

# Algebarske metode u teoriji grafova

---

**Kurtoić, Tomislav**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:525638>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-07-25**



*Repository / Repozitorij:*

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



**SVEUČILIŠTE U ZAGREBU**  
**PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET**  
**MATEMATIČKI ODSJEK**

Tomislav Kurtoić

**ALGEBARSKE METODE U TEORIJI**  
**GRAFOVA**

Diplomski rad

Voditelj rada:  
doc. dr. sc. Slaven Kožić

Zagreb, rujan, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana \_\_\_\_\_ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. \_\_\_\_\_, predsjednik
2. \_\_\_\_\_, član
3. \_\_\_\_\_, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom \_\_\_\_\_.

Potpisi članova povjerenstva:

1. \_\_\_\_\_
2. \_\_\_\_\_
3. \_\_\_\_\_

*Svima koji su mi pomogli pri izradi ovog rada svojim savjetima, preporukama i ostalim ne tako beznačajnim sitnicama.*

# Sadržaj

<b>Sadržaj</b>	<b>iv</b>
<b>Uvod</b>	<b>2</b>
<b>1 Osnovni pojmovi i rezultati</b>	<b>3</b>
1.1 Linearna algebra . . . . .	3
1.2 Teorija grafova . . . . .	6
<b>2 Matrica susjedstva</b>	<b>13</b>
2.1 Osnovni rezultati . . . . .	13
2.2 Matrica susjedstva težinskog grafa . . . . .	18
2.3 Matrica susjedstva usmjerenog grafa . . . . .	20
<b>3 Matrica incidencije</b>	<b>23</b>
3.1 Matrica incidencije usmjerenog grafa . . . . .	23
3.2 Matrica incidencije neusmjerenog grafa . . . . .	29
<b>4 Laplaceova matrica</b>	<b>31</b>
<b>5 Matrica udaljenosti stabla</b>	<b>35</b>
<b>6 Matrica otpora</b>	<b>39</b>
6.1 Generalizirani inverz matrice . . . . .	39
6.2 Osnovna svojstva matrice otpora . . . . .	41
<b>Bibliografija</b>	<b>45</b>

# Uvod

Posvuda u stvarnom svijetu postoje prirodna ili umjetno napravljena povezivanja između raznih objekata, pojmova, bića i ljudi. Jedan od načina prikazivanja takvih mreža je pomoću grafova gdje će nam elementi koje povezujemo biti vrhovi, a zajedničke poveznice bridovi. Teorija grafova je grana matematike koja se bavi proučavanjem grafova. Grafovima pridružujemo razne matrice koje sadrže mnoštvo informacija o danom grafu. Način otkrivanja svojstava grafa iz nekih njegovih matrica je primjenom algebarskih metoda poput određivanja nulprostora, ranga, defekta, svojstvenih vrijednosti i vektora i tako dalje. U ovom radu bavit ćemo se matricama susjedstva, incidencije, Laplaceovom matricom, matricom udaljenosti stabla te matricom otpora. Dat ćemo neke primjere primjene iz stvarnog svijeta, pokazati neka zanimljiva svojstva navedenih matrica te interpretirati razne rezultate primjene algebarskih metoda na pojedine matrice.

Početni dio ovog rada, odnosno prvo poglavlje prati knjige [4] i [1]. Poglavlje sadrži sažetak bitnih definicija, svojstava, teorema i rezultata vezanih uz teoriju grafova i linearnu algebru koje ćemo koristiti u daljnjem radu.

Ostatak rada je podijeljeno u poglavlja ovisno o matrici koju pridružujemo grafu. Promatrat ćemo matrice susjedstva, incidencije, udaljenosti stabla, otpora i Laplaceovu matricu. Drugo, treće i četvrto poglavlje prate knjige [2] i [3]. Peto i šesto poglavlje prate samo knjigu [2].

Prva matrica koju promatramo je matrica susjedstva. Presentirat ćemo način određivanja matrice susjedstva za jednostavne bestežinske grafove, težinske grafove i konačno za usmjerene jednostavne grafove. Dat ćemo primjere matrica susjedstva na dva konkretna grafa i njima pokazati praktičnu primjenu jednog od bazičnih teorema o broju šetnji određene duljine. U ostatku poglavlja o matrici susjedstva iskazat ćemo i dokazati razne rezultate koji nam govore o matrici i grafu te o njihovoj vezi.

Slično kao u poglavlju o matrici susjedstva, u poglavlju o matrici incidencije dajemo stvarne primjere njene primjene te dokazujemo Kirchhoffov zakon primjenom metoda linearne algebre na matricu incidencije usmjerenog grafa. Ideju za taj primjer primjene nalazimo u knjizi [5]. Osim usmjerenih grafova definirat ćemo matricu incidencije i za neusmjerene grafove te dati primjer određivanja takve matrice.

Četvrto poglavlje bavi se proučavanjem Laplaceove matrice koja je pozitivno semidefinitna

te za posljedicu ima nenegativne svojstvene vrijednosti koje nam govore korisne stvari o grafu i načinu njegove povezanosti. Osim proučavanja svojstava njenih svojstvenih vrijednosti, u ovom poglavlju smo dokazali i osnovni teorem o rangui i komplementu Laplaceove matrice te uspostavili vezu s matricama koje smo proučavali u ranijim poglavljima.

Peto poglavlje promatra matricu udaljenosti stabla. Definiramo matricu i njene elemente te dajemo primjer njenog određivanja iz grafa. Pokazujemo razne rezultate o toj matrici među kojima je i tvrdnja da determinanta matrice udaljenosti ne ovisi o izgledu stabla već samo o broju vrhova. Sve leme koje iznosimo u ovom poglavlju služe za elegantno dokazivanje teorema o jednakosti koja povezuje matricu udaljenosti stabla i Laplaceovu matricu.

Šesto poglavlje se bavi matricom otpora, njenim svojstvima i povezanosti s Laplaceovom matricom. Dolazimo do zaključka da je matrica udaljenosti stabla poseban slučaj matrice otpora. Glavni rezultat poglavlja je teorem koji nam daje eksplicitnu formulu za inverz matrice otpora izražen u terminima pripadne Laplaceove matrice.

# Poglavlje 1

## Osnovni pojmovi i rezultati

### 1.1 Linearna algebra

U ovom dijelu prvog poglavlja ponavljamo osnovne pojmove prva tri poglavlja knjige [1].

Neka je  $\mathbb{R}^n$   $n$ -dimenzionalni realni prostor. Element  $x$  prostora  $\mathbb{R}^n$  je uređena  $n$ -torka  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  gdje su  $x_1, \dots, x_n$  realni brojevi. Elementi  $x$  zovu se **vektori**, a brojevi  $x_1, \dots, x_n$  **koordinate** vektora  $x$ . Na primjer  $\mathbb{R}^2$  je vektorski prostor kojeg identificiramo s ravninom u kojoj možemo uvesti koordinatni sustav pomoću kojeg elemente ravnine identificiramo s njihovim koordinatama kao  $x = (x, y)$  ili  $x = (x_1, x_2)$ .

Neka su  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  i  $y = (y_1, \dots, y_n)$  i  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Definiramo **zbroj vektora**  $x$  i  $y$  kao  $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$  i **produkt vektora  $x$  sa skalarom  $\alpha$**  kao  $\alpha \cdot x = (\alpha x_1, \dots, \alpha x_n)$ .

Neka je  $\mathbb{F}$  polje i  $V$  neprazan skup na kojem su zadane binarna operacija zbrajanja  $+$  :  $V \times V \rightarrow V$  i operacija množenja skalarima iz polja  $\mathbb{F}$ ,  $\cdot$  :  $\mathbb{F} \times V \rightarrow V$ . Kažemo da je uređena trojka  $(V, +, \cdot)$  **vektorski prostor nad poljem  $\mathbb{F}$**  ako vrijedi:

- 1)  $(x + y) + z = x + (y + z)$ , za sve  $x, y, z \in V$ ;
- 2) postoji  $0 \in V$  takva da  $x + 0 = 0 + x = x$ , za sve  $x \in V$ ;
- 3) za svaki  $x \in V$  postoji  $-x \in V$  tako da je  $x + (-x) = -x + x = 0$ ;
- 4)  $x + y = y + x$ , za sve  $x, y \in V$ ;
- 5)  $1x = x$ , za sve  $x \in V$ ;
- 6)  $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ , za sve  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$  i za sve  $x \in V$ ;
- 7)  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ , za sve  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$  i za sve  $x \in V$ ;
- 8)  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ , za sve  $\alpha \in \mathbb{F}$  i za sve  $x, y \in V$ .

Operacije zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom na  $\mathbb{R}^n$  definiraju strukturu realnog vektorskog prostora. Neutralni element za zbrajanje je **nulvektor**  $0 = (0, 0, \dots, 0)$ .



Suprotan vektor vektoru  $x = (x_1, \dots, x_n)$  je  $-x = (-x_1, \dots, -x_n)$ .

U ovom radu koristit ćemo **skalarni produkt** definiran s

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \text{ za sve } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

**Norma** je funkcija  $\| \cdot \| : V \rightarrow \mathbb{R}$  definirana kao korijen skalarnog produkta vektora  $x = (x_1, \dots, x_n)$  sa samim sobom, odnosno

$$\|x\| = (x \cdot x)^{\frac{1}{2}} = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}.$$

**Jedinični vektor** je vektor norme 1.

**Udaljenost** elemenata  $x$  i  $y$  vektorskog prostora  $V$ , na kojem je definirana norma, označavamo s  $d(x, y)$ . Udaljenost je vrijednost metrike na paru  $(x, y)$  koja je zadana s  $d(x, y) = \|x - y\|$ .

Metrika  $d$  zadovoljava svojstva:

- 1)  $d(x, y) \geq 0$ , za sve  $x, y \in V$ ;
- 2)  $d(x, y) = 0$  ako i samo ako  $x = y$ ;
- 3)  $d(x, y) = d(y, x)$ , za sve  $x, y \in V$ ;
- 4)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ , za sve  $x, y, z \in V$ .

Skup vektora  $\{e_1, \dots, e_k\}$  je **ortogonalan** ako je  $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ , za sve  $i \neq j$ .

Skup vektora  $\{e_1, \dots, e_k\}$  je **ortonormiran** ako je ortogonalan i ako je  $\|e_i\| = 1$  za sve  $i = 1, \dots, k$ .

Podskup  $B$  vektorskog prostora  $V$  je **baza** prostora  $V$  ako je  $B$  sustav izvodnica za  $V$  i linearno nezavisan.

Neka su  $V$  i  $W$  vektorski prostori nad  $\mathbb{R}$ . Preslikavanje  $A : V \rightarrow W$  zovemo **linearni operator** ako vrijedi

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y), \text{ za sve } x, y \in V \text{ i za sve } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

**Slika** preslikavanja  $T$ ,  $\text{Im}(T)$  je potprostor od  $W$  definiran sa

$$\text{Im}(T) = \{w \in W \mid w = T(v) \text{ za neki } v \in V\}.$$

**Jezgra** preslikavanja  $T$  je potprostor od  $V$

$$\text{Ker}(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0_W\},$$

gdje je  $0_W$  nulvektor vektorskog prostora  $W$ . **Rang** i **defekt** definiramo kao

$$\text{rang}(T) = \dim \text{Im}(T) \text{ i defekt}(T) = \dim \text{Ker}(T).$$

**Teorem o rang i defektu:** Neka je  $A : V \rightarrow W$  linearan operator i neka je  $\dim(V) < \infty$ . Tada je

$$\text{rang}(T) + \text{defekt}(T) = \dim V.$$

Neka je  $A : V \rightarrow W$  linearni operator, skup  $\{e_1, \dots, e_n\}$  baza za  $V$ , a skup  $\{f_1, \dots, f_m\}$  baza za  $W$ . Za svaki član baze  $V$  možemo napisati

$$T(e_i) = a_{1i}f_1 + \dots + a_{mi}f_m, \text{ za jedinstvene skalare } a_{1i}, \dots, a_{mi} \in \mathbb{F}.$$

Tada matricu operatora  $A$  definiramo kao

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

### Operacije nad matricama

Neka je  $A = (a_{ij})$  matrica i  $\lambda$  skalar, tada je  $\lambda A = (\lambda a_{ij})$ .

Neka su  $A = (a_{ij})$  i  $B = (b_{ij})$  matrice jednako broja redova i stupaca, tada je zbroj matrica  $A+B$  definiran kao matrica  $C = (c_{ij})$ ,  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ . Zbrajanje je komutativno i asocijativno. Umnožak  $m \times k$  matrice  $A = (a_{ij})$  i  $k \times n$  matrice  $B = (b_{ij})$  definiramo kao matricu  $C = (c_{ij})$ ,  $c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$ . Množenje matrica je asocijativno.

Neka je dana  $m \times n$  matrica  $A = (a_{ij})$ , tada  $n \times m$  matrica  $A^t = (a_{ji})$  koju dobivamo zamjenom redaka i stupaca zovemo **transponirana** matrica. Za svaki skalar  $\lambda$  i za sve matrice  $A$  i  $B$  za koje su izrazi s lijeve i desne strane definirani vrijede sljedeće jednakosti:

- 1)  $(A^t)^t = A$ ,
- 2)  $(\lambda A)^t = \lambda(A)^t$ ,
- 3)  $(A + B)^t = A^t + B^t$ ,
- 4)  $(AB)^t = B^t A^t$ .

### Tipovi matrica

**Nulmatrica** je matrica proizvoljnog reda kojoj su svi elementi jednaki 0.

**Matrica jedinica** je matrica proizvoljnog reda kojoj su svi elementi jednaki 1.

**Kvadratna matrica** je matrica koja ima jednak broj redaka i stupaca. **Simetrična** matrica je kvadratna matrica za koju vrijedi  $A^t = A$ .

**Antisimetrična** matrica je kvadratna matrica za koju vrijedi  $A^t = -A$ .

**Glavna dijagonala** kvadratne matrice reda  $n$ ,  $A = (a_{ij})$  je uređena  $n$ -torka  $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$  matrice  $A$ . **Dijagonalna matrica** je kvadratna matrica u kojoj su svi elementi osim elemenata glavne dijagonale jednaki 0. **Jedinična matrica** u oznaci  $I$  je dijagonalna matrica kojoj su sve vrijednosti dijagonale jednake 1.

**Trag** kvadratne matrice je zbroj vrijednosti elemenata na dijagonali. Kvadratna matrica  $A$  je **invertibilna** ako postoji matrica  $B$  takva da je  $AB = BA = I$ . Matricu  $B$  zovemo inverznom matricom matrice  $A$  i označavamo s  $B = A^{-1}$ .

### Determinante

Neka je  $A = a_{ij}$  kvadratna matrica reda  $n$ . Determinanta matrice  $A$  u oznaci  $\det A$  ili  $|A|$  je suma

$$\sum_{p \in S_n} (\text{sign } p) a_{1p(1)} a_{2p(2)} \dots a_{np(n)},$$

gdje je  $S_n$  grupa permutacija skupa  $\{1, 2, \dots, n\}$ , a  $\text{sign } p \in \{-1, 1\}$  predznak permutacije.

Neka je  $A$  kvadratna matrica, **minora**  $M_{ij}$  je determinanta matrice koja nastaje izbacivanjem  $i$ -tog reda i  $j$ -tog stupca iz matrice  $A$ .

**Kofaktor** je definiran kao  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ . Tada je Laplaceov razvoj

$$\det A = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij}.$$

### Svojtvene vrijednosti i svojstveni vektori

Ako je  $A$  kvadratna matrica, tada je polinom  $\det(\lambda I - A)$  **karakteristični polinom**, a jednačba  $\det(\lambda I - A) = 0$  **karakteristična jednačba**. Rješenja karakteristične jednačbe zovemo **svojtvene vrijednosti**. Zbroj svih svojstvenih vrijednosti jednak je tragu matrice. Kad je  $A$  simetrična matrica, svojstvene vrijednosti su sve realne.

Neka je  $A$  linearni operator. Neovisno o bazama kojima je dan matrični zapis od  $A$ , sve matrice imaju iste svojstvene vrijednosti.

Vektore  $v$  koji su različiti od nulvektora i zadovoljavaju  $A(v) = \lambda v$ , za neki  $\lambda$ , zovemo **svojstvenim vektorima**.

Kvadratnu matricu možemo dijagonalizirati ako za vektorski prostor na kojem djeluje njoj pridruženi linearni operator postoji baza koja se sastoji od njegovih svojstvenih vektora. Ako postoji baza vektorskog prostora  $V$  sačinjena od svojstvenih vektora i ako je  $P$  matrica čiji su stupci koordinate tih vektora, tada je  $P^{-1}AP$  dijagonalna matrica.

## 1.2 Teorija grafova

U ovom dijelu prvog poglavlja navest ćemo osnovne pojmove, definicije, oznake, odnosno notacije i rezultate vezane uz teoriju grafova. Koristimo se prvim poglavljem knjige [4].

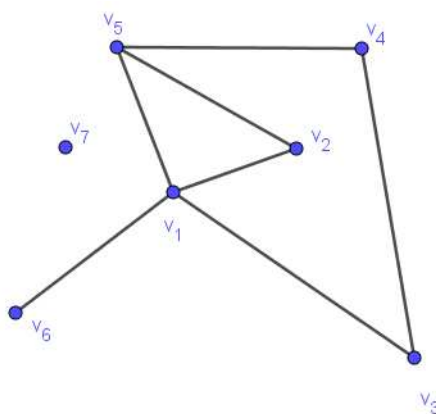
**Neusmjeren graf**, u oznaci  $G$ , je uređen par skupova  $(V, E)$ . Skup  $V$  je konačan neprazan skup točaka koje zovemo **vrhovima**, a skup  $E$  je skup dvočlanih skupova različitih parova različitih vrhova koje nazivamo **bridovima**. Ako bi bridovima dodijelili orijentaciju tada govorimo o **usmjerenom** grafu te su bridovi uređeni parovi vrhova.

Skupove vrhova i bridova koji pripadaju grafu  $G$  označavamo sa  $V(G)$  i  $E(G)$  redom.

Broj vrhova grafa zovemo **red** grafa.

Uobičajeni zapis skupova  $V$  i  $E$  su  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  i  $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$ .

**Primjer 1.2.1.** Odredimo skupove  $v(G)$  i  $E(G)$  grafa  $G$  na slici 1.1



Slika 1.1: Primjer 1.2.1.

Skup vrhova je dan sa  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ ,  
a skup bridova sa  $E(G) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_1, v_5\}, \{v_1, v_6\}, \{v_2, v_5\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_4, v_5\}\}$ .

**Jednostavan** graf je graf u kojem su dva vrha povezana najviše jednim bridom. Takav graf dan u je primjeru 1.2.1.

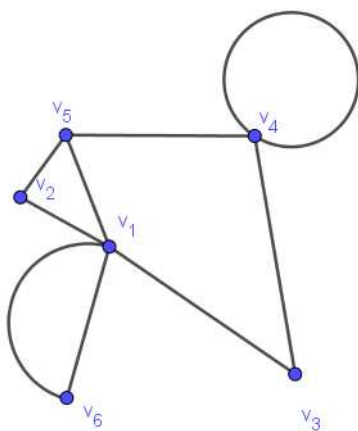
**Multigraf** je graf kojem je skup  $E(G)$  multiskup dvočlanih multiskupova vrhova. Multigraf dozvoljava povezanost dvaju vrhova s više od jednog brida. Također, dozvoljava **petlje**, bridove koji spajaju vrh sa samim sobom. Primjer takvog grafa je na slici 1.2.

**Težinski graf** je graf u kojem su bridovima dodijeljeni realni brojevi koje zovemo **težinama**. Primjer jednog takvog grafa vidimo na slici 1.3.

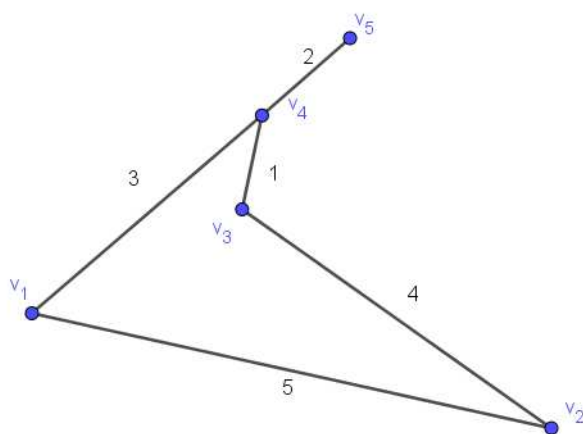
Neka brid  $e_{ij}$  povezuje vrhove  $v_i$  i  $v_j$ . Kažemo da su vrhovi  $v_i$  i  $v_j$  **incidentni** s bridom  $e_{ij}$  te da su vrhovi  $v_i$  i  $v_j$  **susjedni**. Ako su vrhovi  $v_i$  i  $v_j$  susjedni tada pišemo  $i \sim j$ .

Skup svih vrhova susjednih nekom određenom vrhu zove se **susjedstvo**.

Broj susjeda određenog vrha zovemo **stupanj** vrha. Maksimalan stupanj vrhova nekog grafa  $G$  ima oznaku  $\Delta$ , a minimalni  $\delta$ .



Slika 1.2: Multigraf



Slika 1.3: Težinski graf

**Šetnja** u grafu je alternirajući niz vrhova i bridova  $v_1, e_1, \dots, e_k, v_k$  gdje je  $e_i = \{v_i, v_{i+1}\}$ .

Šetnja koja povezuje vrhove  $v_0$  i  $v_k$  zove se šetnja  $v_0 - v_k$ .

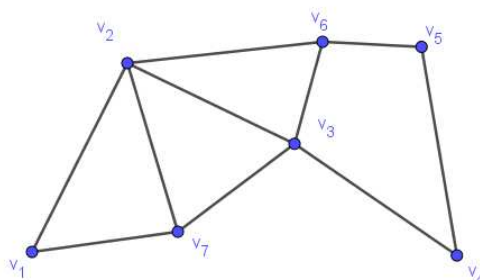
**Duljina šetnje**  $v_0 - v_k$  je broj bridova koji se nalaze u šetnji.

Šetnja je **zatvorena** ako su početna i završna točka ista točka.

**Put** je šetnja u kojoj se nijedan vrh ne ponavlja.

**Staza** je šetnja u kojoj se nijedan brid ne ponavlja.

**Ciklus** je netrivialna zatvorena staza u kojoj se ne ponavlja nijedan vrh osim početnog.



Slika 1.4: Put, staza i ciklus

**Primjer 1.2.2.** Na slici 1.4 odredimo primjere puta, staze i ciklusa.

Primjer puta:  $v_6v_2v_7v_3v_4v_5$ .

Primjer staze:  $v_3v_4v_5v_6v_3v_7$ .

Primjer ciklusa:  $v_3v_4v_5v_6v_3$ .

Graf je **povezan** ako za svaka dva vrha postoji put koji ih povezuje. Neka je  $G$  povezan graf, **udaljenost** između dvaju vrhova tog grafa je minimalna duljina puta koji ih povezuje. Ovako definirana udaljenost zadovoljava svojstva metrike.

**Dijametar** grafa je maksimalna udaljenost dvaju vrhova u grafu. **Struk** grafa je duljina najkraćeg ciklusa grafa.

Neka su  $G$  i  $H$  grafovi i neka je  $V(H) \subseteq V(G)$  i  $E(H) \subseteq E(G)$ , tada  $H$  zovemo **podgrafom** grafa  $G$ .

**Razapinjući** podgraf zadovoljava jednakost  $V(H) = V(G)$ .

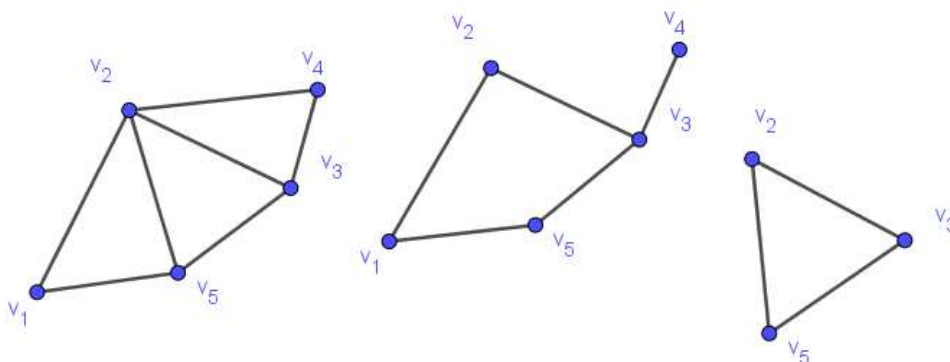
**Inducirani** podgraf sa skupom vrhova  $S$  ima skup bridova koji se sastoji od svih bridova grafa  $G$  koji povezuju vrhove u  $S$ .

Na slici 1.5 su prikazani primjeri za graf, njegov razapinjući podgraf i inducirani podgraf redom s lijeva na desno.

**Komponenta povezanosti** je svaki maksimalni povezan podgraf grafa  $G$ .

**Komplement** grafa je graf s istim vrhovima koji su povezani samo ako u  $G$  nisu bili povezani.

**Planaran** graf je graf koji se može smjestiti u ravninu tako da se svaka dva brida sastaju samo u vrhu koji im je incidentan, tj. da se nigdje drugdje ne sijeku.



Slika 1.5: Graf, raspinjući podgraf i inducirani podgraf

**Potpun** graf u oznaci  $K_n$  ima  $n$  vrhova koji su svi susjedni svim preostalim vrhovima grafa.

**Nulgraf** u oznaci  $N_n$  ima  $n$  vrhova i 0 bridova.

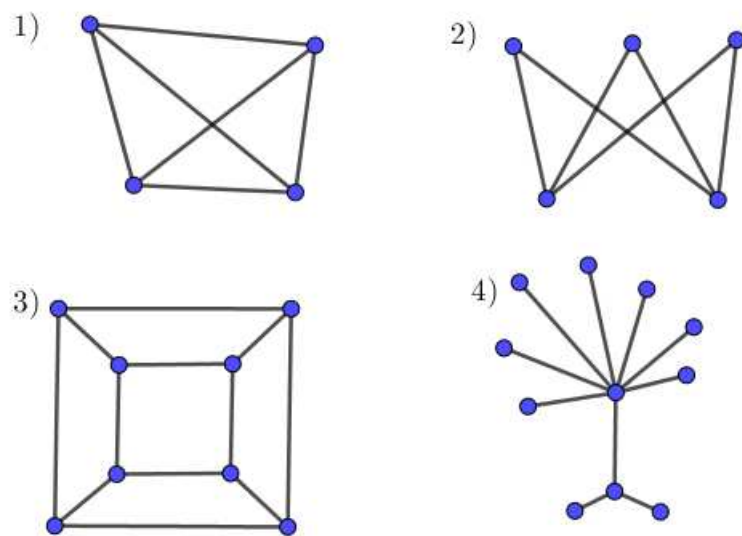
**Izolirani** vrh je vrh koji nema susjednih vrhova. **Put** s  $n$  vrhova  $P_n$  je jednostavan graf definiran sa skupom vrhova  $V(P_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$  i skupom bridova  $E(P_n) = \{\{v_i, v_{i+1}\}\}$  za sve  $i = 1, \dots, n - 1$ .

**Ciklus**  $C_n$  je jednostavan graf definiram skupovima vrhova  $V(C_n) = \{v_1, \dots, v_n\}$  i bridova  $E(C_n) = \{(v_1, v_2), \dots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)\}$ . **Potpun bipartitan** graf u oznaci  $K_{r,s}$  je graf u kojem se skup vrhova  $V$  dijeli na dva disjunktna podskupa  $V_1$  i  $V_2$  i vrijedi da je svaki vrh iz  $V_1$  susjedan samo sa svim vrhovima iz  $V_2$ . Ako skup vrhova grafa podijelimo na  $k$  disjunktnih podskupova s  $r_1, r_2, \dots, r_k$  vrhova redom i ako svaki vrh jednog podskupa vrhova ima susjedne samo sve vrhove preostalih podskupova vrhova tada je graf  **$k$ -partitan** graf s oznakom  $K_{r_1, r_2, \dots, r_n}$ .  $k$ -partitan graf kojem je broj vrhova u svakom podskupu jednak  $r$  označavamo sa  $K_{k(r)}$ . Graf  $K_{k(2)}$  se zove i  $k$ - dimenzionalni oktaedarski graf ili "cocktail party graph" te ima alternativnu oznaku  $CP_k$ .

**D-dimenzionalna kocka** u oznaci  $Q_d$  je graf čiji su vrhovi uređene  $d$ -torke nula i jedinica. Dva su vrha susjedna ako i samo ako se  $d$ -toraka razlikuje u točno jednoj koordinati.

**Stablo** je povezan graf bez ciklusa. U stablu može postojati poseban čvor koji se naziva **korijenom**, a stablo koje sadrži korijen zovemo ukorijenjenim. Ukorijenjeno stablo ima usmjerene bridove (od vrha koji je bliže korijenu do vrha koji je dalje od korijena). **List** stabla je vrh stupnja jedan.

Na slici 1.6 prikazani su 1) potpun graf  $K_4$ , 2) potpun bipartitan graf  $K_{3,2}$ , 3) 3-dimenzionalna kocka i 4) stablo.



Slika 1.6: Potpun graf, potpun bipartitan graf, 2-dimenzionalna kocka i stablo





## Poglavlje 2

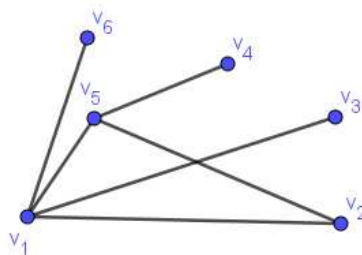
# Matrica susjedstva

U ovom poglavlju koristimo treće poglavlje knjige [2] i drugo poglavlje knjige [3].

### 2.1 Osnovni rezultati

Neka je  $G$  graf s vrhovima  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  i bridovima  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . Matrica susjedstva grafa  $G$  je  $n \times n$  matrica  $A(G) = (a_{ij})$ , gdje je  $a_{ij}$  broj bridova koji povezuju vrhove  $v_i$  i  $v_j$ . Ako je graf jednostavan, ova matrica se sastoji samo od nula i jedinica te nula na glavnoj dijagonali.

**Primjer 2.1.1.** *Odredimo matricu susjedstva grafa  $G$  na slici 2.1.*



Slika 2.1: Primjer 2.0.1.

Vidimo da graf ne sadži višestruke bridove niti petlje, stoga će matrica  $A(G)$  imati sve elemente dijagonale jednake 0, a ostale elemente jednake 1 ili 0 ovisno jesu li spojeni

bridom ili ne. Iz definicije matrice,  $i$ -ti stupac, odnosno redak odgovaraju vrhu  $v_i$  te element  $(i, j)$  matrice predstavlja susjedstvo vrhova  $v_i$  i  $v_j$ .

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Teorem 2.1.2.** *Neka graf  $G$  ima matricu susjedstva  $A = A(G)$ . Tada za sve  $k = 1, 2, \dots$  element  $(i, j)$  matrice  $A^k$  predstavlja broj šetnji  $v_i - v_j$  duljine  $k$ .*

*Dokaz.* S obzirom na to da je duljina šetnje prirodan broj, dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom. Neka je  $k = 1$ , tada je  $A^k = A$ . Element  $(i, j)$  po definiciji matrice  $A$  označava (ne)povezanost vrhova  $v_i$  i  $v_j$  što je ujedno šetnja duljine 1.

Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za  $k = n$ .

Promatramo matricu  $A^{n+1} = A^n A$ . Vidimo da je  $(A^{n+1})_{ij} = \sum_k (A^n)_{ik} \cdot A_{kj}$ .

Po pretpostavci je  $(A^n)_{il}$  broj šetnji od  $v_i$  do  $v_l$  duljine  $n$ . Također  $A_{lj}$  može biti 0 ili 1 ovisno o povezanosti  $v_l$  i  $v_j$ .

Slijedi  $(A^n)_{ij} \cdot A_{lj} = 0$  ili  $(A^n)_{il} \cdot A_{lj} = (A^n)_{il}$ .

Sumiranjem po  $l$ , odnosno po svim vrhovima susjednim vrhu  $v_j$ , dobivamo broj šetnji duljine  $n + 1$  između  $v_i$  i  $v_j$ .

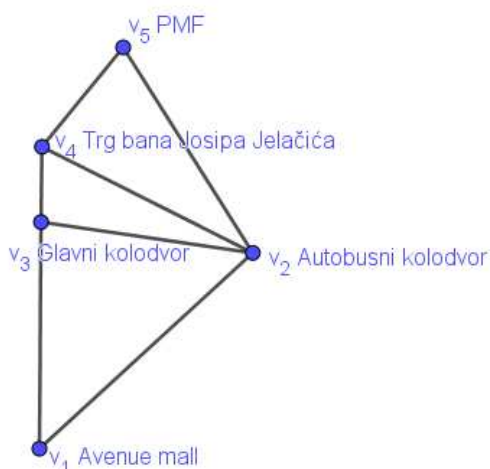
Po principu matematičke indukcije slijedi tvrdnja teorema. □

Koristeći teorem 2.1.2 možemo jednostavnije određivati rješenja problema iz stvarnog života.

Primjerice, ako želimo javnim prijevozom Zagreba doći na neko odredište s maksimalno  $n$  presjedanja tada ćemo stanice za presjedanje te početnu i završnu točku putovanja predstaviti vrhovima grafa, a povezanost dviju lokacija prometnom linijom koja ne zahtijeva presjedanje bridom. Ovakvu informaciju je korisno znati zbog mogućih poteškoća u prometu ili kvarova na određenim linijama.

**Primjer 2.1.3.** *Želimo doći od Avenue Mall-a do PMF - Matematičkog odsjeka.*

*Vrhovi grafa će nam tada biti lokacije, odnosno stanice: Avenue Mall, Glavni kolodvor, Autobusni kolodvor, Trg bana Josipa Jelačića kojeg ćemo spojiti s Kaptolom u jednu točku, Belostenčevu stanicu i PMF - Matematički odsjek također spajamo u jednu točku. Slijedi nam graf  $G$  kao na slici 2.2.*



Slika 2.2: Primjer 2.0.3.

Iz definicije matrice susjedstva dobivamo matricu  $A$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Iz matrice  $A$  vidimo da ne postoji put između  $v_1$  i  $v_5$ , odnosno od Avenue Mall-a do PMF - Matematičkog odsjeka koji se sastoji od vožnje samo jednim prijevoznim sredstvom.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Po teoremu 2.1.2 u matrici  $A^2$  elementi označavaju broj šetnji duljine 2 između  $v_i$  i  $v_j$ . Iščitavamo element  $(1, 5)$  i vidimo da postoji točno jedno putovanje do željene lokacije koji sadrži samo jedno presjedanje.

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 5 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 7 & 7 & 6 \\ 5 & 7 & 4 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 7 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Pomoću matrice  $A^3$  vidimo da je broj mogućih putovanja s dva presjedanja od  $v_1$  do  $v_5$  jednak 3. Ovako možemo nastaviti za proizvoljan broj presjedanja. Vidimo da broj šetnji između bilo koja dva vrha brzo raste ovisno o duljini šetnje i stoga je potenciranje matrice susjedstva puno brži način određivanja broja mogućih puteva određene duljine od ručnog brojanja iz grafa.

U nastavku ćemo promatrati svojstva matrica susjedstva raznih grafova.

Kako je matrica susjedstva kvadratna, korisno je doznati što više o njenim svojstvenim vrijednostima jer ju tada možemo zapisati u dijagonalnom obliku. Svojstvene vrijednosti  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  redom postavimo na dijagonalu, dok su ostale vrijednosti jednake nuli.

Matrica tada poprima oblik

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Rang dijagonalizabilne matrice jednak je broju svojstvenih vrijednosti različitih od nule računajući njihove kratnosti.

**Lema 2.1.4.** *Neka je  $G$  povezan graf s vrhovima  $v_1, \dots, v_n$  i neka je  $A$  matrica susjedstva grafa  $G$ . Neka su  $v_i$  i  $v_j$  vrhovi grafa. Ako je udaljenost  $d(v_i, v_j) = m$  tada su matrice  $I, A, A^2, \dots, A^m$  linearno nezavisne.*

*Dokaz.* Neka je  $i \neq j$ , tada ne postoji put kraći od  $m$  od vrha  $v_i$  do vrha  $v_j$ . Primjenjujemo teorem 2.1.2 na matrice  $I, A, \dots, A^{m-1}$  i vidimo da je element  $(i, j)$  jednak 0 u svakoj od njih. Jedino je u matrici  $A^m$  element  $(i, j)$  različit od 0. Slijedi da  $A^m$  nije linearna kombinacija nižih potencija od  $A$ . Za dokaz tvrdnje linearne nezavisnosti skupa  $A^0, A, A^2, \dots, A^m$  provodimo matematičku indukciju po potencijama  $m$ . Neka je  $m = 1$  tada je  $A^m = A^1 = A$  i niz matrica sadrži samo matrice  $I$  i  $A$ . Očito matrica  $A$  nije linearna kombinacija jedinične matrice te su stoga matrice  $A$  i  $I$  linearno nezavisne. Pretpostavimo da tvrdnja leme vrijedi za sve prirodne brojeve  $1, \dots, m$ . Ako u grafu ne postoje vrhovi udaljeni za  $m + 1$ , onda tvrdnja slijedi iz pretpostavke. Ako u grafu  $G$  postoje neka dva vrha udaljeni za  $m + 1$ , onda postoje i vrhovi udaljeni za  $m$ . Stoga su prema pretpostavci potencije  $A^0, \dots, A^m$  linearno nezavisne. Element na poziciji  $(i, j)$  matrice  $A^{m+1}$  je različit od nule, dok je u matricama  $A^0, \dots, A^m$  jednak nuli. Slijedi da  $A^{m+1}$  nije linearna kombinacija  $A^0, \dots, A^m$ , odnosno  $A^0, \dots, A^{m+1}$  su linearno nezavisne.

□

**Teorem 2.1.5.** 1) Svojstvene vrijednosti grafa  $K_n$  su  $n - 1$  s kratnosti 1 i  $-1$  s kratnosti  $n - 1$ .

2) Svojstvene vrijednosti grafa  $K_{p,q}$  su  $\sqrt{pq}$ ,  $-\sqrt{pq}$  i 0 kratnosti  $p + q - 2$ .

*Dokaz.* 1) Promotrimo matricu jedinica  $J_n$ , ona ima samo jednu svojstvenu vrijednost različitu od 0 i to je  $n$  s kratnosti 1. Nula ima kratnost  $n - 1$ .

Prateći svojstva matrice susjedstva vidimo da vrijedi  $A(G) = J_n - I_n$ . Svojstveni vektor matrice  $J_n$  za svojstvenu vrijednost  $n$  je vektor  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$ . Sada je

$$A(G)\mathbf{1} = (J_n - I_n)\mathbf{1} = J_n\mathbf{1} - I_n\mathbf{1},$$

odnosno nova svojstvena vrijednost jednaka je  $n - 1$  kratnosti 1. Za svojstvenu vrijednost 0 matrice  $J_n$  vrijedi  $J_n x = 0$ , za  $x = (x_1, \dots, x_n)$  i slijedi  $x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} = x_n$ . Dobivamo  $n - 1$  linearno nezavisnih svojstvenih vektora oblika  $e_n - e_i$  gdje je  $e_i$  vektor s koordinatom  $i$  vrijednosti jedan i nula za sve ostale koordinate,  $e_i$  uzimamo za sve  $1 \leq i \leq n - 1$ . Vrijedi

$$A(G)(e_n - e_i) = (J_n - I_n)(e_n - e_i) = J_n(e_n - e_i) - I_n(e_n - e_i) = 0 - (e_n - e_i) = -1 \cdot (e_n - e_i).$$

Takvih vektora ima  $n - 1$ , odnosno matrici  $A(G)$  je svojstvena vrijednosti  $-1$  kratnosti  $n - 1$ .

2)

$$A(K_{p,q}) = \begin{pmatrix} 0 & J_{pq} \\ J_{qp} & 0 \end{pmatrix},$$

gdje su  $J_{pq}$  i  $J_{qp}$  matrice jedinica.

$$\text{rang}(A(K_{p,q})) = \text{rang}(J_{pq}) + \text{rang}(J_{qp}) = 2$$

S obzirom na to da je  $A(G)$  simetrična matrica, znamo da se ona uvijek može dijagonalizirati. Zbroj svih svojstvenih vrijednosti jednak je tragu matrice  $A$   $\text{tr}A = 0$ , a kako je rang matrice  $A$  jednak 2, tada postoje točno dvije svojstvene vrijednosti koje su različite od 0 te su one suprotnih vrijednosti kako bi se u zbroju poništile. Odredimo svojstvene vrijednosti različite od nule tako da riješimo jednadžbu  $Ax = \lambda x$ . Zbog činjenice da graf  $K_{p,q}$  ima dva podskupa vrhova uzimimo  $x$  kao vektor s koordinatama  $x = (\alpha, \alpha, \dots, \alpha, \beta, \beta, \dots, \beta)$  tako da koordinata jednakih  $\alpha$  ima  $p$ , a koordinata jednakih  $\beta$  ima  $q$ . Tada slijedi

$$Ax = (p\beta, \dots, p\beta, q\alpha, q\alpha, \dots) = (\lambda\alpha, \dots, \lambda\alpha, \lambda\beta, \dots, \lambda\beta).$$

Dobivamo jednakosti  $p\beta = \lambda\alpha$  i  $q\alpha = \lambda\beta$  iz kojih slijedi  $\lambda = \sqrt{pq}$ . Dakle, svojstvene vrijednosti različite od 0 su  $\sqrt{pq}$  i  $-\sqrt{pq}$   $\square$

Svojstvene vrijednosti i njihove kratnosti za grafove koje smo definirali u prvom poglavlju predstaviti ćemo pomoću tablice 2.3.

Graf	Svojtvene vijednosti	Kratnosti
$K_n$	$n-1, -1$	$1, n-1$
$K_{r,s}$	$\sqrt{rs}, 0, -\sqrt{rs}$	$1, r+s-2, 1$
$C_n$	$2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right), k = 1, \dots, n$	$2, 1, 1, \dots, 1, 2$ $n$ paran, $1, 1, \dots, 1, 2$ $n$ neparan
$P_n$	$2 \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), k = 1, \dots, n$	$1, 1, \dots, 1$
$Q_d$	$d - 2k, k = 0, 1, \dots, d$	$\binom{d}{k}, k = 0, 1, \dots, d$
$CP_{(r)}/K_{r(2)}$	$2r - 2, 0, -2$	$1, r, r - 1$

Slika 2.3: Tablica svojstvenih vrijednosti

## 2.2 Matrica susjedstva težinskog grafa

Neka je  $G$  graf s vrhovima  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  i bridovima  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . Neka svaki brid  $e_j$  ima težinu  $w_j$  za  $j = 1, \dots, m$ . Matrica susjedstva ili "matrica troška" težinskog grafa  $G$  je  $n \times n$  matrica  $A(G) = (a_{ij})$ , gdje je  $a_{ij} = w_{ij}$  težina brida koji povezuje vrhove  $v_i$  i  $v_j$ . Ako ne postoji brid koji povezuje  $v_i$  i  $v_j$  u matricu upisujemo beskonačnost.

**Primjer 2.2.1.** Odredimo matricu troška  $A_t(G)$  težinskog grafa  $G$  danog slikom 2.4.

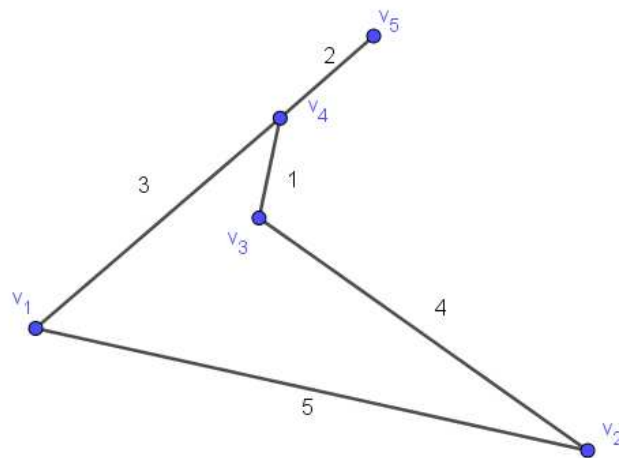
Težinsku matricu  $A_t(G)$  popunjavamo po navedenim pravilima te dobivamo

$$A(G) = \begin{pmatrix} \infty & 5 & \infty & 3 & \infty \\ 5 & \infty & 4 & \infty & \infty \\ \infty & 4 & \infty & 1 & \infty \\ 3 & \infty & 1 & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & 2 & \infty \end{pmatrix}.$$

Vidimo da značenje težina ovog grafa nije navedeno. Prema izgledu moglo bi se pretpostaviti da se radi o duljinama bridova.

Težinski grafovi se koriste u razne svrhe, mogu predstavljati udaljenosti između dva vrha, vrijeme potrebno za prijelaz iz  $v_i$  u  $v_j$ , trošak putovanja među vrhovima, kapacitet brida (primjer: bridovi su rute kojima voze putnički vlakovi, a težina brida je kapacitet vlaka koji prolazi tom rutom) i još mnogo različitih primjena.

Težinski grafovi su popularni među programerima i informatičarima. Glavno pitanje koje



Slika 2.4: Težinski graf

se prirodno postavlja je pitanje najmanje udaljenosti između neka dva vrha. Naravno, ne mora biti pitanje samo najmanje udaljenosti, može biti i pitanje najjeftinijeg puta ili najbržeg puta i slično, ovisno o kontekstu grafa i motiva promatranja istog.

S matematičkog gledišta problem se svodi na biranje minimalnog razapinjućeg stabla. Razapinjuće stablo je podgraf početnog grafa koji sadrži sve vrhove i kojem bridovi čine podskup bridova početnog grafa tako da nema ciklus i nema izoliranih vrhova. Minimalno takvo stablo je ono stablo čiji je zbroj težina bridova najmanji.

Kad se radi o malim grafovima kao u primjeru 2.2.1, tada je jednostavno ručno odrediti sva raspinjuća stabla, odrediti njihove ukupne težine i zaključiti koji je najmanji. Ako želimo, naprimjer, unaprijediti sustave za navigaciju tada to više nije nimalo jednostavan graf.

Razvijeni su algoritmi za određivanje najkraćih i najjeftinijih puteva. Među najpoznatijima su Kruskalov algoritam, Primov algoritam (Pohlepni algoritam) i Dijkstrin algoritam koji se koristi u navigacijskim sustavima.



## 2.3 Matrica susjedstva usmjerenog grafa

Neka je  $G$  usmjeren graf s vrhovima  $v_1, \dots, v_n$  i bridovima  $e_1, \dots, e_m$ . Matrica susjedstva  $A(G)$  ima elemente na dijagonali jednake nuli. Element  $(i, j)$  izvan dijagonale ima vrijednost 1 ako postoji brid iz vrha  $v_i$  prema vrhu  $v_j$  ili vrijednost 0 ako tako usmjeren brid ne postoji. Uočimo da tako definirana matrica ne mora biti simetrična kao što je slučaj kod neusmjerenih grafova.

**Primjer 2.3.1.** *Matrica susjedstva se koristi u skladištu tvrtke koja je dio zračne luke. Tvrtka se bavi uslugom "Sky Shop" koja je uključena u standardnu ponudu letova. Unutar Hrvatske postoje aerodromi Zagreb, Zadar, Split, Dubrovnik, Rijeka, Osijek, Pula i Brač. Nisu svi aerodromi povezani istim letovima svaki dan. Također, kako u zračnom prometu uvijek dolazi do promjena što zbog tehničkih poteškoća, što zbog prognoze i ostalih nepredvidivih situacija, nema stalnog rasporeda po kojem radnici skladišta slažu i šalju kolica prodaje.*

*Osim domaćih letova imamo i međunarodne letove u gradove München, Dublin, Frankfurt, Barcelona, Tel Aviv, Beč, Stockholm, Atena i tako dalje. Nema pravila iz kojeg će hrvatskog grada postojati let za grad izvan Hrvatske na određen dan.*

*Skladište na početku svakog dana ima na raspolaganju 5 velikih kompleta kolica i 5 malih kompleta kolica. Veliki komplet kolica koristi se za takozvane rotacije koje podrazumijevaju ciklus letova koji sadrži jedan međunarodni let i ne sadrži više od 3 leta (počinje i završava u Zagrebu).*

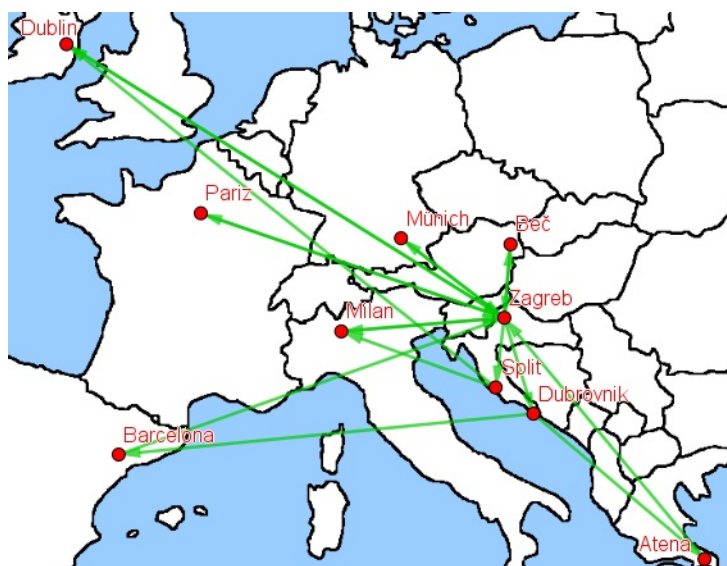
*Mali komplet kolica koristi se za povratne letove iz Zagreba za bilo koji grad ne nužno hrvatski. Na određeni dan skica letova dana je slikom 2.5 <sup>1</sup>.*

Graf  $G$  2.6 dobijemo direktno iz skice na sljedeći način. Vidimo da graf sadrži i dvos-truko orijentirane bridove, što znači da su zbog pojednostavljenja prikaza, koji je već i ovako teško čitljiv, dva leta suprotnih orijentacija spojena u jedan brid.

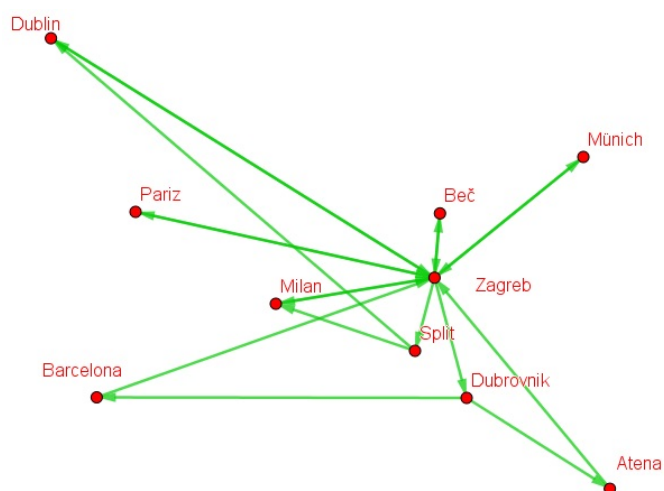
Numeriranje vrhova je proizvoljno stoga recimo da pratimo abecedu. Slijedi, pri-druživanje Atena -  $v_1$ , Barcelona -  $v_2$ , Beč -  $v_3$ , Dubrovnik -  $v_4$ , Dublin -  $v_5$ , Milan -  $v_6$ , München -  $v_7$ , Pariz -  $v_8$ , Split -  $v_9$ , Zagreb -  $v_{10}$ .

---

<sup>1</sup>Pozadinska slika za izradu slike 2.5 je preuzeta 15. kolovoza 2022. s poveznice: <https://i.pinimg.com/originals/03/23/68/03236896d90ae2d8accfd854ff3230fa.gif>



Slika 2.5: Prikaz letova na karti.



Slika 2.6: Graf letova

Matricu  $A(G)$  popunjavamo po definiciji te dobivamo kvadratnu matricu reda 10.

$$A(G) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Želimo saznati broj rotacija i povratnih letova na taj dan (iz Zagreba) kako bi radnici skladišta znali koliko kompleta kolica pripremiti.

Teorem 2.1.2 vrijedi i za usmjerene grafove te se dokazuje na analogan način. Rješenje primjera slijedi iz potenciranja matrice  $A(G)$ , odnosno broj povratnih letova iz Zagreba odgovaraju elementu  $(10, 10)$  matrice  $A^2$ , a broj rotacija istom elementu matrice  $A^3$ .

$$A(G)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A(G)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Vidimo da će radnicima trebati 5 kompleta malih kolica i 4 kompleta velikih.

Napomena: u ovom primjeru smo smanjili broj letova naspram stvarnog broja letova kako bismo omogućili relativno pregledan prikaz grafa za mogućnost provjere točnosti rješenja.

# Poglavlje 3

## Matrica incidencije

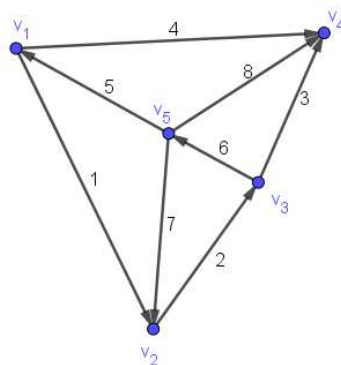
### 3.1 Matrica incidencije usmjerenog grafa

Gradivo poglavlja prati drugo poglavlje knjige [2] i drugo poglavlje knjige [3].  
Primjer primjene 3.1.4 je modificirana verzija primjera iz knjige [5] u potpoglavlju 5.6. "Graphs and Networks".

Neka je  $G$  usmjeren graf s vrhovima  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  i bridovima  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ .

Matrica incidencije usmjerenog grafa  $G$  je  $n \times m$  matrica  $Q(G) = (m_{ij})$ . Element matrice  $m_{ij}$  jednak je nuli ako vrh  $v_i$  ne pripada bridu  $e_j$ . Ako  $v_i$  pripada bridu  $e_j$  i  $v_i$  je početak brida  $e_j$ , element  $m_{ij} = 1$ , a ako brid  $e_j$  završava u vrhu  $v_i$  element  $m_{ij} = -1$ .

**Primjer 3.1.1.** *Odredimo matricu incidencije  $Q$  grafa  $G$  danog na slici 3.1.*



Slika 3.1: Primjer 3.1.1.

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Primjećujemo da je suma svakog stupca jednaka 0 te bi zbog toga zbrajanjem svih redova dobili 0. Stoga su redci linearno zavisni. Slijedi da je rang matrice  $\text{rang}(Q) < n$ , odnosno  $\text{rang}(Q) \leq n - 1$ .

**Lema 3.1.2.** Rang matrice  $Q(G)$  povezanog grafa  $G$  s  $n$  vrhova jednak je  $n - 1$ .

*Dokaz.* Pretpostavimo da je  $x$  vektor lijevog nul-prostora, odnosno  $x^t A = 0$ . Slijedi  $x_i - x_j = 0$  kada su  $x_i$  i  $x_j$  susjedni vrhovi. S obzirom na to da promatramo povezani graf, znamo da  $x$  mora imati sve komponente jednake. Odavde je lijevi nul-potprostor ranga najviše jedan, koristeći teorem o rangu i defektu dobivamo da je rang  $Q(G)$  najmanje  $n - 1$ . Također, redci matrice su linearno zavisni pa rang mora biti manji od  $n$ . Rang matrice  $Q$  ima granice  $n - 1 \leq \text{rang}(Q) \leq n - 1$ , dakle  $\text{rang}(Q) = n - 1$ .  $\square$

**Teorem 3.1.3.** Neka je  $G$  graf s  $n$  vrhova i sastoji se od  $k$  komponenti povezanosti. Tada je rang matrice  $Q(G)$  jednak  $n - k$ .

*Dokaz.* Ako se graf  $G$  sastoji od  $k$  povezanih dijelova, označimo sa  $n_i$ ,  $i = 1, \dots, k$  broj vrhova u pojedinim povezanim dijelovima  $G_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Matrica  $Q(G)$ , uz odgovarajuću numeraciju vrhova, poprima oblik

$$Q(G) = \begin{pmatrix} Q(G_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q(G_2) & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & Q(G_k) \end{pmatrix}.$$

Tvrđnja teorema slijedi iz sljedećeg niza jednakosti, pri čemu je druga jednakost posljedica leme 3.1.2,

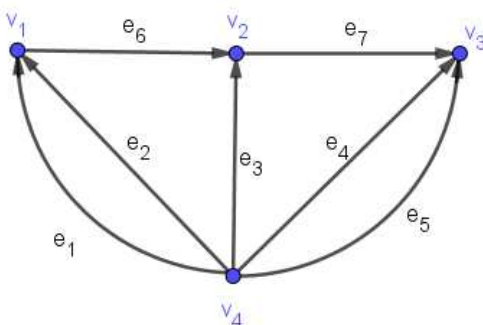
$$\begin{aligned} \text{rang}(Q) &= \text{rang}(Q(G_1)) + \text{rang}(Q(G_2)) + \dots + \text{rang}(Q(G_k)) \\ &= (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_k - 1) \\ &= n_1 + n_2 + \dots + n_k - k \cdot (-1) \\ &= n - k. \end{aligned}$$

$\square$

Matrica incidencije svoju najčešću primjenu nalazi u protocima mreža. Pod time mislimo na sve prirodne i umjetne strukture u kojima neka vrsta materije ima svoj orijentirani smjer kretanja. Primjeri takvih mreža mogu biti vodovodne mreže, telefonske mreže (svaki mobitel/telefon je vrh grafa, a poziv brid grafa), internet (svaka internetska stranica je vrh grafa, a ako postoji poveznica jedne stranice na drugu tada je to brid grafa), društvene mreže, strujni krugovi i tako dalje.

Zadržimo se na primjeru strujnih krugova. Pokazat ćemo na primjeru kako povezati matricu incidencije grafa strujnog kruga i Kirchhoffov zakon.

**Primjer 3.1.4.** Neka je  $G$  graf koji predstavlja strujni krug s četiri vrha i sedam bridova u oznakama  $v_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  i  $e_j$ ,  $j = 1, \dots, 7$  kao na slici. Neka svaki vrh ima svoj električni potencijal i svaki brid  $e_j$  struju  $I_j$ .



Slika 3.2: Primjer 3.1.4

Iz grafa slijedi matrica incidencije  $Q$  kojoj redci predstavljaju vrhove, a stupci bridove grafa  $G$ .

$$Q(G) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Koristeći lemu 3.1.2 slijedi da je rang matrice  $\text{rang}(Q) = 3$ , odnosno imamo maksimalno tri linearno nezavisna reda. Eliminacijom bilo kojeg reda dobivamo tri linearno nezavisna reda, odnosno bilo koja kombinacija tri reda je linearno nezavisna. U ovom primjeru eliminirat ćemo 4. red matrice. Ovaj korak je ekvivalentan uzemljenju jedne točke strujnog kruga, odnosno fiksiranju električnog potencijala te točke na nulu (u ovom slučaju

je to vrh  $v_4$ ). Novu, reduciranu matricu, nazovimo  $Q_1$ .

Promotrimo sada jednadžbu

$$Q_1 \cdot y = 0$$

gdje je  $y = (I_1, \dots, I_7)$  vektor koji predstavlja struju u pojedinim bridovima

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Slijedi niz jednadžbi

$$\begin{aligned} I_6 - I_1 - I_2 &= 0 \\ I_7 - I_3 - I_6 &= 0 \\ -(I_4 + I_5 + I_7) &= 0. \end{aligned}$$

Umnožak  $Q_1 y$  zapravo promatra odnose struja koje ulaze ili izlaze iz pojedinog vrha, točnije zbraja koliko struje ulazi, a koliko izlazi iz vrha u određenom trenutku. Izjednačavanjem s nulom, to jest  $Q_1 y = 0$ , izjednačava se količina (zbroj) struje koja ulazi i koja izlazi iz vrha. Vidimo da je to upravo Kirchhoffov zakon za vrhove  $v_1, v_2, v_3$ .

Podsjetnik: Kirchhoffov zakon glasi - zbroj struja koje ulaze u neki čvor jednak je zbroju struja koje iz tog čvora izlaze.

Preostaje komentirati zašto smo reducirali matricu  $Q$ . Jedno od slikovitih objašnjenja se nalazi u interpretaciji rješenja jednadžbe  $x^t \cdot Q = 0$ . Neka je  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  vektor koji predstavlja električne potencijale vrhova.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

Odakle je

$$\begin{aligned}x_4 - x_1 &= 0 \\x_4 - x_2 &= 0 \\x_4 - x_3 &= 0 \\x_2 - x_1 &= 0 \\x_2 - x_3 &= 0.\end{aligned}$$

Osim trivijalnog rješenja, rješenje sustava je vektor  $(1, 1, 1, 1)$ . Poznato je kako struja postoji samo ako postoji razlika potencijala na krajevima vodiča. Znači nulvektor i prostor generiran vektorom  $(1, 1, 1, 1)$  nam nisu zanimljivi jer u takvom strujnom krugu nema protoka struje.

**Teorem 3.1.5.** *Neka je  $G$  graf s  $n$  vrhova. Stupci  $j_1, \dots, j_k$  matrice  $Q(G)$  su linearno nezavisni ako i samo ako odgovarajući bridovi grafa  $G$  induciraju podgraf koji nema ciklus.*

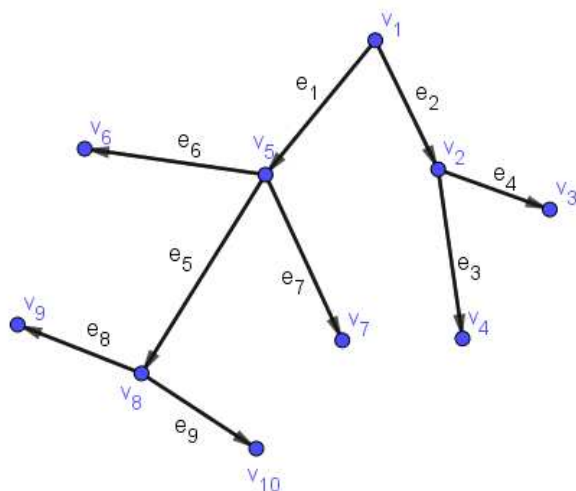
*Dokaz.* Pretpostavimo suprotno, postoji podgraf koji sadrži ciklus i neka taj ciklus sačinjavaju bridovi  $j_1, \dots, j_p$ . Matrica podgrafa  $Q_1(G)$  poprima oblik  $\begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}$ , gdje je  $B$  kvadratna matrica reda  $p$ . Suma svakog stupca matrice  $B$  jednaka je 0 te je stoga  $B$  singularna matrica. Slijedi da su stupci  $j_1, \dots, j_p$  linearno zavisni. Ovime smo dokazali obrat. Pretpostavimo da bridovi  $j_1, \dots, j_k$  induciraju podgraf bez ciklusa. Ako podgraf ima  $m$  komponenti povezanosti tada po teoremu 3.1.3  $\text{rang}(Q) = n - m$ . Dakle, stupci  $j_1, \dots, j_k$  su linearno nezavisni.  $\square$

Neka je  $G$  usmjeren graf s vrhovima  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  i bridovima  $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$  te neka postoji put  $P$ . Vektor puta je vektor pridružen putu  $P$  kojem koordinate predstavljaju bridove  $E(G)$ . Ako je  $e_i \in E(G)$ , tada je koordinata na poziciji  $i$  jednaka nuli ako brid  $e_i$  nije sadržan u putu  $P$ . Ako je brid sadržan u putu  $P$  tada je koordinata na poziciji  $i$  jednaka 1 ako je orijentacija brida  $e_i$  jednaka orijentaciji puta  $P$ , ili  $-1$  ako je orijentacija brida  $e_i$  suprotna orijentaciji puta  $P$ .

Neka je  $G$  stablo s vrhovima  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Fiksiramo neki vrh, recimo  $v_n$ , kao korijen stabla. Matricu puta  $P_n$  grafa  $G$  u odnosu na vrh  $v_n$  popunjavamo na sljedeći način:  $j$ -ti stupac je vektor puta iz vrha  $v_j$  prema vrhu  $v_n$  za sve  $j = 1, \dots, n - 1$ .

**Primjer 3.1.6.** *Odredi matricu puta  $P_1$  grafa  $G$  ako je  $v_1$  korijen stabla kao na slici 3.3.*





Slika 3.3: Primjer 3.1.6.

Kako je graf  $G$  ukorijenjeno stablo, orijentacija bridova je od vrha bliže korijenu do vrha koji je dalje od korijena. Slijedi matrica puta  $P_1$  po definiciji:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

**Teorem 3.1.7.** Neka je  $G$  stablo s vrhovima  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ . Matrica  $Q(G)$  je matrica incidencije, a  $Q_n(G)$  matrica dobivena ukidanjem  $n$ -tog reda matrice  $Q$ . Tada vrijedi  $Q_n^{-1} = P_n$ , gdje je  $P_n$  matrica puta stabla  $G$ .

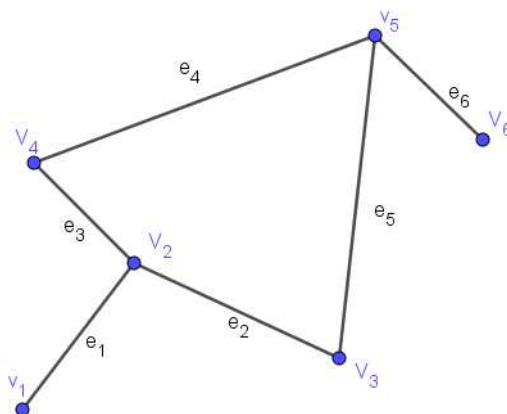
*Dokaz.* Neka je  $m = n - 1$ , za  $i \neq j$  promatramo element  $(i, j)$  matrice  $P_n Q_n$ , odnosno sumu  $\sum_{k=1}^m p_{ik} q_{kj}$ . Pretpostavimo da je brid  $e_i$  usmjeren od vrha  $v_x$  do vrha  $v_y$ , a brid  $e_j$  od vrha  $v_w$  do  $v_z$ . Vidimo da vrhovi  $v_w$  i  $v_z$  označavaju početak i kraj brida  $e_j$  te je stoga  $q_{kj} = 0$  osim kada je vrh  $v_k$  jednak ili  $v_w$  ili  $v_z$ . Suma se svodi na  $\sum_{k=1}^m p_{ik} q_{kj} = p_{iw} q_{wj} + p_{iz} q_{zj}$ . Vidimo da put iz vrha  $v_w$  do vrha  $v_n$  sadrži  $e_i$ , a tada i put od vrha  $v_z$  do vrha  $v_n$  sadrži  $e_i$ . Za  $p_{iw}$  i  $p_{iz}$  različite od nula vrijedi da su istog predznaka jer je orijentacija brida  $e_j$

jednaka orijentaciji puta. Također, kako su  $v_w$  i  $v_z$  početak, odnosno kraj brida  $e_j$ , vrijedi  $q_{wj} = 1 = -q_{zj}$ . Slijedi  $\sum_{k=1}^m p_{ik}q_{kj} = 0$ . Ako su  $v_i$  i  $v_j$  isti vrhovi, tada analognim dokazom slijedi da je  $\sum_{k=1}^m p_{ik}q_{ki} = 1$ . Dakle,  $P_n Q_n = I$ ,  $Q_n^{-1} = P_n$ .  $\square$

## 3.2 Matrica incidencije neusmjerenog grafa

Neka je  $G$  graf s vrhovima  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  i bridovima  $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ . Matrica incidencije neusmjerenog grafa  $G$  je  $n \times m$  matrica  $M(G) = (m_{ij})$ . Element matrice  $m_{ij}$  jednak je nuli ako vrh  $v_i$  ne pripada bridu  $e_j$ , odnosno jedan ako  $v_i$  pripada bridu  $e_j$ .

**Primjer 3.2.1.** Odredimo matricu incidencije neusmjerenog grafa  $G$  danog na slici 3.4.



Slika 3.4: Primjer neusmjerenog grafa

Vrhovi grafa  $G$  indeksiraju retke, a bridovi stupce matrice  $M(G)$ . Slijedi nam matrica incidencije:

$$M(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



## Poglavlje 4

# Laplaceova matrica

Poglavlje "Laplaceova matrica" prati četvrto poglavlje knjige [2] i četvrto poglavlje knjige [3].

Neka je  $G$  neusmjeren graf bez petlji s vrhovima  $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  i bridovima  $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$ .

Laplaceova matrica je kvadratna matrica reda  $n$  kojoj i stupci i redovi predstavljaju vrhove. Za  $i \neq j$  element matrice  $L(G)$  na poziciji  $(i, j)$  ima vrijednost  $-1$  ako su vrhovi  $v_i$  i  $v_j$  povezani i vrijednost  $0$  ako nisu povezani bridom. Elementi dijagonale  $(i, i)$  su jednaki stupnju vrha  $v_i$ .

Laplaceova matrica se na elegantan način može povezati s prijašnje razrađenim matricama susjedstva i incidencije.

Neka je  $G$  graf,  $A(G)$  matrica susjedstva grafa  $G$  i definiramo  $D(G)$  kao dijagonalnu matricu kojoj je element na poziciji  $(i, i)$  jednak stupnju vrha  $v_i$ . Tada jednostavno slijedi jednakost

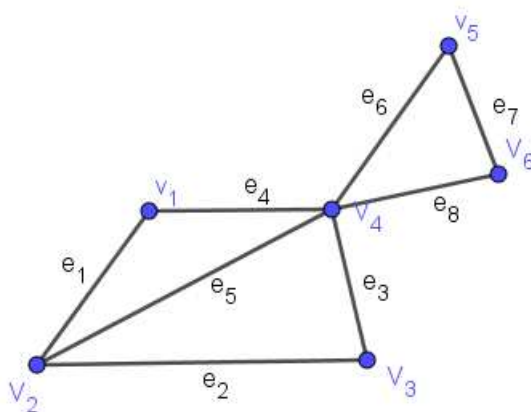
$$L(G) = D(G) - A(G).$$

Ako bridovima grafa  $G$  dodijelimo orijentaciju, tada možemo promatrati njegovu matricu incidencije  $Q(G)$ . Znamo da su u matrici incidencije vrhovi predstavljeni redcima, a bridovi stupcima. Želimo pomoću  $n \times m$  matrice dobiti  $n \times n$  matricu, stoga je intuitivno pomnožiti  $Q(G)$  sa  $Q(G)^t$ .

Vidimo da je element na poziciji  $(i, j)$  matrice  $Q(G)Q(G)^t$  jednak produktu umnoška  $i$ -tog i  $j$ -tog retka matrice  $Q(G)$ . Elementi dijagonale su tada stupnjevi vrhova, a preostali elementi su jednaki  $-1$  ako su  $i$  i  $j$  susjedni, odnosno  $0$  ako nisu susjedni. Vidimo da su takva svojstva elemenata matrice jednaka definiciji Laplaceove matrice. Slijedi jednakost

$$L(G) = Q(G)Q(G)^t.$$

**Primjer 4.0.1.** *Odredimo Laplaceovu matricu  $L$  za dani graf  $G$  4.1.*



Slika 4.1: Primjer 4.0.1.

$$L(G) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Promotrimo neka svojstva Laplaceove matrice.

**Teorem 4.0.2.** *Neka je  $G$  graf s vrhovima  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  i bridovima  $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$ . Tada vrijede sljedeće tvrdnje.*

- 1) Rang Laplaceove matrice  $L(G)$  jednak je  $n - k$  ako graf ima  $k$  komponenta povezanosti.
- 2) Za svaki vektor  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $x_i \in \mathbb{R}$  vrijedi

$$x^t L(G) x = \sum_{i \sim j} (x_i - x_j)^2.$$

- 3) Sume redaka i stupaca matrice  $L(G)$  su jednake 0.

- 4) Algebarski komplement bilo koja dva elementa matrice  $L(G)$  je jednak.

*Dokaz.* 1) Tvrdnja slijedi iz jednadžbe  $L(G) = Q(G)Q(G)^t$ . Rang produkta ulančanih matrica nije veći od ranga pojedinih matrica, a  $\text{rang}(Q(G)^t) = \text{rang}(Q(G))$ . Slijedi da je rang od  $L(G)$  manji ili jednak rangu od  $Q(G)$ .  $L(G)$  je simetrična matrica te iz  $x^t L(G) x =$

$x^t Q(G) Q(G)^t x$  slijedi da je pozitivno semidefinitna te je stoga regularna, odnosno ranga jednakog  $Q(G)$ . Iz teorema 3.1.3 slijedi tvrdnja.

2) Kao i u dokazu tvrdnje 1) koristimo jednakost  $x^t L(G)x = x^t Q(G) Q(G)^t x$ . Rezultat umnoška  $x^t Q(G)$  je vektor s koordinatama  $x_i - x_j$  ako su u grafu vrhovi  $v_i$  i  $v_j$  povezani bridom. Umnožak  $Q(G)^t x$  daje isti vektor, ali transponiran. Množenjem dobivenih vektora slijedi tvrdnja.

3) Tvrdnju dobijemo razmatranjem jednakosti  $L(G) = D(G) - A(G)$ . Ako gledamo redak  $i$  vidimo ukupno  $m$  članova koji imaju vrijednost  $-1$  i jedan član koji ima vrijednost  $m$ . Svaki član  $(i, j)$  koji ima vrijednost  $-1$  ima zajednički brid s vrhom  $v_i$ , a element  $(i, i)$  je stupanj vrha  $v_i$  te je stoga suma elemenata svakog retka  $i$  jednaka  $0$ . Analogno je za stupce.

4) Neka je  $L = L(G)$  matrica u kojoj je zbroj vrijednosti elemenata stupaca jednak nula i zbroj vrijednosti elemenata redaka jednak nula. Tada je  $L(i|j)$  matrica iz koje je maknut  $i$ -ti red i  $j$ -ti stupac. U  $L(1|1)$  pribrojimo sve stupce prvom stupcu, tada iz tvrdnje 3) slijedi da je prvi stupac jednak  $-(l_{21}, \dots, l_{n1})^t$ , gdje su  $l_{ij}$  elementi Laplaceove matrice  $L$  na poziciji  $(i, j)$ . Slijedi da je  $\det L(1|1) = -\det L(1|2)$ , odnosno algebarski komplement  $A_{11} = A_{12}$ . Analognim dokazom i ponovnim korištenjem tvrdnje 3) slijedi jednakost  $A_{ij} = A_{kj}$  za sve  $i, j, k$ .

□

**Lema 4.0.3.** Svojsvene vrijednosti  $n \times n$  matrice  $aI_n + bJ_n$  su  $a$  kratnosti  $n - 1$  i  $a + nb$  kratnosti  $1$ .

*Dokaz.* Matrica  $J_n$  ima svojsvene vrijednosti  $0$  kratnosti  $n - 1$  i  $n$  kratnosti  $1$ , što smo već rekli u dokazu teorema 2.1.5.

Slijedi,  $bJ_n$  ima svojsvene vrijednosti  $0$  kratnosti  $n - 1$  i  $nb$  kratnosti  $1$ . Matrica  $bJ_n$  ima svojsvene vektore iste kao i  $J_n$  odnosno  $e_n - e_i$  za sve  $1 \leq i \leq n - 1$  i  $\mathbf{1}$ . Matrica  $aI$  ima svojsvenu vrijednost  $a$  s kratnosti  $n$  te joj svojsveni vektori može biti bilo koji  $n$ -člani linearno nezavisni skup  $n$ -dimenzionalnih vektora pa možemo iskoristiti svojsvene vektore matrice  $bJ_n$ . Konačno, matrica  $aI + bJ$  ima svojsvene vrijednosti  $a$  kratnosti  $n - 1$  i  $a + nb$  kratnosti  $1$ . □

Neka nam je zadan potpun graf  $K_n$ . Za  $K_n$  znamo da je svaki vrh spojen sa  $n - 1$  vrhova, stoga je vrijednost svakog elementa dijagonale Laplaceove matrice jednak  $n - 1$ , a isto tako znamo da je u matrici susjedstva svaki element koji nije na dijagonali jednak  $1$ .

Slijedi  $L(K_n) = nI - J$ . Ako primijenimo lemu 4.0.3 vidimo da  $L(G)$  ima svojsvene vrijednosti  $n$  i  $0$  s kratnostima  $n - 1$  i  $1$  redom.

**Lema 4.0.4.** *Neka je  $G$  graf s vrhovima  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  i neka su svojstvene vrijednosti Laplaceove matrice  $L(G)$   $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n = 0$ . Tada su svojstvene vrijednosti matrice  $L + aJ$   $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_{n-1}$  i  $n \cdot a$ .*

Detaljan dokaz nalazi se u četvrtom poglavlju knjige [2].

**Teorem 4.0.5.** *Neka je  $G$  graf s vrhovima  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  i barem jednim bridom. Neka su svojstvene vrijednosti  $L(G)$   $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n = 0$  i  $\Delta$  najveći stupanj vrha. Tada je  $\lambda_1 \geq \Delta + 1$ .*

*Dokaz.* Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je stupanj  $d_1$  vrha  $v_1$  najveći stupanj. Postoji donje trokutasta matrica  $T = (t_{ij})$ , gdje su  $t_{ij}$  nenegativni realni brojevi, takva da je  $L(G) = l_{ij} = TT^t$ . Tada je  $d_1 = l_{11} = t_{11}^2$ , odnosno  $t_{11} = \sqrt{d_1}$ . Iz jednakosti  $L(G) = TT^t$  slijedi  $l_{i1} = \sqrt{d_1}t_{i1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Sada računamo element  $(1, 1)$  matrice  $L(G)$ :

$$\sum_{i=1}^n t_{i1}^2 = \frac{1}{d_1} \sum_{i=1}^n l_{i1}^2 = \frac{1}{d_1}(d_1^2 + d_1) = d_1 + 1.$$

Najveća svojstvena vrijednost matrice  $T^tT$  je veća ili jednaka najvećoj vrijednosti elementa dijagonale iste matrice. □

**Teorem 4.0.6.** *Neka je  $G$  graf s vrhovima  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Neka je  $L(G)$  Laplaceova matrica grafa  $G$  s najvećom svojstvenom vrijednosti  $\lambda_1$ . Tada vrijedi jednakost*

$$\lambda_1 \leq \max\{d_i + d_j - c(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n, i \sim j\},$$

gdje je  $c(i, j)$  broj vrhova koji su susjedni i vrhu  $v_i$  i vrhu  $v_j$ .

Detaljan dokaz nalazi se u četvrtom poglavlju knjige [2].

## Poglavlje 5

# Matrica udaljenosti stabla

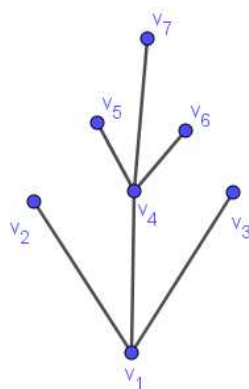
Ovo poglavlje sadržajno prati deveto poglavlje knjige [2].

Neka je  $G$  povezan neusmjeren graf s vrhovima  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Matrica udaljenosti  $D(G)$  je simetrična matrica reda  $n$  kojoj redci  $i$  i stupci označavaju vrhove grafa. Element  $(i, j)$  matrice jednak je udaljenosti vrhova  $v_i$  i  $v_j$ .

Udaljenost vrhova grafa jednaka je najkraćem putu koji spaja te vrhove. Slijedi da su elementi dijagonale matrice  $D(G)$  jednaki nula, a ostali elementi pozitivni brojevi. Primijetimo da elementi matrice zadovoljavaju nejednakost trokuta. Za sve vrhove  $v_i, v_j$  i  $v_k$ ,

$$d(v_i, v_k) \leq d(v_i, v_j) + d(v_j, v_k).$$

**Primjer 5.0.1.** *Odredimo matricu udaljenosti za stablo dano na slici 5.1.*



Slika 5.1: Primjer 5.0.1.



Matricu  $D(G)$  popunjavamo po definiciji

$$D(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrica udaljenosti grafa za grafove stabla ima razna zanimljiva svojstva. Jedno od njih je činjenica da determinanta matrice udaljenosti stabla ne ovisi o izgledu grafa već o broju njegovih vrhova.

**Teorem 5.0.2.** *Neka je  $G$  stablo s vrhovima  $v(G) = \{v_1, \dots, n\}$  i neka je  $D$  matrica udaljenosti. Determinanta matrice  $D$  jednaka je*

$$\det D = (-1)^{n-1} (n-1) 2^{n-2}.$$

*Dokaz.* Neka je vrh  $v_n$  list stabla i neka je susjedan vrhu  $v_{n-1}$ . Tada je

$$d(v_i, v_n) = d(v_i, v_{n-1}) + 1, i = 1, \dots, n-1.$$

Radimo elementarne transformacije nad  $D$ . Oduzimamo red vrha  $v_{n-1}$  od reda vrha  $v_n$  i analogno za stupce. Novonastalu matricu nazovimo  $D_1$ . Matrica  $D_1$  u zadnjem stupcu i retku ima sve elemente jednake 1 osim  $(n, n)$  elementa koji je jednak  $-2$ . Postupak ponavljamo za sve sljedeće susjedne retke i stupce sve dok ne dobijemo matricu  $D_2$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & -2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -2 \end{pmatrix}.$$

Determinanta matrice  $D$  jednaka je determinanti matrice  $D_2$ . Lagano se izračuna vrijednost determinante

$$\det D_2 = (-1)^{n-1} (n-1) 2^{n-2}.$$

□

Pomoću teorema 5.0.2 vidimo da je matrica udaljenosti  $D$  stabla  $G$  regularna, odnosno postoji inverzna matrica  $D(G)^t$ . Sljedeće pokazujemo poveznicu između  $D^t(G)$  i Laplace-ove matrice  $L(G)$ .

Neka je  $G$  graf s vrhovima  $v(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  i neka je  $d_i$  stupanj vrha  $v_i$ , definiramo  $\tau_i = 2 - d_i$  za sve  $i = 1, \dots, n$ . Tada je  $\tau$   $n \times 1$  vektor s koordinatama  $\tau_1, \dots, \tau_n$ . Vektor  $\tau$  ima zanimljiva svojstva, koja ćemo izreći u sljedeće tri leme, a pomoći će nam u dokazu poveznice matrica  $D(G)^t$  i  $L(G)$ .

**Lema 5.0.3.** *Neka je  $\mathbf{1}$  vektor sa svim koordinatama jednakim 1. Vrijedi*

$$\mathbf{1}^t \cdot \tau = 2.$$

Vrijede sljedeće jednakosti:

$$\mathbf{1}^t \cdot \tau = \sum_{i=1}^n \tau_i = \sum_{i=1}^n (2 - d_i) = 2n - 2(n - 1) = 2,$$

gdje druga jednakost slijedi iz činjenice da je suma stupnjeva vrhova grafa jednaka dvostrukom broju bridova grafa.

**Lema 5.0.4.** *Neka je  $G$  stablo s vrhovima  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  i  $D(G)$  matrica udaljenosti stabla. Tada vrijedi*

$$D\tau = (n - 1) \cdot \mathbf{1}.$$

Dokaz se provodi indukcijom po broju vrhova grafa. Detaljan dokaz ove leme nalazi se u devetom poglavlju knjige[2].

**Lema 5.0.5.** *Neka je graf  $G$  stablo s vrhovima  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  i  $D$  matrica udaljenosti stabla  $G$ , a  $L$  Laplaceova matrica stabla  $G$ . Tada vrijedi*

$$LD + 2I = \tau \mathbf{1}^t,$$

gdje je  $\tau$  vektor pridružen grafu  $G$  s koordinatama  $\tau_i = 2 - d_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

*Dokaz.* Odaberimo dva vrha  $v_i$  i  $v_j$  stabla  $G$  i pretpostavimo da je vrh  $v_i$  susjedan s vrhovima  $v_1, \dots, v_k$  i  $d_i = k$ . Neka su vrhovi  $v_i$  i  $v_j$  različiti. Graf  $G \setminus \{i\}$  je povezan, bez ciklusa i s  $k$  komponenti povezanosti. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da  $v_j$  pripada dijelu koji sadrži  $v_1$ . Uz dane pretpostavke vrijedi

$$d(v_m, v_j) = d(v_1, v_j) + 2 = d(v_i, v_j) + 1, \quad m = 2, \dots, k.$$

Jednakost primjenjujemo na  $LD + 2I$ :

$$\begin{aligned}
 (LD + 2I)_{ij} &= (LD)_{ij} \\
 &= d_i d(v_i, v_j) - (d(v_1, v_j) + \dots + d(v_k, v_j)) \\
 &= kd(v_i, v_j) - (kd(v_i, v_j) + k - 2) \\
 &= 2 - k \\
 &= \tau_i.
 \end{aligned}$$

Ako pretpostavimo da su  $v_i$  i  $v_j$  isti vrh tada:

$$\begin{aligned}
 (LD + 2I)_{ii} &= -(d(v_i, v_1) + \dots + d(v_i, v_k)) + 2 \\
 &= 2 - k \\
 &= \tau_i.
 \end{aligned}$$

Zaključujemo da jednakost  $(LD + 2I)_{ij} = \tau_i$  vrijedi za svaki izbor vrhova  $v_i$  i  $v_j$ . □

Pomoću lema 5.0.4 i 5.0.5 dokazat ćemo jednakost koja povezuje matricu udaljenosti i Laplaceovu matricu stabla  $G$ .

**Teorem 5.0.6.** *Neka je  $G$  stablo s vrhovima  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $D$  matrica udaljenosti stabla  $G$ ,  $L$  Laplaceova matrica stabla  $G$  i  $\tau$  vektor pridružen nekom grafu  $G$  s koordinatama  $\tau_i = 2 - d_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Tada vrijedi:*

$$D^{-1} = -\frac{1}{2}L + \frac{1}{2(n-1)}\tau\tau^t.$$

*Dokaz.* Tvrdnja teorema slijedi iz sljedećeg niza jednakosti, pri čemu je druga jednakost posljedica leme 5.0.4, a treća jednakost leme 5.0.5:

$$\begin{aligned}
 \left(-\frac{1}{2}L + \frac{1}{2(n-1)}\tau\tau^t\right)D &= -\frac{1}{2}LD + \frac{1}{2(n-1)}\tau\tau^tD \\
 &= -\frac{1}{2}LD + \frac{1}{2}\tau\mathbf{1}^t \\
 &= -\frac{1}{2}(-2I) \\
 &= I.
 \end{aligned}$$

□

# Poglavlje 6

## Matrica otpora

Gradivo poglavlja prati točke 1.3 i 10.5 knjige [2].

### 6.1 Generalizirani inverz matrice

Neka je  $A = (a_{ij})$   $m \times n$  matrica, tada je **generalizirani inverz**  $n \times m$  matrica  $G = (g_{ij})$  ako vrijedi  $AGA = A$ . Generalizirani inverz matrice  $A$  se označuje i s  $A^-$ . Ako je matrica  $A$  kvadratna regularna matrica, tada je  $A^{-1}$  jedinstven generalizirani inverz matrice  $A$ . Ako matrica  $A$  nije simetrična niti regularna matrica, tada matrica  $A$  ima beskonačno generaliziranih inverza.

Neka je  $A$   $m \times n$  matrica s generaliziranim inverzom  $G$ . Ako imamo jednadžbu  $Ax = b$  tada je  $x = Gb$  rješenje te jednadžbe.

Neka je  $A = BC$  faktorizacija punog ranga matrice  $A$ , gdje je  $B$   $m \times r$  matrica, a  $C$   $r \times n$  matrica. Tada  $B$  ima lijevi inverz  $B_l^-$ , a  $C$  desni inverz  $C_r^-$ . Generalizirani inverz  $G$  matrice  $A$  je tada  $G = C_r^- B_l^-$  i vrijedi

$$AGA = BC(C_r^- B_l^-)BC = BC = A.$$

Generalizirani inverz matrice  $A$  je refleksivan ako osim  $AGA = A$  vrijedi i  $GAG = G$ .

Generalizirani inverz  $G$  matrice  $A$  je inverz minimalne norme ako osim  $AGA = A$  vrijedi  $(GA)^t = GA$ . Ako je  $G$  generalizirani inverz minimalne norme matrice  $A$  i  $y$  vektor iz vektorskog prostora koji je određen stupcima matrice  $A$ , onda jednadžba  $Ax = y$  ima rješenje  $x = Gy$  minimalne norme. Dokaz tvrdnje nalazi se u devetom poglavlju knjige [2].

Generalizirani inverz  $G$  nazivamo generalizirani inverz najmanjih kvadrata matrice  $A$  ako osim  $AGA = A$  vrijedi  $(AG)^t = AG$  i za sve  $x, y$  vrijedi  $\|AGy - y\| \leq \|Ax - y\|$ .

Moore-Penroseov inverz matrice  $A$  je refleksivni generalizirani inverz od  $A$  koji je ujedno minimalne norme i najmanjeg kvadrata. Označavamo ga s  $A^+$ . Dakle, generalizirani inverz je Moore-Penroseov ako zadovoljava:

$$AGA = A, GAG = G, (AG)^t = AG, (GA)^t = GA.$$

Moore-Penroseov inverz matrice  $A$  je jedinstven.

Pretpostavimo da postoje dva generalizirana inverza  $G_1$  i  $G_2$  koji zadovoljavaju navedene jednadžbe, tada:

$$\begin{aligned} G_1 &= G_1AG_1 = G_1G_1^tA^t = G_1G_1^tA^tG_2^tA^t = G_1G_1^tA^tAG_2 \\ &= G_1AG_1AG_2 = G_1AG_2 = G_1AG_2AG_2 = G_1AA^tG_2^tG_2 \\ &= A^tG_1^tA^tG_2^tG_2 = A^tG_2^tG_2 = G_2AG_2 = G_2. \end{aligned}$$

Ovime smo pokazali jedinstvenost, još treba pokazati postojanje takvog generaliziranog inverza. Neka je  $A = BC$  faktorizacija po rangovima. Tada vrijedi

$$B^+ = (B^tB)^{-1}B^t \text{ i } C^+ = (C^tC)^{-1}C^t.$$

Sada je  $A^+ = C^+B^+$ .

Neka je  $A$  simetrična matrica reda  $n$  i neka je  $P$  ortogonalna matrica takva da

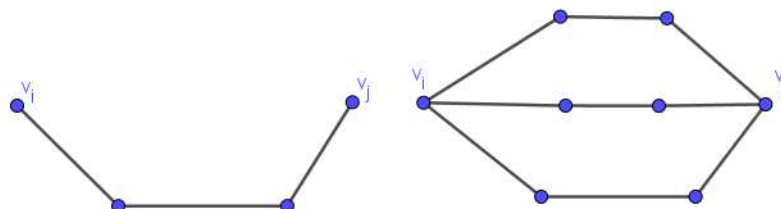
$$A = P\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^t.$$

Ako su  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  svojstvene vrijednosti različite od nule, tada vrijedi

$$A^+ = P\text{diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_r}, 0, \dots, 0\right)P^t.$$

Specijalno, ako je matrica  $A$  pozitivno semidefinitna tada je i matrica  $A^+$  pozitivno semidefinitna. Više o Moore-Penroseovom inverzu se također nalazi se u točki 1.3 knjige [2].

## 6.2 Osnovna svojstva matrice otpora



Slika 6.1: Različiti otpori

Neka imamo dva grafa kao na slici 6.1. Tada vidimo da je udaljenost vrhova  $v_i$  i  $v_j$  na oba grafa jednaka, ali da drugi graf ima više načina za doći iz vrha  $v_i$  u vrh  $v_j$  putevima duljine 3. Intuitivno možemo reći da je otpor prelaska iz vrha  $v_i$  u vrh  $v_j$  manji u drugom grafu.

Neka je  $G$  neusmjeren graf s vrhovima  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  i bridovima  $E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$ . Otpor između vrhova  $v_i$  i  $v_j$  u oznaci  $r(v_i, v_j)$  definiramo kao

$$r(v_i, v_j) = e_{ij}^t H e_{ij} = h_{ii} + h_{jj} - h_{ij} - h_{ji}.$$

Neka je  $H = (h_{ij})$  generalizirani inverz Laplaceove matrice  $L(G)$ . Ako je  $H$  simetrična matrica, jednakost postaje

$$r(v_i, v_j) = e_{ij}^t H e_{ij} = h_{ii} + h_{jj} - 2h_{ij}.$$

Neka je  $G$  povezan graf s vrhovima  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Matrica otpora  $R(G)$  je kvadratna matrica reda  $n$  kojoj stupce i retke predstavljaju vrhovi grafa. Element  $(i, j)$  matrice  $R$  definiramo kao  $r_{ij} = r(v_i, v_j)$ , odnosno kao otpor između vrhova  $v_i$  i  $v_j$ .

Kada je  $G$  stablo, matrica otpora  $R$  postaje matrica udaljenosti stabla  $D$  koju smo obradili u prošlom poglavlju.

Neka je  $L(G)$  Laplaceova matrica grafa  $G$ . Zbog leme 4.0.4 znamo da matrica  $L + \frac{1}{n}J$  ima pozitivne svojstvene vrijednosti te je stoga regularna.

Neka je  $X = \left(L + \frac{1}{n}J\right)^{-1}$ .

Iz jednakosti

$$X \left(L + \frac{1}{n}J\right) = \left(L + \frac{1}{n}J\right) X = I,$$

slijedi

$$L^+ = X - \frac{1}{n}J.$$

Definiramo dijagonalnu matricu  $\tilde{X}$  s elementima dijagonale  $x_{ii}$  za sve  $i = 1, \dots, n$ .

**Lema 6.2.1.** *Neka je  $G$  graf s vrhovima  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $R$  matrica otpora grafa  $G$  i  $\tilde{X}$  dijagonalna matrica grafa  $G$  kako smo ju definirali. Tada vrijedi*

$$R = \tilde{X}J + J\tilde{X} - 2X.$$

*Dokaz.* Iz  $L^+ = X - \frac{1}{n}J$  element na poziciji  $(i, j)$  desne strane jednakosti jednak je

$$x_{ii} + x_{jj} - 2x_{ij} = l_{ii}^+ + l_{jj}^+ - 2l_{ij}^+,$$

gdje su  $l_{ij}^+$  elementi Moore–Penrose inverza Laplaceove matrice grafa  $G$ . Vidimo da izraz zadovoljava definiciju otpora između vrhova  $v_i$  i  $v_j$ . □

Definiramo  $n \times 1$  vektor  $\tau$  slično kao i za matricu otpora stabla. Za  $i = 1, \dots, n$

$$\tau_i = 2 - \sum_{j \sim i} r(v_i, v_j).$$

**Lema 6.2.2.** *Vrijedi jednakost:*

$$\tau = L\tilde{X}\mathbf{1} + \frac{2}{n}\mathbf{1},$$

gdje su  $L$  Laplaceova matrica,  $\tilde{X}$  dijagonalna matrica  $\text{diag}(x_{11}, x_{22}, \dots, x_{nn})$ ,  $\mathbf{1}$  vektor sa svim koordinatama jednakim 1 i  $\tau$  vektor pridružen grafu  $G$ .

**Lema 6.2.3.** *Neka je  $G$  graf s vrhovima  $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  i neka je  $r(v_i, v_j)$  otpor između vrhova  $v_i$  i  $v_j$ . Tada za zbroj svih otpora susjednih vrhova vrijedi izraz:*

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j \sim i} r(v_i, v_j) = 2(n-1).$$

Detaljni dokazi lema 6.2.2 i 6.2.3 nalaze se u knjizi [2], a riječ je o lemana 10.8 i 10.9 točke 10.5.

**Korolar 6.2.4.** *Neka je  $\tau$   $n \times 1$  vektor koji pridružujemo matrici otpora  $R$  i  $\mathbf{1}$  vektor sa svim koordinatama jednakim 1. Vrijedi*

$$\mathbf{1}^t \tau = 2.$$

*Dokaz.* Tvrdnju korolara dobivamo iz sljedećeg niza jednakosti, pri čemu prva jednakost slijedi iz leme 6.2.3:

$$\mathbf{1}'\tau = 2n - \sum_{i=1}^n \sum_{j \sim i} r(v_i, v_j) = 2n - 2(n-1) = 2.$$

□

**Lema 6.2.5.** *Neka je  $G$  graf,  $R$  matrica otpora pridružena grafu  $G$ ,  $L$  Laplaceova matrica grafa  $G$  i neka je  $\tilde{x}$   $n \times 1$  vektor sačinjen od dijagonalnih vrijednosti matrice  $\tilde{X}$ . Tada vrijedi jednakost:*

$$\tau'R\tau = 2\tilde{x}'L\tilde{x} + \frac{8}{n}\text{tr}(L^+).$$

*Dokaz.* Primjenjujemo lemu 6.2.2 na lijevu stranu jednakosti

$$\begin{aligned} \tau'R\tau &= \left( \mathbf{1}'\tilde{X}L + \frac{2}{n}\mathbf{1}' \right) R \left( L\tilde{X}\mathbf{1} + \frac{2}{n}\mathbf{1} \right) \\ &= \mathbf{1}'\tilde{X}LRL\tilde{X}\mathbf{1} + \frac{4}{n}\mathbf{1}'\tilde{X}LR\mathbf{1} + \frac{4}{n^2}\mathbf{1}'R\mathbf{1}. \end{aligned}$$

Primijetimo da dva člana sadrže  $LRL$  te stoga koristimo lemu 6.2.3

$$\begin{aligned} LRL &= L(\tilde{X}J + J\tilde{X} - 2X)L \\ &= -2L. \end{aligned}$$

Prvi član izrazimo kao  $\mathbf{1}'\tilde{X}LRL\tilde{X}\mathbf{1} = -2\tilde{x}'L\tilde{x}$ , a drugi član  $\frac{4}{n}\mathbf{1}'\tilde{X}LR\mathbf{1} = \frac{4}{n}n\tilde{x}'L\tilde{x} = 4\tilde{x}'L\tilde{x}$ . Zadnji član je jednak  $\frac{4}{n^2}\mathbf{1}'R\mathbf{1} = \frac{4}{n^2}2n\text{tr}(L^+)$ . Konačno, zbrajanjem svih članova slijedi jednakost leme. □

Koristeći rezultat leme 6.2.5 i činjenicu da su matrice  $L^+(G)$  i  $\tilde{x}'L\tilde{x}$  pozitivno semidefinitne slijedi da je matrica otpora  $R$  pozitivno semidefinitna te je invertibilna.

**Teorem 6.2.6.** *Neka su  $R$  matrica otpora grafa,  $L$  Laplaceova matrica grafa  $G$ . Tada vrijedi jednakost:*

$$R^{-1} = -\frac{1}{2}L + \frac{1}{\tau'R\tau}\tau\tau'.$$

*Dokaz.* Iz leme 6.2.2 slijedi jednakost

$$LR + 2I = L\tilde{X}J + \frac{2}{n}J = \tau\mathbf{1}'.$$

Množenjem jednakosti s  $\tau$  i primjenom korolara 6.2.4 dobivamo

$$(LR + 2I)\tau = \tau\mathbf{1}'\tau = 2\tau.$$



Sređivanjem jednakosti slijedi  $LR\tau = 0$  te iz leme 6.2.5 zaključujemo da je  $R\tau$  vektor različit od nulvektora, odnosno postoji skalar  $\alpha$  različit od 0 takav da

$$R\tau = \alpha \mathbf{1}.$$

Ponovnom primjenom korolara 6.2.4 dobivamo  $\alpha = \frac{\tau^t R \tau}{2}$ , odnosno

$$R\tau = \frac{\tau^t R \tau}{2} \mathbf{1}.$$

Uvrštavanjem dobivenog u jednakost iskaza teorema 6.2.6 slijedi

$$\begin{aligned} \left( -\frac{1}{2}L + \frac{1}{\tau^t R \tau} \tau \tau^t \right) R &= -\frac{1}{2}LR + \frac{1}{\tau^t R \tau} \tau \tau^t R \\ &= I - \frac{1}{2} \tau \mathbf{1}^t + \frac{1}{\tau^t R \tau} \left( \frac{\tau^t R \tau}{2} \right) \tau \mathbf{1}^t \\ &= I. \end{aligned}$$

□

# Bibliografija

- [1] D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, 2008.
- [2] R.B. Bapat, *Graphs and Matrices*, Springer-Verlag London, 2014.
- [3] L.W. Beineke, R.J. Wilson i P.J. Cameron, *Topics in Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, 2004.
- [4] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer, 2017.
- [5] G. Strang, *Differential Equations and Linear Algebra*, Wellesley - Cambridge press, 2014.



# Sažetak

Glavna svrha ovog rada je pokazati na koji način su povezana područja linearne algebre i teorije grafova te kako njihovu vezu možemo iskoristiti za rješavanje problema u stvarnom životu. U prvom poglavlju navodimo definicije, teoreme i rezultate iz linearne algebre i teorije grafova koji su nužni za shvaćanje glavnog dijela rada. Drugo, treće i četvrto poglavlje bavi se proučavanjem matrice susjedstva, matrice incidencije i Laplaceove matrice. Definiramo svaku od navedenih matrica, na stvarnim primjerima prikazujemo načine njihovog određivanja te prezentiramo njihove primjene u proučavanju pripadnih grafova. U petom i šestom poglavlju promatramo matricu udaljenosti stabla i matricu otpora. Definiramo navedene matrice i proučavamo njihova svojstva i primjene. Poseban naglasak je dan na rezultate vezane uz njihove svojstvene vrijednosti, determinante i povezanosti s Laplaceovom matricom.



# Summary

The main purpose of this thesis is to show the connections between linear algebra and graph theory and their applications to solving real life problems. In the first chapter we give basic definitions, theorems and results from linear algebra and graph theory which are vital for further understanding of the thesis. In chapters two, three and four we are focused on adjacency and incidence matrices along with the Laplacian matrix. We define each of these matrices, we show how to determine them by using real life examples and we present their applications to the study of the underlying graphs. In the last two chapters, chapters five and six, we examine the distance matrix of a tree and the resistance matrix. We introduce the aforementioned matrices and study their properties and applications. Special emphasis is given to the results concerning their eigenvalues, determinants and connections with the Laplacian matrix.



# Životopis

Rođen sam 17.09.1997. godine. 2012. godine upisao sam XIII. gimnaziju u Zagrebu. 2016. godine upisao sam Prirodoslovno matematički fakultet - Matematički odsjek, nastavnički smjer. 2020. godine stekao sam prvostupničku diplomu te nastavio dalje s diplomskim studijem, nastavnički smjer.