Jako konveksne funkcije

Novak, Lucija

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Lucija Novak

JAKO KONVEKSNE FUNKCIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc.Sanja Varošanec

Zagreb, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem svojoj mentorici prof. dr. sc. Sanji Varošanec na savjetima, razumijevanju i strpljenju tijekom izrade ovog rada. Hvala svim mojim prijateljima koji su mi ovo studiranje učinili nezaboravnim. Veliko hvala mojim roditeljima, sestrama i bratu koji su vjerovali u mene i bili moja najveća podrška.

Sadržaj

Uvod

Cilj ovoga rada je uvođenje pojma jako konveksnih funkcija kao poopćenje konveksnih funkcija. Da bi smo mogli uopće govoriti o jako konveksnim funkcijama u prvom poglavlju ćemo prvo definirati konveksne funkcije. Dano je nekoliko konkretnih primjerima radi boljeg razumijevanja definicije konveksnosti funkcije i opisana su neka svojstva konveksnih funkcija. Na kraju prvog poglavlja iskazana je Jensenova nejednakost koja u biti proširuje definicijsku nejednakost konveksnosti i Hermite-Hadamardovom nejednakost koja je ujedno i karakterizacija konveksne funkcije. U drugom poglavlju definiramo jako konveksne funkcije i dajemo primjere jako konveksnih funkcija. Jako konveksne funkcije uveo je Polyak [10]. Imaju korisna svojstva u teoriji optimizacije. Budući da je jaka konveksnost jačanje pojma konveksnosti, neka svojstva jako konveksnih funkcija samo su "jače verzije" poznatih svojstava konveksnih funkcija. Kroz ostatak rada poopćavamo svojstva konveksnih funkcija za jako konveksne funkcije i karakteriziramo unitarni prostor pomoću jako konveksnih funkcija.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

Definicija 1.0.1. *(a) Neka je I interval u $\mathbb{R}$. Kažemo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna ako za sve $x, y \in I$ i svaki $\lambda \in [0, 1]$, vrijedi*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y). \tag{1.1}$$

Ako za sve $x \neq y$ i $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ u (1.1) vrijedi stroga nejednakost onda je f strogo konveksna.

(b) Ako u (1.1) vrijedi obrnuta nejednakost, onda je f konkavna funkcija. Ako za sve $x \neq y$ i $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ vrijedi stroga nejednakost onda je f strogo konkavna.

U sljedećoj napomeni navest ćemo nekoliko svojstava konveksne funkcije. Ova se svojstva, kao i svojstva iskazana u sljedećem poglavlju mogu naći u knjigama u kojima se razmatraju konveksne funkcije kao što su knjige [5] i [9].

Napomena 1.0.2. *(a) Jednostavna geometrijska interpretacija (1.1) je da se graf funkcije f nalazi ispod njezinih tetiva.*

(b) Ako su x_1, x_2, x_3 tri točke u I takve da $x_1 < x_2 < x_3$, onda je (1.1) ekvivaletno s

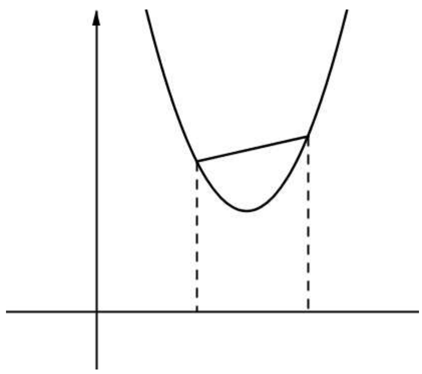
$$\begin{vmatrix} x_1 & f(x_1) & 1 \\ x_2 & f(x_2) & 1 \\ x_3 & f(x_3) & 1 \end{vmatrix} = (x_3 - x_2)f(x_1) + (x_1 - x_3)f(x_2) + (x_2 - x_1)f(x_3) \geq 0, \tag{1.2}$$

što je ekvivalentno s

$$f(x_2) \leq \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3} f(x_1) + \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} f(x_3), \tag{1.3}$$

ili simetrično, bez uvjeta mnonotonosti na x_1, x_2, x_3,

$$\frac{f(x_1)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_3)(x_2 - x_1)} + \frac{f(x_3)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} \geq 0. \tag{1.4}$$



Slika 1.1: Konveksna funkcija: graf je ispod tetive

Dokažimo ovu tvrdnju.
(b) Ako je $x_2 \in \langle x_1, x_3 \rangle$ *tada se* λ *definira ovako:* $\lambda = \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3}$. *Tada je* $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ *i* $1 - \lambda = \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3} \in \langle 0, 1 \rangle$. *Definicijska nejednakost (1.1) sada glasi:*

$$f\left(\frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3}x_1 + \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3}x_3\right) \leq \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3}f(x_1) + \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3}f(x_3).$$

Slijedi,

$$f\left(\frac{x_1x_2 - x_1x_3 + x_1x_3 - x_2x_3}{x_1 - x_3}\right) \leq \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3}f(x_1) + \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3}f(x_3).$$

Tada je,

$$f\left(\frac{x_2(x_1 - x_3)}{x_1 - x_3}\right) \leq \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3}f(x_1) + \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3}f(x_3)$$

odnosno,

$$f(x_2) \leq \frac{x_2 - x_3}{x_1 - x_3}f(x_1) + \frac{x_1 - x_2}{x_1 - x_3}f(x_3).$$

(c) Drugi način zapisa nejednakosti (1.3) je:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq \frac{f(x_2) - f(x_3)}{x_2 - x_3}, \quad (x_1 < x_3, x_1, x_3 \neq x_2), \tag{1.5}$$

tako da vrijedi sljedeći rezultat: Funkcija f *je konveksna na* I *ako za svaku točku* $c \in I$ *funkcija*

$$x \mapsto \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

raste na I $(x \neq c)$.

(d) Koristeći (1.5) lako možemo dokazati sljedeći rezultat: Ako je f konveksna funkcija na I i ako je $x_1 \leq y_1$, $x_2 \leq y_2$, $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$, onda vrijedi sljedeća nejednakost:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(y_2) - f(y_1)}{y_2 - y_1}. \tag{1.6}$$

Dokažimo tu tvrdnju.
(d) U (1.5) stavimo $x_1 = x_1$, $x_2 = x_2$, $x_3 = y_1$ i dobijemo

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} \leq \frac{f(x_2) - f(y_1)}{x_2 - y_1}. \tag{1.7}$$

U (1.5) stavimo $x_1 = x_2$, $x_2 = y_1$, $x_3 = y_2$ i dobijemo

$$\frac{f(x_2) - f(y_1)}{x_2 - y_1} \leq \frac{f(y_1) - f(y_2)}{y_1 - y_2}. \tag{1.8}$$

Iz (1.7) i (1.8) slijedi (1.6).

Teorem 1.0.3. *(a) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je (strogo) konveksna funkcija ako i samo ako postoji (strogo) rastuća funkcija $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ i realni broj c ($a < c < b$) takav da za svaki x, $a < x < b$ vrijedi*

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t)dt.$$

(b) Ako je f diferencijabilna, onda je f (strogo) konveksna ako i samo ako je f' (strogo) rastuća.
(c) Ako f'' postoji na (a,b), onda je f konveksna na $\langle a,b \rangle$ ako i samo ako je $f''(x) \geq 0$. Ako je $f''(x) > 0$, onda je f strogo konveksna.

Teorem 1.0.4. *(a) $f : \langle a,b \rangle \to \mathbb{R}$ je konveksna funkcija ako i samo ako postoji barem jedan potporni pravac za svaki $x_0 \in (a,b)$, odnosno*

$$f(x) \geq f(x_0) + \lambda(x - x_0), \qquad \forall x \in (a,b),$$

gdje λ ovisi o x_0 i dana je s $\lambda = f'(x_0)$ kada f' postoji i $\lambda \in [f'_-(x_0), f'_+(x_0)]$ kada $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$.
(b) $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ je konveksna funkcija ako funkcija $x \mapsto f(x) - f(x_0) - \lambda(x - x_0)$ (razlika između funkcije i njezine potpore) raste za $x < x_0$ i pada za $x > x_0$.

Primjer 1.0.5. *Za $k > 1$, funkcija $f(x) = x^k$ je konveksna na $\langle 0, +\infty \rangle$.*

Dokaz. Izračunajmo drugu derivaciju:

$$f''(x) = k(k-1)x^{k-2}.$$

Očito je $f''(x) > 0$ za $k > 1$ pa je prema teoremu 1.0.3(c) f konveksna funkcija na $\langle 0, +\infty \rangle$.

□

Primjer 1.0.6. *Eksponencijalna funkcija $f(x) = e^x$ je konveksna na $\mathbb{R}$.*

Dokaz. Izračunajmo drugu derivaciju:

$$f''(x) = e^x.$$

Očito je $f''(x) > 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$ pa je prema teoremu 1.0.3(c) f konveksna funkcija na $\mathbb{R}$. □

Primjer 1.0.7. *Trigonometrijska funkcija kosinus je konveksna na intervalima $[\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{3\pi}{2}+2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$.*

Dokaz. Pokazat ćemo da je $\cos x$ konveksna funkcija na intervalu $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Znamo da je $\cos x \leq 0$ na intervalu $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ i $\cos x < 0$ na otvorenom intervalu $\langle\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\rangle$. Također, znamo da je $\sin x \leq 0$ na $[\pi, 2\pi]$ odnosno $\sin x < 0$ na $\langle\pi, 2\pi\rangle$. Prva derivacija funkcije kosinus je:

$$f'(x) = -\sin x,$$

a druga derivacija je:

$$f''(x) = -\cos x.$$

Pošto je na $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, $\cos x \leq 0$ onda je $f''(x) \geq 0$ na $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Iz ovoga slijedi da je prema teoremu 1.0.3(c) $\cos x$ konveksna funkcija na intervalu $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. □

Primjer 1.0.8. *Trigonometrijska funkcija sinus je konveksna na intervalima $[-\pi+2k\pi, 2k\pi]$ pri čemu je $k \in \mathbb{Z}$.*

Dokaz. Pokazat ćemo da je $\sin x$ konveksna funkcija na intervalu $[-\pi, 0]$. Znamo da je $\sin x \leq 0$ na intervalu $[-\pi, 0]$ i $\sin x < 0$ na otvorenom intervalu $\langle -\pi, 0\rangle$. Prva derivacija funkcije sinus je:

$$f'(x) = \cos x,$$

a druga derivacija je:

$$f''(x) = -\sin x.$$

Pošto je na $[-\pi, 0]$, $sinx \leq 0$ onda je $f''(x) \geq 0$ na $[-\pi, 0]$. Iz ovoga slijedi da je prema teoremu 1.0.3(c) $\sin x$ konveksna funkcija na intervalu $[-\pi, 0]$. □

Propozicija 1.0.9. *(Operacije s konveksnim funkcijama)*

1. *Zbrajanjem dvije konveksne funkcije dobiva se konveksna funkcija. Ako je jedna od funkcija strogo konveksna, tada je i suma strogo konveksna.*

2. *Množenjem (strogo) konveksne funkcije s pozitivnim skalarom dobiva se također (strogo) konveksna funkcija.*

3. *Restrikcija svake (strogo) konveksne funkcije na podinterval njezine domene je (strogo) konveksna funkcija.*

4. *Ako je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rastuća (odnosno strogo rastuća) konveksna (odnosno strogo konveksna) funkcija i $g : I \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, tada je i $f \circ g$ je konveksna (odnosno strogo konveksna) funkcija.*

5. *Ako je f bijekcija između dva intervala I i J, onda je f (strogo) konveksna ako i samo ako je f^{-1} (strogo) konveksna funkcija.*

Dokaz. 1.) Neka su $f, g : S \to \mathbb{R}$ konveksne funkcije, $S \subseteq \mathbb{R}$ interval, te $\lambda \in [0, 1]$. Treba pokazati da je $h = f + g$ konveksna funkcija.

$$\begin{aligned}
h(\lambda x + (1-\lambda)y) &= (f+g)(\lambda x + (1-\lambda)y) \\
&= f(\lambda x + (1-\lambda)y) + g(\lambda x + (1-\lambda)y) \\
&\leq (\lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)) + (\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)) \\
&= \lambda(f(x) + g(x)) + (1-\lambda)(f(y) + g(y)) \\
&= \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y),
\end{aligned}$$

odatle slijedi da je h konveksna funkcija.

2.) Neka je $g : S \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija, $S \subseteq \mathbb{R}$ interval, te α pozitivan skalar. Treba pokazati da je $f = \alpha g$ konveksna funkcija.

$$\begin{aligned}
f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \alpha g(\lambda x + (1-\lambda)y) \\
&\leq \lambda \alpha g(x) + (1-\lambda)\alpha g(y) \\
&= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y),
\end{aligned}$$

odatle slijedi da je f konveksna funkcija.

4.) Neka su $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i $g : I \to \mathbb{R}$ konveksne funkcije te neka je f rastuća funkcija. Treba pokazati da je i $f \circ g$ konveksna. Funkcija g je konveksna pa vrijedi da je:

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y).$$

Funkcija f je rastuća funkcija pa je:

$$f(g(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq f(\lambda g(x) + (1-\lambda)g(y)).$$

Kako je f konveksna slijedi

$$f(g(\lambda x + (1-\lambda)y)) \leq \lambda f(g(x)) + (1-\lambda)f(g(y))$$

pa je i $f \circ g$ konveksna. $\square$

Teorem 1.0.10. *(Diskretna Jensenova nejednakost) Ako je f konveksna funkcija na nekom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, $x_i \in I$ $(i = 1, \dots, n)$ tada je*

$$f\Big(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\Big) \leq \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i), \tag{1.9}$$

pri čemu je $P_n = \sum_{i=1}^{n} p_i$ Ako je f strogo konveksna funkcija, tada je nejednakost (1.9) stroga osim ako je $x_1 = ... = x_n$.

Dokaz. Dokaz ćemo provesti indukcijom po n.
Za $n = 2$ (1.9) se svodi na (1.1).
Pretpostavimo da (1.9) vrijedi za neki $n - 1$.
Tada je na osnovu slučaja baze indukcije i induktivne pretpostavke

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\Big) &= f\Big(\frac{p_n}{P_n} x_n + \frac{P_{n-1}}{P_n} \cdot \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i\Big) \\ &\leq \frac{p_n}{P_n} f(x_n) + \frac{P_{n-1}}{P_n} f\Big(\frac{1}{P_{n-1}} \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i\Big) \\ &\leq \frac{p_n}{P_n} f(x_n) + \frac{P_{n-1}}{P_n} \cdot \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{i=1}^{n-1} p_i f(x_i) \\ &= \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i). \end{aligned}$$

□

Teorem 1.0.11. *(Integralna Jensenova nejednakost) Neka je f integrabilna funkcija definirana na $[a, b]$ te neka je ϕ neprekidna konveksna funkcija definirana na $[m, M]$ gdje je $m = \inf f$ i $M = \sup f$. Tada vrijedi*

$$\phi\Big(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\Big) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \phi(f(x))dx.$$

U sljedećem je teoremu dana jedna bitna nejednakost kojom je ocijenjen integral konveksne funkcije. Tradicionalno se naziva Hermite-Hadamardova nejednakost prema matematičarima Hermiteu i Hadamardu koji su prvi u čijim se radovima pojavljuje ova nejednakost. Ova je nejednakost bitna jer se može dokazati (što nije u fokusu ovog rada) da ako za funkciju f vrijedi ta nejednakost, tada je f konveksna. Dakle, Hermite-Hadamardova nejednakost jest karakterizacija konveksne funkcije.

Teorem 1.0.12. *(Hermite-Hadamardova nejednakost) Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija na $[a,b]$. Tada vrijedi*

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{1.10}$$

Dokaz. Desnu stranu nejednakosti dobivamo integriranjem nejednakosti

$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

koja govori da se graf funkcije f nalazi ispod tetive koja spaja krajnje točke grafa $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$. Dakle,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\leq \int_a^b f(a)dx + \int_a^b \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)dx \\ &= f(a)(b-a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\frac{(b-a)^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}(f(a)+f(b))(b-a),\end{aligned}$$

odakle slijedi,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Lijevu stranu nejednakosti dokazujemo na sljedeći način. Vrijedi

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx &= \frac{1}{b-a}\Big(\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx\Big) \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[f\Big(\frac{a+b-\lambda(b-a)}{2}\Big) + f\Big(\frac{a+b+\lambda(b-a)}{2}\Big)\Big]d\lambda.\end{aligned}$$

Za $\lambda \in [0,1]$ imamo

$$\frac{a+b}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{a+b-\lambda(b-a)}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{a+b+\lambda(b-a)}{2},$$

odakle zbog konveksnosti funkcije f slijedi

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) \leq \frac{1}{2}f\Big(\frac{a+b-\lambda(b-a)}{2}\Big) + \frac{1}{2}f\Big(\frac{a+b+\lambda(b-a)}{2}\Big)$$

pa se integriranjem dobije

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right) d\lambda \\ &\leq \frac{1}{2}\int_0^1 \left[f\left(\frac{a+b-\lambda(b-a)}{2}\right) + f\left(\frac{a+b+\lambda(b-a)}{2}\right)\right] d\lambda. \end{aligned}$$

Time smo dokazali lijevu stranu nejednakosti (1.10). □

Sljedeći teorem daje gornju i donju ogradu integrala produkta dviju konveksnih funkcija. Iskaz tog teorema i njegov dokaz nalazi se u [8].

Teorem 1.0.13. *Neka su $f, g : [a, b] \to [0, \infty\rangle$ konveksne funkcije. Tada je*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \frac{1}{3}M(a,b) + \frac{1}{6}N(a,b)$$

i

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx \geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)g\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{6}M(a,b) - \frac{1}{3}N(a,b),$$

gdje je $M(a, b) = g(a)g(a) + f(b)g(b)$, $N(a, b) = f(a)g(b) + f(b)g(a)$.

Dokaz. Funkcije f i g su konveksne pa za svaki $t \in [0, 1]$ vrijedi

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b),$$

$$g(ta + (1-t)b) \leq tg(a) + (1-t)g(b).$$

Množenjem tih nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} f(ta + (1-t)b)g(ta + (1-t)b) &\leq \Big[tf(a) + (1-t)f(b)\Big]\Big[tg(a) + (1-t)g(b)\Big] \\ &= t^2 f(a)g(a) + t(1-t)\Big[f(a)g(b) + g(a)f(b)\Big] + (1-t)^2 f(b)g(b). \end{aligned}$$

Kada integriramo tu nejednakost s varijablom $t \in [0, 1]$ dobivamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(ta + (1-t)b)g(ta + (1-t)b)dt &\leq f(a)g(a)\int_0^1 t^2 dt + N(a,b)\int_0^1 t(1-t)dt \\ &\quad + f(b)g(b)\int_0^1 (1-t)^2 dt \\ &= f(a)g(a)\cdot\frac{1}{3} + N(a,b)\cdot\frac{1}{6} + f(b)g(b)\cdot\frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}M(a,b) + \frac{1}{6}N(a,b). \end{aligned}$$

Kada se u integralu na lijevoj strani primijeni supstitucija $ta + (1-t)b = x$, $dt(a-b) = dx$, dobije se

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b)g(ta + (1-t)b)dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)dx$$

što zajedno s gornjom nejednakosti čini prvi rezultat teorema.
Za dokaz druge nejednakosti iskoristit ćemo prikaz broja $\frac{a+b}{2}$ na ovaj način:

$$\frac{a+b}{2} = \frac{at + (1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a + tb}{2}.$$

Tada uz korištenje konveksnosti od f i g imamo

$$\begin{aligned}
f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)g\Big(\frac{a+b}{2}\Big) &= f\Big(\frac{at + (1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a + tb}{2}\Big)g\Big(\frac{at + (1-t)b}{2} + \frac{(1-t)a + tb}{2}\Big)\\
&\leq \frac{1}{2}\Big[f(at + (1-t)b) + f(a(1-t) + bt)\Big]\\
&\cdot \frac{1}{2}\Big[g(at + (1-t)b) + g(a(1-t) + bt)\Big]\\
&= \frac{1}{4}\Big[f(at + (1-t)b)g(at + (1-t)b) + f(a(1-t) + tb)g(at + (1-t)b)\\
&+ f(at + (1-t)b)g(a(1-t) + bt) + f(a(1-t) + tb)g(a(1-t) + bt)\Big]\\
&\leq \frac{1}{4}\Big[f(at + (1-t)b)g(at + (1-t)b) + f(a(1-t) + tb)g(a(1-t) + bt)\Big]\\
&+ \frac{1}{4}\Big[\Big((1-t)f(a) + tf(b)\Big)\Big(tg(a) + (1-t)g(b)\Big)\\
&+ \Big(tf(a) + (1-t)f(b)\Big)\Big((1-t)g(a) + tg(b)\Big)\Big]\\
&= \frac{1}{4}\Big[f(at + (1-t)b)g(at + (1-t)b) + f(a(1-t) + tb)g(a(1-t) + bt)\Big]\\
&+ \frac{1}{4}\Big[2t(1-t)\Big(f(a)g(a) + f(b)g(b)\Big) + (1-t)^2 f(a)g(b) + t^2 f(b)g(a)\\
&+ t^2 f(a)g(b) + (1-t)^2 f(b)g(a)\Big],
\end{aligned}$$

pri čemu smo drugi znak nejednakosti dobili primjenom konveksnosti od f i g na izraze u druga dva pribrojnika. Sad se cijela nejednakost integrira po t i uz korištenje ovih izraza:

$$\int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 (1-t)^3 dt = -\frac{(1-t)^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^1 t(1-t)dt = \int_0^1 (t-t^2)dt - \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}$$

dobivamo traženu drugu nejednakost teorema. □

Poglavlje 2

Jako konveksne funkcije

Definicija 2.0.1. *Neka je $I \subset R$ interval i c pozitivan broj. Znamo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ jako konveksna funkcija s modulom c ako vrijedi*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - c\lambda(1-\lambda)(x-y)^2, \tag{2.1}$$

za svaki $x, y \in I$ i $\lambda \in [0,1]$.

Primjer 2.0.2. *Funkcija $f(x) = cx^2, c > 0$ je jako konveksna funkcija na $\mathbb{R}$ s modulom c.*

Dokaz.

$$\begin{aligned}
f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= c(\lambda x + (1-\lambda)y)^2 \\
&= c(\lambda^2 x^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy + (1-\lambda)^2 y^2) \\
&= \lambda c x^2 + (1-\lambda)cy^2 - c(\lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 - \lambda^2 x^2 - 2\lambda(1-\lambda)xy - (1-\lambda)^2 y^2) \\
&= \lambda c x^2 + (1-\lambda)cy^2 - c(\lambda(1-\lambda)x^2 - \lambda(1-\lambda)2xy + \lambda(1-\lambda)y^2) \\
&= \lambda c x^2 + (1-\lambda)cy^2 - c\lambda(1-\lambda)(x^2 - 2xy + y^2) \\
&= \lambda c x^2 + (1-\lambda)cy^2 - c\lambda(1-\lambda)(x-y)^2.
\end{aligned}$$

□

Primjer 2.0.3. *Afina funkcija $f(x) = ax + b$ nije jako konveksna.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Afina funkcija $f(x) = ax + b$ je jako konveksna. Tada vrijedi

$$a(\lambda x + (1-\lambda)y) + b \leq \lambda(ax + b) + (1-\lambda)(ay + b) - c\lambda(1-\lambda)(x-y)^2$$

Raspisivanjem nejednakosti dobivamo:

$$\lambda ax + (1-\lambda)ay + b \leq \lambda ax + \lambda b + (1-\lambda)ay + b - \lambda b - c\lambda(1-\lambda)(x-y)^2$$

Iz toga slijedi da vrijedi nejednakost

$$0 \leq -c\lambda(1-\lambda)(x-y)^2$$

za svaki $\lambda \in [0,1]$ i za sve $x, y \in I$, a to ne vrijedi za nijedan c. □

Propozicija 2.0.4. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$. Funkcija $g(x) = f(x) + ax + b$ je jako konveksna na I ako i samo ako je funkcija f jako konveksna na I.*

Dokaz. Neka je $g(x) = f(x) + ax + b$ jako konveksna funkcija na I.
Dokažimo da je f jako konveksna funkcija na I.

$$\begin{aligned}
f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= g(\lambda x + (1-\lambda)y) - a(\lambda x + (1-\lambda)y) - b \\
&\leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) - c\lambda(1-\lambda)(x-y)^2 - \lambda ax - (1-\lambda)ay - b \\
&= \lambda g(x) - \lambda ax - \lambda b + \lambda b + (1-\lambda)g(y) - (1-\lambda)ay - (1-\lambda)b + (1-\lambda)b - b \\
&- c\lambda(1-\lambda)(x-y)^2 \\
&= \lambda(g(x) - ax - b) + (1-\lambda)(g(y) - ay - b) + b(\lambda + 1 - \lambda) \\
&- b - c\lambda(1-\lambda)(x-y)^2 \\
&= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - c\lambda(1-\lambda)(x-y)^2.
\end{aligned}$$

Obrnuto, neka je f jako konveksna funkcija na I,
Dokažimo da je $g(x) = f(x) + ax + b$ jako konveksna funkcija na I.

$$\begin{aligned}
g(\lambda x + (1-\lambda)y) &= f(\lambda x + (1-\lambda)y) + a(\lambda x + (1-\lambda)y) + b \\
&\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - c\lambda(1-\lambda)(x-y)^2 + \lambda ax + (1-\lambda)ay + b \\
&= \lambda f(x) + \lambda ax + \lambda b - \lambda b + (1-\lambda)f(y) + (1-\lambda)ay + (1-\lambda)b - (1-\lambda)b + b \\
&- c\lambda(1-\lambda)(x-y)^2 \\
&= \lambda(f(x) + ax + b) + (1-\lambda)(f(y) + ay + b) + b(-\lambda - 1 + \lambda) \\
&+ b - c\lambda(1-\lambda)(x-y)^2 \\
&= \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) - c\lambda(1-\lambda)(x-y)^2.
\end{aligned}$$

□

Propozicija 2.0.5. *Ako su f i g jako konveksne funkcije na I s modulima c_1 i c_2, tada je $f + g$ jako konveksna funkcija na I s modulom $c_1 + c_2$.*

Dokaz. Neka su f i g jako konveksne funkcije na I s modulima c_1 i c_2. Treba pokazati da je $h = f + g$ jako konveksna funkcija na I s modulom $c_1 + c_2$.

$$
\begin{aligned}
h(\lambda x + (1-\lambda)y &= (f+g)(\lambda x + (1-\lambda)y) \\
&= f(\lambda x + (1-\lambda)y) + g(\lambda x + (1-\lambda)y) \\
&\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - c_1\lambda(1-\lambda)(x-y)^2 + g(\lambda x + (1-\lambda)y) \\
&\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - c_1\lambda(1-\lambda)(x-y)^2 \\
&+ \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) - c_2\lambda(1-\lambda)(x-y)^2 \\
&= \lambda(f(x)+g(x)) + (1-\lambda)(f(y)+g(y)) - (c_1+c_2)(1-\lambda)(x-y)^2 \\
&= \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y) - (c_1+c_2)(1-\lambda)(x-y)^2.
\end{aligned}
$$

Prva nejednakost slijedi iz činjenice da je f jako konveksna s modulom c_1, a druga nejednakost slijedi iz činjenice da je g jako konveksna s modulom c_2. Dakle, dokazali smo da vrijedi da je $h = f + g$ jako konveksna funkcija na I s modulom $c_1 + c_2$. □

Propozicija 2.0.6. *Neka je $M > 0$. Ako je f jako konveksna na I s modulom c, tada je Mf jako konveksna na I s modulom Mc.*

Dokaz. Neka je f jako konveksna na I s modulom c. Treba pokazati da je $g = Mf$ jako konveksna na I s modulom Mc.

$$
\begin{aligned}
g(\lambda x + (1-\lambda)y) &= Mf(\lambda x + (1-\lambda)y) \\
&\leq \lambda Mf(x) + (1-\lambda)Mf(y) - Mc\lambda(1-\lambda)(x-y)^2 \\
&= \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) - Mc\lambda(1-\lambda)(x-y)^2,
\end{aligned}
$$

odatle slijedi da je g jako konveksna na I s modulom Mc. □

Lema 2.0.7. *(Karakterizacija jako konveksne funkcije) Funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ je jako konveksna s modulom c ako i samo ako je funkcija $g(x) = f(x) - cx^2$ konveksna.*

Dokaz. Pretpostavimo da je f jako konveksna funkcija s modulom c.

$$\begin{aligned}
g(\lambda x + (1-\lambda)y) &= f(\lambda x + (1-\lambda)y) - c(\lambda x + (1-\lambda)y)^2 \\
&\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - c\lambda(1-\lambda)(x-y)^2 - c(\lambda x + (1-\lambda)y)^2 \\
&= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - c\Big(\lambda(1-\lambda)(x^2 - 2xy + y^2) + \lambda^2 x^2 \\
&+ 2\lambda(1-\lambda)xy + (1-\lambda)^2 y^2\Big) \\
&= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - c(\lambda x^2 - 2\lambda xy + \lambda y^2 - \lambda^2 x^2 + 2\lambda^2 xy \\
&- \lambda^2 y^2 + \lambda^2 x^2 + 2\lambda xy - 2\lambda^2 xy + y^2 - 2\lambda y^2 + \lambda^2 y^2) \\
&= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - c(\lambda x^2 + (1-\lambda)y^2) \\
&= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - c\lambda x^2 - c(1-\lambda)y^2 \\
&= \lambda(f(x) - cx^2) + (1-\lambda)(f(y) - cy^2) \\
&= \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y),
\end{aligned}$$

odnosno funkcija g je konveksna.
Obrnuto, ako je g konveksna, onda

$$\begin{aligned}
f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= g(\lambda x + (1-\lambda)y) + c(\lambda x + (1-\lambda)y)^2 \\
&\leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) + c(\lambda^2 x^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy + (1-\lambda)^2 y^2) \\
&= \lambda g(x) + \lambda cx^2 - \lambda cx^2 + (1-\lambda)g(y) + (1-\lambda)cy^2 - (1-\lambda)cy^2 \\
&+ c(\lambda^2 x^2 + 2\lambda(1-\lambda)xy + (1-\lambda)^2 y^2) \\
&= \lambda(g(x) + cx^2) + (1-\lambda)(g(y) + cy^2) \\
&- c(\lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 - \lambda^2 x^2 - 2\lambda(1-\lambda)xy - (1-\lambda)^2 y^2) \\
&= \lambda(g(x) + cx^2) + (1-\lambda)(g(y) + cy^2) - c(\lambda(1-\lambda)x^2 \\
&- \lambda(1-\lambda)2xy + \lambda(1-\lambda)y^2) \\
&= \lambda(g(x) + cx^2) + (1-\lambda)(g(y) + cy^2) - c\lambda(1-\lambda)(x^2 - 2xy + y^2) \\
&= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - c\lambda(1\lambda)(x-y)^2.
\end{aligned}$$

što dokazuje da je f jako konveksna s modulom c. □

Korolar 2.0.8. *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ dva puta diferencijabilna funkcija na I. Ako postoji $d := min f''(t) > 0, t \in I$, tada je f jako konveksna na I s modulom $\frac{1}{2}d$.*

Dokaz. Iz definicije broja d slijedi da je $d \leq f''(t)$, $\forall t \in I$. Definiramo funkciju $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}dx^2$. Tada je $g'(x) = f'(x) - dx$, $g''(x) = f''(x) - d$ i prema definiciji broja d vrijedi $g''(x) \geq 0$, $\forall x \in I$. To znači da je g konveksna na I, a prema lemi 2.0.7 to znači da je f jako konveksna s modulom $\frac{1}{2}d$. □

Ovaj korolar se često koristi pri ispitivanju je li funkcija jako konveksna.

Primjer 2.0.9. *Funkcija* $f(x) = e^x - 1 - x$ *je jako konveksna na* $[0, \infty\rangle$.

Dokaz. Druga derivacija funkcije $f(x) = e^x - 1 - x$ je

$$f''(x) = e^x.$$

Funkcija e^x, na skupu $[0, \infty\rangle$, postiže minimum u točki $(0, 1)$, tj. $d = 2 > 0$ pa prema korolaru 2.0.8 funkcija $f(x) = e^x - 1 - x$ je jako konveksna na $[0, \infty\rangle$. $\square$

Primjer 2.0.10. *Funkcija* $f(x) = x^k$, $k \geq 3$ *je jako konveksna na* $[a, \infty\rangle$, $a > 0$.

Dokaz. Druga derivacija funkcije $f(x) = x^k$ je

$$f''(x) = k(k-1)x^{k-2.}$$

Za $x \in [a, \infty\rangle$, $a > 0$ i $k \geq 3$, treća derivacija od f je pozitivna jer

$$f'''(x) = k(k-1)(k-2)x^{k-3} > 0$$

tj. f'' je rastuća. To znači da za $x \geq a$ vrijedi

$$f''(x) \geq f''(a),$$

tj. $f''(a) = k(k-1)a^{k-2}$ je donja međa za f'' i uz to se radi o pozitivnom broju pa je prema korolaru 2.0.8 f jako konveksna s modulom $\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}$. $\square$

Poglavlje 3

Nejednakosti za jako konveksne funkcije

Kao što je za konveksnu funkciju dokazana Jensenova nejednakost koja u biti proširuje definicijsku nejednakost konveksnosti tako se i za jako konveksnu funkciju može dokazati odgovarajući tip nejednakosti. Ovaj je rezultat iskazan i dokazan u članku [3].

3.1 Jensenova nejednakost

Teorem 3.1.1. *Ako je $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ jako konveksna s modulom c, onda*

$$f\Big(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) - c \sum_{i=1}^{n} t_i (x_i - \overline{x})^2,$$

za svaki $x_1, \ldots, x_n \in I$ i za sve $t_1, \ldots, t_n > 0$ takve da $t_1 + \ldots + t_n = 1$ i $\overline{x} = t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n$.

Dokaz. Neka su $x_1, \ldots, x_n \in I$ i $t_1, \ldots, t_n > 0$ takvi da vrijedi $t_1 + \ldots + t_n = 1$. Stavimo $\overline{x} = t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n$ i uzmimo funkciju $g : I \to \mathbb{R}$ definiranu sa

$$g(x) = c(x - \overline{x})^2 + a(x - \overline{x}) + f(\overline{x})$$

podržavajući f na $\overline{x}$. Tada za svaki $i = 1, \ldots, n$, imamo

$$f(x_i) \geq g(x_i) = c(x_i - \overline{x})^2 + a(x_i - \overline{x}) + f(\overline{x}).$$

Množenjem obje strane sa t_i i sumiranjem, dobijemo

$$\sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) \geq c \sum_{i=1}^{n} t_i (x_i - \overline{x})^2 + a \sum_{i=1}^{n} t_i (x_i - \overline{x}) + f(\overline{x}).$$

Pošto je

$$\sum_{i=1}^{n} t_i(x_i - \overline{x}) = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i - \sum_{i=1}^{n} t_i \overline{x} = \overline{x} - \overline{x} \sum_{i=1}^{n} t_i = \overline{x} - \overline{x} \cdot 1 = 0,$$

dobivamo

$$f(\overline{x}) \leq \sum_{i=1}^{n} t_i f(x_i) - c \sum_{i=1}^{n} t_i (x_i - \overline{x})^2,$$

što smo trebali dokazati. □

3.2 Hermite-Hadamardova nejednakost

U ovom poglavlju dajemo nekoliko teorema povezanih s Hermite-Hadamardovom nejednakosti. Ti su rezultati dani u člancima [3] i [1].

Teorem 3.2.1. *Ako je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ jako konveksna s modulom c, tada vrijedi*

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{c}{12}(x-y)^2 \leq \frac{1}{y-x}\int_x^y f(s)ds \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{6}(x-y)^2, \tag{3.1}$$

za sve $x, y \in I$ takve da je $x < y$.

Vrijedi i obrat: ako je f neprekidna funkcija i zadovoljava nejednakosti (3.1) za svaki $x, y \in I$, $x < y$, tada je f jako konveksna s modulom c.

Dokaz. Desna nejednakost u (3.1) odnosno nejednakost

$$\frac{1}{y-x}\int_x^y f(s)ds \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{6}(x-y)^2 \tag{3.2}$$

slijedi integriranjem nejednakosti (2.1) po λ na segmentu $[0, 1]$.

Izračunajmo prvo integral na lijevoj strani nejednakosti (2.1). Uvedimo supstituciju $s = \lambda x + (1-\lambda)y$. Tada je $ds = (x-y)d\lambda$ odnosno $d\lambda = \frac{ds}{x-y}$. Granice 0 i 1 postaju y i x. Slijedi

$$\int_0^1 f(\lambda x + (1-\lambda)y)d\lambda = \frac{1}{x-y}\int_y^x f(s)ds = \frac{1}{y-x}\int_x^y f(s)ds.$$

Sada izračunajmo integral na desnoj strani nejednakosti (2.1).

$$\int_0^1 \lambda f(x)d\lambda + \int_0^1 (1-\lambda)f(y)d\lambda - \int_0^1 c\lambda(1-\lambda)(x-y)^2 = \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{6}(x-y)^2.$$

Dokazali smo nejednakost (3.2).
Kao što znamo, u svakoj točki $s_0 \in I$ za konveksnu funkciju g postoji potporni pravac, tj. postoji realni broj k takav da je

$$g(s) \leq k(s - s_0) + g(s_0), \qquad \forall s \in I.$$

Štoviše, taj broj k je broj iz segmenta $[g'_-(s_0), g'_+(s_0)]$. Pokazat ćemo da za jako konveksnu funkciju postoji potporna parabola. Ako je f jako konveksna funkcija, tada je $g(x) = f(x) - cx^2$ konveksna funkcija pa za točku s_0 postoji $k \in [g'_-(s_0), g'_+(s_0)] = [f'_-(s_0) - 2cs_0, f'_+(s_0) - 2cs_0]$ takav da je $g(s) \leq k(s - s_0) + g(s_0)$. Uvrstimo li $g(s) = f(s) - cs^2$ dobivamo

$$\begin{aligned} f(s) - cs^2 &\leq k(s - s_0) + f(s_0) - cs_0^2 \\ &= (k' - 2cs_0)(s - s_0) + f(s_0) - cs_0^2. \end{aligned}$$

pri čemu je $k = k' - 2cs_0$. Tada je

$$\begin{aligned} f(s) &\leq k'(s - s_0) + c(s^2 - 2s_0(s - s_0) - s_0^2) + f(s_0) \\ &= c(s - s_0)^2 + k'(s - s_0) + f(s_0) \\ &= p(s), \end{aligned}$$

tj. na desnoj strani smo dobili tzv. potpornu parabolu p i uz to vrijedi $f(s_0) = p(s_0)$.

Za dokaz lijeve strane nejednakosti (3.1) stavimo $s_0 = \frac{x+y}{2}$ te definirajmo funkciju $p : I \to \mathbb{R}$ sa $p(s) = c(s - s_0)^2 + a(s - s_0) + f(s_0)$ koja je potporna parabola u $\frac{x+y}{2}$. Integriranjem obje strane nejednakosti $f(s) \leq p(s)$ po s na intervalu $[x, y]$ dobivamo lijevu nejednakost u (3.1).

Ako je f neprekidna i zadovoljava lijevu ili desnu nejednakost u (3.1), tada je funkcija $g : I \to \mathbb{R}$ definirana s $g(x) = f(x) - cx^2, x \in I$ također neprekidna i zadovoljava lijevu ili desnu stranu izraza Herminte-Hadamardove nejednakosti, respektivno. U oba slučaja slijedi da je g konveksna. Tada prema lemi 2.0.7 slijedi da je f jako konveksna s modulom c. $\square$

Teorem 3.2.2. *Neka je $g : [a, b] \to [0, \infty\rangle$ simetrična funkcija takva da je $\int_a^b g(x)dx = 1$ i $xg(x)dx = \frac{a+b}{2}$ i $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je jako konveksna funkcija s modulom c. Tada vrijedi*

$$\begin{aligned} f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + c\Big[\int_a^b x^2 g(x)dx - \Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2\Big] &\leq \int_a^b f(x)g(x)dx \\ &\leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - c\Big[\frac{a^2+b^2}{2} - \int_a^b x^2 g(x)dx\Big]. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Dokaz. Za dokazati lijevu stranu nejednakosti (3.3) stavimo $s = \frac{a+b}{2}$, i uzmimo funkciju $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ definiranu sa $h(x) = c(x - s)^2 + m(x - s) + f(s)$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx \geq \int_a^b h(x)g(x)dx \\ &= c\int_a^b x^2 g(x)dx + (-2cs + m)\int_a^b xg(x)dx \\ &+ (cs^2 - ms + f(s))\int_a^b g(x)dx.\end{aligned}$$

Stoga, koristeći integrale

$$\int_a^b g(x)dx = 1 \quad i \quad \int_a^b xg(x)dx = \frac{a+b}{2} = s, \tag{3.4}$$

dobivamo

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &\geq c\int_a^b x^2 g(x)dx - cs^2 + f(s) \\ &= f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) + c\Big[\int_a^b x^2 g(x)dx - \Big(\frac{a+b}{2}\Big)^2\Big]\end{aligned}$$

U dokazu desne strane nejednakosti (3.3) koristimo nejednakost (2.1).

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= \int_a^b f\Big(\frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b\Big)g(x)dx \\ &\leq \int_a^b \Big(\frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b) - c\frac{(b-x)(x-a)}{(b-a)^2}(b-a)^2\Big)g(x)dx \\ &= \int_a^b \Big(\frac{bf(a) - af(b)}{b-a} + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}x - c((a+b)x - ab - x^2)\Big)g(x)dx.\end{aligned}$$

Sada, koristeći integrale (3.4), dobivamo

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &\leq \frac{bf(a) - af(b)}{b-a} + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}\frac{a+b}{2} \\ &- c\Big[\frac{(a+b)^2}{2} - ab - \int_a^b x^2 g(x)dx\Big] \\ &= \frac{f(a) + f(b)}{2} - c\Big[\frac{a^2+b^2}{2} - \int_a^b x^2 g(x)dx\Big].\end{aligned}$$

□

U sljedećem je teoremu dano profinjenje Hermite-Hadamardove nejednakosti za jako konveksnu funkciju.

Teorem 3.2.3. *Ako je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ jako konveksna funkcija s modulom c, onda*

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{c}{12}(b-a)^2 &\le \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right] + \frac{c}{48}(b-a)^2 \\ &\le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\ &\le \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f(a)+f(b)}{2}\right] - \frac{c}{24}(b-a)^2 \\ &\le \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{c}{6}(b-a)^2. \end{aligned}$$

Dokaz. Primjenom Hermite-Hadamardove nejednakosti (3.1) na svaki od intervala $[a, \frac{a+b}{2}]$ i $[\frac{a+b}{2}, b]$ dobivamo

$$f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + \frac{c}{48}(b-a)^2 \le \frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx \le \frac{f(a)+f(\frac{a+b}{2})}{2} - \frac{c}{24}(b-a)^2$$

i

$$f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + \frac{c}{48}(b-a)^2 \le \frac{2}{b-a}\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx \le \frac{f(\frac{a+b}{2})+f(b)}{2} - \frac{c}{24}(b-a)^2.$$

Sumiranjem ovih nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}\right) + \frac{2c}{48}(b-a)^2 &\le \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx \\ &\le \frac{f(a)+f(b)}{2} + f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{2c}{24}(b-a)^2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Sada, koristeći jaku konveksnost funkcije f i (3.5), dobivamo

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{c}{12}(b-a)^2 &= f\left(\frac{\frac{3a+b}{4} + \frac{a+3b}{4}}{2}\right) + \frac{c}{12}(b-a)^2 \\ &\le \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right] - \frac{c}{4}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 + \frac{c}{12}(b-a)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right] + \frac{c}{48}(b-a)^2 \\ &\le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$

Slično, koristeći opet (3.5) i jaku konveksnost funkcije f, dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx &\leq \frac{1}{2}\Big[f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)+\frac{f(a)+f(b)}{2}\Big]-\frac{c}{24}(b-a)^2\\ &\leq \frac{1}{2}\Big[\frac{f(a)+f(b)}{2}+\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{c}{4}(b-a)^2\Big]-\frac{c}{24}(b-a)^2\\ &= \frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{c}{6}(b-a)^2,\end{aligned}$$

čime se završava dokaz. □

Poglavlje 4

Karakterizacija unitarnog prostora pomoću jako konveksnih funkcija

U prethodnim poglavljima, razmatrali smo funkcije definirane na realnom intervalu I. Ali, jako konveksne funkcije mogu se razmatrati i na konveksnom podskupu D realnog normiranog prostora X. Definicija, a i osnovna svojstva vrlo su slična svojstvima realnom slučaju.

Definicija 4.0.1. *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ realni normirani prostor, D konveksni podskup od X i c pozitivna konstanta. Kažemo da je funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ jako konveksna s modulom c ako*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - c\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2, \tag{4.1}$$

za svaki $x, y \in D$ i $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$.
Kažemo da je f jako J-konveksna s modulom c ako (4.1) vrijedi samo za $\lambda = \frac{1}{2}$, odnosno

$$f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{4}\|x-y\|^2, \qquad x, y \in D. \tag{4.2}$$

Takve funkcije imaju važnu ulogu u teoriji optimizacije.
Sljedeći rezultati prikazuju odnose između jako konveksnih (jako J-konveksnih) i konveksnih (J-konveksnih) funkcija.

Lema 4.0.2. *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ realni unitarni prostor, D konveksni podskup od X i c pozitivna konstanta.*

1. *Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je jako konveksna s modulom c ako i samo ako je funkcija $g = f - c\|\cdot\|^2$ konveksna.*

2. *Funkcija $f : D \to \mathbb{R}$ je jako J-konveksna s modulom c ako i samo ako je funkcija $g = f - c\|\cdot\|^2$ J-konveksna.*

Dokaz. *1.* Pretpostavimo da je f jako konveksna s modulom c. Korištenjem elementarnih svojstava skalarnog umoška i činjenice da je $\|x\|^2 = \langle x|x\rangle$, dobivamo

$$\begin{aligned}
g(\lambda x + (1-\lambda)y) &= f(\lambda x + (1-\lambda)y) - c\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 \\
&\leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - c\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2 - c\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 \\
&= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - c\Big(\lambda(1-\lambda)(\|x\|^2 - 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2) \\
&\quad + \lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)\langle x|y\rangle + (1-\lambda)^2\|y\|^2\Big) \\
&= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - c\lambda\|x\|^2 - c(1-\lambda)\|y\|^2 \\
&= \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y),
\end{aligned}$$

što dokazuje da je g konveksna.
Obrnuto, ako je g konveksna, onda

$$\begin{aligned}
f(\lambda x + (1-\lambda)y) &= g(\lambda x + (1-\lambda)y) + c\|\lambda x + (1-\lambda)y\|^2 \\
&\leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) + c(\lambda^2\|x\|^2 + 2\lambda(1-\lambda)\langle x|y\rangle + (1-\lambda)^2\|y\|^2) \\
&= \lambda(g(x) + c\|x\|^2) + (1-\lambda)(g(y) + c\|y\|^2) - c\lambda(1-\lambda)(\|x\|^2 - 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2) \\
&= \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - c\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2,
\end{aligned}$$

što dokazuje da je f jako konveksna s modulom c.

2. Pretpostavimo da je f jako J-konveksna s modulom c. Koristeći zakon paralelograma dobivamo

$$\begin{aligned}
g\Big(\frac{x+y}{2}\Big) &= f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) - c\Big\|\frac{x+y}{2}\Big\|^2 \\
&\leq \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{4}\|x-y\|^2 - \frac{c}{4}\|x+y\|^2 \\
&= \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{4}(2\|x\|^2 + 2\|y\|^2) \\
&= \frac{g(x)+g(y)}{2}.
\end{aligned}$$

Slično, ako je g J-konveksna tada

$$\begin{aligned}
f\Big(\frac{x+y}{2}\Big) &= g\Big(\frac{x+y}{2}\Big) + c\Big\|\frac{x+y}{2}\Big\|^2 \\
&\leq \frac{g(x)+g(y)}{2} + \frac{c}{4}\|x+y\|^2 \\
&= \frac{g(x)+\|x\|^2}{2} + \frac{g(y)+\|y\|^2}{2} + \frac{c}{4}(\|x+y\|^2 - 2\|x\|^2 - 2\|y\|^2) \\
&= \frac{f(x)+f(y)}{2} - \frac{c}{4}\|x-y\|^2.
\end{aligned}$$

□

Poznato je da u normiranom prostoru $(X, \|\cdot\|)$ vrijedi Jordan-von Neumannov zakon paralelograma
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \qquad x, y \in X,$$
ako i samo ako se norma $\|\cdot\|$ može izvesti iz skalarnog umnoška.

U literaturi se mogu pronaći i drugi uvjeti koji karakteriziraju unitarne prostore među normiranim prostorima. Ovdje ćemo se baviti karakteriziranjem unitarnih prostora koristeći jako konveksne i jako srednje konveksne funkcije.

Teorem 4.0.3. *Neka je $(X, \|\cdot\|)$ realni normirani prostor. Sljedeće tvrdnje su međusobno ekvivalentne:*

1. *Za svaki $c > 0$ i za svaku funkciju $f : D \to \mathbb{R}$, f je jako konveksna s modulom c ako i samo ako je funkcija $g = f - c\|\cdot\|^2$ konveksna;*
2. *Za svaki $c > 0$ i za svaku funkciju $f : D \to \mathbb{R}$, f je jako J-konveksna s modulom c ako i samo ako je funkcija $g = f - c\|\cdot\|^2$ J-konveksna;*
3. *Postoji $c > 0$ takav da za svaku funkciju $f : D \to \mathbb{R}$, g je konveksna funkcija ako i samo ako je funkcija $f = g + c\|\cdot\|^2$ jako konveksna s modulom c;*
4. *Postoji $c > 0$ takav da za svaku funkciju $f : D \to \mathbb{R}$, funkcija g je J-konveksna ako i samo ako je $f = g + c\|\cdot\|^2$ jako J-konveksna s modulom c;*
5. *Funkcija $\|\cdot\|^2 : X \to \mathbb{R}$ je jako konveksna s modulom 1;*
6. *Funkcija $\|\cdot\|^2 : X \to \mathbb{R}$ je jako J-konveksna s modulom 1;*
7. *$(X, \|\cdot\|)$ je unitarni prostor.*

Dokaz. Pokazati ćemo sljedeći lanac implikacija $1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 5 \Rightarrow 7 \Rightarrow 1$ i $2 \Rightarrow 4 \Rightarrow 6 \Rightarrow 7 \Rightarrow 2$.

Implikacije $1 \Rightarrow 3$ i $2 \Rightarrow 4$ su očite. Za pokazati $3 \Rightarrow 5$ i $4 \Rightarrow 7$ uzmimo $g = 0$. Tada je $f = c\|\cdot\|^2$ jako konveksna (odnosno jako J-konveksna) s modulom c. Slijedi, $\frac{1}{c}f = \|\cdot\|^2$ je jako konveksna (odnosno jako J-konveksna) s modulom 1.

Da bismo vidjeli da $5 \Rightarrow 7$ i $6 \Rightarrow 7$ također vrijedi, primijetimo da, zbog jake konveksnosti ili jake J-konveksnosti s modulom 1 od $\|\cdot\|^2$ imamo
$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 \leq \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2} - \frac{1}{4}\|x-y\|^2,$$
dakle
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{4.3}$$

za svaki $x, y \in X$. Sada, uvrštavanjem $u = x + y$ i $v = x - y$ u (4.1), dobijemo

$$2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \leq \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2, \qquad u, v \in X. \tag{4.4}$$

Nejednakosti (4.3) i (4.4) znače da norma $\|\cdot\|$ zadovoljava zakon paralelograma, iz čega slijedi da je $(X, \|\cdot\|)$ unitarni prostor.

Implikacije $7 \Rightarrow 1$ i $7 \Rightarrow 2$ slijede iz leme 4.0.2. $\square$

Poglavlje 5

Teoremi separacije

Dvije funkcije $f, g : I \to \mathbb{R}$ mogu biti odvojene konveksnom funkcijom ako i samo ako

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y), \quad x, y \in I, \lambda \in [0,1].$$

Ovaj je teorem separacije dokazan u članku [2]. Pokazat ćemo analogon ovog rezultata za jako konveksne funkcije. Ovaj je rezultat u modificiranom obliku dan u članku [4].

Teorem 5.0.1. *Neka su $f, g : I \to \mathbb{R}$ i neka je $c > 0$. Postoji jako konveksna funkcija $h : I \to \mathbb{R}$ takva da vrijedi $f \leq h \leq g$ na I ako i samo ako vrijedi*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y) - ct(1-t)(x-y)^2, . \tag{5.1}$$

pri čemu je $x, y \in I, t \in [0,1]$.

Dokaz. Pretpostavimo da postoji jako konveksna funkcija h takva da za sve $x \in I$ vrijedi

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Tada imamo ovaj niz nejednakosti:

$$\begin{aligned} f(tx + (1-t)y) &\leq h(tx + (1-t)y) \\ &\leq th(x) + (1-t)h(y) - ct(1-t)(x-y)^2 \\ &\leq tg(x) + (1-t)g(y) - ct(1-t)(x-y)^2 \end{aligned}$$

što je upravo nejednakost (5.1).
Da bi smo dokazali drugi smjer, pretpostavimo da funkcije f, g zadovoljavaju (5.1) i uzmimo funkcije $f_1, g_1 : I \to \mathbb{R}$ takve da

$$f_1(x) = f(x) - cx^2, \quad g_1(x) = g(x) - cx^2, \quad x \in I.$$

Korištenjem (5.1) dobivamo

$$\begin{aligned} f_1(tx+(1-t)y) &= f(tx+(1-t)y) - c(tx+(1-t)y))^2 \\ &\leq tg(x)+(1-t)g(y) - ct(1-t)(x-y)^2 - c(tx+(1-t)y))^2 \\ &= tg(x)+(1-t)g(y) - ctx^2 - c(1-t)y^2 \\ &= tg_1(x)+(1-t)g_1(y), \end{aligned}$$

za sve $x, y \in I, t \in [0,1]$. Dakle, postoji konveksna funkcija $h_1 : I \to \mathbb{R}$ takva da $f_1 \leq h_1 \leq g_1$ na I. Definirajmo $h(x) = h_1(x) + cx^2, x \in I$. Tada prema lemi 2.0.7, h je jako konveksna funkcija s modulom c i $f \leq h \leq g$ na I. □

Kao posljedica prethodnog teorema dobivamo sljedeći rezultat.
Neka je $\epsilon > 0$. Kažemo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ ϵ-jako konveksna s modulom c ako vrijedi

$$f(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y) - ct(1-t)(x-y)^2 + \epsilon,$$

za sve $x, y \in I, t \in [0,1]$.

Korolar 5.0.2. *Ako je $f : I \to \mathbb{R}$ ϵ-jako konveksna s modulom c, onda postoji funkcija $h : I \to \mathbb{R}$ koja je jako konveksna s modulom c i za koju vrijedi*

$$|f(x) - h(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}, \qquad x \in I.$$

Dokaz. Stavimo $g = f + \epsilon$. Prema ϵ-jakoj konveksnosti funkcije f slijedi da f i g zadovoljavaju (5.1). Dakle, prema teoremu 5.0.1, postoji funkcija $h_1 : I \to \mathbb{R}$ koja je jako konveksna s modulom c i za koju vrijedi $f \leq h_1 \leq g = f + \epsilon$ na I. Stavimo $h = h_1 - \frac{\epsilon}{2}$ i dobijemo

$$|f(x) - h(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}, \qquad x \in I,$$

i, očito, h je jako konveksna s modulom c. □

U članku [2] dokazan je sljedeći teorem.

Teorem 5.0.3. *Neka su f i g realne funkcije definirane na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$.*
Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:

1. *Postoji afina funkcija $h : I \to \mathbb{R}$ takva da je $f \leq h \leq g$;*

2. *Vrijede sljedeće nejednakosti:*

$$f(tx+(1-t)y) \leq tg(x)+(1-t)g(y)$$

$$g(tx+(1-t)y) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$$

za sve $x, y \in I$ i $t \in [0,1]$.

Sljedeći teorem daje nam rezultat analogan gornjem, ali za jako konveksne funkcije. Taj se rezultat može naći u članku [4], ali ovdje ćemo mu dati drugačiji dokaz.

Teorem 5.0.4. *Neka su f i g realne funkcije definirane na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. *Postoji kvadratna funkcija $h : I \to \mathbb{R}$, $h(x) = cx^2 + bx + a$, $c > 0$ takva da $f \leq h \leq g$;*
2. *Vrijede sljedeće nejednakosti*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y) - ct(1-t)(x-y)^2,$$

$$g(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - ct(1-t)(x-y)^2.$$

Dokaz. Dokažimo (1) $\Rightarrow$ (2). Pretpostavimo da za f, g postoji funkcija $h(x) = cx^2+bx+a$, $c > 0$ takva da je

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x).$$

Definiramo funkcije f_1, g_1, h_1 ovako:

$$f_1(x) = f(x) - cx^2, \quad g_1(x) = g(x) - cx^2, \quad h_1(x) = h(x) - cx^2.$$

Tada je $h_1(x) = (cx^2 + bx + a) - cx^2 = bx + a$, tj. h_1 je afina funkcija.
Iz nejednakosti $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$, oduzimanjem izraza cx^2 dobivamo

$$f_1(x) \leq h_1(x) \leq g_1(x).$$

Dakle, vrijedi (1) iz teorema 5.0.3. Prema teoremu 5.0.3, tada za f_1, g_1 vrijedi i (2), tj. vrijede nejednakosti

$$f_1(tx + (1-t)y) \leq tg_1(x) + (1-t)g_1(y) \tag{5.2}$$

$$g_1(tx + (1-t)y) \leq tf_1(x) + (1-t)f_1(y) \tag{5.3}$$

za sve $x, y \in I$, $t \in [0, 1]$.
Uvrštavanjem $f_1(x) = f(x) - cx^2, g_1(x) = g(x) - cx^2$ u (5.2) dobivamo:

$$f(tx + (1-t)y) - c(tx + (1-t)y)^2 \leq tg(x) - ctx^2 + (1-t)g(y) - c(1-t)y^2$$

$$f(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y) - c[tx^2 + (1-t)y^2 - (tx + (1-t)y)^2] \tag{5.4}$$

Sredimo izraz $tx^2 + (1-t)y^2 - (tx + (1-t)y)^2$ iz (5.4):

$$\begin{aligned} tx^2 + (1-t)y^2 - (tx + (1-t)y)^2 &= tx^2 + (1-t)y^2 - t^2x^2 - 2t(1-t)xy - (1-t)^2y^2 \\ &= x^2(t - t^2) - 2t(1-t)xy + y^2(1 - t - (1-t)^2) \\ &= x^2t(1-t) - 2t(1-t)xy + y^2(1-t)(1-(1-t)) \\ &= t(1-t)(x^2 - 2xy + y^2) \\ &= t(1-t)(x-y)^2. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem tog izraza natrag u (5.4) dobivamo da vrijedi prva nejednakost u (2). Druga se nejednakost dokazuje na sličan način.
Pri dokazu implikacije (2) $\Rightarrow$ (1) koristimo iste funkcije f_1, g_1, h_1 koje smo definirali u prvom dijelu dokaza. Pretpostavimo da vrijedi (2), tj. da za $x, y \in I$, $t \in [0,1]$ vrijede nejednakosti

$$f(tx + (1-t)y) \leq tg(x) + (1-t)g(y) - ct(1-t)(x-y)^2,$$

$$g(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - ct(1-t)(x-y)^2.$$

Kao u dokazu prvog dijela dobijemo da tada vrijede nejednakosti

$$f_1(tx + (1-t)y) \leq tg_1(x) + (1-t)g_1(y),$$

$$g_1(tx + (1-t)y) \leq tf_1(x) + (1-t)f_1(y).$$

Tada, prema teoremu 5.0.3, postoji afina funkcija $h_1(x) = bx + a$ takva da je

$$f_1(x) \leq h_1(x) \leq g_1(x).$$

Dodavanjem izraza cx^2 svakoj strani gornje nejednakosti dobivamo

$$f_1(x) + cx^2 \leq h_1(x) + cx^2 \leq g_1(x) + cx^2$$

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x),$$

tj. dobivamo (1). Time je dokazana druga implikacija. $\square$

Bibliografija

[1] A. Azocar, K. Nikodem, G. Roa, Fejer-type inequalities for strongly convex functions, Annales Mathematicae Silesianae 26 (2012), 43-54

[2] K. Baron, J. Matkowski, K. Nikodem: A sandwich with convexity, Math.Pannon. 5(1), (1994), 139–144.

[3] N. Merentes, K. Nikodem, Remarks on strongly convex functions, Aequationes Mathematicae 80 (2010), 193-199

[4] N. Merentes, K. Nikodem, Strong convexity and separation theorems, Aequationes Mathematicae 90 (2016) 47–55.

[5] C. P. Niculescu, L. E. Persson, Convex functions and their applications, A Contemporary Approach, CMS Books in Mathematics, vol. 23, Springer, New York, 2006.

[6] K. Nikodem, Z. Pales, Characterizations of inner product spaces by strongly convex functions, Banach Journal of Mathematical Analysis 5 (2011), no. 1, 83–87

[7] K. Nikodem, S. Wasowicz, A sandwich theorem and Hyers-Ulam stability of affine functions, Aequationes Mathematicae, 1995.

[8] B. G. Pachpatte, On some inequalities for convex functions, RGMIA Res. Rep. Coll., 6(E), 2003.

[9] J. Pečarić, Nejednakosti, Zagreb, 1996.

[10] B. T. Polyak, Existence theorems and convergence of minimizing sequence in extremum problems with restrictions. Soviet Math. Dokl. 7, 72-75 (1966)

Sažetak

Tema ovoga rada su jako konveksne funkcije. Rad je podijeljen na pet poglavlja.

Prvo poglavlje sadrži osnovne pojmove i teoreme koje koristimo kroz rad. Dana je definicija, primjeri i osnovna svojstva konveksnih funkcija, a zatim su opisane operacije s konveksnim funkcijama. Na kraju prvog poglavlja dana je veza konveksnih funkcija s Jensenovom nejednakosti i Hermite-Hadamardovom nejednakosti koja je ujedno i karakterizacija konveksne funkcije.

U drugom poglavlju uvodimo pojam jako konveksnih funkcija kao poopćenje konveksnih funkcija. Osnovna definicija jako konveksne funkcije glasi:
Neka je $I \subset R$ interval i c pozitivan broj. Znamo da je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ jako konveksna funkcija s modulom c ako vrijedi

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - c\lambda(1-\lambda)(x-y)^2,$$

za svaki $x, y \in I$ i $\lambda \in [0, 1]$.
Također, u drugom poglavlju poopćavaju se neka svojstva konveksnih funkcija za jako konveksne funkcije.

U trećem poglavlju navodimo i dokazujemo poopćenje Jensenove i Hermite-Hadamardove nejednakosti za jako konveksne funkcije te nekoliko teorema povezanih s Hermite-Hadamardovom nejednakosti.

Četvrto poglavlje daje uvid u karakterizaciju unitarnog prostora pomoću jako konveksnih funkcija.

U petom poglavlju dajemo poopćenje teorema separacije za jako konveksne funkcije.

Summary

The topic of this paper is strongly convex functions. The paper is divided into five chapters.

The first chapter contains basic concepts and theorems that we use in paper. The definition, examples and description of basic properties of convex functions are given, and then the operations with convex functions are described. At the end of the first chapter there is a connection of convex functions with Jensen's inequality and the Hermite-Hadamard inequality, which is also the characterization of convex functions.

In the second chapter, we introduce the notion of strongly convex functions as a generalization of convex functions. Definition of convex function is:
Let $I \subset R$ be an interval and c be a positive number. A function $f : I \to \mathbb{R}$ is called strongly convex function with modulus c if

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - c\lambda(1-\lambda)(x-y)^2,$$

for all $x, y \in I$ and $\lambda \in [0, 1]$.
Also, in the second chapter, some properties of convex functions are generalized for strongly convex functions.

In the third chapter, we state and prove the generalization of the Jensen and Hermite-Hadamard inequalities for strongly convex functions and several theorems related to the Hermite-Hadamard inequality.

The fourth chapter provides an insight into the characterization of the unitary space using strongly convex functions.

In the fifth chapter, we give a generalization of the separation theorem for strongly convex functions.

Životopis

Zovem se Lucija Novak i rođena sam 28. studenog 1996. u Splitu. Odrasla sam u Kaštel Lukšiću gdje sam pohađala osnovnu školu "Ostrog". Završila sam srednju školu, V. gimnazija "Vladimir Nazor", u Splitu. Godine 2015. upisala sam Prirodoslovno-matematički fakultet u Splitu, smjer Matematika i informatika. Nakon završenog preddiplomskog studija u Splitu upisala sam diplomski studij na Pridoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, nastavnički smjer Matematika i informatika. Završila sam osnovnu glazbenu školu "Josip Hatze", smjer flauta i aktivno sviram u orkestru "HGD Biranj" u Kaštel Lukšiću. Trenutno radim u Osnovnoj školi "Split 3" kao nastavnica matematike i informatike.