Matematika žongliranja

Vrsaljko, Katarina

Master's thesis / Diplomski rad

2022

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Katarina Vrsaljko

MATEMATIKA ŽONGLIRANJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Sonja Žunar

Zagreb, 2022.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

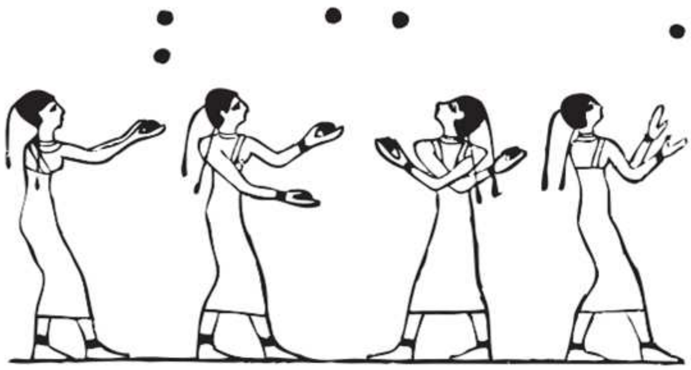
Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Vještina žongliranja stara je gotovo koliko i matematika. Prvi povijesni nalazi žongliranja stari su oko 4000 godina i potječu iz Egipta. Slika 0.1 prikaz je dijela zidne slike iz staroegipatske grobnice Beni - Hassan koja prikazuje četiri žene koje žongliraju svaka s tri loptice.



Slika 0.1: Prikaz dijela zidne slike iz razdoblja oko 1994. – 1781. pr. Kr.

Osim ove zidne slike, postoje brojni povijesni dokazi o različitim oblicima žongliranja koji su se razvijali neovisno u raznim dijelovima svijeta. Prvi poznati matematičar žongler bio je Abu Sahl al – Quhi, koji je živio oko desetog stoljeća. Prije nego što je postao poznati matematičar, žonglirao je staklenim bocama na tržnici u Bagdadu. Međutim, žongliranjem su se uglavnom bavili cirkuski izvođači i njihovi prethodnici sve do druge polovice 20. stoljeća. U to vrijeme, žongliranje postaje sve popularnije među mladima, posebice studentima te se na sveučilištima širom svijeta osnivaju brojni žonglerski klubovi. Većinu mladih žonglera amatera tada su činili ljudi čija je profesija bila vezana za matematiku, fiziku i informatiku. Oko 1985. godine tri su grupe matematičara neovisno počele razvijati i popularizirati matematički jezik za zapisivanje žonglerskih trikova. Sustavno proučavanje žonglerskih trikova dovelo je do zanimljivih rezultata u različitim područjima matematike:

teoriji brojeva, teoriji grafova i raznim područjima kombinatorike. Isto tako, matematički pristup omogućio je žonglerima nov način razmišljanja o žongliranju i izradu računalnih animacija žongliranja, što dovodi do otkrića novih trikova.

U ovom radu proučavamo osnove matematičke teorije žongliranja. U Poglavlju 1 navodimo osnovne definicije i rezultate iz različitih područja matematike koji će biti važni za razumijevanje ovog diplomskog rada. U Poglavlju 2 bavimo se jednostavnim žongliranjem i izlažemo rezultate o s njime povezanim nizovima nenegativnih cijelih brojeva – žonglerskim nizovima. Istražujemo testove temeljene na aritmetičkoj sredini konačnog niza, žonglerskim dijagramima i permutacijama koji nam omogućavaju prepoznavanje žonglerskih nizova i broja loptica potrebnih za žongliranje određenog žonglerskog niza. Koristeći žonglerske karte, generiramo sve žonglerske nizove s b loptica i izvodimo formulu za broj žonglerskih nizova s b loptica, perioda p. Na kraju poglavlja, predstavljamo grafove žonglerskih stanja na temelju kojih se mogu generirati svi žonglerski nizovi s b loptica i zadane maksimalne visine bacanja. U Poglavlju 3 razmatramo složene žonglerske nizove, generalizaciju jednostavnih žonglerskih nizova opisanih u Poglavlju 2. Za razliku od jednostavnih žonglerskih nizova koji opisuju žongliranje u kojem se u svakom trenutku može uhvatiti i ponovno baciti najviše jedna loptica, u složenim žonglerskim nizovima dopušteno je da se u svakom trenutku uhvati i ponovno baci proizvoljan konačan broj loptica. Otkrit ćemo da brojni rezultati pokazani za jednostavne žonglerske nizove analogno vrijede i za složene žonglerske nizove. Na kraju, donosimo sažetak operacija koje nam omogućavaju transformaciju jednostavnih i složenih žonglerskih nizova u nove žonglerske nizove. U Poglavlju 4 razmatramo prve matematičke teoreme o žongliranju. Prvo definiramo pojam uniformnog žongliranja, pomoću kojeg je matematičar Claude Shannon izrekao svoja poznata tri teorema. Te teoreme iskazujemo i dokazujemo na kraju Poglavlja 4.

Poglavlje 1

Osnove

Za početak, navedimo neke osnovne definicije i rezultate iz različitih područja matematike koji će biti važni za razumijevanje ovog diplomskog rada.

Nizovi

Definicija 1.0.1. *Neka je Y neprazan skup. Svaka funkcija $x : \mathbf{N} \to Y$ naziva se (beskonačan)* ***niz*** *(u skupu Y). Vrijednost $x(n) \in Y, n \in \mathbf{N}$, naziva se n-ti član niza i označava s x_n, a sam niz se označava s (x_n) ili s $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$. Ako je $Y = \mathbf{R}$, govorimo o nizu realnih brojeva.*

Definicija 1.0.2. *Neka je Y neprazan skup. Svaka funkcija $x : \{1, 2, \ldots, n\} \to Y$ naziva se* ***konačan niz*** *(u skupu Y). Konačan niz označava se s $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.*

Definicija 1.0.3. ***Aritmetička sredina*** *konačnog niza $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ jednaka je*

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Definicija 1.0.4. *Kažemo da je točka $x_0 \in \mathbf{R}$* ***granična vrijednost (ili limes)*** *realnog niza (x_n) i pišemo $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, ako za svaku ε-okolinu $B(x_0, \varepsilon) = \langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \rangle$ točke x_0 postoji $n_0 \in \mathbf{N}$ tako da za svaki $n \geq n_0$ vrijedi $x_n \in B(x_0, \varepsilon)$, tj.*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists\, n_0 \in \mathbf{N})(\forall n \in \mathbf{N}) \;\; n \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_0| < \varepsilon.$$

Djeljivost

Definicija 1.0.5. *Kažemo da broj $a \in \mathbf{N}$* ***dijeli*** *$b \in \mathbf{N}$ ako postoji $k \in \mathbf{N}$ takav da je $b = ka$. U tom slučaju pišemo $a \mid b$. Kažemo još i da je broj b djeljiv brojem a, odnosno da je a djelitelj (divizor) broja b, ili pak da je b višekratnik broja a. Ukoliko $a \in \mathbf{N}$ ne dijeli $b \in \mathbf{N}$, pišemo $a \nmid b$.*

Teorem 1.0.6. ***(Teorem o dijeljenju s ostatkom)*** *Za svaki $a \in \mathbf{N}$ i svaki $b \in \mathbf{Z}$ postoje jedinstveni brojevi $q, r \in \mathbf{Z}$ takvi da je $0 \leq r < a$ i $b = qa + r$.*

Broj r iz teorema 1.0.6 zovemo ostatkom pri dijeljenju broja b sa a i označavamo ga sa $b \bmod a$.

Permutacije

Definicija 1.0.7. *Neka je $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ neki n-člani skup.* ***Permutacija*** *skupa S je svaka bijekcija $\pi : S \to S$. Permutaciju π zapisujemo kao uređenu n-torku $(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n))$.*

Grafovi

Definicija 1.0.8. ***Usmjereni graf*** *ili* ***digraf*** *D je uređena trojka $D = (V, A, \psi)$, gdje je $V = V(D)$ neprazan skup čije elemente nazivamo vrhovima, $A = A(D)$ skup disjunktan s V čije elemente nazivamo lukovima i ψ funkcija koja svakom luku a iz A pridružuje uređeni par (u, v), pri čemu $u, v \in V$ nisu nužno različiti. Kažemo da je u početak, a v kraj luka a. Kažemo da je orijentacija ili smjer luka a od u prema v i koristimo oznaku $a = (u, v)$.*

Definicija 1.0.9. ***Usmjerena šetnja*** *u digrafu D je niz $W := (v_0, a_1, v_1, a_2, \ldots, a_k, v_k)$ čiji su članovi naizmjenično vrhovi v_i i lukovi a_i tako da je početak od a_i vrh v_{i-1}, a kraj mu je v_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Broj k zovemo* ***duljinom*** *usmjerene šetnje W. Kažemo da je v_0 početak, a v_k kraj usmjerene šetnje W. Usmjerena šetnja W je zatvorena ako se njen početak i kraj podudaraju, tj. ako je $v_0 = v_k$. Usmjerenu šetnju kojoj su svi lukovi međusobno različiti nazivamo* ***usmjerena staza****.* ***Usmjereni put*** *je usmjerena staza čiji su vrhovi međusobno različiti.* ***Usmjereni ciklus*** *je zatvorena usmjerena staza čiji su vrhovi, osim krajnjih, međusobno različiti.*

Definicija 1.0.10. ***Bridnotežinski digraf*** *je uređeni par (D, ω), gdje je D digraf i $\omega : A(D) \to [0, +\infty\rangle$ funkcija koja svakom luku e iz D pridružuje nenegativan broj $\omega(e)$. Vrijednost $\omega(e)$ nazivamo* ***težinom*** *luka e.*

Poglavlje 2

Jednostavno žongliranje

U ovom ćemo se poglavlju baviti najjednostavnijim modelom žongliranja – jednostavnim žongliranjem i izložiti rezultate o s njime povezanim nizovima nenegativnih cijelih brojeva – žonglerskim nizovima. Prva tri potpoglavlja neformalnijeg su karaktera i služe kao motivacija za uvođenje preciznih matematičkih pojmova vezanih uz jednostavno žongliranje u potpoglavlju 2.4.

2.1 Definicija jednostavnog žongliranja

Rutina žonglera obično se sastoji od određenog broja povezanih trikova ili uzoraka. Da bismo razumjeli rutinu, moramo pomno proučiti pojedinačne uzorke od kojih je sastavljena. Uzorke ćemo raščlaniti na pojedinačne komponente i usredotočiti se na one koje su stvarno bitne.

Promotrimo žongliranje u kojem jedan žongler žonglira tako da ponavlja periodični uzorak s određenim brojem objekata koje hvata i baca u konstantnom ritmu. Nazovimo uzorkom svaki trik koji žongler izvodi, a objekte kojima žonglira lopticama.

Možemo pretpostaviti da vrijede sljedeći aksiomi:

(A1) *Bacanja se mogu događati samo u diskretnim, jednako razmaknutim trenucima u vremenu. Drugim riječima, vrijeme između dvaju mogućih uzastopnih bacanja je konstantno, ali pri tome dopuštamo da se neko od njih ne realizira.*

(A2) *Uzorak je periodičan, tako da možemo pretpostaviti da žongler žonglira zauvijek, to jest ponavlja uzorak iznova i iznova.*

(A3) *Za žongliranje se koriste točno dvije ruke, i to naizmjence. U svakom se trenutku hvata i odmah baca najviše jedna loptica. Baca se ista ona loptica koja je upravo uhvaćena.*

Žongliranje koje zadovoljava aksiome (A1) – (A3) zvat ćemo **jednostavnim žongliranjem**.

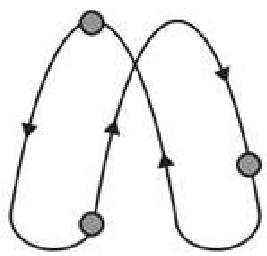
Trenutke u kojima je dopušteno izvoditi bacanja zovemo **otkucajima**. Po aksiomu (A1) vrijeme između svakih dvaju otkucaja je konstantno. Broj otkucaja između dvaju uzastopnih bacanja istog objekta zovemo **visinom** ranijeg od tih dvaju bacanja. Bacanje koje traje n otkucaja zovemo ***n*-bacanje** ili **bacanje visine *n***. Prema aksiomu (A1) moguća su i bacanja koja se ne realiziraju, takvo bacanje zovemo **nulbacanje** ili **bacanje visine nula**.

2.2 Osnovni žonglerski uzorci

Tri osnovna žonglerska uzorka koja zadovoljavaju aksiome jednostavnog žongliranja su **kaskada**, **fontana** i **pljusak**.

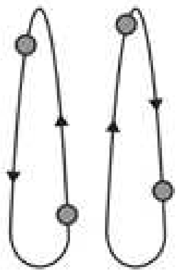
Prilikom jednostavnog žongliranja, kod bacanja neparne visine loptice idu iz jedne ruke u drugu, dok je kod bacanja parne visine žongler prisiljen bacati i hvatati loptice istom rukom. Pogledajmo uzorke u kojima su sva bacanja iste strogo pozitivne visine. Ovisno o tome je li visina, ili ekvivalentno broj loptica s kojima žongler žonglira, neparan ili paran, razlikujemo dva takva uzorka.

Kaskada je uzorak u kojem su sva bacanja iste strogo pozitivne neparne visine n. U tom se uzorku n loptica baca naizmjence iz jedne u drugu ruku u obliku znaka beskonačnosti.



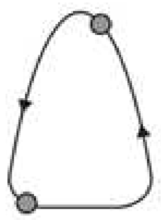
Slika 2.1: Kaskada s 3 loptice

Fontana je uzorak u kojem su sva bacanja iste strogo pozitivne parne visine n. U tom uzorku žongler polovinu od ukupno n loptica žonglira u jednoj ruci, a drugu polovinu u drugoj ruci.



Slika 2.2: Fontana sa 4 loptice

Treći osnovni uzorak u kojemu se loptice bacaju cirkularno nazivamo **pljusak**. Taj uzorak možemo izvoditi s bilo kojim brojem loptica. Na primjer, ako izvodimo pljusak s tri loptice, loptica iz lijeve ruke bačena je ravno u desnu, a onda odmah iz desne u zrak. Dakle, svaka loptica baca se dva puta zaredom.



Slika 2.3: Pljusak s 2 loptice

2.3 Žonglerski nizovi i žonglerski dijagrami

U ovom radu svi primjeri konačnih nizova nenegativnih cijelih brojeva sastojat će se od jednoznamenkastih brojeva. Radi jednostavnosti, u zapisu takvih nizova elemente nećemo odvajati razmacima ili zarezima. Na primjer, niz $(1, 2, 3, 4)$ pišemo kao broj 1234.

Promotrimo žonglerski uzorak u kojem smo izabrali da jedan od otkucaja bude otkucaj 0 i brojimo gore-dolje od tog otkucaja. Pretpostavimo da loptica bačena na otkucaje

$$\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$$

ostaje

$$\ldots, 4, 4, 1, 4, 4, 1, 4, 4, 1, \ldots$$

otkucaja u zraku prije nego što bude uhvaćena i ponovno bačena. Ovaj uzorak je periodičan. Iz ovoga slijedi da bilo koji od konačnih nizova $441, 414, 441441, 144144144, \ldots$ daje bitne informacije o našem žonglerskom uzorku. Konačan niz nenegativnih cijelih brojeva koji proizlazi na ovaj način iz žonglerskog uzorka naziva se **žonglerski niz**. Žonglerske ćemo nizove precizno definirati u definiciji 2.4.2.

Definicija 2.3.1. *Duljina konačnog niza cijelih brojeva naziva se njegovim* ***periodom****.*

Žonglerski niz je **minimalan** ako ima minimalni period među svim žonglerskim nizovima koji predstavljaju isti uzorak žongliranja.

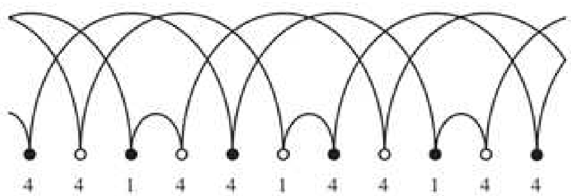
Primjer 2.3.2. *Nizovi* $3, 5, 441, 51515151$ *su žonglerski nizovi, niz* 441441 *ima period* 6*, niz* 144 *je minimalan žonglerski niz, a* 441441 *je žonglerski niz koji nije minimalan.*

Svi žonglerski nizovi istog uzorka danog perioda p su cikličke permutacije jedna druge i, prema tome, postoji najviše p takvih žonglerskih nizova.

Jedan od načina na koji možemo provjeriti je li dani niz žonglerski ili nije, jest crtanje žonglerskog dijagrama.

Definicija 2.3.3. ***Žonglerski dijagram*** *je grafički prikaz žonglerskog uzorka ili niza u kojem su prikazani vertikalni pomaci loptica obzirom na otkucaje.*

U žonglerskom dijagramu u horizontalnoj liniji poredani su na jednakim razmacima kružići koji predstavljaju otkucaje. Parni otkucaji označeni su punim kružićima, a neparni praznim. Luk koji spaja otkucaje prikazuje vertikalno kretanje loptice od bacanja na lijevom kraju luka do hvatanja na desnom. Što je veća visina bacanja, viši je i širi luk koji odgovara bacanju.



Slika 2.4: Žonglerski dijagram za niz 441

Primjer 2.3.4. *Provjerimo da niz zadan s $n(n-1)\cdots$ ne može biti žonglerski niz. Pretpostavimo suprotno. Nacrtajmo žonglerski dijagram tako da prvo nacrtamo kružiće koji označavaju otkucaje, prvi luk koji obuhvaća n intervala i drugi luk koji obuhvaća $n-1$ interval. Primijetimo da odgovarajuće dvije loptice moraju biti uhvaćene istom rukom, što ne vrijedi po aksiomu (A3). Dakle, niz oblika $n(n-1)\cdots$ nije žonglerski niz.*

2.4 Matematički opis žongliranja

Uvedimo sada pojmove kojima možemo matematički opisati žongliranje.

Neka je $j : \mathbf{Z} \to \mathbf{N_0}$. Primijetimo da, ako skup $\mathbf{Z}$ predstavlja skup otkucaja prilikom jednostavnog žongliranja i $j(i)$ visinu bacanja na otkucaj i za sve $i \in \mathbf{Z}$, tada je funkcija

$$j_+ : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}, \qquad i \mapsto i + j(i)$$

bijekcija. Ovo motivira sljedeću definiciju.

Definicija 2.4.1. *Neka su j i j_+ kao gore. Ako je funkcija j_+ bijekcija, onda funkciju j nazivamo **žonglerskom funkcijom.***

Žonglerske funkcije su generalizacije žonglerskih nizova. Štoviše, pomoću pojma žonglerske funkcije možemo precizno definirati pojam žonglerskog niza:

Definicija 2.4.2. *Konačan niz $s = \{a_k\}_{k=0}^{p-1}, p \geq 1$ nenegativnih cijelih brojeva zove se **žonglerski niz** ako je funkcija $\mathbf{Z} \to \mathbf{N_0}, i \mapsto a_{i \ mod p}$, žonglerska funkcija.*

Motivirani ovim definicijama, uvedimo i sljedeću preciznu definiciju otkucaja:

Definicija 2.4.3. *Neka je $I \subseteq \mathbf{Z}$, i neka je zadana funkcija $s : I \to \mathbf{N_0}$. Elemente iz I zovemo otkucajima funkcije s.*

Primjerice, ako je s konačan niz cijelih brojeva, tada su otkucaji niza s indeksi članova niza s.

Ako je j žonglerska funkcija, definiramo njezinu visinu $h(j)$ i broj loptica $b(j)$ na sljedeći način:

$$h(j) = \begin{cases} \infty, & \text{ako } j \text{ nije omeđena,} \\ \max\{j(i) \mid i \in \mathbf{Z}\}, & \text{inače,} \end{cases}$$

$$b(j) = \text{broj orbita funkcije} j,$$

gdje je orbita funkcije j svaki skup oblika

$$\left\{\ldots,\ j_+^{-1}\left(j_+^{-1}(i)\right),\ j_+^{-1}(i),\ i,\ j_+(i),\ j_+(j_+(i)),\ \ldots\right\} \quad \text{za neki } i \in \mathbf{Z}$$

koji ima barem dva elementa. Primijetimo da broj orbita doista predstavlja broj loptica kojima žongliramo: intuitivno, orbita funkcije j je skup svih otkucaja u kojima se hvata i baca neka fiksna loptica, dakle svakoj loptici kojom žongliramo odgovara točno jedna orbita funkcije j. U žonglerskom dijagramu orbite su predstavljene putanjama pojedinih loptica, i korisno ih je tako zamišljati u primjerima i dokazima.

Napokon, definiramo visinu $h(s)$ odnosno broj loptica $b(s)$ žonglerskog niza s kao visinu odnosno broj loptica pripadne žonglerske funkcije iz definicije 2.4.2.

2.5 Teorem prosjeka

Razmotrimo pitanja koliko nam je loptica potrebno za žongliranje nekog žonglerskog niza i je li neki konačni niz žonglerski. Sljedeći će nam kriterij pomoći da dođemo do odgovora.

Teorem 2.5.1. *(Teorem prosjeka)*

(i) Broj loptica $b(s)$ potrebnih za žongliranje žonglerskog niza s jednak je artimetičkoj sredini niza s.

(ii) Neka je j žonglerska funkcija. Ako je $h(j)$ konačna, onda postoji limes

$$\lim_{|\mathbf{I}|\to\infty} \frac{\sum_{i\in\mathbf{I}} j(i)}{|\mathbf{I}|},$$

konačan je i jednak je $b(j)$, gdje se limes uzima po svim cjelobrojnim intervalima $\mathbf{I} = \{a, a+1, a+2, \ldots, b\} \subset \mathbf{Z}$ i $|\mathbf{I}| = b - a + 1$ je broj cijelih brojeva u $\mathbf{I}$.

Dokaz tvrdnje (*ii*) teorema prosjeka možemo pronaći u potpoglavlju 2.4 knjige [1], a tvrdnju (*i*) ćemo dokazati primjenom tzv. algoritma poravnanja u potpoglavlju 2.6.

Teorem prosjeka pokazuje da svaki žonglerski niz ima cjelobrojnu aritmetičku sredinu. To nam omogućava bržu provjeru je li neki niz žonglerski. Ipak, ako je aritmetička sredina konačnog niza nenegativnih cijelih brojeva cjelobrojna, ne mora značiti da je taj niz žonglerski niz.

Korolar 2.5.2. *(Test prosjeka) Ako aritmetička sredina konačnog niza nenegativnih cijelih brojeva nije cijeli broj, onda taj niz nije žonglerski niz.*

Primjer 2.5.3. *Niz* 321 *ima cjelobrojni prosjek, ali nije žonglerski.*

2.6 Zamjena mjesta, ciklički pomaci i algoritam poravnanja

Uvedimo dvije operacije koje žonglerske nizove transformiraju u nove žonglerske nizove bez mijenjanja njihovih osnovnih svojstava. Te dvije operacije omogućit će nam generiranje svih žonglerskih nizova iz osnovnih.

Definicija 2.6.1. *Neka je $s = \{a_k\}_{k=0}^{p-1}, p \geq 2$ konačan niz nenegativnih cijelih brojeva. Neka su i i j nenegativni cijeli brojevi takvi da je $0 \leq i \leq j \leq p-1$ i $j - i \leq a_i$. Neka je $s_{i,j}$ niz od p nenegativnih cijelih brojeva koji se podudara sa s osim što su i-ti i j-ti element u nizu jednaki $a_j + j - i$ odnosno $a_i - j + i$. Operaciju transformacije niza s u $s_{i,j}$ nazivamo* ***zamjena mjesta*** *otkucaja i i j od s.*

Vrijedi sljedeće:

- Niz s je žonglerski ako i samo ako je $s_{i,j}$ žonglerski niz.
- Aritmetička sredina niza s jednaka je aritmetičkoj sredini niza $s_{i,j}$.
- Ako je s žonglerski niz, onda je broj potrebnih loptica za žongliranje niza s jednak broju loptica potrebnih za žongliranje niza $s_{i,j}$.

Primjer 2.6.2. *Pogledajmo žonglerski niz $s = 642$. Tada je $s_{0,1} = 552$ i $s_{0,2} = 444$.*

Druga operacija transformacije koju uvodimo je **ciklički pomak**.

Definicija 2.6.3. *Neka je $s = \{a_k\}_{k=0}^{p-1}, p \geq 2$ konačan niz nenegativnih cijelih brojeva i $s_{\rightarrow}$ niz $(a_{p-1}, a_1, a_2, \ldots, a_{p-2})$. Operaciju transformacije niza s u niz $s_{\rightarrow}$ nazivamo* ***ciklički pomak*** *od s.*

Tvrdnje koje vrijede za zamjenu mjesta otkucaja vrijede analogno i za ciklički pomak.

Primjer 2.6.4. *Za niz $s = 441$ vrijedi $s_{\rightarrow} = 144$.*

Sada ćemo opisati **algoritam poravnanja**, koji se temelji na operacijama zamjene mjesta i cikličkog pomaka.

Neka je $s = \{a_k\}_{k=0}^{p-1}, p \geq 1$ proizvoljan niz nenegativnih cijelih brojeva. **Algoritam poravnanja** provodimo na sljedeći način:

- Ako je s konstantan niz, zaustavljamo se i zapisujemo ovaj niz, inače

- koristimo ciklički pomak za raspoređivanje elemenata od s tako da se jedan maksimalne vrijednosti, recimo e, zaustavi na otkucaju 0 i jedan koji nije maksimalan, nego mu je vrijednost $f < e$, zaustavi na otkucaju 1. Ako se e i f razlikuju samo za 1, zaustavljamo se i ispisujemo dobiveni novi niz. Inače,
- izvodimo zamjenu mjesta otkucaja 0 i 1 i vraćamo se na prvi korak.

Algoritam poravnanja uvijek završi u konačno mnogo koraka jer svaka zamjena mjesta otkucaja 0 i 1 u tom algoritmu ili strogo smanjuje maksimum trenutnog niza ili ne mijenja maksimum trenutnog niza, ali strogo smanjuje broj najvećih članova u trenutnom nizu.

Primjer 2.6.5. *Pogledajmo kako algoritam poravnanja žonglerski niz* $s = 642$ *transformira u konstantni niz. Svi nizovi u međukoracima su žonglerski nizovi.*

$$642 \xrightarrow{\textit{zamjena mjesta}} 552 \xrightarrow{\textit{2 ciklička pomaka}} 525 \xrightarrow{\textit{zamjena mjesta}} 345 \xrightarrow{\textit{ciklički pomak}} 534 \xrightarrow{\textit{zamjena mjesta}} 444.$$

Lema 2.6.6. *Neka je* $s = \{a_k\}_{k=0}^{p-1}$, $p \geq 1$ *konačan niz nenegativnih cijelih brojeva. Algoritam poravnanja niz s pretvara u konstantan niz ako i samo ako je niz s žonglerski.*

Dokaz. Pretpostavimo da je niz s žonglerski. Budući da se algoritam poravnanja temelji na operacijama zamjene mjesta otkucaja i cikličkim pomacima, koje žonglerske nizove transformiraju u žonglerske nizove, u svakom je koraku algoritma niz žonglerski pa po primjeru 2.3.4 ni u kojem koraku algoritma ne dolazi do situacije da se e i f razlikuju točno za 1. Kako algoritam poravnanja uvijek završi u konačno mnogo koraka, slijedi da završava nekim konstantnim nizom. Obratno, pretpostavimo da algoritam poravnanja niz s pretvara u neki konstantni niz c. Iz provedenog algoritma poravnanja, provođenjem operacija inverznih cikličkih pomaka i zamjena mjesta otkucaja na nizu c, u poretku suprotnom od provedenog algoritma, dobivamo niz s. Spomenute operacije su ciklički pomaci odnosno zamjene mjesta otkucaja pa žonglerske nizove transformiraju u žonglerske nizove. Budući da je konstantni niz c žonglerski, slijedi da je i niz s žonglerski. □

Dokaz teorema 2.5.1. (i). Algoritam poravnanja daje nam dokaz da je aritmetička sredina žonglerskog niza jednaka broju loptica kojima se žonglira. Naime, zamjene mjesta i ciklički pomaci ne mijenjaju aritmetičku sredinu i broj loptica kojima se žonglira, pa ih ne mijenja ni provođenje algoritma poravnanja na zadanom žonglerskom nizu s, kojim po lemi 2.6.6 dobivamo konstantan niz. Kako konstantni nizovi očito zadovoljavaju tvrdnju teorema 2.5.1 (i), slijedi da je zadovoljava i niz s.

□

Definicija 2.6.7. *Neka je* $s = \{a_k\}_{k=0}^{p-1}, p \geq 1$ *konačan niz nenegativnih cijelih brojeva. Vektor*

$$(0 + a_0, 1 + a_1, \cdots, (p-1) + a_{p-1}) \; mod \; p$$

*nazivamo **test-vektor** od s.*

2.7 Permutacijski test

Vidjeli smo da nam test prosjeka (korolar 2.5.2) govori da niz čiji prosjek nije cijeli broj nije žonglerski. Međutim, taj test nam ne daje potpun odgovor je li dani konačni niz žonglerski ili nije. Stoga, dokazujemo sljedeći teorem.

Teorem 2.7.1. *(Permutacijski test) Neka je* $s = \{a_k\}_{k=0}^{p-1}, p \geq 1$ *konačan niz nenegativnih cijelih brojeva i* $[p] = \{0, 1, 2, ..., p-1\}$. *Tada je s žonglerski niz ako i samo ako je funkcija*

$$\phi_s : [p] \to [p], \qquad i \mapsto (i + a_i) \; mod \; p$$

permutacija skupa $[p]$.

Dokaz. Neka je $s = \{a_k\}_{k=0}^{p-1}$, $p \geq 1$ konačan niz nenegativnih cijelih brojeva. Ako je $p = 1$, nemamo što pokazati. Neka je $p \geq 2$. Promatramo utjecaj zamjene mjesta i-tog i $(i+d)$-tog otkucaja na test-vektor od s. Primijetimo da se osim i-tog i $(i+d)$-tog koeficijenta, nijedan koeficijent test-vektora ne mijenja. i-ti koeficijent $i + a_i$ mod p odnosno $(i+d)$-ti koeficijent $i + d + a_{i+d}$ mod p se mijenja u $i + (a_{i+d} + d)$ mod $p = i + d + a_{i+d}$ mod p odnosno $(i+d) + (a_i - d)$ mod $p = i + a_i$ mod p. To znači da i-ti i $(i+d)$-ti koeficijent test-vektora samo zamijene mjesta. Posebno, test-vektor nakon ove transformacije sadrži sve elemente od $[p]$ ako i samo ako ih sadrži originalni test-vektor. Promotrimo sada učinak cikličkog pomaka na test-vektor s. Test-vektor novog niza je

$$((1, 1, \ldots, 1) + (p - 1 + a_{p-1}, 0 + a_0, 1 + a_1, \ldots, p - 2 + a_{p-2})) \text{ mod } p;$$

to jest, zbroj, reduciran modulo p, ciklički pomaknutog izvornog test-vektora i konstantnog vektora s vrijednošću 1. Jasno, novi test-vektor sadrži sve elemente od $[p]$ ako i samo ako ih izvorni test-vektor sadrži. Primijenjen na s, algoritam poravnanja nas vodi, putem zamjene mjesta i cikličkih pomaka, do konačnog konstantnog niza (ako je niz s žonglerski) ili do niza oblika $m(m-1)\cdots$ (ako niz s nije žonglerski; vidi lemu 2.6.6). Test-vektor prve vrste niza odgovara permutaciji, a test-vektor druge ne odgovara. Zajedno s našim razmatranjima učinaka zamjene mjesta i cikličkih pomaka na test-vektore, ovo dokazuje našu tvrdnju. □

Primjer 2.7.2. *Provjerimo jesu li nizovi $s = 6424$ i $s' = 513$ žonglerski. Za niz s, $p = 4$ i $(0+6, 1+4, 2+2, 3+4)$ mod $4 = (6, 5, 4, 7)$ mod $4 = (2, 1, 0, 3)$. Budući da smo dobili permutaciju skupa $\{0, 1, 2, 3\}$, prema permutacijskom testu niz s je žonglerski. Provjerimo sada za niz s'. Imamo $p = 3$ i $(0+5, 1+1, 2+3)$ mod $3 = (5, 2, 5)$ mod $3 = (2, 2, 2)$, a to nije permutacija skupa $\{0, 1, 2\}$ pa niz s' nije žonglerski. Budući da je aritmetička sredina niza s' jednaka 3, što je cijeli broj, test prosjeka ne bi nam dao odgovor na pitanje je li niz s' žonglerski niz.*

Neposredna posljedica permutacijskog testa je i sljedeći teorem.

Teorem 2.7.3. *Neka je $s = \{a_k\}_{k=0}^{p-1}$ konačan niz nenegativnih cijelih brojeva, neka je d cijeli broj veći od ili jednak $-\min\{a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}\}$ i neka je zadan niz $s' = \{a_k + d\}_{k=0}^{p-1}$. Niz s je žonglerski ako i samo ako je i niz s'. Operaciju transformacije niza s u s' nazivamo* ***vertikalni pomak*** *duljine d.*

Metoda za konstrukciju svih žonglerskih nizova

Permutacijski test također nam omogućava i eksplicitni način konstruiranja svih žonglerskih nizova s b loptica perioda p. Za proizvoljan test-vektor P duljine p, rekonstruiramo sve žonglerske nizove s b loptica čiji je test-vektor jednak P. Najprije definiramo vektor

$$P' = (P - (0, 1, 2, \cdots, p-1)) \bmod p.$$

I zbroj koeficijenata vektora P i zbroj koeficijenata vektora koji se u gornjoj formuli oduzima od P da bi se dobio novi vektor P' jednaki su $\sum_{k=0}^{p-1} k$. Prema tome, aritmetička sredina novog vektora P' je određeni cijeli broj a. Budući da su svi koeficijenti od P' nenegativni cijeli brojevi manji od ili jednaki $p-1$, zaključujemo da vrijedi $0 \leq a \leq p-1$. Neka je $b' = b - a$. Tada su različita rješenja našeg problema u korespondenciji s vektorima duljine p čiji su koeficijenti nenegativni cijeli brojevi čiji je zbroj b'. Eksplicitno, ako je Q jedan takav vektor, tada koeficijenti vektora $P + pQ$ tvore pridruženi žonglerski niz s b loptica perioda p. Ako je b' negativan, tada izvorni test-vektor ne odgovara nijednom žonglerskom nizu kakav tražimo.

Inverzni žonglerski niz

Sada ćemo pokazati kako dolazimo do eksplicitne formule za tzv. inverzni žonglerski niz – žonglerski niz čiji se žonglerski dijagram može dobiti zrcaljenjem originalnog žonglerskog niza oko vertikalnog pravca u ravnini.

Neka je zadan žonglerski niz $s = \{a_k\}_{k=0}^{p-1}$. S obzirom na pripadnu žonglersku funkciju j, za svaki $k \in [p]$ bacanje visine a_k izvodimo na otkucaje

$$\cdots, -2p+k, -p+k, 0+k, p+k, 2p+k, \cdots.$$

Definirajmo niz $s' = \{b_k\}_{k=0}^{p-1}$, pri čemu je b_k visina izbačaja u izvornom žongliranju koji završava na otkucaju k. Tada je inverz originalnog niza s niz

$$s' = \{c_k\}_{k=0}^{p-1} = \{b_{p-1-k}\}_{k=0}^{p-1}.$$

Inverz s' je očito žonglerski niz.

Kako bismo odredili elemente $c_j = b_{p-1-j}$ od s', primijetimo da po permutacijskom testu (teorem 2.7.1) postoji jedinstveni $k \in [p]$ takav da je $j = (k + a_k)$ mod p, tj. da je $j = \phi_s(k)$, gdje je ϕ_s permutacija $[p]$ iz teorema 2.7.1 koja odgovara nizu s. Dakle, $b_{\phi_s(k)} = a_k$, a to je ekvivalentno s $b_k = a_{\phi_s^{-1}(k)}$. Zaključujemo da su koeficijenti inverza od s oblika $c_k = a_{\phi_s^{-1}(p-1-k)}$.

Primjer 2.7.4. *Izračunajmo inverz niza* 56414.

k	0	1	2	3	4
a_k	5	6	4	1	4
$\phi_s(k)$	0	2	1	4	3
$\phi_s^{-1}(k)$	0	2	1	4	3
$p-1-k$	4	3	2	1	0
$\phi_s^{-1}(p-1-k)$	3	4	1	2	0
$c_k = a_{\phi_s^{-1}(p-1-k)}$	1	4	6	4	5

Permutabilan žonglerski niz

Definicija 2.7.5. ***Permutabilni*** *žonglerski nizovi su žonglerski nizovi koji ostaju žonglerski nizovi ma kako promijenili poredak njihovih elemenata.*

Teorem 2.7.6. *Konačan niz nenegativnih cijelih brojeva je permutabilan žonglerski niz perioda p ako i samo ako ima oblik $\{a_k p + c\}_{k=0}^{p-1}$, gdje su c i a_k nenegativni cijeli brojevi.*

Magični žonglerski niz

Definicija 2.7.7. ***Magični žonglerski niz*** *je žonglerski niz perioda p koji sadrži svaki cijeli broj između* 0 *i* $p-1$ *točno jednom. Aritmetička sredina magičnog žonglerskog niza s periodom p iznosi*

$$\frac{\sum_{k=0}^{p-1} k}{p} = \frac{p-1}{2}.$$

Pozivajući se na sljedeći teorem (obrat teorema prosjeka) zaključujemo da magični žonglerski niz postoji ako i samo ako je period p neparan broj.

Teorem 2.7.8. *(Obrat teorema prosjeka) Neka je zadan konačan niz nenegativnih cijelih brojeva čija je aritmetička sredina cijeli broj. Tada postoji permutacija tog niza koja je žonglerski niz.*

Neke primjere magičnih žonglerskih nizova možemo konstruirati koristeći sljedeći rezultat.

Propozicija 2.7.9. *Neka su p i q pozitivni cijeli brojevi, pri čemu je p neparan, $q > 1$, i p relativno prost sa q i $q - 1$. Tada je $\{(q-1)k \bmod p\}_{k=0}^{p-1}$ magični žonglerski niz.*

Ovaj rezultat posljedica je permutacijskog testa.

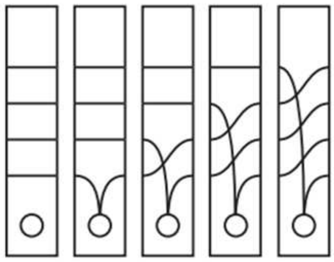
Primjer 2.7.10. *Pogledajmo različite magične žonglerske nizove koji se mogu žonglirati s* $0, 1, 2$ *i* 3 *loptice.*

Magični žonglerski nizovi do perioda 7(do na cikličke pomake)							
loptice	0	1	2	3			
nizovi	0	012	01234	0123456	0246135	0362514	0461253
			02413	0135264	0245163	0413562	0512463
			03142	0142635	0263145	0415263	0526134
				0236415	0315246	0416235	0531642
				0241536	0346152	0425613	

2.8 Žonglerske karte

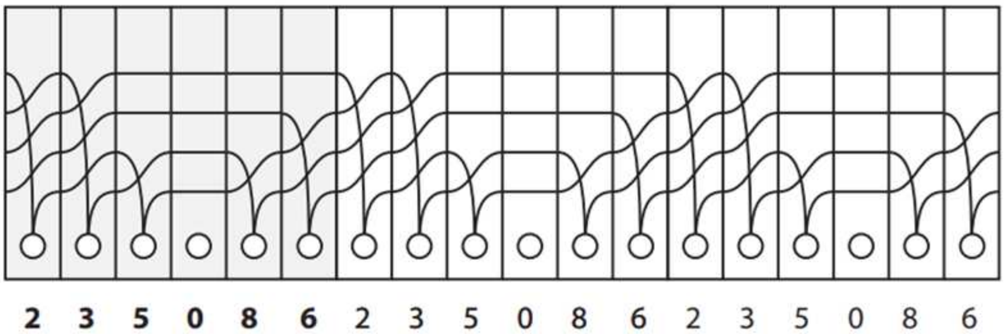
Budući da svaki nenegativni cijeli broj odgovara žonglerskom nizu, postoji beskonačno mnogo žonglerskih nizova. Broj loptica koji koristimo za žongliranje žonglerskog niza, period žonglerskog niza i maksimalna visina bacanja, parametri su koji definiraju istaknute klase žonglerskih nizova. U ovom i sljedećem potpoglavlju ćemo vidjeti kako ograničavanjem najmanje dvaju od tih parametara možemo doći do broja žonglerskih nizova koji je konačan.

Za prebrojavanje žonglerskih nizova možemo koristiti **žonglerske karte.** Pogledajmo prvo sliku 2.5, na kojoj je prikazano pet žonglerskih karata.



Slika 2.5: Žonglerske karte

Svaka karta sadrži kružnicu na dnu i četiri krivulje koje povezuju lijevu i desnu stranu karte, pri čemu najviše jedna od krivulja dodiruje kružnicu. Iz špila koji sadrži beskonačno mnogo kopija svake karte sada izvlačimo nekoliko karata koje stavljamo jednu do druge. Ponavljanjem dobivenog uzorka lijevo i desno dolazimo do malo iskrivljenog žonglerskog dijagrama žonglerskog niza.



Slika 2.6: Žonglerski niz 235086

Na slici 2.6 prikazan je žonglerski niz 235086 pomoću žonglerskih karata. Ovaj žonglerski niz ima period 6, što je jednako broju karata koje smo izvukli iz špila. Nadalje, lako je vidjeti da je broj loptica potrebnih za žongliranje ovim nizom 4, a to je ujedno i broj krivulja koje povezuju lijevu i desnu stranu karata. Jasno je da se svaki mogući žonglerski niz koji zahtijeva najviše 4 loptice i određeni period p može prikazati pomoću p naših karata točno na jedan način. Budući da postoji 5 različitih karata, to daje ukupno 5^p različitih žonglerskih nizova perioda p za koje su potrebne najviše 4 loptice. Vidimo da ograničenje broja loptica i perioda rezultira konačnim brojem žonglerskih nizova i načinom da ih sve pronađemo pomoću žonglerskih karata.

Kada zadamo period p i ograničimo broj loptica b, dobivamo sljedeće:

(B1) Broj svih žonglerskih nizova perioda p i s najviše b loptica iznosi

$$S^{\leq}(b, p) = (b + 1)^p.$$

(B2) Broj svih žonglerskih nizova perioda p i s točno b loptica iznosi

$$S(b, p) = S^{\leq}(b, p) - S^{\leq}(b - 1, p) = (b + 1)^p - b^p.$$

(B3) Broj svih minimalnih žonglerskih nizova perioda p s točno b loptica, $b \geq 1$, iznosi

$$MS(b, p) = \frac{1}{p} \sum_{d|p} \mu\left(\frac{p}{d}\right)\left((b + 1)^d - b^d\right)$$

ako cikličke permutacije žonglerskog niza nisu gledane kao različiti nizovi, gdje μ označava Möbiusovu funkciju.[1]

2.9 Grafovi žonglerskih stanja

Fiksiranje broja loptica i maksimalne visine bacanja i dalje daje beskonačnu klasu nizova žongliranja. Međutim, promišljanje o tim ograničenjima dovodi nas do nove metode za konstrukciju klasa žonglerskih nizova.

Zamislimo žonglera koji vješto jednostavno žonglira s 3 loptice, pri čemu je maksimalna visina bacanja 5. Razmislimo koje opcije žongler ima, ukoliko tijekom žongliranja poželi promijeniti žonglerski uzorak bez da prestane sa žongliranjem ili poveća maksimalnu visinu bacanja. Odgovor na to pitanje dolazi u obliku žonglerskih stanja. Ako bi prva, druga i treća loptica trebale sletjeti za $2, 3$ i 5 otkucaja od tada, trenutno žonglersko stanje mogli bismo zapisati kao niz od nula i jedinica: 01101. To znači da bi sljedeće bacanje bilo nulbacanje. Kad ga naš žongler "odradi", dobivamo novo žonglersko stanje 11010. Broj

[1]Möbiusova funkcija μ definirana je za $m \in \mathbb{N}$ formulom

$$\mu(m) = \begin{cases} 1, & \text{ako } m = 1 \text{ ili ako je } m \text{ kvadratno slobodan i ima paran broj prostih faktora.} \\ -1, & \text{ako je } m \text{ kvadratno slobodan i ima neparan broj prostih faktora,} \\ 0, & \text{ako } m \text{ nije kvadratno slobodan.} \end{cases}$$

m je kvadratno slobodan ako se u njegovom rastavu na proste faktore svaki prosti broj javlja najviše jednom.

1 kojim ono počinje pokazuje nam da će na prvom sljedećem otkucaju naš žongler uhvatiti lopticu, koju na tom istom otkucaju treba baciti na neku visinu. Pogledom na trenutno žonglersko stanje vidimo da visine 1 i 3 nisu dopuštene jer 1 odnosno 3 otkucaja kasnije naš žongler već hvata po jednu lopticu. Dakle, žongler može birati samo između visina $2, 4$ odnosno 5, odabir kojih će nakon odrađenog bacanja rezultirati novim žonglerskim stanjem $11100, 10110$ odnosno 10101. Svi spomenuti nizovi bit će vrhovi grafa žonglerskih stanja. U tom su grafu vrhovi, koji predstavljaju žonglerska stanja, međusobno povezani usmjerenim bridovima koji su označeni brojevima koji predstavljaju visinu bacanja. Da bismo konstruirali žonglerski niz, trebamo pronaći zatvorenu usmjerenu šetnju u grafu žonglerskih stanja.

Definirajmo prvo precizno žonglersko stanje i graf žonglerskog stanja.

Definicija 2.9.1. ***Žonglersko stanje*** *s b loptica, visine bacanja h, gdje je* $0 \leq b \leq h$ *i* $h \geq 1$, *je niz koji se sastoji od b jedinica i h − b nula. Takvih žonglerskih stanja ima*

$$V(b, h) = \binom{h}{b} = \frac{h!}{b!(h-b)!}$$

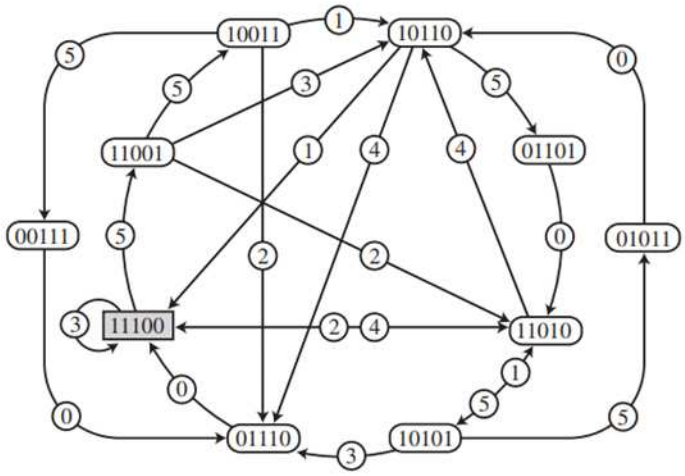
Ova žonglerska stanja tvore vrhove **grafa žonglerskih stanja** s b loptica, visine bacanja h. Spomenuti graf žonglerskih stanja je bridnotežinski usmjereni graf, pri čemu su težine lukova iz skupa $\{0, 1, \ldots, h\}$.

Lukove grafa žonglerskih stanja, motivirani primjerom s početka ovog potpoglavlja, konstruiramo na sljedeći način:

- Za svako žonglersko stanje s čija je prva znamenka 0, pomaknemo nulu na kraj od s i dobivamo drugo žonglersko stanje s'. Spojimo s i s' lukom težine 0 koji počinje u s i pokazuje na s'.
- Iz svakog žonglerskog stanja s čija je prva znamenka 1 izbacimo početnu jedinicu i na kraj mu dodamo 0. Zatim zamijenimo bilo koju nulu iz dobivenog niza, na primjer na poziciji i, s 1 kako bismo došli do novog žonglerskog stanja s'. Spojimo s i s' lukom označenim s i koji počinje u s i pokazuje na s'.

To znači da iz svakog žonglerskog stanja s koje počinje znamenkom 1 izlazi $h-b+1$ lukova, a iz svakog žonglerskog stanja s koje počinje znamenkom 0 samo jedan luk. Slično, na svako žonglersko stanje koje završava znamenkom 0 pokazuje točno $b + 1$ lukova, a na svako žonglersko stanje koje završava znamenkom 1 samo jedan luk.

Primjer 2.9.2. *Graf žonglerskih stanja s 3 loptice, visine 5.*



Slika 2.7: Graf žonglerskih stanja s 3 loptice, visine 5

Pravilo koje se prirodno iščitava iz algoritma za konstrukciju lukova u grafu žonglerskih stanja (vidi i motivacijski primjer na početku ovog potpoglavlja) definira bijekciju sa skupa žonglerskih nizova s b loptica i visine najviše h, do na cikličke pomake, na skup zatvorenih usmjerenih šetnji strogo pozitivne duljine u grafu žonglerskih stanja s b loptica i visinom h.

Poglavlje 3

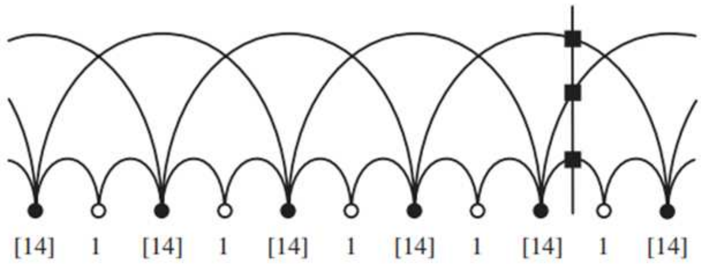
Složeno žongliranje

U prethodnom smo poglavlju izveli rezultate o jednostavnim žonglerskim uzorcima i pripadnim žonglerskim nizovima. Oni zadovoljavaju aksiome jednostavnog žongliranja. Sada ćemo istražiti njihove generalizacije: složene žonglerske uzorke i složene žonglerske nizove.

Reći ćemo da je žonglerski uzorak **složen** ako zadovoljava aksiome (A1) i (A2) te je svaka loptica uhvaćena u danom trenutku, bačena u istom tom trenutku. To implicira da je svaki jednostavni žonglerski uzorak ujedno i složen. Odsad ćemo umjesto naziva žonglerski niz koristiti naziv jednostavni žonglerski niz.

Složenim žonglerskim nizom smatrat ćemo konačni niz čiji su elementi konačni injektivni nizovi prirodnih brojeva koji označavaju visine bacanja na svakom otkucaju.

Primjer 3.0.1. *Niz* $(1,4),(1)$ *je primjer složenog žonglerskog niza. Period mu je jednak 2. Na prvom otkucaju uhvaćene su dvije loptice, na istom tom otkucaju jedna od tih loptica je bačena na visinu 1, a druga na visinu 4. Na sljedeći otkucaj, uhvaćena je jedna loptica i bačena na visinu* 1. *Ovaj složeni žonglerski niz standardno ćemo zapisivati u obliku* [14]1 *i koristiti analogne oznake i za zapisivanje ostalih žonglerskih nizova. Svaku pojavu praznog niza kao člana žonglerskog niza označavat ćemo znamenkom 0. Primjerice, složeni žonglerski niz* $(3,3),\emptyset,(3)$*, gdje je* $\emptyset$ *prazan niz, tj. niz s 0 članova, označavat ćemo* [33]03.



Slika 3.1: Žonglerski dijagram složenog žonglerskog niza [14]1

Jednostavne žonglerske nizove prirodno identificiramo s onim složenim žonglerskim nizovima čiji su elementi konačni nizovi prirodnih brojeva duljine najviše 1. Upravo uvedene oznake za složene žonglerske nizove očito su u skladu s tom identifikacijom.

Postoje različiti složeni žonglerski nizovi koji opisuju dani složeni žonglerski uzorak. Do tih složenih žonglerskih nizova dolazimo iz minimalnih žonglerskih nizova cikličkim permutacijama, formiranjem višestrukih kopija i permutacijama unutar uglatih zagrada.

3.1 Teorem prosjeka i permutacijski test

Da bismo dobili odgovor na pitanje koliko nam je loptica potrebno za žongliranje složenog žonglerskog niza, iskažimo sljedeću generalizaciju teorema 2.5.1(i).

Teorem 3.1.1. *Broj loptica potrebnih za žongliranje složenog žonglerskog niza jednak je zbroju cijelih brojeva u nizu podijeljenom njegovim periodom.*

Primjer 3.1.2. *Broj loptica potrebnih za žongliranje složenog žonglerskog niza* [14]1 *jednak je* $\frac{(1+4)+1}{2} = 3$.

Permutacijski test za složene žonglerske nizove također će biti generalizacija već navedenog teorema 2.7.1.

Teorem 3.1.3. *Neka je* $s = \{S_i\}_{i=0}^{p-1}$ *niz konačnih injektivnih nizova prirodnih brojeva. Nadalje, neka je* $s' = \{S'_i\}_{i=0}^{p-1}$, *gdje je* $S'_i = (i + S_i)$ *mod* p. *Tada,* s *je složeni žonglerski niz ako i samo ako je za svaki* $i = 0, 1, \ldots, p-1$ *ukupan broj pojavljivanja broja* i *u članovima* *niza s' jednak duljini i-tog elementa od s'.*

Primjer 3.1.4. *Ako je dan niz $s = ((2),(2),(7,2),(5,4),(2,1))$ i $p = 5$, tada je:*

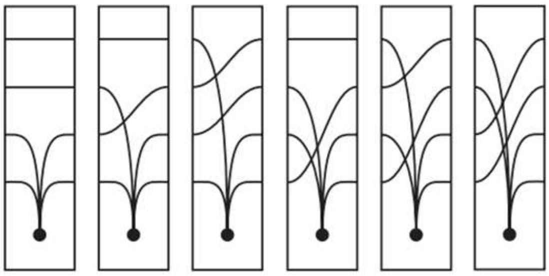
$$\begin{aligned} s' &= ((0+2),(1+2),(2+7,2+2),(3+5,3+4),(4+2,4+1))mod\ 5 \\ &= ((2),(3),(4,4),(3,2),(1,0)). \end{aligned}$$

Ukupan broj pojavljivanja brojeva $0,1,2,3,4$ *u članovima niza s' je redom* $1,1,2,2,2$*, a i duljine članova niza s' su redom* $1,1,2,2,2$*, dakle po teoremu 3.1.3 s' je složeni žonglerski niz.*

3.2 Žonglerske karte

U ovom ćemo potpoglavlju proširiti ideju žonglerskih karata uvedenu u potpoglavlju 2.8.

Za sve cijele brojeve $b \geq k \geq 0$ neka je $D_{b,k}$ špil od beskonačno mnogo karata, u kojemu postoji točno $\binom{b}{k}$ različitih karata i svaka se od njih u špilu pojavljuje beskonačno mnogo puta. Ove karte prikazuju sve moguće načine odabira k loptica od ukupno b loptica u zraku, žongler hvata ovih k loptica i odmah ih baca uvis tako da budu smještene u najniže orbite. Sve različite karte u slučaju kada je $b = 4$ i $k = 2$ skicirane su na slici 3.2, a za općenite b i k karte izgledaju analogno. Sada ćemo vidjeti kako možemo konstruirati složeni žonglerski niz s najviše b loptica iz ovih špilova karata. Fiksirajmo period $p \geq 1$ i neka su t_i, $i = 0,1,2,\cdots,p-1$ nenegativni cijeli brojevi manji od ili jednaki b. Izvucimo kartu iz špila D_{b,t_0} i stavimo je na stol, zatim izvlačimo kartu iz špila D_{b,t_1} i stavimo je na stol desno od prve karte, nakon izvlačenja karte iz špila D_{b,t_2} kartu stavljamo desno od druge karte. Postupak nastavljamo sve dok ne izvučemo p karata. Ponavljamo ovaj raspored karata beskonačno mnogo puta ulijevo i udesno kako bismo došli do žonglerskog dijagrama složenog žonglerskog niza perioda p s najviše b loptica u kojima je t_i loptica uhvaćeno i bačeno na otkucaj $i = 0,1,\ldots,p-1$, redom. Jasno je kako se iz dijagrama očitava koja se bacanja izvode na otkucaj i. Ako se na ovom otkucaju izvodi više od jednog bacanja, bilježimo ta bacanja redom kojim odgovarajući lukovi izlaze iz točke otkucaja.



Slika 3.2: $6 = \binom{4}{2}$ različitih žonglerskih karata za složeno žongliranje s najviše 4 loptice, za otkucaje na kojima se izvode točno dva bacanja

Ako su dana dva bacanja a i b u složenom žonglerskom nizu koja se izvode na određenom otkucaju tako da a prethodi b unutar para uglatih zagrada $[\cdots a \cdots b \cdots]$, tada se dva odgovarajuća luka neće presijecati ni u jednoj svojoj nerubnoj točki (tj. točki koja nije ni početna ni krajnja točka tih lukova) ako i samo ako je $a \leq b$, a u suprotnom će se presijecati točno u jednoj takvoj točki. S druge strane, lukovi koji počinju na različitim otkucajima presijecat će se točno u jednoj nerubnoj točki, samo u krajnjoj točki odnosno ni u jednoj točki ako i samo ako krajnja točka luka koji počinje prvi dolazi prije, ista je odnosno dolazi nakon krajnje točke luka koji počinje kasnije. Pomoću ovih primjedbi pokazuje se da se svaki složeni žonglerski niz može konstruirati na jedinstven način korištenjem gore opisanih skupova karata za složeno žongliranje. Broj promatranih složenih žonglerskih nizova je:

$$\binom{b}{t_0}\binom{b}{t_1}\cdots\binom{b}{t_{p-1}}.$$

Da bismo konstruirali sve moguće složene žonglerske nizove perioda p, s najviše b loptica, moramo pomiješati sve špilove karata $D_{b,k}$, gdje je $k = 0, 1, \ldots, b$, i nastaviti s konstrukcijom ovih nizova na gore opisan način koristeći novi špil karata. Ukupan broj takvih žonglerskih nizova je:

$$\left(\sum_{i=0}^{b}\binom{b}{i}\right)^p = \left(2^b\right)^p = 2^{pb}.$$

Vrijedi:

(S1) Broj svih složenih žonglerskih nizova perioda p s najviše b loptica jednak je:

$$M^{\leq}(b, p) = 2^{pb}.$$

(S2) Broj svih složenih žonglerskih nizova perioda p s $b, b \geq 1$ loptica jednak je:

$$M(b, p) = M^{\leq}(b, p) - M^{\leq}(b-1, p) = 2^{pb} - 2^{p(b-1)}.$$

(S3) Broj svih minimalnih žonglerskih nizova perioda p s točno b loptica, $b \geq 1$, jednak je:

$$\frac{1}{p}\sum_{d|p}\mu\left(\frac{p}{d}\right)\left(\left(\frac{b^2+b+2}{2}\right)^d - \left(\frac{b^2-b+2}{2}\right)^d\right)$$

gdje cikličke permutacije žonglerskog niza nisu gledane kao različiti nizovi, a μ označava Möbiusovu funkciju.[1]

3.3 Grafovi žonglerskih stanja za složeno žongliranje

Sjetimo se da se graf žonglerskih stanja za jednostavno žongliranje s b loptica, visine h može definirati na smislen način samo za cjelobrojne izbore b i h, takve da je $0 \leq b \leq h$ i $h \geq 1$. S druge strane, graf žonglerskih stanja za složeno žongliranje s b loptica, visine h može se definirati na potpuno analogan način za bilo koje b i h takve da je $b = 0, h \geq 1$ ili $b, h \geq 1$. Primjerice, graf žonglerskih stanja za složeno žongliranje s 3 loptice i visinom 3 prikazan je na slici 3.3.

Pretpostavimo da je $b, h \geq 1$.
Broj vrhova u grafu stanja složenog žongliranja jednak je:

$$V = \binom{b+h-1}{b}.$$

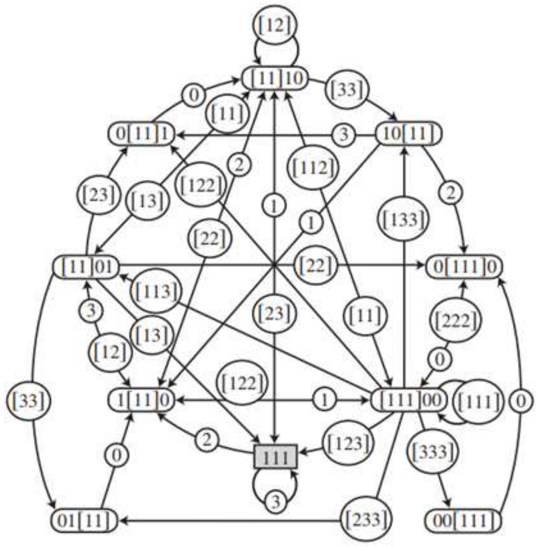
Vidimo da to vrijedi ako promotrimo permutaciju od b jedinica i $h-1$ znakova koji razdvajaju te jedinice. Tada, znak razdvajanja razdvaja jedinice u h grupa pa spomenutu permutaciju možemo interpretirati kao žonglersko stanje za složeno žongliranje s b loptica visine h na čijoj je i-toj poziciji i-ta grupa jedinica ako je ta grupa neprazna, a nula inače. Svako žonglersko stanje za složeno žongliranje s b loptica, visine h odgovara točno jednoj takvoj permutaciji. Prema tome, broj tih permutacija jednak je broju vrhova u grafu stanja složenog žongliranja. Nadalje, potpuno analogno kao kod jednostavnog žongliranja, svaki složeni žonglerski niz s b loptica, visine najviše h odgovara zatvorenoj usmjerenoj šetnji strogo pozitivne duljine u grafu žonglerskih stanja za složeno žongliranje s b loptica, visine h.

---

[1] Möbiusova funkcija μ definirana je za $m \in \mathbb{N}$ formulom

$$\mu(m) = \begin{cases} 1, & \text{ako } m = 1 \text{ ili ako je } m \text{ kvadratno slobodan i ima paran broj prostih faktora.} \\ -1, & \text{ako je } m \text{ kvadratno slobodan i ima neparan broj prostih faktora,} \\ 0, & \text{ako } m \text{ nije kvadratno slobodan.} \end{cases}$$

m je kvadratno slobodan ako se u njegovom rastavu na proste faktore svaki prosti broj javlja najviše jednom.



Slika 3.3: Graf žonglerskih stanja za složeno žongliranje s 3 loptice, visine 3

3.4 Operacije sa žonglerskim nizovima

U ovom ćemo poglavlju navesti operacije koje nam omogućavaju da jednostavne žonglerske nizove transformiramo u nove jednostavne žonglerske nizove, a složene žonglerske nizove u nove složene žonglerske nizove.

Višestruko kopiranje

Spajanjem višestrukih kopija jednostavnih odnosno složenih žonglerskih nizova dobivamo nove jednostavne odnosno složene žonglerske nizove.
Na primjer, [41]1, [41]1[41]1, [41]1[41]1[41]1, . . . su sve složeni žonglerski nizovi.

Ciklički pomaci

Cikličkim permutiranjem jednostavnog odnosno složenog žonglerskog niza, također dobivamo novi jednostavan odnosno složen žonglerski niz.

Permutacije unutar uglatih zagrada

Permutacija unutar uglatih zagrada složenog žonglerskog niza, daje novi složeni žonglerski niz.

Zamjena mjesta

U potpoglavlju 2.6 definirali smo operaciju zamjene mjesta kojom jednostavni žonglerski niz možemo transformirati u novi jednostavni žonglerski niz. Operaciju zamjene mjesta možemo prirodno generalizirati i na složene žonglerske nizove. Na primjer, pogledajmo složeni žonglerski niz 22[72][54][21]. Tada, bacanje visine 7 možemo zamijeniti bilo kojim drugim bacanjem u nizu. Zamijenimo li ga s bacanjem visine 2 u nizu [72], ništa se neće promijeniti (udaljenost među njima jednaka je nula). Pogledajmo što se dogodi ako ga zamijenimo s 2 iz niza [21]. Udaljenost između 2 i 7 jednaka je 2. Dakle, primjenom operacije zamjene mjesta konstruiramo novi složeni žonglerski niz: $22[(2+2)2][54][(7-2)1] = 22[42][54][51]$.

Skaliranje

Neka je m pozitivni cijeli broj. Množenje svakog cijelog broja u (jednostavnom ili složenom) žonglerskom nizu s s m i umetanje $m-1$ nula nakon svakog elementa dobivenog niza nazivamo operacijom skaliranja. Na primjer, za $m = 3$ i $s = 31$ dobivamo novi jednostavan žonglerski niz 900300.

Konkatenacija

Ako su s i t žonglerski nizovi koji imaju isto početno žonglersko stanje u nekom grafu žonglerskog stanja žongliranja, onda je i njihova konkatenacija st žonglerski niz s istim početnim žonglerskim stanjem.

Kompozicija

Kompozicija dviju žonglerskih funkcija koje odgovaraju jednostavnim žonglerskim nizovima je nova žonglerska funkcija koja odgovara jednostavnom žonglerskom nizu (vidi definiciju 2.4.2).

Vertikalni pomaci

Ako je m najmanji broj u jednostavnom žonglerskom nizu, možemo oduzeti bilo koji cijeli broj manji od ili jednak m od svakog elementa u žonglerskom nizu i dobiti novi jednostavni žonglerski niz. Općenito, ovom operacijom ne možemo dobiti novi složeni žonglerski niz.

Uniranje

Ako su dana dva složena žonglerska niza s i s' perioda p, njihova unija definira se kao niz s'' takav da je, za svaki $i = 1, \ldots, p$, i-ti element od s'' konkatenacija i-tih elemenata nizova s i s'. Na primjer, unija složenih žonglerskih nizova 22[72][54][21] i 24[76]42 je žonglerski niz [22][24][7276][544][212]. Unija dvaju složenih žonglerskih nizova bit će složeni žonglerski niz, ali i unija dvaju jednostavnih žonglerskih nizova može biti jednostavni žonglerski niz. Na primjer, unija nizova 600 i 030 je niz 630.

Poglavlje 4

Shannonovi teoremi

Claudeu Shannonu [1] pripisujemo prve matematičke teoreme o žongliranju. U svom radu *Scientifics Aspects of Juggling* [3] uveo je pojam uniformnog žongliranja, a potom pomoću njega iskazao tri teorema koja ćemo u ovom poglavlju detaljnije razmotriti.

4.1 Uniformno žongliranje

Definirajmo prvo uniformno žongliranje.

Neka je h broj ruku koje koristimo za žongliranje, a b broj loptica kojima žongliramo. Reći ćemo da je žongliranje **uniformno** ako i samo ako vrijede sljedeća svojstva:

(i) Vrijeme zadržavanja loptice (ili ruke) je konstanta d, odnosno vremensko razdoblje u kojem se bilo koja loptica drži bilo kojom rukom između hvatanja i ponovnog bacanja je d.

(ii) Vrijeme leta loptice je konstanta f, odnosno vremensko razdoblje koje bilo koja loptica provede u zraku između bacanja i ponovnog hvatanja je f.

(iii) Vrijeme u kojem je ruka prazna je konstanta v, odnosno vremensko razdoblje u kojem bilo koja ruka ostaje prazna između bacanja i ponovnog hvatanja je v.

Konstante d, f odnosno v zovu se vrijeme zadržavanja, vrijeme leta odnosno prazno vrijeme uniformnog žonglerskog uzorka.

[1] Claude Elwood Shannon (1916. - 2001.) – američki matematičar, inženjer elektrotehnike i kriptograf, poznat kao ”otac teorije informacija”

Za uniformno žongliranje vrijedi i princip dualnosti između loptica i ruku. To jest, svaka istinita izjava o uniformnom žongliranju pretvara se u drugu istinitu izjavu o uniformnom žongliranju zamjenom bilo koje riječi, izraza ili parametra vezanog uz loptice s odgovarajućom riječi, izrazom ili parametrom povezanim s rukama, i obratno. Dakle, loptice i ruke dualni su objekti u uniformnom žongliranju.

4.2 Tri Shannonova teorema

Jasno je da u stvarnosti svako žongliranje završava nakon konačno mnogo bacanja, pa posebno u stvarnosti žongliranje može biti uniformno samo ograničeno vremensko razdoblje. Teoremi koje ćemo iskazati u ovom potpoglavlju zahtijevaju samo da uniformno žongliranje traje $h(f + d)$ vremenskih jedinica, tj. onoliko vremena koliko je potrebno da jedna loptica, poštujući pretpostavke (i) – (iii), posjeti sve ruke.

Sljedećim teoremom, Shannon povezuje vrijeme zadržavanja, vrijeme leta i prazno vrijeme uniformnog žonglerskog uzorka s brojem loptica i ruku korištenih pri izvođenju žonglerskog uzorka.

Teorem 4.2.1. ***(Prvi Shannonov teorem)*** *Za uniformno žongliranje s b loptica, h ruku, vremenom zadržavanja d, vremenom leta f i praznim vremenom v vrijedi:*

$$\frac{f+d}{v+d} = \frac{b}{h}.$$

Dokaz. Promotrimo prvo trenutak u kojem hvatamo lopticu koja je bačena dovoljno davno da strogo prije promatranog hvatanja bude uhvaćena barem h puta. Budući da postoji samo h različitih ruku i loptica je, uključujući trenutno hvatanje, bila uhvaćena barem $h+1$ puta, slijedi da je loptica morala biti uhvaćena jednom od ruku dva puta. Promatrajmo sada ruku kojom je loptica uhvaćena dva puta. Između prvog i drugog hvatanja loptice tom rukom, loptica je uhvaćena još m puta. Prema (i) i (ii), zaključujemo da je između prvog i drugog hvatanja istaknutom rukom prošlo $(m+1)(f+d)$ vremena. Također, između prvog i drugog hvatanja, istaknuta ruka je napravila još n hvatanja. Prema (i) i (iii), zaključujemo da je za to bilo potrebno $(n+1)(v+d)$ vremena. Stoga, slijedi $(m+1)(f+d) = (n+1)(v+d)$. Neka je sada $p = (m+1)/g$ i $q = (n+1)/g$, gdje je g najveći zajednički djelitelj cijelih brojeva $m+1$ i $n+1$. To znači da je

$$p(f + d) = q(v + d) \tag{4.1}$$

te da su p i q relativno prosti.
Razmotrimo sada vremenski interval duljine $p(f+d)$ takav da nijedna loptica nije uhvaćena na početku tog intervala. Loptice se hvataju unutar njega u trenucima $t_1, t_2, t_3, \ldots$. U trenutku t_i, točno s_i ruku hvata s_i loptica. Svaka od naših loptica biva uhvaćena točno p puta

u istaknutom intervalu, a svaka ruka napravi točno q hvatanja. Zaključujemo da vrijedi

$$\sum_i s_i = pb = qh. \tag{4.2}$$

Kombinacijom (4.1) i (4.2) dolazimo do željenog rezultata.

□

Razmotrimo što će se dogoditi sa svim lopticama koje su bačene u određenom trenutku u_0. Recimo da tih loptica ima v_0. Zbog svojstava (i) – (iii) uniformnog žongliranja te će loptice uvijek biti uhvaćene i bačene u isto vrijeme sve dok uniformno žongliramo. Nadalje, druge loptice neće biti uhvaćene kada su one uhvaćene i neće biti bacane kada su one bacane. Iz (4.1) slijedi da će ih točno isti skup ruku s kojima smo započeli uhvatiti p-ti put kada budu uhvaćene, i ovo je prvi put nakon trenutka u_0 da će se to dogoditi. Promotrimo sada skup ruku koje su bacale u trenutku u_0. Isti skup ruku ponovno će bacati točno v_0 loptica u trenutku $u_0 + v + d$. Ovaj drugi skup loptica će posjetiti točno isti skup ruku istim redoslijedom kao i prvi skup. Nastavljajući ovaj postupak, zaključujemo da ima q skupova od v_0 loptica koji slijedi jedan drugoga ciklički, svaki posjećujući istih p skupova od v_0 ruku. To znači da postoji ukupno qv_0 loptica kojima se manipulira s pv_0 ruku i da je taj sustav loptica i ruku potpuno neovisan (nijedna loptica u sustavu nije u kontaktu ni s jednom rukom van sustava, i obratno). To znači da, ako zaboravimo na loptice i ruke izvan sustava, imamo uniformno žongliranje s qv_0 loptica i qv_0 ruku. Ako postoji strogo više od qv_0 loptica, onda isti postupak provodimo s drugim skupom od v_1 loptica koje su bačene u vrijeme različito od vremena bacanja bilo koje od spomenutih qv_0 loptica. Ovo daje skup qv_1 loptica koji je disjunktan s prvim skupom od qv_0 loptica. Nastavljamo postupak dok sve loptice ne budu pokrivene u k koraka. Dakle, vrijedi:

$$b = q \sum_{i=0}^{k-1} v_i \quad \text{i} \quad h = p \sum_{i=0}^{k-1} v_i \tag{4.3}$$

Budući da su p i q relativno prosti, zaključujemo da je $\sum_{i=0}^{k-1} v_i$ najveći zajednički djelitelj od b i h i da imamo disjunktnu uniju od k neovisnih tzv. ”loptica - ruka” sustava odnosno grupa žonglera, od kojih svaki izvodi uniformno žongliranje.

Definicija 4.2.2. ***Particija*** *prirodnog broja n je svaka uređena k-torka $(n_1, \dots, n_k)$ prirodnih brojeva takva da vrijedi $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_k$ i $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$.*

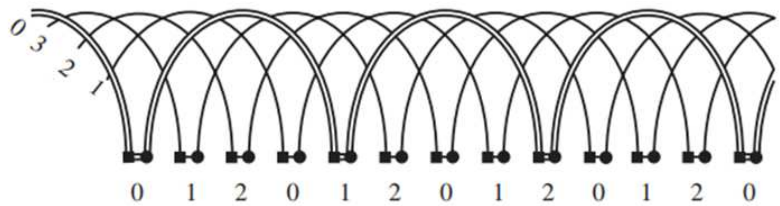
Gornja diskusija pokazuje da svaka particija $(v_0, \dots, v_{k-1})$ najvećeg zajedničkog djelitelja g brojeva b i h zadaje jedan **osnovni način uniformnog žongliranja**, tj. podjelu b loptica u k neovisnih ”loptica - ruka” sustava svaki od kojih izvodi uniformno žongliranje. Osnovne načine uniformnog žongliranja s b loptica i h ruku zovemo i **uniformnim žonglerskim**

uzorcima s b loptica i h ruku. Uniformni žonglerski uzorak pridružen promatranom uniformnom žongliranju na opisan način jedinstveno određuje to uniformno žongliranje do na međusobne vremenske razmake između pojedinih "loptica - ruka" sustava, izbor vremena zadržavanja, vremena leta i praznog vremena te permutacije loptica unutar pojedinih "loptica - ruka" sustava pri svakom bacanju.

U slučaju kada su b i h kao gore, relativno prosti, pa je $g = 1$ i jedina particija od g je (1), dobivamo sljedeći teorem.

Teorem 4.2.3. ***(Drugi Shannonov teorem)*** *Uniformno žongliranje s b loptica i h ruku, gdje je b relativno prost s h, može se izvršiti na jedinstven osnovni način, u smislu da loptice mogu biti označene brojevima od* 0 *do* $b - 1$*, a ruke brojevima od* 0 *do* $h - 1$ *tako da svaka loptica prođe kroz ruke u cikličkom redoslijedu i svaka ruka hvata loptice cikličkim redoslijedom.*

Jedinstveni osnovni način uniformnog žongliranja s b loptica i h ruku, gdje je b relativno prost s h, možemo prikazati krećući od žonglerskog dijagrama konstantnog žonglerskog niza s b loptica. Zatim, označimo točke otkucaja odnosno ruke ciklički, brojevima od 0 do $h - 1$ i orbite odnosno loptice ciklički, brojevima od 0 do $b - 1$. Na kraju, podijelimo točke otkucaja na bacanja i hvatanja, kako bismo uzeli u obzir vrijeme zadržavanja različito od nule. Primjetimo da vrijeme zadržavanja nije važno u ovoj strukturi postupka pa možemo staviti i $d = 0$.



Slika 4.1: Uniformno žongliranje s 3 ruke i 4 loptice prikazano žonglerskim dijagramom

Teorem 4.2.4. ***(Treći Shannonov teorem)*** *Uniformno žongliranje s b loptica, h ruku i s g kao najvećim zajedničkim djeliteljem od b i h je moguće na onoliko različitih osnovnih načina koliko je prikaza od g kao zbroja pozitivnih cijelih brojeva.*

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz diskusije prije teorema 4.2.3. Precizno, neka je dano h ruku i b loptica. Neka je g najveći zajednički djelitelj od h i b, neka su $p = b/g$ i $q = h/g$, te neka je

$$g = \sum_{i=0}^{k-1} v_i$$

prikaz od g kao zbroja pozitivnih cijelih brojeva. Tada se uniformni žonglerski uzorak koji odgovara ovom prikazu od g sastoji od k neovisnih uniformnih žonglerskih uzoraka $J_i, i = 0, 1, \ldots, k-1$ u kojima se q grupa od po v_i loptica žonglira s $v_i p$ ruku, pri čemu se sve loptice iz pojedine grupe uvijek hvataju u isto vrijeme, dok se loptice iz međusobno različitih grupa nikad ne hvataju u isto vrijeme, a vrijeme zadržavanja, vrijeme leta i prazno vrijeme ne ovise o i. Nadalje, za dane žonglerske uzorke J_i i J_j, $i \neq j$, vrijeme u kojem se loptice bacaju u uzorku J_i nikad se ne podudara s vremenom u kojem se bacaju loptice u uzorku J_j. □

Bibliografija

[1] Polster, B., *The Mathematics of Juggling*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[2] Polster, B., *The mathematics of juggling*. Pregledni članak dostupan na: `https://www.qedcat.com/articles/juggling_survey.pdf`

[3] Shannon, C., *Scientific Aspects of Juggling*, Claude E. Shannon, Collected Papers, Wiley – IEEE Press, 850-864, New York, 1993.

[4] Veljan, D., *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2001.

[5] Klaričić Bakula, M., Braić, S., *Uvod u matematiku*, skripta, Prirodoslovno-matematički fakultet u Splitu, Split, 2012.

[6] Matijević, V., *Diferencijalni i integralni račun 1*, skripta, Prirodoslovno-matematički fakultet u Splitu, Split, 2012.

Sažetak

U ovom diplomskom radu izložene su osnove matematičke teorije žongliranja. Opisani su pojmovi i rezultati o jednostavnom žongliranju i s njime povezanim nizovima nenegativnih cijelih brojeva – žonglerskim nizovima, te njihovim generalizacijama – složenim žonglerskim nizovima. Također, izloženi su prvi matematički teoremi o žongliranju, Shannonovi teoremi.

Summary

In this thesis, the basics of the mathematical theory of juggling are presented. Concepts and results on simple juggling and related sequences of nonnegative integers – juggling sequences, and their generalizations – multiplex juggling sequences are described. Also, the first mathematical theorems about juggling, Shannon's theorems, are presented.

Životopis

Moje ime je Katarina Vrsaljko. Rođena sam 28. svibnja 1996. godine u Zadru. Nakon završene Osnovne škole Šimuna Kožičića Benje, upisujem opći smjer Gimnazije Jurja Barakovića u Zadru. Fakultet prirodoslovno-matematičkih i odgojnih znanosti u Mostaru upisujem 2017. godine, gdje 2020. godine stječem akademski naziv prvostupnice matematike. Iste godine, upisujem diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.