_3.

1. konstruiramo proizvoljnu kružnicu c, proizvoljnog radijusa, takvu da siječe kružnicu k_1 u točkama T_1 i T_2 te kružnicu k_2 u točkama T_3 i T_4.
2. $T_1T_2 \cap T_3T_4 = \{M\}$, M je radikalno središte kružnica k_1, k_2 i c
3. okomica iz M na pravac AB je potencijala kružnica k_1 i k_2, označimo ju s p_{12}
4. analogno konstruiramo potencijalu p_{23} kružnica k_2 i k_3
5. $p_{12} \cap p_{23} = \{O\}$

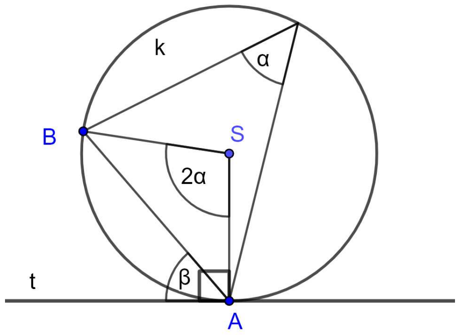
O je radikalno središte zadanih kružnica.



Slika 9: Konstrukcija radikalnog središtav triju kružnica

Teorem 5 (Kut između tetive i tangente)**.** *Kut izmedu tangente kružnice kojoj je diralište u krajnjoj točki tetive jednak je obodnom kutu nad tom tetivom.*

Dokaz. Neka je $\overline{AB}$ tetiva kružnice k sa središtem u točki S, a t tangenta na kružnicu k koja je dira u točki A. Označimo s α mjeru obodnog kuta nad tetivom $\overline{AB}$, a s β mjeru kuta između tetive i tangente. Mjera središnjeg kuta nad tom tetivom jednaka je 2α. Kako je trokut $\triangle ABS$ jednakokračan s osnovicom $\overline{AB}$, vrijedi $\angle SAB = \angle SBA = 90^\circ - \alpha$. S obzirom na to da je tangenta na kružnicu u točki A okomita na polumjer koji sadrži točku A imamo $\beta = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$ što je i trebalo dokazati. □



Slika 10: Teorem 5

Teorem 6. *Simetrale unutarnjih kutova trokuta sijeku se u jednoj točki.*

Teorem 7. *Simetrale bilo koja dva vanjska kuta trokuta i simetrala preostalog trećeg unutarnjeg kuta trokuta sijeku se u jednoj točki.*

Definicija 1. *Dana je točka O i realni broj $k \neq 0$. **Homotetijom** $h(O, k)$ s centrom O i koeficijentom k zovemo preslikavanje skupa točaka ravnine na sebe koje točki T pridružuje točku T' takvu da su točke T, T', O kolinearne te vrijedi $\frac{OT'}{OT} = k$.*

Za $k > 0$, T' leži na polupravcu OT, a za $k < 0$, T' ne leži na polupravcu OT.

Svojstva homotetije:

1. Homotetija s koeficijentom $k = 1$ preslikava svaku točku ravnine u tu istu točku, pa je takvo preslikavanje identiteta.

2. Homotetija h ravnine R je bijekcija.

3. Neka je $h : R \to R$ homotetija ravnine R, tada vrijedi:

   (i) h preslikava svaku dužinu $\overline{AB}$ na njoj paralelnu dužinu $\overline{A'B'}$,

   (ii) h preslikava svaki pravac $p \subset R$ na pravac $p' \subset R$ paralelan sa p,

   (iii) ako p sadrži središte homotetije, onda je $h(p) = p$.

4. Neka su dužine $\overline{AB}$ i $\overline{A'B'}$ paralelne, tada postoje točno dvije homotetije koje dužinu $\overline{AB}$ preslikavaju na dužinu $\overline{A'B'}$.

5. Ako trokuti ABC i DEF nisu sukladni i ako im odgovarajuće stranice leže na paralelnim pravcima, tada postoji točno jedna homotetija koja preslikava jedan u drugi.

6. Ako trokuti ABC, $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ nisu u parovima sukladni i ako im odgovarajuće stranice leže na paralelnim pravcima, tada za svaki par trokuta postoji točno jedna homotetija koja preslikava jedan u drugi i središta tih homotetija su kolinearne točke.

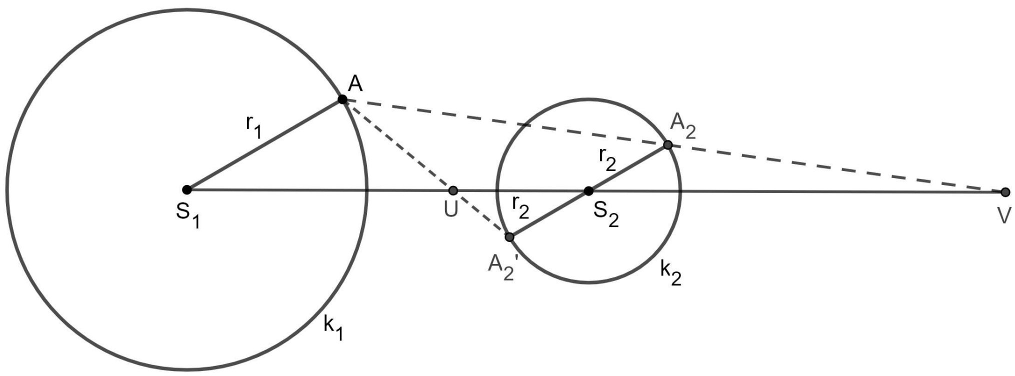
7. Ako je $k_1k_2 = 1$, tada je kompozicija dvije homotetije $h_1(O_1, k_1)$ i $h_2(O_2, k_2)$ translacija.

8. Kompozicija dviju homotetija s istim središtem je homotetija s istim središtem i koeficijentom koji je jednak umnošku koeficijenata danih homotetija.

9. Homotetija $h(O, a) : R \to R$ preslikava kružnicu $k(S, r)$ u kružnicu $k'(S', |a|r)$. Ako je $O = S$, tada su kružnice k i k' koncentrične kružnice.

10. Ako su $k_1(S_1, r_1)$ i $k_2(S_2, r_2)$ dvije kružnice s različitim središtima i različitim polumjerima, tada postoje točno dvije homotetije sa središtima O_1, $O_2 \in S_1S_2$ koje preslikavaju kružnicu k_1 u kružnicu k_2.

Teorem 8. *Dane su dvije kružnice $k_1(S_1, r_1)$ i $k_2(S_2, r_2)$. Neka je $\overline{S_1A}$ bilo koji polumjer kružnice k_1 i $\overline{A_2A_2'}$ njemu paralelan promjer kružnice k_2, pri čemu točke A i A_2 leže s iste strane pravca S_1S_2. Tada svi pravci AA_2 prolaze jednom čvrstom točkom V, a svi pravci AA_2' jednom čvrstom točkom U. Točke V i U su tzv. vanjski i unutrašnji centar sličnosti kružnica k_1 i k_2 te leže na pravcu S_1S_2.*

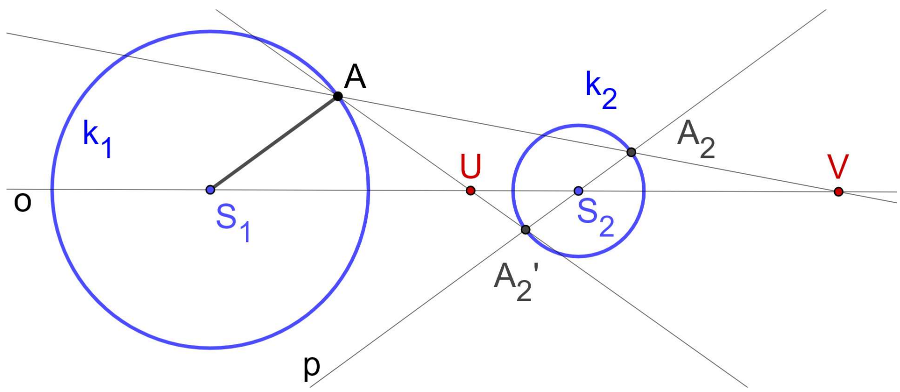


Slika 11: Teorem 8

Konstrukcija 3. *Zadane su kružnice $k_1(S_1, r_1)$ i $k_2(S_2, r_2)$. Konstruirajmo njihov unutarnji i vanjski centar sličnosti.*

1. $\overline{S_1A}$ polumjer kružnice k_1
2. p = pravac paralelan s S_1A kroz S_2
3. $p \cap k_2 = \{A_2, A_2'\}$
4. $o = S_1S_2$
5. $AA_2 \cap o = \{V\}$
6. $AA_2' \cap o = \{U\}$

Vanjski centar sličnosti je točka V, a unutarnji centar sličnosti točka U.



Slika 12: Konstrukcija unutarnjeg i vanjskog središta dviju kružnica

Konstrukcija 4. *Zadane su kružnice $k_1(S_1, r_1)$ i $k_2(S_2, r_2)$. Konstruirajmo njihove zajedničke tangente.*

Bez smanjenja općenitosti neka je $r_1 < r_2$.

1. $k_3 = k(S_2, r_2 - r_1)$
2. konstruirajmo tangentu t iz S_1 na kružnicu k_3 te njihovo diralište označimo s M
3. povucimo polupravac S_2M
4. $S_2M \cap k_2 = \{N\}$

5. paralela s t u N je tangenta t_1 kružnica k_1 i k_2

6. druga tangenta t_2 je pravac simetričan pravcu t_1 obzirom na S_1S_2

7. $k_4 = k(S_2, r_2 + r_1)$

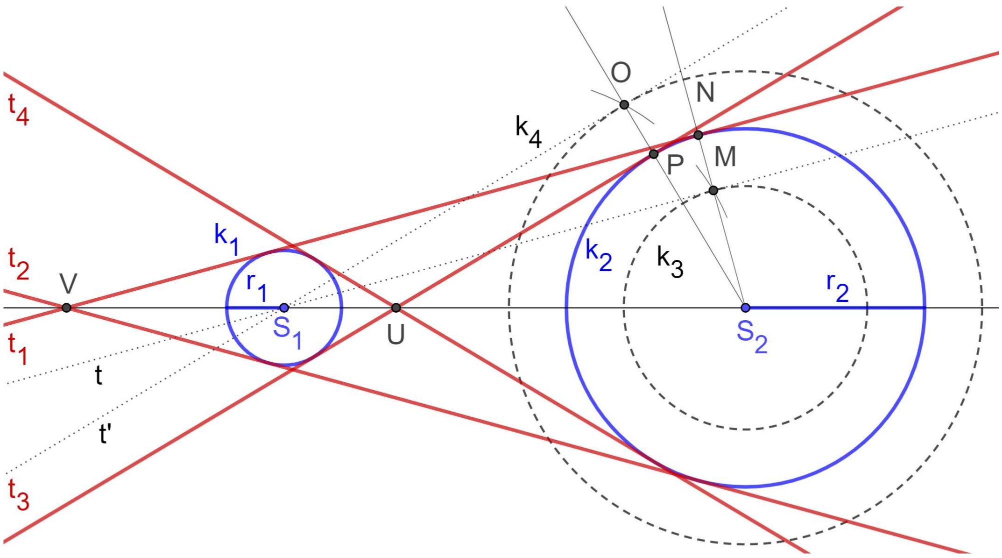
8. konstruirajmo tangentu t iz S_1 na kružnicu k_4 te njihovo diralište označimo s O

9. povucimo polupravac S_2O

10. $S_2O \cap k_2 = \{P\}$

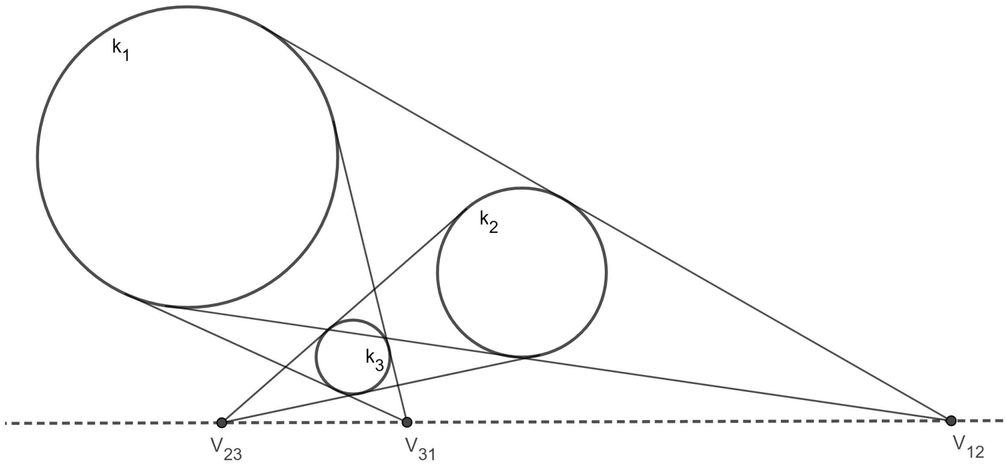
11. paralela s t' u P je tangenta t_3 kružnica k_1 i k_2

12. druga tangenta t_4 je pravac simetričan pravcu t_3 obzirom na S_1S_2



Slika 13: Zajedničke tanegente dviju kružnica

Teorem 9. *Dane su kružnice $k_1(O_1, r_1)$, $k_2(O_2, r_2)$ i $k_3(O_3, r_3)$. Neka su V_{23}, U_{23}; V_{31}, U_{31}; V_{12}, U_{12} vanjski i unutarnji centri sličnosti parova kružnica k_2, k_3; k_3, k_1; k_1, k_2. Tada točke V_{23}, V_{31}, V_{12}; V_{23}, U_{31}, U_{12}, U_{23}, V_{31}, U_{12}; U_{23}, U_{31}, V_{12} leže na po jednom pravcu. Ta četiri pravca zovu se osi sličnosti kružnica k_1, k_2, k_3.*



Slika 14: Teorem 9

Definicija 2. *Dana je kružnica $k(O, r)$.* ***Inverzija*** *ravnine R u odnosu na kružnicu k je preslikavanje koje svaku točku A te ravnine različitu od O preslikava u točku A' na polupravcu OA tako da vrijedi $OA \cdot OA' = r^2$. Kružnicu $k(O, r)$ zovemo kružnicom inverzije, točku O zovemo središtem inverzije, duljinu r polumjer inverzije, a veličinu r^2 potencijom inverzije.*

Svojstva inverzije:

1. Neka su A, A' i B, B' dva para pridruženih točaka inverzije s centrom O. Tada je $AA'B'B$ tetivni četverokut i $\angle OAB = \angle OB'A'$, $\angle OBA = \angle OA'B'$.

2. Ako su A, A' i B, B' dva para pridruženih točaka inverzije, onda vrijedi $|A'B'| = \frac{r^2}{|OA| \cdot |OB|} \cdot |AB|$.

3. Ako je c kružnica koja sadrži par pridruženih točaka A, A' inverzije, onda je c ortogonalna na kružnicu te inverzije.

4. Pravac p koji prolazi središtem O kružnice k inverzije pri toj inverziji preslikava se u samog sebe.

5. Pravac p koji ne prolazi središtem O inverzije pri toj inverziji preslikava se u kružnicu koja prolazi točkom O i u toj točki ima tangentu paralelnu s pravcem p.

6. Ako je O centar inverzije, a točke A i B tom su inverzijom preslikane u A' i B', tada su trokuti $\triangle OAB$ i $\triangle OA'B'$ slični.

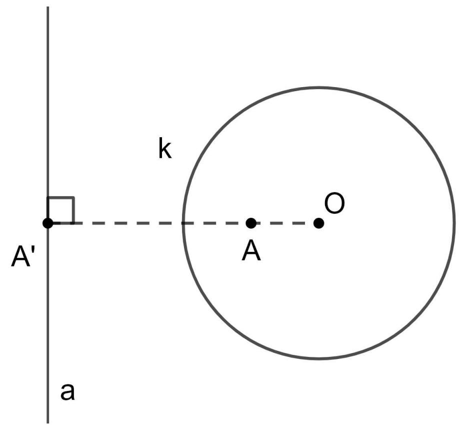
7. Slika kružnice koja prolazi centrom O inverzije pri toj inverziji je pravac paralelan s tangentom te kružnice u točki O.

8. Slika kružnice c koja ne prolazi kroz centar O inverzije i pri toj inverziji je kružnica c' takva da je O centar sličnosti kružnica c, c' i to vanjski ako je O izvan c, a unutrašnji ako je O unutar kružnice c.

9. Inverzija je konformno preslikavanje, tj. čuva kutove među krivuljama.

Dokazi navedenih svojstava homotetije i inverzije nalaze se u [1].

Definicija 3. *Neka je dana kružnica $k(O, r)$. Polaritet s obzirom na kružnicu k je bijekcija između skupa točaka i skupa pravaca takva da za pridružene elemente A, a vrijedi $OA \cdot OA' = r^2$ i $OA \perp a$, gdje je $A' \in OA \cap a$, tj. A, A' su inverzne točke za inverziju $[O, r^2]$. Točki O pridružujemo beskonačno daleki pravac, a pravcu a kroz O pridružujemo beskonačno daleku točku pravca okomitog na a. Pridružene elemente A, a zovemo pol, odnosno polara jedno drugome s obzirom na kružnicu k.*



Slika 15: Definicija 3, Pol i polara

Poglavlje 1

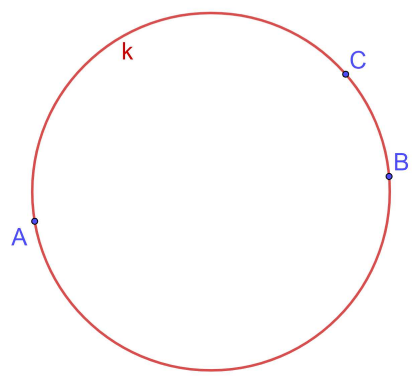
Rješenja problema 1 - 4

U ovom ćemo poglavlju opisati konstrukciju Apolonijevih problema u kojima nema kružnice, tj. u kojima su svi zadani elementi ili točke ili pravci. To su problemi TTT, TTp, ppT i ppp.

1.1 Problem TTT

Problem. *U ravnini zadane su tri različite točke A, B, C. Konstruirati kružnicu k koja prolazi kroz sve tri točke.*

Analiza:

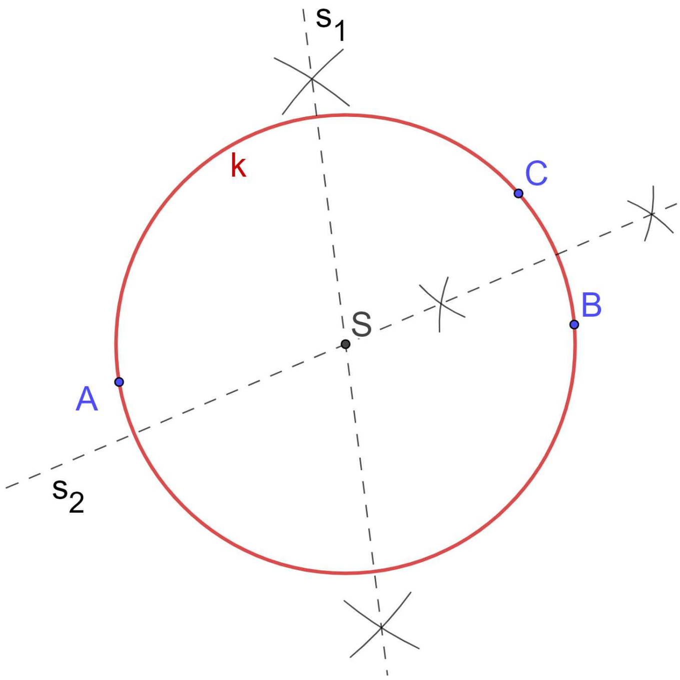


Slika 1.1: Analiza slučaja TTT

Uočavamo da je kružnica k opisana kružnica trokutu ABC što znači da ćemo njeno središte lagano naći.

Konstrukcija:

1. s_1 = simetrala dužine $\overline{AB}$
2. s_2 = simetrala dužine $\overline{AC}$
3. $s_1 \cap s_2 = \{S\}$
4. $k = k(S, |SA|)$



Slika 1.2: Konstrukcija slučaja TTT

Dokaz:
Treba dokazati da točke A, B, C pripadaju dobivenoj kružnici. A očito leži na kružnici. Dokažimo da točke B i C također leže na kružnici.
Znamo da točka S leži na simetrali s_1 pa vrijedi $|SA| = |SB|$. Točka B leži na kružnici. Također, S leži na simetrali s_2 pa vrijedi $|SA| = |SC|$. Točka C leži na kružnici. □

Rasprava:
Analizirajmo pojedine korake konstrukcije te primijetimo da u 3. koraku nema sjecišta ako je $s_1 \parallel s_2$, a to će se dogoditi samo ako su A, B i C kolinearne. Dakle, ako su A, B i C kolinearne ne postoji kružnica koja prolazi kroz sve tri točke. Ako točke nisu kolinearne, onda uvijek postoji takva kružnica i ona je jedinstvena.

1.2 Problem TTp

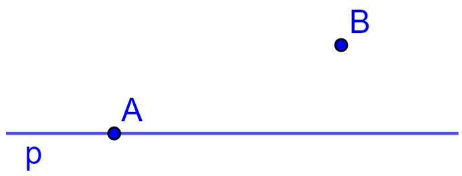
Problem. *U ravnini zadane su dvije različite točke A i B te pravac p. Konstruirati kružnicu koja prolazi točkama A i B i dira pravac p.*

Promotrimo prvo sve moguće međusobne položaje danih objekata.

1. Točke A i B nalaze na pravcu p.
   Tada nema rješenja.

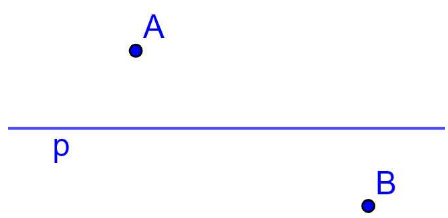
Slika 1.3: TTp, $A, B \in p$

2. Točka A nalazi se na pravcu p.
   Ovaj slučaj ćemo analizirati nešto kasnije. (Slučaj A)



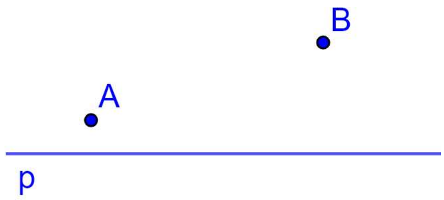
Slika 1.4: TTp, $A \in p$

3. Točke A i B nalaze s različitih strana pravca p.
   Tada nema rješenja.



Slika 1.5: TTp, A, B s različitih strana pravca p

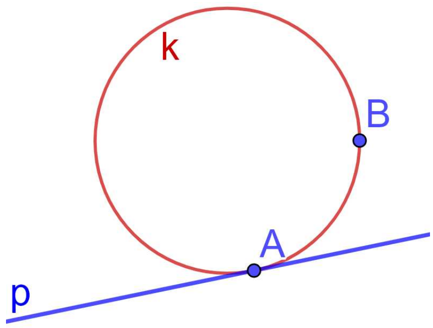
4. Točke A i B su s iste strane pravca p te mu ne pripadaju.
   Ovaj slučaj ćemo detaljno analizirati. (Slučaj B)



Slika 1.6: TTp, A, B s istih strana pravca p

Slučaj A. *Apolonijev problem TTp u situaciji kada je točka A na pravcu p. Trebamo konstruirati kružnicu kroz dvije zadane točke koja dodiruje zadani pravac.*

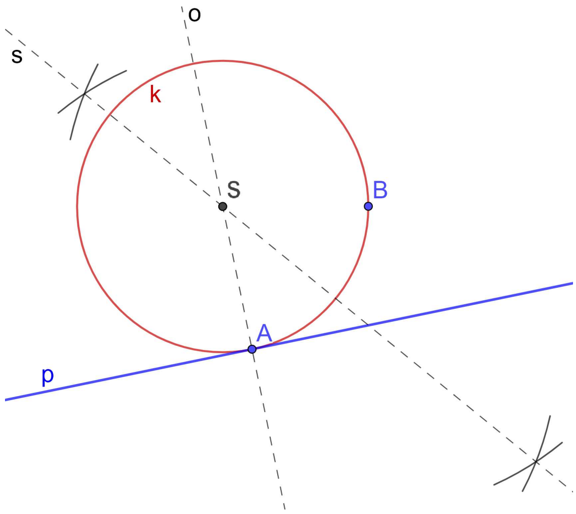
Analiza:



Slika 1.7: Analiza problema TTp, slučaj A

Želimo najprije odrediti središte tražene kružnice k. Kako je $\overline{AB}$ tetiva tražene kružnice, njeno središte leži na simetrali dužine $\overline{AB}$. Znamo i da je pravac p tangenta kružnice k u točki A pa je $SA \perp p$, tj. točka S leži na okomici na p kroz A.

Konstrukcija:
Konstruiramo li simetralu s dužine $\overline{AB}$ i okomicu o iz točke A na pravac p, sjecište pravaca p i o je središte tražene kružnice. Preostaje samo opisati kružnicu $k = k(S, |SA|)$. k je tražena kružnica. [Slika 1.8]



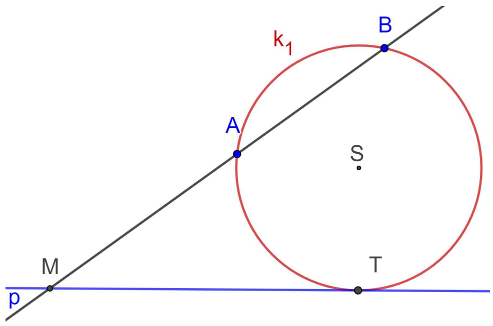
Slika 1.8: Konstrukcija problema TTp, slučaj A

Dokaz:
Znamo da k prolazi kroz točku A. Prolazi i kroz točku B jer je s pripada simetrali dužnine $\overline{AB}$ pa je $|SA| = |SB|$. Kružnica k dira pravac p jer je $SA \perp p$. □

Rasprava:
Okomica na p i simetrala od $\overline{AB}$ neće se sjeći samo ako $B \in p$.

Slučaj B. *Apolonijev problem TTp u situaciji kada su točke A i B s iste strane pravca p i ne nalaze se na njemu. Trebamo konstruirati kružnicu kroz dvije zadane točke koja dodiruje zadani pravac.*

Analiza:

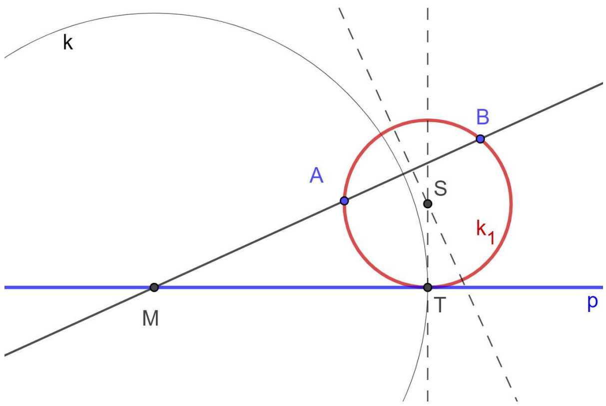


Slika 1.9: Analiza problema TTp, slučaj B

Neka je sjecište pravca AB s pravcem p točka M, a dralište pravca p i tražene kružnice točka T. Po teoremu o potenciji točke [Teorem 1] vrijedi $|AM| \cdot |BM| = |MT|^2$. Prema konstrukciji [1] možemo konstruirati duljinu $|MT|$ i odrediti točku T. Nakon toga nije teško konstruirati središte tražene kružnice i samu kružnicu.

Konstrukcija:

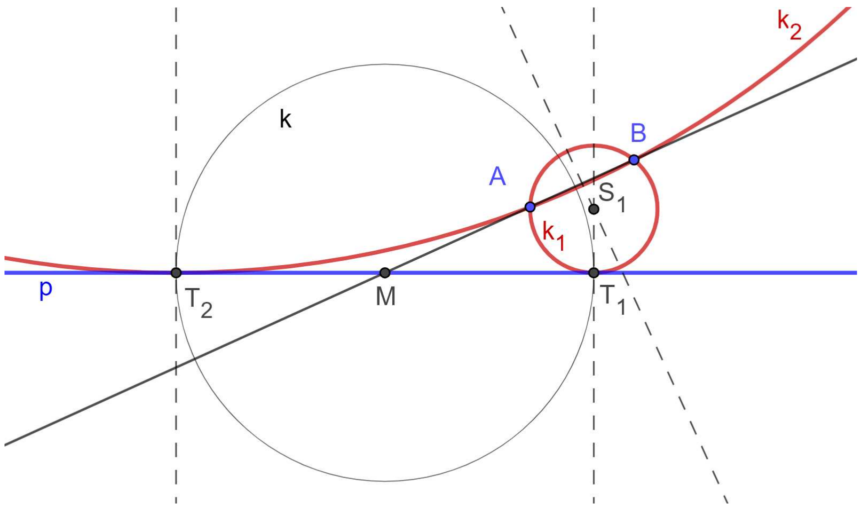
1. $p \cap AB = \{M\}$
2. konstruirajmo dužinu duljine $d = \sqrt{|MA| \cdot |MB|}$ [Konstrukcija 1]
3. $k = k(M, d)$
4. $k \cap p = \{T\}$
5. okomica na p u T
6. simetrala dužine $\overline{AB}$
7. S sjecište okomice na p u T i simetrale dužine $\overline{AB}$
8. $k_1 = k(S, |SA|)$ tražena kružnica



Slika 1.10: Konstrukcija problema TTp, slučaj B

Dokaz:
Treba dokazati da k_1 prolazi kroz točke A i B te dira pravac p u točki T. Iz konstrukcije je jasno da prolazi kroz točke A i B, a da dira pravac p slijedi iz Teorema 2. □

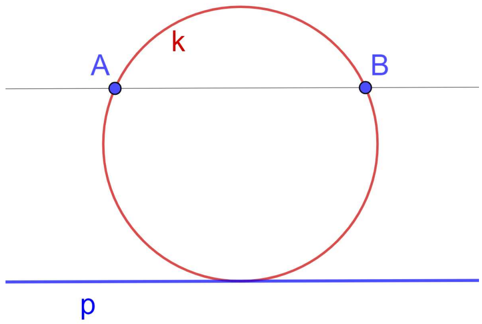
Rasprava:
U prvom koraku konstrukcije može doći do problema kada su $p \parallel AB$. Tada u 6. koraku okomica iz T paralelna je sa simetralom dužine $\overline{AB}$ što bi značilo da je $AB \parallel p$, ali u tom slučaju nema ni točke M. To ćemo analizirati kasnije (Slučaj C).
U koraku 3. kružnica $k(M,d)$ uvijek siječe p u dvije točke jer je M na p pa postoje dva rješenja [Slika 1.11].



Slika 1.11: Konstrukcija problema TTp, slučaj B - 2 rješenja

Slučaj C. *Apolonijev problem TTp u situaciji kada su točke A i B s iste strane pravca p i ne nalaze se na njemu, a $AB \parallel p$. Trebamo konstruirati kružnicu kroz dvije zadane točke koja dodiruje zadani pravac.*

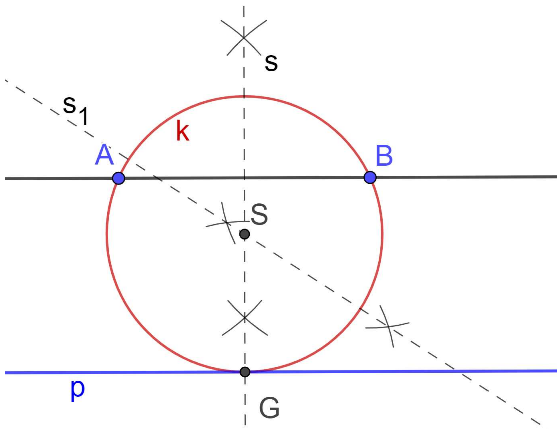
Analiza:



Slika 1.12: Analiza problema TTp, slučaj C

Neka je G nožište simetrale dužine AB na pravac p. Središte tražene kružnice nalazi se na presjeku simetrala dužine $\overline{AB}$ i dužine $\overline{BG}$

Konstrukcija:
Konstruiramo simetralu s dužine $\overline{AB}$ i označimo $s \cap p = \{G\}$. Konstruiramo simetralu s_1 dužine $\overline{GB}$. Označimo $s \cap s_1 = \{S\}$ tada je tražena kružnica $k = k(S, |SA|)$. (Slika 1.13)



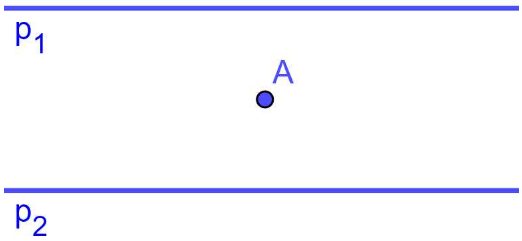
Slika 1.13: Konstrukcija problema TTp, slučaj C

1.3 Problem Tpp

Problem. *U ravnini zadani su različiti pravci p_1 i p_2 te točka A. Konstruirati kružnicu koja prolazi kroz A i dira pravce p_1 i p_2.*

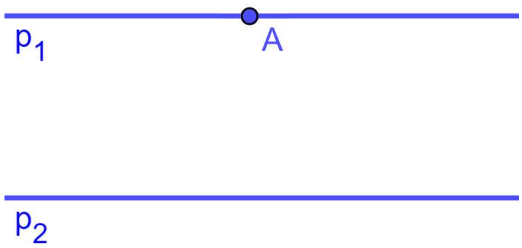
Promotrimo prvo sve moguće međusobne položaje danih objekata.

1. Pravci p_1 i p_2 su paralelni te se točka A nalazi između njih.
   Ovaj slučaj ćemo analizirati nešto kasnije. (Slučaj A)



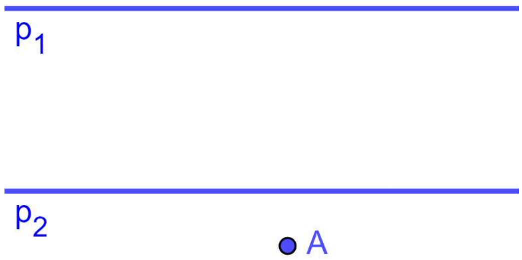
Slika 1.14: Tpp, $p_1 \parallel p_2, A \notin p_1, A \notin p_2$, A između p_1 i p_2

2. Pravci p_1 i p_2 su paralelni te se točka A nalazi na jednom od njih.
   Ovaj slučaj ćemo analizirati nešto kasnije. (Slučaj B)



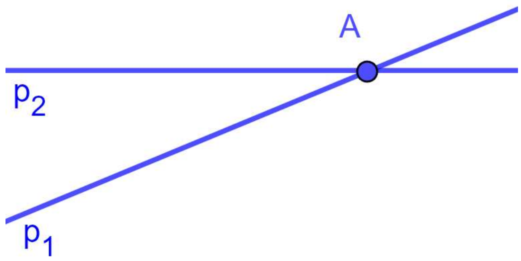
Slika 1.15: Tpp, $p_1 \parallel p_2, A \in p_1, A \notin p_2$

3. Pravci p_1 i p_2 su paralelni te se točka A ne nalazi ni na jednom od njih niti između njih.
   Tada nema rješenja.



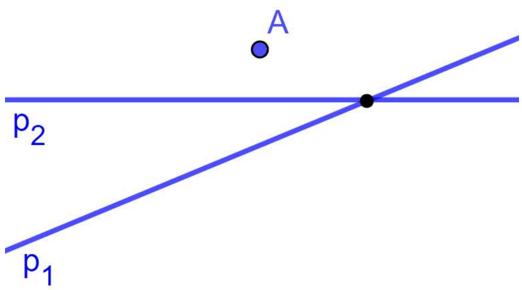
Slika 1.16: Tpp, $p_1 \parallel p_2, A \notin p_1, A \notin p_2$, A nije između p_1 i p_2

4. Pravci p_1 i p_2 se sijeku u točki A.
   Tada nema rješenja.



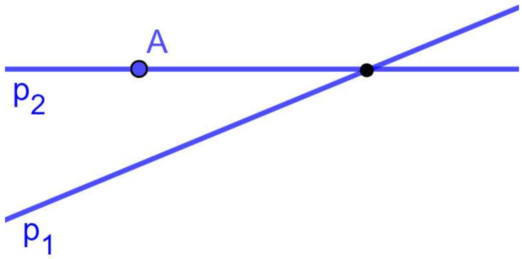
Slika 1.17: Tpp, $\{A\} = p_1 \cap p_2$

5. Pravci p_1 i p_2 se sijeku te točka A se ne nalazi ni na jednom od njih.
   Ovaj slučaj ćemo analizirati nešto kasnije. (Slučaj C)



Slika 1.18: Tpp, p_1 i p_2 se sijeku, $A \notin p_1, A \notin p_2$

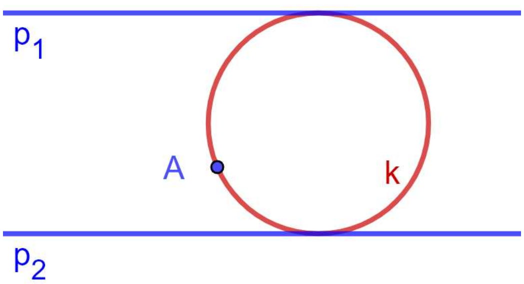
6. Pravci p_1 i p_2 se sijeku te se točka A nalazi na jednom od njih.
   Ovaj slučaj ćemo analizirati nešto kasnije. (Slučaj D)



Slika 1.19: Tpp, p_1 i p_2 se sijeku, $A \notin p_1, A \in p_2$

Slučaj A. *Apolonijev problem Tpp u situaciji kada su pravci p_1 i p_2 paralelni te se točka A nalazi između njih. Trebamo konstruirati kružnicu koja prolazi kroz zadanu točku i dira zadane pravce.*

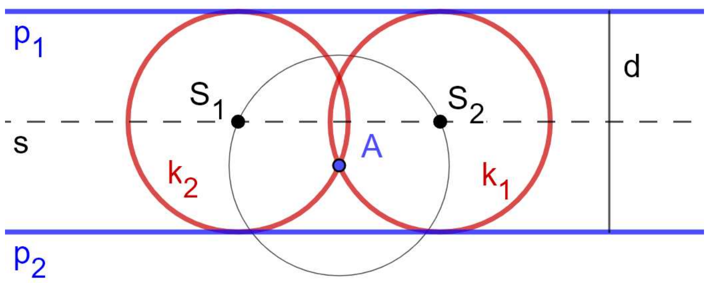
Analiza:



Slika 1.20: Analiza problema Tpp, slučaj A

Želimo odrediti središte tražene kružnice k. Kako tražena kružnica dira pravce p_1 i p_2 radijus joj mora biti pola njihove udaljenosti, a središte se mora nalaziti na pravcu jednako udaljenom od danih pravaca.

Konstrukcija: Neka je d udaljenost pravaca p_1 i p_2, a s pravac koji je paralelan zadanima i jednako udaljen od p_1 i p_2. Središte tražene kružnice konstruiramo kao sjecište pravca s i kružnice $k(A, \frac{1}{2}d)$. Pošto kružnica k siječe pravac s u dvije točke, k_1 i k_2 tražene su kružnice [Slika 1.21].

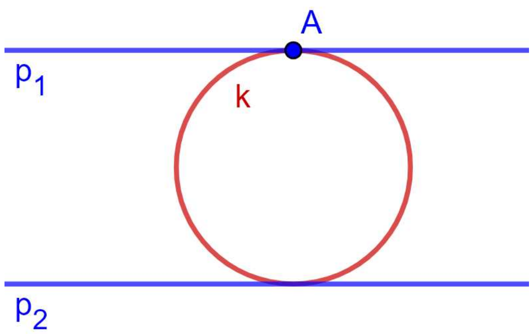


Slika 1.21: Konstrukcija problema Tpp, slučaj A

Rasprava:
Kako je A između p_1 i p_2, $k(A, \frac{d}{2})$ mora sjeći s u dvije točke pa uvijek postoje dva rješenja.

Slučaj B. *Apolonijev problem Tpp u situaciji kada su pravci p_1 i p_2 paralelni te se točka A nalazi na jednom od njih. Trebamo konstruirati kružnicu koja prolazi kroz zadanu točku i dira zadane pravce.*

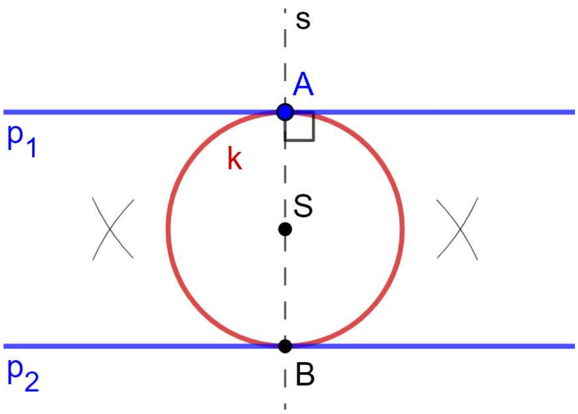
Analiza:



Slika 1.22: Analiza problema Tpp, slučaj B

Želimo odrediti središte tražene kružnice k. Pošto se A nalazi na pravcu p_1, središte S tražene kružnice k polovište je dužine kojoj je jedna krajnja točka točka A, a druga krajnja točka sjecište okomice iz A na pravac p_2. Radijus joj je duljine $|SA|$.

Konstrukcija:
Konstruiramo okomicu iz A na p_1 i njeno sjecište s p_2 označimo s B. S je polovište dužine $\overline{AB}$. Tražena je kružnica $k(S, |SA|)$ [Slika 1.23].

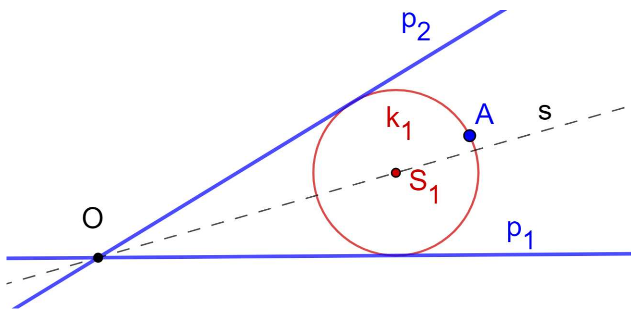


Slika 1.23: Konstrukcija problema Tpp, slučaj B

Raprava:
Rješenje je uvijek jedinstveno.

Slučaj C. *Apolonijev problem Tpp u situaciji kada su zadana dva neparalelna pravca* p_1 *i* p_2 *i točka A koja ne pripada ni jednom od danih pravaca. Trebamo konstruirati kružnicu koja prolazi kroz zadanu točku i dira zadane pravce.*

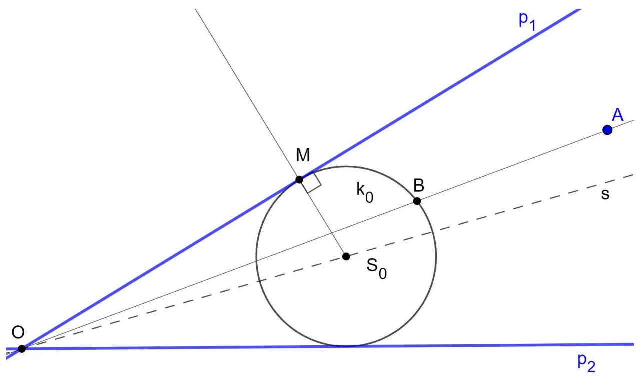
Analiza:
Kako je točka S jednako udaljena od pravaca p_1 i p_2, ona leži na simetrali kuta $\sphericalangle p_1 O p_2$. [Slika 1.24]



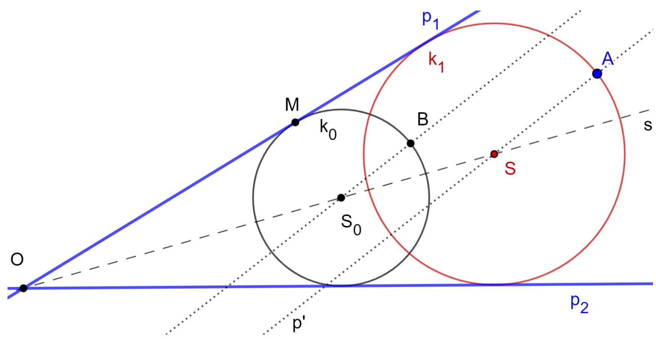
Slika 1.24: Analiza problema Tpp, slučaj C

Konstrukcija:

1. $p_1 \cap p_2 = \{O\}$
2. s = simetrala kuta $\sphericalangle p_1 O p_2$
3. proizvoljna točka $S_0 \in s$
4. nožište okomice iz S_0 na $p_2 = \{M\}$
5. kružnica $k_0 = k(S_0, |S_0 M|)$
6. $OA \cap k = \{B\}$
7. paralela s BS_0 siječe s u S
8. tražena kružnica je $k = k(S, |SA|)$



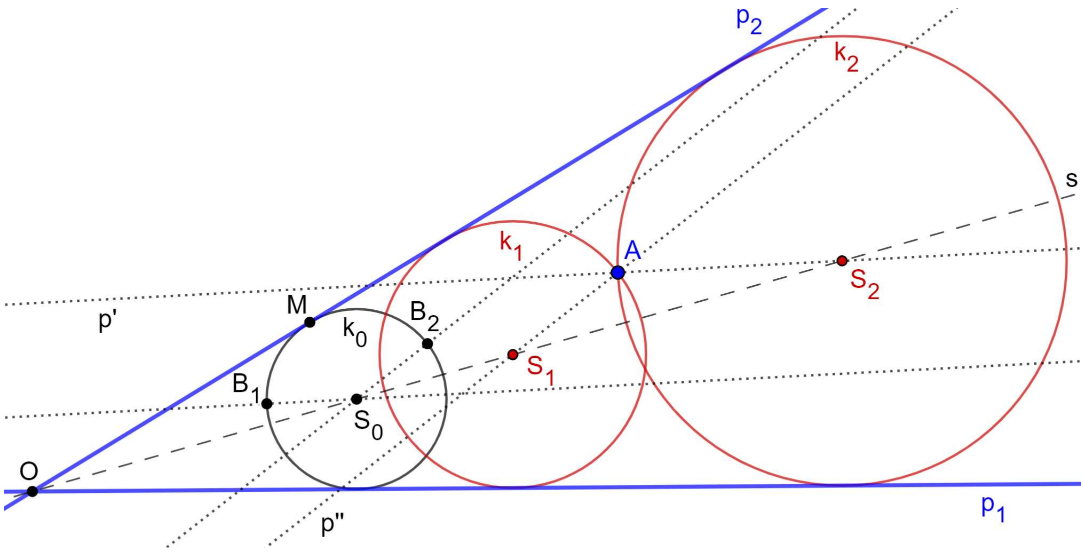
Slika 1.25: Početak konstrukcije problema Tpp, slučaj C



Slika 1.26: Nastavak konstrukcije problema Tpp, slučaj C

Dokaz:
Treba dokazati da kružnica $k = k(S, |SA|)$ prolazi kroz točku A te da su joj pravci p_1 i p_2 tangente. Iz konstrukcije jasno je da prolazi kroz A, dokažimo još da su pravci p_1 i p_2 tangente dobivene kružnice.
Promotrimo homotetiju h sa središtem O koja preslikava točku $B \mapsto A$. Ta homotetija sigurno postoji jer su točke A, B i O kolinearne te je ta homotetija jedinstveno određena. Kako je $BS_0 \parallel AS$, O, S i S_0 kolinearne, kružnica $k(S_0, |S_0B|)$ preslikava se homotetijom h u kružnicu $k(S, |SA|)$. Uočimo da se pravci p_1 i p_2 preslikaju u sebe (jer prolaze centrom homotetije). Kako su ti pravci tangente kružnice $k(S_0, |S_0B|)$, oni moraju biti i tangente njene slike po homotetiji, što znači da diraju kružnicu $k(S, |SA|)$. □

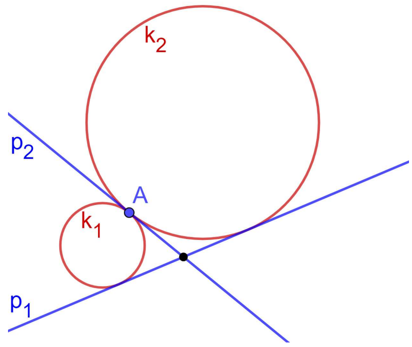
Rasprava:
U 2. koraku možemo povući i drugu simetralu, ali nećemo dobiti rješenja. Primijetimo da u 6. koraku pravac OA ima dva sjecišta s kružnicom k pa postoje dva rješenja. [Slika 1.27]



Slika 1.27: Konstrukcije svih rješenja problema Tpp, slučaj *C*

Slučaj D. *Apolonijev problem Tpp u situaciji kada su zadana dva neparalelna pravca p_1 i p_2 i točka A koja pripada jednom od danih pravaca. Trebamo konstruirati kružnicu koja prolazi kroz zadanu točku i dira zadane pravce.*

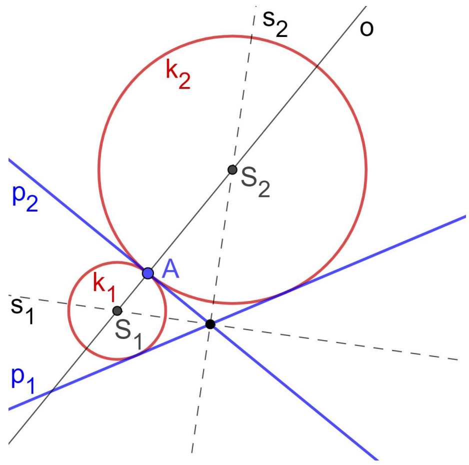
Analiza:



Slika 1.28: Analiza problema Tpp, slučaj D

Središta traženih kružnica nalaze se na presjeku simetrala kutova i okomice u točki A. [Slika 1.28]

Konstrukcija:
Neka je točka A na pravcu p_2. Konstriramo okomicu o iz A na p_2. Konstruiramo simetrale, s_1 i s_2, kutova između pravaca p_1 i p_2. S_1 i S_2 sjecišta su simetrala s_1 i s_2 s pravcem o. Tražene su kružnice $k_1 = k(S_1, |S_1A|)$ i $k_2 = k(S_2, |S_2A|)$. [Slika 1.29]



Slika 1.29: Konstrukcija problema Tpp, slučaj D

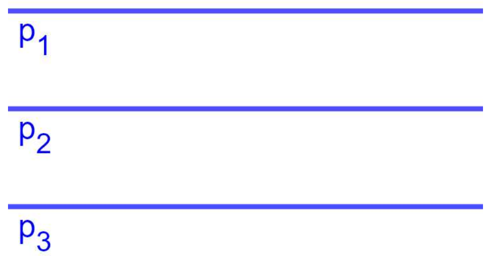
Raprava:
Uvijek postoje dva rješenja.

1.4 Problem ppp

Problem. *U ravnini zadani su različiti pravci p_1, p_2 i p_3. Konstruirati kružnicu koja dira sva tri pravca.*

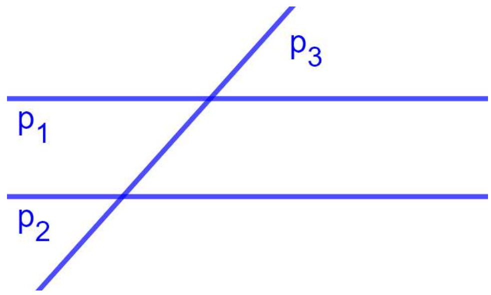
Promotrimo prvo sve moguće međusobne položaje triju pravaca.

1. Sva tri pravca međusobno su paralelna.
   Tada nema rješenja.



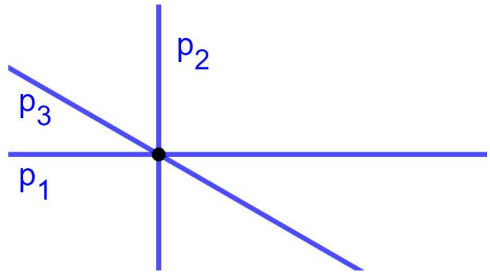
Slika 1.30: ppp, $p_1 \parallel p_2 \parallel p_3$

2. Dva pravca su paralelna, treći ih siječe.
   Ovaj slučaj ćemo analizirati nešto kasnije. (Slučaj A)



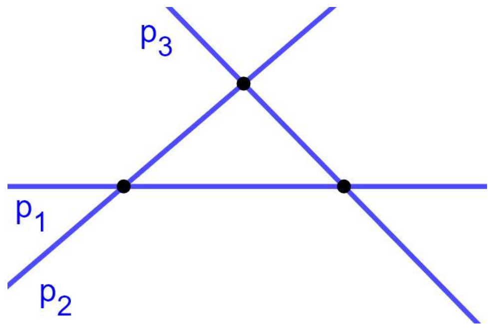
Slika 1.31: ppp, $p_1 \parallel p_2$

3. Sva tri pravca prolaze kroz istu točku.
   Tada nema rješenja.



Slika 1.32: ppp, nikoja dva pravca nisu paralelna

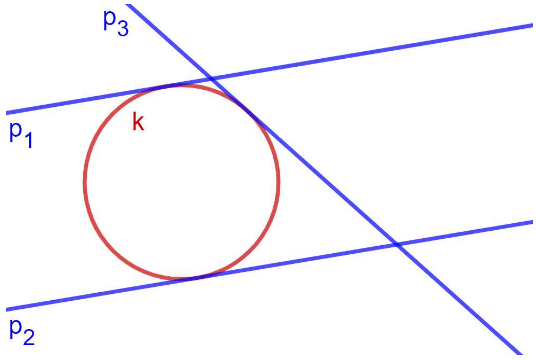
4. Nikoja dva pravca nisu paralelna, a svaka dva se sijeku u različitim točkama. Ovaj slučaj ćemo analizirati nešto kasnije. (Slučaj B)



Slika 1.33: ppp, $p_1 \parallel p_2 \parallel p_3$

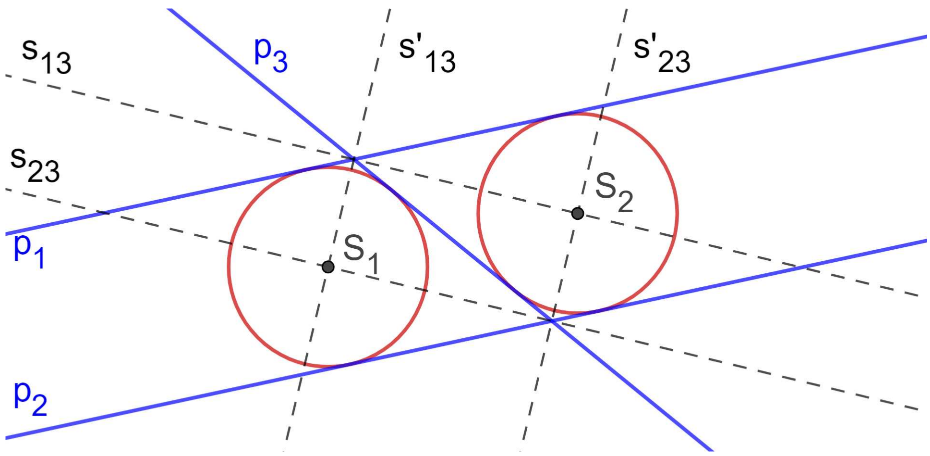
Slučaj A. *Apolonijev problem ppp u situaciji kada su dva od zadanih pravaca paralelni, a treći ih siječe. Trebamo konstruirati kružnicu koja dira sva tri pravca.*

Analiza:
Neka su p_1 i p_2 paralelni pravci, te p_3 pravac koji ih siječe. Središte kružnice koja dira dva pravca leži na simetrali kuta između tih pravaca (tj. jednoj od njih). Kako bi kružnica dirala pravce p_1, p_2 i p_3 njeno središte treba biti na simetrali $\sphericalangle p_1 p_3$ i $\sphericalangle p_2 p_3$.



Slika 1.34: Analiza problema ppp, slučaj A

Konstrukcija:
Neka su s_{13} i s'_{13} simetrale kutova koje zatvaraju pravci p_1 i p_3, a s_{23} i s'_{23} simetrale kutova koje zatvaraju pravci p_2 i p_3. Simetrale kutova uz presječnicu paralelnih pravaca sijeku se u dvije točke $\{S_1\} = s'_{13} \cap s_{23}$ i $\{S_2\} = s'_{23} \cap s_{13}$ i te su točke središta traženih kružnica. Neka je d udaljenost pravaca p_1 i p_2 tada su tražene kružnice $k_1 = k(S_1, \frac{1}{2}d)$ i $k_2 = k(S_2, \frac{1}{2}d)$. (Slika 1.35)



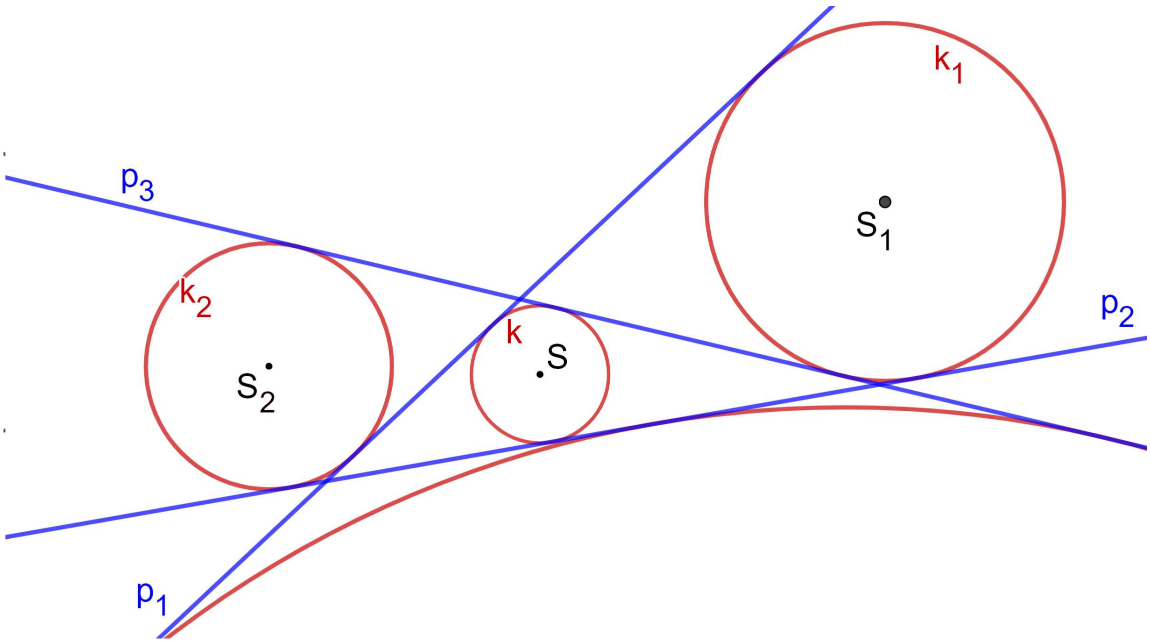
Slika 1.35: Konstrukcija problema ppp, slučaj A

Rasprava:
Simetrale kutova između pravaca p_1 i p_3, odnosno p_2 i p_3 uvijek određuju dva sjecišta (različita od sjecišta danih pravaca).

Dokaz:
Želimo dokazati da kružnice k_1 i k_2 diraju sva tri zadana pravca.
Kako je $S_1 \in s_{23}$ tada $d(S_1, p_2) = d(S_1, p_3)$. Također, $S_1 \in s'_{13}$ tada $d(S_1, p_1) = d(S_1, p_3)$.
Slijedi $d(S_1, p_1) = d(S_1, p_2)$.
Pošto je $d(S_1, p_1) + d(S_1, p_2) = d(p_1, p_2) = d$ slijedi da je $d(S_1, p_1) = d(S_1, p_2) = d(S_1, p_3) = \frac{d}{2}$. Kružnica k_1 dira sva tri pravca. Analogno dokazujemo za kružnicu k_2. □

Slučaj B. *Apolonijev problem ppp u situaciji kada nikoja dva pravca nisu paralelna. Trebamo konstruirati kružnicu koja dira sva tri pravca.*

Analiza:

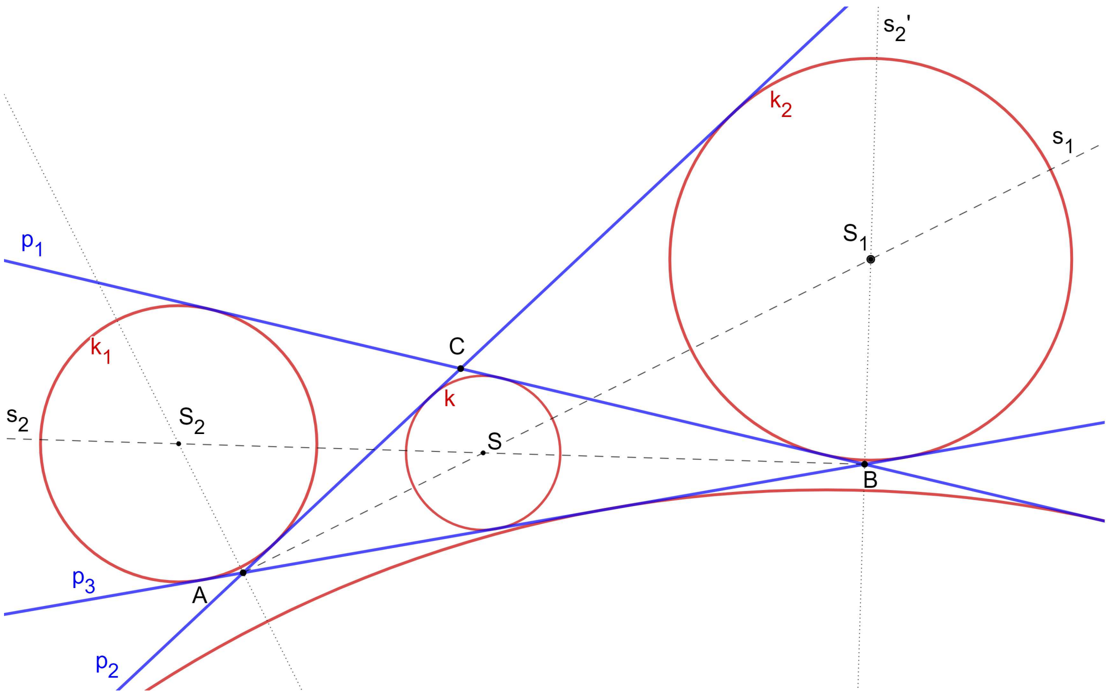


Slika 1.36: Analiza problema ppp, slučaj *B*

Središta traženih kružnica nalaze se na simetralama kutova trokuta što ga zatvaraju dani pravci. Simetrale svih triju unutrašnjih kutova sijeku se u središtu upisane kružnice tog trokuta, a simetrale po dvaju vanjskih kutova i jednog unutarnjeg kuta sijeku se u središtima pripisanih kružnica tog trokuta.

Konstrukcija:

1. $p_2 \cap p_3 = \{A\}$, $p_3 \cap p_1 = \{B\}$ te $p_1 \cap p_2 = \{C\}$
2. s_1 simetrala kuta $\sphericalangle BAC$ i s_2 simetrala kuta $\sphericalangle CBA$
3. $\{S\} = s_1 \cap s_2$
4. kružnica sa središtem u točki S radijusa $d(S, p_2)$



Slika 1.37: Konstrukcija problema ppp, slučaj B

Dokaz: Središte kružnice S, nalazi se na simetrali s_1 i na simetrali s_2 što znači da je S jednako udaljena od pravaca p_1, p_2 i p_3. Kako po konstrukciji kružnica dira pravac p_2, dira sva tri pravca. □

Rasprava:

s_1 i s_2 mogu biti unutarnje i vanjske simetrale kuta $\sphericalangle BAC$, odnosno $\sphericalangle CBA$ pa dobijemo četiri središta i četiri kružnice.
Svaki se korak konstrukcije može provesti jer imamo tri neparalelna pravca od kojih se svaka dva sijeku u jednoj točki. Te tri točke tvore trokut kojemu zapravo konstruiramo upisanu i pripisane kružnice [Teorem 6, 8]

Poglavlje 2

Rješenja problema 5-9

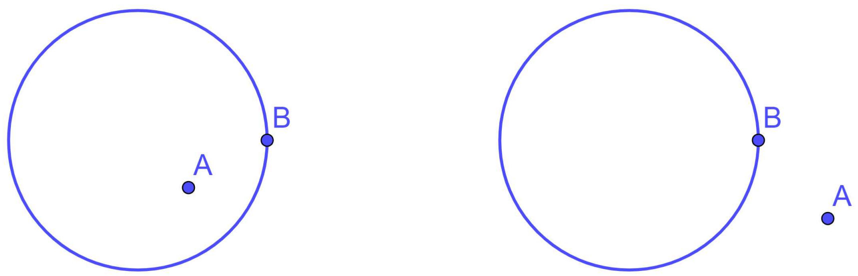
U ovom ćemo poglavlju opisati konstrukcije Apolonijevih problema u kojima su jedan ili dva dana elementa kružnice, a preostali točke i/ili pravci. To su problemi TTk, Tpk, ppk,Tkk, pkk i kkk.

2.1 Problem TTk

Problem. *U ravnini zadani su kružnica k te točke A i B. Konstruirati kružnicu koja prolazi kroz točke A i B te dira zadanu kružnicu.*

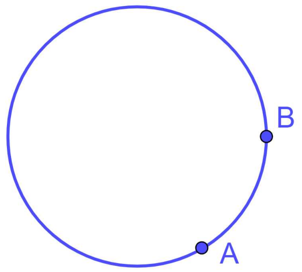
Promotrimo prvo sve moguće međusobne položaje danih objekata.

1. Jedna točka nalazi na kružnici a druga izvan (odnosno unutar) nje.
   Ovaj slučaj ćemo analizirati nešto kasnije. (Slučaj A)



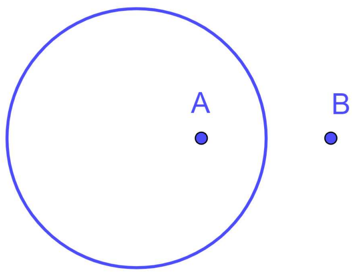
Slika 2.1: TTk, $B \in k$ A izvan/unutar k

2. Obje točke su na kružnici.
   Tada nema rješenja.



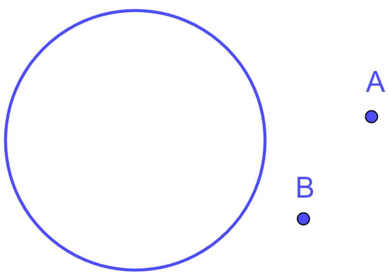
Slika 2.2: TTk, $A, B \in k$

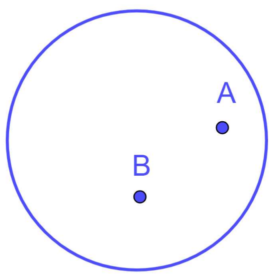
3. Jedna točka je unutar,a druga izvan kružnice.
   Tada nema rješenja.



Slika 2.3: TTk, B izvan k, A unutar k

4. Obje točke su izvan (odnosno unutar) kružnice.
   Ovaj slučaj ćemo analizirati nešto kasnije. (Slučaj B)

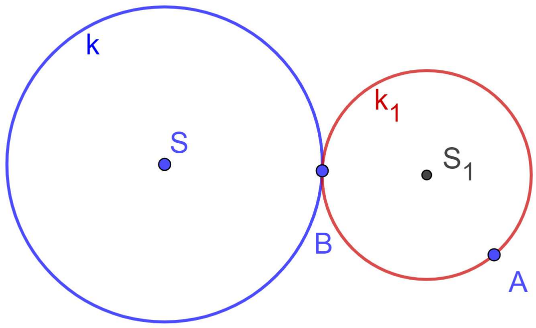




Slika 2.4: TTk, A, B izvan/unutar k

Slučaj A. *Apolonijev problem TTk u situaciji kada su zadani kružnica k, točka A koja ne leži na kružnici i točka B na kružnici. Trebamo konstruirati kružnicu koja prolazi kroz točke A i B te dira zadanu kružnicu.*

Analiza:



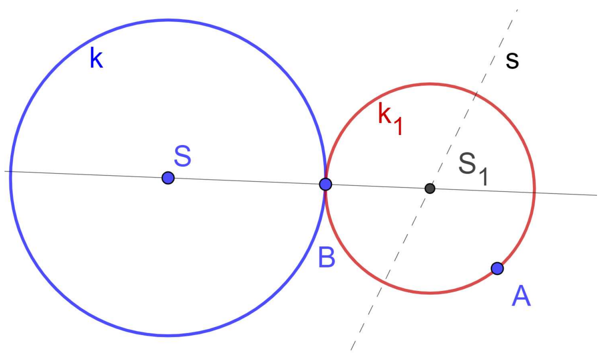
Slika 2.5: Analiza problema TTk, slučaj A

Neka je S središte zadane, a S_1 središte tražene kružnice. Pošto je točka B diralište kružnica k i k_1 točka S_1 mora ležati na pravcu SB. Također, pošto je $\overline{AB}$ tetiva kružnice k_1, točka S_1 mora ležati simetrali dužine $\overline{AB}$.

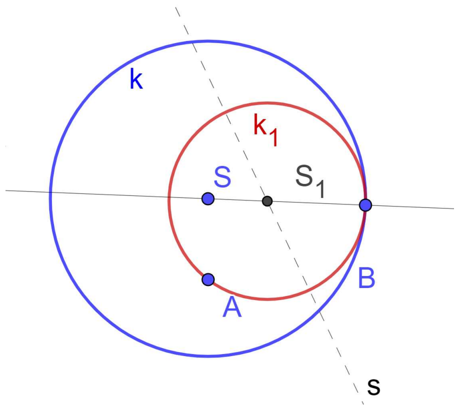
Konstrukcija:

1. povučemo pravac SB
2. s = simetrala dužine $\overline{AB}$
3. $SB \cap s = \{S_1\}$
4. $k_1 = k(S_1, |S_1B|)$

Konstrukcija se provodi na isti način neovisno o tome je li A unutar ili izvan kružnice k.



Slika 2.6: Konstrukcija problema TTk, slučaj A, A izvan k



Slika 2.7: Konstrukcija problema TTk, slučaj A, A unutar k

Rasprava:
Ako je $SB \parallel s$ nema rješenja, a to će se dogoditi ako je A na tangenti kružnice k u točki B.

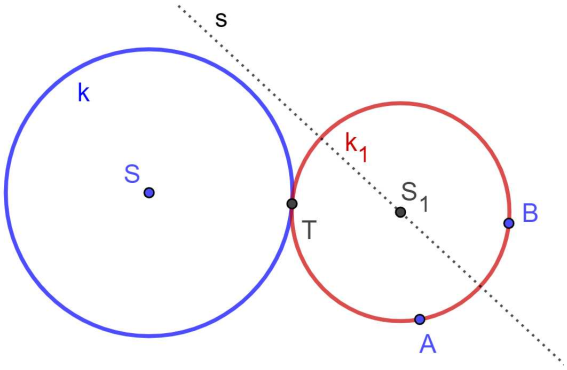
Dokaz:
Trebamo dokazati da kružnica $k_1 = k(S_1, |S_1B|)$ dira kružnicu k te prolazi točkama A i B. Točka B se nalazi na kružnici k_1. Točka S_1 nalazi se na simetrali dužine $\overline{AB}$ pa je $|S_1A| = |S_1B|$. Dakle i točka A se nalazi na kružnici k_1. Kako su točke S_1, S i B kolinearne, kružnice k i k_1 diraju se u točki B. $\square$

Slučaj B. *Apolonijev problem TTk u situaciji kada su zadani kružnica k te točke A i B koje ne leže na toj kružnici. Trebamo konstruirati kružnicu koja prolazi kroz točke A i B te dira zadanu kružnicu.*

Ovaj slučaj ćemo riješiti na dva načina.

1. način

Analiza:



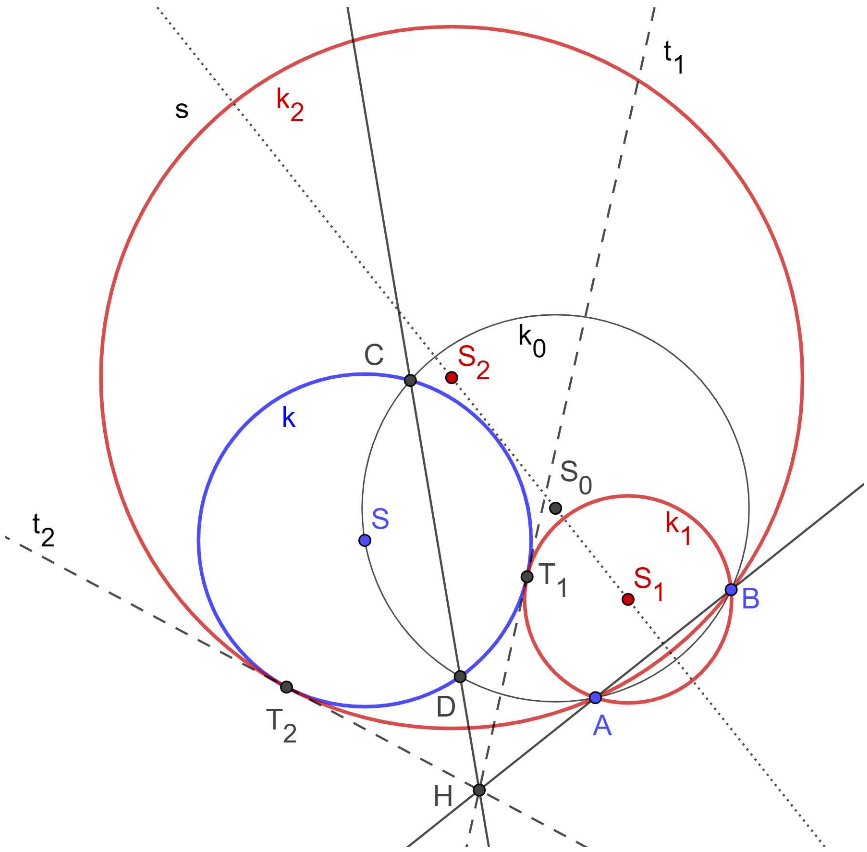
Slika 2.8: Analiza problema TTk, slučaj B

Geometrijsko mjesto središta kružnica koje prolaze točkama A i B nalazi se na simetrali dužine $\overline{AB}$. Zadana kružnica k i tražena kružnica k_1 diraju se. Označimo diralište sa T. Označimo središte zadane kružnice sa S. Središte tražene kružnice mora se nalaziti i na pravcu ST. Trebamo konstruirati diralište T, odnosno zajedničku tangentu t kružnica k i k_1. Neka je H sjecište tangente t i pravca AB. Uočimo da je t potencijala kružnica k i k_1. Neka je k_0 bilo koja kružnica kroz A i B koja siječe k u dvije točke C i D. Potencijala k_1 i k_0 je AB pa je H potencijalno središte svih triju kružnica. Zato pravac CD, koji je potencijala k i k_0 prolazi kroz H. To nam omogućava konstrukciju točke H, a zatim i tangente t te točke T.

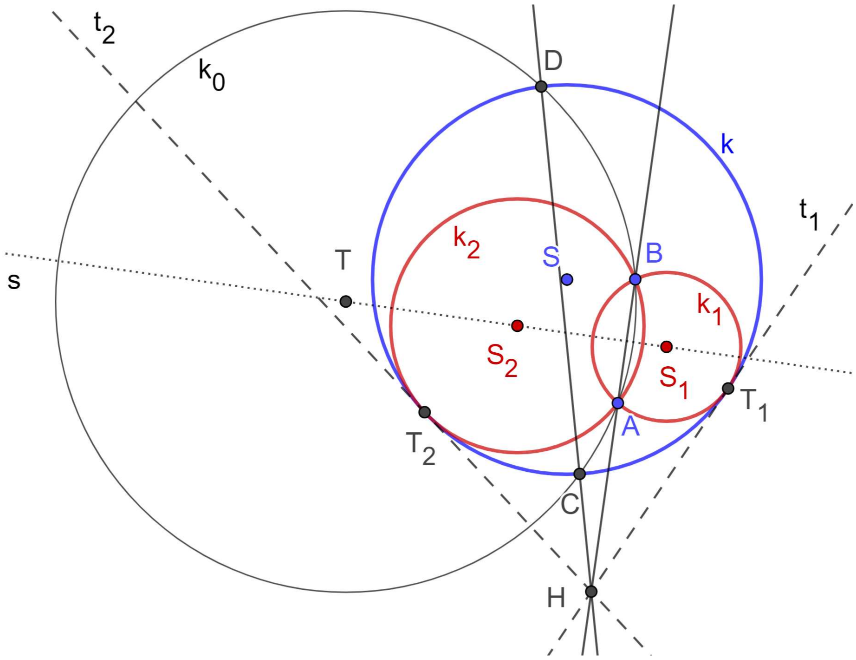
Konstrukcija:

1. neka je s simetrala dužine $\overline{AB}$
2. neka je k_0 kružnica koja prolazi točkama A, B i S
3. $k_0 \cap k = \{C, D\}$
4. $AB \cap CD = \{H\}$
5. konstruirajmo tangente t_1 i t_2 iz H na kružnicu k
6. T_1, T_2 su dirališta kružnice k i tangenata t_1 i t_2
7. $k_1 = k(A, B, T_1)$, $k_2 = k(A, B, T_2)$

Ukoliko se točke A i B nalaze unutar kružnice k, onda se u 3. koraku može dogoditi da se k_0 i k ne sijeku. U tom slučaju modificiramo 2. korak te za središte kružnice k_0 biramo neku točku T simetrale dužine $\overline{AB}$ koja leži izvan kružnice k.



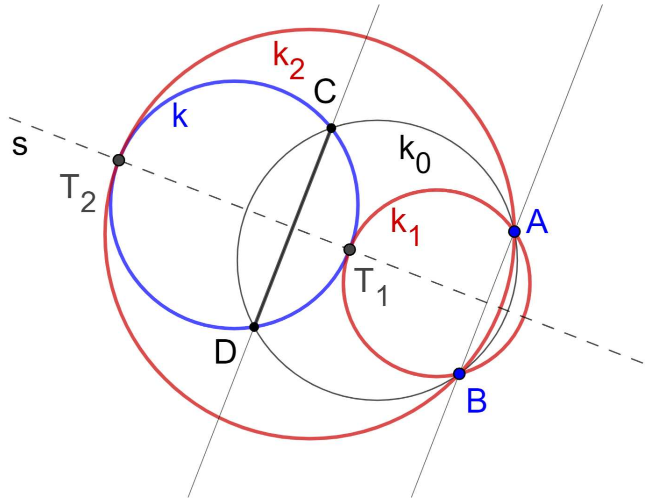
Slika 2.9: Konstrukcija problema TTk, slučaj B



Slika 2.10: Konstrukcija problema TTk, slučaj B (A i B unutar k)

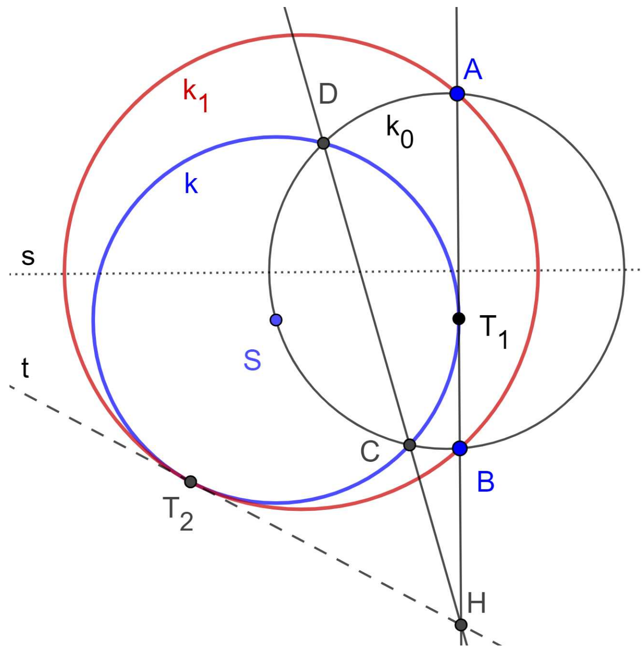
Dokaz:
Trebamo dokazati da kružnica $k_1 = k(A, B, T_1)$ prolazi kroz A i B te dira zadanu kružnicu k. Iz konstrukcije jasno je da k_1 prolazi kroz A i B, dokažimo još da dira zadanu kružnicu k.
Znamo da je HT_1 tangenta kružnice k i $H \in AB$, $H \in CD$, $\{A, B, C, D\} \in k_0$.
Potencija točke H u odnosu na k_0: $HA \cdot HB = HC \cdot HD$
Potencija točke H u odnosu na k: $HC \cdot HD = HT_1^2$
$\Rightarrow HA \cdot HB = HT_1^2 \Rightarrow HT_1$ je tangenta na $k(A, B, T_1)$
$\Rightarrow HT_1$ je zajednička tangenta kružnica $k(A, B, T_1)$ i k, a točka T_1 njihovo je dirалište.
Analogno dokazujemo za kružnicu k_2. $\square$

Rasprava:
Na prvi problem tijekom konstrukcije dolazimo u trećem koraku. Hoće li k_0 uvijek sijeći k? Pošto smo precizirali da je k_0 kružnica kroz A, B i središte dane kružnice k. U slučaju kada su A i B izvan k, sigurno će postojati dva sjecišta C i D. Ukoliko se točke A i B nalaze unutar kružnice k, onda je dovoljno za središte odabrati neku točku T simetrale dužine $\overline{AB}$ koja leži izvan kružnice k (konstrukcija riješena po napomeni iz opisa konstrukcije).
U četvrtom koraku jedini je problem ako simetrala dužine $\overline{AB}$ prolazi točkom S, jer je tada $AB \parallel CD$. No, tada je konstrukcija jednostavnija.



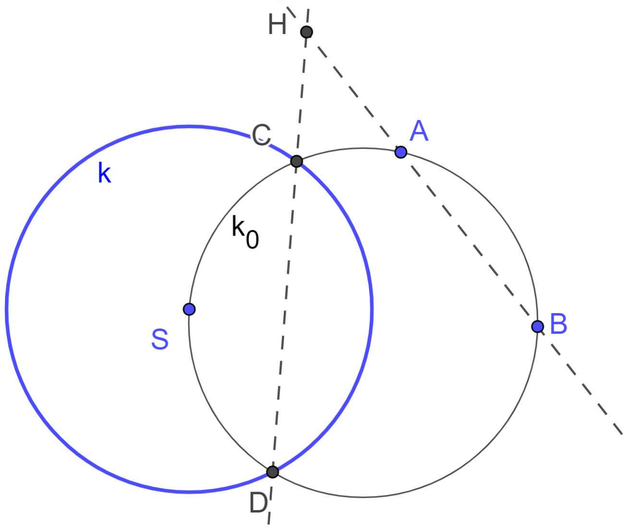
Slika 2.11: TTk, slučaj B, $AB \parallel CD$

Ako pravac AB dira kružnicu k tada postoji samo jedno rješenje. S obzirom da je pravac AB tangenta kružnice i njegovo diralište je točka T_1 koja se nalazi između točaka A i B nemoguće je konstruirati kružnicu tim točkama pa je jedino rješenje $k_2 = k(A, B, T_2)$.

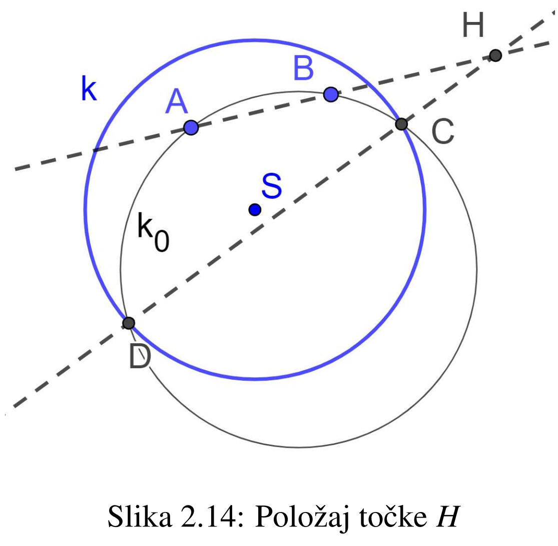


Slika 2.12: TTk, slučaj B, AB tangenta

Kako bi u 5. koraku postojale tangente, točka H mora biti izvan kružnice k. Pretpostavimo da se točka H (sjecište pravaca AB i CD) nalazi unutar kružnice k, dakle na dužini $\overline{CD}$. Kako su dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ tetive kružnice k_0, one se sijeku u točki H. Ali, to znači da je jedna od točaka A i B unutar kružnice k, a druga izvan, jer se nalaze s različitih strana pravca CD. Jasno je da u tom slučaju ne postoji kružnica koja prolazi kroz točke A i B te dira kružnicu k.



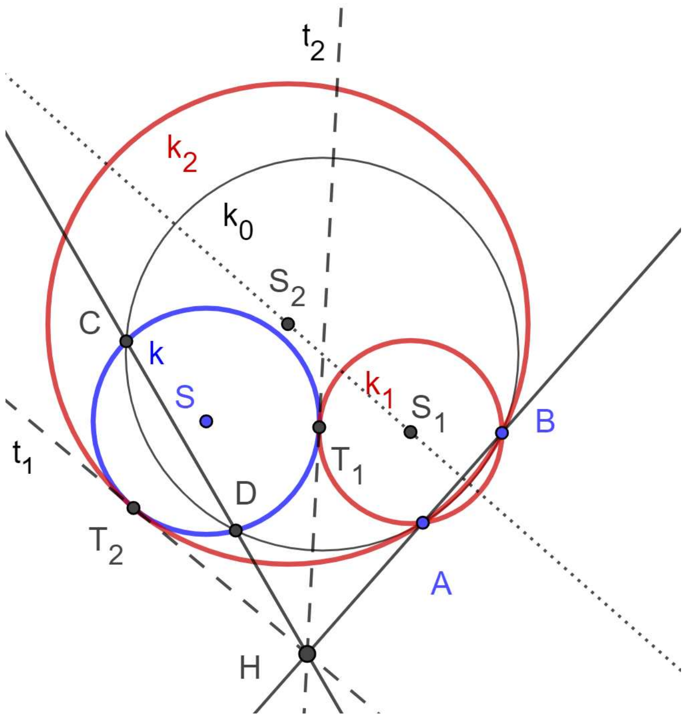
Slika 2.13: Položaj točke H



Slika 2.14: Položaj točke H

Rezimirajmo zaključke o broju rješenja:

- Ako je jedna od zadanih točaka A ili B unutar kružnice k, a druga izvan nema rješenja.
- Ako je jedna od zadanih točaka A ili B na kružnici k, a druga unutar ili izvan postoji jedno rješenje.
- Ako je pravac AB tangenta na kružnicu k postoji jedno rješenje.
- Kada su točke A i B obje unutar ili izvan kružnice k postoje dva rješenja.

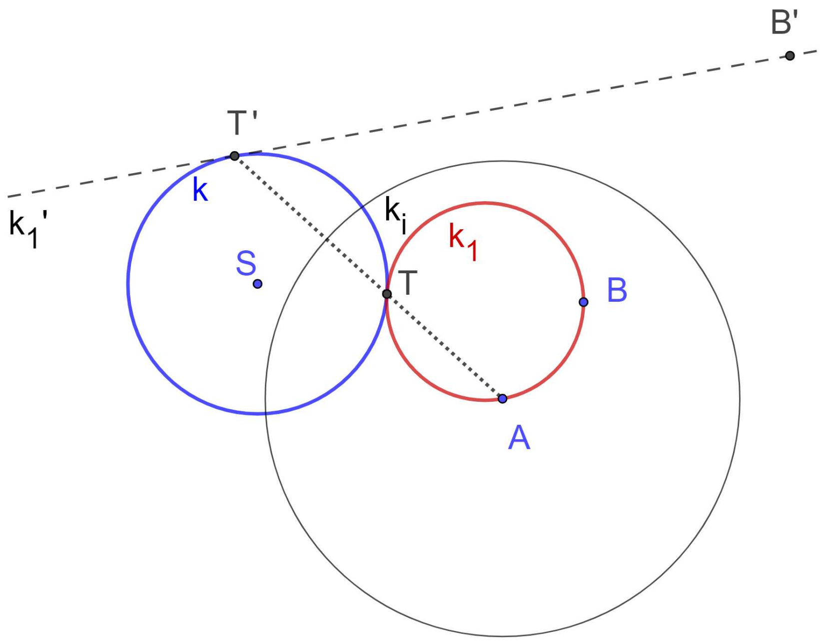


Slika 2.15: Konstrukcija problema TTk, slučaj B, oba rješenja

2. način - konstrukcija inverzijom

Problem. *U ravnini zadani su kružnica k te točke A i B koje nisu na kružnici. Trebamo konstruirati kružnicu koja prolazi kroz točke A i B te dira zadanu kružnicu.*

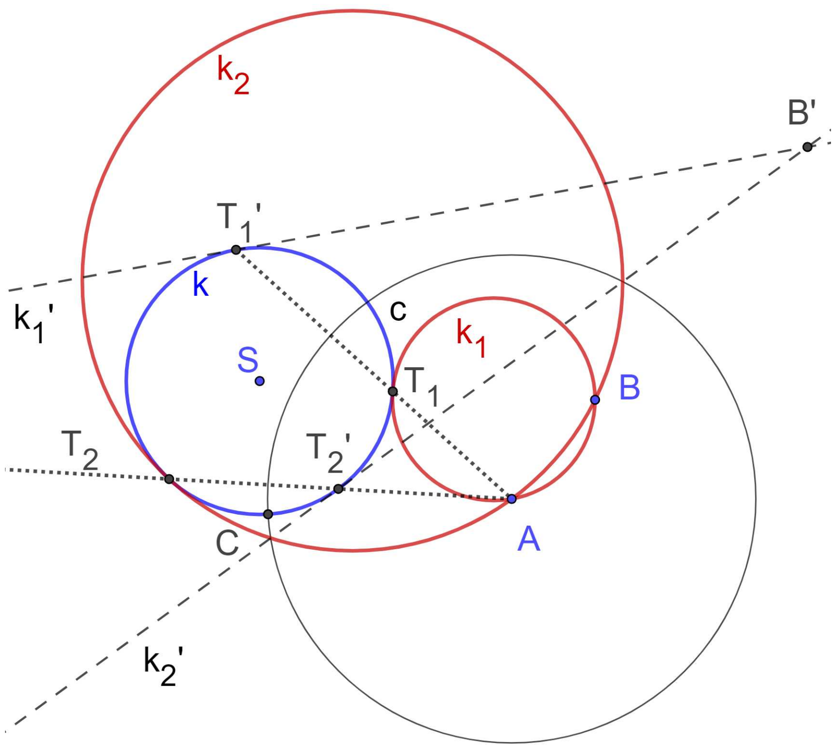
Analiza:
Promotrimo inverziju sa središtem A. Kako bi konstrukcija bila što jednostavnija, za kružnicu inverzije odabiremo kružnicu k_i koja je ortogonalna na kružnicu k. Tada se kružnica k preslika sama u sebe. Označimo s T dirалište tražene kružnice i zadane. Točka B preslikat će se inverzijom u točku B'. Tražena kružnica k_1 koja prolazi točkama A i B te dira kružnicu k preslikat će se u pravac koji prolazi točkama B' i T' te dira kružnicu k pa ćemo tražiti tangentu na k iz B' te će ona biti slika tražene kružnice. [Slika 2.16].



Slika 2.16: Analiza problema TTk, slučaj B (konstrukcija inverzijom)

Konstrukcija:

1. konstruiramo kružnicu inverzije k_i sa središtem u A koja je ortogonalna na k
2. preslikamo B u točku B' inverzijom
3. k_1', k_2' = tangente iz B' na k
4. $k_1' \cap k = \{T_1'\}$, $k_2' \cap k = \{T_2'\}$
5. $T_1'A \cap k = \{T_1, T_1'\}$, $T_2'A \cap k = \{T_2, T_2'\}$
6. $k_1 = k(A, B, T_1)$, $k_2 = k(A, B, T_2)$



Slika 2.17: Konstrukcija problema TTk, slučaj B (konstrukcija inverzijom)

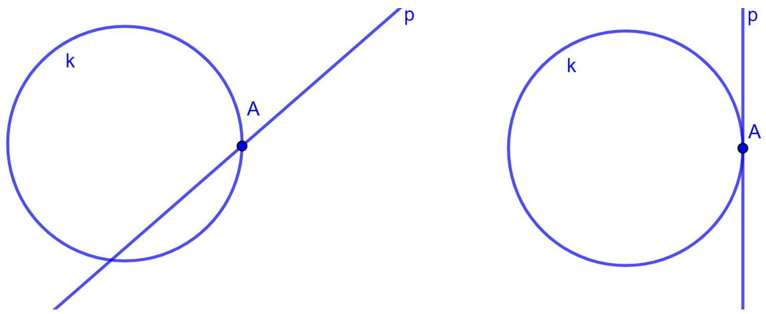
Rasprava ispuštena jer je provedena ranije. Broj rješenja ovisi o položaju točke B' u odnosu na kružnicu k, te o tome prolaze li tangente k_1' i k_2' točkom A. Dokaz je jasan iz analize.

2.2 Problem Tpk

Problem. *U ravnini zadani su kružnica k, pravac p i točka A. Konstruirati kružnicu koja prolazi kroz točku A te dira zadanu kružnicu k i pravac p.*

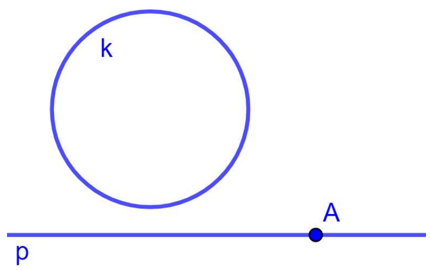
Promotrimo prvo moguće položaje zadanih objekata.

1. Točka A sjecište je zadanog pravca p i kružnice k.
   Ako je pravac p tangenta na kružnicu k taj slučaj ćemo analizirati nešto kasnije (Slučaj A), a u slučaju da pravac p nije tangenta nema rješenja.



Slika 2.18: Tpk, $\{A\} = p \cap k$

2. Točka A nalazi se na pravcu p, ali ne i na kružnici k.
   Ovaj slučaj ćemo analizirati nešto kasnije. (Slučaj B)
   Mogući su različiti međusobni položaji pravca p i kružnice k.

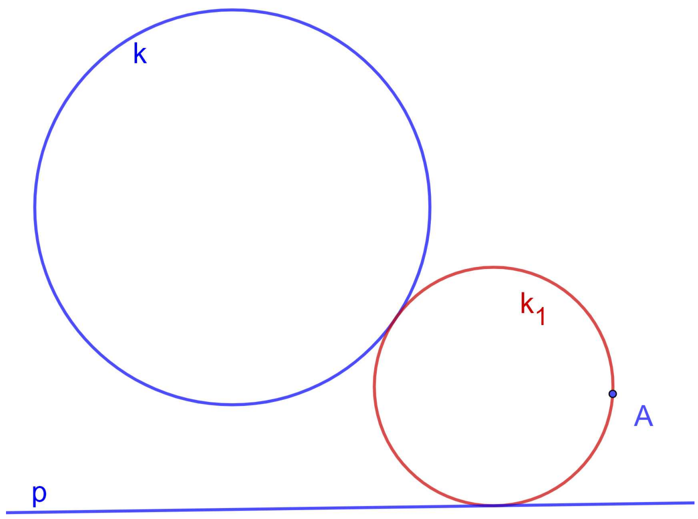


Slika 2.19: Tpk, $A \in p$

3. Točka A nalazi se na kružnici k, ali ne na pravcu p.
   Ovaj slučaj ćemo analizirati nešto kasnije. (Slučaj C)
   Mogući su različiti međusobni položaji pravca p i kružnice k.

4. Točka A se ne nalazi na kružnici k niti na pravcu p.
   Ovaj slučaj ćemo analizirati nešto kasnije. (Slučaj D)

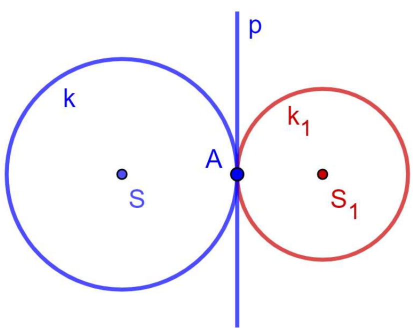
[Slika 2.33].



Slika 2.20: Kružnica koja dodiruje zadanu kružnicu, pravac i točku

Slučaj A. *Apolonijev problem Tpk u situaciji kada je točka A sjecište zadanog pravca p i kružnice k, a pravac p tangenta je na kružnicu k. Trebamo konstruirati kružnicu kroz zadanu točku koja dodiruje zadani pravac i zadanu kružnicu.*

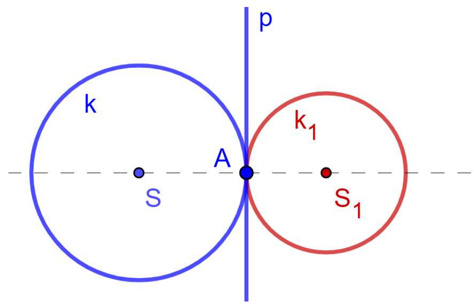
Analiza:



Slika 2.21: Analiza problema Tpk, slučaj A

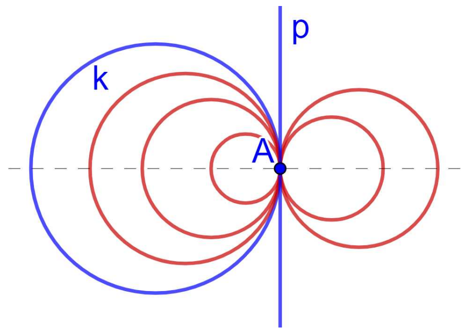
Neka je S središte zadane, a S_1 središte tražene kružnice. Uočavamo da središte tražene kružnice može biti bilo koja točka na pravcu SA.

Konstrukcija: Povučemo pravac AS. Tražena kružnica je $k_1 = k(S_1, |S_1A|)$ gdje je $S_1 \in p$.



Slika 2.22: Konstrukcija problema Tpk, slučaj A

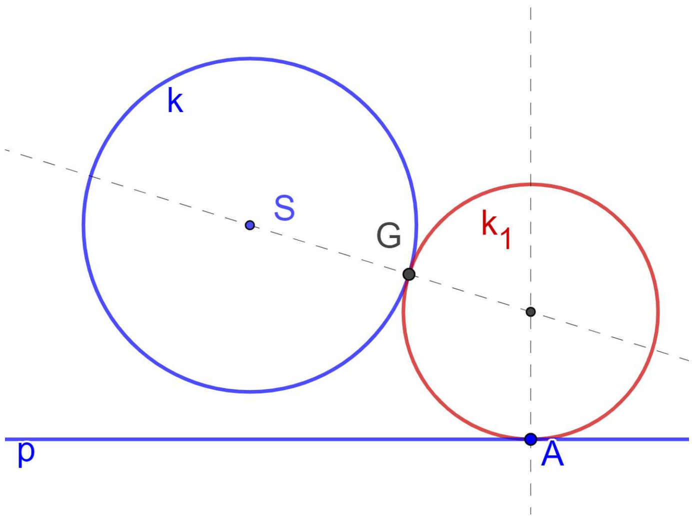
Rasprava: Pošto je S_1 proizvoljna točka na pravcu SA ovaj slučaj ima beskonačno rješenja.



Slika 2.23: Konstrukcija problema Tpk, slučaj A, neka rješenja

Slučaj B. *Apolonijev problem Tpk u situaciji kada se točka A nalazi na pravcu p a ne nalazi se na kružnici k. Trebamo konstruirati kružnicu kroz zadanu točku koja dodiruje zadani pravac i zadanu kružnicu.*

Analiza:

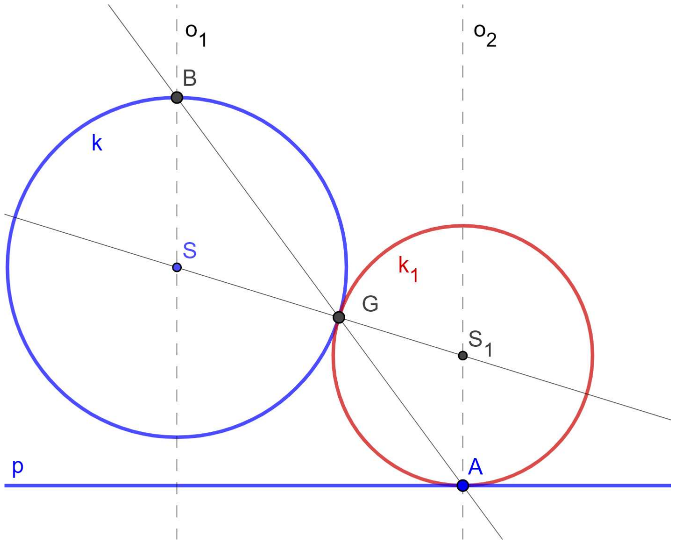


Slika 2.24: Analiza problema Tpk, slučaj B

Neka je S središte zadane kružnice. Želimo odrediti središte tražene kružnice k_1. Neka je G dirалište zadane i tražene kružnice. Točka G ujedno je centar sličnosti zadane i tražene kružnice, središte kružnice k_1 nalazi se na pravcu SG. Pravac p je tangenta tražene kružnice i $A \in p$, njeno se središte nalazi na okomici iz A na p.

Konstrukcija:

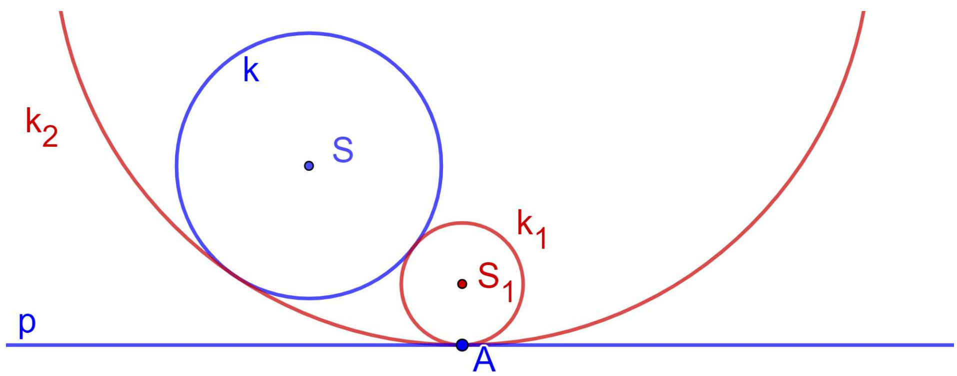
1. okomica o_1 iz S na p
2. B je sjecište o_1 i k.
3. G je drugo sjecište AB i k (različito od B)
4. okomica o_2 iz A na p
5. $SG \cap o_2 = \{S_1\}$
6. $k_1 = k(S_1, |S_1A|)$



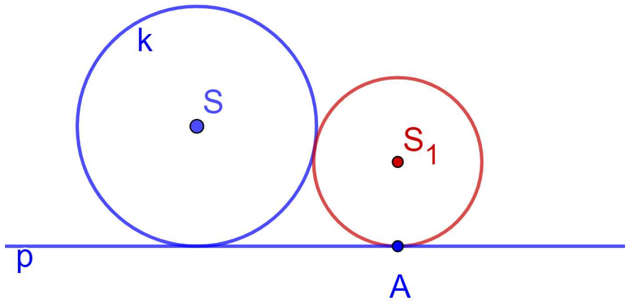
Slika 2.25: Konstrukcija problema Tpk, slučaj B

Ista konstrukcija vrijedi neovisno o tome sijeku li se p i k te je li A izvan ili unutar k.

Rasprava:
U 2. koraku konstrukcije okomica o_1 uvijek siječe kružnicu k u dvije točke ($\{B, C\} = o_1 \cap k$) pa postoje dva rješenja, osim ako $C \in p$ tj. kružnica k dira pravac p, tada postoji samo jedno rješenje te je pravac p tangenta kružnice k.

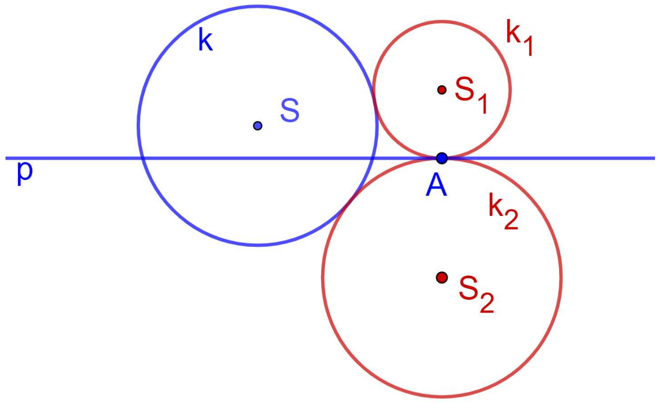


Slika 2.26: Konstrukcija problema Tpk, slučaj B, sva rješenja



Slika 2.27: Konstrukcija problema Tpk, slučaj B, k dira p

Ako kružnica k siječe pravac p, postoje dva rješenja.



Slika 2.28: Konstrukcija problema Tpk, slučaj B, k siječe p

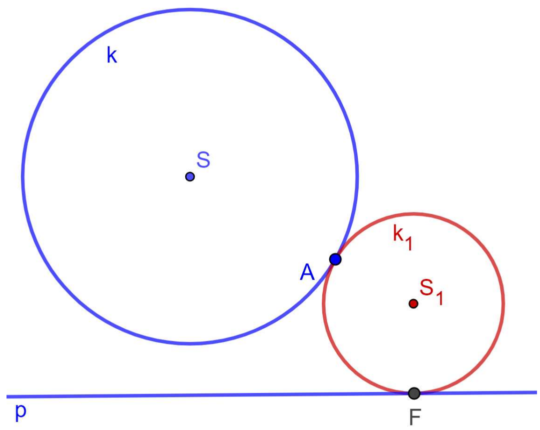
Problem nastaje u 5. koraku ako $G \in o$ tj. ako je $A \in o_1$. Tada su A, B, S, G kolinearne i nije određen S_1. Ali, u tom slučaju jednostavno konstruiramo kružnice s promjerima $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$.

Dokaz:
Trebamo dokazati da kružnica $k(S_1, |S_1A|)$ prolazi kroz A, dira pravac p te dira kružnicu k. Očito je da k_1 prolazi kroz A, a dira pravac p jer je S_1 na o_2. Trebamo još dokazati da k_1 dira k.
Točke S, G i S_1 su kolinearne, $G \in k$. Trokuti $\triangle AS_1G$ i $\triangle BSG$ su slični jer su im sve stranice paralelne pa $|BS| = |GS| \Rightarrow |AS_1| = |GS_1|$, pa je $G \in k_1$, a to znači zbog kolinearnosti S, G i S_1 da se k_1 i k diraju u G.

□

Slučaj C. *Apolonijev problem Tpk u situaciji kada se točka A nalazi na kružnici k, a ne nalazi se na pravcu p. Trebamo konstruirati kružnicu kroz zadanu točku koja dodiruje zadani pravac i zadanu kružnicu.*

Analiza:

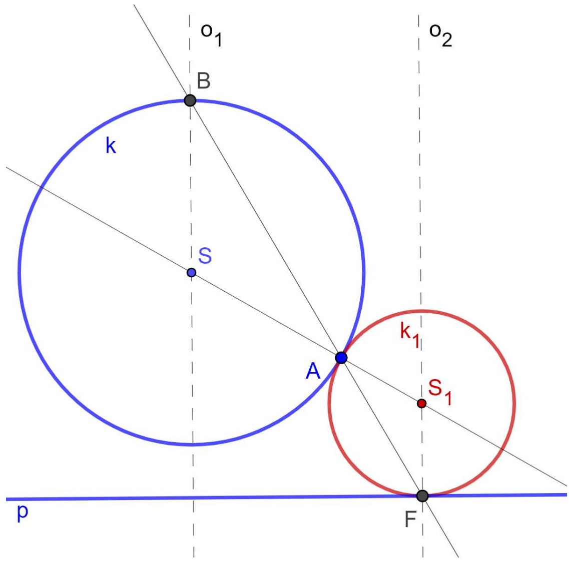


Slika 2.29: Analiza problema Tpk, slučaj C

Neka je S središte zadane kružnice, a F točka u kojoj tražena kružnica k_1 dira pravac p. Želimo odrediti središte tražene kružnice k_1. Pošto je A diralište tražene i zadane kružnice, središte kružnice k_1 mora se nalaziti na pravcu SA, također mora se nalaziti na okomici iz F na pravac p, jer je p tangenta tražene kružnice. Kao u slučaju B - ovdje je A centar sličnosti, što nam omogućiti da odredimo točku F.

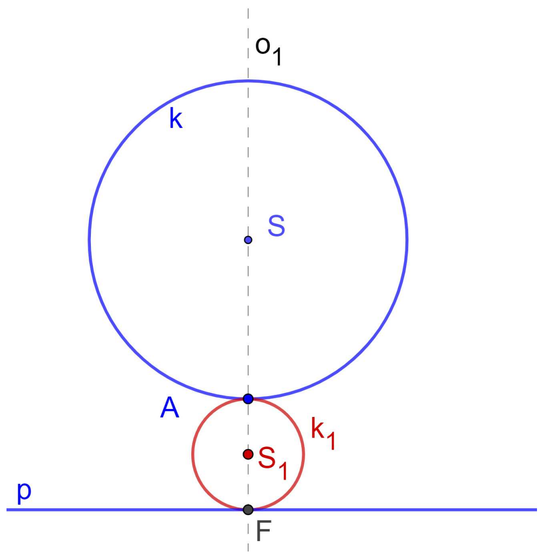
Konstrukcija:

1. okomica o_1 iz S na p
2. $o_1 \cap k = \{B\}$
3. $AB \cap p = \{F\}$
4. okomica o_2 iz F na p
5. $SA \cap o_2 = S_1$
6. $k_1 = k(S_1, |S_1A|)$



Slika 2.30: Konstrukcija problema Tpk, slučaj C

Rasprava:
U 2. koraku konstrukcije okomica o_1 siječe kružnicu k u dvije točke pa ovaj slučaj ima dva rješenja.
U 3. koraku ako je $AB \parallel p$ tada je $A = B$ te postoji samo jedno rješenje.

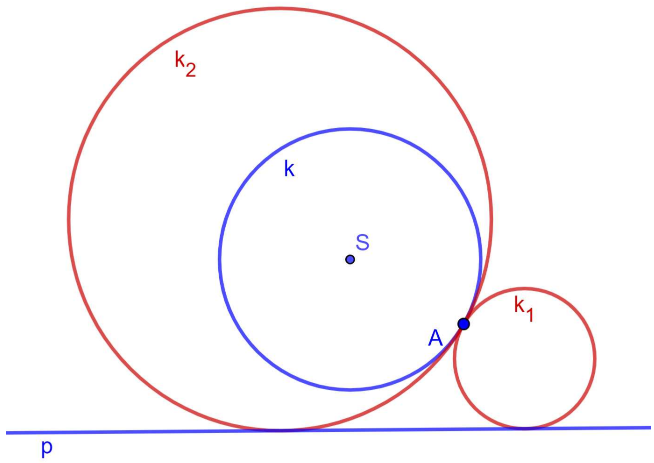


Slika 2.31: Problema Tpk, slučaj C, $A \in o_1$

U 5. koraku ako je $SA \parallel o_2$ tj. $A \in o_1$ tada $SA \perp p$ te postoji samo jedno rješenje. Također, u slučaju da k dira p, zadatak ima samo jedno rješenje.

Dokaz:
Trebamo dokazati da kružnica $k(S_1, |S_1A|)$ prolazi kroz A, dira pravac p u točki F te dira kružnicu k. Očito je da k_1 prolazi kroz A, a kako su A, S i S_1 kolinearne, k_1 dira k.
Trebamo još dokazati da k_1 dira pravac p.
Točke S, A i S_1 su kolinearne. Trokuti $\triangle AS_1F$ i $\triangle BSA$ su slični jer su im sve stranice paralelne pa $|BS| = |AS| \Rightarrow |AS_1| = |FS_1|$, pa je $F \in k_1$. Kako je $S_1F \perp p$, kružnica k_1 dira pravac p.

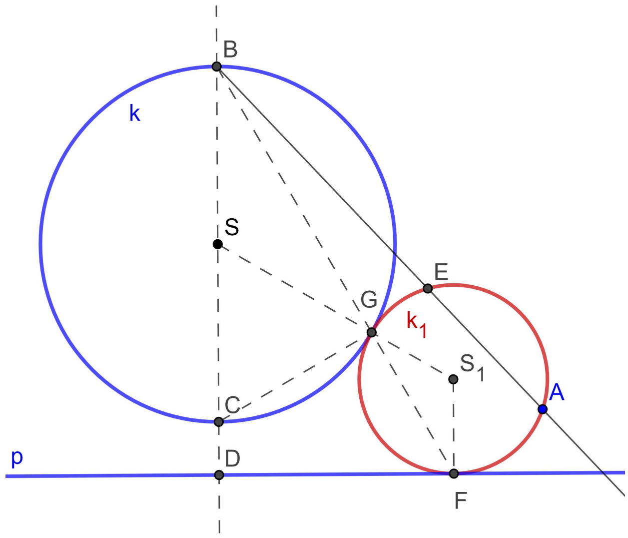
□



Slika 2.32: Konstrukcija problema Tpk, slučaj C, sva rješenja

Slučaj D. *Zadani su kružnica k, pravac p i točka A takvi da* $A \notin p, A \notin k$. *Trebamo konstruirati kružnicu koja prolazi kroz točku A te dira zadanu kružnicu k i pravac p.*

Analiza:



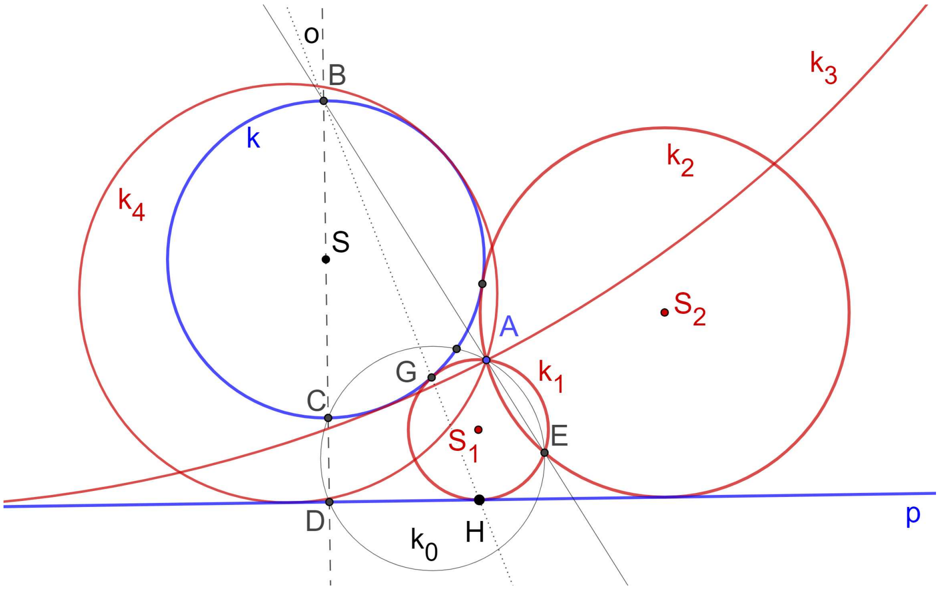
Slika 2.33: Analiza slučaja Tpk, slučaj D

Kako bismo si olakšali problem, konstrukciju želimo svesti na konstrukciju problema TTk [Poglavlje 2.1]. Dakle, želimo pronaći još jednu točku na traženoj kružnici. Označimo traženu kružnicu s k_1, a njeno središte S_1. Označimo s S središte zadane kružnice k. Neka su $\{B, C\}$ sjecišta kružnice k s okomicom iz S na p te neka je sjecište iste okomice s pravcem p točka D. Neka je F diralište pravca p i kružnice k_1, a G diralište kružnica k_1 i k.
Točka G je ujedno i unutarnji ili vanjski centar sličnosti tih dviju kružnica pa leži i na pravcu BF.
Povucimo pravac AB te drugo sjecište s traženom kružnicom označimo s E.
Promotrimo sada sliku 2.33. Pošto je $\overline{BC}$ promjer kružnice kut $\sphericalangle BGC$ je pravi. Također, i kut $\sphericalangle FDB$ je pravi. Možemo zaključiti da je četverokut $DFGC$ tetivan.
Po teoremu o potenciji točke [Teorem 1] tada vrijedi: $BC \cdot BD$ = {potencija u odnosu na kružnicu opisanu četverokutu $DFGC$} = $BG \cdot BF$ = {potencija u odnosu na traženu kružnicu}= $BA \cdot BE$. Slijedi, četverokut $DAEC$ je tetivan, odnosno točke D, A, E i C pripadaju istoj kružnici. Zaključujemo, točka E je sjecište kružnice $k(DAC)$ i pravca BA.

Konstrukcija:

1. okomica o iz S na p

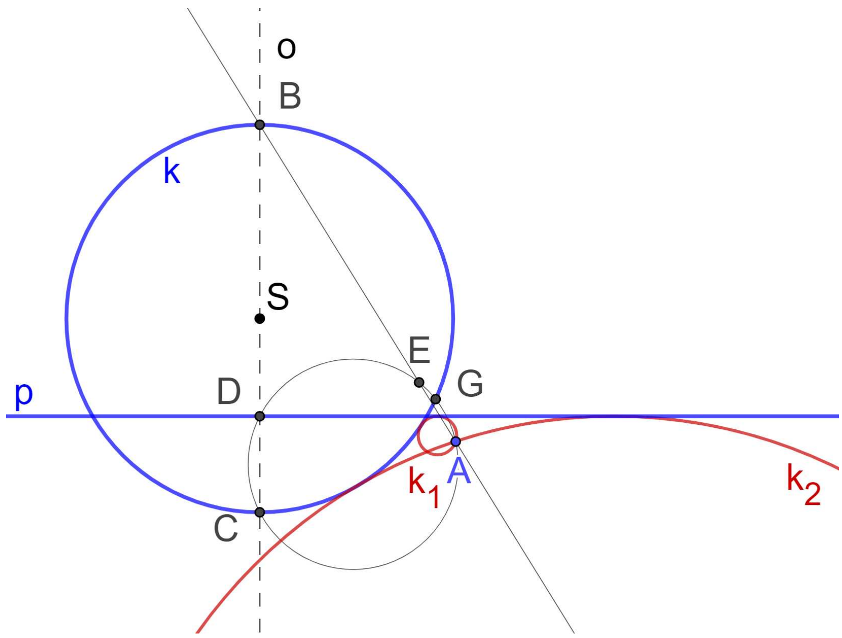
2. $o \cap k = \{B, C\}$, $o \cap p = \{D\}$
3. $k_0 = k(ACD)$
4. $AB \cap k_0 = \{E\}$ (različito od A)
5. konstruiramo, primjenom konstrukcije TTk iz cjeline 2.1, kružnicu k_1 koja dira kružnicu k i prolazi točkama A i E.



Slika 2.34: Konstrukcija problema Tpk, slučaj D

Dokaz:
Kružnica k_1 prolazi kroz točke A i E te dira zadanu kružnicu k. Trebamo dokazati da dira pravac p.
Znamo da je G diralište k_1 i k. Neka je H sjecište pravaca BG i p.
Kut $\sphericalangle BGC = 90°$ po Talesovom teoremu, $\sphericalangle CDH = 90°$ po konstrukciji.
Zato je $CDHG$ tetivni četverokut te mu možemo opisati kružnicu $\tilde{k}$. Potencijala od k_0 i $\tilde{k}$ je pravac CD. Kako je potencijala kružnica k_1 i k_0 pravac AE, a $CD \cap AE = \{B\}$ slijedi da je B radikalno središte kružnica k_0, k_1 i $\tilde{k}$ pa potencijala od k_1 i $\tilde{k}$ prolazi kroz B. Kako se G nalazi na k_1 i na $\tilde{k}$, potencijala tih dviju kružnica je pravac BG, a to zapravo znači da točka H leži na kružnici k_1 jer je H drugo sjecište pravca BG s kružnicom $\tilde{k}$. □

Rasprava:
Važno je napomenuti da se sva četiri rješenja konstrukcije dobiju zamjenom uloga točke B i C.
U drugom koraku ako je $C = D$ postoje tri rješenja.
Problem postoji u 3. koraku ako su točke A, C i D kolinearne. Taj ćemo slučaj posebno razmotriti (Slučaj E)
U 5. koraku dobijemo po najviše dva rješenja, ali zamjenom uloga točaka B i C dobijemo još dva rješenja.
Ako pravac AB dira kružnicu $k(ACD)$ u A. Tada se točke A i E podudaraju te tada postoje tri rješenja.
Ako pravac p siječe kružnicu k, sjecište D pravca p i okomice o nalazi se unutar kružnice k pa nam otpadaju dva rješenja.



Slika 2.35: Konstrukcija problema Tpk, slučaj D, $p \cap k \neq \emptyset$

Rezimirajmo još brojnost rješenja u ovisnosti o položaju pravca p i kružnice k:

1. p i k se ne sijeku
   - Ako je A unutar k nema rješenja.
   - Ako je A na pravcima koji diraju k, a paralelni su s p postoje tri rješenja.
   - Ako je A izvan k postoje 4 rješenja.

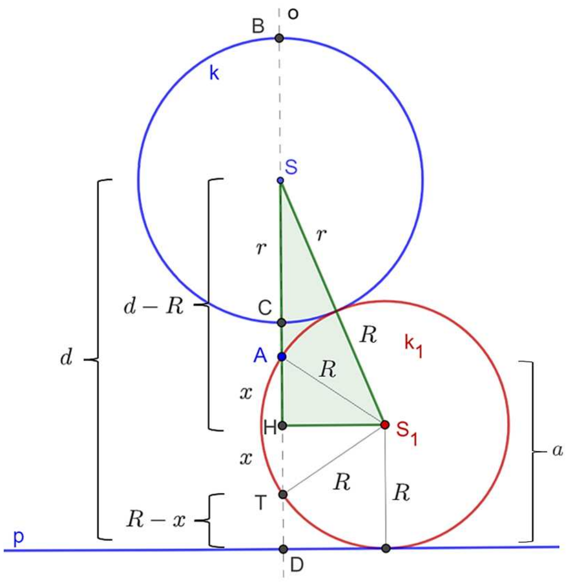
2. p i k se diraju
   - Ako je A unutar k jedno rješenje.
   - Ako je A na paralelnim pravcima s p koji diraju k postoji jedno rješenje.
   - Ako je A na pravcima okomitim na p koji diraju k postoje tri rješenja, inače postoje dva rješenja.
3. p i k se sijeku
   - Ako je A unutar k postoje dva rješenja.
   - Ako je A na paralelnim pravcima s p koji diraju k postoji jedno rješenje, inače postoje dva rješenja.

Slučaj E. *Zadani su kružnica $k = k(S, r)$, pravac p i točka A takvi da se točka A nalazi na okomici iz S na p. Trebamo konstruirati kružnicu koja prolazi kroz točku A te dira zadanu kružnicu k i pravac p.*

Ovaj problem ćemo riješiti na dva načina.

1. način

Analiza:



Slika 2.36: Analiza problema Tpk, slučaj E, primjena Pitagorina poučka

Neka je o okomica iz S na p. Neka je $k_1 = k(S_1, R)$ tražena kružnica. Neka je H sjecište okomice iz S_1 na o. T i A neka su sjecišta kružnice k_1 sa o. Pošto je trokut ATS_1 jednakokračan a H mu je nožište visine na stranicu AT, udaljenosti $|AH|$ i $|TH|$ su jednake. Označimo udaljenost točke S do točke D sa d, a udaljenost A do D s a.
Primjenimo Pitagorin poučak na trokut $\triangle SS_1H$. Imamo:

$$|S_1H|^2 + |HS|^2 = |SS_1|^2$$

$|HS| = d - R$, $|SS_1| = R + r$. Iz trokuta $\triangle TS_1H$ imamo $|S_1H|^2 = R^2 - x^2$ (slika 2.36) pa slijedi:

$$\begin{gathered}
(d-R)^2 + (R^2 - x^2) = (R+r)^2 \\
x = a - R \text{ pa vrijedi:} \\
d^2 - 2dR + R^2 + R^2 - (a-R)^2 = R^2 + 2Rr + r^2 \Big/ - R^2 \\
d^2 - 2dR \cancel{+R^2} - a^2 + 2aR \cancel{-R^2} = 2Rr + r^2 \\
R = \frac{d^2 - a^2 - r^2}{2(r - a + d)}
\end{gathered}$$

R je radijus tražene kružnice te je dalje lako konstruirati.

Konstrukcija:
Neka je $a = d(A, D)$, $d = d(S, D)$ te r radijus kružnice k, a o okomica iz S na p.

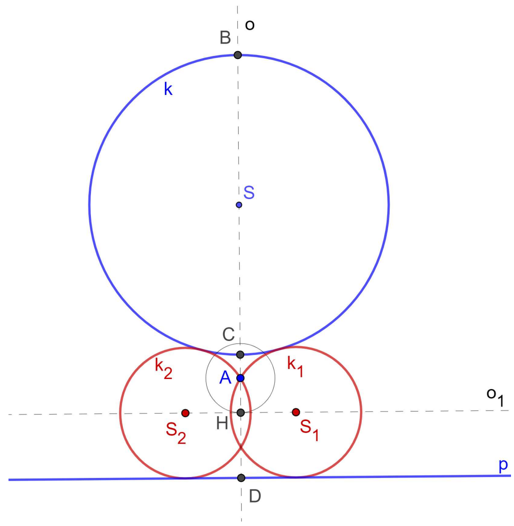
1. konstruirajmo duljine $R = \dfrac{d^2 - a^2 - r^2}{2(r - a + d)}$ i $x = |a - R|$

2. $k(A, x) \cap o = \{H\}$

3. o_1 = okomica iz H na o

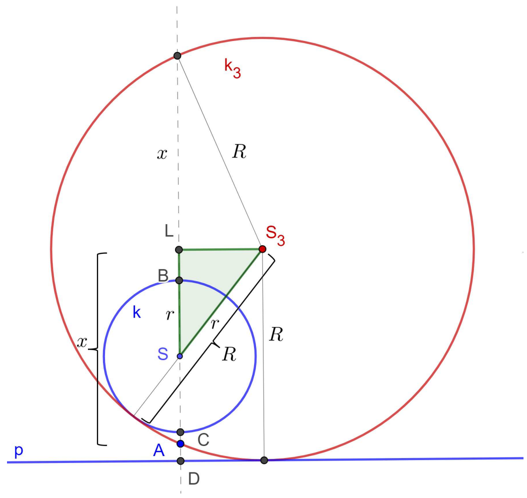
4. $k(A, R) \cap o_1 = \{S_1, S_2\}$

5. $k_1 = k(S_1, R), k_1 = k(S_1, R)$

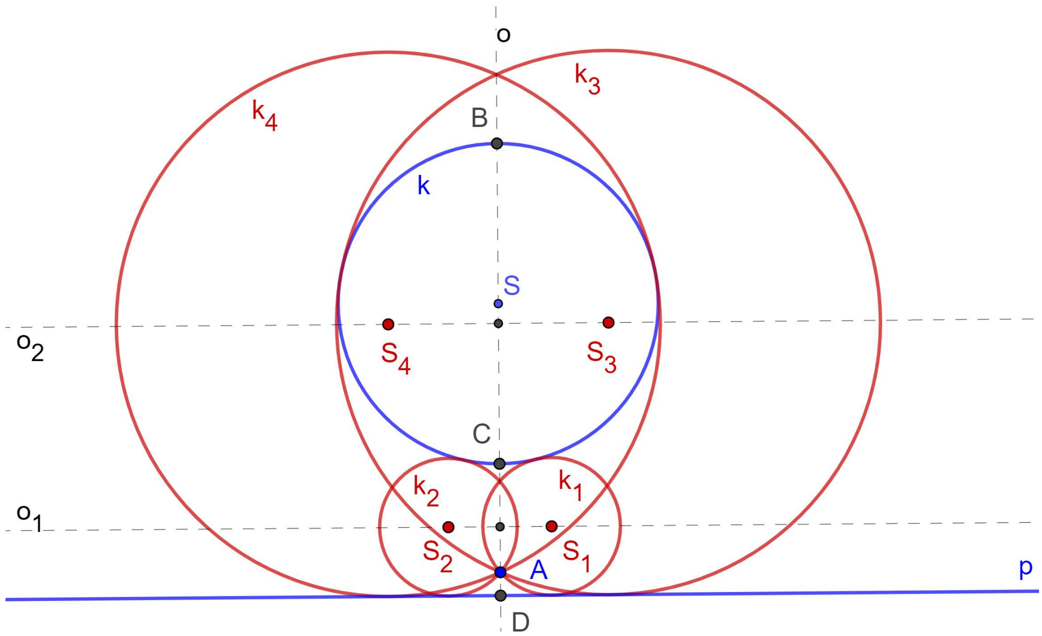


Slika 2.37: Konstrukcija problema Tpk, slučaj E

Rasprava:
Ako se A nalazi unutar kružnice k te ako je $r-a+d \leq 0$ konstrukciju nije moguće provseti. Zapitajmo se može li brojnik $d^2 - a^2 - r^2$ biti negativan. Kako je $d > a > r$ brojnik će uvijek biti pozitivan. Međutim, na sličan način se iz trokuta $\triangle SS_3L$ na slici 2.38 dobije radijus $R_1 = \frac{d^2-a^2-r^2}{2(d-r-a)}$, $x = |R_1 - a|$ pa postoje još dva rješenja.
Dokaz slijedi iz analize.



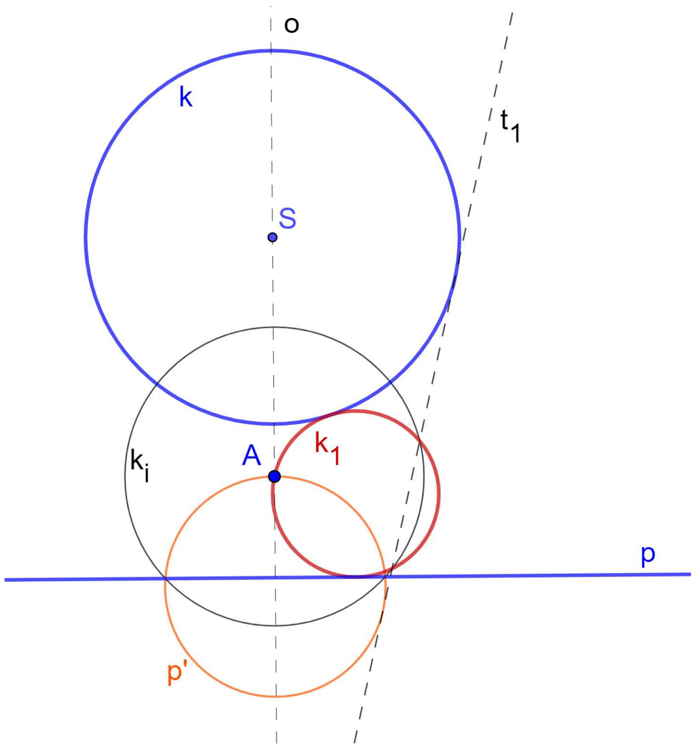
Slika 2.38: Problema Tpk, slučaj E, još dva rješenja



Slika 2.39: Problem Tpk, slučaj E, sva rješenja

2. način - konstrukcija inverzijom

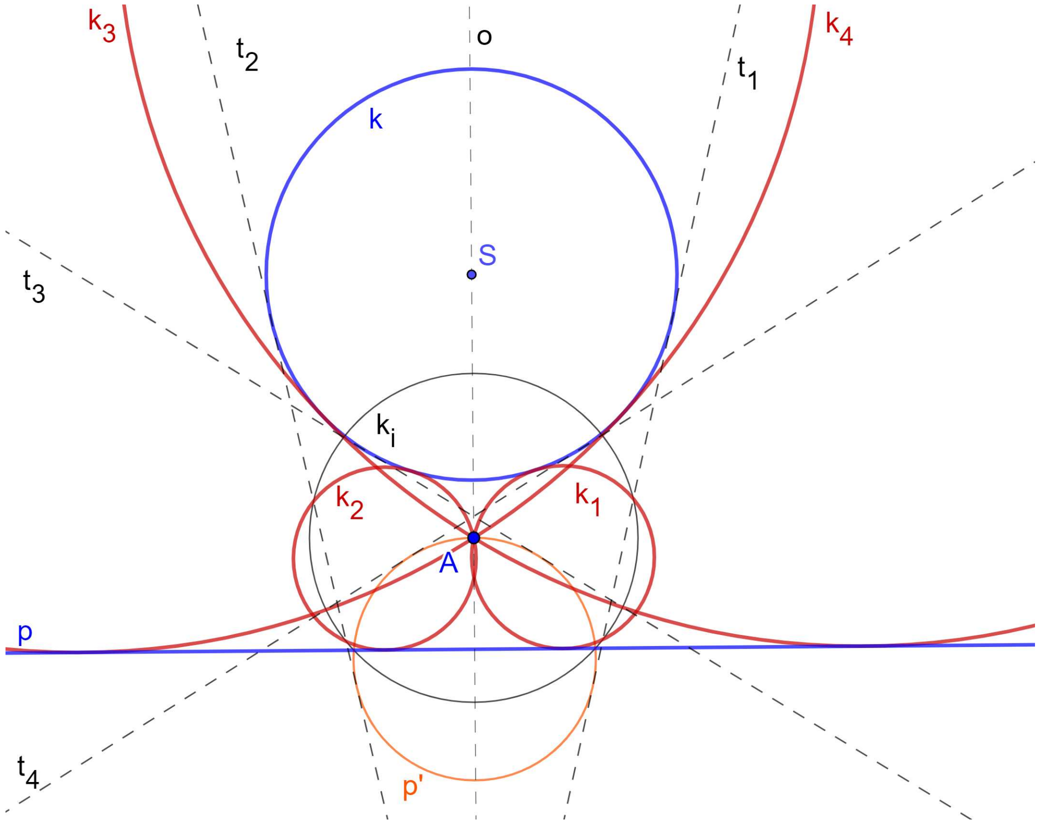
Analiza:
Odaberimo kružnicu inverzije sa središtem u A takvu da se zadana kružnica k preslika sama u sebe. Pravac p koji dira traženu kružnicu k_1 preslikati će se inverzijom u kružnicu p' koja prolazi središtem inverzije. Tražena kružnica k_1 koja prolazi točkom A te dira kružnicu k i pravac p, preslikati će se u pravac koji dira kružnicu p' i kružnicu k. Slika tražene kružnice k_1 je zajednička tangenta kružnice k i p'.



Slika 2.40: Analiza problema Tpk, slučaj E (konstrukcija inverzijom)

Konstrukcija:

1. konstruiramo kružnicu inverzije k_i sa središtem A koja je ortogonalna na k
2. preslikamo inverzijom pravac p u kružnicu p'
3. konstruiramozajedničke tangente t_1, t_2, t_3 i t_4 kružnica k i p'
4. preslikamo tangente t_1, t_2, t_3 i t_4 inverzijom u tražene kružnice k_1, k_2, k_3 i k_4



Slika 2.41: Konstrukcija problema Tpk, slučaj *E* (konstrukcija inverzijom)

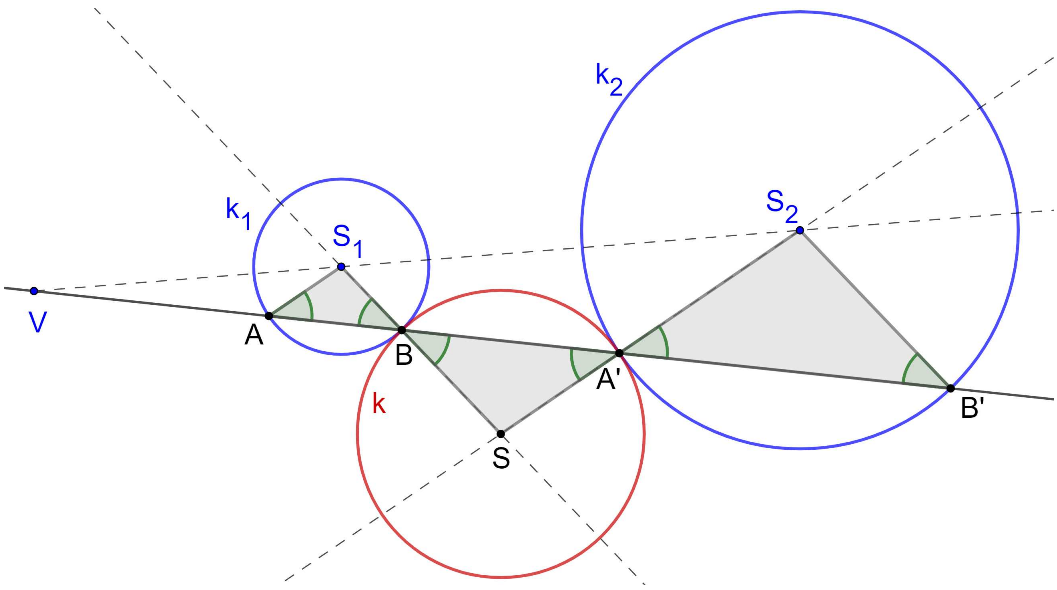
Rasprava:
Ako se točka *A* nalazi unutar kružnice *k* konstrukcija se ne može provesti.
Dokaz slijedi iz analize.

2.3 Problem Tkk

S obzirom na to da sada prelazimo na malo kompliciranije slučajeve zapisat ćemo prvo neke leme koje će nam pomoći pri rješavanju preostalih problema.

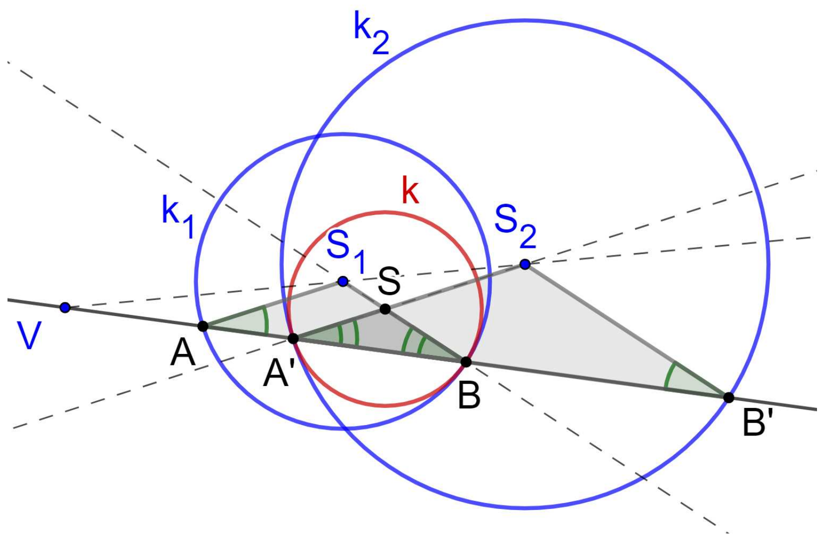
Lema 1. *Neka su dane kružnice $k_1 = k(S_1, r_1)$, $k_2 = k(S_2, r_2)$ koje se ne sijeku te neka je V njihov vanjski (ili unutarnji) centar sličnosti. Sekanta na kružnicu k_1 iz V siječe k_1 redom u točkama A i B ($|VA| < |VB|$). Ta sekanta siječe kružnicu k_2 redom u točkama A', B' (slike točaka A i B pri homotetiji s centrom V koja preslikava k_1 u k_2). Označimo $S_1B \cap S_2A'$ sa S. Kružnica $k = k(S, |SA'|)$ dira zadane kružnice.*

Dokaz. Jednakokračni trokuti $\triangle BS_1A$ i $\triangle B'S_2A'$ su po homotetiji s centrom V koja preslikava k_1 u k_2 slični pa su kutovi $\sphericalangle S_1AB$, $\sphericalangle ABS_1$, $\sphericalangle S_2A'B'$ i $\sphericalangle A'B'S_2$ sukladni. Također, kutovi $\sphericalangle ABS_1$ i $\sphericalangle A'BS$ te $\sphericalangle S_2A'B'$ i $\sphericalangle SA'B$ sukladni su jer su vršni kutovi. Trokut $A'BS$ je jednakokračan pa je S središte kružnice koja dira kružnicu k_1 u točki B, a kružnicu k_2 u A'. □



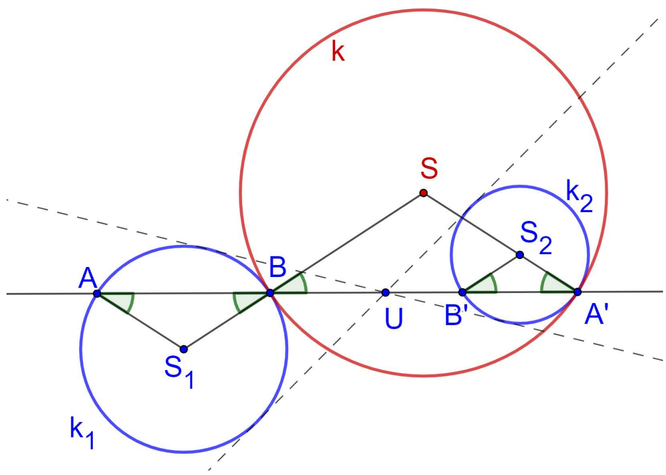
Slika 2.42: Lema 1

Lema 1 vrijedi i ako se kružnice sijeku:



Slika 2.43: Lema 1, kružnice se sijeku

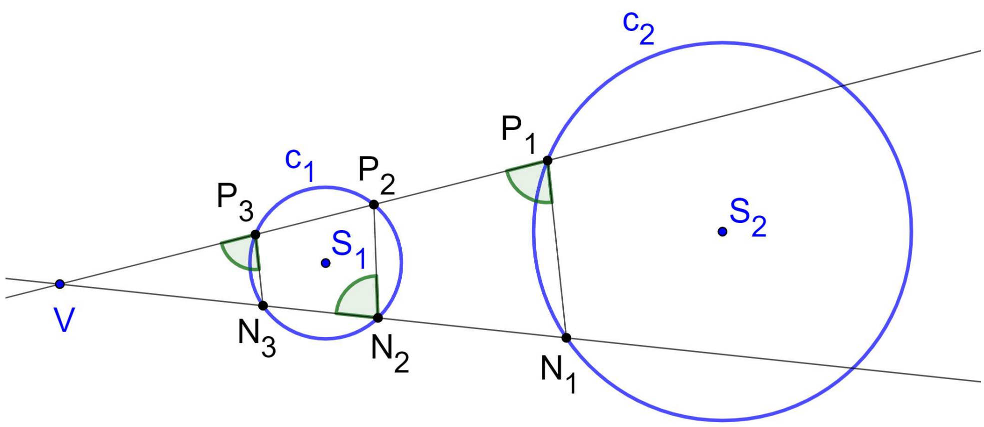
Iz dokaza Leme 1 vidimo: Ako kružnica k dira k_1 u B, a k_2 u A', onda je centar homotetije koja preslikava k_1 u k_2 na pravcu $A'B$.



Slika 2.44: Lema 1, unutarnji centar sličnosti

Lema 2. *Neka su dane kružnice $c_1 = k(S_1, r_1)$, $c_2 = k(S_2, r_2)$ koje se ne sijeku te neka je V njihov vanjski (ili unutarnji) centar homotetije. Tada sve kružnice koje koje diraju izvana c_1 i c_2 imaju istu potenciju s obzirom na točku V i točka V leži na potencijali bilo kojih dviju takvih kružnica.*

Dokaz. Pravac kroz vanjski centar sličnosti V (ili unutarnji U) siječe kružnice c_1 i c_2 u točkama N_1, N_2 (tako da $S_1N_1 \nparallel S_2N_2$). Vrijednost $|VN_1| \cdot |VN_2|$ uvijek je ista, novisno o pravcu. Dokažimo da kružnica koja dira c_1 u N_1 te prolazi točkom N_2 nužno dira c_2. Promotrimo dva pravca i odgovarajuća sjecišta N_1, N_2, P_1, P_2 te P_3, N_3. Zbog homotetije s centrom V koja preslikava c_1 u c_2 znamo da $P_1N_1 \parallel P_3N_3$. Također $\sphericalangle VP_1N_1 = \sphericalangle VP_3N_3$ (kutovi uz presječnicu paralelnih pravaca) i $\sphericalangle VP_3N_3 = \sphericalangle P_2N_2V$ (tetivnost). Zaključujemo da je četverokut $P_1N_1N_2P_2$ tetivan te vrijedi $|VN_1| \cdot |VN_2| = |VP_1| \cdot |VP_2|$. □



Slika 2.45: Lema 2

Napomena. *Bilo koje dvije kružnice k_1 i k_2 koje diraju kružnice c_1 i c_2 izvana imaju istu potenciju s obzirom na točku V.*

Problem. *U ravnini zadane su dvije kružnice c_1 i c_2 i točka A. Konstruirati kružnicu koja prolazi kroz točku A te dira zadane kružnice.*

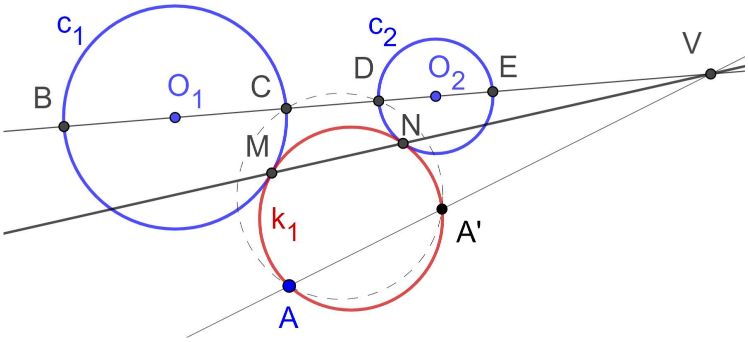
Ovaj problem ćemo riješiti na dva načina.

1. način

Analiza:

Zadane su dvije kružnice c_1 i c_2 te točka A. Neka je k_1 tražena kružnica koja dira zadane. Neka je točka M dirالište k_1 s c_1, a točka N diralište k_1 s c_2. Prema Lemi 1 znamo da pravac MN prolazi vanjskim (ili unutarnjim) centrom homotetije tih dviju kružnica (Slika 2.46). Neka je pravac VA sekanta kružnice k_1 koju siječe u točkama A i A' pa vrijedi $|VA'| \cdot |VA| = |VN| \cdot |VM|$. Neka pravac O_1O_2 siječe zadane kružnice redom u točkama B, C, D, E kao na slici 2.46.

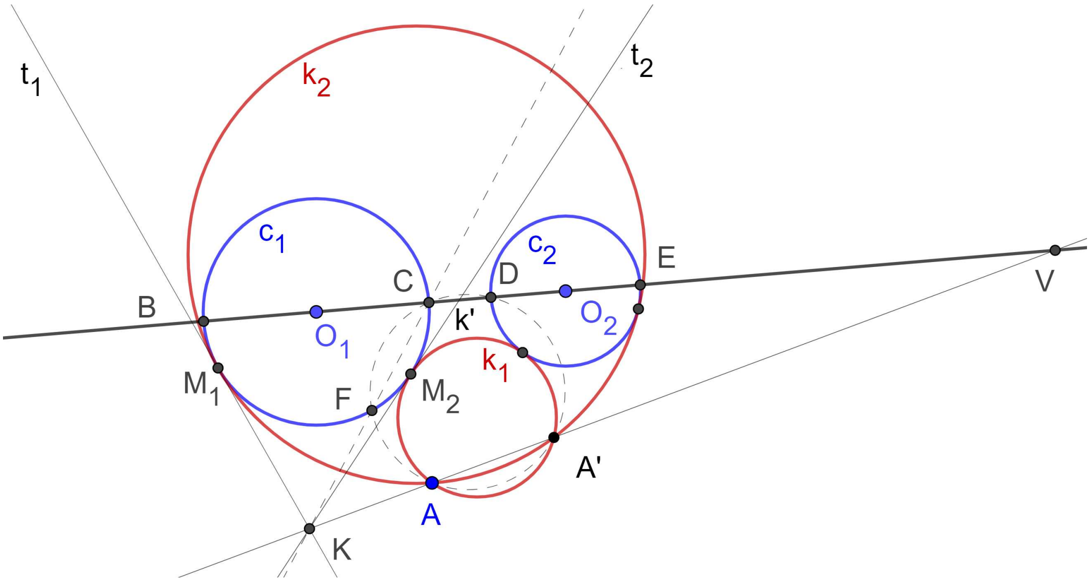
Točke C i D se ne preslikavaju promatranom homotetijom jedna u drugu. Prije smo pokazali (Lema 2) da vrijedi $|VC| \cdot |VD| = |VN| \cdot |VM|$ pa vrijedi $|VD| \cdot |VC| = |VA'| \cdot |VA|$. Zaključujemo da A, A', C i D konciklične. Konstruiramo li kružnicu k' koja prolazi točkama A, C i D i odredimo točku A' kao sjecište VA i k', konstrukciju tražene kružnice k_1 sveli smo na problem TTk (2.1) jer treba konstruirati kružnicu k_1 koja prolazi točkama A i A' te dira kružnicu c_1.



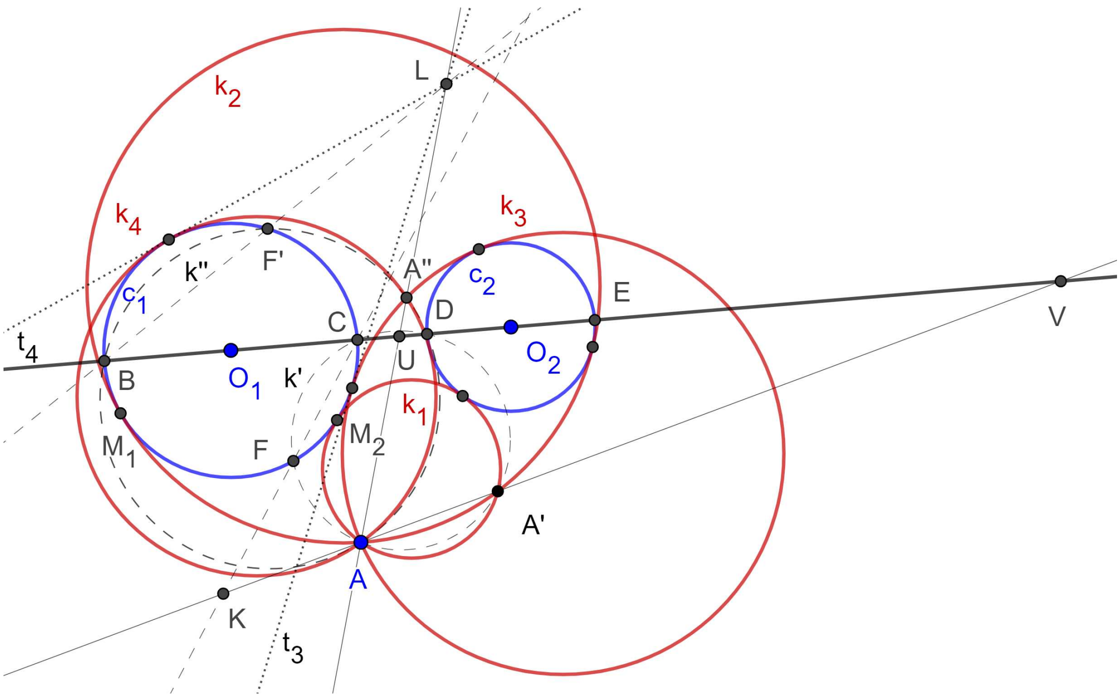
Slika 2.46: Analiza problema Tkk

Konstrukcija:
Zadane su kružnice $c_1(O_1, r_1)$ i $c_2(O_2, r_2)$ te točka A.

1. pravac O_1O_2
2. O_1O_2 siječe c_1 u točkama $\{B, C\}$ tako da je $|O_2B| > |O_2C|$, a c_2 u točkama $\{D, E\}$ tako da je $|O_1E| > |O_1D|$
3. V je vanjsko središte sličnosti kružnica c_1 i c_2
4. $k' = k(A, C, D)$, k' siječe c_1 u točkama F i C
5. $AV \cap k' = \{A, A'\}$
6. $CF \cap AV = \{K\}$
7. konstruiramo iz K tangente t_1, t_2 na kružnicu c_1
8. $t_1 \cap c_1 = \{M_1\}$, $t_2 \cap c_1 = \{M_2\}$
9. tražene kružnice su kružnice $k_1 = k(A, A', M_1)$ i kružnica $k_2 = k(A, A', M_2)$
10. ponovimo analogan postupak za korake 3-9 s unutarnjim centrom sličnosti U te dobivamo kružnice k_3 i k_4.

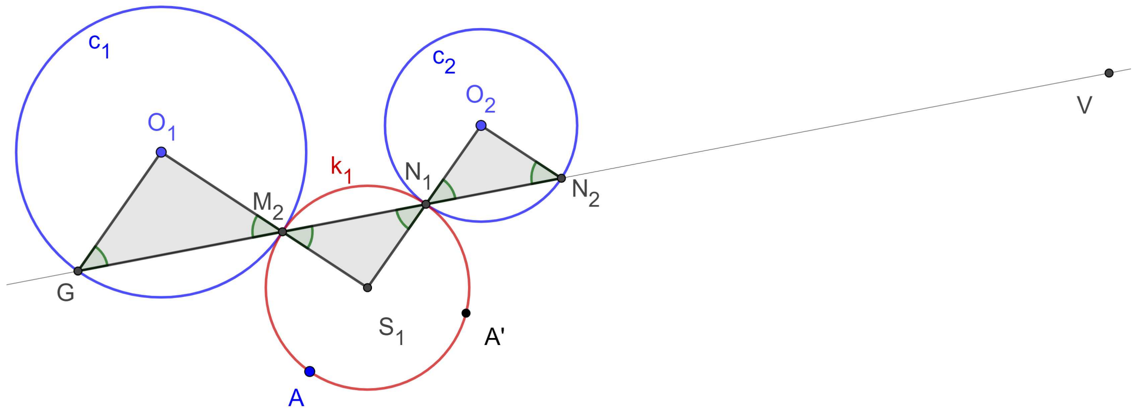


Slika 2.47: Konstrukcija problema Tkk, koraci 1-9



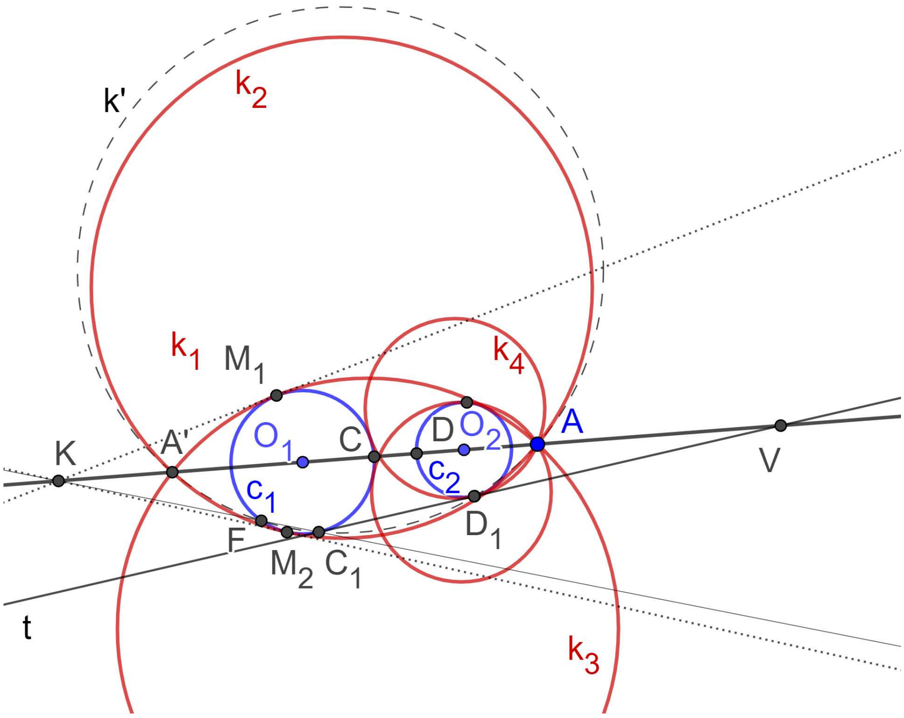
Slika 2.48: Konstrukcija problema Tkk, sva rješenja

Dokaz:
Dokažimo da kružnica k_1 dira zadane kružnice c_1 i c_2 te prolazi točkom A. Iz konstrukcije očito je da prolazi kroz A, trebamo još dokazati da dira c_1 i c_2.
Znamo: $|KM_2|^2 = |KC| \cdot |KF| = |KA'| \cdot |KA|$. Neka je S_1 središte kružnice k_1. KM_2 je tangenta na k_1 pa je M_2 je dirałište c_1 i k_1. Trebamo još dokazati da k_1 dira c_2.
Neka je N_1 sjecište VM_2 i c_2 takva da O_1M_2 nije paralelno s O_2N_1. Dokažimo da je N_1 na k_1. Zbog 4. i 5. koraka konstrukcije točke A, A', C i D su konciklične, a AA' i CD sijeku se u V. Zato je $|VA| \cdot |VA'| = |VC| \cdot |VD|$. Prema lemi 2 $|VC| \cdot |VD| = |VM_2| \cdot |VN_1|$ gdje je N_1 sjecište VM_2 i c_2. Znači $|VA| \cdot |VA'| = |VM_2| \cdot |VN_1|$ što znači da je N_1 na k_1.
Treba dokazati da su S_1, N_1, O_2 kolinearne. Neka je G sjecište pravca VM_2 i kružnice c_1. Trokut $\triangle M_2O_1G$ ima svoju homotetičnu sliku obzirom na homotetiju s centrom V koja preslikava A u A' unutar kružnice c_2 i neka je to trokut $\triangle N_2O_2N_1$ [Slika 2.49]. Ti trokuti imaju jednake kutove. Produžimo li O_1M_2 do S_1 kutovi $\sphericalangle VM_2S_1$ i $\sphericalangle O_1M_2G$ sukladni su jer su vršni. Spojimo S_1N_1 tada $|S_1N_1| = |S_1M_2|$, dakle $S_1N_1M_2$ jednakokračan trokut te $\sphericalangle N_1M_2S_1 = \sphericalangle S_1N_1M_2$. Dakle vrijedi $\sphericalangle S_1N_1M_2 = \sphericalangle N_1M_2S_1 = \sphericalangle GM_2O_1$
$= O_1GM_2 = O_2N_1N_2$ pa su kutovi $\sphericalangle S_1N_1M_2$ i $\sphericalangle O_2N_1N_2$ vršni, dakle S_1, N_1, O_2 kolinearne. Analogno se pokaže za kružnica k_2, k_3 i k_4. □



Slika 2.49: Dokaz problema Tkk

Rasprava:
U prva dva koraka konstrukcije ne nailazimo na probleme, dok u četvrtom se moramo zapitati što ako su A, C i D kolinearne. Tada umjesto pravca O_1O_2 i točaka C i D konstruiramo zajedničku tangentu t dviju kružnica tako $t \cap c_1 = C_1$, $t \cap c_2 = D_1$ te dalje konstrukciju provodimo pomoću tih točaka. Ostaju četiri rješenja.



Slika 2.50: Problem Tkk, $A \in O_1O_2$

U 4. koraku može nam se desiti da kružnice k' i c_1 imaju samo jedno sjecište, TOČKU C. U tom slučaju u 7. koraku konstrukcije umjesto CF uzmemo tangentu u C na c_1. Kružnice k' i c_1 imaju samo jedno sjecište ako se A nalazi na kružnici sa središtem u polovištu dužine $\overline{CD}$ radijusa $\frac{|CD|}{2}$.
U 5. koraku može nam se desiti da se A i A' poklope ako je AV tangenta kružnice k'. Tada ćemo u 9. koraku trebati konstruirati kružnicu koja prolazi kroz M_2 koja dira pravac AV.
Zapitajmo se u 7. koraku mogu li nam AA' i CF biti paralelni. Mogu, tada točka K nije definirana i tangente t_1 i t_2 su tangente na c_1 paralelne sa CF i AA' što nije problem konstruirati. Može li se K nalaziti unutar kružnice c_1? Može samo ako se i A nalazi unutar neke od zadanih kružnica, a tada nema rješenja.
Ako $K = M = N$ tada imamo samo jedno rješenje slučaja, odnosno dva rješenja ukupno.
Promotrimo još sve moguće položaje triju zadanih objekata:

1. c_1 i c_2 sijeku u dvije različite točke

   - ako se točka A ne nalazi ni na c_1 ni na c_2, postoje dva rješenja
   - ako se točka A nalazi na sjecištu c_1 i c_2 tada nema rješenja

- ako se A nalazi na c_1, ali ne i na c_2 postoje dva rješenja

2. c_1 i c_2 se diraju izvana/iznutra

   - c_1 i c_2 diraju se u točki A, tada postoji beskonačno rješenja
   - ako se točka A nalazi izvan obiju kružnica, a kružnice se diraju izvana tada postoje tri rješenja, a ako se kružnice diraju iznutra postoje jedno rješenje
   - ako se točka A nalazi na jednoj od kružnica rješenje je jedinstveno
   - ako se točka A nalazi unutar jedne od kružnica, a izvan druge te se kružnice diraju izvana tada postoji jedno rješenje, a ako se kružnice diraju iznutra postoje tri rješenja
   - ako se točka A nalazi unutar obje kružnice tada rješenja nema

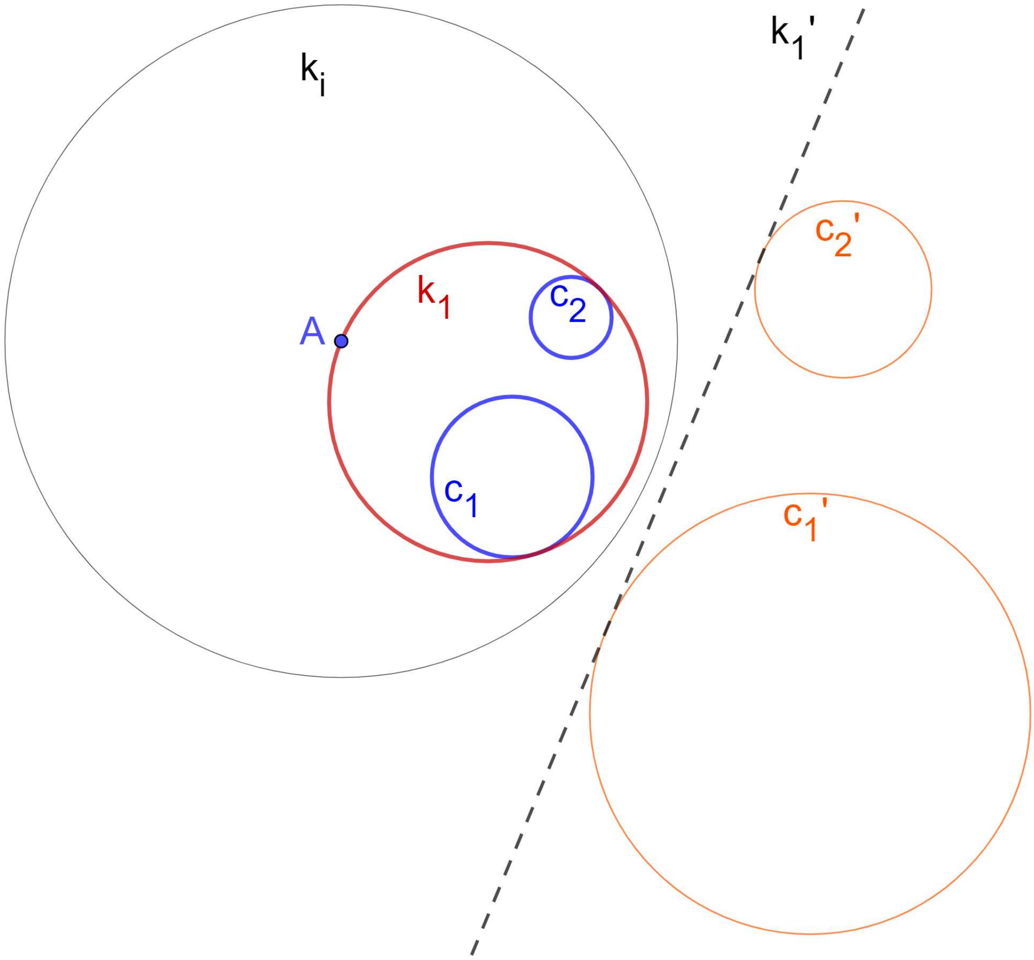
3. $c_1 \cap c_2 = \emptyset$

   - ako se c_1 i c_2 ne sijeku i ne leže jedna unutar druge te točka A se nalazi izvan zadanih kružnica postoje četiri rješenja
   - ako se c_1 i c_2 ne sijeku, a jedna leži unutar druge te točka A se nalazi izvan zadanih kružnica tada rješenja nema
   - ako se c_1 i c_2 ne sijeku a točka A nalazi se na jednoj od njih, tada postoje dva rješenja.
   - ako se c_1 i c_2 ne sijeku i ne leže jedna unutar druge, a točka A se nalazi unutar jedne, ali ne i unutar druge, rješenja nema
   - ako se c_1 i c_2 ne sijeku, a jedna leži unutar druge i točka A se nalazi unutar jedne ali ne i unutar druge tada postoje četiri rješenja
   - ako se c_1 i c_2 ne sijeku, a jedna leži unutar druge i točka A se nalazi unutar obje, rješenja nema

2. način - konstrukcija inverzijom

Problem. *U ravnini zadane su dvije kružnice i točka A. Trebamo konstruirati kružnicu koja prolazi točkom A i dira zadane kružnice.*

Analiza:

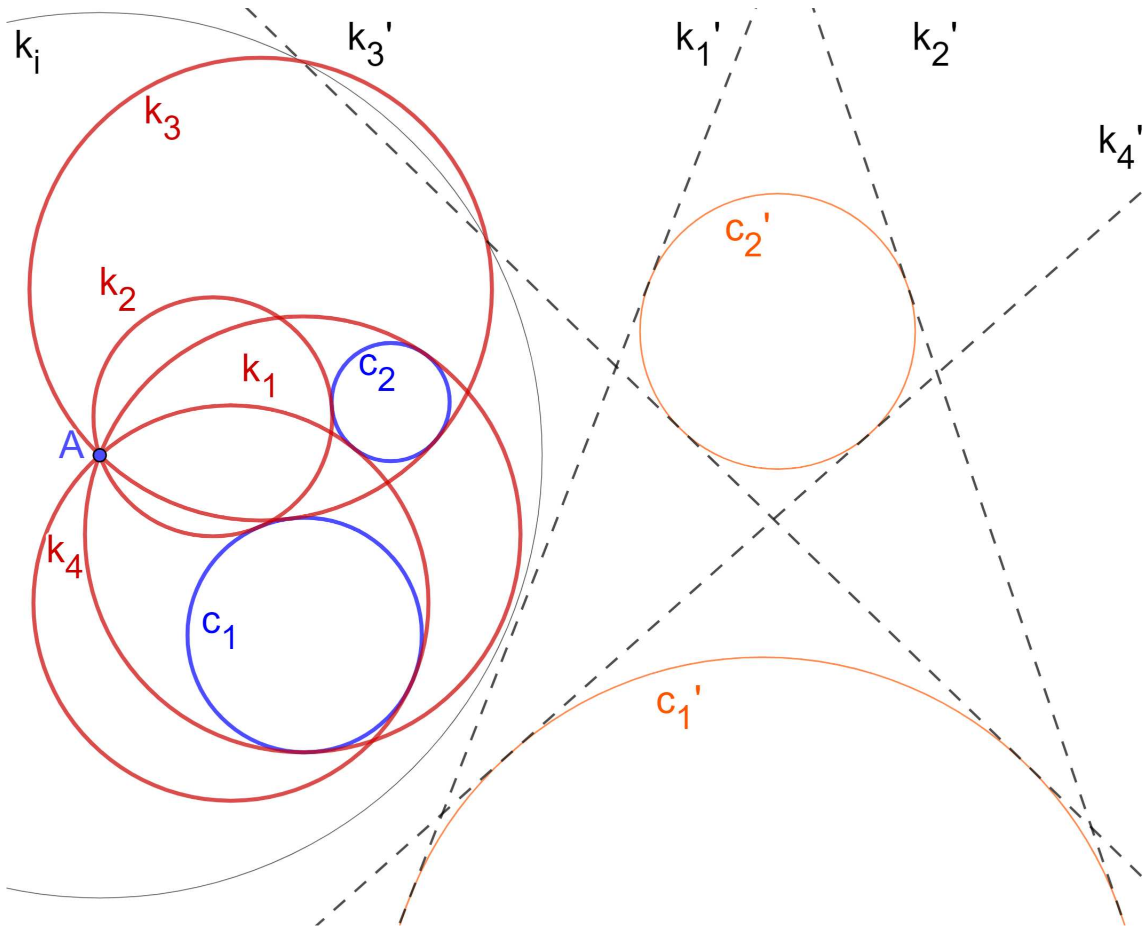


Slika 2.51: Analiza problema Tkk, konstrukcija inverzijom

Želimo da se tražena kružnica k preslika u neki pravac k' pa uzmimo za centar inverzije točku A. Zadane kružnice preslikat će se u kružnice kojima je A centar sličnosti, a pravac k' zajednička tangenta. Uzmemo proizvoljan radijus inverzije.

Konstrukcija:

1. konstruiramo kružnicu inverzije $k = k_i(A, r_i)$, r_i proizvoljan
2. preslikamo kružnicu c_1 inverzijom u odnosu na kružnicu k_i u kružnicu c_1'
3. preslikamo kružnicu c_2 inverzijom u odnosu na kružnicu k_i u kružnicu c_2'
4. konstruiramo zajedničke tangente kružnica c_1' i c_2'
5. dobivene tangente k_1', k_2', k_3' i k_4' preslikamo inverzijom u kružnice k_1, k_2, k_3 i k_4 i to su tražene kružnice



Slika 2.52: Problem Tkk, konstrukcija inverzijom

2.4 Problem ppk

Problem. *U ravnini zadani su kružnica k te pravci a i b. Konstruirati kružnicu koja dira dva zadana pravca i danu kružnicu.*

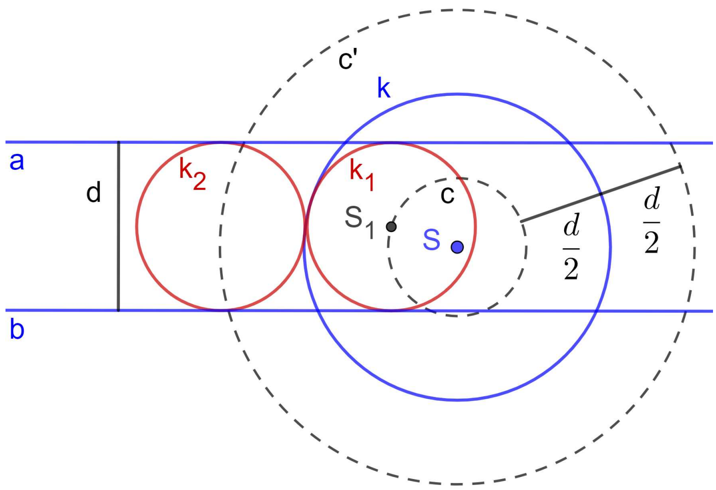
Promotrimo prvo sve moguće međusobne položaje danih pravaca.

1. Pravci a i b su paralelni.
   Ovaj slučaj ćemo analizirati nešto kasnije. (Slučaj A)

2. Pravci a i b se sijeku.
   Ovaj slučaj ćemo analizirati nešto kasnije. (Slučaj B)

Slučaj A. *Apolonijev problem ppk u situaciji kada su zadani kružnica k te paralelni pravci a i b. Trebamo konstruirati kružnicu koja dira zadane pravce i kružnicu.*

Analiza:

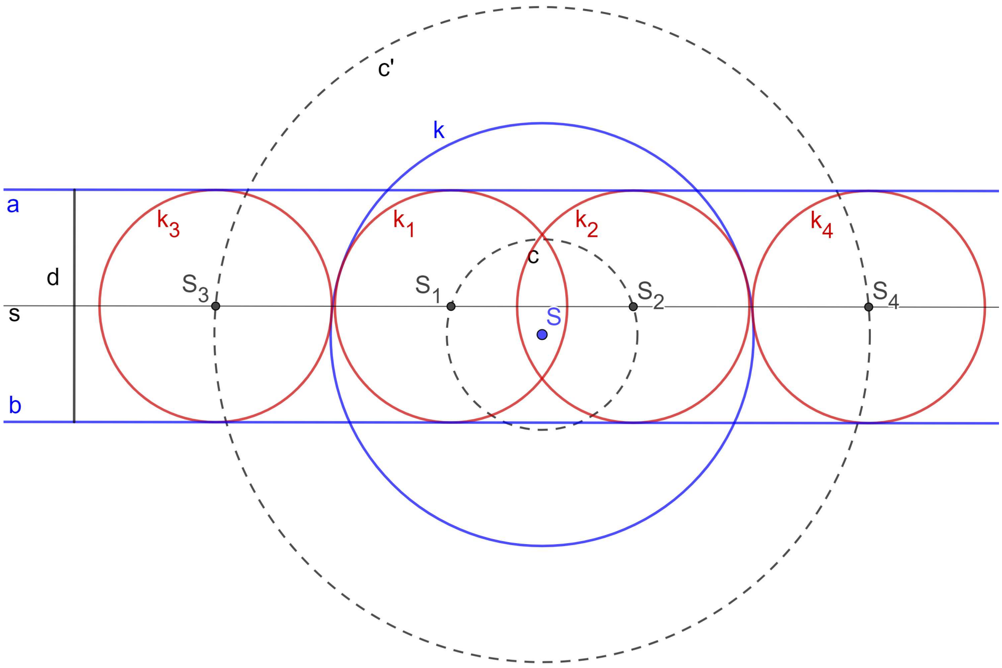


Slika 2.53: Analiza problema ppK, slučaj A

Neka je $k_1 = k(S_1, r_1)$ kružnica koja dira pravce a i b te kružnicu $k = k(S, r)$. Znamo da je njen radijus polovina udaljenosti između pravaca a i b. Neka je c kružnica koncentrična kružnici k koja prolazi središtem tražene kružnice pa je njen radijus $r - \frac{d}{2}$ (ili $r + \frac{d}{2}$). Ako konstruiramo c, lako ćemo odrediti središte tražene kružnice k_1.

Konstrukcija:
Dana je kružnica $k = k(S, r)$ i pravci a, b. Neka je d udaljenost pravaca a i b.

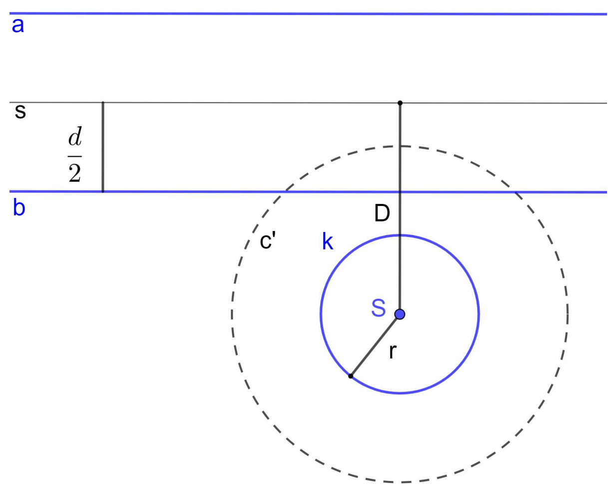
1. s pravac koji je paralelan sa zadanima i jednako udaljen od a i b
2. $c = k(S, r - \frac{d}{2})$, $c' = k(S, r + \frac{d}{2})$
3. $c \cap s = \{S_1, S_2\}$, $c' \cap s = \{S_3, S_4\}$
4. $k_1 = k(S_1, \frac{d}{2})$, $k_2 = k(S_2, \frac{d}{2})$, $k_3 = k(S_3, \frac{d}{2})$, $k_4 = k(S_4, \frac{d}{2})$



Slika 2.54: Konstrukcija problema ppK, slučaj A

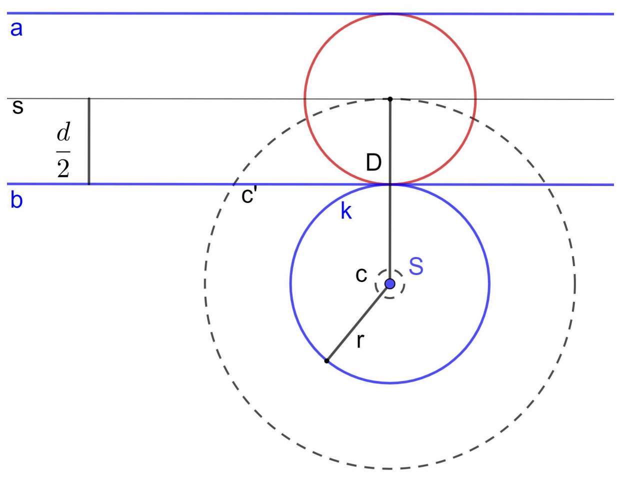
Rasprava:
U prvom koraku nemamo problema u konstrukciji.
U drugom koraku ako je $r \leq \frac{d}{2}$ onda nema kružnice c' (za $r = \frac{d}{2}$, c' je točka).
Zapitajmo se kada se sijeku kružnice c, c' s pravcem s. Broj sjecišta kružnice sa središtem S i pravca s ovisi o udaljenosti $D = d(S, s)$ i polumjeru kružnice. Kružnica i pravac s sijeku se u dvije točke ako je D manji od polumjera, diraju se ako je D jednak polumjeru, a presjeka nema ako je D veći od polumjera kružnice. Vrijedi:

1. Ako je $r < D - \frac{d}{2}$ tada $c \cap s = \emptyset$ i $c' \cap s = \emptyset$ pa u ovom slučaju nema rješenja.



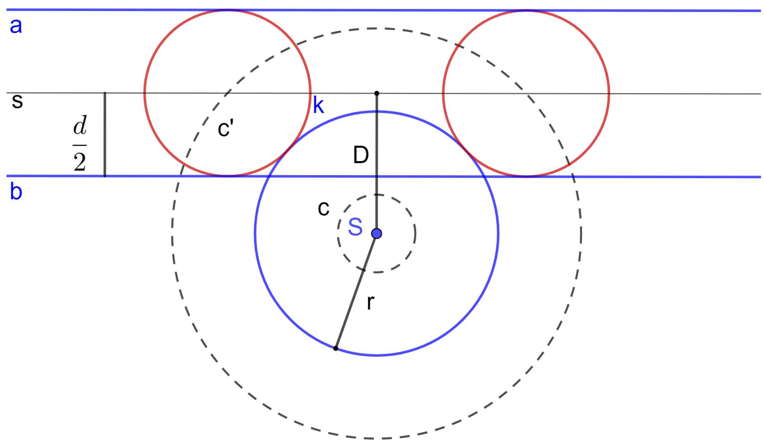
Slika 2.55: Problem ppK, slučaj A, nema rješenja

2. Ako je $r = D - \frac{d}{2}$ tada $c \cap s = \emptyset$, a c' dira s u jednoj točki pa postoji jedno rješenje.



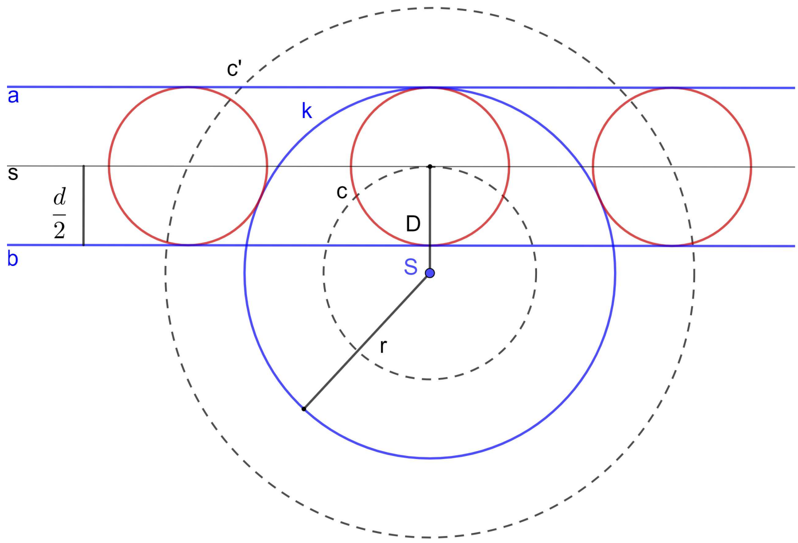
Slika 2.56: Problem ppK, slučaj A, jedno rješenje

3. Ako je $D - \frac{d}{2} < r < D + \frac{d}{2}$ tada $c \cap s = \emptyset$, a c' siječe s u dvije točke pa postoje dva rješenja.



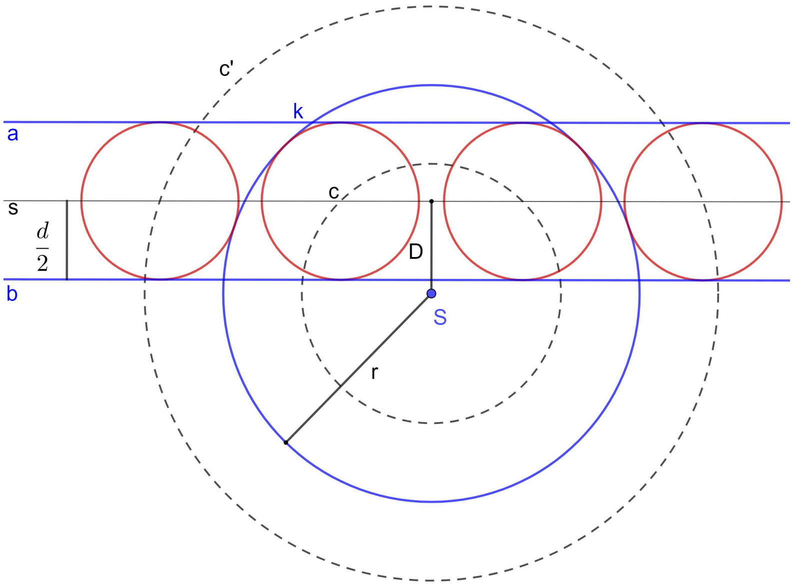
Slika 2.57: Problem ppK, slučaj A, dva rješenja

4. Ako je $r = D + \frac{d}{2}$ tada c dira s u jednoj točki, a c' siječe s u dvije točke pa postoje tri rješenja.



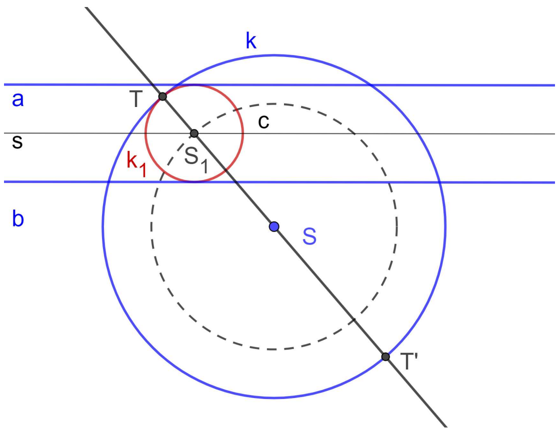
Slika 2.58: Problem ppK, slučaj A, tri rješenja

5. Ako je $r > D + \frac{d}{2}$ tada c i c' sijeku s u dvije točke pa postoje četiri rješenja.



Slika 2.59: Problem ppK, slučaj A, četiri rješenja

Dokaz:
Trebamo dokazati da kružnice k_1, k_2, k_3 i k_4 diraju dva zadana pravca i zadanu kružnicu. Promatramo je $k_1 = k(S_1, \frac{d}{2})$. Znamo da $S_1 \in s$ pa slijedi da k_1 dira pravce a i b. Također, zbog 2. i 3. koraka konstrukcije , $S_1 \in c = k(S, r - \frac{d}{2})$ pa slijedi da $|SS_1| = r - \frac{d}{2}$.
Neka je točka T na kružnici k i na pravcu SS_1 takva da $|TS| > |TS_1|$.



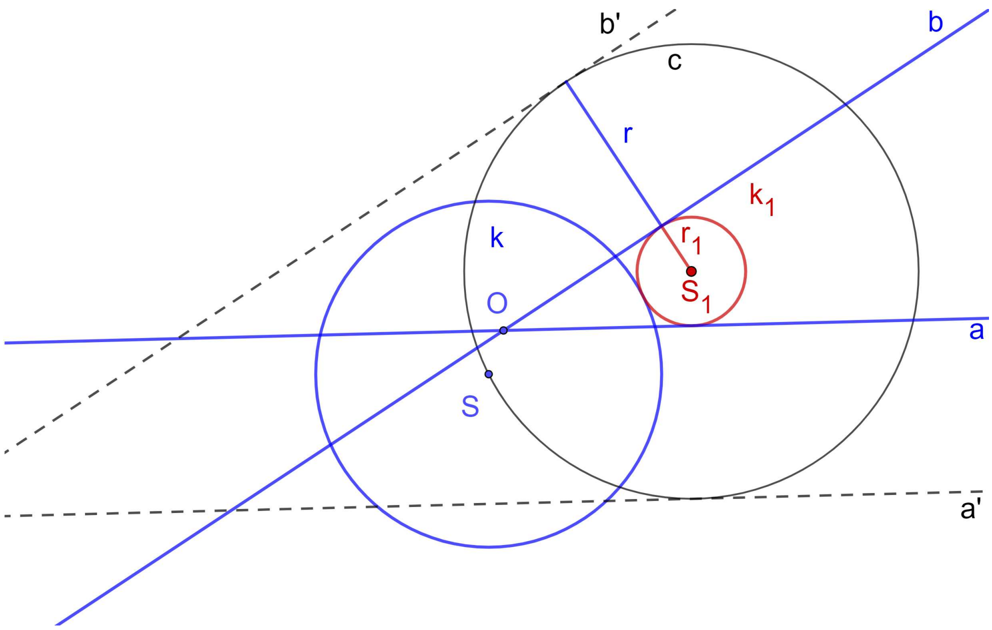
Slika 2.60: Problem ppK, $T \in k$, $T \in SS_1$

Dokazati ćemo da je T diralište kružnica k_1 i k. T je na k po definiciji, a na k_1 je jer $|S_1T| = |ST| - |S_1S| = r - (r - \frac{d}{2}) = \frac{d}{2}$. Dakle, T je na kružnici k_1. Još trebamo provjeriti da je T diralište, ali to direktno slijedi iz činjenice da su S_1, T i S kolinearne točke. Analogno dokazujemo za preostale kružnice.

□

Slučaj B. *Apolonijev problem ppk u situaciji kada su zadani kružnica k te pravci a i b koji se sijeku. Trebamo konstruirati kružnicu koja dira zadane pravce i kružnicu.*

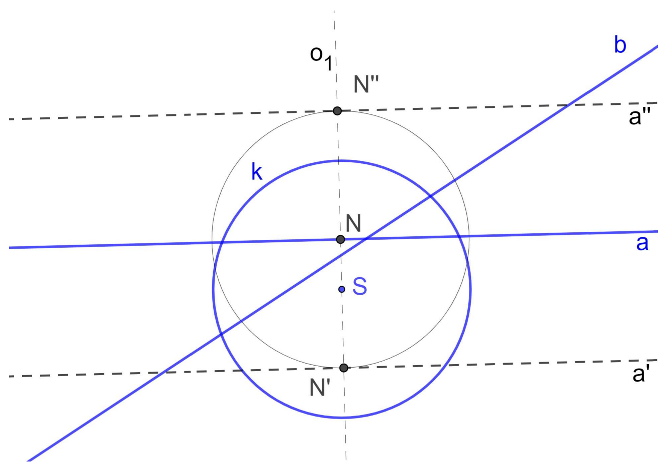
Analiza:
Neka je $k_1 = k(S_1, r_1)$ kružnica koja dira pravce a i b te kružnicu $k = k(S, r)$, a neka je c kružnica koncentrična kružnici k_1 koja prolazi središtem dane kružnice. Ako konstruiramo c dobit ćemo središte tražene kružnice koje je zatim lako konstruirati. Neka je a' pravac paralelan s a udaljen od njega za r, a pravac b' pravac paralelan s b udaljen od njega za r. Kružnica c dodiruje pravce a' i b'. Time smo problem sveli na konstrukciju kružnice c kroz zadanu točku S koja dodiruje pravce a' i b', tj. na problem Tpp [1.3].



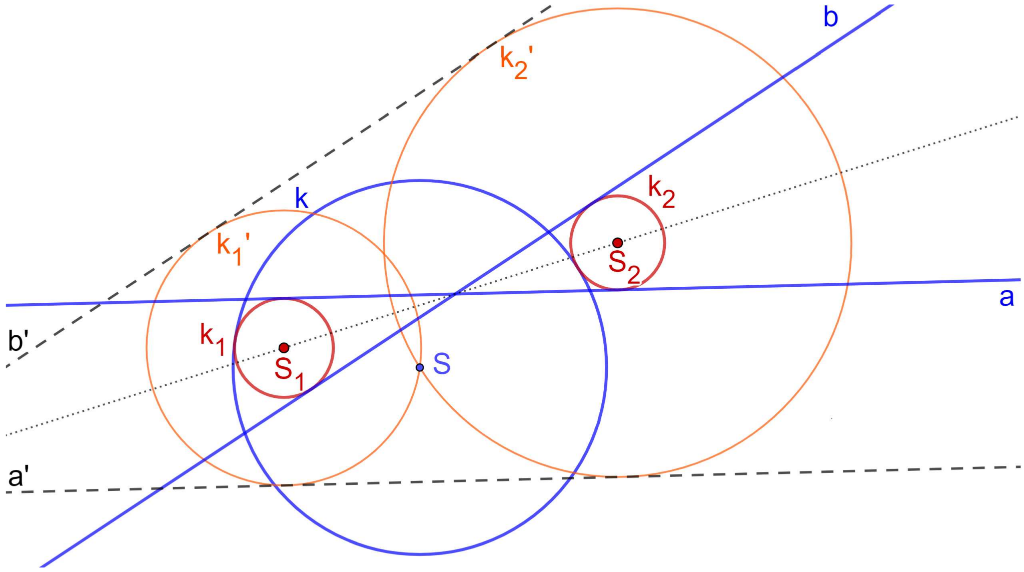
Slika 2.61: Analiza problema ppK, slučaj B

Konstrukcija:
Dana je kružnica $k(S, r)$ te pravci a i b.

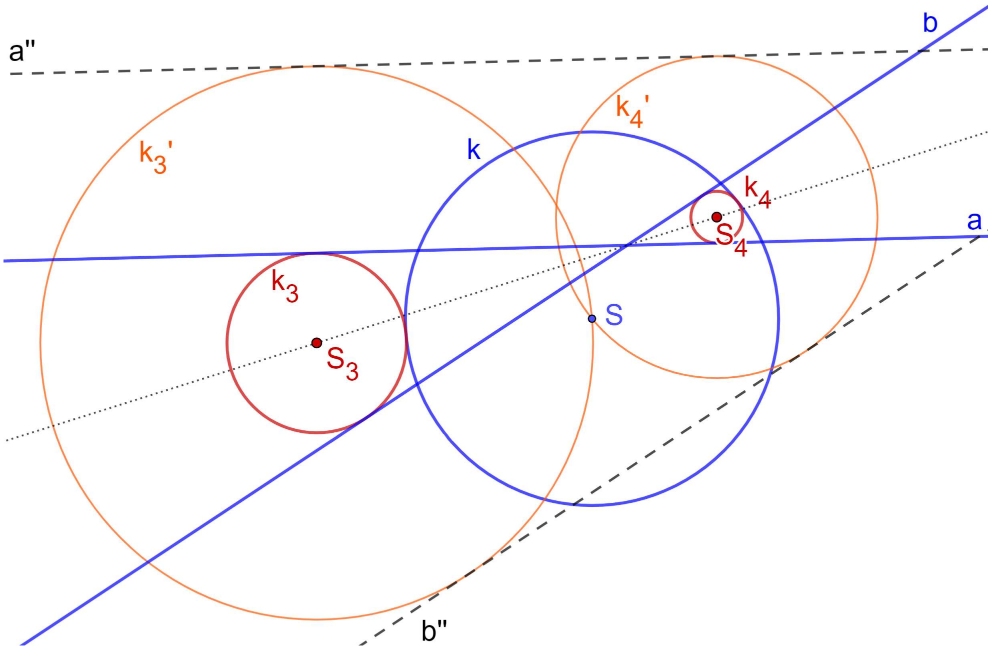
1. okomica o_1 iz točke S na pravac a, nožište N
2. $o_1 \cap k(N, r) = \{N', N''\}$ pri čemu N' i S leže s iste strane pravca a
3. a' i a'' paralele s a kroz N', odnosno N''
4. okomica o_2 iz točke S na pravac b, nožište M
5. $o_2 \cap k(M, r) = \{M', M''\}$ pri čemu M' i S leže s iste strane pravca b
6. b' i b'' paralele s b kroz M', odnosno M''
7. kružnice $k_1' = k(S_1, r_1')$ i $k_2' = k(S_2, r_2')$ koje diraju pravce a' i b' te prolaze točkom S (konstrukcija detaljno opisana u cjelini 1.3: ppT)
   Analogno, konstruiramo kružnice:
   k_3' i k_4' koje diraju pravce a'' i b'' i prolaze točkom S
   k_5' i k_6' koje diraju pravce a'' i b'' i prolaze točkom S
   k_7' i k_8' koje diraju pravce a'' i b'' i prolaze točkom S
8. za $i = 1, ..., 8$, ako je $d(S_i, a) = d(S_i, b) = d(S_i, S) \pm r$ onda kružnica $k_i = k(S_i, d(S_i, a))$ dodiruje pravce a i b i dira kružnicu k



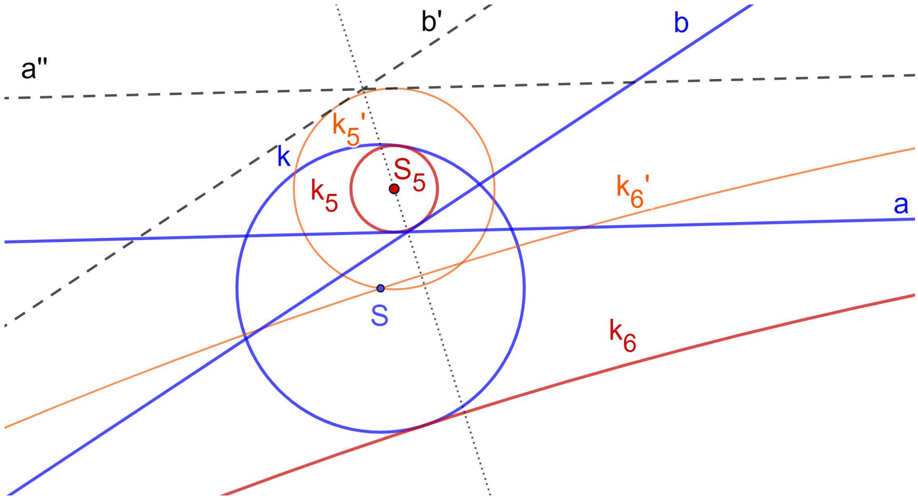
Slika 2.62: Konstrukcija problema ppk, slučaj B, koraci 1-3



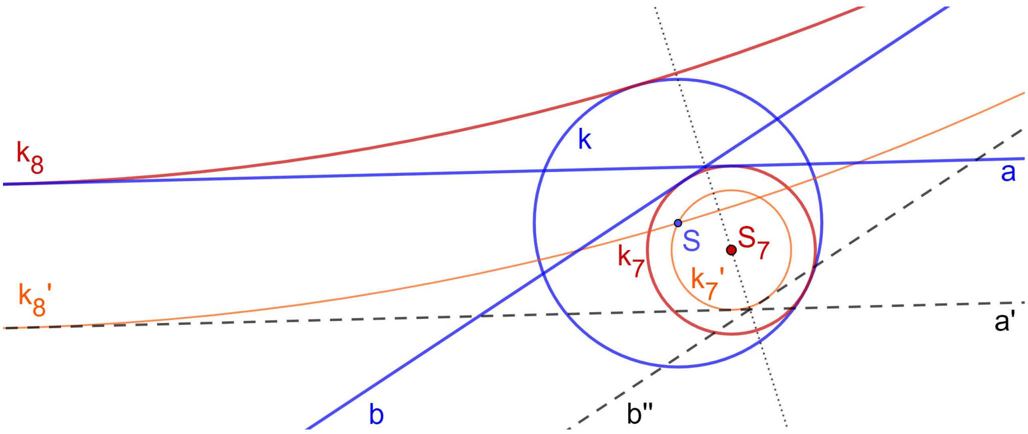
Slika 2.63: Konstrukcija problema ppk, slučaj B, k_1 i k_2



Slika 2.64: Konstrukcija problema ppk, slučaj B, k_3 i k_4



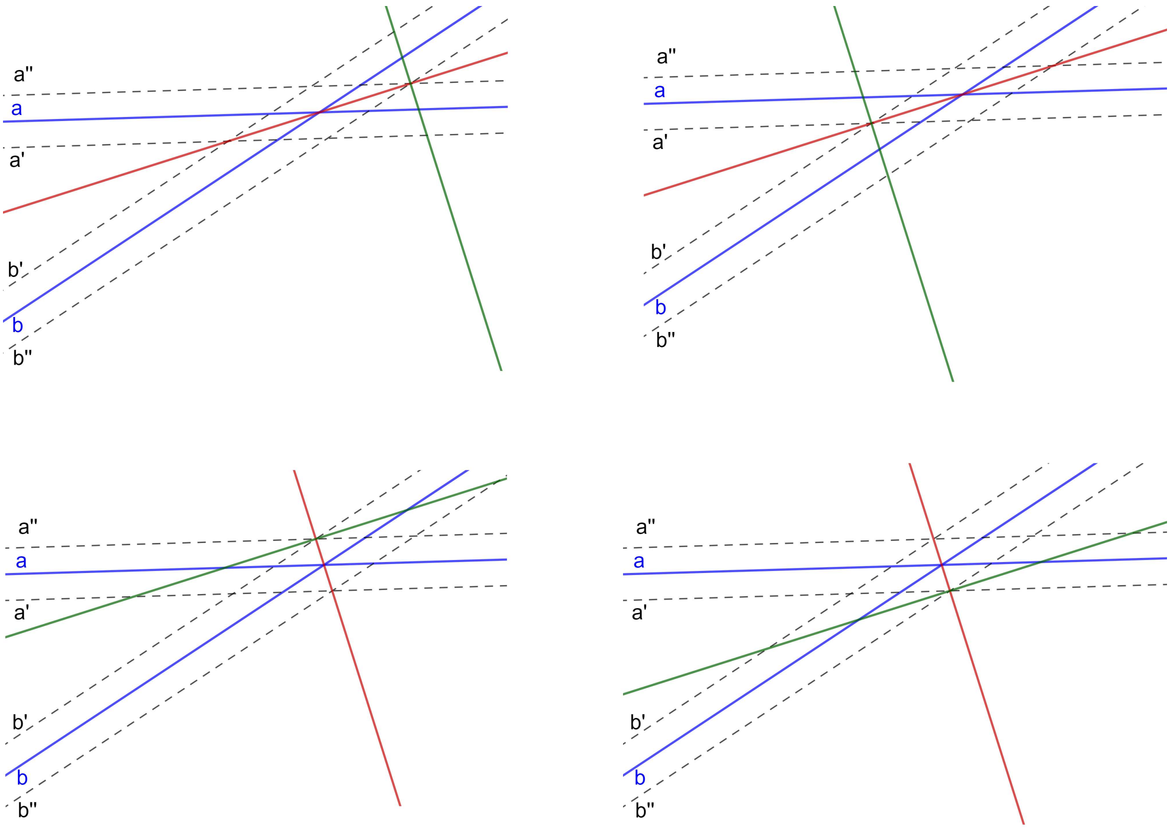
Slika 2.65: Konstrukcija problema ppk, slučaj B, k_5 i k_6



Slika 2.66: Konstrukcija problema ppk, slučaj B, k_7 i k_8

Dokaz:
Želimo dokazati da kružnice $k_1 - k_8$ diraju pravce a i b te kružnicu k. Dokaz slijedi direktno iz uvjeta u 8. koraku.
Dokažimo još da se središte S_i mora nalaziti na nekoj od simetrala kutova koje zatvaraju pravci a i b.
Ako je S_i na simetrali $\sphericalangle(a', b')$, $\sphericalangle(a', b'')$, $\sphericalangle(a'', b'')$, $\sphericalangle(a'', b')$ koja je ujedno simetrala $\sphericalangle(a, b)$, tj. ako je na crvenom pravcu (a ne zelenom (slika 2.67)) onda postoji kružnica

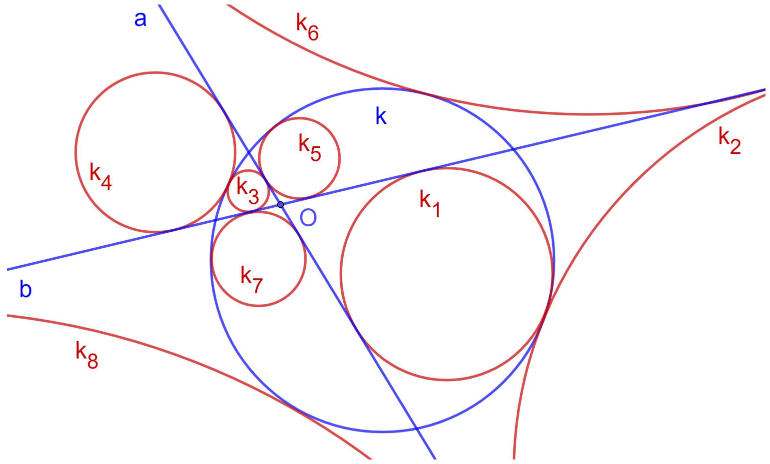
koja dira pravce a i b sa središtem S_i. To znamo iz 8. koraka konstrukcije te je to jedna od kružnica $k(S_i, r'_i + r)$, $k(S_i, r'_i - r)$ i $k(S_i, r - r'_i)$. □



Slika 2.67: Problem ppk, slučaj B, simetrale kutova

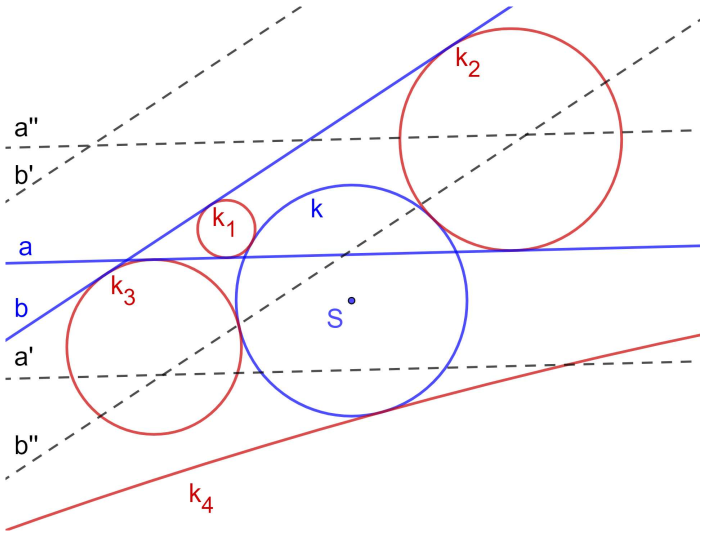
Rasprava: U koracima konstrukcije $1 - 6$ nema nikakvih problema.
Promotrimo još međusobne položaje danih objekata:

1. Ako oba pravca a i b sijeku kružnicu k u ukupno 4 različite točke postoji osam rješenja.



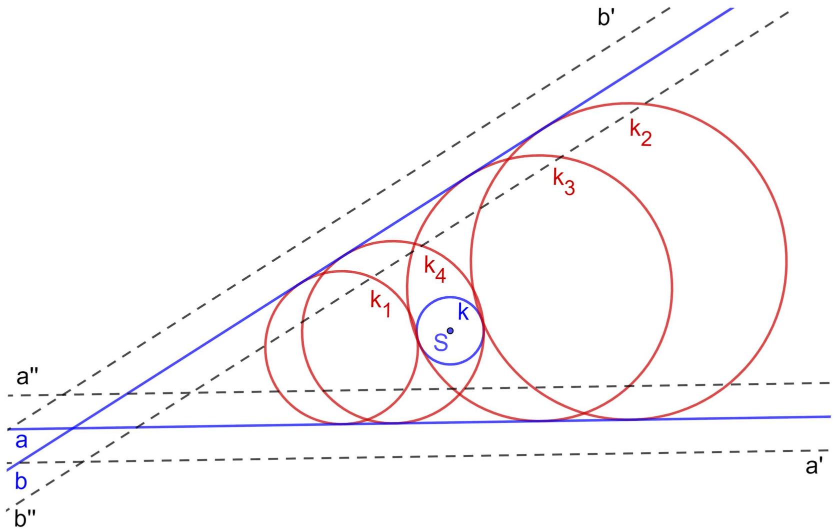
Slika 2.68: Konstrukcija problema ppk, slučaj B, osam rješenja

2. Ako je jedan od pravaca a i b siječe kružnicu k u dvije točke, a drugi ju ne siječe, postoje četiri rješenja.



Slika 2.69: Konstrukcija problema ppk, slučaj B, četiri rješenja

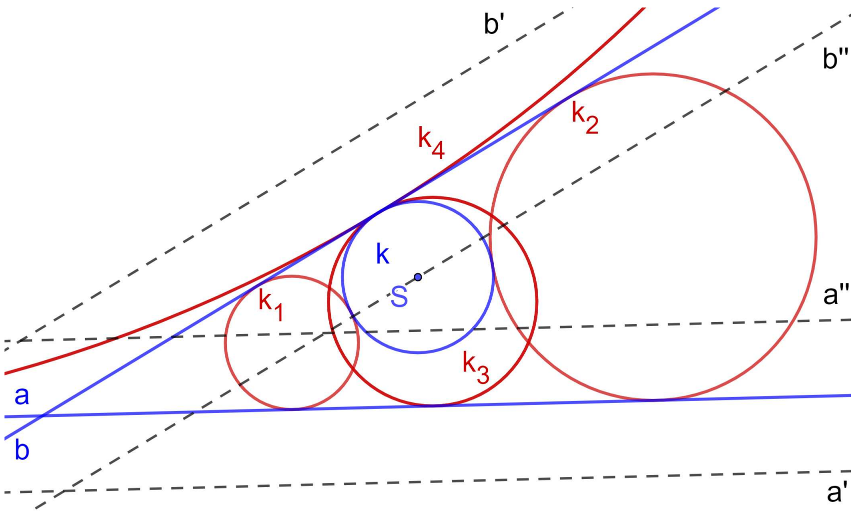
3. Ako kružnica k ne siječe pravce a i b postoje četiri rješenja.



Slika 2.70: Konstrukcija problema ppk, slučaj B, četiri rješenja

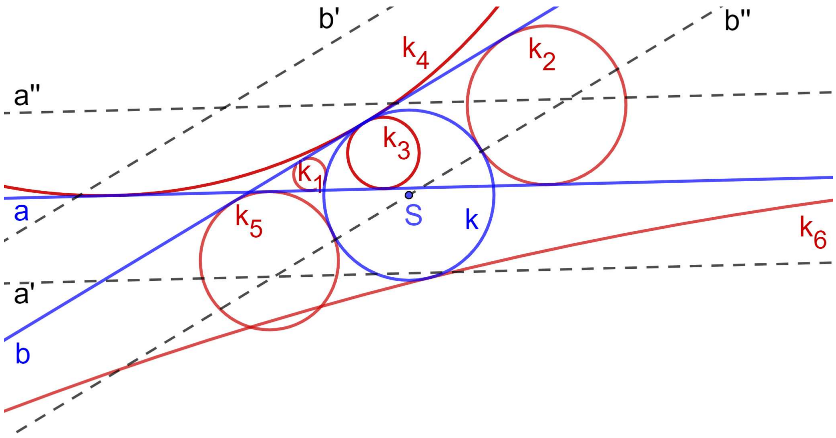
4. Ako jedan ili oba pravca diraju k, a sjecište pravaca nije na k, razlikujemo slučajeve:

    - Ako je jedan od pravaca a i b tangenta kružnice k, a drugi pravac ju ne siječe postoje četiri rješenja.



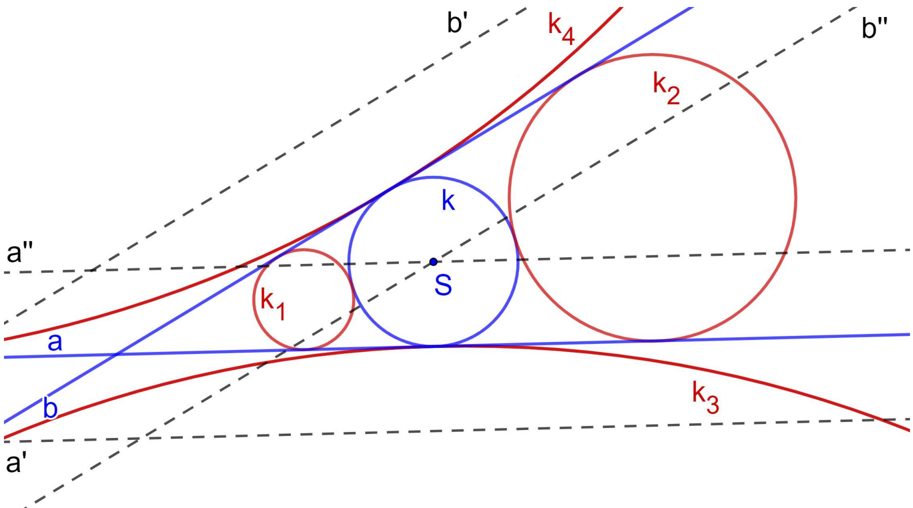
Slika 2.71: Konstrukcija problema ppk, slučaj B, četiri rješenja

- Ako je jedan od pravaca a i b tangenta kružnice k, a drugi pravac ju siječe u dvije točke postoje šest rješenja



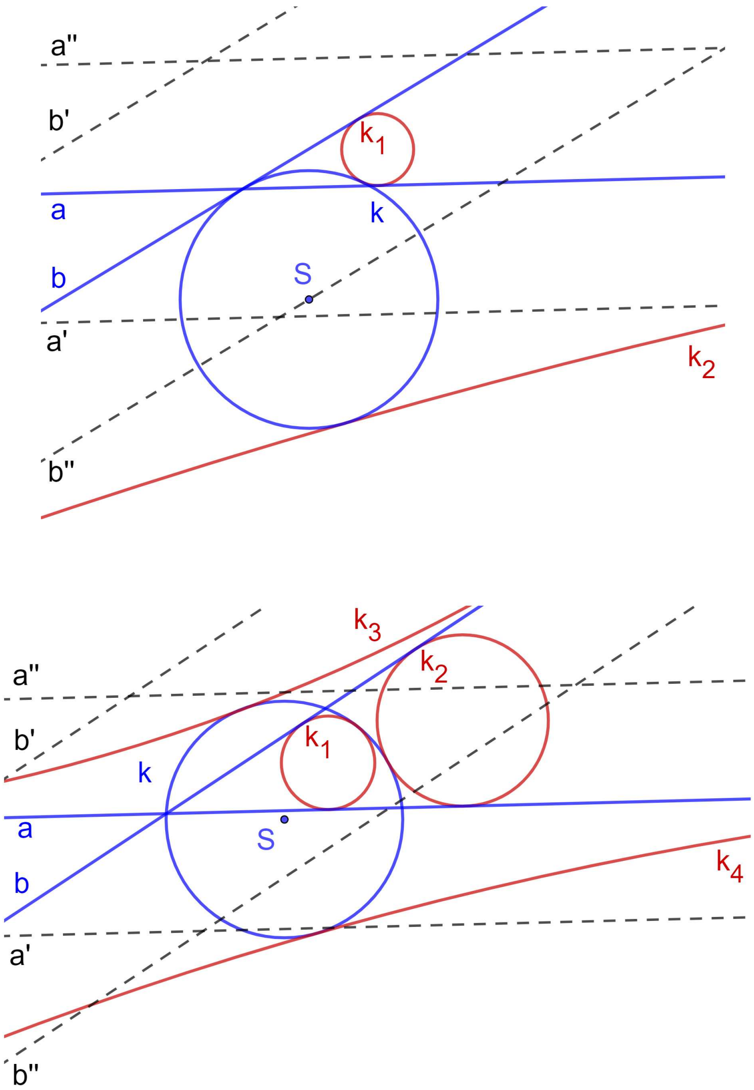
Slika 2.72: Konstrukcija problema ppk, slučaj B, šest rješenja

- Ako su oba pravaca a i b tangente kružnice postoje četiri rješenja.



Slika 2.73: Konstrukcija problema ppk, slučaj B, četiri rješenja

5. Ako je sjecište pravaca na kružnici tada ako je jedan od pravaca tangenta kružnice postoje dva rješenja, inače postoje četiri rješenja.

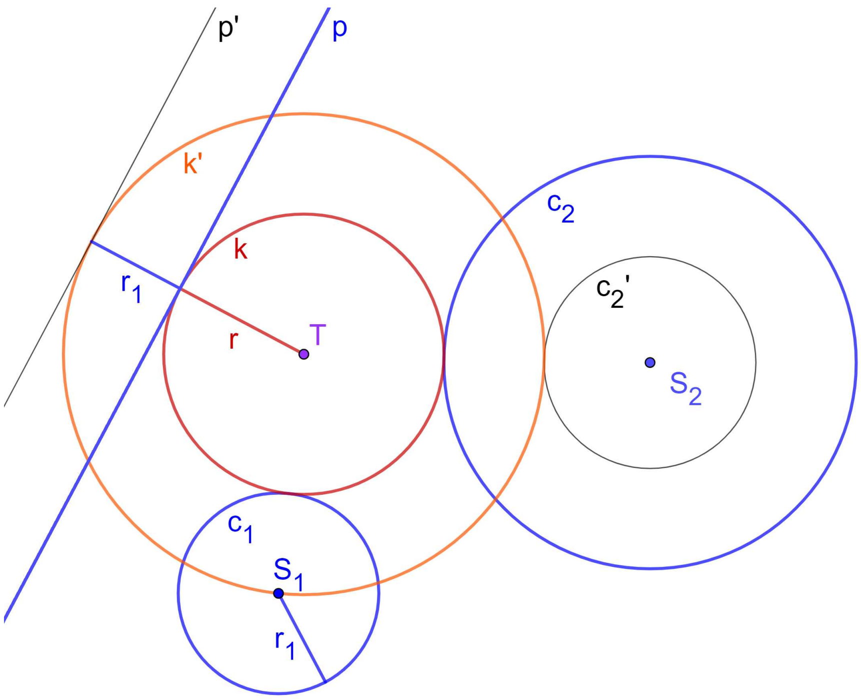


Slika 2.74: Konstrukcija problema ppk, slučaj B, dva tj. četiri rješenja

2.5 Problem pkk

Problem. *U ravnini su zadane kružnice c_1 i c_2 te pravac p. Konstruirati kružnicu koja dira dvije zadane kružnice i zadani pravac.*

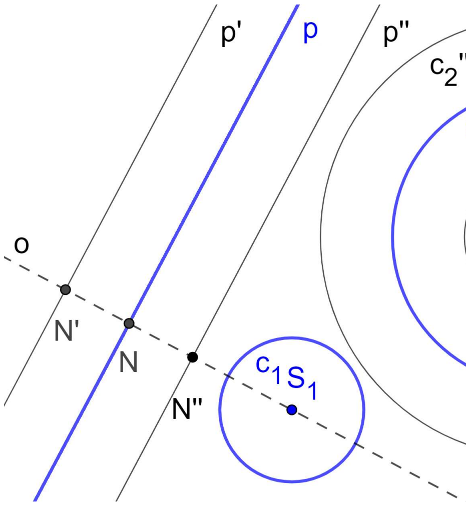
Analiza:
Neka je $c_1 = k(S_1, r_1)$ i $c_2 = k(S_2, r_2)$ i neka je bez smanjenja općenitosti $r_1 < r_2$. Neka je $k = k(T, r)$ kružnica koja dira kružnice c_1 i c_2 te pravac p. Neka je k' koncentrična kružnica kružnici k koja prolazi točkom A pa je njen radijus $r + r_1$. Tada ta kružnica dira pravac p' koji je paralelan s p, a udaljen od njega za r_1. Kružnica k' dira i kružnicu c_2' koncentričnu kružnici c_2 radijusa manjeg (ili većeg) za r_1. Ako konstruiramo k', lako ćemo konstruirati k. Kružnicu k' konstruiramo na način opisan u cjelini 2.2 (Tpk), slučaj D.



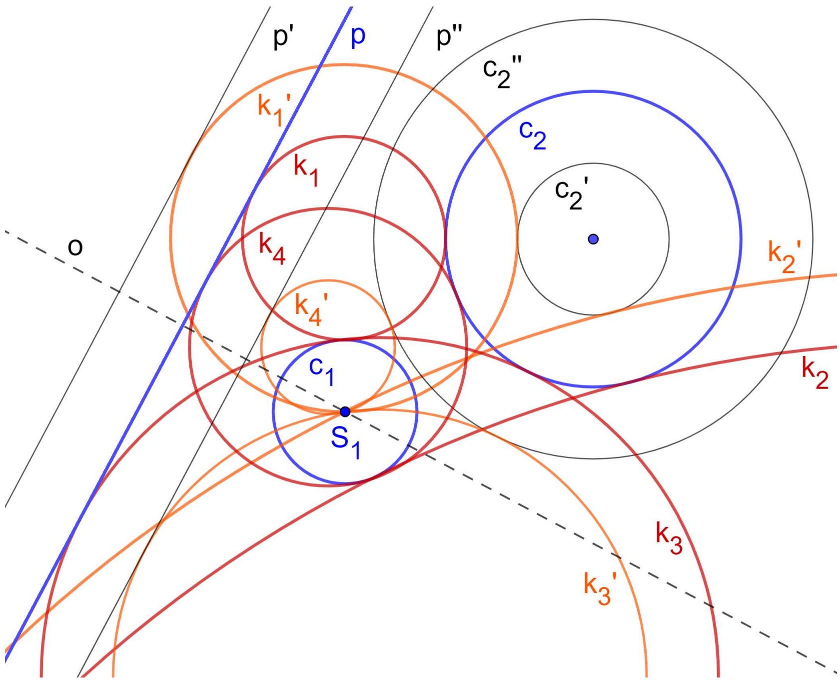
Slika 2.75: Analiza problema pkk

Konstrukcija:
Neka je $c_1 = k(S_1, r_1)$ i $c_2 = k(S_2, r_2)$, $r_1 > r_2$.

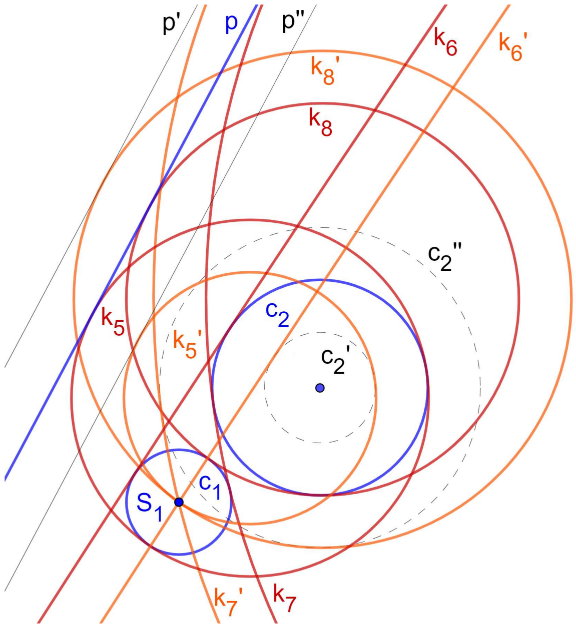
1. okomica o iz S_1 na p siječe pravac p u N
2. neka su N i N' točke na presjeku o i $k(N, r_1)$ takve da N'' i S_1 leže s iste strane pravca p
3. paralela kroz N' s $p = p'$, paralela kroz N'' s $p = p''$
4. $c_2' = k(S_2, r_2 - r_1)$, $c_2'' = k(S_2, r_2 + r_1)$
5. konstruirajmo kružnice k_1' i k_2' koje diraju pravac p', kružnicu c_2' te prolaze kroz S_1 (konstrukcija Tpk detaljno opisana u cjelini 2.2)
6. ako je $d(T_1, c_1) = d(T_1, c_2) = d(T_1, S_1) - r$ onda $k_1 = k(S_1, d(S_1, a))$, ako je $d(T_2, c_1) = d(T_2, c_2) = d(T_2, S_1) - r$ onda $k_2 = k(S_2, d(S_2, a))$
7. konstruirajmo kružnice k_3' i k_4' koje diraju pravac p'', kružnicu c_2'' te prolaze kroz S_1 (konstrukcija Tpk detaljno opisana u cjelini 2.2)
8. ako je $d(T_3, c_1) = d(T_3, c_2) = d(T_3, S_1) + r$ onda $k_3 = k(S_3, d(S_3, a))$, ako je $d(T_4, c_1) = d(T_4, c_2) = d(T_4, S_1) + r$ onda $k_4 = k(S_4, d(S_4, a))$
9. konstruirajmo kružnice k_5' i k_6' koje diraju pravac p'', kružnicu c_2' te prolaze kroz S_1 (konstrukcija Tpk detaljno opisana u cjelini 2.2)
10. ako je $d(T_5, c_1) = d(T_5, c_2) = d(T_5, S_1) + r$ onda $k_5 = k(S_5, d(S_5, a))$, ako je $d(T_6, c_1) = d(T_6, c_2) = d(T_6, S_1) + r$ onda $k_4 = k(S_6, d(S_6, a))$
11. konstruirajmo kružnice k_7' i k_8' koje diraju pravac p', kružnicu c_2'' te prolaze kroz S_1 (konstrukcija Tpk detaljno opisana u cjelini 2.2)
12. ako je $d(T_7, c_1) = d(T_7, c_2) = d(T_7, S_1) + r$ onda $k_7 = k(S_7, d(S_7, a))$, ako je $d(T_8, c_1) = d(T_8, c_2) = d(T_8, S_1) + r$ onda $k_4 = k(S_8, d(S_8, a))$



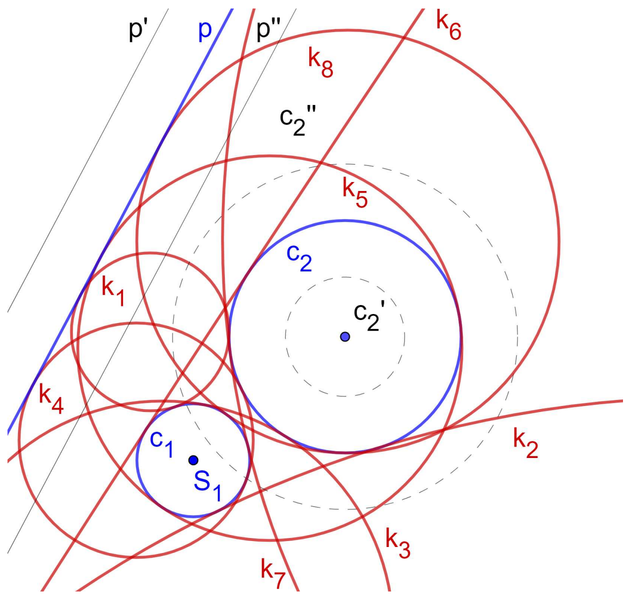
Slika 2.76: Konstrukcija problema pkk, koraci 1-4



Slika 2.77: Konstrukcija problema pkk, koraci 5-8



Slika 2.78: Konstrukcija problema pkk, koraci 9-12

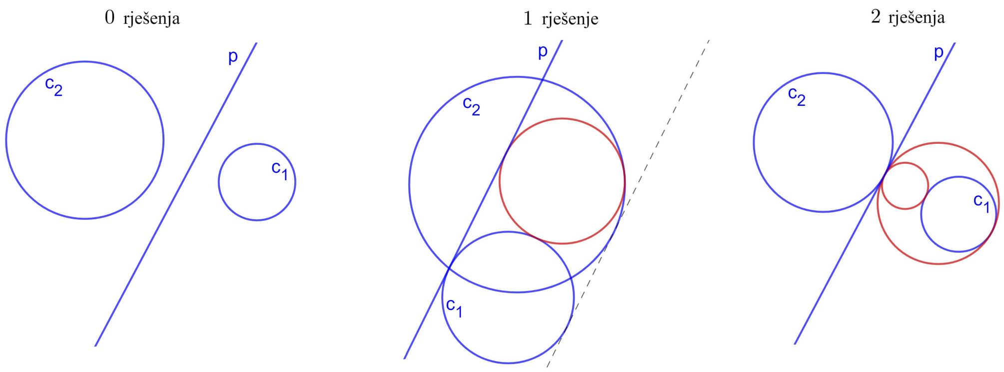


Slika 2.79: Konstrukcija problema pkk, 8 rješenja

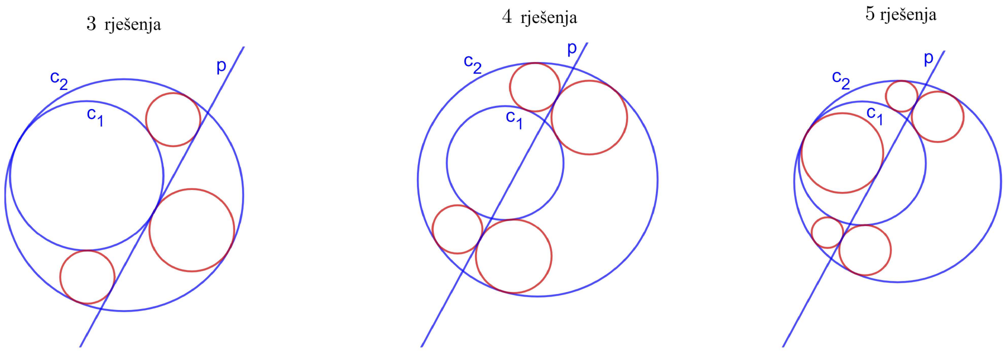
Dokaz:
Potrebno je dokazati da kružnice $k_1, ..., k_8$ diraju kružnice c_1 i c_2 te pravac p. To slijedi iz konstrukcije zbog odabira kružnica $k'_1, ..., k'_8$ te zbog koraka 6, 8, 10 i 12.

□

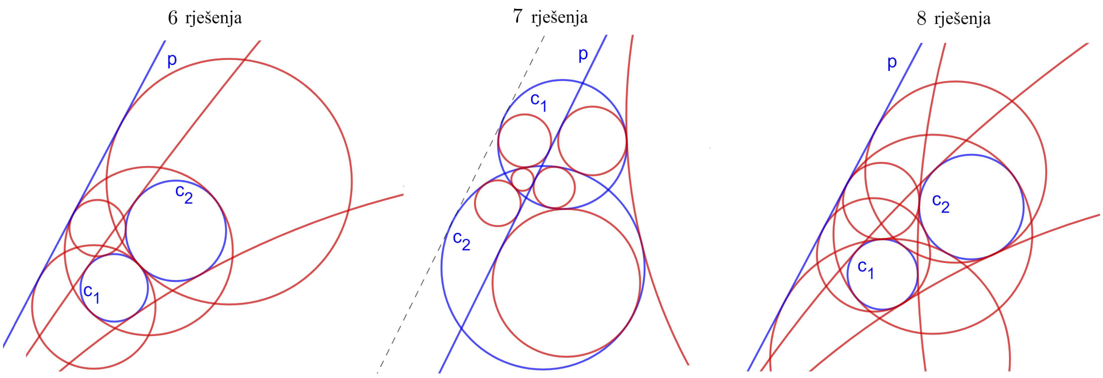
Rasprava:
Ovisno o međusobnom položaju kružnica i pravca može biti 0 do 8 rješenja kao što je prikazano na slikama 2.80, 2.81 i 2.82.



Slika 2.80: Problem pkk, primjer 0, 1 i 2 rješenja

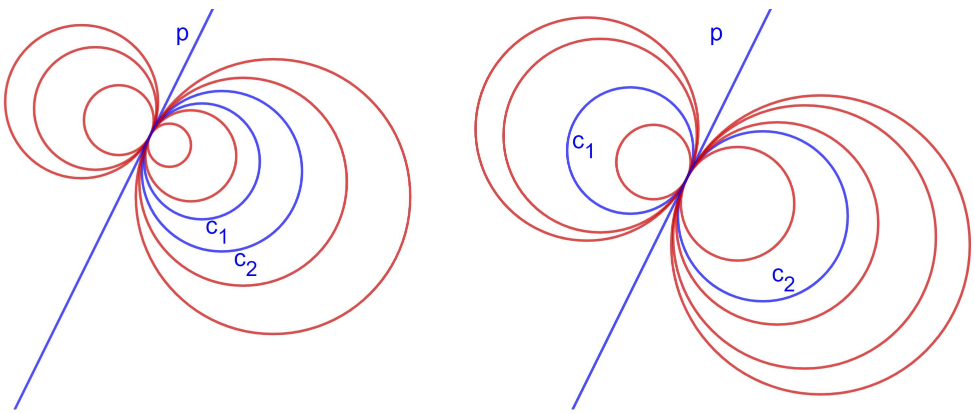


Slika 2.81: Problem pkk, primjer 3, 4 i 5 rješenja



Slika 2.82: Problem pkk, primjer 6, 7 i 8 rješenja

U nekim posebnim slučajevima ovaj problem ima i beskonačno rješenja kao što je prikazano u primjerima na slici 2.83.



Slika 2.83: Problem pkk, beskonačno rješenja

Poglavlje 3

Rješenje izvornog Apolonijevog problema

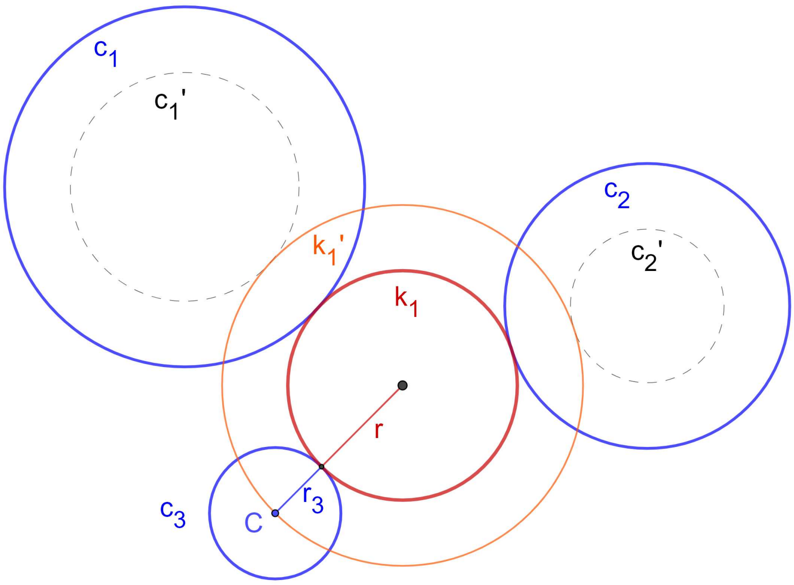
U ovom ćemo poglavlju opisati konstrukcije originalnog Apolonijevog problema, problema *kkk*, u kojem su sva tri dana elementa kružnice.

3.1 Problem kkk

Problem. *Neka su c_1, c_2 i c_3 kružnice. Trebamo konstruirati kružnicu koja dira sve tri kružnice.*

1. način

Analiza:
Zadane su tri kružnice $c_1 = k(A, r_1)$, $c_2 = k(B, r_2)$ i $c_3 = k(C, r_3)$. Neka je bez smanjenja općenitosti $r_3 \leqslant r_2 \leqslant r_1$. Smanjimo li radijus kružnica c_1 i c_2 za radijus kružnice c_3 problem ćemo svesti na konstrukciju problema Tkk koji znamo riješiti. [Cjelina 2.3]



Slika 3.1: Analiza kkk

Konstrukcija:

I. dio konstrukcije

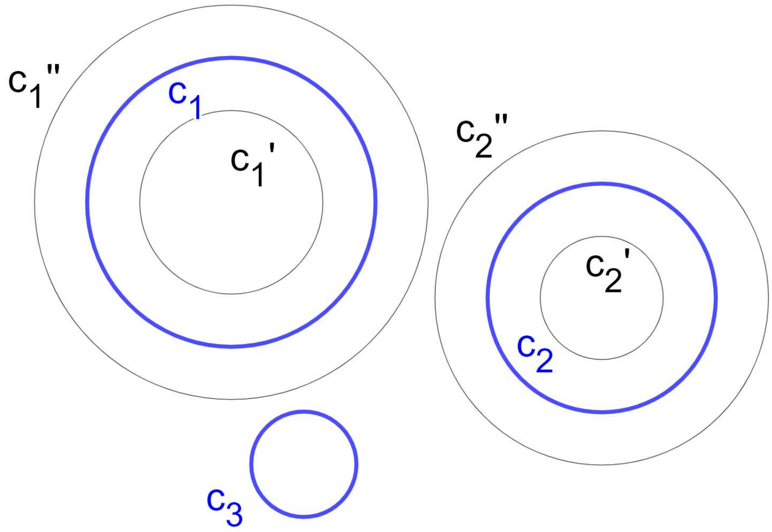
1. kružnica $c_1' = k(A, r_1 - r_3)$ koncentrična kružnici c_1
2. kružnica $c_2' = k(B, r_2 - r_3)$ koncentrična kružnici c_2
3. kružnica $c_1'' = k(A, r_1 + r_3)$ koncentrična kružnici c_1
4. kružnica $c_2'' = k(B, r_2 + r_3)$ koncentrična kružnici c_2

II. dio konstrukcije

5. konstruiramo kružnice kružnice $k_i' = k(S_i, d_i)$, $i \in \{1, ..., 16\}$ koje diraju kružnice c_1' i c_2', ili c_1' i c_2'', ili c_1'' i c_2', ili c_1'' i c_2'' i prolaze točkom C, (konstrukcija Tkk, cjelina 2.3)

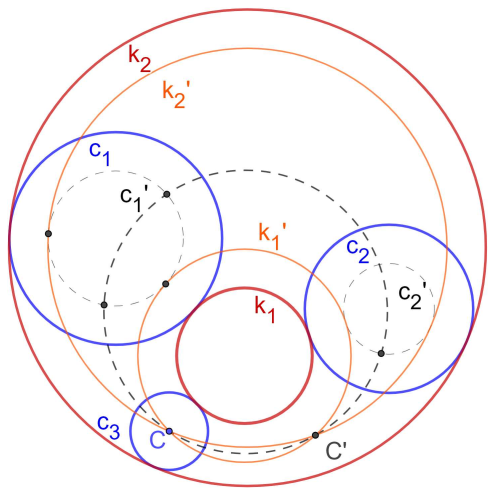
III. dio konstrukcije

6. kružnice $k_i = k(S_i, d_i \pm r_3)$, $i \in \{1, ..., 16\}$ koncetrične kružnicama $k_i' = k(S_i, d_i')$ su moguća rješenja ako je $d(S_i, c_1) = d(S_i, c_2) = d(S_i, c_3) = d(S_i, C) \pm r_3$

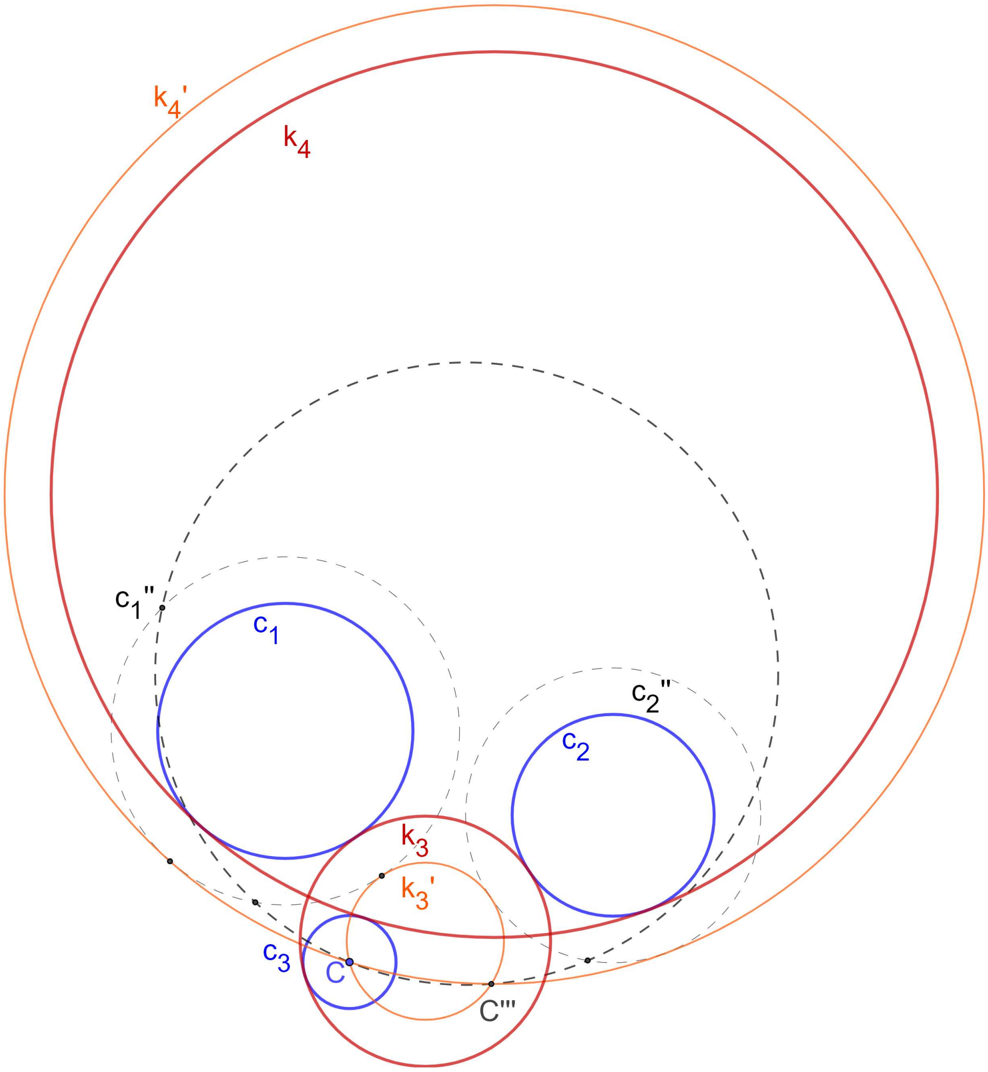


Slika 3.2: problem kkk konstrukcija koraka 1-4

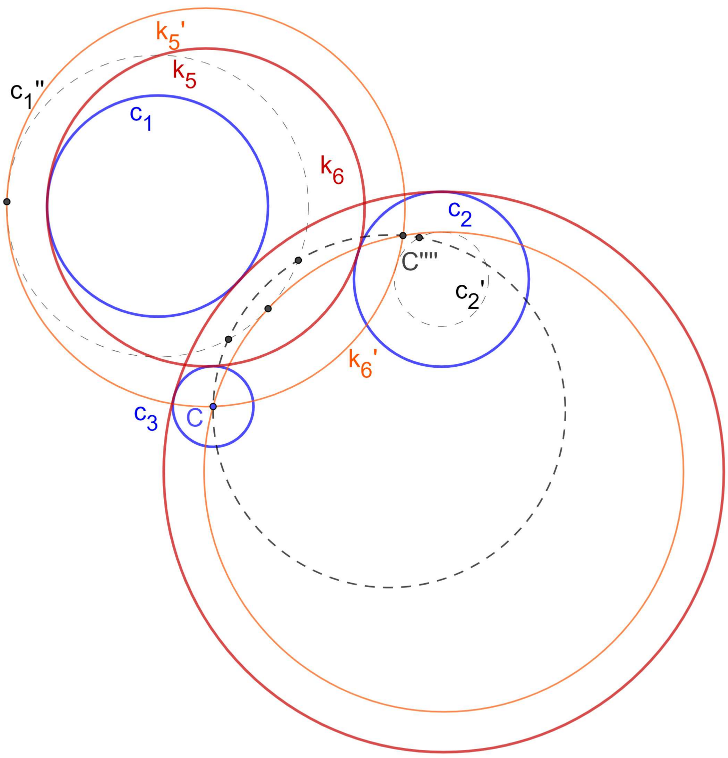
Na slikama 3.3, 3.4, 3.5 i 3.6 kružnice c_1, c_2 i c_3 su uvijek u istom položaju, a ostale kružnice predstavljaju tražena rješenja.



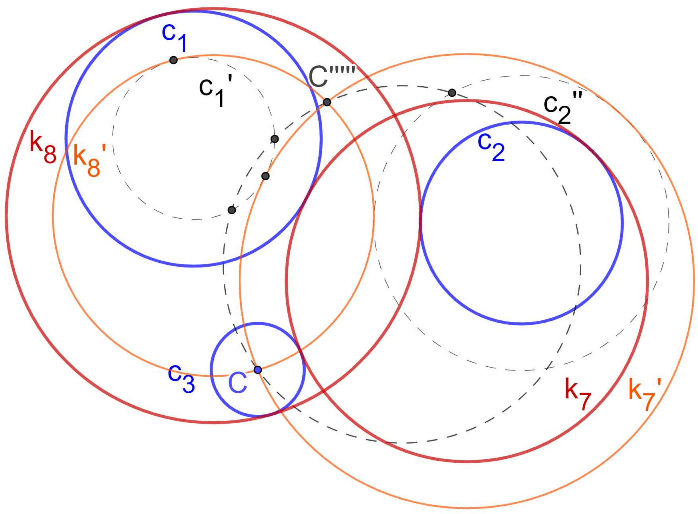
Slika 3.3: Konstrukcija problema kkk, Rješenja k_1 i k_2



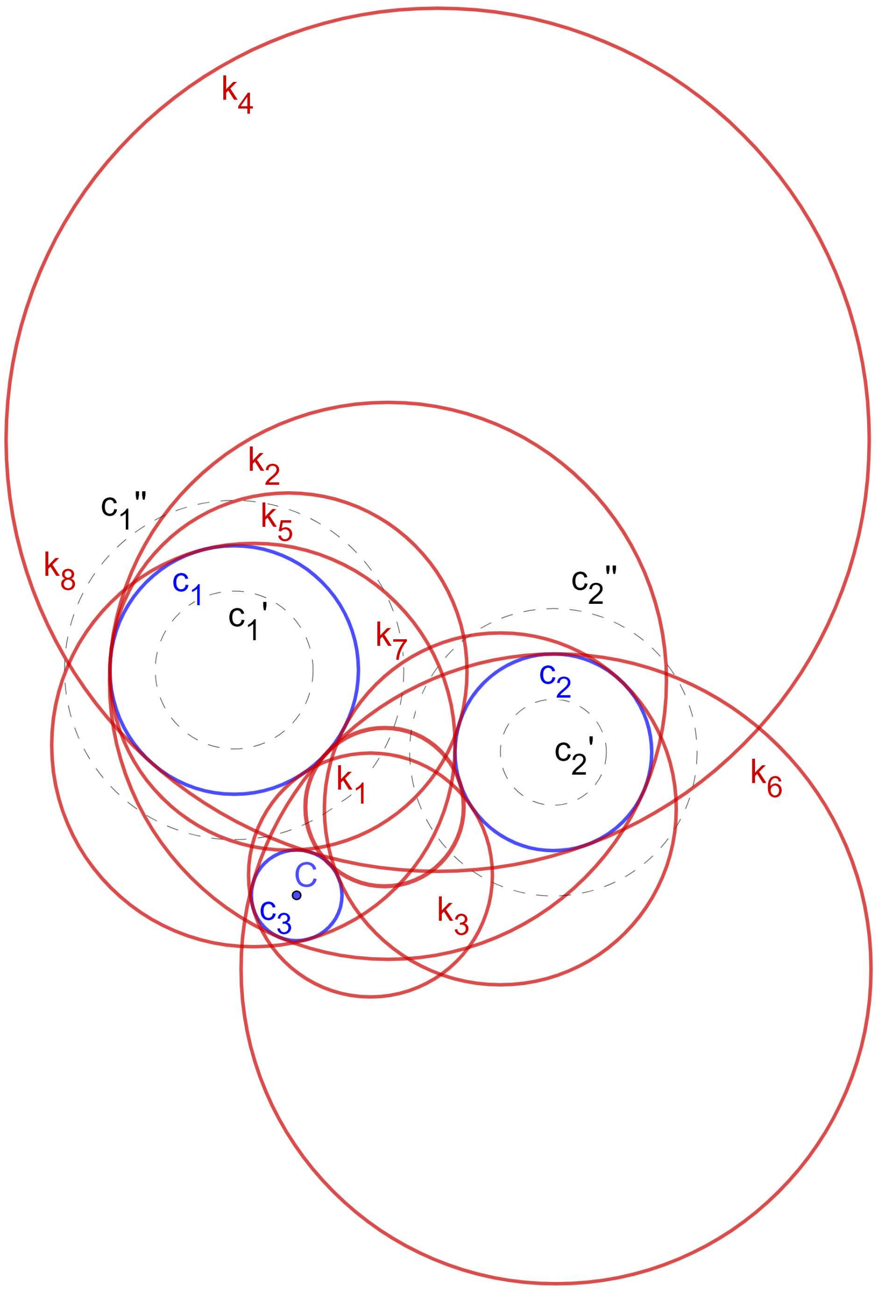
Slika 3.4: Konstrukcija problema kkk, Rješenja k_3 i k_4



Slika 3.5: Konstrukcija problema kkk, Rješenja k_5 i k_6



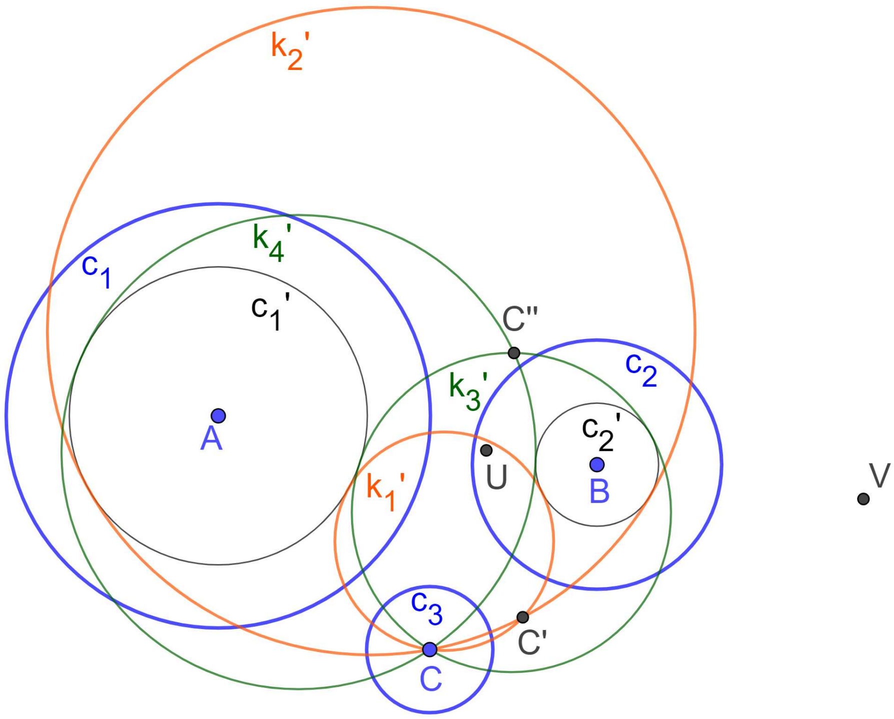
Slika 3.6: Konstrukcija problema kkk, Rješenja k_7 i k_8



Slika 3.7: Konstrukcija problema kkk, sva rješenja

Dokaz:
Trebamo dokazati da svaka od konstruiranih kružnica dira tri zadane kružnice.
To slijedi iz konstrukcije zbog odabira kružnica $k'_i = k(S_i, d_i)$ te zbog koraka 6. □

Rasprava:
Problem konstrukcije kružnice koja prolazi danom točkom i dira dvije dane kružnice ima najviše 4 rješenja: kružnicu k'_1 koja dira obje kružnice izvana, kružnicu k'_2 koja dira obje kružnice iznutra, te kružnice k'_3 i k'_4 (slika 3.8). No, kružnice k'_3 i k'_4 neće dati rješenje našeg problema jer povećanjem ili smanjenjem polumjera za r_3 ne vrijedi jednakost $d(S_i, c_1) = d(S_i, c_2) = d(S_i, c_3) = d(S_i, C) \pm r_3$. Dakle, pri rješavanju problema Tkk sve kombinacije kružnica c'_1, c'_2, c''_1, c''_2 dati će nam 16 mogućih rješenja od kojih pola neće biti rješenja problema kkk.
Zaključujemo da ovisno o međusobnom položaju kružnica i pravca može biti 0 do 8 rješenja kao što je prikazano na slici

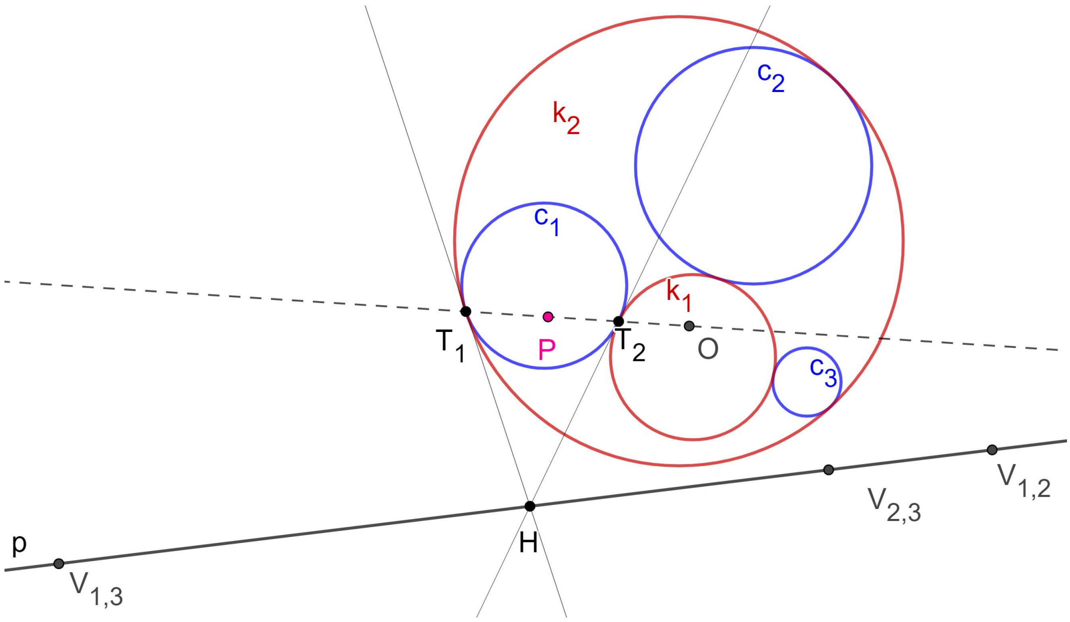


Slika 3.8: Problem kkk, rasprava

2. način - Gergonnova konstrukcija

Jedna od standardnih tehnika pri rješavanju Apolonijevog problema je primjena inverzije, s idejom dobivanja jednostavnijeg problema, pronalaženjem potrebne kružnice i inverznog preslikavanja. Rješenje problema kkk Josepha Diaza Gergonnea (Annales de Mathématiques 1816. [6]) je izvanredno po tome što se inverzija koristi kao motivirajuća početna točka, a potom i u dokazu valjanosti konstrukcije, ali ne i u samoj konstrukciji.

Analiza:

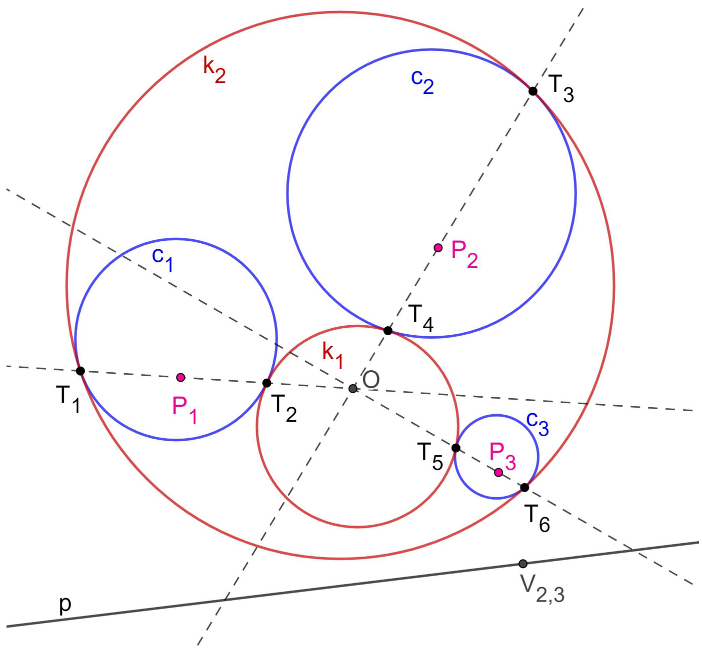


Slika 3.9: Analiza kkk, Gergonnov pristup

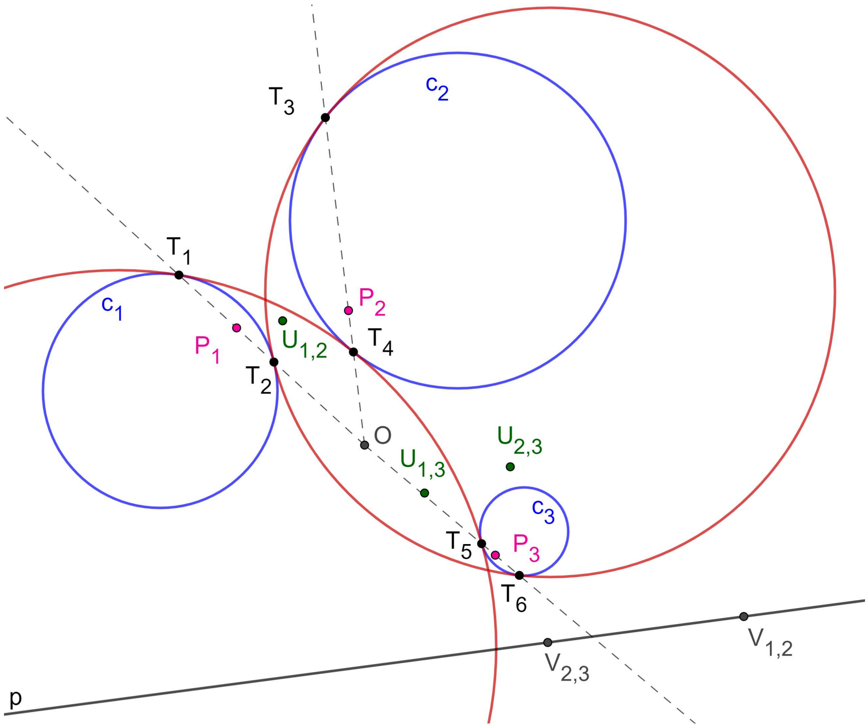
Neka su k_1 i k_2 tražena rješenja takva da k_1 svaku zadanu kružnicu dira iznutra, a k_2 izvana. Pošto k_1 i k_2 diraju sve tri dane kružnice c_1, c_2 i c_3, vanjski centri sličnosti svaka dva para zadanih kružnica leže na potencijali p kružnica k_1 i k_2 (Lema 2). Da su bile zadane kružnice k_1 i k_2, kružnice c_1, c_2, c_3 bile bi tri od mnogo njihovih zajedničkih kružnica koje jednu zadanu kružnicu diraju izvana, a drugu iznutra. Zato se unutarnji centar sličnosti kružnica k_1 i k_2 mora nalaziti na potencijalama kružnica c_1 i c_2, c_1 i c_3, c_2 i c_3 (Lema 2). Dakle, radikalno središte O, kružnica c_1, c_2 i c_3 unutarnji je centar sličnosti kružnica k_1 i k_2. Možemo zaključiti da dirališta kružnica k_1 i k_2 sa svakom danom kružnicom moraju biti kolinearna s O. Neka su T_1 i T_2 ta dirališta s kružnicom c_1. Konstruiramo li tim točkama tangente na kružnicu c_1 one će se sijeći u točki H koja se nalazi na potencijali p jer $|HT_1| = |HT_2|$ i pravci HT_1 i HT_2 tangente su kružnica k_1 i k_2. Točka H pol je pravca T_1T_2 u odnosu na kružnicu c_1. Pol pravca T_1T_2 u odnosu na kružnicu c_1 leži na pravcu p, dakle pol pravca p leži na pravcu T_1T_2. Neka je P pol pravca p u odnosu na kružnicu c_1. Točke O, T_1, P i T_2 kolinearne. Sada konstrukciju nije problem provesti.

Konstrukcija:

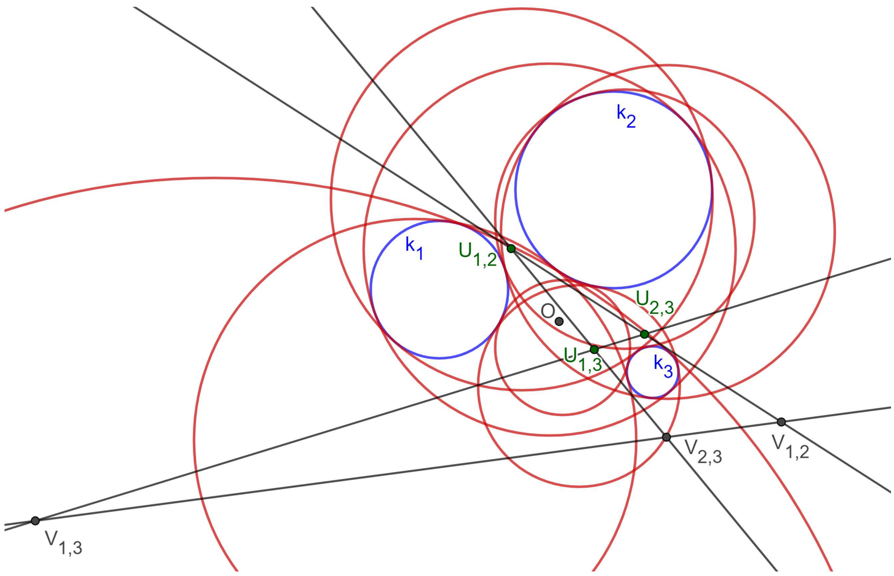
1. konstruiramo 6 centara homotetije (unutarnje - U_{12}, U_{13}, U_{23} i vanjske centre - V_{12}, V_{13}, V_{23} sličnosti svakog para kružnica)
2. spojimo dobivene točke i dobijemo 4 osi sličnosti zadanih kružnica, $U_{12}U_{13}$, $U_{12}U_{23}$ i $U_{13}U_{23}$.
3. konstruiramo radikalno središte O kružnica c_1, c_2 i c_3. [Konstrukcija 2]
4. za svaku os sličnosti konstruiramo njen pol u odnosu na svaku kružnicu
5. spojimo polove s radikalnim središtem O i sjecišta tih pravaca s kružnicama su točke dodira traženih i zadanih kružnica
6. konstruiramo kružnice kroz odgovarajuće točke dodira (po jedna točka na svakoj od danih kružnica)



Slika 3.10: Konstrukcija problema kkk, Gergonnov pristup - dva rješenja

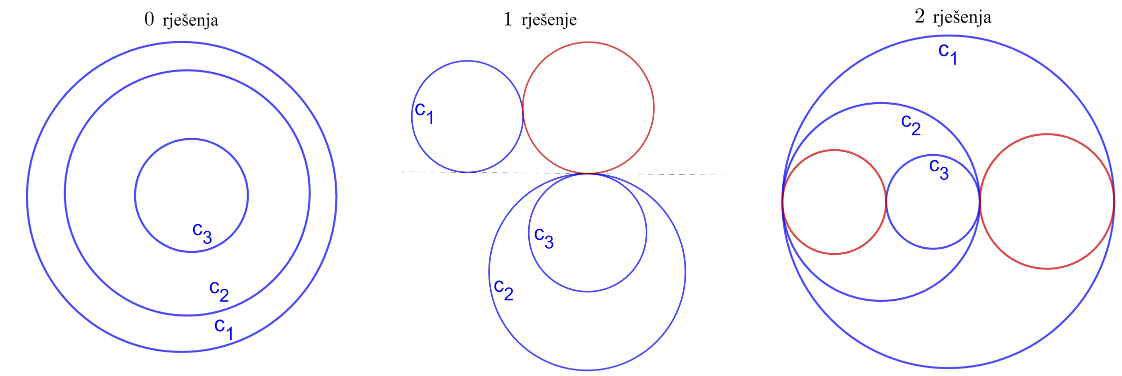


Slika 3.11: Konstrukcija problema kkk, Gergonnov pristup - dva rješenja

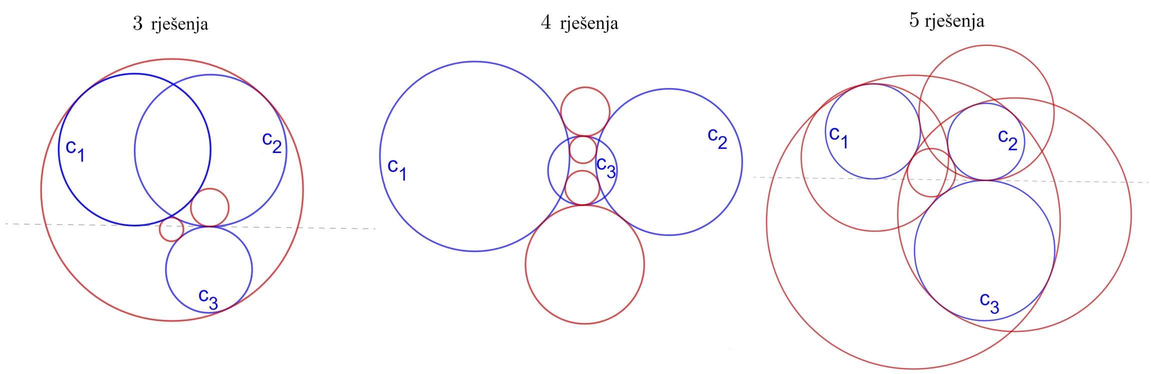


Slika 3.12: Konstrukcija problema kkk, Gergonnov pristup - sva rješenja

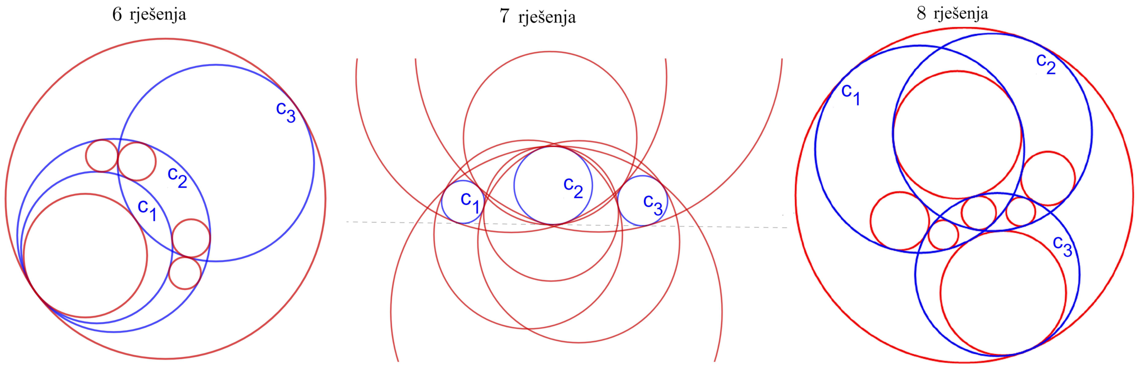
Rasprava:
Moguće je da bude 0-8 rješenja. Tih 8 rješenja koliko ih najviše ima zapravo znači da unutar svake Apolonijeve kružnice nalazi se neka od danih kružnica (jedna ili dvije ili sve tri ili pak nijedna). A što je točno unutar nje možemo izabrati na osam načina te dobiti najviše osam rješenja kao što je prikazano na slikama 3.13, 3.14 i 3.15 .



Slika 3.13: Problem kkk, primjer 0, 1 i 2 rješenja

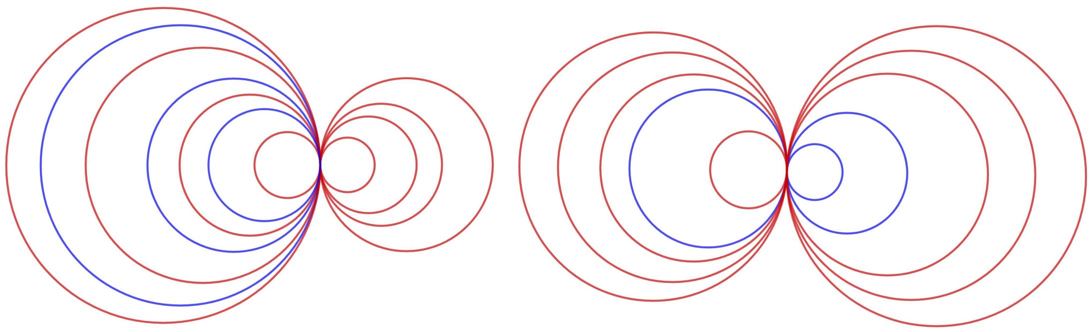


Slika 3.14: Problem kkk, primjer 3, 4 i 5 rješenja



Slika 3.15: Problem kkk, primjer 6, 7 i 8 rješenja

U nekim posebnim slučajevima ovaj problem ima i beskonačno rješenja kao što je prikazano u primjerima na slici 3.16.



Slika 3.16: Problem kkk, beskonačno rješenja

Bibliografija

[1] D. Palman (1996), *Geometrijske konstrukcije*, Element, Zagreb, 1996.

[2] Paul Kunkel (2007), *The tangency problem of Apollonius: three looks*, Dostupno na: https://doi.org/10.1080/17498430601148911 (Zadnje pristupljeno dana: 22. 6. 2022.)

[3] Alexander Bogomolny, *The Problem of Apollonius*, Dostupno na: https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Apollonius.shtml (Zadnje pristupljeno dana: 22. 6. 2022.)

[4] Zor Shekhtman, *Apollonius Problems*, Dostupno na: (Zadnje pristupljeno dana: 22. 6. 2022.)

[5] M. Bombardelli, T. Pejković, prema predavanjima profesora Vladimira Voleneca, *Konstruktivne metode u geometriji*. Dostupno na: https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kmg/materijali/kmg_predavanja.pdf (Zadnje pristupljeno dana: 22. 6. 2022.)

[6] Ž. M. Šipuš, M. Bombardelli, *Analitička geometrija*. Dostupno na: https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ag/dodatni/AG-predavanja-2016.pdf (Zadnje pristupljeno dana: 22. 6. 2022.)

[7] A. Guberina, *Generalizacija Apolonijeva problema*, diplomski rad, PMF Split, 2018.

[8] Wikipedia, *Apolonijeva mreža*, Dostupno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Apollonian_gasket/media/File:Apollonian_gasket.svg (Zadnje pristupljeno dana: 22. 6. 2022.)

Sažetak

U ovom diplomskom radu proučava se i rješava Apolonijev problem koji glasi:

Dani su tri objekta, krug, pravac ili točka. Konstruiraj kružnicu koja dodiruje sva tri dana objekta.

Problem je je podijeljen u deset zasebnih konstruktivnih problema. Rad je podijeljen na tri poglavlja. U uvodu su navedeni svih deset problema te neke osnovne definicije, teoremi i konstrukcije. U prvom poglavlju opisane su konstrukcije Apolonijevih problema u kojima nema kružnice tj. u kojima su svi zadani elementi ili točke ili pravci. Poglavlje je podijeljeno na četiri potpoglavlja od kojih je svako rješenje jednog konstruktivnog problema. U drugom poglavlju opisane su konstrukcije Apolonijevih problema u kojima su jedan ili dva dana elementa kružnice, a preostali točke i/ili pravci. Poglavlje je podijeljeno na pet potpoglavlja od kojih je svako rješenje jednog konstruktivnog problema. U trećem poglavlju opisane su konstrukcije originalnog Apolonijevog problema u kojima su sva tri dana elementa kružnice.

U svim poglavljima proučava se metodika rješavanja konstruktivne zadaće, etape rješavanja (analiza, konstrukcija, dokaz i rasprava) te su neki problemi riješeni i na više načina. Detaljno su opisane etape rješavanja svih konstrukcija. Neki problemi podijeljeni su na više slučajeva ovisno o položajima zadanih objekata i zasebno riješeni kao konstruktivne zadaće. Zadatci su poredani prema složenosti i popraćeni su nizom slika konstruiranih u GeoGebri.

Summary

The thesis studies and solves the Apollonius' problem, which is:

Three objects are given, a circle, a line, or a point. Construct a circle that touches all three given objects.

The problem is subdivided into ten constructive problems. All ten problems, some basic definitions, theorems and simpler construction problems needed for the thesis are listed in the introduction. The thesis consists of three chapters. The first chapter describes the constructions of Apollonius' problems in which there are no circles, or in other words, in which all given elements are either points or lines. The chapter is divided into four subchapters - each containing a solution to one constructive problem. The second chapter describes the constructions of Apollonius' problems in which one or two given elements are circles and others are points and/or lines. This chapter is divided into five subchapters with each containing a solution to one constructive problem. The third chapter describes the construction of the original Apollonius' problem, in which all three given elements are circles.

All chapters study the methods of solving a constructive problem and stages of solving one (analysis, construction, proof, and discussion). Also, some problems are solved in more than one way. The stages of solving the constructive problems are described in detail. Some problems are divided into several cases depending on the positions of given objects and are solved separately as constructive problems. The problems are arranged by complexity and are substantiated with a list of images constructed using GeoGebra.

Životopis

Moje ime je Martina Hanževački i rođena sam 4. listopada 1993. u Zagrebu. Svoje obrazovanje započinjem u Osnovnoj školi dr. Ante Starčevića, a nakon završene osnovne škole upisujem II. gimnaziju u Zagrebu. Nakon položene državne mature 2012. godine upisujem Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, gdje sam 2018. završila preddiplomski studij Matematika, smjer nastavnički. Nakon toga upisala sam diplomski studij Matematika, smjer nastavnički, koji sada završavam. Tijekom diplomskog studija počela sam predavati matematiku. Radila sam do sada redom u Trećoj ekonomskoj školi Zagreb, Osnovnoj školi Vladimira Nazora, XII. gimnaziji Zagreb, IV. gimnaziji Zagreb, Tehničkoj školi Ruđera Boškovića te trenutno radim u XII. gimnaziji. Volim rad s djecom te se vidim do kraja radnog vijeka u učiteljskoj profesiji.