Reprezentacije konačnih grupa

Perica, Fran

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Fran Perica

REPREZENTACIJE KONAČNIH GRUPA

Diplomski rad

Voditelj rada:
Prof. Dr. Sc. Pavle Pandžić

Zagreb, rujan, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Prvenstveno bih htio zahvaliti mentoru Pavli Pandžiću na strpljenju, savjetima i potpori.
Zahvaljujem užoj obitelji i prijateljima na motivaciji i potpori tijekom studiranja

Sadržaj

Uvod

U prvom poglavlju se spominju važne osnovne definicije vezane uz reprezentacije s restrikcijama koje se protežu kroz cijeli rad, poimence konačnost grupa i konačnost dimenzija vektorskih prostora. Kreće se od same definicije reprezentacije na konačnoj grupi i vektorskom prostoru konačne dimenzije, kao što je definirana u [6]. Zatim se gleda mapiranje reprezentacija što nas dovodi do Schurove leme koja je od velike važnosti u teoriji reprezentacija. Poglavlje završava s primjerom Abelove grupe $\mathfrak{S}_3$, koji nas uvodi u praktični rad s reprezentacijama.
Drugo poglavlje je u cijelosti posvećeno karakterima reprezentacija i projekcijskim funkcijama. Kreće se od same definicije karaktera, zatim se definiraju karakteri od različitih kombinacija dviju reprezentacija, te poglavlje završava primjerom gdje se nalazi tablica karaktera od $\mathfrak{S}_4$ i kratkim opisom projekcijskih formula.
Treće poglavlje je većinski praktično zbog velike posvećenosti primjerima, u kojima se pronalaze tablice karaktera od $\mathfrak{S}_5$ i $\mathfrak{A}_5$, koji su skraćeno prikazani u [3]. Zatim se uvode inducirane reprezentacije i bitna Frobeniusova recipročnost. Na kraju se kratko upoznaje s grupnom algebrom i pronalaskom načina kako možemo saznati je li neka reprezentacija realna, ako znamo kakav je njezin karakter.

Poglavlje 1

Reprezentacije

1.1 Definicije

Reprezentacija konačne grupe G na konačno-dimenzionalnom kompleksnom vektorskom prostoru V je homomorfizam $\rho : G \to GL(V)$ sa grupe G u grupu automorfizama od V; kažemo da takva mapa, odnosno funkcija, daje vektorskom prostoru V strukturu G-modula. Često i sam vektorski prostor V nazivamo reprezentacijom od G, te umjesto $\rho(g)(v)$, odnosno $\rho(gv)$, pišemo $g \cdot v$ ili gv.

Definicija 1.1.1.

Linearna reprezentacija grupe G u V je homomorfizam ρ iz grupe G u grupu $GL(V)$ tako da svaki element $g \in G$ povezujemo sa $\rho(g)$ iz $GL(V)$ tako da vrijedi jednakost:

$$\rho(gv) = \rho(g) \cdot \rho(v), \qquad \forall g, v \in G. \tag{1.1}$$

Iz ovoga odmah imamo

$$\rho(1) = 1, \qquad \rho(g^{-1}) = \rho(g)^{-1}. \tag{1.2}$$

Za dimenziju od V kažemo da je stupanj od ρ

Mapa ϕ između dvije reprezentacije V i W od G je mapa vektorskog prostora $\phi : V \to W$ takva da ona komutira za svaki $g \in G$. Njen prikaz vidimo na slici 1.1

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "g"'] & W \arrow[d, "g"] \\ V \arrow[r, "\phi"'] & W \end{tikzcd}$$

Slika 1.1: 1.Dijagram

Takav ϕ ćemo nazivati G-linearna mapa kako bi je razlikovali od neke proizvoljne linearne mape između vektorskih prostora V i W. Onda možemo definirati i Ker ϕ, Im ϕ i Coker ϕ koji su također G-moduli.

Definicija 1.1.2.

Neka je $\phi : G \to GL(V)$ linearna reprezentacija i W potprostor od V. Ako $w \in W$ povlači da je $\rho(g)(w) \in W$ za svaki $g \in G$, onda je W invarijantan pod G.

Definicija 1.1.3.

Podreprezentacija reprezentacije V je vektorski potprostor W od V koji je invarijantan pod G. Za reprezentaciju V kažemo da je ireducibilna ako ne postoji niti jedan invarijantan potprostor W od V koji nije nulprostor.

Ako su V i W reprezentacije, tada su njihova direktna suma $V \oplus W$ i tenzorski produkt $V \otimes W$ također reprezentacije. Tenzorski produkt preko jednakosti:

$$g(v \otimes w) = gv \otimes gw. \tag{1.3}$$

Dualni prostor $V^* = \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$ od V je također reprezentacija, ali to nije u potpunosti očito. Cilj nam je da te dve reprezentacije od G poštuju prirodno sparivanje, koje označavamo s $\langle\ ,\ \rangle$, između V^* i V tako da ako je $\rho : G \to GL(V)$ reprezentacija i $\rho^* : G \to GL(V^*)$ njen dual onda vrijedi:

$$\langle \rho^*(g)(v^*), \rho(g)(v) \rangle = \langle v^*, v \rangle. \tag{1.4}$$

Za svaki $g \in G$, $v \in V$ and $v^* \in V^*$. Zbog čega moramo definirati dualnu reprezentaciju sa:

$$\rho^*(g) = {}^t\rho(g^{-1}) : V^* \to V^* \qquad \forall g \in G. \tag{1.5}$$

Definirali smo dual reprezentacije i tenzorski produkt dviju reprezentacija. Ako su V i W reprezentacije onda je također i $\mathrm{Hom}(V, W)$ reprezentacija, uz: $\mathrm{Hom}(V, W) = V^* \otimes W$. Ako pogledamo element od $\mathrm{Hom}(V, W)$ kao linearnu mapu ϕ iz V u W imamo

$$(g\phi)(v) = g\phi(g^{-1}v). \tag{1.6}$$

Za svaki $v \in V$. Definicija je takva da dijagram na slici 1.2 komutira

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "g"'] & W \arrow[d, "g"] \\ V \arrow[r, "g\phi"'] & W \end{tikzcd}$$

Slika 1.2: 2. Dijagram

Primijetimo da je dualna reprezentacija zapravo poseban slučaj ovoga: kada je $W = \mathbb{C}$ trivijalna reprezentacija, odnosno

$$gw = w, \quad \forall w \in \mathbb{C} \tag{1.7}$$

V^* postaje G-modul s

$$g\phi(v) = \phi(g^{-1}v), \tag{1.8}$$

odnosno

$$g\phi = {}^t(g^{-1})\phi. \tag{1.9}$$

Uzeli smo identifikaciju $\mathrm{Hom}(V, W) = V^* \otimes W$ kao definiciju reprezentacije $\mathrm{Hom}(V, W)$. Općenitije, uobičajeni identiteti za vektorske prostore također vrijede za reprezentacije npr.

$$V \otimes (U \oplus W) = (V \otimes U) \oplus (V \otimes W), \tag{1.10}$$

$$\Lambda^k(V \oplus W) = \bigoplus_{a+b=k} \Lambda^a V \otimes \Lambda^b W, \tag{1.11}$$

$$\Lambda^k(V^*) = \Lambda^k(V)^*. \tag{1.12}$$

Za reprezentaciju V, tenzorska potencija n-tog stupnja $V^{\otimes n}$ je reprezentacija od G, a vanjske potencije $\Lambda^n(V)$ i simetrične potencije $Sym^n(V)$ su podreprezentacije od G.

Ako je X neki konačan skup i G djeluje na njega s lijeve strane, odnosno $G \to \mathrm{Aut}(X)$ je homomorfizam grupi permutacija X, postoji i pridružena permutacijska reprezentacija: Neka je V vektorski prostor s bazom $e_x : x \in X$, i neka G djeluje na V s

$$g \cdot \sum a_x e_x = \sum a_x e_{gx}. \tag{1.13}$$

Regularna reprezentacija, koju označavamo s R_G ili R, odgovara lijevoj akciji od G na samu sebe. Alternativno, R je prostor kompleksnih funkcija na G, gdje element $g \in G$ djeluje na funkciju α s

$$(g\alpha)(h) = \alpha(g^{-1}h). \tag{1.14}$$

1.2 Schurova Lema

Do sada smo vidjeli da reprezentacije od G možemo dobiti pomoću drugih reprezentacija, koristeći linearno algebarske operacije, kao što smo već pokazali preko direktne sume. Kako bi lakše klasificirali reprezentacije grupe G treba promatrati reprezentacije koje su čestične u odnosu na tu operaciju, odnosno koje nisu direktna suma nekih reprezentacija.

Takve reprezentacije se nazivaju nerazložive reprezentacije. Reprezentacija je nerazloživa ako i samo ako nije reducibilna, također svaka reprezentacija je direktna suma nekih reprezentacija koje su ireducibilne. Ključ ovome je sljedeća propozicija.

Propozicija 1.2.1.

Ako je W podreprezentacija reprezentacije V neke konačne grupe G onda postoji komplementarni invarijanti potprostor W' od V takav da

$$V = W \oplus W'. \tag{1.15}$$

Dokaz:
Postoje više različitih dokaza, ovdje će se pokazati dva načina. Prvi je preko unutarnjeg Hermitskog produkta H na V koji je očuvan sa svakim $g \in G$, odnosno tako da vrijedi

$$H(gv, gw) = H(v, w), \quad \forall v, w \in V \ \ i \ \ g \in G. \tag{1.16}$$

Zaista ako je H_0 bilo koji Hermitski produkt na V, koji se dobiva usrednjavanjem na G:

$$H(v, w) = \sum_{g \in G} H_0(gv, gw). \tag{1.17}$$

Onda iz činjenice da imamo konačno-dimenzionalan prostor unutarnjeg produkta slijedi da je okomiti potprostor $W^\perp$ komplementaran potprostoru W u V, odnosno da vrijedi

$$W^\perp \cap W = 0 \quad i \quad W^\perp + W = V. \tag{1.18}$$

Drugi način je da uzmemo proizvoljni potprostor U koji je komplementaran s W, pa je

$$V \cong W \oplus U \tag{1.19}$$

Dakle bilo koji $v \in V$ možemo povezati s nekim uređenim parom (w, u). Neka je $\pi_0 : V \to W$ projekcija dana s dekompozicijom direktne sume $V = W \oplus U$ odnosno

$$\pi_0(w, u) = w \tag{1.20}$$

i usrednjimo mapu π_0 na G ovako:

$$\pi(v) = \sum_{g \in G} g(\pi_0(g^{-1}v). \tag{1.21}$$

To će onda biti G-linearna mapa s V na W jer je i π_0 G-linearna. Štoviše za W vrijedi

$$\pi(w) = \sum_{g\in G} g\pi_0(g^{-1}w) = \sum_{g\in G} gg^{-1}\pi_0(w) = |G|w \tag{1.22}$$

što je množenje s $|G|$ na W i zato će ljuska biti potprostor od V koji je invarijatan pod G i komplementaran potprostoru W

Korolar 1.2.1.

Svaka reprezentacija je direktna suma reprezentacija koje su ireducibilne

To se naziva potpunom reducibilnosti. Kontinuirane reprezentacije, kao npr. jedinična kružnica ili bilo koja kompaktna grupa, imaju to svojstvo. Integriranje po grupi igra ulogu usrednjavanja iz gornjeg dokaza. Aditivna grupa $\mathbb{R}$ nema to svojstvo jer reprezentacija

$$a \mapsto \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

ostavlja x-os fiksiranom, ali nema komplementarnog potprostora.
Doseg jedinstvenosti dekompozicije neke proizvoljne reprezentacije na direktnu sumu reprezentacija koje su ireducibilne je jedna od posljedica Schurove Leme.

Schurova Lema

Ako su V i W reprezentacije od G koje su ireducibilne i ako je $\phi : V \to W$ homomorfizam G-modula onda:

1) ϕ je izomorfizam ili $\phi = 0$
2) Ako je $V = W$, onda je $\phi = \lambda \cdot I$ za neki $\lambda \in \mathbb{C}$, I je identiteta

Dokaz:
Prva tvrdnja slijedi direktno iz činjenice da su Ker ϕ i Im ϕ invarijatni potprostori, jer su onda jedini takvi potprostori od V i W oni sami i njihovi nul-prostori. Ako je Ker ϕ cijeli V ili ako je Im $\phi = 0$ onda je i $\phi = 0$. U jedinom preostalom slučaju gdje je Ker $\phi = 0$, a Im ϕ je cijeli W, ϕ je bijekcija, pa i izomorfizam.

Za drugu tvrdnju primjetimo da je $\mathbb{C}$ algebarski zatvoren, pa po fundamentalnom teoremu algebre za algebarski zatvorena polja ϕ mora imati svojstvenu vrijednost λ. Iz prve tvrdnje ϕ mora biti ili izomorfizam ili 0, no svi svojstveni vektori s λ moraju biti u jezgri, pa znamo da nije izomorfizam, odnosno za neki $\lambda \in \mathbb{C}$, $\phi - \lambda I$ ima ljusku koja je različita od nule. Po prvoj tvrdnji je onda $\phi - \lambda I = 0$, dakle $\phi = \lambda I$

Propozicija 1.2.2.

Za bilo koju reprezentaciju konačne grupe G, postoji dekompozicija

$$V = V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k} \tag{1.24}$$

gdje su V_i međusobno različite reprezentacije koje su ireducibilne. Dekompozicija od V u direktnu sumu k faktora je jedinstvena, kao što su i svi V_i i njihove mnogostrukosti a_i.

Dokaz:
Iz druge tvrdnje Schurove leme slijedi da, ako je W neka druga reprezentacija od G s dekompozicijom $W = W_1^{\oplus b_1} \oplus \cdots \oplus W_j^{\oplus b_j}$ i $\phi : V \to W$ je mapa reprezentacija onda ϕ mora mapirati faktor $V_i^{\oplus a_i}$ u faktor $W_j^{\oplus b_j}$ tako da se očuva jednakost $W = V$ iz Schurove leme, odnosno da vrijedi $W_j \cong V_i$. Kada se to primijeni na mapu koja je identiteta iz V u V spomenuta jedinstvenost slijedi.

Dekompozicija i-tog sumanda u direktnu sumu od a_i kopija od V_i nije jedinstvena ako $a_i > 1$. Nekada se dekompozicija zapisuje kao

$$V = a_1 V_1 \oplus \cdots \oplus a_k V_k = a_1 V_1 + \cdots + a_k V_k, \tag{1.25}$$

pogotovo kada su bitne samo klase izomorfizma i mnogostrukosti od V_i. Za konačnu grupu

G postoji konačno mnogo reprezentacija V_i koje su ireducibilne, naravno do na izomorfizam.

Sada je moguće klasificirati sve reprezentacije od konačne grupe G. Kada opišemo ireducibilne reprezentacije od G, onda možemo opisati i proizvoljnu reprezentaciju kao linearnu kombinaciju tih ireducibilnih.

Potrebno je pronaći tehnike za dobivanje dekompozicije direktne sume i određivanje mnogostrukosti a_i neke proizvoljne reprezentacije od V. Promatrat će se reprezentacije koje proizlaze iz jednostavnijih reprezentacija kada se na njih primjene linearne ili multilinearne algebarske operacije. Da bi se opisale promatrane reprezentacije koristi se tehnika koja se zove pletizam.

Pletizam: Opisati dekompozicije s mnogostrukostima reprezentacija dobivenih iz dane reprezentacije V, kao što su $V \otimes V, V^*, \Lambda^k(V)$,$\mathrm{Sym}^k(V)$ i $\Lambda^k(\Lambda^l V)$. Ako se V dekompozira na sumu dviju reprezentacija, te reprezentacije se dekompoziraju ovako: npr. ako je $V = U \oplus W$ onda je

$$\Lambda^k V = \bigoplus_{i+j=k} \Lambda^i U \otimes \Lambda^j W. \tag{1.26}$$

Dakle dovoljno je napraviti pletizam za ireducibilne reprezentacije. Ako su V i W dvije ireducibilne reprezentacije, onda treba dekompozirati $V \otimes W$ što je poznato kao Clebsch-Gordanov problem.

1.3 Primjeri: Abelove grupe; $\mathfrak{S}_3$

Neka je V reprezentacija konačne grupe G (koja ne mora nužno biti Abelova), svaki $g \in G$ daje mapu $\rho(g) : V \to V$, ali takva mapa nije općenito homomorfizam G-modula. Za općeniti $h \in G$ imamo

$$g(h(v)) \neq h(g(v)), \tag{1.27}$$

a $\rho(g) : V \to V$ će biti G-linearna za svaki ρ ako i samo ako je g u centru $Z(G)$ od G. Ako je G Abelova grupa i V ireducibilna reprezentacija, onda po Schurovoj lemi svaki $g \in G$ djeluje na V skalarnim višekratnikom identiteta. Svaki potprostor od V je dakle invarijantan, tako da V mora biti jednodimenzionalan. Ireducibilne reprezentacije neke Abelove grupe G su elementi dualne grupe, odnosno homomorfizmi

$$\rho : G \to \mathbb{C}^*. \tag{1.28}$$

Neka je $G = \mathfrak{S}_3$, odnosno najjednostavnija grupa koja nije Abelova. Imamo dvije jednodimenzionalne reprezentacije od kojih je jedna trivijalna i označena s U, a druga alternirajuća s oznakom U' i definirana s

$$gv = sgn(g)v, \qquad \forall g \in G, v \in \mathbb{C}. \tag{1.29}$$

G je permutacijska grupa pa postoji prirodna permutacijska reprezentacija, gdje G djeluje na $\mathbb{C}^3$ permutirajući koordinate. Eksplicitno ako je e_1, e_2, e_3 standardna baza onda je

$$g \cdot e_1 = e_{g(i)} \tag{1.30}$$

što je ekvivalentno s

$$g \cdot (z_1, z_2, z_3) = (z_{g^{-1}(1)}, z_{g^{-1}(2)}, z_{g^{-1}(3)}). \tag{1.31}$$

Ova reprezentacija nije ireducibilna. Linija koju razapinje suma (1,1,1) vektora baze je invarijatna uz komplementaran prostor

$$V = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_1 + z_2 + z_3 = 0\}. \tag{1.32}$$

Lako se provjeri da je ta dvodimenzionalna reprezentacija ireducibilna i zove se standardna reprezentacija od $\mathfrak{S}_3$

Da se opiše proizvoljna reprezentacija W od $\mathfrak{S}_3$ treba pogledati kako djeluje Abelova podgrupa $\mathfrak{U}_3 = \mathbb{Z}/3 \subset \mathfrak{S}_3$ na W. Dobiva se sljedeća dekompozicija: ako je τ bilo koji generator od $\mathfrak{U}_3$ prostor W je razapet svojstvenim vrijednostima v_i za djelovanje od τ, čije su svojstvene vrijednosti sve potencije trećeg korijena od $\omega = e^{2\pi i/3}$. Zato

$$W = \oplus V_i, \tag{1.33}$$

gdje je

$$V_i = \mathbb{C}v_i \quad i \quad \tau v_i = \omega^{\alpha_i} v_i. \tag{1.34}$$

Sada je pitanje kako preostali elementi od $\mathfrak{S}_3$ djeluju na W s obzirom na tu dekompoziciju. Neka je σ bilo koja transpozicija, takva da τ i σ generiraju $\mathfrak{S}_3$, s relacijom

$$\sigma\tau\sigma = \tau^2. \tag{1.35}$$

Pomoću gornje relacije dobiva se način djelovanja τ na $\sigma(v)$.

$$\tau(\sigma(v)) = \sigma(\tau^2(v)) \tag{1.36}$$

$$= \sigma(\omega^{2i} \cdot v) \tag{1.37}$$

$$= \omega^{2i} \cdot \sigma(v). \tag{1.38}$$

Zaključak je da ako je v svojstveni vektor za τ čija je svojstvena vrijednost ω^i, onda je $\sigma(v)$ opet svojstveni vektor za τ čija je svojstvena vrijednost ω^{2i}.

Ukoliko se krene s pretpostavkom da je takav v svojstveni vektor od τ, onda ako je svojstvena vrijednost od v, $\omega^i \neq 1$, znači da je $\sigma(v)$ svojstveni vektor sa svojstvenom vrijednošću $\omega^{2i} \neq \omega^i$, pa je i neovisan o v. v i $\sigma(v)$ zajedno čine dvodimenzionalan potprostor V' od W koji je invarijantan na $\mathfrak{S}_3$, te izomorfan standardnoj reprezentaciji.

Ako svojstvena vrijednost od v iznosi 1, onda $\sigma(v)$ nije nužno neovisan od v.
Ako nije neovisan, onda v čini jednodimenzionalnu podreprezentaciju od W koja je izomorfna trivijalnoj reprezentaciji (ako je $\sigma(v) = v$) ili alternirajućoj reprezentaciji (ako je $\sigma(v) = -v$). Ako su $\sigma(v)$ i v neovisni, onda $v + \sigma(v)$ i $v - \sigma(v)$ čine jednodimenzionalne reprezentacije od W koje su izomorfne trivijalnoj i alternirajućoj reprezentaciji, redom. Dakle jedine tri ireducibilne reprezentacije od $\mathfrak{S}_3$ su trivijalna, alternirajuća i standardna U, U' i V. Za proizvoljnu reprezentaciju W od $\mathfrak{S}_3$ vrijedi

$$W = U^{\oplus a} \oplus U'^{\oplus b} \oplus V^{\oplus c}. \tag{1.39}$$

Gdje je c broj neovisnih svojstvenih vektora za τ svojstvene vrijednosti ω, $a + c$ je mnogostrukost od 1 kao svojstvene vrijednosti od σ, a $b + c$ je mnogostrukost od -1 kao svojstvene vrijednosti od σ.

Ovaj pristup je zapravo tehnika pletizma koja je zadnja potrebna stvar da se analizira neka reprezentacija, dakle potrebno je pronaći dekompoziciju simetričnih, alternirajućih ili tenzorskih potencija dane reprezentacije W, jer ako se znaju svojstvene vrijednosti od τ za takvu reprezentaciju, onda se mogu izračunati svojstvene vrijednosti od τ na raznim tenzorskim potencijama od W.

Ova metoda se može koristiti primjerice za dekompoziciju od $V \otimes V$, gdje je V standardna dvodimenzionalna reprezentacija. Zato što je $V \otimes V$ razapet s vektorima $\alpha \otimes \alpha$, $\alpha \otimes \beta$, $\beta \otimes \alpha$, $\beta \otimes \beta$. To su svojstveni vektori za τ sa svojstvenim vrijednostima ω^2, 1, 1 i ω redom, a ω mijenja $\alpha \otimes \alpha$ s $\beta \otimes \beta$ i $\alpha \otimes \beta$ s $\beta \otimes \alpha$. Pa onda, $\alpha \otimes \alpha$ i $\beta \otimes \beta$ čine podprezentaciju koja je izomorfna s V, $\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha$ trivijalnu reprezentaciju U, a $\alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha$ U', pa je

$$V \otimes V \cong U \oplus U' \oplus V. \tag{1.40}$$

Poglavlje 2

Karakter reprezentacije

2.1 Karakter reprezentacije

U zadnjem primjeru prethodnog poglavlja je pokazano da je reprezentacija od $\mathfrak{S}_3$ određena sa svojstvenim vrijednostima djelovanja elemenata τ i $\sigma \in \mathfrak{S}_3$. Za neku proizvoljnu grupu G nije odmah jasno koje podgrupe ili elementi igraju uloge $\mathfrak{U}_3$, τ i σ, ali iz primjera je jasno da ako znamo svojstvene vrijednosti svakog elementa od G, možemo opisati reprezentaciju.
Pronalaženje svih svojstvenih vrijednosti nije jednostavan niti praktičan zadatak,no nije ga ni potrebno izvršiti. Primjerice ako su poznate svojstvene vrijednosti $\{\lambda_i\}$ nekog elementa $g \in G$, onda su poznate i svojstvene vrijednosti $\{\lambda_i^k\}$ od g^k za svaki k. Iz toga slijedi da je potrebno samo pronaći sumu svojstvenih vrijednosti svakog elementa iz G, jer znati sumu $\Sigma\lambda_i{}^k$ k-te potencije svojstvene vrijednosti elementa $g \in G$ je ekvivalentno tome da se znaju svojstvene vrijednosti $\{\lambda_i\}$ od samih g. Iz toga proizlazi sljedeća definicija

Definicija 2.1.1.

Ako je V reprezentacija od G, njezin karakter χ_V je funkcija kompleksnih vrijednosti na grupi definiranoj s

$$\chi_V(g) = Tr(g\,|_V) \tag{2.1}$$

tragom od g na V. Posebno,

$$\chi_V(hgh^{-1}) = \chi_V(g) \tag{2.2}$$

tako da je χ_V konstanta na konjugacijskim klasama od G. Takva funkcija se zove funkcija klase, te vrijedi $\chi_V(1) = \dim V$

Propozicija 2.1.1.

Neka su V i W reprezentacije od G. Tada vrijedi:

$$\chi_{V\oplus W} = \chi_V + \chi_W, \tag{2.3}$$

$$\chi_{V\otimes W} = \chi_V \cdot \chi_W, \tag{2.4}$$

$$\chi_{V^*} = \overline{\chi}_V, \tag{2.5}$$

$$\chi_{\Lambda^2 V}(g) = \frac{1}{2}[\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)]\,. \tag{2.6}$$

Dokaz:
Gornji karakteri se računaju s obzirom da je $g \in G$ fiksiran. Ukoliko izrazimo V i W u matričnom zapisu (kao V_m i W_m) onda $V \oplus W$ izgleda ovako

$$V \oplus W = \begin{pmatrix} V_m & 0 \\ 0 & W_m \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

te vrijedi

$$Tr(V \oplus W) = Tr(V_m) + Tr(W_m) \tag{2.8}$$

iz čega direktno slijedi prva formula.
Za djelovanje od g, V ima svojstvene vrijednosti $\{\lambda_i\}$, a W ima svojstvene vrijednosti $\{\mu_i\}$. Tada je $\{\lambda_i \cdot \mu_j\}$ svojstvena vrijednosti za $V \otimes W$ iz čega slijedi druga formula.
$\{\lambda_i^{-1} = \overline{\lambda}_i\}$ su svojstvene vrijednosti od g na V^*, jer su sve svojstvene vrijednosti n-ti korijeni jediničnog elementa, a n je red od g. Također za svaku reprezentaciju dobivamo i dualnu reprezentaciju jer

$$(\rho^*(g)\phi)(v) = \phi(\rho(g^{-1})v) = \phi(\rho(g)^{-1}v), \tag{2.9}$$

pa slijedi i treća formula.
Odaberimo neku bazu (e_i) od V koja se sastoji od svojstvenih vektora za ρ_g. Tada vrijedi

$$\rho_g e_i = \lambda_i e_i \tag{2.10}$$

za $\lambda_i \in C$. Onda slijedi i

$$\chi(g) = \sum \lambda_i, \qquad \chi(g^2) = \sum \lambda_i^2. \tag{2.11}$$

$\{\lambda_i\lambda_j \mid i < j\}$ su svojstvene vrijednosti za g na $\Lambda^2 V$ i vrijedi

$$\sum_{i<j} \lambda_i\lambda_j = \frac{(\sum \lambda_i)^2 - \sum \lambda_i^2}{2}. \tag{2.12}$$

Svojstvene vrijednosti od g^2 su $\{\lambda_i^2\}$, pa slijedi i četvrta formula.

Karakter reprezentacije grupe G je zapravo funkcija na skupu konjugacijskih klasa u G. Iz toga dolazi motivacija za prikaz osnovnih informacija ireducibilnih reprezentacija grupe G u obliku *tablice karaktera*. To je tablica s konjugacijskim klasama $[\,g]$ od G na vrhu, s brojem elemenata u svakoj konjugacijskoj klasi napisanim iznad. Ireducibilne reprezentacije V od G su na lijevoj strani, a zatim se u odgovarajuća mjesta u tijelu tablice stavljaju vrijednosti karaktera χ_V na konjugacijskog klasi $[\,g]$.

Primjer 2.1.1.

Tablica karaktera za $\mathfrak{S}_3$.
Za tablicu karaktera od $\mathfrak{S}_3$ treba prvo pronaći konjugacijske klase i broj njihovih elemenata. Slijedi tablica u kojoj su sve konjugacijske klase od $\mathfrak{S}_3$, njihovi pojedini elementi te ukupan broj elemenata

Konjugacijska klasa	Particija	Elementi	Broj elemenata
(1)	1+1+1	Identiteta	1
(12)	2+1	(1,2) (1,3) (2,3)	3
(123)	3	(1,2,3) (1,3,2)	2

Tablica 2.1: Tablica konjugacijskih klasa za $\mathfrak{S}_3$

Trivijalna reprezentacija poprima vrijednosti (1,1,1) na tri konjugacijske klase $[\,1]$, $[\,(1,2)]$ i $[\,(1,2,3)]$, a alternirajuća reprezentacija poprima vrijednosti (1,-1,1). Karakter permutacijske reprezentacije poprima vrijednosti (3,1,0), a zbog dekompozicije permutacijske reprezentacije na $\mathbb{C}^3 = U \oplus V$, za karakter standardne reprezentacije vrijedi

$$\chi_V = \chi_{\mathbb{C}^3} - \chi_U = (3,1,0) - (1,-1,1) = (2,0,1). \tag{2.13}$$

Cijela tablica karaktera onda izgleda ovako:

	1	3	2
$\mathfrak{S}_3$	1	(12)	(123)
trivijalna U	1	1	1
alternirajuća U'	1	-1	1
standardna V	2	0	-1

Tablica 2.2: Potpuna tablica karaktera za $\mathfrak{S}_3$

To je još jedan način rješavanja problema iz prijašnjeg poglavlja. Ako je W proizvoljna reprezentacija od $\mathfrak{S}_3$ i W se dekompozira u ireducibilne reprezentacije

$$W \cong U^{\oplus a} \oplus U'^{\oplus b} \oplus V^{\oplus c}, \tag{2.14}$$

onda

$$\chi_W = a\chi_U + b\chi_{U'} + c\chi_V. \tag{2.15}$$

$\chi_U, \chi_{U'}, \chi_V$ su nezavisni pa je W određen s karakterom χ_W do na izomorfizam. Karakter od $V \otimes V$ je $(\chi_V)^2$, koji poprima vrijednosti (4,0,1) za tri konjugacijske klase. $V \oplus U \oplus U'$ ima isti karakter, pa to znači da se $V \otimes V$ dekompozira direktno u $V \oplus U \oplus U'$. Slično, $V \otimes U'$ poprima vrijednosti (2,0,-1), pa vrijedi

$$V \otimes U' \cong V. \tag{2.16}$$

2.2 Prva projekcijska formula i njene posljedice

U prošlom poglavlju su se eksplicitno tražili faktori direktne sume u dekompoziciji neke reprezentacije na ireducibilne reprezentacije. Sada se počinje od eksplicitne formule za projekciju reprezentacije na direktnu sumu trivijalnih faktora u toj dekompoziciji. Za bilo koju reprezentaciju V grupe G, neka je

$$V^G = \{v \in V : gv = v \quad \forall g \in G\}. \tag{2.17}$$

Eksplicitno se traži V^G. Za bilo koju reprezentaciju V od G i bilo koji $g \in G$, endomorfizam $g : V \to V$ nije općenito homomorfizam G-modula. Sada se uzima srednja vrijednost tih endomorfizama, neka je

$$\phi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g \in End(V), \tag{2.18}$$

tada će endomorfizmi biti G-linearni, jer je

$$\sum g = \sum hgh^{-1}, \tag{2.19}$$

iz čega slijedi propozicija.

Propozicija 2.2.1

Mapa ϕ je projekcija od V na V^G.

Dokaz:
Pretpostavimo,

$$v = \phi(w) = \frac{1}{|G|} \sum gw. \tag{2.20}$$

Tada za za proizvoljni $h \in G$,

$$hv = h\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gw = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} hgw = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gw = v, \tag{2.21}$$

pa je slika od ϕ sadržana u V^G. Ako je $v \in V^G$, onda

$$\phi(v) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gv = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} v = \frac{|G|}{|G|} = v \tag{2.22}$$

iz čega slijedi $V^G \subset \mathrm{Im}(\phi)$ i

$$\phi \circ \phi = \phi. \tag{2.23}$$

To je dakle, način kako eksplicitno odrediti direktnu sumu trivijalnih podprezentacija dane reprezentacije, no ako se formula ne pojednostavi u nekom trenutku onda ju je jako teško koristiti. Ako je samo potrebno pronaći broj kopija trivijalnih reprezentacija, označen s m, koji se pojavljuju u dekompoziciji od V, onda se to radi numerički jer je trag od projekcije ϕ upravo m.

$$\begin{aligned} m &= dimV^G = Tr(\phi) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} Tr(g) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g). \end{aligned} \tag{2.24}$$

Dakle za ireducibilnu reprezentaciju V, ali ne trivijalnu, suma svih vrijednosti karaktera χ_V po svim $g \in G$ je nula. Ako su V i W reprezentacije od G, onda za reprezentaciju $\mathrm{Hom}(V,W)$ slijedi

$$\mathrm{Hom}(V, W)^G = \{\text{homomorfizmi } G\text{-modula iz } V \text{ u } W\}.$$

Ako je V ireducibilna, onda je po Schurovoj lemi dim $\mathrm{Hom}(V,W)^G$ mnogostrukost od V u W. Ako je W ireducibilna onda je $\mathrm{Hom}(V,W)^G$ mnogostrukost od W u V. Ako su i V i W ireducibilne, onda vrijedi

$$dim\ \mathrm{Hom}(V,W)^G = \begin{cases} 1, & \text{ako je } V \cong W \\ 0, & \text{ako je } V \ncong W \end{cases}. \tag{2.25}$$

Sada je karakter $\chi_{Hom(V,W)}(g)$ reprezentacije

$$\mathrm{Hom}(V,W) = V^* \otimes W \tag{2.26}$$

dan s,

$$\chi_{Hom(V,W)}(g) = \overline{\chi_V(g)} \cdot \chi_W(g). \tag{2.27}$$

Iz jednadžbe 2.24 se dobiva

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_V(g)} \chi_W(g) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } V \cong W \\ 0, & \text{ako je } V \ncong W. \end{cases} \tag{2.28}$$

Neka je

$$\mathbb{C}_{\text{klasa}}(G) = \{\text{funkcije klasa na } G\}$$

i neka je definiran Hermitski unutarnji produkt na $\mathbb{C}_{\text{klasa}}(G)$ s

$$(\alpha, \beta) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\alpha(g)} \beta(g). \tag{2.29}$$

Iz jednadžbe 2.28 onda slijedi teorem.

Teorem 2.2.1

S obzirom na Hermitski unutarnji produkt na $\mathbb{C}_{\text{klasa}}(G)$, karakteri ireducibilnih reprezentacija od G su ortonormirani.

Ortonormiranost tri ireducibilne reprezentacije od $\mathfrak{S}_3$ se može iščitati iz tablice karaktera 2.1 Brojevi iznad konjugacijskih klasa govore koliko puta treba brojati unose u tom stupcu.

Korolar 2.2.1.

Broj ireducibilnih reprezentacija od G je manji ili jednak broju konjugacijskih klasa.

Korolar 2.2.2.

Proizvoljna reprezentacija je određena sa svojim karakterom

Ako za V_i distinktivne ireducibilne reprezentacije vrijedi

$$V \cong V_1^{\oplus a_1} \oplus \cdots \oplus V_k^{\oplus a_k}, \tag{2.30}$$

onda je

$$\chi_V = \sum a_i \chi_{V_i} \tag{2.31}$$

i χ_{V_i} su linearno nezavisni.

Korolar 2.2.3.

Reprezentacija V je ireducibilna ako i samo ako je $(\chi_V, \chi_V) = 1$

Ako opet vrijedi jednadžba 2.30 onda vrijedi

$$(\chi_V, \chi_V) = \sum a_i^2. \tag{2.32}$$

Korolar 2.2.4.

mnogostrukost a_i od V_i u V je unutarnji produkt od χ_V s χ_{V_i}, primjerice $a_i = (\chi_V, \chi_{V_i})$.

Primjenom ovoga na regularnu repezentaciju R od G imamo

$$\chi_R(g) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } g \neq e \\ |G|, & \text{ako je } g = e. \end{cases} \tag{2.33}$$

Dakle R nije ireducibilna ako je $G \neq \{e\}$. Ako je $R = \bigoplus V_i^{\oplus a_i}$, a V_i distinktivne ireducibilne reprezentacije, onda vrijedi

$$a_i = (\chi_{V_i}, \chi_R) = \frac{1}{|G|} \chi_{V_i}(e) \cdot |G| = dim V_i. \tag{2.34}$$

Korolar 2.2.5.

Bilo koja ireducibilna reprezentacija V od G se u regularnoj reprezentaciji pojavljuje $\dim V$ puta.
Dakle opet je pokazano da postoji konačan broj ireducibilnih reprezentacija, pa vrijedi

$$|G| = dim(R) = \sum_i dim(V_i)^2. \tag{2.35}$$

$$0 = \sum (dim V_i) \cdot \chi_{V_i}(g), \qquad \text{ako je } \ g \neq e. \tag{2.36}$$

2.3 Primjer: $\mathfrak{S}_4$

Za tablicu karaktera od $\mathfrak{S}_4$ treba prvo pronaći konjugacijske klase i broj njihovih elemenata kao i kod tablice karaktera od $\mathfrak{S}_3$. $\mathfrak{S}_4$ je također simetrična grupa, ali ima drugačije konjugacijske klase. Slijedi tablica u kojoj su sve konjugacijske klase od $\mathfrak{S}_4$, njihovi pojedini elementi te ukupan broj elemenata.

Konjugacijska klasa	Particija	Elementi	Broj elemenata
(1)	1+1+1+1	Identiteta	1
(12)	2+1+1	(1,2) (1,3) (1,4) (2,3) (2,4) (3.4)	6
(12)(34)	2+2	(1,2)(3,4) (1,3)(2,4) (1,4)(2,3)	3
(123)	3+1	(1,2,3) (1,3,2) (2,3,4) (2,4,3) (3,4,1) (3,1,4) (4,1,2) (4,2,1)	8
(1234)	4	(1,2,3,4) (1,2,4,3) (1,3,2,4) (1,3,4,2) (1,4,2,3) (1,4,3,2)	6

Tablica 2.3: Tablica konjugacijskih klasa za $\mathfrak{S}_4$

Što se tiče ireducibilnih reprezentacija od $\mathfrak{S}_4$, počinje se s istima kao i kod $\mathfrak{S}_3$. To su trivijalna U, alternirajuća U' i standardna V. Analogno je karakter trivijalne reprezentacije (1,1,1,1,1), a alternirajuće (1,-1,1,-1,1). Karakter standardne reprezentacije je (3,1,0,-1,-1) jer je karakter permutacijske reprezentacije na $\mathbb{C}^4$ (4,2,1,0,0) od čega se treba još samo oduzeti karakter trivijalne reprezentacije. Tablica karaktera od $\mathfrak{S}_4$ onda izgleda ovako:

	1	6	8	6	3
$\mathfrak{S}_4$	1	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
trivijalna U	1	1	1	1	1
alternirajuća U'	1	-1	1	-1	1
standardna V	3	1	0	-1	1

Tablica 2.4: Djelomična tablica karaktera za $\mathfrak{S}_4$

Iz jednadžbe (2.35) je vidljivo da ovo nije potpuna tablica karaktera jer je zbroj svih elemenata konjugacijskih klasa 24. Dakle fale još dvije reprezentacije čije su dimenzije 2 i 3. Trodimenzionalna se dobiva lako pomoću $\chi_{V'} = \chi_V \cdot \chi_{U'} = (3, -1, 0, 1, -1)$ i očito je ireducibilna jer $|\chi_{V'}| = 1$. Zadnja se dobiva iz relacije (2.28), označimo je s W i dobivamo potpunu tablicu karaktera od $\mathfrak{S}_4$.

	1	6	8	6	3
$\mathfrak{S}_4$	1	(12)	(123)	(1234)	(12)(34)
trivijalna U	1	1	1	1	1
alternirajuća U'	1	-1	1	-1	1
standardna V	3	1	0	-1	1
$V' = V \otimes U'$	3	-1	0	1	-1
W	2	0	-1	0	2

Tablica 2.5: Potpuna tablica karaktera za $\mathfrak{S}_4$

Za opis reprezentacije W dovoljno je pogledati klasu konjugacije (12)(34), koja je zapravo identiteta, što pokazuje da je W reprezentacija kvocijentne grupe

$$\mathfrak{S}_4/\{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\} \cong \mathfrak{S}_3. \tag{2.37}$$

Dakle W je zapravo standardna reprezentacija od $\mathfrak{S}_3$ koja dopunjena s tim kvocijentom daje jednu od ireducibilnih reprezentacija od $\mathfrak{S}_4$

2.4 Projekcijske formule

Propozicija 2.4.1.

Neka je $\alpha : G \to \mathbb{C}$ proizvoljna funkcija na grupi G i neka za bilo koju reprezentaciju V od G vrijedi

$$\phi_{\alpha,V} = \sum \alpha(g) \cdot g : V \to V. \tag{2.38}$$

Tada je $\phi_{\alpha,V}$ homomorfizam G-modula za sve V ako i samo ako je funkcija klase.

Propozicija 2.4.2.

Broj ireducibilnih reprezentacija od G je jednak broju konjugacijskih klasa od G. Njihovi karakteri $\{\chi_V\}$ čine ortonormiranu bazu za $\mathbb{C}_{klasa}(G)$.

Dokaz:
Počinje se s pretpostavkom da je $\alpha : G \to \mathbb{C}$ funkcija klase i da vrijedi $(\alpha, \chi_V) = 0$ za sve ireducibilne reprezentacije. Pogledajmo $\phi_{\alpha,V}$ iz prošle propozicije i primjetimo da on ide iz V u V pa je on endomorfizam i po Schurovoj lemi onda vrijedi $\phi_{\alpha,V} = \lambda \cdot I$. Zatim slijedi da je

$$\lambda = \sum \alpha(g) \cdot g, \tag{2.39}$$

odnosno

$$\lambda = \frac{1}{dimV} \sum \alpha(g) \cdot \chi_V(g). \tag{2.40}$$

Sada iz jednadžbe (2.29) dobivamo

$$\lambda = \frac{|G|}{dimV} \overline{(\alpha, \chi_{V^*})}, \tag{2.41}$$

pa je $\lambda = 0$ zbog pretpostavke $(\alpha, \chi_V) = 0$. Iz čega slijedi da je i $\phi_{\alpha,V} = 0$ tj. $\sum \alpha(g) \cdot g = 0$ na bilo kojoj reprezentaciji V od G. U regularnoj reprezentaciji R su elementi međusobno linearno nezavisni, pa je $\alpha(g) = 0$ za svaki g što je i trebalo dokazati.

Poglavlje 3

$\mathfrak{S}_5, \mathfrak{A}_5$; Inducirane Reprezentacije; Grupna Algebra; Realne Reprezentacije

3.1 Primjeri: $\mathfrak{S}_5, \mathfrak{A}_5$

Primjer 3.1.1 : Reprezentacije grupe $\mathfrak{S}_5$

Opet kao i za $n = 3$ i $n = 4$ pogledajmo tablicu konjugacijskih klasa za $\mathfrak{S}_5$. Ispisane su particije, broj elemenata svake klase te samo reprezentativni element svake od klasa jer za $n = 5$ ima previše permutacija ($5! = 120$) da ih navedemo sve posebno.

Konjugacijska klasa	Particija	Reprezentativni element	Broj elemenata
(1)	1+1+1+1+1	Identiteta	1
(12)	2+1+1+1	(1,2)	10
(123)	3+1+1	(1,2,3)	20
(1234)	4+1	(1,2,3,4)	30
(12345)	5	(1,2,3,4,5)	24
(12)(34)	2+2+1	(1,2)(3,4)	15
(12)(345)	2+3	(1,2)(3,4,5)	20

Tablica 3.1: Tablica konjugacijskih klasa za $\mathfrak{S}_5$

Sada se može ispuniti prvi dio tablice karaktera koji sadrži već poznate reprezentacije iz $\mathfrak{S}_4$. To su trivijalna, alternirajuća, standardna i V' čiji se karakter dobiva s

$$\chi_{V'} = \chi_V \cdot \chi_{U'} \tag{3.1}$$

Dakle prva četiri reda tablice karaktera od $\mathfrak{S}_5$ izgledaju ovako

	1	10	20	30	24	15	20
$\mathfrak{S}_5$	1	(12)	(123)	(1234)	(12345)	(12)(34)	(12)(345)
trivijalna U	1	1	1	1	1	1	1
alternirajuća U'	1	-1	1	-1	1	1	-1
standardna V	4	2	1	0	-1	0	-1
$V' = V \otimes U'$	4	-2	1	0	-1	0	1

Tablica 3.2: Djelomična tablica karaktera za $\mathfrak{S}_5$

Iz dimenzionalne analize je jasno da fale još tri ireducibilne reprezentacije. Najbolje ih je krenuti tražiti tako da se gleda tenzorski produkt između reprezentacija koje su već u tablici. Jedini koristan tenzorski produkt za pronalaženje ostalih ireducibilnih reprezentacija je $V \otimes V$ jer

$$V' \otimes V = V \otimes V \otimes U' \tag{3.2}$$

i

$$V' \otimes V' = V \otimes U' \otimes V \otimes U' = V \otimes V. \tag{3.3}$$

$V \otimes V$ se dekompozira u $\Lambda^2 V$ i $Sym^2 V$, točnije ovako

$$V \otimes V = Sym^2(V) \oplus \Lambda^2(V), \tag{3.4}$$

pa ih treba promatrati zasebno. Prvo se računa karakter od $\Lambda^2 V$ pomoću

$$\chi_{\Lambda^2 V}(g) = \frac{1}{2}[\chi_V(g)^2 - \chi_V(g^2)]\,. \tag{3.5}$$

Dakle,

$$\chi_{\Lambda^2 V} = (6, 0, 0, 0, 1, -2, 0). \tag{3.6}$$

Zaključak je da je $\Lambda^2 V$ peta ireducibilna reprezentacija. Preciznija dimenzionalna analiza otkriva koje su dimezije posljednje dvije ireducibilne reprezentacije.

$$5! = 120 = 1^2 + 1^2 + 4^2 + 4^2 + 6^2 + n_1^2 + n_2^2 \tag{3.7}$$

$$50 = n_1^2 + n_2^2. \tag{3.8}$$

Jedina moguća rješenja za n_1 i n_2 su

$$n_1 = 1 \quad n_2 = 7 \tag{3.9}$$

ili

$$n_1 = 7 \quad n_2 = 1 \tag{3.10}$$

ili

$$n_1 = 5 \quad n_2 = 5 \tag{3.11}$$

n_1 niti n_2 ne mogu biti 1, odnosno nema više jednodimenzionalnih reprezentacija jer su one trivijalne na normalnim podgrupama čije su kvocijentne grupe cikličke, a $\mathfrak{A}_5$ je jedina takva podgrupa. Dakle, preostaje samo zadnja opcija tj. da je $n_1 = n_2 = 5$. Označimo te dvije reprezentacije s W i W' gdje je

$$W' = W \otimes U'. \tag{3.12}$$

Neka je karakter od W

$$(5, a, b, c, d, e, f), \tag{3.13}$$

onda iz (3.12) odmah slijedi da je karakter od W'

$$(5, -a, b, -c, d, e, -f). \tag{3.14}$$

Prvo se traži d, odnosno gledamo konjugacijsku klasu (12345) čije se svojstvene vrijednosti biraju iz $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ gdje je $\omega = e^{\frac{2\pi i}{5}}$. Ako je λ svojstvena vrijednost od klase (12345) onda su također i potencije od λ što znači da su svojstvene vrijednosti $\{1, 1, 1, 1, 1\}$ ili $\{1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4\}$. Dakle

$$\chi_W(12345) = 5 \qquad \textit{ili} \qquad \chi_W(12345) = 0. \tag{3.15}$$

Iz već poznate jednadžbe

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \overline{\chi_V(g)} \chi_W(g) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } V \cong W \\ 0, & \text{ako je } V \ncong W \end{cases} \tag{3.16}$$

je jasno da opcija $\chi_W(12345) = 5$ nije moguća jer

$$24 \cdot (\chi_W(12345))^2 > 120. \tag{3.17}$$

Dakle $d = 0$.
Slično i za c. Moguće su svojstvene vrijednosti $\pm i, \pm 1$. Kod računanja traga matrice se pokrate i i $-i$ jer je $i^3 = -i$. Što znači da c može biti $\pm 3, \pm 1$. $c = \pm 3$ otpada jer je to opet po gornjoj jednadžbi veće od 120. Zaključak je da je c=1.

Za b su svojstvene vrijednosti $1, \omega, \omega^2$ gdje je $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Ovdje ω i ω^2 dolaze uvijek u paru. Da bi opet gornja jednadžba bila zadovoljena taj par se mora pojaviti točno 2 puta pa

$$\chi_W((123)) = 1 + \omega + \omega^2 + \omega + \omega^2 = -1, \tag{3.18}$$

odnosno $b = -1$.

Sada tablica karaktera izgleda ovako

$\mathfrak{S}_5$	1 1	10 (12)	20 (123)	30 (1234)	24 (12345)	15 (12)(34)	20 (12)(345)
trivijalna U	1	1	1	1	1	1	1
alternirajuća U'	1	-1	1	-1	1	1	-1
standardna V	4	2	1	0	-1	0	-1
$V' = V \otimes U'$	4	-2	1	0	-1	0	1
W	5	a	-1	1	0	e	f
$W' = W \otimes U'$	5	-a	-1	-1	0	e	$-f$
$\Lambda^2 V$	6	0	0	0	1	-2	0

Tablica 3.3: Tablica karaktera za $\mathfrak{S}_5$ s nepoznanicama

Za preostale nepoznanice se može koristiti jednadžba (3.16) direktno pa vrijedi

$$(W, 1) = 0 \Rightarrow 5 + 10a - 20 + 30 + 15e + 20f = 0 \Rightarrow 10a + 15e + 20f = -15. \tag{3.19}$$

$$(W', 1) = 0 \Rightarrow 5 - 10a - 20 - 30 + 15e - 20f = 0 \Rightarrow -10a + 15e - 20f = -45. \tag{3.20}$$

Kada se jednadžbe zbroje dobiva se $30e = 30 \Rightarrow e = 1$. Također vrijedi i

$$(W, V) = 0 \Rightarrow 20 + 20a - 20 - 20f = 0 \Rightarrow a = f. \tag{3.21}$$

Uvrštavanjem u gornje izraze $a = f$ dobivamo $a = f = -1$. Potpuna tablica karaktera za $\mathfrak{S}_5$ onda izgleda ovako

$\mathfrak{S}_5$	1 1	10 (12)	20 (123)	30 (1234)	24 (12345)	15 (12)(34)	20 (12)(345)
trivijalna U	1	1	1	1	1	1	1
alternirajuća U'	1	-1	1	-1	1	1	-1
standardna V	4	2	1	0	-1	0	-1
$V' = V \otimes U'$	4	-2	1	0	-1	0	1
W	5	-1	-1	1	0	1	-1
$W' = W \otimes U'$	5	1	-1	-1	0	1	1
$\Lambda^2 V$	6	0	0	0	1	-2	0

Tablica 3.4: Potpuna tablica karaktera za $\mathfrak{S}_5$

Primjer 3.1.1 : Reprezentacije grupe $\mathfrak{A}_5$

Opet je potrebna ista tablica s konjugacijskim klasama, particijama, reprezentativnim elementima te brojem elemenata u svakoj konjugacijskoj klasi kao i kod simetrične grupe no ovdje vidimo da se konjugacijska klasa rastavlja na dvije ako ima paran broj permutacija. Pa takva tablica onda izgleda ovako

Konjugacijska klasa	Particija	Reprezentativni element	Broj elemenata
(1)	1+1+1+1+1	Identiteta	1
(123)	3+1+1	(1,2,3)	20
(12)(34)	2+2+1	(1,2,3,4)	30
(12345)	5	(1,2,3,4,5)	12
(12345)	5	(1,2,3,5,4)	12

Tablica 3.5: Tablica konjugacijskih klasa za $\mathfrak{A}_5$

Opet je prva trivijalna reprezentacija U, a zatim slijedi restringirana standardna V čiji su karakteri konjugacijskih klasa jednaki broju fiksnih točaka umanjenom za jedan osim za konjugacijsku klasu (1) čiji je karakter 4 jer zbog je spomenute restrikcije dimenzija reprezentacije 4.

	1	15	20	12	12
$\mathfrak{S}_5$	1	(12)(34)	(123)	(12345)	(12354)
trivijalna U	1	1	1	1	1
restringirana standardna V	4	0	1	-1	-1

Tablica 3.6: Djelomična tablica karaktera za $\mathfrak{A}_5$

Uz pomoć dimenzionalne analize određuju se karakteri konjugacijske klase (1) sljedećih ireducibilnih reprezentacija.

	1	15	20	12	12
$\mathfrak{S}_5$	1	(12)(34)	(123)	(12345)	(12354)
trivijalna U	1	1	1	1	1
restringirana standardna V	4	1	0	-1	-1
W	5	a	b	c	d
Y	3	e	f	g	h
Z	3	i	j	k	l

Tablica 3.7: Tablica karaktera za $\mathfrak{A}_5$ s nepoznatim vrijednostima

Analognom formulom kao i kod simetrične grupe se iz klase (1) i (12)(34) dobiva

$$1 + 5a + 3e + 3i = 0 \tag{3.22}$$

i

$$1 + a^2 + e^2 + i^2 = \frac{60}{15} = 4. \tag{3.23}$$

a, e, i moraju biti neparni, dakle jedino mogu biti ± 1, a iz prve jednadžbe vidimo da je $a = 1, e = -1, i = -1$
Sada je moguće riješiti red u kojem je W. Primjetimo prvo da je reprezentacija W jedina dimenzije 5 pa je invarijantna na automorfizam, odnosno $c = d$. Onda vrijedi

$$25 + 15 + 20b^2 + 24c^2 = 60 \tag{3.24}$$

i

$$5 + 15 + 20b + 24c = 0. \tag{3.25}$$

Dakle $b = -1, c = 0$. f i j odmah ispadnu 0, a primjenom istih formula kao i do sad na g, h, k i l se dobiva puna tablica karaktera za $\mathfrak{A}_5$

$\mathfrak{S}_5$	1 1	15 (12)(34)	20 (123)	12 (12345)	12 (12354)
trivijalna U	1	1	1	1	1
restringirana standardna V	4	1	0	-1	-1
W	5	1	-1	0	0
Y	3	-1	0	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$
Z	3	-1	0	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Tablica 3.8: Potpuna tablica karaktera za $\mathfrak{A}_5$

3.2 Vanjske Potencije Standardne Reprezentacije $\mathfrak{S}_d$

Propozicija 3.2.1

Svaka vanjska potencija $\Lambda^k V$ standardne reprezentacije V od $\mathfrak{S}_d$ je ireducibilna, $0 \leq k \leq d-1$.
Dokaz:
V je ireducibilna $\iff$ $(\chi_{\mathbb{C}^d}, \chi_{\mathbb{C}^d}) = 2$. To slijedi iz dekompozicije $\mathbb{C}^d = V \oplus U$. Pokažimo ukratko smjer udesno.

$$(\chi_{\mathbb{C}^d}, \chi_{\mathbb{C}^d}) = (\chi_V + \chi_U, \chi_V + \chi_U) = (\chi_V, \chi_V) + 2(\chi_V, \chi_U) + (\chi_U, \chi_U) \tag{3.26}$$

U je ireducibilna, a V je ireducibilna iz pretpostavke, pa vrijedi

$$(\chi_V, \chi_V) = 1, \tag{3.27}$$

$$(\chi_U, \chi_U) = 1, \tag{3.28}$$

$$\chi_V, \chi_U = 0. \tag{3.29}$$

Zatim slijedi da je $(\chi_{\mathbb{C}^d}, \chi_{\mathbb{C}^d}) = 2$. Smjer udesno je dokazan, vratimo se sada na glavni dio dokaza
Sada je zbog

$$\Lambda^k \mathbb{C}^d = \Lambda^k V \oplus \Lambda^{k-1} V, \tag{3.30}$$

dovoljno pokazati da je $(\chi, \chi) = 2$, gdje je χ karakter reprezentacije $\Lambda^k \mathbb{C}^d$. Neka je $A = \{1, 2, ..., d\}$, a za podskup B od A s k elemenata i $g \in \mathfrak{S}_d$

$$\{g\}_B = \begin{cases} 0, & \text{ako je } g(B) \neq B \\ 1, & \text{ako je } g(B) = B \text{ i } g|_B \text{ parna permutacija} \\ -1, & \text{ako je } g(B) = B \text{ i } g|_B \text{ neparna permutacija.} \end{cases} \tag{3.31}$$

Zatim slijedi

$$(\chi,\chi) = \frac{1}{d!}\sum_B \sum_C \sum_g (sgn\ \ g|_B)\cdot(sgn\ \ g|_C). \tag{3.32}$$

Neka je l kardinalnost od $B \cap C$, onda vrijedi

$$\frac{1}{d!}\sum_B \sum_C \sum_{a\in\mathfrak{S}_l} \sum_{b\in\mathfrak{S}_{k-l}} \sum_{c\in\mathfrak{S}_{k-l}} \sum_{h\in\mathfrak{S}_{d-2k+l}} (sgn\ \ a)^2\cdot(sgn\ \ b)\cdot(sgn\ \ c) = \tag{3.33}$$

$$\frac{1}{d!}\sum_B \sum_C l!(d-2k+l)!\left(\sum_{b\in\mathfrak{S}_{k-l}} sgn\ \ b\right)\left(\sum_{c\in\mathfrak{S}_{k-l}} sgn\ \ c\right). \tag{3.34}$$

Zadnje dvije sume su nula osim ako vrijedi $k-l=0$ ili $k-l=1$. Za prvi slučaj vrijedi

$$\frac{1}{d!}\sum_B k!(d-k)! = \frac{1}{d!}\binom{d}{k}k!(d-k)! = 1 \tag{3.35}$$

Drugi slučaj daje isto 1 što znači da je $(\chi,\chi) = 2$ i time je dokaz gotov.

3.3 Inducirane reprezentacije

Ako je H, koji je podskup od G, podgrupa onda je proizvoljna reprezentacija V od G restringirana na H što se označava s Res$V$. Neka je V reprezentacija od G i $W \subset V$ podprostor koji je invarijantan na H. Za svaki $g \in G$, podprostor

$$g\cdot W = \{g\cdot w : w \in W\} \tag{3.36}$$

ovisi samo o lijevom kozetu gH od g modulo H jer

$$gh\cdot W = g\cdot(h\cdot W) = g\cdot W. \tag{3.37}$$

Za kozet σ u G/H se piše $\sigma\cdot W$. V je induciran s W ako se svaki element iz V može jedinstveno zapisati kao suma elemenata u takvim zapisima od W. Npr.

$$V = \bigoplus_{\sigma\in G/H} \sigma\cdot W. \tag{3.38}$$

U ovom slučaju se piše V=Ind W.

Propozicija 3.3.1.

Neka je W reprezentacija od H, U reprezentacija od G i $V = \text{Ind } W$. Tada se bilo koji homomorfizam H-modula $\phi : W \to U$ jedinstveno proširuje do homomorfizma G-modula $\widetilde{\phi} : V \to U$. Npr.

$$\text{Hom}_H(W, \text{Res } U) = \text{Hom}_G(\text{Ind } W, U). \tag{3.39}$$

Ovo univerzalno svojstvo određuje Ind W do na kanonski izomorfizam.

Dokaz:
Neka je opet

$$V = \bigoplus_{\sigma \in G/H} \sigma \cdot W. \tag{3.40}$$

Definira se $\widetilde{\phi}$ na $\sigma \cdot W$ ovako

$$\sigma \cdot W \xrightarrow{g_\sigma^{-1}} W \xrightarrow{\phi} U \xrightarrow{g_\sigma} U \tag{3.41}$$

što je neovisno o g_σ za σ jer je ϕ H-linearna.

Ako je $V = \text{Ind } W$ onda se karakter od V računa pomoću

$$\chi_{\text{Ind}_W}(g) = \sum_{g\sigma=\sigma} \chi_W(s^{-1}gs), \tag{3.42}$$

gdje treba primjetiti da $g \in G$ mapira σW u $g\sigma W$, pa se trag računa iz tih kozeta σ pomoću $g\sigma = \sigma$, kao npr. ovdje gdje je $s^{-1}gs \in H$ za proizvoljni $s \in \sigma$.

Korolar 3.3.1.(Frobeniusova Recipročnost)

Ako je W reprezentacija od H i U reprezentacija od G onda vrijedi

$$\left(\chi_{\text{Ind}_W}, \chi_U\right)_G = \left(\chi_W, \chi_{\text{Res}_U}\right)_H. \tag{3.43}$$

Dokaz:

$$\left(\chi_{\text{Ind}_W}, \chi_U\right)_G = \frac{1}{|G|} \sum_{t \in G} \chi_{\text{Ind}_W}(t) U(t^{-1}) \tag{3.44}$$

$$= \frac{1}{|G|} \frac{1}{|H|} \sum_{t \in G} \sum_{s \in G} \chi_W(s^{-1}ts) \chi_U((s^{-1}ts)^{-1}) \tag{3.45}$$

$$= \frac{1}{|H|} \sum_{t \in G} \chi_W(t) \chi_U(t^{-1}) \tag{3.46}$$

$$= \frac{1}{|H|} \sum_{t \in H} \chi_W(t) \chi_U(t^{-1}) \tag{3.47}$$

$$= \frac{1}{|H|} \sum_{t \in H} \chi_W(t) \mathrm{Res}(\chi_U)(t^{-1}) \tag{3.48}$$

$$= \left(\chi_W, \chi_{\mathrm{Res}U}\right)_H \tag{3.49}$$

S time je dokaz gotov.
Ako su W i U reducibilne onda po Frobeniusovoj recipročnosti vrijedi: *Ako se U pojavi u Ind W neki broj puta onda se isti broj puta pojavi W u Res U.* Koristi se i za pronalazak broja karaktera od G ako se zna broj karaktera od H.

3.4 Grupna Algebra

Neka je G konačna grupa. Tada je grupna algebra $\mathbb{C}G$ objekt povezan s G koji praktički može zamijeniti grupu G. To znači da svaka izjava o grupi G vrijedi i za grupnu algebru $\mathbb{C}G$. Temeljni vektorski prostor takvog objekta ima bazu $\{e_g\}$ koja odgovara elementima iz grupe G, odnosno temeljnom vektorskom prostoru regularne reprezentacije. Takva algebarska struktura na tom vektorskom prostoru se definira ovako:

$$e_g \cdot e_h = e_{gh}. \tag{3.50}$$

Reprezentacija algebre $\mathbb{C}G$ na vektorskom prostoru V je zapravo homomorfizam algebre

$$\mathbb{C}G \to \mathrm{End}(V), \tag{3.51}$$

takav da je reprezentacija V od $\mathbb{C}G$ isto što i lijevi $\mathbb{C}G$-modul. Reprezentacija $\rho : G \to \mathrm{Aut}(V)$ se zbog linearnosti proširuje na mapu $\tilde{\rho} : \mathbb{C}G \to \mathrm{End}(V)$ tako da reprezentacije od $\mathbb{C}G$ odgovoraju reprezentacijama od G. Lijevi $\mathbb{C}G$-modul od samog $\mathbb{C}G$ odgovara regularnoj reprezentaciji. Ako su $\{W_i\}$ ireducibilne reprezentacije od G, onda se regularna reprezentacija R dekompozira ovako

$$R = \bigoplus (W_i)^{\oplus \dim(W_i)}. \tag{3.52}$$

U terminima grupne algebre vrijedi

Propozicija 3.4.1

Kao algebre,

$$\mathbb{C}G \cong \mathrm{End}(W_i). \tag{3.53}$$

Dokaz:
Za svaku reprezentaciju W je već ustanovljeno da se definirajuće djelovanje grupe

$$G \to \mathrm{Aut}_{\mathbb{C}}(W) \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W) \tag{3.54}$$

proširuje jedinstveno na homomorfizam algebre

$$\mathbb{C}G \xrightarrow{\phi_W} \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W). \tag{3.55}$$

Naravno ovo je surjekcija, inače W nije ireducibilna. Također vrijedi da je

$$\mathbb{C}G \xrightarrow{(\phi_W)_{[W]}} \bigoplus \mathrm{End}_{\mathbb{C}}(W) \tag{3.56}$$

izomorfizam, dakle treba samo primjetiti da su lijeva i desna strana dimenzije $\sum(\dim W_i)^2$ i dokaz je gotov.

3.5 Realne Reprezentacije

Ako grupa G djeluje na realni vektorski prostor V_0, onda je odgovarajuća kompleksna reprezentacija od $V = V_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ realna. Kada se želi pričati o djelovanju grupe G na realni umjesto na kompleksni vektorski prostor nailazi se na problem jer nije jasno kako znati koje od obrađenih reprezentacija su realne.

Prva ideja je da ako je karakter neke reprezentacije realni broj onda je i sama reprezentacija realna, no to generalno ne vrijedi i lako je pronaći kontraprimjer. Može se pogledati konačna abelova podgrupa $G \subset \mathrm{SU}(2)$. Tada G djeluje na $\mathbb{C}^2 = V$ s realnim karakterom jer je trag svake matrice u SU(2) realan.
Bolja ideja je primjetiti da ako je V realna reprezentacija od G, koja opet proizlazi iz V_0, onda se može pronaći pozitivan određen simetričan bilinearan oblik na V_0 koji je očuvan s G. To daje simetričan bilinearan oblik koji je očuvan na V, no neće svaka reprezentacija imati takav oblik.

Lema 3.5.1.

Ireducibilna reprezentacija V od G je realna ako i samo ako postoji nedegeneriran simetričan bilinearan oblik B na V očuvan s G.

Dokaz:
Ako postoji takav B i proizvoljan nedegenerativan oblik H, onda

$$V \xrightarrow{B} V^* \xrightarrow{H} V \tag{3.57}$$

daje linearni izomorfizam $\phi : V \to V$. Za neki $x \in V$ imamo komutirajući ϕ za koji vrijedi

$$B(x, y) = H(\phi(x), y), \tag{3.58}$$

pa vrijedi

$$\phi^2 = \lambda \cdot Id. \tag{3.59}$$

Iz činjenice da je ϕ komutativan s obzirom na djelovanje od G proizlazi da je

$$H(\phi^2(x), y) = H(x, \phi^2(y)). \tag{3.60}$$

Sada zaključujemo da je λ pozitivan realan broj. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\lambda = 1$. ϕ komutira s G pa su realni svojstveni prostori V_+ i V_- G-invarijatni. Na kraju iz $\phi(ix) = -i\phi(X)$ slijedi

$$iV_+ = V_- \tag{3.61}$$

i

$$V = V_+ \otimes \mathbb{C}. \tag{3.62}$$

Iz dokaza se vidi da je realna reprezentacija karakterizirana i s egzistencijom srodnog linearnog endomorfizma od V čiji je kvadrat identiteta. Ako je $V = V_0 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ onda

$$v_0 \mapsto v_0 \otimes \overline{\lambda}. \tag{3.63}$$

Sada se javlja problem gdje neka ireducibilna reprezentacija od G na vektorskom prostoru od $\mathbb{R}$ može postati reducibilna kod proširenja na $\mathbb{C}$. To je vidljivo u sljedećem primjeru.

Primjer 3.5.1

Neka je ρ reprezentacija od $\mathbb{Z}/n$ na $\mathbb{R}^2$ dana s

$$\rho : k \mapsto \begin{pmatrix} cos\frac{2\pi k}{n} & -sin\frac{2\pi k}{n} \\ sin\frac{2\pi k}{n} & cos\frac{2\pi k}{n} \end{pmatrix}. \tag{3.64}$$

Za $n > 2$ je ta reprezentacija ireducibilna na $\mathbb{R}$, ali reducibilna na $\mathbb{C}$. Dakle, ako se klasificiraju ireducibilne reprezentacije od G na $\mathbb{C}$ ne znači da su klasificirane sve realne ireducibilne reprezentacije.

Neka je V ireducibilna reprezentacija od G s realnim karakterom χ_V. Onda postoji G-ekvarijantan izomorfizam $V \cong V^*$, odnosno postoji bilinearni oblik B koji ne mora nužno biti degenerativan niti simetričan. B koji je jedinstven do na množenje skalarom je u

$$V^* \otimes V^* = \mathrm{Sym}^2 V^* \oplus \Lambda^2 V^* \tag{3.65}$$

ili simetričan ili koso-simetričan. Ako je koso-simetričan onda vrijedi $\phi^2 = -\mathrm{Id}$ što čini V kvaternionskim, a ϕ postaje množenje s j.

Definicija 3.5.1

Kvaternionska reprezentacija je kompleksna reprezentacija V koja ima G-invarijantni homomorfizam $J : V \to V$ koji je konjugacijski linearan i zadovoljava $J^2 = -\mathrm{Id}$. Onda koso-simetričan nedegenerativan G-invarijantan B određuje kvaternionsku strukturu na V.

Teorem 3.5.1

Ireducibilna reprezentacija V može biti samo jedno od sljedećih opcija:
(1) Kompleksna: χ_V nije realan; V nema G-invarijantan nedegenerativan bilinearan oblik.
(2) Realna: $V = V_0 \otimes \mathbb{C}$, realna reprezentacija; V ima G-invarijantan nedegenerativan simetričan bilinearan oblik.
(3) Kvaternionska: χ_V je realan, ali V nije realna; V ima G-invarijantan nedegenerativan koso-simetričan bilinearan oblik.

Problem određivanja realnih ireducibilnih reprezentacija se može generalizirati i na podpolja od $\mathbb{C}$, ali se onda drastično smanjuje i kvaliteta rješenja. Jedino što možemo je zapisati problem u obliku reprezentacijskog prstena od G.

Definicija 3.5.2

Neka je K neko podpolje od $\mathbb{C}$, onda definiramo K-reprezentaciju od G kao vektorski prostor V_0 nad K na koji G djeluje. Kažemo da je kompleksna reprezentacija $V = V_0 \otimes \mathbb{C}$ definirana nad K.

Sada je upitno kako odrediti broj reprezentacija od G koje su definirane nad poljem K. Jedna mogućnost je uvesti reprezentacijski prsten $R_K(G)$ od G nad K. To se definira kao i običan reprezentacijski prsten, odnosno kao grupa formalnih linearnih kombinacija od K-reprezentacija od G modulo relacija od oblika $V + W - (V \oplus W)$. Time zapravo pokazujemo kompleksnost problema kada radimo na proizvoljnom podpolju od $\mathbb{C}$, zbog toga se u ovom radu držimo određenih restrikcija.

3.6 Ireducibilne reprezentacije od $\mathfrak{S}_d$

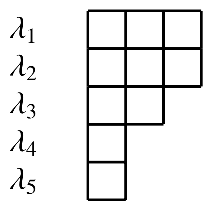
Pokazano je dosta primjera reprezentacija simetričnih grupa, poimence $\mathfrak{S}_3$, $\mathfrak{S}_4$ i $\mathfrak{S}_5$. Za kraj ćemo pogledati kako izgleda generalizacija broja elemenata permutacijskih grupa, u našem slučaju simetričnih grupa.
Broj ireducibilnih reprezentacija od $\mathfrak{S}_d$ je broj konjugacijskih klasa koji je zapravo broj particija od d koji označavamo s $p(d)$. Također vrijedi

$$d = \lambda_1 + \cdots \lambda_k \tag{3.66}$$

i

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \lambda_k. \tag{3.67}$$

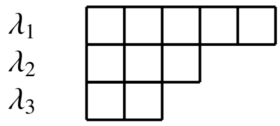
Particiji $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k)$ je pridružen Youngov dijagram koji izgleda ovako



Slika 3.1: Youngov dijagram za particiju (3,3,2,1,1)

Konjugacijska particija $\lambda' = (\lambda'_1, ..., \lambda'_k)$ od particije λ je definirana zamjenom redaka i stupaca u dijagramu particije λ. Može se gledati i kao simetrija s obzirom na pravac pod 45° koji prolazi kroz gornji lijevi kut dijagrama ili jednostavno kao trasponiranje matrica.

Dakle, u gornjem dijagramu se radi o particiji $(3, 3, 2, 1, 1)$, a njezin konjugat je onda $(5, 3, 2)$ čiji dijagram izgleda ovako.



Slika 3.2: Youngov dijagram za particiju (5,3,2)

Nastavljamo s generalizacijom i numeriramo čelije Youngovog dijagrama redom s lijeva na desno zatim odozgo prema dolje brojevima $1, 2, ..., d$. Za kanonski dijagram djelimo simetričnu grupu na dvije podgrupe

$$P = P_\lambda = \{g \in \mathfrak{S}_d : g \;\text{ čuva svaki redak}\} \tag{3.68}$$

i

$$Q = Q_\lambda = \{g \in \mathfrak{S}_d : g \;\text{ čuva svaki stupac}\}. \tag{3.69}$$

U grupnoj algebri $\mathbb{C}\mathfrak{S}_d$ imamo dva elementa koji odgovaraju tim podgrupama

$$a_\lambda = \sum_{g \in P} e_g \tag{3.70}$$

i

$$b_\lambda = \sum_{g \in Q} \operatorname{sgn}(g) \cdot e_g. \tag{3.71}$$

Zatim definiramo Youngov simetričar c_λ

$$c_\lambda = a_\lambda \cdot b_\lambda. \tag{3.72}$$

Koji je element iz $\mathbb{C}\mathfrak{S}_d$. Ako je npr. $\lambda = (d)$, onda je

$$c_{(d)} = a_{(d)} = \sum_{g \in \mathfrak{S}_d} e_g \tag{3.73}$$

i slika od $c_{(d)}$ na $V^{\otimes d}$ je $\mathrm{Sym}^d V$.

Teorem 3.6.1.

Neki skalarni višekratnik od c_λ je idempotentan, odnosno $c_\lambda^2 = n_\lambda c_\lambda$ i slika od c_λ je ireducibilna reprezentacija V_λ od $\mathfrak{S}_d$. Svaka ireducibilna reprezentacija od $\mathfrak{S}_d$ se može dobiti na ovaj način za jedinstvenu particiju.

Bitna posljedica ovog teorema je direktna veza između konjugacijskih klasa u $\mathfrak{S}_d$ i ireducibilinih reprezentacija od $\mathfrak{S}_d$.

Bibliografija

[1] *Determination of character table of alternating group:A_5*, https://groupprops.subwiki.org/wiki/Determination_of_character_table_of_alternating_group:A5, rujan 2022.

[2] Chris Blair, *Character table of S_5*, https://www.maths.tcd.ie/~cblair/notes/s5.pdf, rujan 2022.

[3] W. Fulton i J. Harris, *Representation theory: a first course*, sv. 129, Springer Science & Business Media, 2013.

[4] nLab authors, *group algebra*, http://ncatlab.org/nlab/show/group%20algebra, rujan 2022, Revision 22.

[5] nLab authors, *Schur's lemma*, http://ncatlab.org/nlab/show/Schur%27s%20lemma, rujan 2022, Revision 14.

[6] Jean Pierre Serre, *Linear representations of finite groups*, sv. 42, Springer, 1977.

Sažetak

Prvo poglavlje je namijenjeno kao dobar uvod u teoriju reprezentacija jer se kreće samo s bazičnim znanjem linearne algebre. Uvode se osnovne definicije i brzo se prelazi na primjere odnosno na reprezentacije Abelove grupe $\mathfrak{S}_3$.
Zatim se detaljnije uvode karakteri reprezentacija koji su od velike važnosti jer karakter neke reprezentacije govori dosta o samoj reprezentaciji. Uz uvod u projekcijske formule, također je i detaljno pokazan postupak pronalaska tablice karaktera za određene reprezentacije i to je napravljeno za $\mathfrak{S}_4$.
Zatim imamo još dobrih primjera kao što su tablice karaktera od $\mathfrak{A}_5$ i posebito $\mathfrak{S}_5$ koji nam dobro pokazuje kako evoluira tablica karaktera kada mijenjamo broj elemenata u nekoj permutacijskoj grupi. Završava se s kratkim uvodima u grupnu algebru, realnim i induciranim reprezentacijama.

Summary

The first chapter is intended as a gentle introduction to the theory of representations because it only assumes basic knowledge of linear algebra. Basic definitions are introduced followed by an example where we explore representations of the Abelian group $\mathfrak{S}_3$.

Next concept is the characters of representations which are of great importance in the theory as they give a lot of information about the representation itself. Along with introducing projection formulas here we show how to construct character tables for different representations, in this case on the group $\mathfrak{S}_4$.

What follows is a pair of good examples as we construct more character tables, for $\mathfrak{A}_5$ and more importantly for $\mathfrak{S}_5$ where we can see how the tables change when we add elements to a permutation group. In the end there is a short introduction to group algebra, real and induced representations.

Životopis

Moje ime je Fran Perica i rođen sam 6. svibnja 1993. godine u Zagrebu. Odrastao sam s roditeljima i sestrom u Zagrebu gdje sam završio cijelo svoje školovanje. Završio sam osnovnu školu u Zapruđu (OŠ Zapruđe) 2008. godine, a zatim i Tehničku školu Ruđera Boškovića 2012. godine. Inspiriran svojim profesorima iz matematike i fizike u srednjoj i osnovnoj školi 2012. godine upisujem integrirani nastavnički smjer matematike i fizike na matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Zagrebu.