

# Modeli lokalne volatilnosti

---

Jelić, Magdalena

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:160031>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-26**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Magdalena Jelić

**MODELI LOKALNE VOLATILNOSTI**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc. dr. sc. Vanja Wagner

Zagreb, rujan, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Mojoj djevojčici Noemi*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>1 Black - Scholes - Mertonov model</b>	<b>3</b>
1.1 Brownovo gibanje . . . . .	3
1.2 Black - Scholes - Mertonov model . . . . .	6
<b>2 Lokalna volatilnost</b>	<b>9</b>
2.1 Dupireov izvod lokalne volatilnosti . . . . .	10
2.2 Derman - Kani izvod lokalne volatilnosti . . . . .	13
2.3 Podrazumijevana volatilnost ( <i>Implied Volatility</i> ) . . . . .	17
<b>3 Modeli lokalne volatilnosti</b>	<b>25</b>
3.1 Pomaknuti lognormalni model ( <i>The Shifted-Lognormal Model</i> ) . . . . .	26
3.2 Model konstantne elastičnosti varijance ( <i>The Constant Elasticity of Variance Model, CEV</i> ) . . . . .	29
3.3 Mješoviti lognormalni model ( <i>The Lognormal-Mixture Model, LM</i> ) . . . . .	31
3.4 Pomaknuti mješoviti lognormalni model ( <i>The Shifted Lognormal-Mixture Model, SLM</i> ) . . . . .	34
3.5 Mješoviti lognormalni model s različitim očekivanjima ( <i>A Lognormal-Mixture with Different Means, LMDM</i> ) . . . . .	35
3.6 Procesi sinusa hiperbolnog ( <i>Hyperbolic-Sine Processes</i> ) . . . . .	37
<b>Bibliografija</b>	<b>41</b>

# Uvod

Black-Scholes-Mertonov model je prvi matematički model koji se naširoko koristio za procjenu vrijednosti europskih opcija. Jednostavna formula koja uključuje velik broj parametara je razlog njegove popularnosti. Međutim, nedostaci modela su ono što je znanstvenike potaknulo na razmišljanje. Dupire te Derman i Kani su ispravili pogrešnu pretpostavku o konstantnoj volatilnosti zaključeci da je ona funkcija vremena i cijene dionice. Njihove formule proizvele su pozitivne rezultate u procjeni cijena opcija te su time otvorili put razvitku novih modela koji su sve bolje opisivali situaciju na tržištu. Modeli lokalne volatilnosti pretpostavljaju da je volatilnost deterministička funkcija. Njihov cilj je što bolje procijeniti volatilnost kako bi postigli teoretski smiješak, efekt krivulje podrazumijevane volatilnosti u ovisnosti o cijeni izvršenja. U ovom radu proučit ćemo izvode parcijalnih diferencijalnih jednadžbi i pogledati dinamike modela te njihove prednosti i nedostatke.



# Poglavlje 1

## Black - Scholes - Mertonov model

### 1.1 Brownovo gibanje

Na početku ovog rada definirat ćemo par pojmova kako bismo mogli uvesti Black-Scholes-Mertonov model, a time i model lokalne volatilnosti.

Stohastički proces  $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  je familija slučajnih varijabli definirana na vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  s vrijednostima u  $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ . Filtracija  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  na tom vjerojatnosnom prostoru je rastuća familija  $\sigma$ -algebri na  $\Omega$  t.d.  $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+1} \subseteq \mathcal{F} \forall t$ , gdje  $\mathcal{F}_t$  predstavlja informaciju dostupnu u vremenu  $t$ . Kažemo da je proces  $(X_t)_{t \geq 0}$  adaptiran s obzirom na  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  ako je, za svaki  $t$ ,  $X_t$   $\mathcal{F}_t$ -izmjeriva.

**Definicija 1.1.1.** *Vrijeme zaustavljanja s obzirom na filtraciju  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$  je slučajna varijabla  $\tau$  s vrijednostima u  $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$  takva da za svaki  $t \geq 0$*

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Nadalje,  $\sigma$ -algebru povezanu s  $\tau$ , odnosno onu koja predstavlja informacije dostupne prije vremena zaustavljanja  $\tau$ , definiramo kao

$$\mathcal{F}_\tau = \{F \in \mathcal{F} : \forall t \geq 0, F \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}.$$

Važan primjer stohastičkog procesa koji čini koncept za Black-Scholes-Mertonov model i pojavljuje se u većini modela financijske imovine je upravo Brownovo gibanje. Također ćemo definirati i pojam filtracije za Brownovo gibanje.



**Definicija 1.1.2.** Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  vjerojatnosni prostor. Slučajni proces  $B = (B_t, t \geq 0)$  je Brownovo gibanje ako vrijedi:

- (i) Putovi  $t \mapsto B_t(\omega)$  su neprekidne funkcije sa  $\mathbb{R}_+$  u  $\mathbb{R}$  (za g.s.  $\omega \in \Omega$ ).
- (ii)  $B_0 = 0$ .
- (iii) Za sve  $m \in \mathbb{N}$  i  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$  su prirasti

$$B_{t_1} - B_{t_0}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}}$$

nezavisni.

- (iv) Za sve  $0 \leq s < t$  je prirast  $B_t - B_s$  normalno distribuiran s očekivanjem nula i varijancom  $t - s$ .

**Definicija 1.1.3.** Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  vjerojatnosni prostor i neka je  $B = (B_t, t \geq 0)$  Brownovo gibanje na tom prostoru. Filtracija za Brownovo gibanje je familija  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$   $\sigma$ -algebri koja zadovoljava

- (i) Za sve  $0 \leq s < t$ ,  $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ .
- (ii) Za svaki  $t \geq 0$ ,  $B_t$  je  $\mathcal{F}_t$ -izmjeriva slučajna varijabla.
- (iii) Za sve  $0 \leq s < t$ , prirast  $B_t - B_s$  nezavisan je od  $\mathcal{F}_s$ .

**Definicija 1.1.4.** Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  vjerojatnosni prostor te neka je  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$  filtracija. Slučajni proces  $M = (M_t, t \geq 0)$  je martingal ako vrijedi:

- (i)  $M$  je  $\mathbb{F}$ -adaptiran.
- (ii) Za sve  $t \geq 0$ ,  $\mathbb{E}|M_t| < \infty$ .
- (iii) Za sve  $0 \leq s \leq t$ ,  $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$  g.s.

**Definicija 1.1.5.** Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  vjerojatnosni prostor te neka je  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$  filtracija. Adaptirani slučajni proces  $X = (X_t, t \geq 0)$  je Markovljev proces, ako za sve  $0 \leq s \leq t$  i za sve Borel-izmjerive funkcije  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  postoji Borel-izmjeriva funkcija  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  takva da je

$$\mathbb{E}[f(X_t) | \mathcal{F}_s] = g(X_s) \text{ g.s.}$$

Riječima, uvjetno na informaciju poznatu u trenutku  $s$  svaka funkcija pozicije procesa  $X$  u trenutku  $t \geq s$  je funkcija pozicije procesa  $X$  u trenutku  $s$ .

Brownovo gibanje je martingal s obzirom na filtraciju za to Brownovo gibanje te ima Markovljevo svojstvo.

Integral oblika

$$\int_0^t H_s dB_s$$

gdje je  $H$  adaptirani slučajni proces, a  $B$  Brownovo gibanje, zove se stohastički ili Itôv integral. U financijama se koristi za modeliranje vrijednosti portfelja, a Itôv račun za izvod Black-Scholes-Mertonove parcijalne diferencijalne jednačbe za cijenu opcije. Fiksirajmo pozitivno vrijeme  $T > 0$ .

**Definicija 1.1.6.** *Adaptirani slučajni proces  $H = (H_t, t \in [0, T])$  zove se jednostavan proces ako je*

$$H_t = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t),$$

za neku particiju  $\Pi = 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$  intervala  $[0, T]$  i omeđene slučajne varijable  $\phi_j, j = 0, 1, \dots, n-1$ , takve da je  $\phi_j \mathcal{F}_{t_j}$ -izmjeriva.

Dakle, Itôv integral jednostavnog procesa  $H$  u odnosu na Brownovo gibanje  $B$  je slučajni proces  $I = (I_t, t \in [0, T])$  definiran s

$$I_t = \sum_{j=0}^{n-1} \phi_j (B_{t_{j+1} \wedge t} - B_{t_j \wedge t})$$

i označavamo ga s  $I_t = \int_0^t H_s dB_s$ .

**Definicija 1.1.7.** *Neka je  $B = (B_t, t \geq 0)$  Brownovo gibanje i neka je  $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$  pridružena filtracija. Itôv proces je slučajni proces  $X = (X_t, t \geq 0)$  oblika*

$$X_t = X_0 + \int_0^t H_s dB_s + \int_0^t V_s ds,$$

gdje je  $X_0 \in \mathbb{R}$ , a  $H = (H_t, t \geq 0)$  i  $V = (V_t, t \geq 0)$  su adaptirani procesi takvi da  $\mathbb{E} \int_0^t H^2(s) ds < \infty$  i  $\int_0^t |V_s| ds < \infty$  g.s. za sve  $t \geq 0$ .

**Teorem 1.1.8.** (*Itôva formula za Itôv proces*) Neka je  $X = (X_t : t \geq 0)$  Itôv proces i neka je  $f(t, x)$  funkcija s neprekidnim parcijalnim derivacijama  $f_t(t, x)$ ,  $f_x(t, x)$  i  $f_{xx}(t, x)$ . Tada za svaki  $T \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} f(T, X_T) &= f(0, X_0) + \int_0^T f_t(t, X_t)dt + \int_0^T f_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, X_t)d\langle X \rangle_t \\ &= f(0, X_0) + \int_0^T f_t(t, X_t)dt + \int_0^T f_x(t, X_t)H_t dB_t + \int_0^T f_x(t, X_t)V_t dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^T f_{xx}(t, X_t)H_t^2 dt \end{aligned}$$

## 1.2 Black - Scholes - Mertonov model

Model kojeg su 1973. godine predstavili Black i Scholes je neprekidni model s dvije vrste financijske imovine: rizična imovina, dionica čija je cijena  $S_t$  u trenutku  $t$ , i bezrizična imovina, novac čija je cijena  $S_t^0$  u trenutku  $t$ . Pretpostavimo da se novac ukamaćuje po kamatnoj stopi  $r$ . To znači da promjenu u cijeni opisuju sljedeća diferencijalna jednadžba

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt.$$

Radi jednostavnosti, postavimo  $S_0^0 = 1$ . Tada  $S_t^0 = e^{rt}$ , za  $t \geq 0$ .

Pretpostavimo da kretanje cijene dionice opisuju geometrijsko Brownovo gibanje:

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t),$$

gdje su  $\mu \in \mathbb{R}$  i  $\sigma > 0$  konstante. Parametar  $\sigma$  zove se volatilitnost i predstavlja mjeru varijacije cijene dionice na financijskom tržištu, a parametar  $\mu$  je srednja stopa povrata.

Black-Scholes-Mertonov model popularan je iz razloga što uzima u obzir sve faktore koje mogu utjecati na cijenu dionice, kao što su dospijeće, kamatna stopa, volatilitnost i druge, te tako prilično precizno možemo odrediti vrijednost opcije. Još jedna prednost je jednostavnost formule koja dovodi do brzog izračuna. Kako se cijene na burzi brzo mijenjaju, tako jednostavna formula omogućuje trgovcima jednako tako brzo donošenje odluka.

Naime, model ima i svojih nedostataka. Jedan je pretpostavka da cijena dionice ima log-normalnu distribuciju, no pogledamo li distribuciju povrata financijske imovine vidimo da ne izgleda Gaussovski. Prisutni su viši vrhovi i deblji repovi što znači da se vrlo niski i vrlo visoki povrati češće realiziraju, nego što je to slučaj kod normalne distribucije. Volatilitnost

se mijenja kroz vrijeme i ne doima se konstantnom. Promotrimo li volatilnost kao funkciju cijene izvršenja i dospijeća, odnosno podrazumijevanu volatilnost, vidjet ćemo da ploha volatilnosti nije ravna.

Iz ovih razloga, prirodno nam se nameće da se vratimo na pretpostavke Black-Scholes-Mertonovog modela i napravimo neke promjene. U ovom radu analizirat ćemo modele koji mijenjaju pretpostavku o konstantnoj volatilnosti. Modeli lokalne volatilnosti pretpostavljaju da je volatilnost deterministička funkcija vremena i cijene dionice

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma(t, S_t)dB_t).$$



## Poglavlje 2

### Lokalna volatilnost

Black-Scholes-Mertonov model prikazuje cijene dionica kao funkciju volatilnosti. Ako su cijene dane tržištem, onda možemo izračunati inverz funkcije i dobiti podrazumijevanu volatilnost. Da je taj model savršen, vrijednost volatilnosti bila bi jednaka za sve cijene opcija na tržištu, no znamo da to nije tako. Model lokalne volatilnosti je model određivanja cijena opcija koji volatilnost tretira kao determinističku funkciju vremena i cijene dionice i kao takav je generalizacija Black-Scholes-Mertonovog modela. Bruno Dupire te Emanule Derman i Iraj Kani su 1994. godine razvili koncept modela te u nastavku predstavljamo njihove izvode.

Kretanje cijene dionice opisuje sljedeća diferencijalna jednadžba

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma(t, S_t) S_t dB_t. \quad (2.1)$$

Parametar  $\mu_t$  je srednja stopa povrata i jednak je razlici bezrizične kamatne stope  $r_t$  i prinosa od dividendi  $q_t$ .

$$dS_t = (r_t - q_t) S_t dt + \sigma(t, S_t) S_t dB_t.$$

Radi jednostavnosti izostavit ćemo indekse i pisati  $dS = \mu S dt + \sigma S dB$  gdje je  $\sigma = \sigma(t, S_t)$ .

Prije samih izvoda uvedimo par preliminarija :

- Diskontni faktor

$$D(t, T) = \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right).$$

- Fokker - Planck jednadžba.

Neka je  $f(t, S_t)$  funkcija gustoće cijene  $S_t$  u vremenu  $t$ . Tada  $f$  zadovoljava jednadžbu

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial s}[\mu s f(t, s)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2}[\sigma^2 s^2 f(t, s)]. \quad (2.2)$$

- Vrijednost europske call opcija u vremenu  $t$  s cijenom izvršenja  $K$  neutralne na rizik u oznaci  $C = C(S_t, K)$

$$\begin{aligned} C &= D(t, T) \mathbb{E}[(S_T - K)^+ | \mathcal{F}_t] \\ &= D(t, T) \mathbb{E}[(S_T - K) \mathbb{1}_{(S_T > K)} | \mathcal{F}_t] \\ &= D(t, T) \int_K^\infty (s - K) f(T, s) ds, \end{aligned} \quad (2.3)$$

gdje je  $\mathbb{1}_{(S_T > K)}$  indikatorska funkcija.

## 2.1 Dupireov izvod lokalne volatilnosti

Dupire je primijetio da se model lokalne volatilnosti može konstruirati uz dane cijene europskih call opcija te da će model pružiti iste cijene kao i tržište. Ako je  $C(T, K)$  tržišna cijena europske call opcije u trenutku 0 s cijenom izvršenja  $K$  i dospijećem  $T$ , lokalna volatilnost je dana sljedećom jednadžbom, poznatom kao Dupireova formula,

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{2} \sigma^2 K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} + (r_T - q_T) \left( C - K \frac{\partial C}{\partial K} \right) - r_T C. \quad (2.4)$$

Izvedimo jednadžbu (2.4) korištenjem jednadžbi (2.2) i (2.3).

Derivirajući izraz (2.3) dobivamo

- Parcijalnu derivaciju po  $K$

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial K} &= D(t, T) \int_K^{\infty} \frac{\partial}{\partial K} (s - K) f(T, s) ds \\ &= -D(t, T) \int_K^{\infty} f(T, s) ds.\end{aligned}\quad (2.5)$$

- Drugu derivaciju po  $K$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} &= -D(t, T) [f(T, s)]_{s=K}^{s=\infty} \\ &= D(t, T) f(T, K).\end{aligned}\quad (2.6)$$

Pod pretpostavkom da je  $\lim_{s \rightarrow \infty} f(T, s) = 0$ .

- Prvu derivaciju po  $T$

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial T} &= \frac{\partial}{\partial T} D(t, T) \cdot \int_K^{\infty} (s - K) f(T, s) ds + \\ &D(t, T) \cdot \int_K^{\infty} (s - K) \frac{\partial}{\partial T} [f(T, s)] ds. \\ &= -r_T D(t, T) \int_K^{\infty} (s - K) f(T, s) ds + \\ &D(t, T) \cdot \int_K^{\infty} (s - K) \frac{\partial}{\partial T} [f(T, s)] ds \\ &= -r_T C + D(t, T) \int_K^{\infty} (s - K) \frac{\partial}{\partial T} [f(T, s)] ds.\end{aligned}\quad (2.7)$$

Primijetimo da je parcijalna derivacija funkcije  $D$  po  $T$  jednaka  $\frac{\partial D}{\partial T} = -r_T D(t, T)$ .

Iskoristimo sada Fokker-Planck jednadžbu (2.2) i uvrstimo ju u (2.7) za  $t = T$ .

$$\frac{\partial C}{\partial T} + r_T C = P(t, T) \int_K^{\infty} (s - K) \cdot \left\{ -\frac{\partial}{\partial s} [\mu_T s f(T, s)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s^2} [\sigma^2 s^2 f(T, s)] \right\} ds. \quad (2.8)$$

Zapravo se izvod sveo na računanje dva integrala

$$\begin{aligned}I_1 &= \mu_T \int_K^{\infty} (s - K) \frac{\partial}{\partial s} [s f(T, s)] ds \\ \text{i } I_2 &= \int_K^{\infty} (s - K) \frac{\partial^2}{\partial s^2} [\sigma^2 s^2 f(T, s)] ds\end{aligned}$$



te (2.8) postaje

$$\frac{\partial C}{\partial T} + r_T C = D(t, T) \left[ -I_1 + \frac{1}{2} I_2 \right]. \quad (2.9)$$

Prije gornjih integrala proučit ćemo dva identiteta.

Podijelimo prvo jednadžbu (2.3) diskontnim faktorom  $P$ .

$$\begin{aligned} \frac{C}{D(t, T)} &= \int_K^\infty (s - K) f(T, s) ds \\ &= \int_K^\infty s f(T, s) ds - K \int_K^\infty f(T, s) ds. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Iz (2.5) vidimo da je

$$\int_K^\infty f(T, s) ds = -\frac{1}{D(t, T)} \frac{\partial C}{\partial K}.$$

Uvrstimo to sada u (2.10) i dobijemo prvi identitet

$$\int_K^\infty s f(T, s) ds = \frac{C}{D(t, T)} - \frac{K}{D(t, T)} \frac{\partial C}{\partial K}. \quad (2.11)$$

Za drugi identitet izrazit ćemo  $f(T, K)$  iz (2.6)

$$f(T, K) = \frac{1}{D(t, T)} \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}. \quad (2.12)$$

Vratimo se sada na integrale  $I_1$  i  $I_2$ . Koristeći parcijalnu integraciju

$\begin{aligned} u &= s - K & v' &= \frac{\partial}{\partial s} [s f(T, s)] \\ u' &= 1 & v &= s f(T, s) \end{aligned}$
--

računamo prvi integral

$$\begin{aligned} I_1 &= [\mu_T (s - K) s f(T, s)]_{s=K}^{s=\infty} - \mu_T \int_K^\infty s f(T, s) ds \\ &= [0 - 0] - \mu_T \int_K^\infty s f(T, s) ds, \end{aligned}$$

uz pretpostavku da je  $\lim_{s \rightarrow \infty} (s - K)sf(T, s) = 0$ . Prvi identitet, odnosno izraz (2.11), nam daje

$$I_1 = \frac{-\mu_T C}{D(t, T)} + \frac{\mu_T K}{D(t, T)} \frac{\partial C}{\partial K}. \quad (2.13)$$

I u rješavanju drugog integrala koristit ćemo parcijalnu integraciju za

$$\begin{array}{l} u = s - K \quad v' = \frac{\partial^2}{\partial s^2} [\sigma^2 s^2 f(T, s)] \\ u' = 1 \quad v = \frac{\partial}{\partial s} [\sigma^2 s^2 f(T, s)] \end{array}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \left[ (s - K) \frac{\partial}{\partial s} \{\sigma^2 s^2 f(T, s)\} \right]_{s=K}^{s=\infty} - \int_K^{\infty} \frac{\partial}{\partial s} [\sigma^2 s^2 f(T, s)] ds \\ &= [0 - 0] - [\sigma^2 s^2 f(T, s)]_{s=K}^{s=\infty} \\ &= \sigma^2 K^2 f(T, K), \end{aligned}$$

gdje je  $\sigma^2 = \sigma(T, K)^2$ . Pretpostavljamo da je  $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\partial}{\partial s} \{\sigma^2 s^2 f(T, s)\} = 0$ .

Izraz za integral  $I_2$  dobivamo koristeći identitet (2.12).

$$I_2 = \frac{\sigma^2 K^2}{D(t, T)} \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}. \quad (2.14)$$

Konačno, u glavnoj jednadžbi (2.9) zamijenimo  $I_1$  izrazom (2.13) i  $I_2$  izrazom (2.14) te dobijemo

$$\frac{\partial C}{\partial T} + r_T C = \mu_T C - \mu_T K \frac{\partial C}{\partial K} + \frac{1}{2} \sigma^2 K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}.$$

Na kraju, uvrstimo  $\mu_T = r_T - q_T$  i dobijemo Dupireovu jednadžbu (2.4)

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{1}{2} \sigma^2 K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} + (r_T - q_T) \left( C - K \frac{\partial C}{\partial K} \right) - r_T C.$$

## 2.2 Derman - Kani izvod lokalne volatilnosti

Derman i Kani opisali su i implementirali funkciju lokalne volatilnosti. Koristili su je u svakom čvoru modela određivanja cijena binomnih opcija. Stablo je uspješno proizvelo

vrijednosti cijena u skladu s pravim tržišnim cijenama te je dobilo naziv podrazumijevano binomno stablo. Derman - Kani jednadžba, koja predstavlja loklanu volatilnost kao uvjetno očekivanje, je

$$\frac{\partial C}{\partial T} = -K(r_T - q_T) \frac{\partial C}{\partial K} - q_T C + \frac{1}{2} K^2 \mathbb{E}[\sigma_T^2 | S_T = K] \frac{\partial^2 C}{\partial K^2}. \quad (2.15)$$

Za izvod (2.15) potrebne su sljedeće parcijalne derivacije.

$\frac{\partial}{\partial S}(S - K)^+ = \mathbb{1}_{(S > K)}$	$\frac{\partial}{\partial S} \mathbb{1}_{(S > K)} = \delta(S - K)$
$\frac{\partial}{\partial K}(S - K)^+ = -\mathbb{1}_{(S > K)}$	$\frac{\partial}{\partial K} \mathbb{1}_{(S > K)} = -\delta(S - K)$
$\frac{\partial C}{\partial K} = -D(t, T) \mathbb{E}[\mathbb{1}_{(S > K)}]$	$\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = D(t, T) \mathbb{E}[\delta(S - K)]$

U tablici,  $\delta(\cdot)$  označava Diracovu delta funkciju.

Definirajmo funkciju  $f(T, s)$  kao

$$f(T, s) = D(t, T)(s - K)^+.$$

Podsjetimo se da je proces za  $S_t$  opisan izrazom (2.1) te da je  $f$  funkcija s neprekidnim parcijalnim derivacijama, stoga možemo primijeniti Itôvu formulu iz Teorema 1.1.8

$$df = \left[ \frac{\partial f}{\partial T} + \mu_T S_T \frac{\partial f}{\partial S_T} + \frac{1}{2} \sigma_T^2 S_T \frac{\partial^2 f}{\partial S_T^2} \right] dT + \left[ \sigma_T S_T \frac{\partial f}{\partial S_T} \right] dB_T. \quad (2.16)$$

Izračunajmo derivacije koje se pojavljuju u (2.16)

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial T} &= -r_T D(t, T)(S_T - K)^+, \\ \frac{\partial f}{\partial S_T} &= D(t, T) \mathbb{1}_{(S_T > K)}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial S_T^2} &= D(t, T) \delta(S_T - K). \end{aligned}$$

Zamijenimo sada odgovarajuće izraze u (2.16)

$$df = D(t, T) \cdot \left[ -r_T(S_T - K)^+ + \mu_T S_T \mathbb{1}_{(S_T > K)} + \frac{1}{2} \sigma_T^2 S_T^2 \delta(S_T - K) \right] dT + D(t, T) \left[ \sigma_T S_T \mathbb{1}_{(S_T > K)} \right] dB_T. \quad (2.17)$$

Pogledajmo prva dva pribrojnika u zagradi u izrazu (2.17). Umjesto  $(S_T - K)^+$  možemo pisati indikatorsku funkciju i nakon toga zamijeniti  $\mu_T$  za  $r_T - q_T$ . Tada je

$$\begin{aligned} -r_T(S_T - K)^+ + \mu_T S_T \mathbb{1}_{(S_T > K)} &= -r_T(S_T - K) \mathbb{1}_{(S_T > K)} + \mu_T S_T \mathbb{1}_{(S_T > K)} \\ &= r_T K \mathbb{1}_{(S_T > K)} - q_T S_T \mathbb{1}_{(S_T > K)}. \end{aligned}$$

Uzmimo očekivanje jednadžbe (2.17). S obzirom da je očekivanje Itôvog integrala (drugog pribrojnika u (2.17)) jednako 0,

$$\begin{aligned} dC &= \mathbb{E}[df(T, S_T)] \\ &= D(t, T) \mathbb{E} \left[ r_T K \mathbb{1}_{(S_T > K)} - q_T S_T \mathbb{1}_{(S_T > K)} + \frac{1}{2} \sigma_T^2 S_T^2 \delta(S_T - K) \right] dT, \end{aligned} \quad (2.18)$$

pri čemu smo koristili Fubinijev teorem. Dakle,

$$\frac{\partial C}{\partial T} = P(t, T) \mathbb{E} \left[ r_T K \mathbb{1}_{(S_T > K)} - q_T S_T \mathbb{1}_{(S_T > K)} + \frac{1}{2} \sigma_T^2 S_T^2 \delta(S_T - K) \right]. \quad (2.19)$$

Iz izraza (2.3) dobivamo

$$\begin{aligned} C &= D(t, T) \mathbb{E}[(S_T - K) \mathbb{1}_{(S_T > K)}] \\ C &= D(t, T) \mathbb{E}[S_T \mathbb{1}_{(S_T > K)}] - K D(t, T) \mathbb{E}[\mathbb{1}_{(S_T > K)}] \\ D(t, T) \mathbb{E}[S_T \mathbb{1}_{(S_T > K)}] &= C + K D(t, T) \mathbb{E}[\mathbb{1}_{(S_T > K)}]. \end{aligned}$$

Koristeći gornji rezultat, jednadžba (2.19) postaje

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial T} &= KD(t, T)r_T\mathbb{E}[\mathbb{1}_{(S_T > K)}] - q_T P(t, T)\mathbb{E}[S_T \mathbb{1}_{(S_T > K)}] \\
&\quad + \frac{1}{2}D(t, T)\mathbb{E}[\sigma_T^2 S_T^2 \delta(S_T - K)] \\
&= KD(t, T)r_T\mathbb{E}[\mathbb{1}_{(S_T > K)}] - q_T(C + KD(t, T)\mathbb{E}[\mathbb{1}_{(S_T > K)}]) \\
&\quad + \frac{1}{2}D(t, T)\mathbb{E}[\sigma_T^2 S_T^2 \delta(S_T - K)] \\
&= -K(r_T - q_T)\frac{\partial C}{\partial K} - q_T C + \frac{1}{2}D(t, T)\mathbb{E}[\sigma_T^2 S_T^2 \delta(S_T - K)],
\end{aligned} \tag{2.20}$$

gdje smo iskoristili  $\frac{\partial C}{\partial K} = -D(t, T)\mathbb{E}[\mathbb{1}_{(S_T > K)}]$ .

Zadnji pribrojnik izraza (2.20) možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}D(t, T)\mathbb{E}[\sigma_T^2 S_T^2 \delta(S_T - K)] &= \frac{1}{2}D(t, T)\mathbb{E}[\sigma_T^2 S_T^2 | S_T = K]\mathbb{E}[\delta(S_T - K)] \\
&= \frac{1}{2}D(t, T)\mathbb{E}[\sigma_T^2 | S_T = K]K^2\mathbb{E}[\delta(S_T - K)] \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}[\sigma_T^2 | S_T = K]K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2},
\end{aligned}$$

gdje smo iskoristili  $\frac{\partial^2 C}{\partial K^2} = D(t, T)\mathbb{E}[\delta(S_T - K)]$ . Sada dobivamo Derman-Kani jednadžbu (2.15)

$$\frac{\partial C}{\partial T} = -K(r_T - q_T)\frac{\partial C}{\partial K} - q_T C + \frac{1}{2}K^2\mathbb{E}[\sigma_T^2 | S_T = K]\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}.$$

Dupireova jednadžba i Derman-Kani jednadžba zapravo dolaze do istog rezultata. Kada iz (2.4) izrazimo  $\sigma^2 = \sigma(T, K)$ , a iz (2.15)  $\mathbb{E}[\sigma_T^2 | S_T = K]$  vidimo

$$\begin{aligned}
\sigma(T, K)^2 &= \frac{\frac{\partial C}{\partial T} + q_T C + (r_T - q_T)K\frac{\partial C}{\partial K}}{\frac{1}{2}K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}} \\
\mathbb{E}[\sigma_T^2 | S_T = K] &= \frac{\frac{\partial C}{\partial T} + q_T C + (r_T - q_T)K\frac{\partial C}{\partial K}}{\frac{1}{2}K^2\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}},
\end{aligned}$$

pa je stoga

$$\sigma(T, K)^2 = \mathbb{E}[\sigma_T^2 | S_T = K].$$

### 2.3 Podrazumijevana volatilnost (*Implied Volatility*)

Predstavljamo još jedan izvod lokalne volatilnosti, od Black-Scholesove podrazumijevane volatilnosti  $\Sigma = \Sigma(T, K)$ , izražene ovdje kao lokalna varijanca  $v_L = \sigma^2$

$$v_L = \frac{\frac{\partial \omega}{\partial T}}{\left[ 1 - \frac{y}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{4} - \frac{1}{\omega} + \frac{y^2}{\omega} \right) \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right]}, \quad (2.21)$$

gdje je  $\omega$  Black-Scholesova totalna podrazumijevana varijanca i  $y$  log-novčanost (*log-moneyness*). Kako bismo izrazili lokalnu volatilnost, iz jednadžbe (2.4), pomoću podrazumijevane volatilnosti, potrebne su nam tri derivacije koje se pojavljuju u (2.4) također izražene pomoću podrazumijevane volatilnosti.

Log-novčanost definiramo kao

$$y = \ln \frac{K}{F_T},$$

gdje je  $F_T = S_0 \exp\left(\int_0^T \mu_t dt\right)$  forward cijena i  $K = F_T e^y$  cijena izvršenja, i definiramo Black-Scholesovu totalnu podrazumijevanu varijancu kao

$$\omega = \Sigma(K, T)^2 T.$$

Black-Scholes cijena europske call opcije tada je

$$\begin{aligned} C_{BS}(S_0, K, \Sigma(K, T), T) &= C_{BS}(S_0, F_T e^y, \omega, T) \\ &= F_T \{\Phi(d_1) - e^y \Phi(d_2)\}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

gdje je

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\ln \frac{S_0}{K} + \int_0^T (r_t - q_t) dt + \frac{\omega}{2}}{\sqrt{\omega}} = -y\omega^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\omega^{\frac{1}{2}} \\ d_2 &= d_1 - \sqrt{\omega} = -y\omega^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\omega^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (2.23)$$

a  $\Phi$  standardna normalna funkcija distribucije.

Kako bismo reparametrizirali jednadžbu (2.4), primijetimo da je cijena europske call opcije jednaka

$$C(S_0, K, T) = C(S_0, F_T e^y, T).$$

Nakon što smo uveli parametre, računamo parcijalne derivacije. Po pravilu derivacije složene funkcije derivacija funkcije  $C$  po  $y$  je

$$\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial y} = \frac{\partial C}{\partial K} K. \quad (2.24)$$

Pri računanju druge derivacije po  $y$  koristimo pravilo derivacije umnoška i pravilo derivacije složene funkcije. Tada je

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial C}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial C}{\partial K} K \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial C}{\partial K} \right) K + \frac{\partial C}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial y} \\ &= \frac{\frac{\partial C}{\partial K}}{\frac{\partial K}{\partial y}} \frac{\partial K}{\partial y} K + \frac{\partial C}{\partial y} \\ &= \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} K^2 + \frac{\partial C}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Treća derivacija koja nam je potrebna je parcijalna derivacija funkcije  $C$  po  $T$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial T} &= \frac{\partial C}{\partial T} + \frac{\partial C}{\partial K} \frac{\partial K}{\partial T} \\ &= \frac{\partial C}{\partial T} + \frac{\partial C}{\partial K} K \mu_T \\ &= \frac{\partial C}{\partial T} + \frac{\partial C}{\partial y} \mu_T. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Rezultate dane izrazima (2.24), (2.25) i (2.26) unosimo u jednadžbu (2.4) te dobijemo

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial T} &= \frac{1}{2} \sigma^2 K^2 \frac{\partial^2 C}{\partial K^2} + \mu_T \left( C - K \frac{\partial C}{\partial K} \right) \\ \frac{\partial C}{\partial T} - \frac{\partial C}{\partial y} \mu_T &= \frac{1}{2} \sigma^2 \left( \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \mu_T \left( C - \frac{\partial C}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Nakon sređivanja jednadžbe i zamijene  $\sigma(K, T)^2$  za lokalnu varijancu  $v_L$  imamo

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{v_L}{2} \left( \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \mu_T C. \quad (2.27)$$

Prije nego nastavimo, pogledat ćemo tri identiteta koji će nam koristiti u daljnjem izvodu. Derivacije standardne normalne funkcije distribucije i funkcije gustoće su

$$\Phi'(x) = n(x)x', n'(x) = -xn(x)x'.$$

Promotrimo sljedeću relaciju

$$\begin{aligned} n(d_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(d_2 + \sqrt{\omega})^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(d_2^2 + 2d_2\sqrt{\omega} + \omega)} \\ &= n(d_2) e^{-d_2\sqrt{\omega} - \frac{1}{2}\omega} \\ &= n(d_2) e^{\left(\frac{y}{\sqrt{\omega}} + \frac{1}{2}\sqrt{\omega}\right)\sqrt{\omega} - \frac{1}{2}\omega} \\ &= n(d_2) e^y. \end{aligned}$$

U nastavku će nam biti potrebne derivacije funkcije (2.17). Prvo računamo parcijalnu derivaciju po  $\omega$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{BS}}{\partial \omega} &= F_T \left[ n(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial \omega} - e^y n(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial \omega} \right] \\ &= F_T \left[ n(d_2) e^y \frac{\partial d_1}{\partial \omega} - e^y n(d_2) \frac{\partial}{\partial \omega} (d_1 - \sqrt{\omega}) \right] \\ &= F_T n(d_2) e^y \left[ \frac{\partial d_1}{\partial \omega} - \frac{\partial d_1}{\partial \omega} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\omega}} \right] \\ &= \frac{1}{2} F_T e^y \frac{n(d_2)}{\sqrt{\omega}}. \end{aligned}$$

Tada je druga derivacija po  $\omega$  i naš prvi identitet jednak

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial \omega^2} &= \frac{1}{2} F_T e^y \frac{-d_2 n(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial \omega} \sqrt{\omega} - n(d_2) \frac{1}{2\sqrt{\omega}}}{\sqrt{\omega}^2} \\ &= \frac{1}{2} F_T e^y n(d_2) \frac{\left(\frac{y}{\sqrt{\omega}} + \frac{\sqrt{\omega}}{2}\right) \left(\frac{y}{2\sqrt{\omega}^3} - \frac{1}{4\sqrt{\omega}}\right) \sqrt{\omega} - \frac{1}{2\sqrt{\omega}}}{\omega} \\ &= \frac{1}{2} F_T e^y n(d_2) \frac{\left(\frac{y^2}{2\omega^2} - \frac{y}{4\omega} + \frac{y}{4\omega} - \frac{1}{8}\right) \sqrt{\omega} - \frac{1}{2\sqrt{\omega}}}{\omega} \end{aligned} \tag{2.28}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} F_T e^y n(d_2) \frac{\left(\frac{y^2}{2\omega^2} - \frac{1}{8}\right) \sqrt{\omega} - \frac{1}{2\sqrt{\omega}}}{\sqrt{\omega} \sqrt{\omega}} \\
&= \frac{1}{2} F_T e^y \frac{n(d_2)}{\sqrt{\omega}} \left(\frac{y^2}{2\omega^2} - \frac{1}{8} - \frac{1}{2\omega}\right) \\
&= \frac{\partial C_{BS}}{\partial \omega} \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{2\omega} + \frac{y^2}{2\omega^2}\right).
\end{aligned}$$

Računamo sada drugi identitet

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial \omega \partial y} &= \frac{1}{2} F_T \frac{1}{\sqrt{\omega}} \left( e^y n(d_2) + e^y \frac{\partial n(d_2)}{\partial y} \right) \tag{2.29} \\
&= \frac{1}{2} F_T e^y \frac{1}{\sqrt{\omega}} \left( n(d_2) - d_2 n(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial y} \right) \\
&= \frac{1}{2} F_T e^y \frac{n(d_2)}{\sqrt{\omega}} \left( 1 - \left( -\frac{y}{\sqrt{\omega}} - \frac{\sqrt{\omega}}{2} \right) \frac{-1}{\sqrt{\omega}} \right) \\
&= \frac{1}{2} F_T e^y \frac{n(d_2)}{\sqrt{\omega}} \left( 1 - \frac{y}{\omega} - \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{\partial C_{BS}}{\partial \omega} \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{\omega} \right).
\end{aligned}$$

Kako bismo došli do trećeg identiteta, računamo prvo derivaciju funkcije  $C_{BS}$  po  $y$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_{BS}}{\partial y} &= F_T \left( n(d_1) \frac{\partial d_1}{\partial y} - e^y \Phi(d_2) - e^y n(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial y} \right) \\
&= F_T \left( -\frac{n(d_2) e^y}{\sqrt{\omega}} - e^y \Phi(d_2) + \frac{e^y n(d_2)}{\sqrt{\omega}} \right) \\
&= -F_T e^y \Phi(d_2).
\end{aligned}$$

Izračunajmo i treći potrebni identitet

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial y^2} &= -F_T \left( e^y \Phi(d_2) + e^y n(d_2) \frac{\partial d_2}{\partial y} \right) \tag{2.30} \\
&= -F_T e^y \left( \Phi(d_2) - \frac{n(d_2)}{\sqrt{\omega}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -F_T e^y \Phi(d_2) + F_T e^y \frac{n(d_2)}{\sqrt{\omega}} \\
&= \frac{\partial C_{BS}}{\partial y} + 2 \frac{\partial C_{BS}}{\partial \omega}.
\end{aligned}$$

Vratimo se sada glavnom dijelu ovog izvoda. Primijetimo da je tržišna cijena  $C(S_0, K, T)$  jednaka Black-Scholesovoj cijeni s podrazumijevanom volatilnosti  $\sigma(K, T)$  umjesto volatilnosti

$$C(S_0, K, T) = C_{BS}(S_0, K, \Sigma(K, T), T).$$

Također ćemo reparametrizirati Black-Scholesovu cijenu u terminima totalne podrazumijevane volatilnosti  $\omega = \sigma(K, T)^2 T$  i  $K = F_T e^y$ . S obzirom da  $\omega$  ovisi o  $K$ , a  $K$  ovisi o  $y$ , vrijedi  $\omega = \omega(y)$  i pisat ćemo

$$C(S_0, K, T) = C_{BS}(S_0, F_T e^y, \omega(y), T). \quad (2.31)$$

Potrebne su nam derivacije tržišne cijene call opcije  $C(S_0, K, T)$  u terminu Black-Scholesove cijene call opcije  $C_{BS}(S_0, F_T e^y, \omega(y), T)$ . Iz izraza (2.31) računamo prvu potrebnu derivaciju

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C}{\partial y} &= \frac{\partial C_{BS}}{\partial y} + \frac{\partial C_{BS}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} \\
&= a(\omega, y) + b(\omega, y)c(\omega, y)
\end{aligned} \quad (2.32)$$

Radi lakšeg računanja druge derivacije uveli smo oznake za odgovarajuće parcijalne derivacije.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} &= \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} + b(\omega, y) \frac{\partial c}{\partial y} + \left[ \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial b}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] c(y) \\
&= \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial y \partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial C_{BS}}{\partial \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \left[ \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial \omega \partial y} + \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial \omega^2} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right] \frac{\partial \omega}{\partial y} \\
&= \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial y \partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial C_{BS}}{\partial \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial \omega^2} \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2.
\end{aligned} \quad (2.33)$$

Treća potrebna derivacija je

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial T} &= \frac{\partial C_{BS}}{\partial T} + \frac{\partial C_{BS}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial T} \\ &= \mu_T C + \frac{\partial C_{BS}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial T}.\end{aligned}\quad (2.34)$$

Druga jednakost vrijedi zato jer jedina ovisnost  $C_{BS}$  o  $T$  je kroz *forward* cijenu  $F_T$ , iako  $C_{BS}$  ovisi implicitno o  $T$  kroz  $y$  i  $\omega$ . Napisat ćemo ponovno reparametriziranu Dupireovu jednadžbu (2.27)

$$\frac{\partial C}{\partial T} = \frac{v_L}{2} \left( \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \mu_T C.$$

Zamijenimo  $\frac{\partial C}{\partial T}$ ,  $\frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$  i  $\frac{\partial C}{\partial y}$  za izraze (2.34), (2.33) i (2.32) i skratimo  $\mu_T C$  s obje strane te dobijemo

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_{BS}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial T} &= \frac{v_L}{2} \left[ \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial y \partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\partial C_{BS}}{\partial \omega} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial \omega^2} \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\partial C_{BS}}{\partial y} + \frac{\partial C_{BS}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} \right].\end{aligned}\quad (2.35)$$

Sada u (2.35) zamijenimo  $\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial \omega^2}$ ,  $\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial \omega \partial y}$  i  $\frac{\partial^2 C_{BS}}{\partial y^2}$  izrazima (2.28), (2.29) i (2.30) te ćemo izlučiti  $\frac{\partial C_{BS}}{\partial \omega}$  s desne strane

$$\begin{aligned}\frac{\partial C_{BS}}{\partial \omega} \frac{\partial \omega}{\partial T} &= \frac{v_L}{2} \frac{\partial C_{BS}}{\partial \omega} \left[ 2 + 2 \left( \frac{1}{2} - \frac{y}{\omega} \right) \frac{\partial \omega}{\partial y} + \left( -\frac{1}{8} - \frac{1}{2\omega} + \frac{y^2}{2\omega^2} \right) \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} - \frac{\partial \omega}{\partial y} \right].\end{aligned}$$

Podijelimo jednadžbu s  $\frac{\partial C_{BS}}{\partial \omega}$

$$\frac{\partial \omega}{\partial T} = v_L \left[ 1 - \frac{y}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{4} - \frac{1}{\omega} + \frac{y^2}{\omega} \right) \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right].$$

Na kraju, izražavanjem  $v_L$  dobijemo jednadžbu (2.21) za lokalnu volatilnost izraženu u terminima podrazumijevane volatilnosti  $\omega = \sigma(K, T)^2 T$  i log-novčanosti  $y = \ln \frac{K}{F_T}$

$$v_L = \frac{\frac{\partial \omega}{\partial T}}{\left[ 1 - \frac{y}{\omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{1}{4} \left( -\frac{1}{4} - \frac{1}{\omega} + \frac{y^2}{\omega} \right) \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 \right]}.$$



## Poglavlje 3

### Modeli lokalne volatilnosti

Već smo zaključili da je pretpostavka Black-Scholes-Mertonovog modela o konstantnoj volatilnosti pogrešna. Naime, pogledamo li ovisnost podrazumijevane volatilnosti o cijeni izvršenja  $K$  za fiksno dospijeće  $T$ , krivulja neće biti ravna, već poprima oblik smiješka ili kosog smiješka. Ovaj efekt naziva se smiješak (*smile*) odnosno kosi smiješak (*skew*) volatilnosti. Kosi smiješak pojavljuje se u strukturama gdje je vrijednost volatilnosti za manju cijenu izvršenja veća od vrijednosti volatilnosti za veću cijenu izvršenja. Smiješak se pojavljuje u strukturama u kojima volatilnost postiže minimalnu vrijednost oko trenutne vrijednosti cijene izvršenja. Smiješak volatilnosti počeo se pojavljivati nakon kraha burze 1987. godine. Do tada su se procjene Black-Scholes-Mertonovog modela činile ispravne. Razni istraživači su pokušali unaprijediti Black-Scholes-Mertonov model kako bi postigli teoretski smiješak. Nažalost, došli su do rješenja kojima gube potpunost modela, jednu od njegovih najvažnijih odlika. Pitanje je, uz dane bezarbitražne cijene europskih call opcija svih mogućih cijena izvršenja i dospijeća, možemo li naći bezrizičan proces koji će biti kompatibilan s promatranim osmijesima za sva dospijeća i koji će zadržati potpunost modela? Potvrđan odgovor nam je dao Dupire zaključivši da volatilnost mora ovisiti o vremenu i cijeni dionice. Modeli koji pretpostavljaju da je volatilnost stohastički proces nazivaju se modeli stohastičke volatilnosti, dok su modeli u kojima je volatilnost deterministička funkcija modeli lokalne volatilnosti kojima se bavimo u ovom radu. Modeli lokalne volatilnosti koriste se na tržištu zbog svoje fleksibilnosti i lake implementacije. S druge strane, njihova prilagodba varira od modela do modela. Neki modeli vode samo do kosog smiješka ili smiješka volatilnosti, a drugi pak mogu zadovoljiti veći opseg struktura. Modeli koje ovdje predstavljamo lako se primjenjuju i koriste za procjenu cijena izvedenica (*derivatives*) ovisnih o londonskoj međubankovnoj ponuđenoj stopi (LIBOR).

Definirajmo prvo osnovne pojmove koji su nam potrebni za uvođenje modela. LIBOR, u oznaci  $L(t, T)$ , je najvažnija interbankovna kamatna stopa koja je prosjek kamatnih stopa velikih banaka diljem svijeta.

**Definicija 3.0.1.** *Obveznica bez kupona (Zero-coupon bond) s dospijećem  $T$  je ugovor koji vlasniku garantira isplatu jedne jedinice novca u vremenu  $T$  bez međuisplata. Vrijednost ugovora u vremenu  $t$  označava se s  $P(t, T)$ . Trivijalno,  $P(T, T) = 1 \forall T$ .*

Udio godine  $\tau(t, T)$  je udio preostalih dana u godini između datuma  $t$  i  $T$ . Na primjer, ako se između  $t$  i  $T$  nalazi 182 dana, onda je  $\tau = \frac{182}{365} = 0.49863$ . Terminski sporazum o kamatnoj stopi (*Forward-rate agreement*, FRA) je ugovor koji uključuje tri vremena, trenutno vrijeme  $t$ , istek važenja (*expiry*)  $E > t$  i dospijeće  $T > E$ . Nakon vremena  $E$  posjedniku ugovora dužnik isplaćuje unaprijed dogovorenu kamatnu stopu  $k$ , a kada dođe dospijeće  $T$  kupac prima isplatu od  $\tau(E, T)kN$  jedinica novca gdje je  $N$  nominalna vrijednost ugovora.

**Definicija 3.0.2.** *Jednostavno složena termimska kamatna stopa (Simply-compounded forward interest rate) u vremenu  $t$  za istek važenja  $E > t$  i dospijeće  $T > E$  u oznaci  $F(t; E, T)$  definirana je s*

$$F(t; E, T) := \frac{1}{\tau(E, T)} \left( \frac{P(t, E)}{P(t, T)} - 1 \right).$$

*Forward measure*  $Q^T$  za difuzijski proces  $x_t$  definira se kao

$$\frac{dQ^T}{dQ} = M \exp\left(- \int_0^T c(x_s) ds\right),$$

gdje je  $c$  nenegativna funkcija i  $M$  normalizirajuća konstanta. *Cap* je izvedenica koja vlasniku garantira isplatu na kraju svakog perioda u kojem je kamatna stopa nadmašila dogovorenu gornju granicu. *Caplet* je izraz koji označava kratkoročni cap ugovor (obično trajanje capleta je 90 dana) i uglavnom je bazirana na LIBOR kamatnoj stopi.

### 3.1 Pomaknuti lognormalni model (*The Shifted - Lognormal Model*)

Proces termimske stope (*Forward-rate process*) u kojem krivulja volatilnosti nije ravna možemo lako konstruirati pomicanjem standardne lognormalne distribucije. Neka je  $\mathcal{E} = \{T_0, \dots, T_m\}$  skup iz kojeg uzimamo parove roka izvršenja i dospijeća (*expiry-maturity pair*)

3.1. POMAKNUTI LOGNORMALNI MODEL (THE SHIFTED-LOGNORMAL MODEL)

27

$(T_{j-1}, T_j), j > 0$ . Neka je  $\{\tau_0, \dots, \tau_m\}$  pripadajući skup udjela godine pri čemu je  $\tau_j = \tau(T_{j-1}, T_j), j > 0$ . Pretpostavimo

$$\begin{aligned} F_j(t) &= X_j(t) + \alpha, \\ dX_j(t) &= \beta(t)X_j(t)dB_t, \end{aligned} \quad (3.1)$$

gdje je  $F_j(t) = F(t; T_{j-1}, T_j)$ ,  $X_j$  geometrijsko Brownovo gibanje,  $\alpha$  realna konstanta,  $\beta$  deterministička funkcija vremena i  $B$  standardno Brownovo gibanje. Direktno slijedi

$$dF_j(t) = \beta(t)(F_j(t) - \alpha)dB_t \quad (3.2)$$

pa za  $t < T \leq T_{j-1}$  terminska stopa  $F_j$  može biti eksplicitno zapisana kao

$$F_j(T) = \alpha + (F_j(t) - \alpha)e^{-\frac{1}{2} \int_t^T \beta^2(u)du + \int_t^T \beta(u)dB_u}.$$

Tada  $F_j(T)$ , uvjetno na  $F_j(t), t < T < T_{j-1}$ , ima pomaknutu lognormalnu distribuciju s gutoćom

$$p_{F_j(T)|F_j(t)}(x) = \frac{1}{(x - \alpha)U(t, T) \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{\ln \frac{x - \alpha}{F_j(t) - \alpha} + \frac{1}{2} U^2(t, T)}{U(t, T)} \right)^2 \right\},$$

za  $x > \alpha$ , gdje

$$U(t, T) := \sqrt{\int_t^T \beta^2(u)du}.$$

Ovaj model za  $F_j$  zadržao je analitičku fleksibilnost geometrijskog Brownovog gibanja  $X_j$ . Caplet cijena povezana s (3.2) dana je s

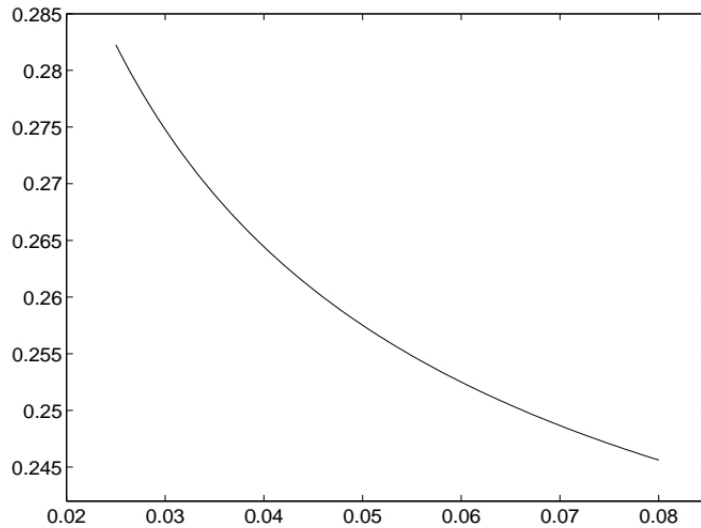
$$\text{Cpl}(t, T_{j-1}, T_j, \tau_j, N, K) = \tau_j NP(t, T_j) \text{Bl}(K - \alpha, F_j(t) - \alpha, U(t, T_{j-1})),$$



gdje je

$$\begin{aligned} \text{Bl}(K, F, v) &= F\Phi(d_1(K, F, v)) - K\Phi(d_2(K, F, v)), \\ d_1(K, F, v) &= \frac{\ln\frac{F}{K} + \frac{v^2}{2}}{v}, \\ d_2(K, F, v) &= \frac{\ln\frac{F}{K} - \frac{v^2}{2}}{v}. \end{aligned}$$

Sada razumijemo zašto jednostavna linearna transformacija (3.1) može biti korisna u praksi. *Forward-rate* proces koji smo dobili kao rezultat, osim što ima eksplicitnu dinamiku i poznatu funkciju gustoće, vodi do *caplet* formule i dopušta kosi osmijeh krivulje podrazumijevane volatilnosti što možemo vidjeti na slici 3.1. Uvođenje parametra  $\alpha$  ima dva efekta na strukturu podrazumijevane volatilnosti, čija krivulja je za  $\alpha = 0$  ravna i ima vrijednost  $U(0, T_{j-1})$ . Prvi efekt je strogo padajuća ( $\alpha < 0$ ), odnosno strogo rastuća ( $\alpha > 0$ ), krivulja. Drugo, za  $\alpha < 0$  ili za smanjenje vrijednosti parametra  $\alpha$  krivulja se podiže, odnosno spušta za  $\alpha > 0$  ili za povećanje vrijednosti parametra.



Slika 3.1: Krivulja podrazumijevane volatilnosti  $\hat{\sigma}(K, \alpha)$  u ovisnosti o  $K$  za model dan s (3.2), u vremenu  $t = 0$ , gdje je  $T_{j-1} = 1, T_j = 1.5, \alpha = -0.015, \beta(t) = 0.2\forall t$  i  $F_j(0) = 0.055$ . Slika je preuzeta iz [3].

### 3.2 Model konstantne elastičnosti varijance (*The Constant Elasticity of Variance Model, CEV*)

Još jedan model koji proizvodi kosi smiješak volatilnosti je CEV model Johna Coxa i Stephena Rossa iz 1976. godine. Leif Andersen i Jasper Andreasen su zatim 2000. godine unaprijedili model koristeći LIBOR kamatnu stopu. Oni počinju s generalnom LIBOR dinamikom

$$dF_j(t) = \phi(F_j(t))\sigma_j(t)dZ_j(t),$$

gdje je  $\phi$  generalna funkcija,  $Z$   $m$ -dimenzionaln vektor stupac Brownovih gibanja,  $Z_j(t)$   $j$ -a komponenta vektora i time standardno Brownovo gibanja, a  $\sigma_j(t)$   $m$ -dimenzionalni vektor redak koeficijenata volatilnosti. Andersen i Andreasen definiraju funkciju  $\phi$  kao

$$\phi(F_j(t)) = [F_j(t)]^\gamma,$$

za neki  $0 < \gamma < 1$ . Primijetimo da bi granični slučajevi  $\gamma = 0$  i  $\gamma = 1$  vodili do normalne i lognormalne distribucije. Tada imamo

$$dF_j(t) = \sigma_j[F_j(t)]^\gamma dB_t, F_j = 0 \text{ apsorbirajući granični uvjet kada je } 0 < \gamma < \frac{1}{2}, \quad (3.3)$$

gdje smo s  $B$  označili jednodimenzionalno Brownovo gibanje  $B = Z_j$ . Kako bismo savladali ovisnost  $\sigma_j$  o vremenu stavimo

$$h(\tau, T) = \int_{\tau}^T \sigma_j(s)^2 ds$$

i onda je

$$\tilde{B}(h(0, t)) := \int_0^t \sigma_j(s) dB(s)$$

Brownovo gibanje s vremenskim parametrom  $h$ . Prilagodimo jednadžbu (3.3) tako da  $f_j(h(t)) := F_j(t)$ . Time dobivamo

$$df_j(h) = f_j(h)^\gamma d\tilde{B}(h), f_j = 0 \text{ apsorbirajući granični uvjet kada } 0 < \gamma < \frac{1}{2}.$$

Ovaj proces se može pretvoriti u Besselov proces promjenom varijabli, a zatim možemo

doći do funkcije gustoće za  $f$ . Sjetimo se promjene vremena koju smo napravili i dolazimo do funkcije gustoće za  $F_j(T)$  uvjetno na  $F_j(t)$ ,  $t < T \leq T_{j-1}$

$$p_{F_j(T)|F_j(t)}(x) = 2(1 - \gamma)k^{\frac{1}{2-2\gamma}}(u\omega^{1-4\gamma})^{\frac{1}{4-4\gamma}}e^{-u-\omega}I_{\frac{1}{2-2\gamma}}(2\sqrt{u\omega}), \quad (3.4)$$

gdje je

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{2h(t, T)(1 - \gamma)^2}, \\ u &= k[F_j(t)]^{2(1-\gamma)}, \\ \omega &= kx^{2(1-\gamma)}, \end{aligned}$$

te  $I_q$  označava modificiranu Besselovu funkciju prve vrste reda  $q$ . Nadalje, ako je  $g(z; y) = \frac{e^{-z}z^{y-1}}{\Gamma(y)}$  funkcija gustoće gamma razdiobe i  $G(x; y) = \int_x^{+\infty} g(z; y)dz$  funkcija distribucije gamma razdiobe, onda je vjerojatnost da je  $F_j(T) = 0$  uvjetno na  $F_j(t)$  jednaka  $G\left(u; \frac{1}{2(1-\gamma)}\right)$ . Velika prednost modela (3.3) je analitička fleksibilnost koja nam daje gornje funkcije gustoće. Kako znamo funkciju gustoće, možemo izračunati i fomulu za caplet cijenu:

$$\begin{aligned} \text{Cpl}(t, T_{j-1}, T_j, \tau_j, N, K) &= \tau_j NP(t, T_j) \left[ F_j(t) \sum_{n=0}^{+\infty} g(u; n+1) G\left(kK^{2(1-\gamma)}; c_n\right) \right. \\ &\quad \left. - K \sum_{n=0}^{+\infty} g(u; c_n) G\left(kK^{2(1-\gamma)}; n+1\right) \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

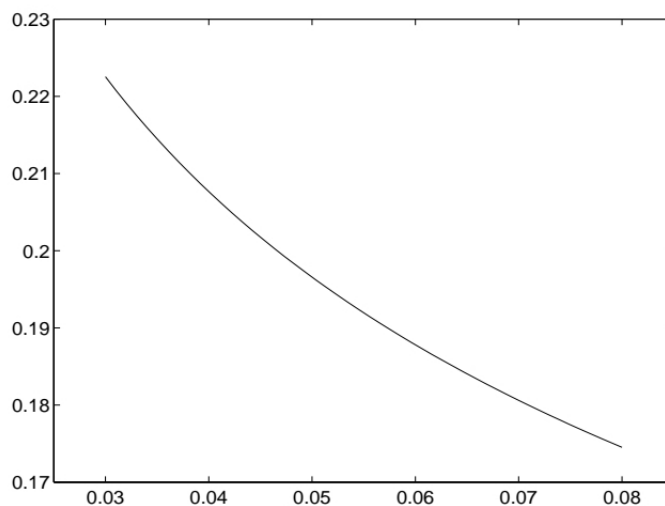
gdje su  $k$  i  $u$  definirani kao u (3.4) i

$$c_n := n + 1 + \frac{1}{2(1 - \gamma)}.$$

Kao što smo i najavili, caplet cijena (3.5) dovodi do kosog smiješka volatlnosti što vidimo na slici 3.2. Jedini problem predstavlja nam svojstvo  $F_j = 0$ . Iako neće nužno utjecati na određivanje caplet cijene, moglo bi doći do problema kod određivanja cijena egzotičnijih struktura. Kako bi se iskupili za ovu slabost modela, Andersen i Andreasen su 2000. godine predložili i ograničeni CEV (*Limited CEV, LCEV*) proces, gdje umjesto  $\phi(F) = F^\gamma$ , funkcija  $\phi$  izleda ovako

$$\phi(F) = F \min(\epsilon^{\gamma-1}, F^{\gamma-1}),$$

za mali pozitivni realni broj  $\epsilon$ . Pri usporedbi dva modela, LCEV i CEV, primijetili su da je, bar što se caplet cijena tiče, razlika mala i nestaje kada  $\epsilon$  teži u nulu.



Slika 3.2: Krivulja podrazumijevane volatilnosti u ovisnosti o  $K$  za model dan s (3.5), u vremenu  $t = 0$ , gdje je  $T_{j-1} = 1, T_j = 1.5, \sigma_j(t) = 0.045\forall t, \gamma = 0.5$  i  $F_j(0) = 0.055$ . Slika je preuzeta iz [3].

### 3.3 Mješoviti lognormalni model (*The Lognormal-Mixture Model, LM*)

Damiano Brigo i Fabio Mercurio su 2000. godine predstavili alternativni *forward-LIBOR* model temeljen na procesu difuzije koji je konzistentan s danom mješavinom lognormalnih funkcija gustoće. Predstavimo prvo razred analitički fleksibilnih modela iz kojeg dolazi ovaj model. Pretpostavimo da *forward-rate* proces  $F_j$  zadovoljava sljedeću stohastičku diferencijalnu jednadžbu

$$dF_j(t) = \sigma(t, F_j(t))F_j(t)dB_t, \quad (3.6)$$

gdje je lokalna volatilnost  $\sigma$  deterministička funkcija za koju postoji pozitivna konstanta  $l$  takva da vrijedi

$$\sigma^2(t, y)y^2 \leq l(1 + y^2).$$

Uzmimo sada  $n$  procesa difuzije danih s

$$dG_i(t) = v_i(t, G_i(t))dB_t, i = 1, \dots, n, G_i(0) = F_j(0),$$

sa standardnom početnom vrijednosti  $F_j(0)$ , gdje su  $v_i(t, y)$  realne funkcije za koje postoje pozitivne konstante  $l_i$  takva da vrijedi

$$v_i^2(t, y) \leq l_i(1 - y^2), i = 1, \dots, n.$$

Za svaki  $t$  označimo s  $p_t^i(\cdot)$  funkciju gustoće od  $G_i(t)$ , to jest  $p_t^i(y) = \frac{d(Q^j\{G_i(t) \leq y\})}{dy}$ , gdje je  $Q^j = Q^{T^j}$  forward mjera. Sada želimo izvesti lokalnu volatilitnost  $\sigma$  takvu da  $Q^j$ -gustoća za  $F_j(t)$  za svaki  $t$  zadovoljava

$$p_t(y) := \frac{d}{dy} Q^j\{F_j(t) \leq y\} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{d}{dy} Q^j\{G_i(t) \leq y\} = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_t^i(y), \quad (3.7)$$

gdje su  $\lambda_i$  strogo pozitivne konstante takve da je  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ . Lokalna volatilitnost  $\sigma$  izvodi se Fokker-Planck jednadžbom, a izvod pogledajte u [3]. Rezultat izvoda je

$$\sigma(t, y) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^2(t, y) p_t^i(y)}{\sum_{i=1}^n \lambda_i y^2 p_t^i(y)}}.$$

Tada (3.6) postaje

$$dF_j(t) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i v_i^2(t, F_j(t)) p_t^i(F_j(t))}{\sum_{i=1}^n \lambda_i F_j(t)^2 p_t^i(F_j(t))}} F_j(t) dB_t.$$

Brigo i Mercurio su uzeli poseban slučaj ove generalne dinamike i pretpostavili da za svaki  $i$  vrijedi

$$v_i(t, y) = \sigma_i(t)y,$$

gdje su  $\sigma_i$  determinističke i neprekidne funkcije vremena ograničene odozgo i odozdo pozitivnim konstantama. Marginalna gustoća za  $G_i(t)$  za svaki  $t$  je lognormalna i dana s

$$p_t^i(y) = \frac{1}{yV_i(t)\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2V_i^2(t)} \left[\ln \frac{y}{F_j(0)} + \frac{1}{2}V_i^2(t)\right]^2\right\}, \quad (3.8)$$

gdje je

$$V_i(t) := \sqrt{\int_0^t \sigma_i^2(u) du}.$$

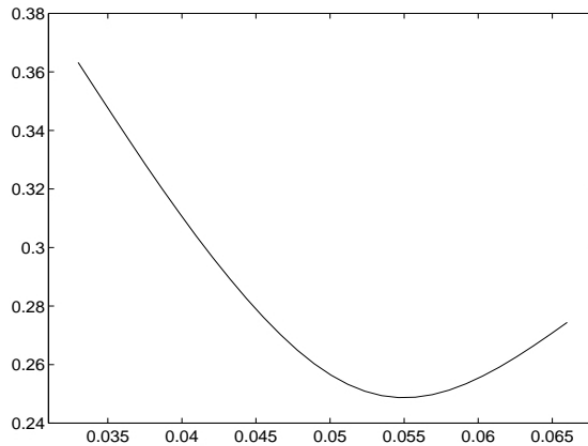
**Propozicija 3.3.1.** *Pretpostavimo da je svaki  $\sigma_i$  neprekidna i ograničena funkcija strogo pozitivnim konstantama te da postoji  $\varepsilon > 0$  takav da  $\sigma_i(t) = \sigma_0 > 0$  za svaki  $t \in [0, \varepsilon]$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Tada ako definiramo  $v(t, y)$  kao*

$$v(t, y) := \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_i^2(t) \frac{1}{V_i(t)} \exp\left\{-\frac{1}{2V_i^2(t)} \left[\ln \frac{y}{F_j(0)} + \frac{1}{2} V_i^2(t)\right]^2\right\}}{\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{1}{V_i(t)} \exp\left\{-\frac{1}{2V_i^2(t)} \left[\ln \frac{y}{F_j(0)} + \frac{1}{20} V_i^2(t)\right]^2\right\}}},$$

za  $(t, y) > (0, 0)$  i  $v(t, y) = \sigma_0$  za  $(t, y) = (0, F_j(0))$ , onda stohastička diferencijalna jednačina

$$dF_j(t) = v(t, F_j(t)) F_j(t) dB_t \quad (3.9)$$

ima jedinstveno rješenje čija je granična gustoća (3.8) dana konveksnom kombinacijom (3.7).



Slika 3.3: Krivulja podrazumijevane volatilitnosti u ovisnosti o  $K$  za model dan s (3.10), gdje je  $T_{j-1} = 1$ ,  $n = 3$ ,  $(V_1(1), V_2(1), V_3(1)) = (0.6, 0.1, 0.2)$ ,  $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0.2, 0.3, 0.5)$  i  $F_j(0) = 0.055$ . Slika je preuzeta iz [3]

Ova propozicija daje nam izraz za koeficijent difuzije u stohastičkoj diferencijalnoj jednadžbi (3.6), a njen dokaz možete pogledati u [2]. *Caplet* cijena modela (3.9) dana je s

$$\text{Cpl}(0, T_{j-1}, T_j, \tau_j, N, K) = \tau_j NP(0, T_j) \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{Bl}(K, F_j(0), V_i(T_{j-1})), \quad (3.10)$$

a vodi do smiješka volatilnosti. Na slici 3.3 vidimo oblik smiješka. Primijetimo da krivulja ima minimum točno u  $K = F_j(0)$ . Ovo svojstvo čini model prigodnim za dobivanje smiješka u procesima čija je krivulja volatilnosti ravna ili nakošena.

### 3.4 Pomaknuti mješoviti lognormalni model (*The Shifted Lognormal-Mixture Model, SLM*)

Glavni cilj nam je postići što širi spektar struktura krivulje podrazumijevane volatilnosti. Brigo i Mercurio također su predložili jednostavan način za generalizaciju dinamike (3.9) te pretpostavili da je *forward-rate* proces dan s

$$F_j(t) = \alpha + \tilde{F}_j(t), \quad (3.11)$$

gdje je  $\alpha$  realna konstanta, a  $\tilde{F}_j(t)$  proces koji prati LM dinamiku (3.9). Analitički izraz za graničnu funkciju gustoće je

$$p_t(y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{1}{(y - \alpha) V_i(t) \sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2V_i^2(t)} \left[ \ln \frac{y - \alpha}{F_j(0) - \alpha} + \frac{1}{2} V_i^2(t) \right]^2 \right\}, y > \alpha.$$

Itôvom formulom dobivamo stohastičku diferencijalnu jednadžbu procesa (3.11)

$$dF_j(t) = v(t, F_j(T) - \alpha)(F_j(t) - \alpha)dB_t.$$

Ovaj model očuvao je analitičku fleksibilnost originalnog procesa  $\tilde{F}_j$  te je *caplet* cijena dana s

$$\text{Cpl}(t, T_{j-1}, T_j, \tau_j, N, K) = \tau_j NP(t, T_j) \sum_{i=1}^n \lambda_i \text{Bl}(K - \alpha, F_j(0) - \alpha, V_i(T_{j-1})).$$

Parametar  $\alpha$  utječe na oblik krivulje volatilnosti na dva načina. Prvo, promjena  $\alpha$  dovodi do paralelnog pomaka krivulje. Drugo, ako je  $\alpha > 0$  (odnosno,  $\alpha < 0$ ), minimum krivulje se postiže za manji (odnosno, veći)  $K$  od minimuma krivulje modela danog s (3.10). Ovaj

parametar može se koristiti kako bi se dodala asimetrija oko minimuma krivulje modela (3.10).

### 3.5 Mješoviti lognormalni model s različitim očekivanjima (A Lognormal-Mixture with Different Means, LMDM)

Pogledajmo još dva modela iz klase analitički fleksibilnih modela koje su predložili Brigo, Mercurio i Sartorelli 2003. godine. *Forward-rate* procesi u ovim modelima imaju veliku prednost zato što su fleksibilniji, bar što se tiče *caplet* krivulja volatilnosti.

Prvi model je LMDM gdje su gustoće  $p_i^j$  i dalje lognormalne, ali pretpostavljamo da su sada njihova očekivanja drugačija. Zapravo, pretpostavljamo da je dinamika procesa  $G_i$  jednaka

$$dG_i(t) = \mu_i(t)G_i(t)dt + \sigma_i(t)G_i(t)dB_t, i = 1, \dots, n, G_i(0) = F_j(0),$$

gdje  $\sigma_i$  zadovoljavaju uvjete iz odjeljka 3.3, a  $\mu_i$  su determinističke funkcije vremena. Tada je gustoća od  $G_i$  u vremenu  $t$  dana s

$$p_i^j(y) = \frac{1}{yV_i(t)\sqrt{2\pi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2V_i^2(t)} \left[ \ln \frac{y}{F_j(0)} - M_i(t) + \frac{1}{2}V_i^2(t) \right]^2 \right\}, \quad (3.12)$$

gdje je

$$M_i(t) := \int_0^t \mu_i(u)du,$$

s funkcijama  $V_i$  definiranim kao u (3.8). Funkcije  $\mu_i$  ne mogu biti proizvoljno izabrane, već moraju zadovoljavati

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i e^{M_i(t)} = 1, \forall t > 0,$$

zato što  $p_i(y) = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i^j(y)$  mora imati konstantno očekivanje jednako  $F_j(0)$ . Kao i prije, uzet ćemo koeficijent difuzije  $\psi(\cdot, \cdot)$  takav da stohastička diferencijalna jednadžba

$$dF_j(t) = \psi(t, F_j(t))F_j(t)dB_t \quad (3.13)$$



ima rješenje s marginalnom gustoćom  $p_t(y)$ . Ponovno, korištenjem Fokker-Planck jednadžbe za procese  $F_j$  i  $G_i$  dobivamo

$$\begin{aligned} \psi(t, y)^2 &:= v(t, y)^2 + \frac{2 \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i(t) \int_y^{+\infty} x p_t^i(x) dx}{y^2 \sum_{i=1}^n \lambda_i p_t^i(y)} \\ &= v(t, y)^2 + \frac{2 F_j(0) \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i(t) e^{M_i(t)} \Phi\left(\frac{\ln \frac{F_j(0)}{y} + M_i(t) + \frac{1}{2} V_i^2(t)}{V_i(t)}\right)}{y^2 \sum_{i=1}^n \lambda_i p_t^i(y)} \end{aligned} \quad (3.14)$$

s funkcijom  $v$  definiranom u Propoziciji 3.3.1, tj

$$v(t, y)^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma_i(t)^2 p_t^i(y)}{\sum_{i=1}^n \lambda_i p_t^i(y)},$$

s novim gustoćama  $p_t^i$  danima formulom (3.12). Koeficijent  $\psi$  nije nužno dobro definiran jer u izrazu (3.14) desna strana može poprimiti negativnu vrijednost za izbor nekih osnovnih parametara. Zato su Brigo, Mercurio i Sartorelli izveli uvjete pod kojima je garantirana strogo pozitivna vrijednost  $\psi(t, y)^2$ . Uvjete navodimo u obliku leme, čiji dokaz možete pogledati u [2].

**Lema 3.5.1.** *Pretpostavimo da:*

i) Postoji  $n' \in \{1, \dots, n\}$  takav da za svaki  $t \in [0, T_{j-1}]$ ,  $\mu_i(t) \geq 0$  za svaki  $i = 1, \dots, n$ ,  
 $i \neq n'$  i  $\mu_{n'} \leq 0$ .

ii) Uvjet

$$\frac{V_i^2(t)}{2} - \frac{2V_i^2(t)}{\sigma_i^2(t)} \mu_i(t) > \frac{V_{n'}^2(t)}{2} - \frac{2V_{n'}^2(t)}{\sigma_{n'}^2(t)} \mu_{n'}(t)$$

je zadovoljen za svaki  $t \in \langle 0, T_{j-1} \rangle$  i za svaki  $i \neq n'$ .

Tada je funkcija  $\psi^2$  u (3.14) strogo pozitivna na  $\langle 0, T_{j-1} \rangle \times \langle 0, +\infty \rangle$ .

Brigo, Mercurio i Sartorelli također su dokazali sljedeću propoziciju o postojanju i jedinstvenosti rješenja stohastičke diferencijalne jednadžbe (3.13), a dokaz možete pogledati u [2].

**Propozicija 3.5.2.** *Pretpostavimo da je svaka  $\sigma_i$  neprekidna i ograničena odozdo pozitivnom konstantom te da postoji  $\varepsilon > 0$  takav da  $\sigma_i(t) = \sigma_0 > 0$  za svaki  $t \in [0, \varepsilon]$  i  $i = 1, \dots, n$ . Pretpostavimo još da je svaka  $\mu_i$  neprekidna, da vrijedi  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e^{M_i(t)} = 1, \forall t > 0$  i da je  $\mu_i(t) = \mu > 0$  za svaki  $t \in [0, \varepsilon]$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Tada, pod uvjetima Leme 3.5.1, stohastička*

diferencijalna jednadžba (3.13) ima jedinstveno rješenje čija je granična gustoća dana konveksnom kombinacijom lognormalnih gustoća (3.12).

Caplet cijena dana je s

$$\text{Cpl}(0, T_{j-1}, T_j, \tau_j, K) = \tau_j P(0, T_j) \sum_{i=1}^n \lambda_i e^{M_i(T_{j-1})} \text{Bl}\left(K e^{-M_i(T_{j-1})}, F_j(0), V_i(T_{j-1})\right).$$

Ova cijena također vodi do smiješka volatiliteti te ne-nul drift u dinamici procesa  $G_i$  dopušta stvaranje strmijih i kosijih krivulja s minimumima daleko od minimuma krivulje modela danog s (3.10).

### 3.6 Procesi sinusa hiperbolnog (*Hyperbolic-Sine Processes*)

U drugom slučaju iz razreda analitički fleksibilnih modela pretpostavljamo da osnovni procesi  $G_i$  prerastaju u procese hiperbolnog sinusa

$$G_i(t) = \beta_i(t) \sinh \left[ \int_0^t \alpha_i(u) dB_u - l_i \right], i = 1, \dots, n, G_i(0) = F_j(0),$$

gdje su  $\alpha_i$  pozitivne determinističke funkcije vremena,  $l_i$  negativne konstante i  $\beta_i$  jednake

$$\beta_i(t) = \frac{F_j(0) e^{-\frac{1}{2} A_i^2(t)}}{\sinh(-\alpha_i l_i)},$$

gdje definiramo  $A_i(t) := \sqrt{\int_0^t \alpha_i^2(u) du}$ . Svaki  $G_i$  je tada definiran kao rastuća funkcija vremenski promjenjivog Brownovog gibanja i pretvara se u

$$dG_i(t) = \alpha_i(t) \sqrt{\beta_i^2(t) + G_i^2(t)} dB_t, i = 1, \dots, n.$$

Kumulativna funkcija distribucije za proces  $G_i$  za svaki  $t$  je tada

$$\begin{aligned} Q^j\{G_i(t) \leq y\} &= Q^j \left\{ \int_0^t \alpha_i(u) dB_u \leq l_i + \sinh^{-1} \left( \frac{y}{\beta_i(t)} \right) \right\} \\ &= \Phi \left( \frac{l_i}{A_i(t)} + \frac{1}{A_i(t)} \sinh^{-1} \left( \frac{y}{\beta_i(t)} \right) \right), \end{aligned}$$

a funkcija gustoće

$$p_i^j(y) = \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2A_i^2(t)} \left[l_i + \sinh^{-1}\left(\frac{y}{\beta_i(t)}\right)\right]^2\right\}}{A_i(t) \sqrt{2\pi} \sqrt{\beta_i^2(t) + y^2}}. \quad (3.15)$$

Integracijom dobijemo i *caplet* cijenu

$$\begin{aligned} \text{Cpl}(0, T_{j-1}, T_j, \tau_j, K) &= \tau_j P(0, T_j) \left[ \frac{F_j(0)}{2 \sinh(-l_i)} \left( e^{-l_i} \Phi(\tilde{y}_i(T_{j-1}) + A_i(T_{j-1})) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e^{l_i} \Phi(\tilde{y}_i(T_{j-1}) - A_i(T_{j-1})) \right) - K \Phi(\tilde{y}_i(T_{j-1})) \right], \\ \tilde{y}_i(T) &:= -\frac{l_i}{A_i(T)} - \frac{1}{A_i(T)} \sinh^{-1}\left(\frac{K}{\beta_i(T)}\right). \end{aligned}$$

Ova cijena vodi do rastućeg strmog uzorka u krivulji podrazumijevane volatilnosti. Dakle, možemo se nadati da će mješavina gustoća (3.15) dovesti do još strmije i kosije krivulje od one LM modela. Zapravo, upravo takav slučaj i imamo. Model mješovitih sinus hiperbolnih gustoća (*Hyperbolic-sine density mixture, HSDM*) dan je s

$$\begin{aligned} dF_j(t) &= \chi(t, F_j(t)) dB_t \quad (3.16) \\ \chi(t, y) &:= \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \frac{\alpha_i^2(t) \sqrt{\beta_i(t)^2 + y^2}}{A_i(t)} \exp\left\{-\frac{1}{2A_i^2(t)} \left[l_i + \sinh^{-1}\left(\frac{y}{\beta_i(t)}\right)\right]^2\right\}}{\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{A_i(t) \sqrt{\beta_i(t)^2 + y^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2A_i^2(t)} \left[l_i + \sinh^{-1}\left(\frac{y}{\beta_i(t)}\right)\right]^2\right\}}}, (t, y) > (0, 0). \end{aligned}$$

Kao i u prijašnjim mješovitim lognormalnim modelima, i za ovu jednadžbu nam trebaju neke pretpostavke s obzirom da  $\chi$  općenito nije neprekidna u  $(0, F_j(0))$ . Brigo, Mercurio i Sartorelli dokazali su sljedeću propoziciju koja govori o postojanju i rješenju ovakve stohastičke diferencijalne jednadžbe, a čiji dokaz možete pogledati u [2].

**Propozicija 3.6.1.** *Pretpostavimo da je svaka  $\alpha_i$  neprekidna i ograničena odozdo pozitivnom konstantom, da postoji  $\varepsilon > 0$  takav da  $\alpha_i(t) = \alpha_0 > 0$  za svaki  $t \in [0, \varepsilon]$ ,  $i = 1, \dots, n$  te da su svi  $l_i$  jednaki. Tada, postavljanjem  $\chi(0, F_j(0)) = \alpha_0$  imamo da za svaki  $t \in [0, T_{j-1}]$  vrijedi*

$$C \leq \chi^2(t, y) \leq D(1 + y^2).$$

Nadalje, jednadžba (3.16) ima jedinstveno rješenje.

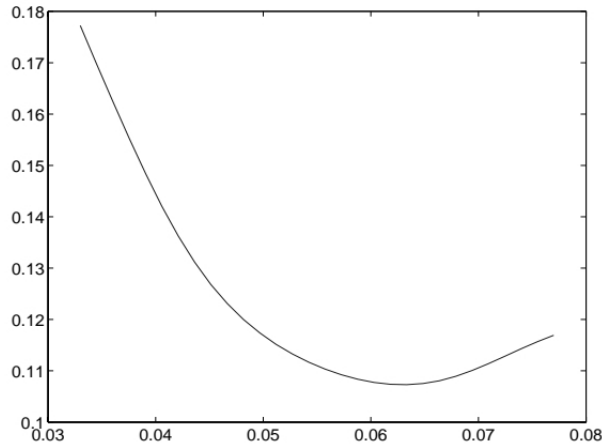
Caplet cijena ovog modela dana je s

$$\begin{aligned} \text{Cpl}(0, T_{j-1}, T_j, \tau_j, K) = & \tau_j P(0, T_j) \sum_{i=1}^n \lambda_i \left[ \frac{F_j(0)}{2 \sinh(-l_i)} \left( e^{-l_i} \Phi(\tilde{y}_i(T_{j-1}) + A_i(T_{j-1})) \right. \right. \\ & \left. \left. - e^{l_i} \Phi(\tilde{y}_i(T_{j-1}) - A_i(T_{j-1})) \right) - K \Phi(\tilde{y}_i(T_{j-1})) \right], \end{aligned} \quad (3.17)$$

gdje je

$$\tilde{y}_i(T) := -\frac{l_i}{A_i(T)} - \frac{1}{A_i(T)} \sinh^{-1} \left( \frac{K}{\beta_i(T)} \right).$$

Na slici 3.4 vidimo da (3.17) vodi do strme kosine u krivulji podrazumijevane volatilnosti, kao što smo i očekivali.



Slika 3.4: Krivulja podrazumijevane volatilnosti u ovisnosti o  $K$  za model dan s (3.17), gdje je  $T_{j-1} = 1, T_j = 1.5, \tau_j = 0.5, n = 2, (A_1(1), A_2(1)) = (0.01, 0.04), (l_1, l_2) = (-0.056, -0.408), (\lambda_1, \lambda_2) = (0.1, 0.9)$  i  $F_j(0) = 0.055$ . Slika je preuzeta iz [3].



# Bibliografija

- [1] A. Babić, *Englesko-hrvatski glosar bankarstva, osiguranja i ostalih financijskih usluga*, Ministarstvo vanjskih poslova i europskih integracija, Zagreb, 2005.
- [2] D. Brigo i F. Mercurio, *A deterministic-shift extension of analytically-tractable and time-homogeneous short-rate models*, Springer, 2001.
- [3] ———, *Interest Rate Models: Theory and Practice.*, Springer, 2006.
- [4] B. Dupire, *Pricing with a Smile*, RISK Magazine (1994.), 18–20.
- [5] D. Lamberton i B. Lapeyre, *Introduction to Stochastic Calculus Applied to Finance*, Chapman & Hall, 2008.
- [6] F. D. Rouah, *Derivaton of Local Volatility*, <https://www.frouah.com/pages/finmath.html>, posjećeno 12.9.2022.
- [7] Z. Vondraček, *Skripta iz Financijskog modeliranja*, <https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/2fm18-predavanja.html>, posjećena 12.9.2022.



# Sažetak

U ovom radu promatrali smo modele lokalne volatilnosti. Nakon početnog uvođenja potrebnih preliminarija, proučili smo Dupireovu formulu, Derman-Kani formulu te lokalnu volatilnost kao funkciju Black-Scholesove podrazumijevane volatilnosti i opisali izvođenje tih parcijalnih diferencijalnih jednačbi. Treći dio rada sastoji od samih modela, odnosno prikaza njihovih dinamika. Pomaknuti lognormalni model, kao i model konstantne elastičnosti varijance, postiže kosi smiješak volatilnosti, dok konveksne kombinacije lognormalnih gustoća pružaju bolju aproksimaciju smiješka volatilnosti. Mješoviti lognormalni model s različitim očekivanjima i model mješovitih sinus hiperbolnih gustoća, koje su razvili Brigo i Mercurio, ipak su najbolji među njima, odnosno zadovoljavaju veći opseg struktura krivulje podrazumijevane volatilnosti.





# Summary

In this thesis, we have observed local volatility models. After introducing needed preliminaries, we have studied Dupire's formula, formula by Derman and Kani and local volatility as a function of Black-Scholes implied volatility. Moreover, we have described derivation of their partial differential equations. The third part consists of local volatility models and the representation of their dynamics. The shifted lognormal model, as well as the constant elasticity of variance model, achieves only a skewed smile, while lognormal mixtures provide a better approximation of the volatility smile. However, a lognormal-mixture with different means and hyperbolic sine density mixture, developed by Brigo and Mercurio, are the best among these models, that is they accommodate rather general structures of the local volatility curve.



# Životopis

Rođena sam 9. travnja 1996. godine u Zagrebu. Pohađala sam osnovnu školu Ivana Grande te sam ju završila 2010. godine. Zatim sam školske godine 2010./2011. upisala Gimnaziju Sesvete koju sam završila 2014. godine. U akademskoj godini 2014./2015. upisala sam preddiplomski sveučilišni studij Matematike na matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu te sam ga završila 2017. godine i stekla titulu sveučilišnog prvostupnika matematike (univ. bacc. math.) Iste godine upisala sam diplomski sveučilišni studij Financijske i poslovne matematike na matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu kojeg ovim radom završavam.