Hamilton-Jacobi-Bellmanova jednadžba

Miškić, Tomislav

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:807376

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-11-18**

Repository / Repozitorij:

Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Tomislav Miškić

HAMILTON-JACOBI-BELLMANOVA JEDNADŽBA

Diplomski rad

Zagreb, 2022.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

Tomislav Miškić

Diplomski rad

Hamilton-Jacobi-Bellmanova Jednadžba

doc. dr. sc., Petra Posedel Šimović

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____

Zagreb, 2022.

Zahvaljujem se doc. dr. sc. Petri Posedel Šimović na mentorstvu i kontinuiranoj pomoći te izv. prof. dr. sc. Davoru Horvatiću na komentorstvu.

Posebne zahvale roditeljima, bez vas i vaše beskompromisne podrške ništa od ovoga ne bi bilo moguće ni ostvarivo.

Sažetak

Hamilton-Jacobi-Bellmanova jednadžba je temeljna parcijalna diferencijalna jednadžba u teoriji optimalnog upravljanja. Teoriju dinamičkog programiranja uveli su Richard Bellman i suradnici sredinom prošlog stoljeća. U slučaju procesa koje promatramo u diskretnim vremenski trenutcima jednadžbu obično nazivamo Bellmanova jednadžba. U neprekidnom vremenu, ona se može promatrati kao produžetak ranijih radova u klasičnoj fizici baziranih na Hamilton-Jacobijevoj jednadžbi. Rješenje Hamilton-Jacobi-Bellmanove jednadžbe daje optimalni trošak za dani dinamički sustav s pridruženom funkcijom troška. Varijacijski problemi u klasičnoj mehanici, na primjer, problem brahistokrone krivulje mogu se riješiti ovom metodom, no značajno je da se navedena metoda može primijeniti i na stohastičke sustave. Rad bi pored teorijskog pregleda imao i primjenu u interdisciplinarnom području ekonofizike.

Hamilton-Jacobi-Bellman Equation

Abstract

Hamilton-Jacobi-Bellman equation is a fundamental partial differential equation in the theory of optimal control. The theory of dynamic programming was introduced by Richard Bellman and his associates at the midpoint of the last century. Regarding the temporaly discretized problem we are considering, the equation is usually called Bellman's equation. On a continual time domain, said equation can be opserved from a perspective of earlier works in physics, hereby mentioning the famous Hamilton-Jacobi equation and principle. The solution of the Hamilton-Jacobi-Bellman equation allows us to find optimal cost trajectory for a given dynamical system with an adjoined cost function. Variational problems in classical mechanics, for example the brachistochrone curve problem can be solved using this method, but what's meaningful is that said method can be applied to stohastic systems as well. The thesis would besides the theoretical overview of the topic, also cover an application in the interdisciplinary field of econophysics.

Sadržaj

1 Uvod **1**

2 Fizikalna motivacija problematike **3**

2.1 Bernoullijevo rješenje brahistokronog problema 3

2.2 Varijacijski postupak 5

2.3 Hamiltonov formalizam 9

3 Dinamičko programiranje i teorija optimalne kontrole **19**

3.1 Weierstrassov uvjet optimalnosti 19

3.2 Bellmanov pristup 22

3.3 Feynmanovi integrali po putovima i dinamičko programiranje 38

3.4 Pontryaginov princip maksimalnosti 44

4 Modeli tržista, funkcija korisnosti i mjere rizika **48**

4.1 Model tržišta na neprekidnoj vremenskoj domeni 48

4.2 Model tržišta na diskretnoj vremenskoj domeni 51

4.3 Funkcija korisnosti voditelja investicijskog fonda 53

4.4 Mjere rizika 59

5 Optimalni portfelj bez ograničenja na rizik **62**

5.1 Dinamički odabir strategije ulaganja 63

5.2 Optimalni portfelj s kvadratnom funkcijom korisnosti 66

6 Optimalni portfelj s ograničenjima na rizik **69**

6.1 Value-at-Risk (VaR) 70

6.2 Tail conditional expectation (TCE) 76

6.3 Expected shortfall (ES) 84

7 Zaključak **91**

Dodaci **99**

A Izvod kvadratnog člana HJB jednadžbe **99**

B Dokaz *Leme 3.4.1* **100**

1 Uvod

Realne su okolnosti daleko od determinističkih, dapače ukoliko bismo probali odrediti evoluciju svijeta brzo bismo shvatili da bi broj stupnjeva slobode koji bi trebali uzeti u obzir i čije bi jednadžbe gibanja trebali rješavati bio nepojmljivo velik. U takvim situacijama priskačemo stohastičkom opisu svijeta te tvrdimo, zbog manjka naši sposobnosti, da je svijet po svojoj prirodi stohastičan. Kako u ostalim pogledima tako i u pogledu financijske sigurnosti ljudi se pokušavaju izolirati od navedene stohastike na koje god načine mogu, između ostalog na način da povjeravaju svoj novac i uštedevine financijskim institucija koje preuzimaju rizik. Cilj ovog rada jest staviti se u ulogu voditelja investicijskog fonda te primjenom teorije optimalne kontrole unutar razina pouzdanosti zaključiti kako ograditi investitora od navedenih vanjskih rizika.

Krucijalan korak u navedenim razmatranjima će nam biti uvođenje Hamilton-Jacobi-Bellmanove jednadžbe (HJB). Razlog važnosti uvođenja HJB jednadžbe jest taj što funkcija koja zadovoljava HJB jednadžbu uz određeni odabir rubnih uvjeta jest optimalna funkcija troška zadanog sistema. Funkcija troška nam govori o tome kako penaliziramo sami sebe ovisno o stanju u koje smo doveli portfelj. Naravno, navedenu je funkciju uvijek cilj minimizirati. HJB jednadžba prirodno proizlazi kao optimizacijska jednadžba proizvoljno dimenzionalnog problema kroz Bellmanove argumente vezane za dinamičko programiranje i teoriju optimalne kontrole. Navedena HJB jednadžba uvelike ima veze te se povlače značajne paralele između Hamilton-Jacobi principa iz fizike te iste HJB jednadžbe.

U drugom poglavlju uvodimo fizikalnu motivaciju problematike kroz problem traženja brahistokrone krivulje, uvodimo varijacijski postupak te Hamiltonov formalizam.

Treće je poglavlje rezervirano za Dinamičko programiranje i teoriju optimalne kontrole. Za početak uvodimo Weierstrassov uvjet optimalnosti, koji uz Euler-Lagrangeov i Legendreov uvjet upotpunjuje skup uvjeta da bi određena trajektorija konfiguracijskog prostora bila strogi minimum optimizacijskog funkcionala. Nadalje uvodimo Bellmanov pristup te izvodimo HJB jednadžbu. Povezujemo Feynmanove integrale po putovima s formalizmom dinamičkog programiranja te na kraju definiramo Poyntraginov princip maksimalnosti kao analogon Hamiltonovog principa.

Sva naredna poglavlja su posvećena primjeni teorije optimalne kontrole u po-

družju ekonofizike. U četvrtom poglavlju postavljamo problem. Uvodimo model tržišta, definiramo što je i kakva su svojstva uobičajenih funkcija korisnosti te uvodimo tri mjere rizika koje ćemo koristiti VaR ("*Value-at-Risk*"), TCE ("*Tail conditional expectation*") i ES ("*Expected shortfall*"). U petom poglavlju rješavamo problem optimalnog portfelja bez ograničenja na rizik, dok u šestom radimo to isto samo uzevši u obzir navedene mjere rizika te kako one utječu na rezultat. Pri optimizaciji u šestom poglavlju ćemo se koristiti metodom Lagrangeovih multiplikatora i SQP ("*Sequential quadratic programming*") metodom.

Teorijski dio vezan za teoriju optimalne kontrole smo najviše radili prema djelu D. P. Bertsekas [1] (*1987*), dok smo primjenu u ekonofizici ponajviše radili prema doktoratu D. A. Akume [2] (*2008*).

2 Fizikalna motivacija problematike

Fizikalnu motivaciju u teoriju optimalne kontrole uvodimo kroz problem brahistokrone krivulje. Radi se o problemu traženja trajektorije u konfiguracijskom prostoru zadane početne i krajnje točke, takve da točkasta masa m evolucijom duž spomenute trajektorije utroši najmanje vremena u homogenom gravitacijskom polju. U nastavku poglavlja izvodimo Bernoullijevo rješenje problema, zatim pokazujemo kako varijacijskim pristupom dolazimo na isto opće rješenje oblika cikloide. Nadalje, raspisujemo Euler-Lagrangeov i Legendreov uvjet na minimizaciju funkcionala optimalnosti te uvodimo Hamiltonov ekvivalentni formalizam za navedenu problematiku. Za kraj izvodimo Hamilton-Jacobi jednadžbu te ju rješavamo za slučaj jednodimenzionalnog harmoničkog oscilatora te za slučaj točkaste čestice ograničene na sfernu geometriju u vanjskom konzervativnom polju.

2.1 Bernoullijevo rješenje brahistokronog problema

Problem brahistokrone krivulje prvi promatra Galileo Galilei 1638. godine u svom radu *Discourse on Two New Sciences,* gdje je geometrijskim argumentima krivo zaključio da se radi o trajketoriji duž luka kružnice. Krajem 17. stoljeća Johann Bernoulli objavljuje svoje rješenje, gdje je trajektorija zadana cikloidom.

Bernoullijevo je rješenje izvedeno koristeći Fermatov optički princip minimalnog vremena. Ideja je koristeći optičku analogiju doći do brahistokrone krivulje. Optička se analogija sastoji u tome da promatramo propagaciju zrake svjetlosti kroz niz optičkih medija infinitezimalne debljine i rastućeg indeksa loma. Rastući indeks loma po Snellovom zakonu uvjetuje rastuću brzinu zrake u mediju te rastući kut refrakcije:

$$n_1 \cdot \sin\alpha_1 = n_2 \cdot \sin\alpha_2 \ , \tag{2.1}$$

gdje indeks *1* označava upadni, a indeks *2* izlazni medij te je indeks loma definiran kao omjer brzine svjetlosti u vakuumu te brzine svjetlosti u mediju:

$$n = \frac{c}{v} \ . \tag{2.2}$$

Fermatov princip, kao više fenomenološka interpretacija Snellovog zakona, tvrdi da će zraka svjetlosti propagirati u mediju duž kuta refleksije takvog da minimizira vri-

jeme evolucije zrake. Vidimo da navedeni optički princip odlično odgovara problematici brahistokrone krivulje.

Dobro je poznato da će brzina slobodnog pada biti proporcionalna korijenu pređenog puta duž smjera gravitacijskog polja, označimo ga s *z*:

$$v^2 \propto z \ . \tag{2.3}$$

Nazovimo s *y* koordinatu normalnu na *z-os*, tada imamo:

$$\sin\alpha_i = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}l} = \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{\mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2}} \ , \tag{2.4}$$

gdje *i* numerira indeks loma i ploču kroz koju se reflektira svjetlost. Po Snellovom zakonu imamo:

$$n_i \cdot \sin\alpha_i = \text{konst.} \ , \tag{2.5}$$

što možemo zapisati kao:

$$\sin\alpha_i = \kappa v_i \ , \tag{2.6}$$

$$\mathrm{d}y = \kappa v \cdot \mathrm{d}l \ . \tag{2.7}$$

Raspisivanjem i sređivanjem gornjeg izraza dobivamo:

$$\mathrm{d}y = \frac{\kappa v \cdot \mathrm{d}z}{\sqrt{1 - \kappa^2 v^2}} \ . \tag{2.8}$$

Na ovaj su način riješena dva problema odjednom, onaj optički i mehanički brahistokroni. Jedina je razlika u tome kakva se brzina *v* specifira, kao omjer brzine svjetlosti u vakuumu i indeksa loma ili kao da je proporcionalna prijeđenom putu duž *z-osi*. Uvodeći Bernoullijevu konstantu $\kappa = 1/a$ te koristeći izraz $v^2 = az$ imamo:

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}z\sqrt{\frac{z}{a-z}} \ . \tag{2.9}$$

Faktor s desne strane gornje jednadžbe možemo raspisati kao:

$$\sqrt{\frac{z}{a-z}} \cdot \mathrm{d}z = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot \mathrm{d}z}{\sqrt{az - z^2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot \mathrm{d}z - 2z \cdot \mathrm{d}z}{\sqrt{az - z^2}} \ . \tag{2.10}$$

Integracijom dobivamo:

$$y(z) = a \cdot \arcsin\left(\sqrt{\frac{z}{a}}\right) - \sqrt{az - z^2}\ . \tag{2.11}$$

Koristimo trigonometrijsku supstituciju:

$$z = \frac{1}{2}a\left(1 - \cos\theta\right)\ , \tag{2.12}$$

te dobivamo:

$$y = \frac{1}{2}a\theta - \frac{1}{2}a\sin\theta\ . \tag{2.13}$$

Gornji izraz supstitucijom $r = a/2$ svodimo na:

$$z = r\left(1 - \cos\theta\right)\ , \tag{2.14}$$

što je jednadžba cikloide i poznati Bernoullijev rezultat.

2.2 Varijacijski postupak

Najočitiji način pristupanja problemu brahistokrone krivulje koristeći metode razvijene u okviru klasične mehanike jest varijacijskim računom funkcionala vremena. Ideja se svodi na to da definiramo funkcional koji sortira trajektorije u konfiguracijskom prostoru po točno određenoj varijabli koja nas zanima. U našem je slučaju ta varijabla vrijeme. Drugim riječima trebamo definirati funkcional koji će kvantificirati našu preferenciju vremena te ga minimizirati. Očit misaoni slijed bi bio da promatramo integral diferencijala vremena $\mathrm{d}t$ za odabrane trajektorije konfiguracijskog prostora:

$$\mathcal{J} = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}t\ . \tag{2.15}$$

U gornjoj je jednadžbi $\mathcal{J}$ funkcional vremena te $\mathcal{C}$ integracijska trajektorija u konfiguracijskom prostoru. Na sličan se način kao gore, pomoću Lagrangijana, definira fizikalna akcija čijom se varijacijom pronalaze jednadžbe gibanja:

$$\mathcal{S}\left[q(t), \dot{q}(t)\right] = \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}t \cdot L\left(q(t), \dot{q}(t)\right)\ . \tag{2.16}$$

Da bi odredili izgled našeg funkcionala vremena u ovisnosti o trajektoriji trebamo zapisati diferencijal vremena kao diferencijal koordinate konfiguracijskog prostora:

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}l}{v} \,. \tag{2.17}$$

Brzinu v možemo lako dobiti iz konzervativnosti sistema kao:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgz \Rightarrow v(z) = \sqrt{2gz} \,. \tag{2.18}$$

Sve skupa nakon izlućivanja diferencijala koordinate duž gravitacijskog polja imamo:

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{2g}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)^2}{y}} \tag{2.19}$$

te dobivamo izraz za funkcional vremena:

$$\mathcal{J}\left[y(z), y'(z)\right] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{z_0} \mathrm{d}z \cdot \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)^2}{y}} \,. \tag{2.20}$$

Gornja nam jednadžba definira funkcional vremena koji trebamo minimizirati. Radi općenitosti, procesu minimizacije varijacijom funkcionala ćemo pristupiti tako da podintegralnu funkciju zamijenimo funkcijom prigodnog naziva, Lagrangijanom L:

$$\mathcal{J}\left[y(z), y'(z)\right] = \int \mathrm{d}z \cdot L\left(y(z), y'(z)\right) \,, \tag{2.21}$$

$$\delta\mathcal{J} = \int \mathrm{d}z \left[\frac{\partial L}{\partial y} \cdot \delta y + \frac{\partial L}{\partial y'} \cdot \delta y'\right] \,. \tag{2.22}$$

Parcijalnom integracijom gornji izraz možemo zapisati kao:

$$\delta\mathcal{J} = \left(\frac{\partial L}{\partial y'} \cdot \delta y\right)\Big|_{\partial\mathcal{C}} + \int \mathrm{d}z \left[\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right)\right] \,. \tag{2.23}$$

Lijevi izraz u gornjoj jednadžbi propada zbog toga što je varijacija koordinata na integracijskom rubu trivijalna, dok u desnom zahtjevamo da je podintegralna funkcija trivijalna čime reproduciramo Euler-Lagrange jednadžbe optimalnosti sistema:

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{\partial L}{\partial y'}\right) = 0 \,. \tag{2.24}$$

Raspisivanjem Euler-Lagrange jednadžbi za Lagrangijan zadan funkcionalom vremena dobivamo sljedeću diferencijalnu jednadžbu:

$$2yy'' + 1 + (y')^2 = 0 \ . \tag{2.25}$$

Gornju jednadžbu prepoznajemo kao diferencijalnu jednadžbu koju zadovoljava cikloida u kartezijevim koordinatama, čime je pokazano slaganje s Bernoullijevim rješenjem.

Povrh Euler-Lagrange uvjeta kao dodatni uvjet drugog reda kojim osiguravamo minimizaciju varijacijskim postupkom, uvodimo Legendreov uvjet konveksnosti:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} \geq 0 \ . \tag{2.26}$$

U nastavku dajemo argumentaciju gornjeg uvjeta. Uvodimo razvoj optimizacijskog funkcionala oko proizvoljno odabrane trajektorije konfiguracijskog prostora kao:

$$\mathcal{J}\left[y + \alpha \cdot \eta\right] = \mathcal{J}[y] + \alpha \cdot \delta \ \mathcal{J}\big|_y [\eta] + \alpha^2 \cdot \delta^2 \ \mathcal{J}\big|_y [\eta] + o(\alpha^2) \ . \tag{2.27}$$

U gornjoj jednadžbi su $y \in V$, $\eta \in V$ te $\alpha \in \mathbb{R}$, gdje je V normirani linearni vektorski prostor funkcija nad $\mathbb{R}$. Da bi pronašli uvjet na varijaciju drugog reda optimizacijskog funkcionala trebamo raspisati $\delta^2 \ \mathcal{J}\big|_y [\eta]$:

$$\mathcal{J}\left[y + \alpha\eta\right] = \int \mathrm{d}x \cdot L(x, y(x) + \alpha\eta(x), y'(x) + \alpha\eta'(x)) \ . \tag{2.28}$$

Razvojem oko odabrane $(x, y(x), y'(x))$ uređene trojke dobivamo varijaciju drugog reda:

$$\delta^2 \mathcal{J}\big|_y [\eta] = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}x \cdot \ \left(\partial_y^2 L \cdot \eta^2 + 2\partial_y \partial_{y'} L \cdot \eta\eta' + \partial_{y'}^2 L \cdot \eta'^2\right) \ . \tag{2.29}$$

Srednji član u gornjoj jednadžbi dalje možemo pojednostavniti parcijalnom integracijom čime svodimo izraz za varijaciju drugog reda na dijagonaliziranu kvadratnu formu:

$$\delta^2 \mathcal{J}\big|_y [\eta] = \int \mathrm{d}x \cdot \ \Big(P(x) \left(\eta'(x)\right)^2 + Q(x) \left(\eta(x)\right)^2\Big) \ , \tag{2.30}$$

gdje je $P(x)$ dan s:

$$P(x) = \frac{1}{2} \partial_{y'}^2 L(x, y(x), y'(x)) \tag{2.31}$$

te je $Q(x)$ dan s:

$$Q(x) = \frac{1}{2}\left(\partial_y^2 L(x, y(x), y'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\partial_y\partial_{y'} L(x, y(x), y'(x))\right) . \tag{2.32}$$

Ukoliko odabrana trajektorija $y(x)$ minimizira optimizacijski funkcional tada za svaku $\eta \in \mathcal{C}^1$ varijaciju trivijalnu na rubu integracijskog područja vrijedi:

$$\int \mathrm{d}x \cdot \left(P(x)\left(\eta'(x)\right)^2 + Q(x)\left(\eta(x)\right)^2\right) \geq 0 . \tag{2.33}$$

Gornji nam uvjet ne daje konkretan zahtjev na Lagrangijan te je ovisan o svim mogućim varijacijama koje možemo zamisliti. Stoga je ideja naći uvjet na faktore $P(x)$, odnosno $Q(x)$. Obzirom na to da gornji uvjet mora vrijediti za sve zamislive $\mathcal{C}^1$ varijacije, možemo odabrati posebnu vrstu varijacije koja će davati dominantni doprinos u $P(x)$, odnosno $Q(x)$. Biramo varijaciju koja će biti trivijalna na cijeloj domeni osim na podskupu domene duljine ε, nazovimo ga $\mathcal{A}_\varepsilon$, gdje će biti vrijednosti $1/\varepsilon$. Ukoliko zamislimo takvu varijaciju možemo tvrditi da će dio integrala uz η^2 biti ograničen, dok će dio integrala uz η'^2 biti negativno divergentan:

$$\left|\int \mathrm{d}x \cdot Q(x)\left(\eta(x)\right)^2\right| \leq \int_{\mathcal{A}_\varepsilon} \mathrm{d}x \cdot \left|Q(x)\right| . \tag{2.34}$$

Ukoliko pustimo limes $\varepsilon \to 0$, gornji izraz ne divergira već je ograničen. Za $P(x)$ doprinos očekujemo da će biti divergentan po konstrukciji varijacije, zato smo i odabrali takvu varijaciju, obzirom na to da ovisi o derivaciji varijacije koja je dominantna na rubu integracijskog podskupa $\partial\mathcal{A}_\varepsilon$. Ukoliko pretpostavimo da je $P(x)$ negativan bilo gdje na integracijskoj domeni, uvijek možemo zamisliti varijaciju kao što je opisana gore, takva da uzrokuje negativnu divergenciju u $P(x)$ doprinosu. Stoga da bi zadovoljili uvjet pozitivnosti varijacije drugog reda moramo zahtijevati da je faktor $P(x)$ pozitivno definitan na cijeloj integracijskoj domeni, čime dolazimo do Legendreovog uvjeta na drugi red varijacije funkcionala:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial y'^2} \geq 0 . \tag{2.35}$$

Uz pretpostavku zadanog funkcionala optimalnosti, Euler-Lagrangeov i Legendreov uvjet daju ograničenja prvog i drugog varijacijskog reda na minimizaciju funkcionala

optimalnosti. Navedeno ih svojstvo čini nužnim i dovoljnim uvjetima koje trebamo postaviti na odabranu trajektoriju konfiguracijskog prostora, kako bi provjerili njenu optimalnost po konstrukciji funkcionala.

2.3 Hamiltonov formalizam

Osnovni opis klasične mehanike pomoću Lagrangeovog formalizma se bazira na korištenju koordinata i njihovih brzina kako bi se opisala dinamika sistema. Ekvivalentan je zapis pomoću Hamiltonovog formalizma čija je centralna ideja umjesto koordinata i brzina, za opis dinamike sistema koristiti koordinate i konjugirane impulse definirane kao:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \ . \tag{2.36}$$

U Lagrangeovom formalizmu dinamiku sistema opisujemo preko sistema d običnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda, gdje je d broj koordinatnih stupnjeva slobode. Nasprem Lagrangeovog, u Hamiltonovom formalizmu dinamiku opisujemo pomoću sistema $2d$ običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda. U nastavku uvodimo Hamiltonov formalizam te izvodimo Hamilton-Jacobi jednadžbu.

Prijelaz s Hamiltonovog na Lagrangeov formalizam ili obratno se vrši Legendrovom transformacijom:

$$\mathrm{d}L = \frac{\partial L}{\partial q_i} \cdot \mathrm{d}q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \cdot \mathrm{d}\dot{q}_i \ , \tag{2.37}$$

gdje podrazumijevamo Einsteinovu konvenciju o sumaciji po ponavljajućim indeksima. Gornju jednadžbu možemo drukčije zapisati koristeći definiciju konjugiranog impulsa te Euler-Lagrange jednadžbe:

$$\mathrm{d}L = \dot{p}_i \mathrm{d}q_i + p_i \mathrm{d}\dot{q}_i \ . \tag{2.38}$$

Parcijalnom integracijom gornjeg izraza te sređivanjem dolazimo do izraza oblika:

$$\mathrm{d}\left(p_i \dot{q}_i - L\right) = -\dot{p}_i \mathrm{d}q_i + \dot{q}_i \mathrm{d}p_i \ . \tag{2.39}$$

Izraz u zagradi možemo prepoznati kao energiju sistema, odnosno Hamiltonovu funkciju H:

$$H\left(\vec{q}, \vec{p}\right) = p_i \dot{q}_i - L \ . \tag{2.40}$$

Koristeći gornje dvije jednakosti dolazimo do Hamiltonovih jednadžbi gibanja:

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \ , \tag{2.41}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p^i} \ . \tag{2.42}$$

Možemo pokazati da po konstrukciji Hamiltonijan ukoliko ne ovisi o vremenu eksplicitno je konstanta gibanja. Navedeni je rezultat za konzervativne sisteme poznat kao zakon očuvanja energije. Raspišimo totalnu derivaciju Hamiltonijana po vremenu:

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i \ . \tag{2.43}$$

Koristeći jednadžbe (2.41) i (2.42) možemo gornji izraz zapisati kao:

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \cdot \left(-\frac{\partial H}{\partial p^i}\right) + \frac{\partial H}{\partial p_i} \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial q^i}\right) \ , \tag{2.44}$$

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial H}{\partial t} \ . \tag{2.45}$$

Iz posljednje jednadžbe vidimo da ukoliko Hamiltonijan ne ovisi eksplicitno o vremenu nužno slijedi da je konstanta gibanja, odnosno:

$$\left.\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right|_{H \neq H(t)} = 0 \ . \tag{2.46}$$

Čime smo pokazali prijašnju tvrdnju o zakonu očuvanja energije pomoću Hamiltonijana.

U nastavku ćemo pokazati na koji se način u klasičnoj fizici provjerava je li pojedina varijabla konstanta gibanja ili nije, pomoću Poissonovih zagrada. Sagledajmo totalnu vremensku derivaciju skalarne funkcije količine gibanja, koordinate i vremena $f(\vec{q}, \vec{p}, t)$:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i}\dot{p}_i \ . \tag{2.47}$$

Uvrštavajući u gornju jednadžbu Hamiltonove jednadžbe gibanja dobivamo:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p^i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial q^i}\right) \ . \tag{2.48}$$

Izraz u zagradi u gornjoj jednadžbi definiramo kao Poissonovu zagradu skalarne funkcije f i Hamiltonijana te pišemo:

$$\{H, f\} = \frac{\partial f}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial p^i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial H}{\partial q^i} \ . \tag{2.49}$$

Iz gornjih razmatranja vidimo da je zahtjev da varijabla f bude integral gibanja dana s:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} = 0 \ . \tag{2.50}$$

Odnosno, ukoliko znamo da varijabla ne ovisi eksplicitno o vremenu:

$$\{H, f\} = 0 \ . \tag{2.51}$$

Prirodni analogon Poissonovih zagrada na koji nailazimo u kvantnoj mehanici jesu komutacijske zagrade kvantnih operatora, gdje će analogno trivijalni komutator Hamiltonijana i odabrane varijable značiti da je varijabla integral gibanja. Ukoliko odaberemo tri skalarne funkcije faznog prostora, f, g i h, može se pokazati raspisivanjem po gonjim definicijama da će njihove Poissonove zagrade zadovoljavati tzv. Jacobijev identitet:

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0 \ . \tag{2.52}$$

Kao što je navedeno prije pri razmatranju brahistokronog problema ukoliko optimizacijski funkcional definiramo tako da je podintegralna funkcija fizikalni Lagrangijan, funkcional nazivamo akcijom $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \cdot L\left(\vec{q}(t), \dot{\vec{q}}(t); t\right) \ . \tag{2.53}$$

Sam postupak varijacije akcije po trajektorijama konfiguracijskog prostora smo bili definirali na način da se odaberu fiksne početne i krajnje točke trajektorije te određena trajektorija po kojoj se varira. To je bilo bitno iz razloga što je varijacija u krajnjim točkama trajektorije potom trivijalna te aditivni članovi akcije koji ispadnu vani parcijalnom integracijom tada propadaju. Akciju također možemo shvatiti kao funkciju krajnjeg parametra integracije, odnosno u našem slučaju po jednadžbi (2.53), vremena t_2, na način da variramo krajnju točku trajektorije. Raspisavši još jednom

varijaciju akcije dolazimo do izraza:

$$\delta\mathcal{S} = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \cdot \delta q_i \left[\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\right] \ . \tag{2.54}$$

Obzirom da biramo klasične trajektorije za sve odabrane krajnje točke $\vec{q}(t_2)$, podintegralni doprinos je trivijalan duž svake takve odabrane trajektorije. Zaključujemo da vrijedi:

$$\delta\mathcal{S} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i \ . \tag{2.55}$$

U gornjoj jednadžbi prepoznajemo kanonski impuls p_i te pišemo:

$$\delta\mathcal{S} = p_i \delta q_i \ . \tag{2.56}$$

Iz gornje jednadžbe vidimo da parcijalna derivacija akcije po koordinati daje konjugirani impuls toj koordinati, odnosno:

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_i} = p_i \ . \tag{2.57}$$

Sagledajmo dalje puni diferencijal akcije po vremenu. Očekivano prema definiciji akcije tvrdimo da se radi o Lagrangijanu:

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{S}}{\mathrm{d}t} = L \ . \tag{2.58}$$

Puni diferencijal akcije po vremenu također možemo raspisati kao:

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{S}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_i}\dot{q}_i \ , \tag{2.59}$$

gdje smo pretpostavili da je akcija varijabla vremena i koordinate. Koristeći jednadžbe (2.57) i (2.58) dolazimo do izraza:

$$L - p_i \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} \tag{2.60}$$

u kojem možemo prepoznati Hamiltonijan kao Legendrov transformat Lagrangijana te slijedi:

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = -H \ , \tag{2.61}$$

čime dolazimo nadomak Hamilton-Jacobi jednadžbe.

Iz razmatranja u prošlom paragrafu dolazimo do općenite parcijalne diferencijalne jednadžbe prvog reda za akciju, tzv. Hamilton-Jacobi jednadžbe:

$$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + H\left(\vec{q}, \vec{\nabla}_{\vec{q}}\mathcal{S}, t\right) = 0 \ . \tag{2.62}$$

Nezavisne varijable Hamilton-Jacobi jednadžbe jesu koordinate te vrijeme. Stoga za sustav s d koordinatnih stupnjeva slobode te jednim vremenskim će kompletni integral Hamilton-Jacobi jednadžbe sadržavati $d+1$ konstantu. Obzirom na to da u jednadžbi nema nultih derivacija u koordinati ili vremenu jedna od navedenih $d+1$ konstanti će nužno biti aditivna:

$$\mathcal{S} = f\left(t, \vec{q}; \vec{\alpha}\right) + A \ , \tag{2.63}$$

gdje je f proizvoljna funkcija u ovom trenutku, $\vec{\alpha}$ je $d-$torka konstanti te je A navedena aditivna konstanta. Nadalje nam je zadatak naći vezu između kompletnog integrala f i rješenja jednadžbi gibanja. Kako bi to napravili radimo kanonsku tranformaciju varijabli s uređenog para $d-$torke koordinate i impulsa $(\vec{q}, \vec{p})$, na uređeni par $d-$torke nove generalizirane koordinate i novog generaliziranog impulsa danog neaditivnim konstantnama $\vec{\alpha}$ od prije $\left(\vec{\beta}, \vec{\alpha}\right)$, gdje koristimo kompletni integral kao funkciju izvodnicu transformacije:

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q^i} \ , \tag{2.64}$$

$$\beta_i = \frac{\partial f}{\partial \alpha^i} \ , \tag{2.65}$$

$$H' = H + \frac{\partial f}{\partial t} \ . \tag{2.66}$$

Iz jednadžbe (2.66) možemo zaključiti kako će novi generalizirani impulsi i koordinate zadovoljavati trivijalne jednadžbe gibanja obzirom da funkcija izvodnica f zadovoljava Hamilton-Jacobi jednadžbu:

$$H' = H + \frac{\partial f}{\partial t} = H + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = 0 \ , \tag{2.67}$$

$$\dot{\vec{\alpha}} = \vec{0} \ , \tag{2.68}$$

$$\dot{\vec{\beta}} = \vec{0}\,. \tag{2.69}$$

Koristeći d jednadžbi $\vec{\nabla}_{\vec{\alpha}} f = \vec{\beta}$, možemo izraziti koordinatu $\vec{q}$ kao kompletni integral u ovisnosti o vremenu i $2d$ konstanti $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$.

U mnogim slučajevima se do kompletnog integrala Hamilton-Jacobi jednadžbe može doći metodom separacije varijabli. Metoda separacije varijabli je vrlo lagano primjenjiva i smislena u onim slučajevima u kojima nemamo vezanja između različitih koordinata ili različitih koordinata i impulsa. U većini osnovnih fizikalnih Hamiltonijana takvih članova nema, štoviše ukoliko postoje najčešće se uzimaju kao male perturbacije, odnosno smetnje na osnovni Hamiltonijan koji je u principu već razvezan. Problematici vezanih bi se članova dalje onda pristupalo perturbativnim metodama klasične, odnosno kvantne mehanike, ovisno o tome jesmo li obavili prvu kvantizaciju u problemu koji promatramo. Imajući gornji argument na umu, smisleno je promotriti na koji način možemo iskoristiti informaciju da određena koordinata, nazovimo ju q_1 i konjugirani impuls nemaju nikakvih vezanja s ostalim varijablama faznog prostora, kako bi pronašli kompletni integral Hamilton-Jacobi jednadžbe:

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_i}, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}, \phi\left(q_1, \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q_1}\right)\right\} = 0\,. \tag{2.70}$$

U gornjoj jednadžbi Φ predstavlja sveukupnu lijevu stranu Hamilton-Jacobi jednadžbe (2.62), dok ϕ predstavlja ukupnu razvezanu ovisnost Hamiltonijana problema o koordinati q_1 i njenom konjugiranom impulsu. Indeks i u jednadžbi (2.70) ide po skupu $\{j \in \mathbb{N} \,|\, 1 < j \leq d\}$. Rješenje tražimo u obliku aditivnog *ansatza*:

$$\mathcal{S}\left(q_1, q_i, t\right) = \mathcal{S}'\left(q_i\right) + \mathcal{S}_1\left(q_1\right)\ . \tag{2.71}$$

Pomoću gornjeg pretpostavljenog rješenja, jednadžbu (2.70) zapisujemo kao:

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial \mathcal{S}'}{\partial q_i}, \frac{\partial \mathcal{S}'}{\partial t}, \phi\left(q_1, \frac{\mathrm{d}\mathcal{S}_1}{\mathrm{d}q_1}\right)\right\} = 0\,. \tag{2.72}$$

Pretpostavivši da poznajemo rješenje za ukupnu akciju $\mathcal{S}$, uvrštavanjem spomenutog rješenja u jednadžbu (2.72) bi trebali dobiti trivijalnu jednadžbu neovisno o tome kakav je q_1. Navedeni nas argument vodi na zaključak da je to jedino moguće ispuniti ukoliko je ovisnost ϕ konstanta. Do identičnog se zaključka moglo doći koristeći više

matematički pristup općenitoj separaciji nevezanih varijabli kao metode rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Jednadžbu (2.72) rastavljamo po argumentu na dvije, odnosno separiramo:

$$\phi\left(q_1, \frac{\mathrm{d}\mathcal{S}_1}{\mathrm{d}q_1}\right) = \alpha_1 \ , \tag{2.73}$$

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial \mathcal{S}'}{\partial q_i}, \frac{\partial \mathcal{S}'}{\partial t}, \alpha_1\right\} = 0 \ . \tag{2.74}$$

Gornjim smo postupkom eliminirali jednu od varijabli i njen konjugirani impuls iz Hamilton-Jacobi jednadžbe. Cilj je koristeći gornju metodu separacije varijabli razvezati i ukloniti sve ovisnosti iz Hamilton-Jacobi jednadžbe, čime bi došli do izraza za ukupnu akciju oblika:

$$\mathcal{S} = \sum_{i=1}^{d} \mathcal{S}_i\left(q_i, \vec{\alpha}\right) - E\left(\vec{\alpha}\right) t \ . \tag{2.75}$$

U gornjoj smo jednadžbi pretpostavili da se radi o konzervativnom sistemu, što se vidi po tome što je energija konstanta gibanja, ali osim toga parcijalna derivacija akcije po vremenu treba odgovarati negativnom Hamiltonijanu, što je u promatranom slučaju upravo ono što dobijemo. Posebni je slučaj ukoliko je separacijska koordinata ciklička, odnosno ukoliko se ne pojavljuje u Hamiltonijanu uopće. U tom se slučaju jednadžba (2.73) svodi na trivijalnu integraciju konjugiranog impulsa separacijske koordinate što odmah daje $\mathcal{S}_1$ i ukupnu akciju kao:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}'\left(q_i\right) + \alpha_1 \cdot q_1 \ . \tag{2.76}$$

U nastavku ćemo promotriti traženje kompletnog integrala Hamilton-Jacobi jednadžbe za slučaj harmoničkog oscilatora te sistema u vanjskom klasičnom polju sa sfernom simetrijom.

Promotrimo prvo problem harmoničkog oscilatora s jednim koordinatnim stupnjem slobode. Hamiltonijan problema je dan s:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 \ . \tag{2.77}$$

Gdje je m masa čestice uronjene u harmoničko polje sile te je ω svojstvena frekvencija sistema. Umjesto impulsa uvrštavamo parcijalnu derivaciju akcije po koordinati te

raspisujemo Hamilton-Jacobi jednadžbu kao:

$$\frac{1}{2m} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 + \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = 0 \ . \tag{2.78}$$

Vidimo da je vrijeme ciklička koordinata sistema. Svaka se ovisnost o vremenu javlja razvezana te jedino u posljednjem članu jednadžbe, stoga separacijom varijabli dobivamo:

$$\frac{1}{2m} \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{S}'}{\partial q}\right)^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 = \alpha \ , \tag{2.79}$$

gdje je $\mathcal{S}'$ dio akcije koji ovisi o koordinati, a ne o vremenu. Konstantu α identificiramo kao energija konzervativnog sistema. Integriramo jednadžbe gibanja te dobivamo:

$$\mathcal{S}' = \sqrt{2m\alpha} \int \mathrm{d}q \cdot \sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\alpha}} \ . \tag{2.80}$$

Sveukupna je akcija tada jednaka:

$$\mathcal{S} = \sqrt{2m\alpha} \int \mathrm{d}q \cdot \sqrt{1 - \frac{m\omega^2 q^2}{2\alpha}} - \alpha t \ . \tag{2.81}$$

Primarno nas ne zanima akcija sistema stoga nećemo ići provesti integraciju do kraja, već nas zanimaju konjugirani generalizirani impulsi $\vec{\beta}$ koji se dobiju, prema prijašnjim analizama, kao gradijent akcije po generaliziranim koordinatama α:

$$\beta = \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \alpha} \ , \tag{2.82}$$

$$\beta = \frac{1}{\omega} \cdot \arcsin\left(q \cdot \sqrt{\frac{m\omega^2}{2\alpha}}\right) - t \ . \tag{2.83}$$

Rješavanjem gornje jednadžbe za koordinatu dobivamo općeniti integral jednadžbi gibanja, obzirom da znamo da je β impuls konstanta gibanja po konstrukciji Hamilton-Jacobi jednadžbe:

$$q(t) = \sqrt{\frac{2\alpha}{m\omega^2}} \cdot \sin\left(\omega t + \beta\right) \ . \tag{2.84}$$

Konjugirani impuls dobijemo kao parcijalnu derivaciju akcije po koordinati:

$$p(t) = \sqrt{2m\alpha} \cdot \cos\left(\omega t + \beta\right) \ . \tag{2.85}$$

Dobivši gornje kompletne integrale gibanja, konstante se eliminiraju iz problema

početnim uvjetima na impuls i koordinatu.

Kao drugi primjer promatramo sistem koji je narinut na sfernu geometriju te uronjen u vanjsko konzervativno polje. Zapisujemo Hamiltonijan točkaste čestice mase m na sfernoj geometriji u proizvoljnom potencijalu $U(\vec{r})$:

$$H = \frac{1}{2m} \cdot \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\phi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) + U(\vec{r}) \ . \tag{2.86}$$

Da bi mogli provesti separaciju varijabli potencijal mora imati opći oblik dan kinetičkim članom Hamiltonijana, kako bi se mogli razvezati miješani koordinatni članovi:

$$U(\vec{r}) = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} + \frac{c(\phi)}{r^2 \sin^2 \theta} \ , \tag{2.87}$$

gdje su a, b i c proizvoljne funkcije. U gornjoj se jednadžbi pojavljuju tri člana, no prva dva će nositi puno veći fizikalni značaj, stoga radi kraćenja analize ćemo promotriti restrikciju općeg separabilnog potencijala:

$$U(\vec{r}) = a(r) + \frac{b(\theta)}{r^2} \ . \tag{2.88}$$

Hamilton-Jacobi jednadžba u kojoj smo već separirali vrijeme, obzirom da se radi o konzervativnom sistemu po pretpostavci, glasi:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\partial \mathcal{S}'}{\partial r} \right)^2 + a(r) + \frac{1}{2mr^2} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{S}'}{\partial \theta} \right)^2 + 2m \cdot b(\theta) \right] + \frac{1}{2mr^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \mathcal{S}'}{\partial \phi} \right)^2 = E \ . \tag{2.89}$$

Možemo primijetiti kako je uz vrijeme azimutalna koordinata ϕ također ciklička što znači da nam *ansatz* za vremenski neovisni dio akcije postaje:

$$\mathcal{S}' = \mathcal{S}_r + \mathcal{S}_\theta + p_\phi \phi \ . \tag{2.90}$$

Prema prijašnjim razmatranjima uvodimo obične diferencijalne jednadžbe za $\mathcal{S}_r$ i $\mathcal{S}_\theta$ dio akcije čijom integracijom dobivamo kompletni integral:

$$\frac{1}{2m} \left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{S}_r}{\mathrm{d}r} \right)^2 + a(r) + \frac{\beta}{2mr^2} = E \ , \tag{2.91}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{S}_\theta}{\mathrm{d}\theta} \right)^2 + 2mb(\theta) + \frac{p_\phi^2}{\sin^2 \theta} = \beta \ . \tag{2.92}$$

Integracijom gornjih jednadžbi te sabiranjem dijelova rješenja u ukupnu akciju dobivamo izraz oblika:

$$\mathcal{S} = -Et + p_\phi \phi + \int \mathrm{d}\theta \cdot \sqrt{\beta - 2mb(\theta) - \frac{p_\phi^2}{\sin^2\theta}} + \int \mathrm{d}r \cdot \sqrt{2m\left(E - a(r)\right) - \frac{\beta}{r^2}} \ . \quad (2.93)$$

Deriviranjem ukupne akcije po konstantama sistema te invertiranjem jednadžbi se dobiva kompletni integral jednadžbi gibanja.

3 Dinamičko programiranje i teorija optimalne kontrole

Povrh Euler-Lagrangeovog uvjeta prvog reda te Legendreovog uvjeta drugog reda na optimalnost sistema u narednom poglavlju izvodimo dodatni uvjet do kojega je došao Weierstrass. Nadalje, opisujemo Bellmanov pristup problematici optimalne kontrole dinamičkim programiranjem. Izvodimo Hamilton-Jacobi-Bellmanovu jednadžbu te ju rješavamo na primjeru. Za kraj povezujemo dinamičko programiranje s Feynmanovim integralima po putovima te opisujemo Pontryaginov princip maksimalnosti, odnosno minimalnosti ovisno o preferenci nomenklature.

3.1 Weierstrassov uvjet optimalnosti

Uz Euler-Lagrangeov te Legendreov uvjet optimalnosti trajektorije se nazire dodatan Weierstrassov nužni, ali ne i dovoljni uvjet na zahtjev minimalnosti funkcionala duž odabrane trajektorije. Općeniti bi problem mogli sažeto zapisati kao:

$$\min_{y(x)} \left\{ \mathcal{J}\left[y\right] = \int_{x_1}^{x_2} \mathrm{d}x \cdot L(x, y(x), y'(x)) \ : \ y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2 \right\} . \tag{3.1}$$

Reći da trajektorija $y^*(x)$ daje lokalno rješenje gornjeg problema znači da za svaku malu varijaciju $\eta(x)$ koju možemo zamisliti vrijedi:

$$\mathcal{J}\left[y^*\right] \leq \mathcal{J}\left[y^* + \eta\right] \ . \tag{3.2}$$

Razlikujemo četiri tipa minimuma kojima možemo opisati potencijalnu optimalnu trajektoriju te kažemo da je $y^*(x)$:

1. *globalni minimum*, ukoliko vrijedi $\mathcal{J}\left[y^*\right] \leq \mathcal{J}\left[y^* + \eta\right]$ za svaku zamislivu varijaciju $\eta(x)$;

2. *jaki lokalni minimum*, ukoliko postoji $\varepsilon > 0$ takav da uvjet $\mathcal{J}\left[y^*\right] \leq \mathcal{J}\left[y^* + \eta\right]$ vrijedi za svaku varijaciju $\eta(x)$ za koju vrijedi:

$$\sup_{x \in [x_1, x_2]} |\eta(x)| < \varepsilon; \tag{3.3}$$

3. *slabi lokalni minimum*, ukoliko postoji $\varepsilon > 0$ takav da uvjet $\mathcal{J}[y^*] \leq \mathcal{J}[y^* + \eta]$ vrijedi za svaku varijaciju $\eta(x)$ za koju vrijedi:

$$\sup_{x\in[x_1,x_2]} |\eta(x)| < \varepsilon \;\&\; \sup_{x\in[x_1,x_2]} \left|\eta'(x^+)\right| < \varepsilon; \tag{3.4}$$

4. *usmjereni lokalni minimum*, ukoliko za svaku varijaciju $\eta(x)$ postoji $\varepsilon = \varepsilon[\eta]$, takav da uvjet $\mathcal{J}[y^*] \leq \mathcal{J}[y^* + \lambda \cdot \eta]$ vrijedi za svaki $\lambda \in (-\varepsilon, \varepsilon)$;

U narednom ćemo paragrafu iskazati te pokazati Weierstrassov uvjet. Neka je $L \in \mathcal{C}^1$ Lagrangijan sistema čiji funkcional optimizacije definiramo kao:

$$\mathcal{J}[y, y'] = \int \mathrm{d}x \cdot L(x, y(x), y'(x)) \; . \tag{3.5}$$

Tvrdimo da je nužan, ali ne i dovoljan uvjet da bi trajektorija $y(x)$ bila strogi minimum funkcionala optimizacije:

$$L(x, y(x), Y'(x)) - L(x, y(x), y'(x)) - (Y' - y')\, \partial_{y'} L(x, y(x), y'(x)) \geq 0 \; . \tag{3.6}$$

Uvjet se jednostavnije može zapisati ako se uvede Weierstrassova funkcija viška $\mathcal{E}[x, y, y', Y']$ kao:

$$\mathcal{E}[x, y, y', Y'] = L(x, y(x), Y'(x)) - L(x, y(x), y'(x)) - (Y' - y')\, \partial_{y'} L(x, y(x), y'(x)) \; , \tag{3.7}$$

$$\mathcal{E}[x, y, y', Y'] \geq 0 \; , \tag{3.8}$$

za svaku uređenu trojku $(x, y(x), y'(x))$ minimizirajuće trajektorije te za sve zamislive $Y'(x)$. Nazovimo minimizirajuću trajekotriju s $y(x)$ koju na *Slici* 3.1, možemo prepoznati kao krivulju koja spaja točke *1* i *2*. Krivulja na navedenoj slici koja je produžetak točaka *3* i *4* opišimo s ovisnošću $Y(x)$. Nadalje, nazovimo trajektoriju spojnice duž ekviplohe proizvoljnog parametra λ, zadane točkama *4* i *5* na *Slici* 3.1 s $\phi(x, \lambda)$. Koordinate presjeka y i Y trajektorije nazovimo prigodno prema *Slici* 3.1 s $x_4(\lambda)$ i $x_5(\lambda)$. U točkama *4* i *5* će dakle vrijediti:

$$Y[x_4(\lambda)] = \phi[x_4(\lambda), \lambda] \; , \tag{3.9}$$

$$y[x_5(\lambda)] = \phi[x_5(\lambda), \lambda] \; . \tag{3.10}$$

Diferencijacijom gornje dvije jednadžbe po slobodnom parametru λ dobivamo:

$$Y' x_4' = \phi' x_4' + \partial_\lambda \phi \ , \tag{3.11}$$

$$y' x_5' = \phi' x_5' + \partial_\lambda \phi \ . \tag{3.12}$$

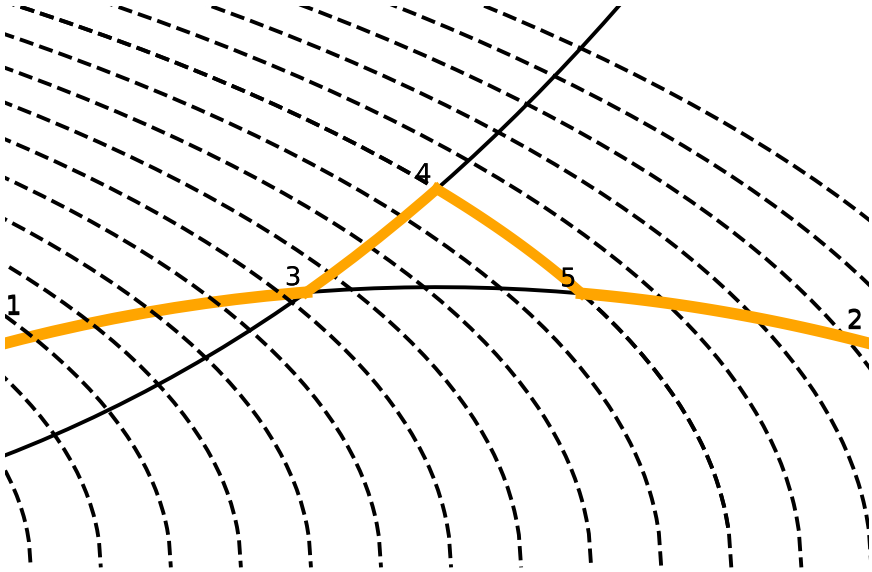
Nadalje, oduzimanjem gornje dvije jednadžbe imamo:

$$(Y' - \phi')\, x_4' = (y' - \phi')\, x_5' \ . \tag{3.13}$$

Nazovimo s Γ trajektoriju koja je obojana narančasto na *Slici 3.1* te zapišimo funkcional duž nje:

$$\mathcal{J}\left[\Gamma\right] = \int_\Gamma \mathrm{d}x \cdot L\left(x, y(x), y'(x)\right) \ , \tag{3.14}$$

gornji integralni izraz možemo razbiti na četiri integrala po trajektorijama *1-3*, *3-4*,



Slika 3.1: Skica problema u izvodu Weierstrassovog uvjeta optimalnosti, crtkane linije predstavljaju ekviplohe proizvoljnog parametra λ

4-5 te *5-2* kao:

$$\mathcal{J}\left[\Gamma\right] = \int_1^3 \mathrm{d}x \cdot L\left(x, y(x), y'(x)\right) + \int_3^4 \mathrm{d}x \cdot L\left(x, Y(x), Y'(x)\right) +$$

$$+\int_4^5 \mathrm{d}x \cdot L\left(x, \phi(x), \phi'(x)\right) + \int_5^2 \mathrm{d}x \cdot L\left(x, y(x), y'(x)\right) \ . \tag{3.15}$$

Obzirom da je po pretpostavci $y(x)$ minimizirajuća trajektorija funkcionala mora vrijediti:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}'(\lambda_3) = &\left[L(x, y(x), Y'(x)) - L(x, y(x), \phi'(x))\right] x_4'|_3 + \\ &+ \left[L(x, y(x), \phi'(x)) - L(x, y(x), y'(x))\right] x_5'|_3 \geq 0 \ ,\end{aligned} \tag{3.16}$$

gdje je λ_3 slobodni parametar za koji će se x_4 i x_5 koordinate izjednačiti. Koristeći jednadžbu (3.13) te zaključak da $x_4'(\lambda_3) > 0$, nejednakost postaje:

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{J}'\left(\lambda_3\right)}{x_4'\left(\lambda_3\right)} = &\left[L(x, y(x), Y'(x)) - L(x, y(x), \phi'(x))\right] x_4'|_3 + \\ &+ \left[L(x, y(x), \phi'(x)) - L(x, y(x), y'(x))\right] \cdot \left.\frac{Y' - \phi'}{y' - \phi'}\right|_3 \geq 0 \ .\end{aligned} \tag{3.17}$$

Gornja nejednakost vrijedi za sve Y' i ϕ' takve da $\left(Y' - \phi'\right) / \left(y' - \phi'\right) > 0$. Na početku iskazani oblik Weierstrassovog uvjeta se dobiva puštanjem da ϕ' u limesu teži y':

$$L\left(x, y(x), \phi'(x)\right) - L\left(x, y(x), y'(x)\right) - \left(\phi'(x) - y'(x)\right) \cdot \partial_{y'} L\left(x, y(x), y'(x)\right) \geq 0 \ . \tag{3.18}$$

Čime smo iskazali i pokazali Weierstrassov uvjet na minimizaciju funkcionala optimalnosti proizvoljnom trajektorijom $y(x)$. Navedeni je uvjet nužan ali ne i dovoljan da bi trajektorija predstavljala strogi minimum funkcionala.

3.2 Bellmanov pristup

Richard Bellman pristupa problemu otpimizacije trajektorije dinamičkog sistema na način da izvodi Hamilton-Jacobi-Bellmanovu (HJB) jednadžbu te pokazuje kako bi njeno rješenje odgovaralo optimalnoj funkciji troška sistema. Navedenu se funkciju troška traži pristupom dinamičkog programiranja. U narednom potpoglavlju uvodimo općenitu problematiku dinamičkog stohastičkog sistema, uvodimo algoritam dinamičkog programiranja. Nadalje, uvodimo *minimax* kontrolni pristup, izvodimo HJB jednadžbu te pokazujemo ekvivalenciju s optimalnom funkcijom troška dinamičkog sistema. Također na jednostavnijim primjerima objašnjavamo navedeni pristup.

Osnova svakog modela koji ćemo rješavati jesu dinamički sistem te funkcija troška

za koju se pretpostavlja da je aditivna u vremenu. Specifično u slučaju rješavanja problema algoritmom dinamičkog programiranja će nas zanimati dinamički sistemi na diskretiziranoj vremenskoj domeni, no vidjeti ćemo da je neprekidna vremenska domena jednako važna poglavito kod promatranja HJB jednadžbe. Dinamički sistem uvodimo kroz definicijsku relaciju:

$$x_{k+1} = f_k\left(x_k, u_k, \omega_k\right), \quad k \in \{0 \leq i < N : i \in \mathbb{N}_0\}\,, \tag{3.19}$$

gdje je k diskretni indeks vremena, N broj trenutaka u vremenu u kojima vršimo kontrolu nad sistemom, x_k stanje sistema u k-tom trenutku na vremenskoj domeni, u_k kontrolni parametar u trenutku k, ω_k stohastički član u trenutku k te je f_k ovisnost po kojoj sistem evoluira. Kontrolni parametar, odnosno kontrola je vezana uz to kako ćemo mi promijeniti dinamički sistem znajući prijašnja stanja sistema i očekivanja za stohastičke doprinose. Tipični primjer kontrole je na slučaju upravljanja zalihama u trgovinama. Naime, x_k bi bilo stanje određenog proizvoda u trenutku k, u_k ukupna narudžba dotičnog proizvoda u trenutku k imajući na umu prijašnje stanje te bi ω_k bila potražnja za proizvodom u trenutku k. Općenito razlikujemo dvije vrste optimizacija, redom:

1. *optimizacija otvorenom petljom*, što je postupak optimizacije u kojem se na temelju dostupnih informacija o sistemu u početnom trenutku vremenskog intervala optimizacije, donosi odluka o kontroli za sve trenutke do kraja vremenskog horizonta.

2. *optimizacija zatvorenom petljom*, što je postupak optimizacije u kojem se na temelju dostupnih informacija o sistemu u svakom trenutku vremenskog intervala optimizacije donosi odluka o kontroli samo za sljedeći korak u vremenu te se navedeni proces ponavlja za sve trenutke do kraja vremenskog horizonta.

Mi ćemo se ponajviše pozabaviti s optimizacijom zatvorenom petljom obzirom na to da je ona baza algoritma dinamičkog programiranja. Za funkciju troška pretpostavljamo da je aditivna u vremenu, odnosno da će funkcija troška u trenutku k odgovarati zbroju funkcija troška za sve prijašnje trenutke i stanja dinamičkog sistema.

Sveukupna funkcija troška na horizontu vremenske domene će tada izgledati kao:

$$g_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x_k, u_k, \omega_k) \ , \tag{3.20}$$

Prvi je član u gornjem izrazu terminalni trošak, što bi na primjeru upravljanja zalihama u trgovinama moglo odgovarati negativnim penalima koji se dodjeljuju ukoliko na kraju vremenskog horizonta nisu sve zalihe prodane. Obzirom na to da funkcija troška uvelike ovisi o stohastičkim doprinosima, gornjem izrazu fali očekivanje po svim stohastičkim varijablama:

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\vec{\omega}} \left\{ g_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x_k, u_k, \omega_k) \right\} . \tag{3.21}$$

Optimizacija dinamičkog sistema se vrši po kontroli $\vec{u}$. Cilj optimizacije algoritmom dinamičkog programiranja jest naći kontrolne funkcije toka. Kontrolna funkcija $\mu_k(x_k)$ nam govori kakvu kontrolu u_k trebamo primijeniti u trenutku k obzirom na to da je stanje dinamičkog sistema x_k. Skup svih kontrolnih funkcija indeksiranih po indeksu vremenske domene $\pi = \{\mu_0, ..., \mu_{N-1}\}$ nazivamo *kontrolnim zakonom*. Za svaki zamislivi kontrolni zakon definiramo funkciju troška kao:

$$J_\pi(x_0) = \mathop{\mathbb{E}}_{\vec{\omega}} \left\{ g_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x_k, u_k, \omega_k) \right\} . \tag{3.22}$$

Formulirajmo u koracima osnovni problem na primjeru upravljanja zalihama u trgovinama:

1. *Dinamički sistem* na diskretnoj vremenskoj domeni oblika

$$x_{k+1} = f_k(x_k, u_k, \omega_k) \tag{3.23}$$

   gdje je f_k funkcija evolucije sistema u trenutku k, koja u našem primjeru odgovara $f_k(x_k, u_k, \omega_k) = x_k + u_k - \omega_k$. Prijašnji izraz konkretno odgovara kardinalnosti određenog artikla na zalihama obzirom da je prijašnje stanje x_k. Obavili smo dodatak na zalihu kontrolom u_k te stohastički ljudi kupuju proizvod prema slučajnoj varijabli ω_k.

2. *Slučajna varijabla* $\vec{\omega}$. Generalizacija problema bi bilo da $\vec{\omega}$ nije nužno normalna

stohastička varijabla, već da dopustimo distribuciji vjerojatnosti da ovisi o stanju dinamičkog sistema i kontroli u odabranom trenutku vremenske domene. Na našem bi primjeru takva generalizacija bila očekivana obzirom na to da potražnja određenog artikla može biti uvjetovana trenutačnim stanjem zaliha, pogotovo ukoliko se radi o artiklu neophodnom za život.

3. *Ograničenje na kontrolu* $\vec{u}$. Općenito u prijašnjim bi razmatranjima vrijedilo da kontrola mora biti nenegativna, odnosno $u_k \geq 0$. U generaliziranom će slučaju ograničenje ovisiti o trenutku k te o stanju dinamičkog sistema x_k pa uvodimo domenu kontrole U te pišemo $u_k \in U_k(x_k)$. U našem primjeru je lako zamislivo zašto bi generalizacija ovisnosti ograničenja o stanju dinamičkog sistema bila potrebna. Naime, možda postoji određena gonja granica na kardinalnost određenog artikla na zalihama, odnosno postoji određeno stanje sistema B koje ne možemo prijeći jer ne bi mogli više navedenog artikla spremati na zalihe, $u_k \leq B - x_k$.

4. *Vremenski aditivna funkcija troška* $J_\pi(x_0)$ oblika

$$J_\pi(x_0) = \mathop{\mathbb{E}}_{\vec{\omega}} \left\{ g_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k(x_k, u_k, \omega_k) \right\}, \tag{3.24}$$

gdje su $g_k(x_k, u_k, \omega_k)$ funkcije troška za svaki trenutak k. Na našem bi primjeru gornji izraz zapisali kao:

$$J_\pi(x_0) = \mathop{\mathbb{E}}_{\vec{\omega}} \left\{ R(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} \left(r(x_k) + c u_k \right) \right\}, \tag{3.25}$$

gdje se standardno terminalna funkcija troška označava s $R(x_N)$, $r(x_k)$ predstavlja penale za zadržavanje proizvoljnog netrivijalnog stanja sistema x_k, odnosno za to da artikl stoji na zalihama te c predstavlja cijenu nabave artikla od distributera koja se zatim množi s kontrolom u_k.

5. *Optimizacija zatvorene petlje preko kontrolnih funkcija toka*, odnosno traženje optimalnih preslikavanja, koja označavamo zvjezdicom π^*, s konfiguracijskog prostora stanja dinamičkog sistema za svaki trenutak k na domenu kontrole $U_k(x_k)$.

Osnovna pretpostavka metode rješavanja problema algoritmom dinamičkog progra-

miranja se bazira na *principu optimalnosti*. Općenito ćemo sada i nadalje u tekstu sa zvjezdicom u gornjem desnom kutu oznake varijable označavati optimalnu vrijednost promatrane varijable.

Princip Optimalnosti

Neka je $\pi^* = \{\mu_0^*, ..., \mu_{N-1}^*\}$ optimalni kontrolni zakon za uvedeni osnovni problem optimizacije dinamičkog sistema. Nadalje, pretpostavimo da ukoliko primjenjujemo optimalni kontrolni zakon π^* da vjerojatnost da dinamički sistem uđe u proizvoljni element konfiguracijskog prostora x_k ima pozitivnu vjerojatnost. Promotrimo podskup početne problematike prema kojemu se nalazimo u trenutku k te nam je cilj minimizirati funkciju troška od trenutka k do horizonta vremenske domene:

$$J_{\pi^k}^*(x_k) = \min_{\pi^k} \mathop{\mathbb{E}}_{\omega_k,...,\omega_{N-1}} \left\{ g_N(x_N) + \sum_{i=k}^{N-1} g_i\left(x_k, \mu_k(x_k), \omega_k\right) \right\}, \tag{3.26}$$

gdje je $\pi^k = \{\mu_k, ..., \mu_{N-1}\}$, podskup kontrolnog zakona π. Tada je $\{\mu_k^*, ..., \mu_{N-1}^*\}$ optimalni kontrolni zakon za podskup početnog problema skraćene vremenske domene $\{k, ..., N\}$.

Gornji je princip optimalnosti lako shvatljiv, naime možemo zamisliti problematiku traženja optimalnog puta, po nekim našim kriterijima, od točke A do točke B na Zemlji. Ukoliko nađemo optimalni put te pređemo određeni dio puta i zapitamo se opet koji bi nam sada odabir puta bio optimalan, lako bi shvatili da bi taj put upravo odgovarao ostatku onog prije odabranog. Kroz princip optimalnosti možemo shvatiti način na koji se primjenjuje algoritam dinamičkog programiranja. Naime, po principu optimalnosti ukoliko riješimo repni problem duljine jedan, odnosno tražimo optimalnu kontrolni zakon π^{N-1}, on će biti isti kao i onaj koji bi dobili da smo na neki način odmah optimizirali ukupni problem. Imajući to na umu dalje rješavamo repni problem duljine dva, znajući rješenje repnog problema duljine jedan. Navedenim rekurzivnim pristupom od horizonta vremenske domene do početnog trenutka $k = 0$, reproduciramo sve optimalne kontrolne funkcije toka, čime u biti rješavamo početni problem traženja optimalnog kontrolnog zakona π^*.

Obzirom na to da minimizacija po skupu svih zamislivih kontrolnih funkcija toka za svaki trenutak u vremenu iziskuje vrlo složen matematički formalizam, cilj nam je

pokazati kako minimizacija po kontrolnom zakonu π, daje isti rezultat kao i minimizacija po skupu svih mogućih kontrola u_k.

Propozicija 3.2.1

Za svako početno stanje dinamičkog sistema x_0, optimalnu funkciju troška $J^*(x_0)$ osnovnog problema zadajemo s $J_0(x_0)$. Navedenu funkciju troška dobivamo kao zadnji korak sljedećeg algoritma, koji rekurzivno minimizira funkciju troška unatrag u vremenu od horizonta vremenske domene do trenutka $k = 0$:

$$J_N(x_N) = g_N(x_N) \,, \tag{3.27}$$

$$J_k(x_k) = \min_{u_k \in U_k(x_k)} \mathop{\mathbb{E}}_{\vec{\omega}} \left\{ g_k(x_k, u_k, \omega_k) + J_{k+1}\left(f_k(x_k, u_k, \omega_k)\right) \right\} , \tag{3.28}$$

gdje je $k \in \{0 \leq i < N : i \in \mathbb{N}_0\}$. Nadalje, ukoliko $u_k^* = \mu_k^*(x_k)$ minimizira argument funkcije minimuma u jednadžbi (3.28), za svaki x_k element konfiguracijskog prostora i svaki trenutak k unutar vremenskog horizonta, kontrolni zakon $\pi^* = \{\mu_0^*, ..., \mu_{N-1}^*\}$ jest optimalan.

Gornja propozcija je centralna u primjeni algoritma dinamičkog programiranja u problemu optimizacije dinamičkog sistema stoga ćemo ju dokazati.

Dokaz *Propozicije 3.2.1*:

Za svaki zamislivi kontrolni zakon $\pi = \{\mu_0, ..., \mu_{N-1}\}$ i svaki indeks vremena $k \in \{0 \leq i < N : i \in \mathbb{N}_0\}$, definiramo notaciju $\pi^k = \{\mu_k, ..., \mu_{N-1}\}$. Za svaki $k \in \{0 \leq i < N : i \in \mathbb{N}_0\}$, neka je $J_k^*(x_k)$ optimalna funkcija troška za $(N-k)-$repni problem, koji počinje u trenutku k te završava na horizontu vremenske domene:

$$J_k^*(x_k) = \min_{\pi^k} \mathop{\mathbb{E}}_{\omega_k, ..., \omega_{N-1}} \left\{ g_N(x_N) + \sum_{i=k}^{N-1} g_i(x_i, \mu_i(x_i), \omega_i) \right\} . \tag{3.29}$$

Ukoliko je $k = N$, tada imamo $J_N^*(x_N) = g_N(x_N)$. Pokazati ćemo indukcijom da je minimizacija po kontrolnom zakonu π^k jednaka minimizaciji po kontrolama u_k. U izvodu pretpostavljamo da stohastičke varijable mogu zauzeti samo konačan ili prebrojiv skup vrijednosti te da je očekivanje po $\vec{\omega}$ svakog člana u jednadžbi (3.29) dobro definirano i konačno za svaki kontrolni zakon π. U izvodu ćemo dalje razlikovati J' što će nam biti funkcija

troška koja se dobije minimizacijom po kontroli u_k te J^* što je optimalna funkcija troška dobivena minimizacijom po kontrolnom zakonu. Kao bazu indukcije imamo trivijalnu jednakost $J_N^*(x_N) = J_N'(x_N) = g_N(x_N)$, koja mora biti zadovoljena obzirom da je optimalnost određenog procesa smislen opis procesa jedino ukoliko postoji proizvoljnost u odabiru evolucije sistema. Navedena je proizvoljnost u ovom slučaju ukinuta obzirom da smo na vremenskom horizontu evolucije. Pretpostavimo da za određeni k i svaki x_{k+1} imamo $J_{k+1}^*(x_{k+1}) = J_{k+1}(x_{k+1})$. Tada pišemo kontrolni zakon za $k-$ti korak u vremenu pomoću onog za naredni korak u vremenu indeksa $k+1$ kao $\pi^k = \left(\mu_k, \pi^{k+1}\right)$ te imamo:

$$J_k^*(x_k) = \min_{\left(\mu_k, \pi^{k+1}\right)} \mathop{\mathbb{E}}_{\omega_k, \ldots, \omega_{N-1}} \left\{ g_k(x_k, \mu_k(x_k), \omega_k) + g_N(x_N) + \sum_{i=k+1}^{N-1} g_i(x_i, \mu_i(x_i), \omega_i) \right\}, \tag{3.30}$$

$$J_k^*(x_k) = \min_{\mu_k} \mathop{\mathbb{E}}_{\omega_k} \Bigg\{ g_k(x_k, \mu_k(x_k), \omega_k) + \\ + \min_{\pi^{k+1}} \mathop{\mathbb{E}}_{\omega_{k+1}, \ldots, \omega_{N-1}} \left[g_N(x_N) + \sum_{i=k+1}^{N-1} g_i(x_i, \mu_i(x_i), \omega_i) \right] \Bigg\}, \tag{3.31}$$

$$J_k^*(x_k) = \min_{\mu_k} \mathop{\mathbb{E}}_{\omega_k} \Big\{ g_k(x_k, \mu_k(x_k), \omega_k) + J_{k+1}^* \left(f_k(x_k, \mu_k(x_k), \omega_k) \right) \Big\}, \tag{3.32}$$

$$J_k^*(x_k) = \min_{u_k \in U_k(x_k)} \mathop{\mathbb{E}}_{\omega_k} \Big\{ g_k(x_k, u_k, \omega_k) + J_{k+1}' \left(f_k(x_k, u_k, \omega_k) \right) \Big\}, \tag{3.33}$$

$$J_k^*(x_k) = J_k'(x_k) \, . \tag{3.34}$$

U jednadžbi (3.30) smo iskoristili definicijsku relaciju za $J_k^*(x_k)$. Zatim smo u jednadžbi (3.31) koristili princip optimalnosti te $(N-(k+1))-$repni dio problema minimizacije ubacili pod vitičaste zagrade te ga primijenili na samo one članove koji pokazuju ovisnost o kontroli ili stohastičkim parametrima u tom dijelu vremenske domene. U jednadžbi (3.32) smo prepoznali definiciju J_{k+1}^* te u narednoj jednadžbi iskoristili hipotezu indukcije

te jednakost po minimumu:

$$\min_{\mu} F\left(x, \mu(x)\right) = \min_{u} F(x, u) \ , \tag{3.35}$$

za svaku ovisnost F, čime smo reproducirali traženi rezultat u obliku jednadžbe (3.34).

Q.E.D.

U svim gornjim razmatranjima vezanim za algoritam dinamičkog programiranja smo bili uzimali očekivanje po slučajnim varijablama $\vec{\omega}$. Kako bi mogli izvrijedniti navedeno očekivanje pretpostavlja se da je poznata distribucija vjerojatnosti navedenih stohastičkih parametara te je u potpunosti zamisliva situacija te opravdano pitanje što činiti ukoliko ne poznajemo unaprijed distribuciju vjerojatnosti za $\vec{\omega}$. U navedenom slučaju priskačemo tzv. *minimax kontroli*. Izostavivši informaciju o distribuciji vjerojatnosti smo znatno srezali naše znanje o sistemu, neki bi mogli reći i nepovratno, no da bi uspjeli provesti minimax kontrolu moramo poznavati barem gornju i donju granicu na stohastičke parametre. U slučaju da se radi o varijablama koje daju netrivijalnu vjerojatnost zauzeća za bilo koji realni broj navedeni bi uvjet mogli shvatiti kao da smo odrezali distribuciju od asimptotskih repova, odnosno definirali određeni doseg. Najjednostavnije osnovni problem u minimax pristupu možemo opisati uređenom trojkom (Π, Ω, J), gdje je Π skup svih različitih kontrolnih zakona π, Ω skup definiran gornjom i donjom granicom koju pretpostavljamo da znamo za stohastičke parametre $\vec{\omega}$ te je $J : \Pi \times \Omega \to \mathbb{R} \bigcup \{-\infty, +\infty\}$ dana funkcija troška. Cilj bi minimax kontrole bio minimizirati:

$$\max_{\vec{\omega} \in \Omega} J(\pi, \vec{\omega}) \ , \tag{3.36}$$

za sve $\pi \in \Pi$. Općenito je rijetkost da se nađe analitičko rješenje optimalne funkcije troška minimax kontrolnim pristupom. Zbog toga se minimax kontroli ponajviše pristupa s aspekta dinamičkog programiranja. Za svaku stohastičku varijablu ω_i tvrdimo da pripada u određenu domenu $W_k(x_k, u_k)$ koja ovisi o indeksu trenutku k, stanju dinamičkog sistema x_k i kontroli u_k. Cilj nam je kao i prije pronaći kontrolni zakon $\pi = \{\mu_0, ..., \mu_{N-1}\}$ s odgovarajućim domenama kontrole $\mu_k(x_k) \in U_k(x_k)$ koji

minimizira funkciju troška oblika:

$$J_\pi(x_0) = \max_{\omega_k \in \Omega_k(x_k,u_k),\ k=0,\ldots,N-1} \left[g_N(x_N) + \sum_{k=0}^{N-1} g_k\left(x_k, \mu_k(x_k), \omega_k\right) \right] . \tag{3.37}$$

Algoritam dinamičkog programiranja je konceptualno identičan onomu koji smo imali u slučaju da poznajemo distribuciju vjerojatnosti slučajnih varijabli $\vec{\omega}$ jedino očekivanje po navedenim distribucijama mijenjamo minimax kontrolnim pristupom:

$$J_N(x_N) = g_N(x_N) , \tag{3.38}$$

$$J_k(x_k) = \min_{u_k \in U_k(x_k)} \max_{\omega_k \in \Omega_k(x_k,u_k)} \left[g_k(x_k, u_k, \omega_k) + J_{k+1}\left(f_k(x_k, u_k, \omega_k)\right) \right] . \tag{3.39}$$

Konceptualno je rekurzivna primjena algoritma ista kao i u prijašnjem slučaju gdje smo poznavali distribuciju vjerojatnosti slučajne varijable. Naime, koristimo se pricipom optimalnosti te poznavajući terminalnu funkciju troška koja je nužno i optimalna rekurzivnim koracima unatrag prema jednadžbi (3.39) reproduciramo sve funkcije troška. Pokazat ćemo da algoritam dinamičkog programiranja u svom N-tom koraku, funkcijom troška J_0, uistinu reproducira optimalnu funkciju troška. Obzirom na prirodu kontrole nužno je pretpostaviti da funkcija troška ni za koji k ne divergira u negativnu beskonaćnost, odnosno $J_k(x_k) > -\infty$, za svaki k i x_k.

Lema 3.2.1

Neka je $f : \Omega \to \mathfrak{X}$ preslikavanje te neka je $\mathcal{M}$ skup svih preslikavanja $\mu : \mathfrak{X} \to \mathcal{U}$, gdje su Ω, $\mathfrak{X}$ i $\mathcal{U}$ određeni skupovi. Tada za proizvoljno preslikavanje $G_0 : \Omega \to \langle -\infty, +\infty]$ te $G_1 : \mathfrak{X} \times \mathcal{U} \to \langle -\infty, +\infty]$ takvo da:

$$\min_{u \in \mathcal{U}} G_1\left(f(\omega), u\right) > -\infty, \quad za\ svaki\ \omega \in \Omega , \tag{3.40}$$

imamo:

$$\min_{\mu \in \mathcal{M}} \max_{\omega \in \Omega} \left[G_0(\omega) + G_1\left(f(\omega), \mu\left(f\left(\omega\right)\right)\right) \right] = \max_{\omega \in \Omega} \left[G_0(\omega) + \min_{u \in \mathcal{U}} G_1\left(f(\omega), u\right) \right] . \tag{3.41}$$

Lema 3.2.1 nam je važna kako bi mogli pokazati da algoritmom dinamičkog programiranja u minimax kontrolnom pristupu uistinu reproduciramo optimalnu funkciju troška, stoga ćemo ju po dokazati.

Dokaz *Leme 3.2.1*:

Za svako preslikavanje $\mu \in \mathcal{M}$ znamo da nužno vrijedi:

$$\max_{\omega\in\Omega}\left[G_0(\omega)+G_1\left(f(\omega),\mu\left(f(\omega)\right)\right)\right] \geq \max_{\omega\in\Omega}\left[G_0(\omega)+\min_{u\in\mathcal{U}} G_1\left(f(\omega),u\right)\right] . \tag{3.42}$$

Na gornju jednadžbu zatim djelujemo minimumom po $\mu \in \mathcal{M}$ na lijevoj strani čime smo očuvali nejednakost obzirom na poredak operacija:

$$\min_{\mu\in\mathcal{M}}\max_{\omega\in\Omega}\left[G_0(\omega)+G_1\left(f(\omega),\mu\left(f(\omega)\right)\right)\right] \geq \max_{\omega\in\Omega}\left[G_0(\omega)+\min_{u\in\mathcal{U}} G_1\left(f(\omega),u\right)\right] . \tag{3.43}$$

Ideja dokaza jest da dalje pokažemo obratnu nejednakost te time zaključimo da vrijedi jednakost. Za svaki $\varepsilon > 0$ uzmimo podskup skupa $\mathcal{M}$, $\mu_\varepsilon \in \mathcal{M}_\varepsilon$ takav da:

$$G_1\left(f(\omega),\mu_\varepsilon\left(f(\omega)\right)\right) \leq \min_{u\in\mathcal{U}} G_1\left(f(\omega),u\right)+\varepsilon, \quad za\ svaki\ \omega\in\Omega\,. \tag{3.44}$$

Možemo tvrditi da je $\mathcal{M}_\varepsilon$ netrivijalan obzirom da je pretpostavka izvoda da $\min_{u\in\mathcal{U}} G_1\left(f(\omega),u\right) > -\infty$. Tada imamo:

$$\min_{\mu\in\mathcal{M}}\max_{\omega\in\Omega}\left[G_0(\omega)+G_1\left(f(\omega),\mu(f(\omega))\right)\right] \leq \max_{\omega\in\Omega}\left[G_0(\omega)+G_1\left(f(\omega),\mu_\varepsilon(f(\omega))\right)\right] ,$$

$$\leq \max_{\omega\in\Omega}\left[G_0(\omega)+\min_{u\in\mathcal{U}} G_1\left(f(\omega),u\right)\right]+\varepsilon\,. \tag{3.45}$$

Puštajući limes kada $\varepsilon \to 0$, obzirom na to da on može biti proizvoljno mali smo reproducirali obrnutu nejednakost od jednadžbe (3.43), čime slijedi jednakost koju težimo pokazati:

$$\min_{\mu\in\mathcal{M}}\max_{\omega\in\Omega}\left[G_0(\omega)+G_1\left(f(\omega),\mu\left(f\left(\omega\right)\right)\right)\right] = \max_{\omega\in\Omega}\left[G_0(\omega)+\min_{u\in\mathcal{U}} G_1\left(f(\omega),u\right)\right] . \tag{3.46}$$

Q.E.D.

Koristeći *Lemu 3.2.1* ćemo pokazati alogitam dinamičkog programiranja za minimax

kontorlni pristup. Optimalnu funkciju troška definiramo kao:

$$J^*(x_0) = \min_{\mu_0} ... \min_{\mu_{N-1}} \max_{\omega_0 \in \Omega} ... \max_{\omega_{N-1} \in \Omega} \left[\sum_{k=0}^{N-1} g_k \left(x_k, \mu_k(x_k), \omega_k \right) + g_N(x_N) \right] . \tag{3.47}$$

Gornju jednadžbu možemo sugestivno zapisati kao:

$$J^*(x_0) = \min_{\mu_0} ... \min_{\mu_{N-2}} \left\{ \min_{\mu_{N-1}} \max_{\omega_0 \in \Omega} ... \max_{\omega_{N-2} \in \Omega} \left[\sum_{k=0}^{N-2} g_k(x_k, \mu_k(x_k), \omega_k) + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \max_{\omega_{N-1} \in \Omega} \left(g_{N-1}(x_{N-1}, \mu_{N-1}(x_{N-1}), \omega_{N-1}) + J_N(x_N) \right) \right] \right\} . \tag{3.48}$$

U gornjoj smo jednadžbi odmah zamijenili terminalnu vrijednost funkcije penala $g_N(x_N)$ s terminalnom funkcijom troška iz algoritma dinamičkog programiranja. Koristeći definiciju rekurzije dinamičkog programiranja iz jednadžbe (3.39) te *Lemu 3.2.1* imamo:

$$J^*(x_0) = \min_{\mu_0} ... \min_{\mu_{N-2}} \max_{\omega_0 \in \Omega} ... \max_{\omega_{N-2} \in \Omega} \left[\sum_{k=0}^{N-2} g_k(x_k, \mu_k(x_k), \omega_k) + J_{N-1}(x_{N-1}) \right] . \tag{3.49}$$

Ponavljajući gornji postupak sve do terminalnog koraka bi reproducirali traženi zahtjev:

$$J^*(x_0) = J_0(x_0) . \tag{3.50}$$

Čime smo pokazali kako koristeći minimax kontrolni pristup u okviru algoritma dinamičkog programiranja također možemo reproducirati optimalnu funkciju troška kao i kada poznajemo distribucije vjerojatnosti slučajnih varijabli. U narednom paragrafu uvodimo teoriju optimalne kontrole na neprekidnoj vremenskoj domeni te izvodimo HJB jednadžbu.

Velika se rasprava vodi temeljena na pitanju treba li stvarne probleme koji se rješavaju metodama teorije optimalne kontrole rješavati na diskretiziranoj vremenskoj domeni ili ne. Odnosno kakvog smisla ima neprekidna domena ukoliko izvršitelj kontrole ne može nikako konstantno, odnosno neprekidno, vršiti kontrolu već samo u određenim trenucima. Glavne prednosti rješavanja problema na neprekidnoj vremenskoj domeni jesu te što se mijenja formalizam te to nosi svoje pogodnosti kod mnogih izvoda. Nadalje, ukoliko se izvede određeni rezultat na neprekidnoj do-

meni, on se uvijek može diskretizacijom problema prebaciti na diskretnu domenu, što znači da nam je u ovom slučaju pristup općeniti, a uvijek težimo što općenitijim rezultatima i pristupima. Prije samog izvoda HJB jednadžbe te povezivanja s algoritmom dinamičkog programiranja trebamo ponovno postaviti osnovni problem koji rješavamo algoritmom dinamičkog programiranja od prije samo ga reformulirati tako da je definiran na neprekidnoj vremenskoj domeni. Evolucija dinamičkog sistema je opisana $n-$torkom preslikavanja $\vec{f}$ kao:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}(x(t), u(t)), \quad t \in [0, T] \ , \tag{3.51}$$

gdje se pretpostavlja da je dano početno stanje dinamičkog sistema $\vec{x}(0)$. Analogno prijašnjim razmatranjima $\vec{x}(t) \in \mathfrak{X} \subseteq \mathbb{R}^n$, je vektor stanja dinamičkog sistema u trenutku t. Smatra se da je svaka komponenta element $\mathcal{C}^1$ po derivaciji u vremenu te potpuno općenito $\dot{\vec{x}}(t) \in \mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^n$. Gdje su $\mathfrak{X}$ i $\mathcal{V}$ podskupovi $\mathbb{R}^n$, bitni ukoliko postoji neko ograničenje na konfiguracijski prostor ili prostor generalizirane brzine stanja dinamičkog sistema. Drugi argument preslikavanja $\vec{f}$ je kontrola $\vec{u}(t) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$, gdje je $\mathcal{U}$ podskup $\mathbb{R}^m$ dan ograničenjima na kontrolu koja su specifična za problem koji promatramo. Kauzalne kontrolne funkcije se još nazivaju i *kontrolne trajektorije* te se pretpostavlja da su barem po dijelovima diferencijabilna preslikavanja. U daljnjim razmatranjima u ovom poglavlju vezanim za HJB jednadžbu pretpostavljamo da za proizvoljnu odabranu kontrolnu trajektoriju iz domene $\mathcal{U}$ postoji jedinstveno rješenje za trajektoriju sistema kroz konfiguracijski prostor $\vec{x}(t)$. Cilj nam je isto kao i prije naći kontrolnu trajektoriju koja zajedno s isprepletenom trajektorijom u konfiguracijskom prostoru minimizira aditivnu funkciju troška, isto kao i u diskretnom pristupu. Ukupna funkcija troška nam tada poprima oblik:

$$h\left(\vec{x}(T)\right) + \int_0^T \mathrm{d}t \cdot g\left(\vec{x}(t), \vec{u}(t)\right) \ , \tag{3.52}$$

gdje je h terminalna funkcija troška, dok je g općenita funkcija troška te se radi o glatkim preslikavanjima nasprem gradijenata po svim varijablama o kojima ovisi funkcija troška. Cilj nam je u nastavku neformalno izvesti HJB jednadžbu te povezati njeno rješenje i optimalno rješenje dobiveno algoritmom dinamičkog programiranja. Diskretiziramo vremensku domenu na N podintervala te definiramo korak u vremenu

δ kao:

$$\delta = \frac{T}{N} \ . \tag{3.53}$$

Pišemo indeks diskretiziranog vremena kao p/rije:

$$\vec{x}_k = \vec{x}(k\delta) \ , \tag{3.54}$$

$$\vec{u}_k = \vec{u}(k\delta) \ . \tag{3.55}$$

Definicijska relacija dinamičkog sistema (3.51) postaje:

$$\vec{x}_{k+1} = \vec{x}_k + \delta \cdot \vec{f}\left(\vec{x}_k, \vec{u}_k\right) \ , \tag{3.56}$$

dok je ukupna funckija troška dana izrazom:

$$h\left(\vec{x}_N\right) + \sum_{k=0}^{N-1} g\left(\vec{x}_k, \vec{u}_k\right) \cdot \delta \ . \tag{3.57}$$

Krećemo od algoritma dinamičkog programiranja te će nam se postupak bazirati na puštanju limesa kada $\delta \to 0$, čime ulazimo u kontinualni limes te pretpostavljamo da iz rješenja dobivenog dinamičkim programiranjem reproduciramo optimalnu funkciju troška za problem zadan na neprekidnoj vremenskoj domeni. Optimalnu funkciju troška dobivenu kao rješenje problema na neprekidnoj domeni ćemo označavati s $J^*(t, \vec{x})$, dok ćemo optimalnu funkciju troška u diskretnoj aproksimaciji označavati s $\tilde{J}^*(t, \vec{x})$. Krećemo od algoritma dinamičkog programiranja:

$$\tilde{J}^*\left(N\delta, \vec{x}\right) = h\left(\vec{x}\right) \ , \tag{3.58}$$

$$\tilde{J}^*\left(k\delta, \vec{x}\right) = \min_{\vec{u} \in \mathcal{U}} \left[g\left(\vec{x}, \vec{u}\right) \cdot \delta + \tilde{J}^*\left((k+1) \cdot \delta, \vec{x} + \delta \cdot \vec{f}\left(\vec{x}, \vec{u}\right) \right) \right] \ . \tag{3.59}$$

Po pretpostavci imamo da je $\tilde{J}^*$ barem element $\tilde{J}^* \in \mathcal{C}^1\left([0,T] \times \mathbb{R}^n\right)$ te stoga možemo razvijati oko $(k\delta, \vec{x})$:.

$$\tilde{J}^*\left((k+1) \cdot \delta, \vec{x} + \delta \vec{f}\left(\vec{x}, \vec{u}\right) \right) = \tilde{J}^*\left(k\delta, \vec{x}\right) + \delta \, \partial_t \tilde{J}^*\left(k\delta, \vec{x}\right) + \left(\delta \vec{f}\left(\vec{x}, \vec{u}\right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}} \right) \tilde{J}^* + o(\delta) \ . \tag{3.60}$$

Ubacujemo gornju jednadžbu u jednadžbu (3.59) te dobivamo:

$$\tilde{J}^*\left(k\delta, \vec{x}\right) = \min_{\vec{u}\in\mathcal{U}} \left[g\left(\vec{x}, \vec{u}\right) \cdot \delta + \tilde{J}^*\left(k\delta, \vec{x}\right) + \delta\, \partial_t \tilde{J}^* + \left(\delta \vec{f}\left(\vec{x}, \vec{u}\right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}}\right) \tilde{J}^* + o(\delta) \right] . \tag{3.61}$$

Oduzimajući $\tilde{J}^*$ s lijeve i desne strane jednadžbe, dijeljenjem s δ, puštanjem limesa $\delta \to 0$ te korištenjem ekvivalencije diskretnog i neprekidnog rješenja:

$$\lim_{k\to+\infty,\, \delta\to 0,\, k\delta=t} \tilde{J}^*\left(k\delta, \vec{x}\right) = J^*\left(t, \vec{x}\right) , \tag{3.62}$$

dobivamo sljedeću jednadžbu za optimalnu funckiju troška kontinualnog problema $J^*\left(t, \vec{x}\right)$:

$$0 = \min_{\vec{u}\in\mathcal{U}} \left[g\left(\vec{x}, \vec{u}\right) + \partial_t J^*\left(t, \vec{x}\right) + \left(\vec{f}\left(\vec{x}, \vec{u}\right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}}\right) J^*\left(t, \vec{x}\right) \right] , \tag{3.63}$$

s rubnim uvjetom $J^*\left(T, \vec{x}\right) = h\left(\vec{x}\right)$. Jednadžba (3.63) se naziva *Hamilton-Jacobi-Bellmanova* jednadžba.

Propozicija 3.2.2

Neka je $V\left(t, \vec{x}\right)$ rješenje HJB jednadžbe. Preslikavanje $V\left(t, \vec{x}\right)$ je tada glatko obzirom na t i $\vec{x}$ te zadovoljava:

$$0 = \min_{\vec{u}\in\mathcal{U}} \left[g\left(\vec{x}, \vec{u}\right) + \partial_t V\left(t, \vec{x}\right) + \left(\vec{f}\left(\vec{x}, \vec{u}\right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}}\right) V\left(t, \vec{x}\right) \right] , \tag{3.64}$$

$$V\left(T, \vec{x}\right) = h\left(\vec{x}\right) . \tag{3.65}$$

Neka je također $\vec{\mu}^*\left(t, \vec{x}\right)$ kontrolna funkcija toka koja minimizira jednadžbu (3.64) za svaki $t \in [0, T]$ i $\vec{x} \in \mathfrak{X} \subseteq \mathbb{R}^n$. Nadalje, neka je $\vec{x}^*(t)$ trajektorija u konfiguracijskom prostoru, dobivena iz početnog uvjeta $\vec{x}(0)$ te kontrolne trajektorije $\vec{u}^*(t) = \vec{\mu}^*\left(t, \vec{x}^*(t)\right)$. Pretpostavivši da jednadžba evolucije dinamičkog sistema:

$$\dot{\vec{x}}^*(t) = \vec{f}\left(\vec{x}^*(t), \vec{\mu}^*\left(t, \vec{x}^*(t)\right)\right) , \tag{3.66}$$

ima jedinstveno rješenje te da je kontrolna trajektorija $\vec{\mu}^*\left(t, \vec{x}^*(t)\right)$ barem po dijelovima neprekidna, tada $V\left(t, \vec{x}\right)$ odgovara optimalnoj funkciji troška:

$$V\left(t, \vec{x}\right) = J^*\left(t, \vec{x}\right) \tag{3.67}$$

te je kontrolna trajektorija $\vec{u}^*(t)$ optimalna.

U izvodu jednadžbe smo koristili pretpostavku da je optimalna funkcija troška kao rješenje kontinualnog problema glatko preslikavanje, što u potpuno općenitom slučaju ne mora biti zadovoljeno. Obzirom na navedeno, naš je pristup malo drukčiji. Naime, ukoliko uspijemo analitički ili numerički naći rješenje HJB jednadžbe, minimizacijom desne strane dobivamo optimalnu funkciju troška.

Dokaz *Propozicije 3.2.2*:

Neka je $\vec{u}(t)$ proizvoljna kauzalna kontrolna trajektorija te neka je $\vec{x}(t)$ odgovarajuća trajektorija u konfiguracijskom prostoru. Koristeći jednadžbu (3.64) zaključujemo da vrijedi:

$$0 \leq g\left(\vec{x}(t), \vec{u}(t)\right) + \partial_t V\left(t, \vec{x}\right) + \left(\vec{f}\left(\vec{x}(t), \vec{u}(t)\right) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}}\right) V\left(t, \vec{x}(t)\right) \ . \tag{3.68}$$

Koristeći evolucijsku jednadžbu dinamičkog sistema $\dot{\vec{x}} = \vec{f}\left(\vec{x}(t), \vec{u}(t)\right)$, možemo u zadnja dva člana prepoznati totalnu derivaciju obzirom na vrijeme:

$$0 \leq g\left(\vec{x}(t), \vec{u}(t)\right) + \frac{\mathrm{d}V\left(t, \vec{x}(t)\right)}{\mathrm{d}t} \ . \tag{3.69}$$

Integriramo gornji izraz po cijeloj vremenskoj domeni te dobivamo:

$$0 \leq \int_0^T \mathrm{d}t \cdot g\left(\vec{x}(t), \vec{u}(t)\right) + V\left(T, \vec{x}(T)\right) + V\left(0, \vec{x}(0)\right) \ . \tag{3.70}$$

Koristeći rubni uvjet $V\left(T, \vec{x}(T)\right) = h\left(\vec{x}(T)\right)$ imamo:

$$V\left(0, \vec{x}(0)\right) \leq h\left(\vec{x}(T)\right) + \int_0^T \mathrm{d}t \cdot g\left(\vec{x}(t), \vec{u}(t)\right) \ . \tag{3.71}$$

Ukoliko konkretiziramo kontrolnu trajektoriju i trajektoriju u konfiguracijskom prostoru kao da su optimalne, gornja nejednakost postaje jednakost te imamo:

$$V\left(0, \vec{x}(0)\right) = h\left(\vec{x}^*(T)\right) + \int_0^T \mathrm{d}t \cdot g\left(\vec{x}^*(t), \vec{u}^*(t)\right) \ . \tag{3.72}$$

Gornjom smo jednakosti pokazali ekvivalenciju između $V\left(0, \vec{x}(0)\right)$ i optimalne funkcije troška $J^*\left(0, \vec{x}(0)\right)$. Prijašnji argument vrijedi za svako

vrijeme i koordinatu konfiguracijskog prostora stoga pišemo:

$$V\left(t,\vec{x}(t)\right)=J^{*}\left(t,\vec{x}(t)\right)\ , \tag{3.73}$$

čime smo pokazali rezultat *Propozicije 3.2.2.*

Q.E.D.

U nastavku ćemo na jednostavnom primjeru linearno kvadratnog sistema riješiti HJB jednadžbu. Dinamički sistem u našem primjeru definiramo evolucijskom jednadžbom:

$$\dot{\vec{x}}(t)=\hat{A}\cdot\vec{x}(t)+\hat{B}\cdot\vec{u}(t)\ , \tag{3.74}$$

gdje su $\hat{A}$ i $\hat{B}$ zadani operatori u problemu. Funkciju troška zadajemo preko terminalnog i općenitog operatora troška, redom $\hat{Q}_T$ i $\hat{Q}$ te operatora koji definira trošak zbog postupka kontrole $\hat{R}$:

$$\vec{x}^{T}(T)\cdot\hat{Q}_T\cdot\vec{x}(T)+\int_0^T \mathrm{d}t\cdot\left(\vec{x}^{T}(t)\cdot\hat{Q}\cdot\vec{x}(t)+\vec{u}^{T}(t)\cdot\hat{R}\cdot\vec{u}(t)\right)\ . \tag{3.75}$$

Operatori $\hat{Q}_T$ i $\hat{Q}$ su simetrični i pozitivno semidefinitni, dok je operator $\hat{R}$ simetričan i pozitivno definitan. Uvodimo HJB jednadžbu:

$$0=\min_{\vec{u}\in\mathbb{R}^m}\left[\vec{x}^{T}\cdot\hat{Q}\cdot\vec{x}+\vec{u}^{T}\cdot\hat{R}\cdot\vec{u}+\partial_t V(t,\vec{x})+\left(\left(\hat{A}\cdot\vec{x}+\hat{B}\cdot\vec{x}\right)\cdot\vec{\nabla}_{\vec{x}}\right)V(t,\vec{x})\right]\ , \tag{3.76}$$

uz rubni uvjet:

$$V(T,\vec{x})=\vec{x}^{T}\cdot\hat{Q}_T\cdot\vec{x}\ . \tag{3.77}$$

Rješenje tražimo vremenski ovisnim *ansatzom* simetričnog operatora $\hat{K}(t)$:

$$V(t,\vec{x})=\vec{x}^{T}\cdot\hat{K}\cdot\vec{x}\ . \tag{3.78}$$

Djelovanjem gradijenta u prostoru i vremenu na pretpostavljeno rješenje te uvrštavanjem u jednadžbu (3.76) dobivamo HJB jednadžbu oblika:

$$0=\min_{\vec{u}\in\mathbb{R}^m}\left[\vec{x}^{T}\cdot\hat{Q}\cdot\vec{x}+\vec{u}^{T}\cdot\hat{R}\cdot\vec{u}+\vec{x}^{T}\cdot\dot{\hat{K}}(t)\cdot\vec{x}+2\vec{x}^{T}\cdot\hat{K}(t)\hat{A}\cdot\vec{x}+2\vec{x}^{T}\cdot\hat{K}(t)\hat{B}\cdot\vec{u}\right]\ . \tag{3.79}$$

Desna strana jednadžbe se minimizira tada kada je zadovoljeno da je gradijent po $\vec{u}$ trivijalan čime dobivamo:

$$2\hat{B}^T\hat{K}(t)\cdot x + 2\hat{R}\cdot\vec{u} = 0\ , \tag{3.80}$$

sređivanjem gornjeg izraza imamo relaciju koja definira $\vec{u}$, koji minimizira desnu stranu jednadžbe (3.79):

$$\vec{u} = -\hat{R}^{-1}\hat{B}^T\hat{K}(t)\cdot\vec{x}\ . \tag{3.81}$$

Uvrštavanjem jednadžbe (3.81) u jednadžbu (3.79) imamo:

$$0 = \vec{x}^T\cdot\left(\dot{\hat{K}}(t) + \hat{K}(t)\hat{A} + \hat{A}^T\hat{K}(t) - \hat{K}(t)\hat{B}\hat{R}^{-1}\hat{B}^T\hat{K}(t) + \hat{Q}\right)\cdot\vec{x}\ . \tag{3.82}$$

Pomoću jednadžbe (3.82) dolazimo do matrične obične diferencijalne jednadžbe za $\hat{K}$:

$$\dot{\hat{K}}(t) + \hat{K}(t)\hat{A} + \hat{A}^T\hat{K}(t) - \hat{K}(t)\hat{B}\hat{R}^{-1}\hat{B}^T\hat{K}(t) + \hat{Q} = 0\ , \tag{3.83}$$

s terminalnim uvjetom $\hat{K}(T) = \hat{Q}_T$. Koristeći *Propoziciju 3.2.2* zaključujemo kako je optimalna funkcija troška dana izrazom:

$$J^*(t,\vec{x}) = \vec{x}^T\cdot\hat{K}(t)\cdot\vec{x} \tag{3.84}$$

te da je optimalna kontrolna funkcija toka dana relacijom:

$$\vec{\mu}^*(t,\vec{x}) = -\hat{R}^{-1}\hat{B}^T\hat{K}(t)\cdot\vec{x}(t)\ . \tag{3.85}$$

3.3 Feynmanovi integrali po putovima i dinamičko programiranje

U prošlom smo potpoglavlju obradili algoritam dinamičkog programiranja te ga povezali s općenitim rješenjem za funkciju troška na neprekidnoj vremenskoj domeni koja je dana HJB jednadžbom. Po definiciji optimalno rješenje je bilo zadano optimizacijskim problemom oblika:

$$J^*(t,\vec{x}) = \min_{\pi}\ \mathop{\mathbb{E}}_{\vec{\omega}\in\Omega}\left\{h(\vec{x}(T)) + \int_0^T \mathrm{d}t\cdot g(\vec{x}(t),\vec{\mu}(\vec{x}(t)),\vec{\omega})\right\}\ , \tag{3.86}$$

gdje je nomenklatura ista kao i u prethodnom potpoglavlju gdje je i objašnjena. Vidimo da se u gornjem izrazu vrši minimizacija po kontrolnom zakonu što je skup kontrolnih funkcija toka. Navedene su funkcije toka preslikavanja s trajektorija u konfiguracijskom prostoru na kontrolne trajektorije. Princip koji odgovara gornjem opisu problematike jest varijacija po integralu puta što smo u detalje obradili u prethodnom poglavlju. Tamo smo svakom putu, odnosno trajektoriji u konfiguracijskom prostoru, pridodjelili određenu realnu vrijednost koja se pokušava minimizirati. Formalizam integrala po putovima jest u fiziku uveo Richard Feynman u svom alternativnom opisu kvantne mehanike. Naime, osnovna je ideja smanjiti restrikciju sistemu da mora svojom evolucijom zadovoljavati Euler-Lagrange jednadžbe, već da dinamički sistem može propagirati proizvoljnom trajektorijom konfiguracijskog prostora, ali da svaka trajektorija nosi odgovarajuću amplitudu vjerojatnosti koja je dana eksponencijalom akcije. Sam formalizam uključuje diskretizaciju vremenske domene, bez čega ne bi mnogi zaključci bili ostvarivi te se na kraju računa puštaju limesi u neprekidnu vremensku domenu. Formalizam integrala po putovima nema rigoroznu matematičku formulaciju zbog svoje kompleksnosti po prirodi. Dobro definirani integrali po putovima jesu jedino oni koji su definirani na Euklidskom vremenu, obzirom da je težinski faktor asimptotski eksponencijalno atenuirajući. Za razliku od njega, na fizikalnom Lorenzijanskom vremenu se javlja undulatorni težinski faktor čiji asimptotski integrali ne konvergiraju nužno. U narednom ćemo potpoglavlju izvesti popravku drugog reda na HJB jednadžbu te argumentirati intuitivnu restrikciju navedenih doprinosa HJB jednadžbi. Nadalje, uvesti ćemo jezgru evolucije dinamičkog sistema te koristeći prijašnje rezultate izvesti optimalnu funkciju troška kao Feynmanov integral po putu.

U prijašnjem smo potpoglavlju izveli HJB jednadžbu ograničivši se do prvog reda varijacije u vremenu. Ukoliko uzmemo u obzir da je naš sistem zadan stohastičkim sustavom Langevinovih jednadžbi:

$$\mathrm{d}\vec{x} = \vec{b}(\vec{x}(t), \vec{u}(t), t)\mathrm{d}t + \mathrm{d}\vec{\xi}\ , \tag{3.87}$$

gdje su ξ_i Wienerovi procesi, dodatni kvadratni član dolazi u obliku traga:

$$\mathrm{Tr}\left[\hat{H}_{J^*}\hat{\lambda^T}\right]\ . \tag{3.88}$$

U gornjoj je jednadžbi $\hat{H}_{J^*}$ Hessian sistema, dok je $\hat{\lambda}$ matrica korelacijske funkcije spomenutih Wienerovih procesa $\langle \mathrm{d}\xi_i \mathrm{d}\xi_j \rangle = \lambda_{ij}\mathrm{d}t$. Izvod dodatnog člana iz jednadžbe (3.88) se nalazi u *Dodatku A*. HJB jednadžba zajedno s dodatnim član poprima oblik:

$$-\partial_t J^*(\vec{x},t) = \min_{\vec{u}\in\mathcal{U}} \left\{ g(\vec{x}(t),\vec{u}(t),t) + \left(\vec{b}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{x}} J^*(\vec{x},t)\right) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\hat{H}_{J^*}\hat{\lambda}^T\right] \right\} . \tag{3.89}$$

Sagledajmo dalje specifični problem linearan u kontroli:

$$\mathrm{d}\vec{x} = \left(\vec{b}(\vec{x},t) + \hat{B}\cdot\vec{u}(t)\right)\mathrm{d}t + \mathrm{d}\vec{\xi} \, , \tag{3.90}$$

s funkcijom penala g oblika:

$$g(\vec{u}(t)) = \frac{1}{2}\vec{u}^T(t)\cdot\hat{R}\cdot\vec{u}(t) + \hat{V}(\vec{x}(t),t) \, , \tag{3.91}$$

gdje je $\hat{B}$, $n\times m$ konstantna matrica, dok je $\hat{R}$, $m\times m$ matrica te da je $\hat{R}$ element opće linearne grupe $\hat{R}\in \mathrm{GL}(m,\mathbb{R})$. Problemu se dalje pristupa na način da se promatra minimizacija po kontroli, odnosno da se zahtjeva da je gradijent po $\vec{u}$ od desne strane HJB jednadžbe trivijalan. Raspisivanjem navedenog zahtjeva dolazimo do sljedećeg izraza za optimalnu kontrolnu trajektoriju:

$$\vec{u}^*(\vec{x},t) = -\hat{R}^{-1}\hat{B}^T\cdot\vec{\nabla}_{\vec{x}} J^*(\vec{x},t) \, . \tag{3.92}$$

Uvrštavanjem gornje jednakosti u jednadžbu (3.89) dobivamo nelinearnu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu za optimalnu funkciju troška. Uvodimo supstituciju $J^*(\vec{x}(t),t) = \chi\ln\psi(\vec{x},t)$ te namećemo zahtjev oblika:

$$\hat{\lambda} = \chi\hat{B}\hat{R}^{-1}\hat{B}^T \, . \tag{3.93}$$

Gornjim manipulacijama HJB jednadžbe (3.89) se dolazi do pojednostavljenog oblika jednadžbe za varijablu ψ:

$$\partial_t\psi(\vec{x},t) = \left(\frac{\hat{V}}{\chi} - \left(\vec{b}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{x}}\right) - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\hat{\lambda}^T\vec{\nabla}^2_{\vec{x}}\right]\right)\psi(\vec{x},t) \, , \tag{3.94}$$

s rubnim uvjetom koji se nasljeđuje od optimalne funkcije troška, oblika:

$$\psi(\vec{x}(T), T) = \exp\left(-\frac{h(\vec{x}(T))}{\chi}\right) . \tag{3.95}$$

Izraz u zagradi, u jednadžbi (3.94) možemo shvatiti kao analogon fizikalnog Hamiltonijana. Pojasnimo sada intuiciju iza nametanja uvjeta (3.93) na jednostavnijem primjeru problematike na kojem možemo lakše doći do zaključaka. Naime, uzmimo da $\hat{B}$ trivijalno transformira $\hat{R}$ te da su $\hat{R}$ i $\hat{\lambda}$ dijagonalne matrice. Također, recimo da imamo jednak broj kontrola kao i stohastičkih parametara. U tom slučaju imamo $\lambda_{ii} \propto 1/R_{ii}$. Ukoliko se sjetimo da nam R_{ii} govori o jakosti penaliziranja kontrole u $i-$tom ortogonalnom smjeru generaliziranog kontrolnog prostora te da nam λ_{ii} govori o varijanci odabranog stohastičkog parametra, možemo zaključiti kako je penaliziranje vršenja kontrole u smjeru male devijacije stohastičkog parametra od trivijalnog očekivanja veliko, dok je penalizacija mala u smjeru velike varijance. Navedeno ima smisla obzirom da mala penalizacija omogućuje opširniju primjenu kontrole, a mala se penalizacija javlja u smjeru velike varijance.

Osnovni pojam u Feynmanovom formalizmu integrala po putovima jest jezgra evolucije. Jezgra evolucije jest propagator distribucija vjerojatnosti, odnosno u najopćenitijem smislu u kvantnoj se mehanici definira kao preklop operatora vremenske evolucije:

$$\mathcal{K}(\vec{x}_f, \vec{x}_i; t_f, t_i) = \langle \vec{x}_f | \, e^{-\frac{i}{\hbar}(t_f - t_i)\hat{H}} \, | \vec{x}_i \rangle \ , \tag{3.96}$$

gdje je $\hat{H}$, Hamiltonijan fizikalnog sistema, te su $\vec{x}_i$ i $\vec{x}_f$ početno i konačno stanje sistema. Djelovanje operatora vremenske evolucije na stanje sistema $|\psi\rangle$ možemo raspisati evoluciju stanja ubacivanjem potpunog skupa te razvijanjem po bazi stanja sistema $|\vec{x}\rangle$:

$$\exp\left(-\frac{i}{\hbar}(t_f - t_i)\hat{H}\right) |\psi(t_i)\rangle = |\psi(t_f)\rangle \ , \tag{3.97}$$

$$\int \mathrm{d}^n \vec{x}' \cdot \langle \vec{x}| \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(t_f - t_i)\hat{H}\right) |\vec{x}'\rangle \, \langle \vec{x}' \, |\psi(t_i)\rangle = \langle \vec{x} \, |\psi(t_f)\rangle \ . \tag{3.98}$$

U gornjoj jednadžbi možemo prepoznati definiciju jezgre evolucije te razvoja stanja po bazi $\vec{x}$ te pišemo:

$$\int \mathrm{d}^n \vec{x}' \cdot \mathcal{K}(\vec{x}, \vec{x}'; t_f, t_i)\psi(\vec{x}', t_i) = \psi(\vec{x}, t_f) \ . \tag{3.99}$$

Odnosno prema gornjoj jednakosti jezgra evolucije nam evoluira stanje sistema. Iste principe koji su baza Feynmanovog formalizma možemo koristiti kako bi našli našu supstitucijsku funkciju $\psi(\vec{x},t)$, obzirom na to da ju znamo u konačnom trenutku vremenske domene te kroz uvjet (3.95) navedenu ovisnost možemo evoluirati unatrag u vremenu. Navedeno možemo napraviti jer je jednadžba (3.94) invarijantna na vremensku paritetnu transformaciju:

$$\psi(\vec{x}(t),t) = \int \mathrm{d}^n\vec{y}\cdot\mathcal{K}(\vec{y},\vec{x};T,t)e^{-\frac{1}{\chi}h(\vec{y})}\ , \tag{3.100}$$

gdje je gornji integral po svim mogućim konačnim stanjima dinamičkog sistema $\vec{y}$. Optimalna funkcija troška se tada povezuje s gornjoj jednadžbom kao:

$$J^*(\vec{x}(t),t) = -\chi\ln\left(\int \mathrm{d}^n\vec{y}\cdot\mathcal{K}(\vec{y},\vec{x};T,t)e^{-\frac{1}{\chi}h(\vec{y})}\right)\ . \tag{3.101}$$

Sljedeći nam je zadatak pronaći jezgru evolucije za problem linearan u kontroli te kvadratan u funkciji penalizacije g koji smo uveli ranije u potpoglavlju. Za infinitezimalni pomak u vremenu će nam jezgra evolucije biti dana Gaussijanom, kao integral po svim zamislivim realizacijama Wienerovih procesa koje promatramo:

$$\mathcal{K}(\vec{y},\vec{x};t+\varepsilon,t)\propto\ \exp\left[-\frac{\varepsilon}{\chi}\left(\left(\frac{\vec{y}-\vec{x}}{\varepsilon}-\vec{b}\right)^T\cdot\hat{R}\cdot\left(\frac{\vec{y}-\vec{x}}{\varepsilon}-\vec{b}\right)+\hat{V}(\vec{x},t)\right)\right]\ . \tag{3.102}$$

Za Gaussijanske jezgre evolucije postoji rezultat koji nećemo pokazivati, a radi se o kontrakcijskim pravilima:

$$\mathcal{K}(\vec{x}_1,\vec{x}_3;t_1,t_3) = \int \mathrm{d}^n\vec{x}_2\cdot\mathcal{K}(\vec{x}_1,\vec{x}_2;t_1,t_2)\mathcal{K}(\vec{x}_2,\vec{x}_3;t_2,t_3)\ . \tag{3.103}$$

Goristeći gonji rezultat možemo konačnu transformaciju u vremenskom pravcu zapisati kao niz kontrakcija infinitezimalnih. Konfiguracijski se prostor u početku argumenta diskretizira na konačan broj članova, no na kraju se pušta limes u kontinualni prostor:

$$\mathcal{K}(\vec{y},\vec{x};T,t)\propto\int \mathrm{d}^n\vec{x}_1...\mathrm{d}^n\vec{x}_{N-1}\exp\left\{-\frac{\varepsilon}{\chi}\sum_{j=0}^{N-1}\left[\left(\frac{\vec{x}_{j+1}-\vec{x}_j}{\varepsilon}-\vec{b}\right)^T\cdot\hat{R}\cdot\left(\frac{\vec{x}_{j+1}-\vec{x}_j}{\varepsilon}-\vec{b}\right)+\right.\right.$$

$$+ \hat{V}(\vec{x}_j, t)\Big]\Bigg\} \,. \tag{3.104}$$

Puštanjem limesa kada $\varepsilon \to 0$ suma u argumentu eksponencijale postaje integral. Podintegralnu funkciju možemo prepoznati kao analogon fizikalnog Lagrangijana te bi stoga cijeli izraz bio eksponencijala akcije do na predfaktor dimenzionalnosti i skaliranja sistema pa pišemo:

$$\mathcal{K}(\vec{x}_2, \vec{x}_1; t_2, t_1) = \int_{\mathbf{x}(t_1)=\vec{x}_1}^{\mathbf{x}(t_2)=\vec{x}_2} \mathcal{D}\mathbf{x} \cdot e^{-\frac{1}{\chi}\mathcal{S}_{path}(\mathbf{x}(t_1 \to t_2))} \,, \tag{3.105}$$

gdje je $\mathcal{D}\mathbf{x}$ integralna mjera dana s:

$$\mathcal{D}\mathbf{x} = \lim_{\varepsilon \to 0, N \to +\infty} \prod_{j=0}^{N-1} \mathcal{N} \cdot \mathrm{d}^n \vec{x}_j \,. \tag{3.106}$$

Integracija po integralnoj mjeri iz gornje se jednadžbe prirodno interpretira kao integral po svim zamislivim trajektorijama u konfiguracijskom prostoru promatranog dinamičkog sistema. U gornjoj je jednadžbi $\mathcal{N}$ normalizacija koja se javlja još kod definicije jezgre evolucije za infinitezimalnu translaciju u vremenu, no navedena normalizacija se krati u svim računima te ju je stoga jednostavnije staviti u integralnu mjeru te je tako eliminirati iz računa. Kombinirajući jednadžbe (3.101) te (3.105) dobivamo izraz za optimalnu funkciju troška u Feynmanovom zapisu pomoću integrala po putovima:

$$J^*(\vec{x}', t') = -\chi \ln \left\{ \int_{\mathbf{x}(t')=\vec{x}'} \mathcal{D}\mathbf{x} \cdot e^{-\frac{1}{\chi}\mathcal{S}(\mathbf{x}(t' \to T))} \right\} . \tag{3.107}$$

U gornjem je izrazu integracija po svim putovima koji prolaze kroz $\vec{x}'$ stanje u trenutku t', dok nema ograničenja na stanje u konačnom trenutku vremenske evolucije T. Akcija $\mathcal{S}$, u izrazu (3.107) jest sabirna akcija, akcije po putu i terminalnog doprinosa h:

$$\mathcal{S}(\vec{x}(t \to T)) = h(\vec{x}(T)) + \mathcal{S}_{path}(\vec{x}(t \to T)) \,. \tag{3.108}$$

Gornjim smo izvodom povezali teoriju optimalne kontrole, HJB jednadžbu te Feynmanov formalizam integrala po putovima.

3.4 Pontryaginov princip maksimalnosti

Još jedan od osnovnih principa optimizacije dinamičkih sistema jest upravo Pontryaginov princip maksimalnosti, odnosno minimalnosti, ovisno o konvenciji naziva. U nastavku predstavljamo princip minimalnosti kroz argumente usko vezane za algoritam dinamičkog programiranja i HJB jednadžbu. Ono što ćemo primijetiti jest da se može povući puno paralela između navedenog principa maksimalnosti i Hamiltonovog formalizma.

Sjetimo se HJB problema:

$$0 = \min_{\vec{u}\in\mathcal{U}} \left[g(\vec{x},\vec{u}) + \partial_t J^*(\vec{x},t) + \left(\vec{f}(\vec{x},\vec{u})\cdot\vec{\nabla}_{\vec{x}}\right) J^*(\vec{x},t) \right] , \tag{3.109}$$

uz rubni uvjet:

$$J^*(T,\vec{x}(T)) = h(\vec{x}) . \tag{3.110}$$

Osnovni nam je zadatak naći kontrolnu trajektoriju koju trebamo izvršiti nad sistemom kako bi optimizirali funkciju troška. Imajući to na umu jednadžbu (3.109) ćemo prepisati kao:

$$\vec{u}^*(t) = \arg\min_{\vec{u}\in\mathcal{U}} \left[g(\vec{x}^*(t),\vec{u}(t)) + \left(\vec{f}(\vec{x}^*(t),\vec{u}(t))\cdot\vec{\nabla}_{\vec{x}}\right) J^*(\vec{x}^*(t),t) \right] . \tag{3.111}$$

Obzirom na to da tražimo argument od minimizacijskog problema (3.109), nije potrebno naći sve članovi koji ne ovise o kontroli na cijeloj domeni već samo u određenoj točki, odnosno uređenom paru $(\vec{x},t)$, kako bi našli optimalnu kontrolnu trajektoriju. Specifično u jednadžbi (3.111) se tu misli na usmjereni gradijent po stanju dinamičkog sistema $\vec{x}$ optimalne funkcije troška, obzirom na to da taj član ovisi samo o optimalnoj trajektoriji u konfiguracijskom prostoru $\vec{x}^*$ i vremenu t.

Lema 3.4.1

Neka je $F(t,\vec{x},\vec{u})$ glatka funkcija na $t\in\mathbb{R}$, $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$ te $\vec{u}\in\mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^m$. Također neka je $\mathcal{U}$ konveksan podskup $\mathbb{R}^m$. Nadalje, pretpostavimo da je optimalna kontrolna funkcija toka glatka funkcija u svojim varijablama $\vec{\mu}^*(\vec{x},t)$ takva da:

$$\vec{\mu}^*(t,\vec{x}) = \arg\min_{\vec{u}\in\mathcal{U}} F(t,\vec{x},\vec{u}) , \tag{3.112}$$

tada vrijedi:

$$\partial_t \left\{ \min_{\vec{u}\in\mathcal{U}} F(t,\vec{x},\vec{u}) \right\} = \partial_t F(t,\vec{x},\vec{\mu}^*(t,\vec{x})) \ , \tag{3.113}$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}} \left\{ \min_{\vec{u}\in\mathcal{U}} F(t,\vec{x},\vec{u}) \right\} = \vec{\nabla}_{\vec{x}} F(t,\vec{x},\vec{\mu}^*(t,\vec{x})) \ . \tag{3.114}$$

Pokazuje se da je učestalo jednostavnije naći navedeni usmjereni gradijent optimalne funkcije troška nego što je naći rješenje HJB jednadžbe te stoga razvijamo princip minimalnosti. Prije no što izvedemo princip minimalnosti moramo uvesti sljedeći rezultat u obliku *Leme 3.4.1*. Dokaz *Leme 3.4.1* dajemo u *Dodatku B*. Ideja jest nekako svesti HJB jednadžbu na sistem $2n$ običnih diferencijalnih jednadžbi. To radimo na način da primjenjujemo *Lemu 3.4.1* na HJB jednadžbu (3.109), točnije prvo djelujemo parcijalnom derivacijom po vremenu na navedenu jednadžbu te potom gradijentom po stanju konfiguracijskog prostora i koristimo rezultat *Leme 3.4.1*:

$$0 = \partial_t^2 J^*(t,\vec{x}) + \left(\vec{f}(\vec{x},\vec{\mu}^*(t,\vec{x}))\cdot\vec{\nabla}_{\vec{x}}\right)\partial_t J^*(t,\vec{x}) \ , \tag{3.115}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & \vec{\nabla}_{\vec{x}}\, g(\vec{x},\vec{\mu}^*(t,\vec{x})) + \vec{\nabla}_{\vec{x}}\left(\partial_t J^*(t,\vec{x})\right) + \left(\vec{f}(\vec{x},\vec{\mu}^*(t,\vec{x}))\cdot\vec{\nabla}_{\vec{x}}\right)\vec{\nabla}_{\vec{x}} J^*(t,\vec{x}) + \\ & + \left(\left(\vec{\nabla}_{\vec{x}} J^*(t,\vec{x})\right)\cdot\vec{\nabla}_{\vec{x}}\right)\vec{f}(\vec{x},\vec{\mu}^*(t,\vec{x})) + \vec{f}(\vec{x},\vec{\mu}^*(t,\vec{x}))\times\left(\vec{\nabla}_{\vec{x}}\times\left(\vec{\nabla}_{\vec{x}} J^*(t,\vec{x})\right)\right) + \\ & + \left(\vec{\nabla}_{\vec{x}} J^*(t,\vec{x})\right)\times\left(\vec{\nabla}_{\vec{x}}\times\vec{f}(\vec{x},\vec{\mu}^*(t,\vec{x}))\right) \ . \end{aligned} \tag{3.116}$$

U jednadžbi (3.115), ograničivši se na slučaj optimalne trajektorije u konfiguracijskom prostoru $\vec{x}^*(t) = \vec{f}(\vec{x}^*(t),\vec{u}^*(t))$, možemo prepoznati totalnu derivaciju po vremenu te isto tako u drugom i trećem članu jednadžbe (3.116):

$$\partial_t^2 J^*(t,\vec{x}) + \left(\dot{\vec{x}}^*(\vec{x},\vec{\mu}^*(t,\vec{x}))\cdot\vec{\nabla}_{\vec{x}}\right)\partial_t J^*(t,\vec{x}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\partial_t J^*(t,\vec{x}(t))\right) \ , \tag{3.117}$$

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}}\left(\partial_t J^*(t,\vec{x})\right) + \left(\dot{\vec{x}}^*(\vec{x},\vec{\mu}^*(t,\vec{x}))\cdot\vec{\nabla}_{\vec{x}}\right)\vec{\nabla}_{\vec{x}} J^*(t,\vec{x}) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\nabla}_{\vec{x}} J^*(t,\vec{x}^*(t))\right) \ . \tag{3.118}$$

Ukoliko definiramo generalizirane impulse kao:

$$\vec{p}(t) = \vec{\nabla}_{\vec{x}} J^*(t,\vec{x}^*(t)) \ , \tag{3.119}$$

$$p_0(t) = \partial_t J^*(t,\vec{x}^*(t)) \ . \tag{3.120}$$

Dalje koristimo pojednostavljenje u notaciji čije se ubacivanje u jednadžbu (3.116)

jednostavno može pokazati tenzorskim računom, oblika:

$$\mathbf{D}_{\vec{f}} = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1 & \dots & \partial_1 f_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_n f_1 & \dots & \partial_n f_n \end{pmatrix} . \tag{3.121}$$

Koristeći nove generalizirane impulse prijašnju HJB jednadžbu možemo prikazati kao sistem $2n$ običnih diferencijalnih jednadžbi, od kojih je n trivijalno:

$$\dot{\vec{p}}(t) = -\mathbf{D}_{\vec{f}} \cdot \vec{p}(t) - \vec{\nabla}_{\vec{x}} g\left(\vec{x}^*(t), \vec{u}^*(t)\right) \ , \tag{3.122}$$

$$\dot{p}_0(t) = 0 \equiv p_0(t) = \text{konst.} \ , \tag{3.123}$$

uz rubni uvjet analogan jednadžbi (3.110):

$$\vec{p}(T) = \vec{\nabla}_{\vec{x}} h(\vec{x}^*(t))\Big|_{t=T} \ . \tag{3.124}$$

Princip Minimalnosti

Neka su $\vec{u}^*$ i $\vec{x}^*$, optimalna kontrolna trajektorija i optimalna trajektorija konfiguracijskog prostora odabrane problematike:

$$\dot{\vec{x}}^*(t) = \vec{f}(\vec{x}^*(t), \vec{u}^*(t)), \quad \vec{x}^*(0) = \vec{x}_0, \ \text{zadano} \ . \tag{3.125}$$

Nadalje, neka su generalizirani impulsi dani Hamiltonovim jednadžbama:

$$\dot{\vec{p}}(t) = -\vec{\nabla}_{\vec{x}} \mathcal{H}(\vec{x}^*(t), \vec{u}^*(t), \vec{p}(t)) \ , \tag{3.126}$$

s rubnim uvjetima:

$$\vec{p}(T) = \vec{\nabla}_{\vec{x}}\, h(\vec{x}^*(t))\Big|_{t=T} \ , \tag{3.127}$$

gdje je h terminalna funkcija troška. Tada na cijeloj vremenskoj domeni $t \in [0, T]$ vrijedi:

$$\vec{u}^*(t) = \arg\min_{\vec{u} \in \mathcal{U}} \mathcal{H}(\vec{x}^*(t), \vec{u}(t), \vec{p}(t)) \ . \tag{3.128}$$

Nadalje postoji konstantni skalar C takav da:

$$\mathcal{H}(\vec{x}^*(t), \vec{u}^*(t), \vec{p}(t)) = C \ , \tag{3.129}$$

za svaki trenutak $t \in [0, T]$.

Definirajmo Hamiltonov funkcional koji preslikava s domene uređene trojke $(\vec{x}, \vec{u}, \vec{p}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ na skup realnih brojeva:

$$\mathcal{H}(\vec{x}, \vec{u}, \vec{p}) = g(\vec{x}, \vec{u}) + \vec{p} \cdot \vec{f}(\vec{x}, \vec{u}) \ . \tag{3.130}$$

U gornjoj jednadžbi možemo povući paralele s Legendrovim transformatom koji smo uveli u prošlom poglavlju. Trenutačna funkcija troška bi imala istu ulogu kao i Lagrangijan sistema, što je smisleno obzirom na to da je Lagrangijan funkcija čiji integral želimo minimizirati u definiciji akcije. Navedeno u potpunosti odgovara opisu preslikavanja g u definiciji optimalne funkcije troška. Ostatak jest trivijalno povezati, naime $\vec{p}$ smo već prozvali generaliziranim impulsima, dok je $\vec{f}$ po definiciji jednak $\dot{\vec{x}}$. U kompaktnijem zapisu pronalazimo analogone Hamiltonovih jednadžbi gibanja (2.41) i (2.42):

$$\dot{\vec{x}}^*(t) = \vec{\nabla}_{\vec{p}}\, \mathcal{H}(\vec{x}^*(t), \vec{u}^*(t), \vec{p}(t)) \ , \tag{3.131}$$

$$\dot{\vec{p}}(t) = -\vec{\nabla}_{\vec{x}}\, \mathcal{H}(\vec{x}^*(t), \vec{u}^*(t), \vec{p}(t)) \ . \tag{3.132}$$

Gornjim smo izvodom pokazali ideju iza Poyntraginovog principa minimalnosti te povukli analogone s fizikalnim Hamiltonovim jednadžbama gibanja.

4 Modeli tržista, funkcija korisnosti i mjere rizika

U narednom poglavlju uvodimo model tržišta te evolucije istog na diskretnoj i neprekidnoj vremenskoj domeni. Također, uvodimo funkciju korisnosti, argumentiramo njena svojstva i pridodajemo interpretaciju specifičnim ponašanjima iste. Važnost diskretizacije rezultata dobivenih na neprekidnoj domeni je ekstremna nevezano radi li se o računima s financijskom tematikom ili ne. Štoviše, računi na diskretnoj vremenskoj domeni su sjajno prilagođeni metodama u financijama obzirom na to da su podaci s tržišta diskretni u vremenu, odnosno ne postoji mogućnost kontinuiranog praćenja ponašanja tržišta. Postavlja se pitanje je li vremenski diskretni pristup pravilni pristup računima u financijama ili ne? Uzevši u obzir da je cilj uvijek pronaći egzaktno rješenje ili prići što bliže njemu, općenito bi načelo bilo da se izvode rezultati na neprekidnoj vremenskoj domeni te se oni potom diskretiziraju po volji, na proizvoljnu skalu diskretizacije.

4.1 Model tržišta na neprekidnoj vremenskoj domeni

Uvodimo vremensku domenu $\mathcal{T}$ te skup svih stanja stanja ekonomije $\mathcal{S}$ kao:

$$\mathcal{T} = [0, T] \ , \tag{4.133}$$

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbf{s}_t \in \mathbb{R}^n : t \in \mathcal{T} \right\} , \tag{4.134}$$

gdje je T vremenski horizont događaja te je $\mathbf{s}_t$ vektor koji sadrži potpunu informaciju o tržištu. Uvodimo prostor ishoda Ω kao skup svih preslikavanja s vremenske domene na skup stanja:

$$\Omega = \left\{ \omega : \mathcal{T} \to \mathcal{S} \right\} . \tag{4.135}$$

Postavivši relaciju ekvivalencije "*element $\mathcal{A}$ je istovremen elementu $\mathcal{B}$*" možemo razdijeliti skup Ω na klase ekvivalncije po vremenu, odnosno definiramo ovime vremensku particiju skupa Ω koja nije nužno kronološki uređena $(\mathcal{A}_t)_{t\in\mathcal{T}}$. Potpuna informacija o ekonomiji u trenutku t je dana *sigma-algebrom* generiranom elementom kvocjentnog skupa $\Omega \,/\sim$ za odabrani vremenski trenutak t:

$$\mathcal{F}_t = \sigma\left(\mathcal{A}_t\right) \ . \tag{4.136}$$

Općenita će particija skupa Ω uvijek ležati negdje između trivijalne sigma-algebre te partitivnog skupa:

$$\left\{\emptyset, \Omega\right\} \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{P}\left(\Omega\right) \ . \tag{4.137}$$

Gornji je zaključak ekvivalntan onomu da je očekivanje da će potpuna informacija o ekonomiji u trenutku t uvijek biti podskup potpune informacije na vremenskom horizontu te da će uvijek biti nadskup potpune informacije u početnom trenutku evolucije sistema. Drugim riječima, u početnom je trenutku potpuna informacija o sistemu dana trivijalnom sigma-algebrom skupa Ω, dok je u konačnom ona dana partitivnim skupom. Nadalje, važno je uvesti filtraciju, što je kronološki uređeni skup informacija sistema $\mathcal{F}_t$:

$$\mathbb{F} = \left(\mathcal{F}_t\right)_{t \in \mathcal{T}} \ . \tag{4.138}$$

Zadnji element prostora vjerojatnosti koji moramo uvesti jest vjerojatnosna mjera $\mathbf{P}$ takva da je $\mathbf{P}(\omega) > 0$, za svaki $\omega \in \Omega$. Sumarno, uvodimo vjerojatnosni prostor kao uređenu četvorku skupa stanja, skupa sigma-algebri informacija sistema, kronološke filtracije te vjerojatnosne mjere $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, \mathbf{P})$. Općenito će se portfelj u našem slučaju sastojati samo od dionica, neće biti uključeni nikakvi drugi oblici financijskih izvodnica. Razlikujemo dvije vrste ulaganja te će se portfelj po pretpostavci uvijek sastojati od jednog bezrizičnog ulaganja te proizvoljnog broja rizičnih ulaganja. Bezrizična ulaganja su ulaganja u državne obveznice po određenoj bezrizičnoj kamatnoj stopi r. Navedena bezrizična kamatna stopa može općenito ovisiti o vremenu te uvodimo deterministčku evoluciju ulaganja u državne obveznice kao:

$$\mathrm{d}S_t^0 = r_t S_t^0 \mathrm{d}t \ . \tag{4.139}$$

Indeks 0 se uobičajeno koristi za bezrizično ulaganje, dok $i \in \mathbb{N}$ općenito predstavljaju rizična ulaganja. Evolucija rizičnih ulaganja se uzima da je stohastička uz određeni deterministički driftni član:

$$\frac{\mathrm{d}S_t^i}{S_t^i} = \mu_t^i \mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{k} \sigma_t^{ij} \mathrm{d}W_t^j \ , \tag{4.140}$$

gdje je $i = 1, ..., n$, $\mathbf{W}_t$ uređena k-torka nezavisnih Wienerovih procesa te je indeks k prirodan broj takav da $k \leq n$. Sažeto bi gornju jednadžbu mogli zapisati kao:

$$\mathrm{d}\mathbf{S}_t = (\boldsymbol{\mu}_t \odot \mathbf{S}_t)\,\mathrm{d}t + (\hat{\sigma}_t \cdot \mathrm{d}\mathbf{W}_t) \odot \mathbf{S}_t \ , \tag{4.141}$$

gdje je $\odot$ znak za Hadamardov produkt, odnosno produkt vektora komponentu po komponentu. Umnožak $\hat{\sigma}_t\hat{\sigma}_t^T$ sadrži informaciju o varijanci i kovarijanci Wienerovih procesa. Kardinalnost određenog ulaganja u portfelju uvodimo kroz uređenu $(n+1)$-torku $\mathbf{x}$ koja nam govori koliko kojih dionica imamo u portfelju. Ukupna vrijednost portfelja će biti dana kao skalarni umnožak kardinalnosti ulaganja i vektora vrijednosti dionica u trenutku t:

$$V_t^{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{S} \ . \tag{4.142}$$

Također je korisno uvesti vektor $\boldsymbol{\theta}$ koje će nam govoriti o postotku vrijednosti portfelja koje je uloženo u određenu dionicu portfelja:

$$\boldsymbol{\theta}_t = \frac{\mathbf{x} \odot \mathbf{S}}{V_t} \ . \tag{4.143}$$

Gornja bi jednadžba u tenzorskom zapisu bila dana s:

$$\theta_t^i = \frac{x_t^i S_t^i}{V_t} \ . \tag{4.144}$$

Naravno suma svih komponenti vektora mora dati jedan. Diferencijal vrijednosti portfelja možemo zapisati pomoću jednadžbe (4.141) pretpostavljajući da nema vanjskog priljeva novca, odnosno da je diferencijal vektora $\mathbf{x}$ trivijalan:

$$\mathrm{d}V_t^{\mathbf{x}} = \mathbf{x} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} \ . \tag{4.145}$$

Gornju jednadžbu možemo zapisati pomoću vektora $\vec{\theta_t}$ kojeg smo uveli u jednadžbi (4.143):

$$\mathrm{d}V_t^{\boldsymbol{\theta}} = V_t^{\boldsymbol{\theta}} \left(\theta_t^0 \cdot \frac{\mathrm{d}S_t^0}{S_t^0} + \sum_{i=1}^{n} \theta_t^i \cdot \frac{\mathrm{d}S_t^i}{S_t^i} \right) - c_t \mathrm{d}t \ . \tag{4.146}$$

Zadnji član u gornjoj jednadžbi predstavlja troškove održavanja fonda. U osnovnim se računima navedeni član zanemaruje, no ukoliko se radi o dugotrajnijim vremenskim horizontima ili pedantnijim računima trebalo bi uzeti u obzir netrivijalne

troškove održavanja fonda. Uzimajući u obzir da suma svih udjela θ_t^i daje jedinicu gornju jednadžbu možemo zapisati koristeći samo udjele rizičnih ulaganja u portfelju:

$$\mathrm{d}V_t^{\boldsymbol{\theta}} = V_t^{\boldsymbol{\theta}} \left(\left(1 - \sum_{i=1}^{n} \theta_t^i \right) \cdot \frac{\mathrm{d}S_t^0}{S_t^0} + \sum_{i=1}^{n} \theta_t^i \cdot \frac{\mathrm{d}S_t^i}{S_t^i} \right) - c_t \mathrm{d}t \ . \tag{4.147}$$

Ukoliko bi jednadžbi (4.145) dodali član koji predstavlja troškove održavanja fonda, navedenu bi jednadžbu definirali uvjetom *"self financing"* strategije. Koristeći jednadžbe (4.139) i (4.141) možemo jednadžbu (4.147) zapisati kao:

$$\mathrm{d}V_t = V_t \cdot \left[\left(1 - \sum_{i=1}^{n} \theta_t^i \right) \cdot r_t \mathrm{d}t + (\boldsymbol{\theta}_t \cdot \boldsymbol{\mu}_t)\, \mathrm{d}t + (\boldsymbol{\theta}_t \cdot \hat{\sigma}_t \cdot \mathrm{d}\mathbf{W}_t) \right] - c_t \mathrm{d}t \ , \tag{4.148}$$

gdje je skalarni produkt zadnja dva člana u uglatoj zagradi po svim indeksima osim onog koji bi predstavljao bezrizični doprinos. Nadalje uvodimo skraćenicu koja će nam pojednostavljivati zapis pojedinih izraza na način da varijablu s povlakom iznad svoje oznake definiramo kao istu tu podijeljenu s vrijednosti bezrizičnog ulaganja S_t^0. Kao primjer jednadžbu (4.145) uz dodatni član troškova održavanja u novom zapisu možemo zapisati kao:

$$\mathrm{d}\bar{V}_t = \mathbf{x}_t \cdot \mathrm{d}\bar{\mathbf{S}}_t - \bar{c}_t \mathrm{d}t \ . \tag{4.149}$$

Integriranjem gornje jednadžbe po vremenu do određenog trenutka t unutar vremenske domene možemo dobiti izraz za $\bar{V}$ u tom trenutku:

$$\bar{V}_t = \bar{V}_0 + \int_0^t \mathrm{d}\bar{\mathbf{S}}_u \cdot \mathbf{x}_u - \int_0^t \mathrm{d}u \cdot \bar{c}_u \ . \tag{4.150}$$

Prvi član s desne strane gornje jednadžbe jest vrijednost portfelja u početnom trenutku, dok preostali članovi čine porast kapitala podijeljen bezrizičnim ulaganjem, odnosno:

$$\bar{G}_t = \int_0^t \mathrm{d}\bar{\mathbf{S}}_u \cdot \mathbf{x}_u - \int_0^t \mathrm{d}u \cdot \bar{c}_u \ , \tag{4.151}$$

$$\bar{V}_t = \bar{V}_0 + \bar{G}_t \ . \tag{4.152}$$

4.2 Model tržišta na diskretnoj vremenskoj domeni

U narednom ćemo potpoglavlju promotriti rezultate iz prošlog potpoglavlja ali na diskretnoj vremenskoj domeni. Definicija vjerojatnosnog prostora je ista kao i u prošlom

potpoglavlju do na to što se mijenja vremenska domena $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T} = \left\{ t \in \mathbb{N} : t < T \right\} . \tag{4.153}$$

U gornjoj jednadžbi te u narednim računima nam je općenita varijabla vremena bezdimenzionalna te diskretna, element skupa prirodnih brojeva manjih of horizonta T. Kao i prije bezrizično ulaganje evoluira deterministički kao:

$$S^0_{t+1} = (1 + r_t)\, S^0_t,\ t \in \mathcal{T} . \tag{4.154}$$

Za sva preostala ulaganja pretpostavljamo da prate stohastičku evoluciju oblika:

$$\mathbf{S}_t = \mathbf{S}_{t-1} \odot \boldsymbol{\xi}_t , \tag{4.155}$$

gdje je $\boldsymbol{\xi}_t$ n-torka nezavisnih slučajnih varijabli s identičnim distribucijama takve da je $\mathbf{S}_t$ Markovljev proces. Analogno razmatranjima na neprekidnoj vremenskoj domeni imamo:

$$V^{\mathbf{x}}_t = \mathbf{x} \cdot \mathbf{S} . \tag{4.156}$$

Ograničenje koje predstvalja strategiju samofinanciranja u diskretnom vremenu možemo zapisati kao:

$$V^{\mathbf{x}}_{t+1} - V^{\mathbf{x}}_t = \mathbf{x}_{t+1} \cdot (\mathbf{S}_{t+1} - \mathbf{S}_t) - c_t . \tag{4.157}$$

Koristeći jednadžbu (4.156) gornju jednakost možemo zapisati kao:

$$\mathbf{x}_t \cdot \mathbf{S}_t = \mathbf{x}_{t+1} \cdot \mathbf{S}_t + c_t . \tag{4.158}$$

Obzirom na to da se u definiciji udjela ulaganja, odnosno strategije $\boldsymbol{\theta}_t$ ništa ne mijenja, navedene izraze (4.143), odnosno (4.144) nema smisla ponovo pisati. Porast kapitala možemo zapisati kao sumu po promjenama vrijednosti portfelja:

$$G^{\mathbf{x}}_t = \sum_{\tau=0}^{t-1} \Delta V^{\mathbf{x}}_\tau , \tag{4.159}$$

odnosno ukoliko podijelimo obje strane jednadžbe s vrijednosti bezrizičnog ulaganja te ukoliko iskoristimo notaciju iz prošlog potpoglavlja za navedenu transformaciju,

dobivamo:

$$\bar{G}_t^{\mathbf{x}} = \sum_{\tau=0}^{t-1} \mathbf{x}_{\tau+1} \cdot \Delta\bar{\mathbf{S}}_\tau \ , \tag{4.160}$$

gdje smo uveli kraticu $\Delta\mathbf{S}_t = \mathbf{S}_{t+1} - \mathbf{S}_t$. Analogon jednadžbe (4.148) lako izvodimo diskretizacijom te pišemo:

$$V_{t+1}^{\boldsymbol{\theta}} = V_t^{\boldsymbol{\theta}} \cdot \left[\left(1 - \sum_{i=1}^{n} \theta_t^i \right) (1 + r_t) + \boldsymbol{\theta}_t \cdot \boldsymbol{\xi}_{t+1} \right] - c_t \ , \tag{4.161}$$

čime smo reproducirali sve rezultate iz prošlog potpoglavlja samo na diskretnoj vremenskoj domeni. Navedena diskretizacija uvelike ima smisla obzirom na diskretnu vremensku prirodu skupova podataka u financijama te iz razloga što se pretežito u računima oslanja na numeričke postupke koji su sami po sebi diskretni. Unatoč smislenosti, postavlja se pitanje treba li skala vremenske diskretizacije u numeričkim računima odgovarati skali mogućnosti mijenjanja fonda od strane voditelja fonda. Naime, pretpostavivši da voditelj fonda može jednom tjedno utjecati na strategiju ulaganja, postavlja se pitanje trebali li problem diskretizirati tako da nam je jedinični pomak $\Delta t = 7$ dana, ili težiti proizvoljno finoj diskretizaciji? Odgovor na navedeno pitanje nije jednoznačan te ovisi o tome iz kojeg se pogleda promatra problem. Ukoliko gledamo s gledišta rješavanja diferencijalnih jednadžbi metodom diskretizacije, uvijek će težnja biti reproducirati rezultat na što finijoj vremenskoj skali, no ukoliko se problem razmatra kroz gledište interpretacije rezultata numeričkih računa, više smisla ima zadržati vremensku skalu koja odgovara intervalima vremena između kojih voditelj fonda ne može mijenjati strategiju ulaganja.

4.3 Funkcija korisnosti voditelja investicijskog fonda

Pri selekciji optimalne strategije ulaganja općenito mora postojati određeni kriterij po kojemu će voditelj fonda moći procijeniti koja strategija je bolja, a koja je lošija. Očigledno, navedeni kriterij mora na neki način biti povezan sa stvarno opservabilnim posljedicama, odnosno kako god definirali naš kriterij moramo uz samu definiciju ponuditi i interpretaciju pojedinih režima ovisnosti koja definira dotični kriterij. S tim na umu uvodimo pojam *funkcije korisnosti*, dok će kriterij optimalnosti strategije biti dan maksimiziranjem navedene funkcije. Bez razmatranja funkcija korisnosti odabir strategija ulaganja se u principu svodi na osobni osjećaj voditelja fonda, što

nije nimalo pouzdan instrument odabira, obzirom na fenomenologiju vođenja fondova. Uz kriterij maksimizacije odabrane funkcije korisnosti, iz samog se ponašanja funkcije korisnosti može shvatiti razina tolerancije rizika od strane voditelja fonda. Kažemo da voditelj fonda nije sklon riziku ukoliko nije spreman prihvatiti bilo kakvu poštenu okladu. Pod poštenu se okladu misli na onaj tip evolucije gdje je očekivanje da neće biti promjene trenutnog stanja. Neka je V_0 početna vrijednost portfelja te neka je $U(V)$ funkcija korisnosti. Nadalje, uvedimo slučajnu varijablu porasta vrijednosti portfelja $\mathfrak{X}$ čije je očekivanje trivijalno. Uzevši u obzir prijašnju definiciju nesklonosti riziku slučaj u kojemu je vrijednost portfelja dana s V_0 bi bio preferiran onomu gdje početnoj vrijednosti pridodajemo slučajni doprinos $V_0 + \mathfrak{X}$. Preferencu voditelja fonda iskazujemo kroz odnos funkcije korisnosti za navedena dva slučaja, odnosno obzirom da riziku nesklon voditelj fonda više preferira ne riskirati funkcija vrijednosti bi trebala biti veća u tom slučaju:

$$U(V_0) \geq \mathop{\mathbb{E}}_{\mathfrak{X}}\Big\{U(V_0 + \mathfrak{X})\Big\} \, . \tag{4.162}$$

Gornju nejednakost ćemo zapisati na način da reproduciramo Jensenovu nejednakost čime automatski povezujemo nesklonost riziku voditelja fonda i konkavnost funkcije korisnosti:

$$U\left(\mathop{\mathbb{E}}_{\mathfrak{X}}\Big\{V_0 + \mathfrak{X}\Big\}\right) \geq \mathop{\mathbb{E}}_{\mathfrak{X}}\Big\{U(V_0 + \mathfrak{X})\Big\} \, . \tag{4.163}$$

Radi sveobuhvatnosti uz nužni i dovoljni Jensenov uvjet konkavnosti koji smo reproducirali u gornjoj jednadžbi, možemo od jednadžbe (4.162) restrikcijom također pokazati standardni uvjet konkavnosti:

$$U(V_0) \geq \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\mathfrak{X} \cdot \phi\left(\mathfrak{X}\right) U(V_0 + \mathfrak{X}) \, , \tag{4.164}$$

gdje je $\phi(\mathfrak{X})$ distribucija vjerojatnosti stohastičke varijable $\mathfrak{X}$. Početnu vrijednost portfelja također možemo zapisati kao:

$$V_0 = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\mathfrak{X} \cdot \phi(\mathfrak{X})(V_0 + \mathfrak{X}) \, , \tag{4.165}$$

znajući da je po pretpostavci očekivanje varijable $\mathfrak{X}$ trivijalno. Jednadžba (4.164) tada postaje:

$$U\left(\int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\mathfrak{X}\cdot\phi(\mathfrak{X})(V_0+\mathfrak{X})\right) \geq \int_{\mathbb{R}} \mathrm{d}\mathfrak{X}\cdot\phi\left(\mathfrak{X}\right)U(V_0+\mathfrak{X})\ . \tag{4.166}$$

Restrikcijom distribucije $\phi(\mathfrak{X})$ na sljedeći oblik:

$$\phi(\mathfrak{X}) = p\cdot\delta(\mathfrak{X}-\mathfrak{X}^{+}) + (1-p)\cdot\delta(\mathfrak{X}-\mathfrak{X}^{-})\ , \tag{4.167}$$

gdje je p vjerojatnost zauzeća $\mathfrak{X}^{+}$ stanja te komplement $\mathfrak{X}^{-}$ stanja, reproduciramo standardni uvjet konkavnosti funkcije jedne varijable:

$$U\left(p\cdot(V_0+\mathfrak{X}^{+}) + (1-p)\cdot(V_0+\mathfrak{X}^{-})\right) \geq p\cdot U(V_0+\mathfrak{X}^{+}) + (1-p)\cdot U(V_0+\mathfrak{X}^{-})\ . \tag{4.168}$$

Gornjim smo postupkom argumentirali vezu između nesklonosti riziku od strane voditelja fonda te konkavnosti njegove funkcije korisnosti.

Definicija 4.3.1 (Funkcija korisnosti)

Preslikavanje $U : \mathbb{R}^{+}\times\mathcal{T}\to\mathbb{R}$ takva da $U(\cdot,t)\in\mathcal{C}^{1}$, koje je strogo konkavno te zadovoljava:

$$U'(0,t) = \lim_{x\to 0} U'(x,t) > 0,\ \ U'(z,t) = 0\ , \tag{4.169}$$

za jedinstveni $z\in\langle\, 0,+\infty\,]$, nazivamo funkcijom korisnosti. Najčešće se ovisnost o vremenu izbacuje iz argumenta funkcije korisnosti.

Gornjim smo postupcima povezali nesklonost riziku voditelja fonda s konkavnosti njegove funkcije korisnosti. Ukoliko je navedeno točno, navedenu nesklonost voditelja fonda možemo mjeriti razinom konkavnosti funkcije. Imajući to na umu definiramo apsolutnu nesklonost riziku $A(V)$ kao:

$$A(V) = -\frac{U''(V)}{U'(V)}\ . \tag{4.170}$$

Što je apsolutna nesklonost riziku veća to je brži rast i pad funkcije korisnosti, odnosno ona je konkavnija. Obzirom na to da konkavnost mjeri sklonost voditelja fonda riziku, promatranjem konkavnosti funkcije korisnosti možemo zaključiti koliki će biti odnos rizičnih nasprem bezrizičnih ulaganja u portfelju promatranog voditelja fonda.

Ovisno o tome kako se ponaša prva derivacija apsolutne nesklonosti riziku razlikujemo tri tipa voditelja fonda kroz tri uvjeta. Ukoliko je:

1. $A'(V) > 0$, kako raste vrijednost portfelja voditelj fonda smanjuje udio uložen u rizične dionice.

2. $A'(V) = 0$, voditelj fonda ne mijenja udio uložen u rizične dionice kako se mijenja vrijednost portfelja.

3. $A'(V) < 0$, kako raste vrijednost portfelja voditelj fonda povećava udio uložen u rizične dionice.

Jensenova nejednakost, odnosno jednadžba (4.163) jest po definiciji prilagođena razmišljanju voditelja fonda koji je nesklon riziku. Ukoliko bi navedena nejednakost postala jednakost govorili bi o graničnom slučaju u kojemu je voditelj fonda indiferentan. Dotična indiferentnost se iskazuje na način da se voditelja fonda ili mora potaknuti monetarnom premijom da prihvati rizik ili će on sam platiti premiju na osiguravajući ugovor kao što je financijska opcija kako bi se osigurao rizika. Ukoliko iznos navedene premije označimo s λ, novopostignutu bi indiferentnost mogli zapisati kao:

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\mathfrak{X}}\Big\{U(V+\lambda+\mathfrak{X})\Big\} = U(V)\ , \tag{4.171}$$

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\mathfrak{X}}\Big\{U(V+\mathfrak{X})\Big\} = U(V-\lambda)\ . \tag{4.172}$$

Dvije funkcije korisnosti koje ćemo promotriti jesu kvadratna funkcija korisnosti te CRRA (*"constant relative risk aversion"*) funkcija korisnosti.

Kvadratnu funkciju korisnosti definiramo kao:

$$U(V) = \kappa V - (1-\kappa)\cdot(V-\psi)^2\ , \tag{4.173}$$

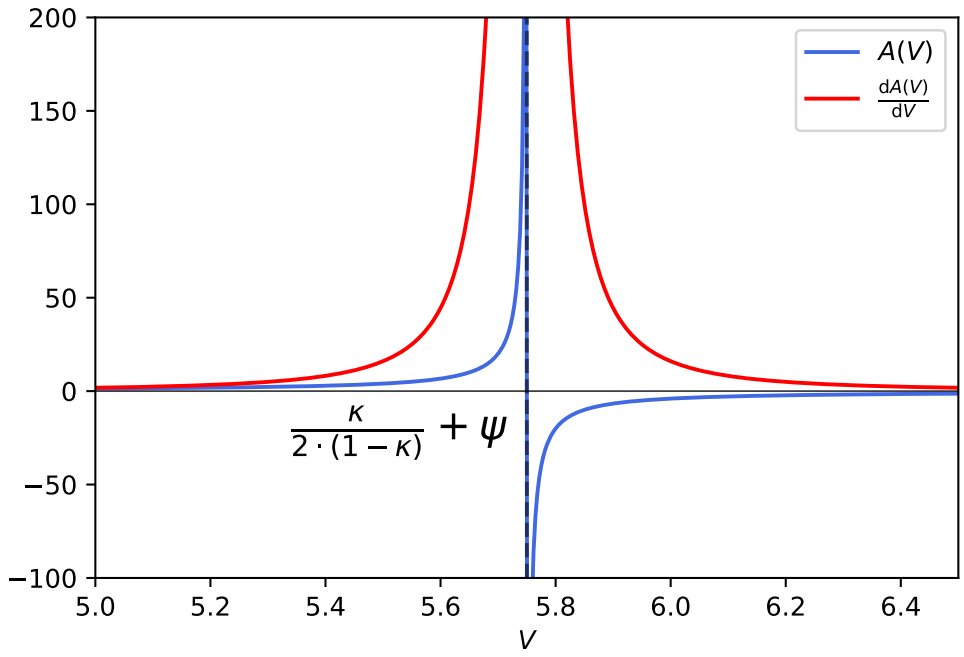
gdje je κ bezdimenzionalni parametar element $\kappa \in \langle -\infty, 1]$ te je ψ ciljana vrijednost portfelja. Koristeći jednadžbu (4.170) možemo naći apsolutnu nesklonost riziku $A(V)$:

$$A(V) = \frac{1}{\frac{\kappa}{2(1-\kappa)} - (V-\psi)} \tag{4.174}$$

te njenu prvu derivaciju $A'(V)$:

$$A'(V) = \frac{1}{\left(\frac{\kappa}{2(1-\kappa)} - (V-\psi)\right)^2} \,. \tag{4.175}$$

Na *Slici 4.2* se može vidjeti skica apsolutne nesklonosti riziku i prve derivacije iste za uređeni par parametara $(\kappa, \psi) = (0.6, 5)$. Divergencija se postiže za vrijednost



Slika 4.2: Skica apsolutne nesklonosti riziku $A(V)$ te prve derivacije apsolutne nesklonosti riziku $A'(V)$, za uređeni par parametara $(\kappa, \psi) = (0.6, 5)$.

portfelja:

$$V_{div} = \frac{\kappa}{2(1-\kappa)} + \psi \,. \tag{4.176}$$

Ono što možemo primijetiti jest da je prva derivacija apsolutne nesklonosti riziku uvijek veća od nule, neovisno o tome kakav je uređeni par parametara (κ, ψ). Drugim riječima voditelj fonda za kojeg bi se moglo reći da njegova funkcija korisnosti odgovara kvadratnoj funkciji korisnosti će uvijek, kako raste vrijednost portfelja, smanjivati udio uložen u rizične dionice. Proizvoljno daleko od divergencije na obje strane osi vrijednosti portfelja, prva derivacija apsolutne nesklonosti riziku prilazi proizvoljno blizu nuli. Proizvoljno daleko od divergencije bismo mogli reći da voditelj fonda čija je funkcija korisnosti opisana kvadratnom funkcijom korisnosti postaje indiferentan na promjenu vrijednosti portfelja što se tiče odabira strategije ulaganja.

CRRA funkciju korisnosti definiramo kao:

$$U(V) = \frac{V^{1-\gamma} - 1}{1 - \gamma} \, , \tag{4.177}$$

gdje je γ parametar takav da $\gamma \in \langle 0, +\infty \rangle \{1\}$. Apsolutna nesklonost riziku za gornje definiranu funkciju korisnosti postaje:

$$A(V) = \frac{\gamma}{V} \, , \tag{4.178}$$

dok je njena prva derivacija jednaka:

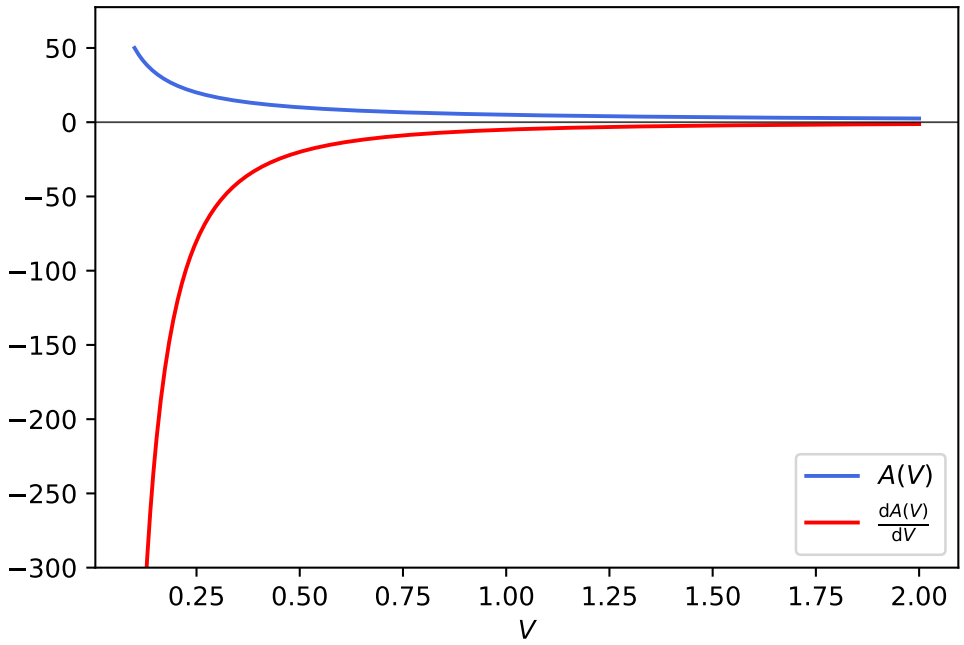
$$A'(V) = -\frac{\gamma}{V^2} \, . \tag{4.179}$$

Na *Slici 4.2* se može vidjeti skica apsolutne nesklonosti riziku i prve derivacije iste za $\gamma = 5$. Za razliku od prošlog slučaja kvadratne funkcije korisnosti u ovom slučaju će ponašanje voditelja fonda biti potpuno suprotno. Naime, neovisno o tome kakav je parametar γ prva derivacija apsolutne nesklonosti riziku će uvijek biti manja od nule. To znači da kako se povećava vrijednost portfelja, voditelj fonda također povećava i udio uložen u rizične dionice. Slično kao i u slučaju kvadratne funkcije korisnosti kako prilazimo asimptotskom području u vrijednosti portfelja tako voditelj fonda pokazuje sve veću i veću indiferentnost ka promjeni vrijednosti fonda. Jedna od definicija koja se također koristi za CRRA funkciju korisnosti jest:

$$U(V) = \frac{V^{1-\gamma}}{1 - \gamma} \, . \tag{4.180}$$

Gornja je definicija za sve svrhe jednako validna, osim što nije dobro definirana u $\gamma = 1$ te stoga tu vrijednost treba izbaciti iz domene parametra γ. Uz apsolutnu nesklonost riziku također možemo definirati i relativnu nesklonost riziku, čijom bi definicijom objasnili porijeklo naziva CRRA funkcije korisnosti. Relativnu nesklonost riziku definiramo kao apsolutnu nesklonost riziku pomnoženu s vrijednosti portfelja:

$$R(V) = V A(V) \, . \tag{4.181}$$



Slika 4.3: Skica apsolutne nesklonosti riziku $A(V)$ te prve derivacije apsolutne nesklonosti riziku $A'(V)$, za $\gamma = 5$.

U slučaju CRRA funkcije korisnosti bi tada dobili za relativnu nesklonost riziku:

$$R(V) = \gamma \,, \tag{4.182}$$

što je konstanta te objašnjava naziv CRRA funkcije korisnosti.

4.4 *Mjere rizika*

U prošlom smo potpoglavlju uveli kriterij po kojemu voditelj fonda odlučuje koja je strategija bolja ili lošija nasprem njegove trenutačne pozicije, kao maksimiziranje funkcije korisnosti. Uz navedeni kriterij također moramo uvesti i određenu mjeru rizika. Naime više strategija mogu voditi na jednaku očekivanu zaradu, ali one ne moraju nositi isti rizik. Svaki će voditelj fonda u takvoj situaciji uvijek birati onu strategiju ulaganja koja nosi manji rizik te je stoga krucijalno uz kriterij maksimizacije funkcije korisnosti provjeravati rizik pojedinih strategija ulaganja. Kao karikirani primjer možemo navesti takozvani *Petrogradski paradoks*. Naime, u navedenom je paradoksu osobi ponuđena prilika da plati x novaca da sudjeluje u igri gdje se baca pošten novčić te se osobi isplaćuje 2^k novaca. Prirodan broj k je broj uzastopnih

ponavljanja one strane novčića koju je osoba odabrala. Ukoliko osoba pristane na igru, očekivana će joj zarada biti jednaka:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} \cdot 2^k - x = +\infty \, . \tag{4.183}$$

Vidimo iz gornjeg izraza da očekivana zarada igrača divergira, stoga ukoliko igrač ne bi uzimao u obzir rizik koji preuzima na sebe, već ako bi gledao samo kako maksimizirati profit bez dvojbe bi prihvatio igrati igru za proizvoljno veliku cijenu x. Unatoč tome, dobro informirani igrač neće biti voljan uložiti proizvoljno mnogo obzirom na to da preuzima golem rizik na sebe.

Uz navedeno mjere rizika mogu biti važne ukoliko bi pokušavali odrediti koliku količinu novca financijska institucija mora uvijek imati kako bi u slučaju nenadane evolucije portfelja mogla pokriti svoje dugove prema drugima. Bez kvantificiranja mjere rizika takvi zaključci i računi nisu mogući. Kao očit izbor mjere rizika se postavlja varijanca distribucije vjerojatnosti ponašanja vrijednosti portfelja, što je slučajna varijabla. Unatoč očitosti odabira, varijanca fenomenološki predstavlja jednu od lošijih mjera rizika. Naime, varijanca nam govori o odstupanju od očekivanja neovisno o tome radi li se o porastu ili padu vrijednosti, ali prosječni investitor ne gleda jednako na pad i porast vrijednosti. Ukoliko vrijednost raste investitor vidi to kao priliku da još više zaradi, dok pad cijene sije paniku što uzrokuje drukčiji tip ponašanja. Ovom argumentacijom postaje jasno zašto varijanca nije najbolji izbor za mjeru rizika. Jedini slučaj kada se varijanca pokazuje korisnom jest ukoliko je distribucija vjerojatnosti promjene vrijednosti portfelja simetrična oko očekivanja. Vodeći se gornjom logikom lako je za shvatiti zašto navedene distribucije općenito nisu simetrične oko očekivanja, već su nagnute na jednu stranu te stoga valja promotriti druge mjere rizika. Alternativne mjere rizika koje ćemo mi promotriti jesu VaR (”*Value-at-Risk*”), TCE (”*Tail conditional expectation*”) te ES (”*Expected shortfall*”). Ono što je zajedničko svim trima jest postojanje određene granične vrijednosti koje ćemo označavati s $\mathfrak{B}$. Navedena će granična vrijednost imati različitu ulogu u definiciji svake od mjera rizika koju ćemo promotriti. Obično se za graničnu vrijednost uzima ili očekivanje vrijednosti portfelja ili vrijednost bezrizičnog ulaganja. Postoje i egzotičnije definicije granične vrijednosti, no navedene dvije su standardne.

VaR je najmanji broj L takav da vjerojanost da $\mathfrak{B}_{t+\Delta t} - V_{t+\Delta t}$ bude veće od L, ne

prelazi α te pišemo:

$$\text{VaR}_t^\alpha = \inf\Big\{ L \geq 0 : \mathbf{P}\left((\mathfrak{B}_{t+\Delta t} - V_{t+\Delta t}) \geq L \mid \mathcal{F}_t\right) \leq \alpha \Big\} \,. \tag{4.184}$$

Propozicija 4.4.1

Izraz za VaR u ovisnosti o vrijednosti portfelja koja prati log-normalnu evoluciju, vjerojatnosti α, udjelima ulaganja $\boldsymbol{\theta}_t$ te graničnoj vrijednosti $\mathfrak{B}_t$, slijedi kao:

$$\text{VaR}_t^\alpha = \max\Bigg\{ V_t \cdot \exp\Bigg[\Phi^{-1}(\alpha) \|\boldsymbol{\theta}_t^T \cdot \hat{\sigma}\| \sqrt{\Delta t} + \Big(\boldsymbol{\theta}_t^T \cdot \overrightarrow{(\mu - r)} + r + \\ - \frac{c_t}{V_t} - \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\theta}_t^T \cdot \hat{\sigma}\|^2 \Big) \Delta t \Bigg] - \mathfrak{B}_{t+\Delta t},\ 0 \Bigg\} \,, \tag{4.185}$$

gdje je $\Phi(\cdot)$ kumulativna normalna distribucija i $\Phi^{-1}(\cdot)$ njen inverz.

Ograničenje koje se postavlja na evoluciju portfelja bi bilo primjerice:

$$\text{VaR}_t^\alpha \leq \varepsilon(V_t, t) \,, \tag{4.186}$$

gdje je ε gornja granica na rizik ovisna o tome kakva je vrijednost portfelja te koliko smo duboko ušli unutar vremenske domene.

TCE mjera rizika je usko vezana VaR mjeri rizika kroz svoju definiciju. Naime TCE mjeru rizika definiramo kao očekivani pad vrijednosti takav da je on veći od VaR mjere rizika za odabranu razinu sigurnosti $(1 - \alpha)$:

$$\text{TCE}_t^\alpha = \mathbb{E}_t\Big\{ \mathfrak{B}_{t+\Delta t} - V_{t+\Delta t} : \mathfrak{B}_{t+\Delta t} - V_{t+\Delta t} \geq \text{VaR}_t^\alpha \Big\} \,. \tag{4.187}$$

Ograničenje koje se postavlja na evoluciju portfelja bi bilo primjerice:

$$\text{TCE}_t^\alpha \leq \varepsilon(V_t, t) \,, \tag{4.188}$$

gdje je ε gornja granica na rizik ovisna o tome kakva je vrijednost portfelja te koliko smo duboko ušli unutar vremenske domene.

Propozicija 4.4.2

Izraz za TCE u ovisnosti o vrijednosti portfelja koja prati log-normalnu evoluciju, vjerojatnosti α, udjelima ulaganja $\boldsymbol{\theta}_t$ te graničnoj vrijednosti $\mathfrak{B}_t$, slijedi kao:

$$\text{TCE}_t^{\alpha} = \mathfrak{B}_{t+\Delta t} - \frac{1}{\alpha} V_t \cdot \Phi\left(\Phi^{-1}(\alpha) - \|\boldsymbol{\theta}_t^T \cdot \hat{\sigma}\|\sqrt{\Delta t}\right) \exp\left(\boldsymbol{\theta}_t^T \cdot \overrightarrow{(\mu - r)}\Delta t + r\Delta t\right) \ , \tag{4.189}$$

gdje je $\Phi(\cdot)$ kumulativna normalna distribucija i $\Phi^{-1}(\cdot)$ njen inverz.

ES mjera rizika, baš kao što i samo ime sugerira, jest očekivanje od razlike granične vrijednosti $\mathfrak{B}$ i vrijednosti portfelja u slučaju pada vrijednosti:

$$\text{ES}_t = \mathbb{E}_t\Big\{\max\left[0,\ \mathfrak{B}_{t+\Delta t} - V_{t+\Delta t}\right] \mid \mathcal{F}_t\Big\} \ , \tag{4.190}$$

$$\text{ES}_t = \int_{-\infty}^{\mathfrak{B}_{t+\Delta t}} \mathrm{d}F(G_{t+\Delta t}) \cdot \left(\mathfrak{B}_{t+\Delta t} - V_{t+\Delta t}\right) \ , \tag{4.191}$$

gdje je F distribucija funkcije gubitka $G_{t+\Delta t} = \mathfrak{B}_{t+\Delta t} - V_{t+\Delta t}$.

Propozicija 4.4.3

Izraz za ES u ovisnosti o vrijednosti portfelja koja prati log-normalnu evoluciju, vjerojatnosti α, udjelima ulaganja $\boldsymbol{\theta}_t$ te graničnoj vrijednosti $\mathfrak{B}_t$, slijedi kao:

$$\text{ES}_t = \Phi(\mathfrak{B}_{t+\Delta t})\mathfrak{B}_{t+\Delta t} - V_t \cdot \Phi\left(\mathfrak{B}_{t+\Delta t} - \|\boldsymbol{\theta}_t^T \cdot \hat{\sigma}\|\sqrt{\Delta t}\right) \ , \tag{4.192}$$

gdje je $\Phi(\cdot)$ kumulativna normalna distribucija i $\Phi^{-1}(\cdot)$ njen inverz.

Ograničenje analogno onima za VaR i TCE se javlja i u ovom slučaju.

5 Optimalni portfelj bez ograničenja na rizik

Najraniji pokušaji optimizacije financijskog portfelja je izmislio Harry Markowitz kroz svoj pristup koristeći predominantno varijancu kao mjeru rizika, za što je $1952.$ godine dobio Nobelovu nagradu. Osnovni principi koje jest Markowitz uveo jesu da:

1. za zadanu razinu očekivane zarade, biramo strategiju ulaganja koja nosi minimalni rizik.

2. za zadanu razinu prihvatljivog rizika, biramo strategiju ulaganja koja maksimizira očekivanu zaradu.

Navedeni principi se pokazuju korisnima te se primjenjuju kroz formalizam dinamičkog programiranja za sve uzastopne diskretne korake u vremenu. U narednom poglavlju ćemo promotriti dinamički odabir strategije ulaganja u diskretnom vremenu i neprekidnom vremenu te ćemo pronaći optimalni portfelj za slučaj kvadratne funkcije korisnosti pomoću HJB jednadžbe.

5.1 Dinamički odabir strategije ulaganja

Za svaki trenutak u vremenu na ekonomskom agentu se ostavlja mogućnost odabira strategije ulaganja. Pretpostavlja se da voditelj fonda u svakom trenutku bira optimalnu strategiju za sve naredne trenutke, sukladno principu optimalnosti uvedenom u pretprošlom poglavlju. Kriterij optimalnosti jest predstavljen maksimizacijom funkcije korisnosti. U našem ćemo problemu imati dvije funkcije korisnosti. Prva će biti primjenjena za sve trenutke do terminalnog, dok će druga biti terminalna. Terminalna funkcija korisnosti uzima u obzir drugačiji oblik penala koji mogu uslijediti ukoliko nisu zadovoljeni monetarni ciljevi na kraju vremenske domene. Povlačeći paralele s razmatranjima vezanim za dinamičko programiranje, kontrolni parametri će nam u ovom slučaju biti predstavljeni uređenim parom udjela ulaganja te troškova održavanja fonda $(\boldsymbol{\theta}_t, c_t)$. Pozivajući se na jednakost (4.161) imamo diskretnu evoluciju procesa vrijednosti portfelja:

$$V_{t+1}^{\boldsymbol{\theta}_t} = V_t^{\boldsymbol{\theta}_t} \left[1 + \theta_t^0 r_t + \sum_{i=1}^{N} \theta_t^i (\xi_{t+1}^i - 1) \right] - c_t \ . \tag{5.193}$$

U svakom zadanom trenutku t se biraju kontrole tako da maksimiziraju funkciju korisnosti do terminalnog trenutka:

$$J_t(v) = \max_{(\boldsymbol{\theta}_0, c_0), \ldots, (\boldsymbol{\theta}_T, c_T)} \mathbb{E}\left\{ \sum_{t=0}^{T} U_t^{(1)}(c_t) + U_t^{(2)}(V_T - c_T) \mid V_t = v \right\} , \tag{5.194}$$

gdje se pretpostavlja da je funkcija korisnosti aditivna u vremenu. U gornjoj je jednadžbi funkcija korisnosti $U^{(2)}$ terminalna. Pozivajući se na *Propoziciju 3.2.1* slijedi

algoritam dinamičkog programiranja za naš problem kao:

$$J_t(v) = \begin{cases} \max_{(\boldsymbol{\theta}_T, c_T)} U^{(2)}(v - c_T), & t = T \\ \max_{(\boldsymbol{\theta}_t, c_t)} \left[U_t^{(1)}(c_t) g + \mathbb{E}_t \Big\{ J_{t+1}(V_{t+1}(V_t, \boldsymbol{\theta}_t, c_t, \boldsymbol{\xi}_t)) \mid V_t = v \Big\} \right], & t < T \end{cases} . \tag{5.195}$$

Gornji algoritam dinamičkog programiranja reproducira optimalnu funkciju troška za zadani vremenski trenutak t te vrijednost portfelja v. Prema *Principu optimalnosti* ukoliko riješimo repni problem optimalne funkcije troška, njegovo će rješenje uvijek biti sadržano u svekupnom problemu. Štoviše čak i u problemu udaljenom za jedan korak u vremenu unatrag, što vodi na model rješavanja od vremenskog horizonta $t = T$, ka ishodištu vremena $t = 0$.

Valja napomenuti osnovnu razliku između općenitih razmatranja vezanih za teoriju optimalne kontrole i ranije u radu izvedenih rezultata te ideja koje se nadovezuju na financijsku primjenu. Naime, cilj najopćenitijeg problema u teoriji optimalne kontrole jest minimizirati generalizirani trošak. Pod trošak se ovdje misli ili na doslovce potrošeni kapital ili pak na apstraktnu ideju troška koju smo uveli kako bi mogli razlikovati propagaciju sistema duž različitih trajektorija u konfiguracijskom prostoru. Za razliku od navedenog generalnog slučaja, u primjeni na optimizaciju portfelja mi maksimiziramo korisnost umjesto da minimiziramo trošak. Unatoč tome što bi mogli uspostaviti ekvivalenciju između navedena dva principa na način da minimiziramo negativnu korisnost te definiramo apstraktni trošak kao negativnu korisnost, obzirom da se u financijama javlja pojam troška, dvojno korištenje izraza može pobuditi zbunjenost. Kroz ostatak rada ćemo nastaviti koristiti izraz *funkcije troška* s motivacijom da napomenemo koliko su argumenti vezani uz prijašnja poglavlja te dinamičko programiranje centralni u konačnoj primjeni te kako ne bi prekidali čitateljevu kontinuaciju kroz rad.

Uz problematiku na diskretnoj vremenskoj domeni promatramo također ponašanje na neprekidnoj vremenskoj domeni. Osim zbog razloga matematičke elegantnosti, modeli na neprekidnoj vremenskoj domeni također imaju prednost što se mogu analitički riješiti za relativno jednostavne pretpostavke modela. Uobičajeno je koristiti difuzne procese za modeliranje vrijednosti dionica i portfelja te se promatraju funkcije korisnosti s konstantnom relativnom nesklonošću riziku. Sveukupni problem optimalnog portfelja na neprekidnoj vremenskoj domeni, zapisan analogno gornjim

diskretnim razmatranjima se sastoji od traženja optimalnih kontrola $(\boldsymbol{\theta}, c)$ te glasi:

$$\begin{cases} \max_{(\boldsymbol{\theta},c)} \mathbb{E}\left\{ \int_0^T \mathrm{d}t \cdot U_t^{(1)}(c_t, t) + U_T^{(2)}(V_T^{\boldsymbol{\theta_T}}) \right\} \\ \text{t.d. } c_t \geq 0,\ (V_t)_{t\in[0,T]} > 0 \\ \mathrm{d}V_t = V_t \left(\boldsymbol{\theta}_t^T \cdot \overrightarrow{(\mu - r)} + r \right) \mathrm{d}t + V_t\, \boldsymbol{\theta}_t^T \cdot \hat{\sigma} \cdot \mathrm{d}\mathbf{W}_t - c_t \mathrm{d}t,\ \ V_0 = v \end{cases} . \tag{5.196}$$

Drugim riječima potrebno je odrediti kontrolnu trajektoriju $(\boldsymbol{\theta}_t, c_t)$ za svaki trenutak $t \in \mathcal{T} = [0, T]$, takvu da evolucijom po diferencijalnoj jednadžbi za vrijednost portfelja iz jednadžbe (5.196) maksimiziramo očekivanje funkcije korisnosti. Primjenivši izvod sličan onomu u jednadžbama $(3.52) - (3.63)$ na problem opisan u jednadžbi (5.196) možemo izvesti HJB jednadžbu za našu problematiku:

$$0 = \max_{(\boldsymbol{\theta}_\tau, c_\tau)_{\tau\in[0,T]}} \left\{ U^{(1)}(c_t) + \partial_t J(v,t) + \partial_v J(v,t) \left(v \left(\boldsymbol{\theta}_t^T \cdot \overrightarrow{(\mu - r)} + r \right) - c_t \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \partial_v^2 J(v,t)\, \boldsymbol{\theta}_t^T \cdot \hat{\sigma}\hat{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{\theta}_t \right\} . \tag{5.197}$$

Kao što je prije razmatrano, HJB jednadžba je nelinearna parcijalna diferencijalna jednadžba drugog reda, čije rješenje uz terminalni uvjet $J(V_T, T) = U_T^{(2)}(V_T)$, pronalazi optimalnu funkciju troška $J^*(v,t)$.

5.2 Optimalni portfelj s kvadratnom funkcijom korisnosti

U narednom potpoglavlju promatramo specifični primjer traženja optimalne strategije u slučaju da nemamo ograničenja na rizik. Ovaj je slučaj manje realan nego onaj u kojemu se uzimaju u obzir ograničenja na rizik, obzirom da smo već pokazali da odabir strategije bez kvantificiranja rizika vodi na loše rezultate. U sljedećem ćemo poglavlju promatrati optimalni portfelj s ograničenjima na rizik. Navedena će problematika biti puno kompliciranija te će se koristiti perturbativna metoda za rješavanje problema, a za nulti korak računa smetnje će se uzeti da optimalni portfelj odgovara onomu bez ograničenja na rizik. Funkcija korisnosti koju ćemo sada promotriti jest kvadratna te za nju vrijedi sve što smo naveli u prošlom poglavlju. Također, vremensku ovisnost u funkciju korisnosti uvodimo kao:

$$U_t(\cdot) = e^{\rho t} U(\cdot) . \tag{5.198}$$

Cilj nam je kao i u prošlim razmatranjima maksimizirati:

$$\mathbb{E}_{0,V_0} \left\{ \int_0^T \mathrm{d}\tau \cdot e^{-\rho\tau} U(V_\tau) + e^{-\rho T} U(V_T) \right\} . \tag{5.199}$$

U svrhu toga definiramo funkciju troška $J(v,t)$:

$$J(v,t) = \max_{\boldsymbol{\theta}_t \in \mathbb{R}^n} \mathbb{E}_{t,v} \left\{ \int_t^T \mathrm{d}\tau \cdot e^{-\rho(\tau - t)} U(V_\tau) + e^{-\rho(T-\tau)} U(V_T) \right\} . \tag{5.200}$$

Sukladno prijašnjim razmatranjima optimalna funkcija troška će zadovoljavati HJB jednadžbu.

Teorem 5.2.1 (Hamilton-Jacobi-Bellmanova jednadžba)
Neka je $J(\cdot) \in \mathcal{C}^{2,1}\left(\mathbb{R}^{+} \times [0,T]\right)$. Parcijalna diferencijalna jednadžba drugog reda koju zadovoljava optimalna funkcija troška $J(\cdot)$ je dana s:

$$\rho J(v,t) = \max_{(\boldsymbol{\theta}_t)_{t\in[0,T]}\in\mathcal{A}(v)} \Big\{ U(v) + \partial_t J(v,t) + v\partial_v J(v,t) \left(\boldsymbol{\theta}_t^T \cdot \overrightarrow{(\mu - r)} + r \right) + \\ + \frac{1}{2} v^2 \partial_v^2 J(v,t)\, \boldsymbol{\theta}_t^T \cdot \hat{\sigma}\hat{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{\theta}_t \Big\} \,, \tag{5.201}$$

gdje je $t \in [0,T]$ vremenski horizont, $V_t = v$ je proizvoljno dopušteno stanje vrijednosti portfelja te je $\mathcal{A}(v)$ domena dopustivih kontrola obzirom na zadanu vrijednost portfelja v.

Optimalna funkcija troška zadovoljava HJB jednadžbu za sve vrijednosti portfelja te sve vremenske trenutke uz terminalni uvjet $J(V_T, T) = U(V_T)$. Zapisano skraćeno HJB jednadžba iz *Teorema 5.2.1* koji ćemo zadovoljavati glasi:

$$\partial_t J(v,t) - \rho J(v,t) + U(v) + \sup_{\boldsymbol{\theta}_t} \Big\{ \mathrm{D}^{\boldsymbol{\theta}_t} J(v,t) \Big\} = 0 \,, \tag{5.202}$$

gdje je $\mathrm{D}^{\boldsymbol{\theta}_t}$ diferencijalni operator:

$$\mathrm{D}^{\boldsymbol{\theta}_t} = v \left(\boldsymbol{\theta}_t^T \cdot \overrightarrow{(\mu - r)} + r \right) \partial_v + \frac{1}{2} v^2 \| \boldsymbol{\theta}_t^T \cdot \hat{\sigma} \|^2 \partial_v^2 \,. \tag{5.203}$$

Da bi našli optimalnu strategiju tražimo gradijent po $\boldsymbol{\theta}_t$ od izraza unutar supremuma funkcije jednadžbe (5.202):

$$\vec{\nabla}_{\boldsymbol{\theta}_t} \left(\mathrm{D}^{\boldsymbol{\theta}_t} J(v,t) \right) \mid_{\boldsymbol{\theta}_t^{opt}} = 0 \,, \tag{5.204}$$

što vodi na:

$$v \cdot \partial_v J(v,t) \overrightarrow{(\mu - r)} + v^2 \partial_v^2 J(v,t) (\boldsymbol{\theta}_t^{opt})^T \cdot \hat{\sigma}\hat{\sigma}^T = 0 \,. \tag{5.205}$$

Invertirajući gornju jednadžbu dobivamo izraz za optimalnu strategiju ulaganja:

$$(\boldsymbol{\theta}_t^{opt})^T = -\frac{\partial_v J}{v \cdot \partial_v^2 J} \overrightarrow{(\mu - r)}^T \cdot \left(\hat{\sigma}\hat{\sigma}^T \right)^{-1} \,. \tag{5.206}$$

Sljedeći je korak vratiti jednadžbu (5.206) u HJB jednadžbu (5.202) čime bi reproducirali jedndžbu samo za funkciju troška $J(v,t)$. Sređivanjem dobivamo:

$$0 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(\partial_v J)^2}{\partial_v^2 J} \overrightarrow{(\mu - r)}^T \cdot \left(\hat{\sigma}\hat{\sigma}^T\right)^{-1} \cdot \overrightarrow{(\mu - r)} + rv \cdot \partial_v J + U(v) + \partial_t J - \rho J \ . \quad (5.207)$$

Raspišimo sada terminalni uvjet po potencijama vrijednosti portfelja na horizontu V_T:

$$J(V_T, T) = U(V_T) = -V_T^2(1-\kappa) + V_T(\kappa + 2\psi(1-\kappa)) - (1-\kappa)\psi^2 \ . \quad (5.208)$$

Nadalje uvodimo kvadratični *ansatz* motivirani gornjim terminalnim uvjetom na funkciju troška J:

$$J(v,t) = a(t)v^2 + b(t)v + c(t) \ . \quad (5.209)$$

Cilj nam je nelinearnu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu (5.207) rastaviti na sustav običnih diferencijalnih jednadžbi za faktore a, b i c. S time na umu prvo povezujemo terminalne uvjete za navedene faktore:

$$a(T) = -(1-\kappa) \ , \quad (5.210)$$

$$b(T) = \kappa + 2(1-\kappa)\psi \ , \quad (5.211)$$

$$c(T) = -(1-\kappa)\psi^2 \ . \quad (5.212)$$

Uvrštavanjem jednadžbe (5.209) u jednadžbu (5.207) te rastavljanjem članova na one uz nultu, prvu i drugu potenciju od vrijednosti portfelja v, dobivamo tri obične diferencijalne jednadžbe za faktore a, b i c:

$$a'(t) = a(t)\left(-2r + \rho + \overrightarrow{(\mu - r)}^T \cdot \left(\hat{\sigma}\hat{\sigma}^T\right)^{-1} \cdot \overrightarrow{(\mu - r)}\right) + (1-\kappa) \ , \quad (5.213)$$

$$b'(t) = b(t)\left(\rho - r + \overrightarrow{(\mu - r)}^T \cdot \left(\hat{\sigma}\hat{\sigma}^T\right)^{-1} \cdot \overrightarrow{(\mu - r)}\right) - 2(1-\kappa)\psi - \kappa \ , \quad (5.214)$$

$$c'(t) = \frac{b^2(t)}{4a(t)} \overrightarrow{(\mu - r)}^T \cdot \left(\hat{\sigma}\hat{\sigma}^T\right)^{-1} \cdot \overrightarrow{(\mu - r)} + (1-\kappa)\psi^2 + \rho c(t) \ . \quad (5.215)$$

Gornji sustav običnih diferencijalnih jednadžbi $(5.213) - (5.215)$ se može riješiti poznavajući terminalne uvjete $(5.210) - (5.212)$ metodom diskretizacije. Stoga, potrebno je diskretizirati vremensku domenu te domenu vrijednosti portfelja kao $N_v \times N_t$ mrežu

točaka u ravnini uz skalu diskretizacije Δv i Δt za oba stupnja slobode. Način na koji provjeravamo zadovoljava li naše dobiveno rješenje HJB jednadžbu jest da definiramo funkciju greške za svaku točku na mreži $\varepsilon_{t,v}$ kao lijevu stranu HJB jednadžbe, odnosno:

$$\varepsilon_{t,v} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\partial_v \tilde{J}\right)^2}{\partial_v^2 \tilde{J}} \overrightarrow{(\mu - r)}^T \cdot \left(\hat{\sigma}\hat{\sigma}^T\right)^{-1} \cdot \overrightarrow{(\mu - r)} + rv \cdot \partial_v \tilde{J} + U(v) + \partial_t \tilde{J} - \rho \tilde{J} \quad (5.216)$$

te iziskujemo da funkcija greške bude proizvoljno mala. U gornjoj jednadžbi znak tilde iznad svakog od članova koji sadrže funkciju troška označava naše aproksimirano rješenje koje smo dobili metodom diskretizacije. Kao konačni korak, kada smo uvjereni da funkcija troška ulazi u naš standard zadovoljenja HJB jednadžbe, optimalnu strategiju $\boldsymbol{\theta}_t^{opt}$, računamo pomoću jednadžbe (5.206), obzirom da nam je cilj na početku bio pronaći upravo optimalnu strategiju ulaganja.

6 Optimalni portfelj s ograničenjima na rizik

U prošlom smo poglavlju promotrili problematiku traženja optimalne strategije ulaganja za slučaj kada ne uzimamo u obzir ograničenja na rizik. U narednom poglavlju ćemo promotriti kako implementirati ograničenja na rizik za tri već spomenute mjere rizika:

1. VaR, *Value-at-Risk*
2. TCE, *Tail conditional expectation*
3. ES, *Expected shortfall*

Sama ograničenja ćemo implementirati formalizmom Lagrangeovih multiplikatora, pomoću kojih ćemo izvesti ograničene jednadžbe gibanja. Dobiveni sustav jednadžbi jest nelinearan te se rješava SQP (”Sequential quadratic programming”) metodom. SQP metoda jest perturbativna metoda za čiji ćemo nulti red računa smetnje pretpostaviti da rješenje zadovoljava problem optimalnog portfelja bez ograničenja. U narednim razmatranjima zanemarujemo troškove održavanja fonda c_t.

6.1 Value-at-Risk (VaR)

Sveukupni problem optimalnog portfelja ograničenog VaR mjerom rizika možemo zapisati kao:

$$\begin{cases} \max_{\boldsymbol{\theta}} \mathbb{E}_{0,V_0}\left\{ \int_0^T \mathrm{d}t \cdot e^{-\rho t} U(V_t,t) + e^{-\rho T} U(V_T) \right\} \\ \mathrm{d}V_t = V_t \left(\boldsymbol{\theta}_t^T \cdot \overrightarrow{(\mu - r)} + r \right) \mathrm{d}t + V_t\, \boldsymbol{\theta}_t^T \cdot \hat{\sigma} \cdot \mathrm{d}\mathbf{W}_t, \;\; V_0 = v \\ \mathrm{VaR}_t^{\alpha} \leq \varepsilon(V_t,t), \;\; \text{za svaki } t \in [0,T\rangle \end{cases} . \tag{6.217}$$

Problemu pristupamo tako da tražimo rješenje ekvivalentnog problema pomoću HJB jednadžbe. Prvi je korak naći strategiju ulaganja koja maksimizira prije uvedeni $\mathrm{D}^{\boldsymbol{\theta}_t} J(v,t)$. To radimo SQP algoritmom za koji bi osnovni problem skraćeno mogli zapisati kao:

$$\begin{cases} \text{minimiziraj} - \mathrm{D}^{\boldsymbol{\theta}_t} J(v,t), \text{po } \boldsymbol{\theta}_t \\ \text{t.d. } \mathrm{VaR}_t^{\alpha} \leq \varepsilon(V_t,t), \;\; \text{za svaki } t \in [0,T\rangle \end{cases} . \tag{6.218}$$

Dodatno ograničenje na rizik u jednadžbi (6.218) uzimamo u obzir Lagrangeovim multiplikatorom. Lagrangijan za naš problem zadan jednadžbom (6.218) glasi:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_t(v,t), \lambda(v,t)) = v \cdot \partial_v J(v,t) \left(\boldsymbol{\theta}_t^T \cdot \overrightarrow{(\mu - r)} + r \right) + \frac{1}{2} v^2 \|\boldsymbol{\theta}_t^T \cdot \hat{\sigma}\|^2 \partial_v^2 J(v,t) +$$

$$+ U(v) - \lambda(v,t) \Bigg\{ -v \cdot \exp\Bigg[\Phi^{-1}(\alpha) \|\boldsymbol{\theta}_t \cdot \hat{\sigma}\| \sqrt{\Delta t}$$

$$+ \left(\boldsymbol{\theta}_t^T \cdot \overrightarrow{(\mu - r)} + r + \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\theta}_t^T \cdot \hat{\sigma}\|^2 \right) \Delta t \Bigg] + \mathfrak{B}_{t+\Delta t} - \varepsilon(v,t) \Bigg\} . \tag{6.219}$$

Kao gradijent Lagrangijana izvodimo sustav jednadžbi gibanja za $\boldsymbol{\theta}_t$ i λ parametre:

$$v \cdot \partial_v J \overrightarrow{(\mu - r)} + \frac{1}{2} v^2 \partial_v^2 J\, \hat{\sigma}\hat{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{\theta}_t + \lambda v \Bigg[\frac{1}{2} \Phi^{-1}(\alpha) \frac{\hat{\sigma}\hat{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{\theta}_t}{\|\boldsymbol{\theta}_t^T \cdot \hat{\sigma}\|} \sqrt{\Delta t} +$$

$$+ \overrightarrow{(\mu - r)} \Delta t - \frac{1}{2} \hat{\sigma}\hat{\sigma}^T \cdot \boldsymbol{\theta}_t \Delta t \Bigg] \cdot e^{\Phi^{-1}(\alpha) \|\boldsymbol{\theta}_t^T \cdot \hat{\sigma}\| \sqrt{\Delta t} + \left(\boldsymbol{\theta}_t^T \cdot \overrightarrow{(\mu - r)} + r - \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\theta}_t^T \cdot \hat{\sigma}\|^2 \right) \Delta t} = \mathbf{0} , \tag{6.220}$$

$$H(v,t) \equiv v \cdot e^{\Phi^{-1}(\alpha) \|\boldsymbol{\theta}_t^T \cdot \hat{\sigma}\| \sqrt{\Delta t} + \left(\boldsymbol{\theta}_t^T \cdot \overrightarrow{(\mu - r)} + r - \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\theta}_t^T \cdot \hat{\sigma}\|^2 \right) \Delta t} - \mathfrak{B}_{t+\Delta t} + \varepsilon(v,t) = 0 , \tag{6.221}$$

uz dodatni uvjet:

$$\lambda(v,t) H(v,t) = 0, \quad \lambda(v,t) \geq 0 . \tag{6.222}$$

U *Tablici 6.1* i *Tablici 6.2* su prikazani iznosi parametara koji definiraju našu problematiku koje ćemo uvrštavati u SQP algoritam. U *Tablici 6.1* su parametri zadani tako da imamo jedno umjereno rizično ulaganje, jedno nisko rizično ulaganje te bezrizično ulaganje u državne obveznice, dok su parametri u *Tablici 6.2* zadani na način da imamo jednu umjereno rizičnu dionicu, jedno rizično ulaganje te bezrizično ulaganje u državne obveznice. Povrh parametara prikazanih u *Tablici 6.1*, također definiramo da je gornja granica na rizik u razmatranjima vezanim za VaR mjeru rizika, zadana sljedećim uvjetom:

$$\mathrm{VaR}_t^{\alpha} \leq 0.05\ . \tag{6.223}$$

U gornjem slučaju uzimamo da je ograničenje statičko, no naravno moguće je definirati određenu ovisnost koju bi gornja granica rizika $\varepsilon(v,t)$ pratila na domeni problema. Razlikovati ćemo dva slučaja vezano za graničnu vrijednost portfelja $\mathfrak{B}$:

Parametar	Iznos
1. Rizično ulaganje	$\mu = 4\,\%$, $\sigma^{11} = 5\,\%, \sigma^{12} = 5\,\%$
2. Rizično ulaganje	$\mu = 6\,\%$, $\sigma^{21} = 5\,\%, \sigma^{22} = 20\,\%$
Državna obveznica	$r = 3\,\%$
Investicijski horizont	$t \in [0,1]$
Domena vrijednosti portfelja	$v \in [0,20]$
Vjerojatnost negativnog ishoda	$\alpha = 1\,\%$
Skala vremenske diskretizacije	$\Delta t = 1/10$
Skala diskretizacije vrijednosti portfelja	$\Delta v = 0.8$
Faktor vremenskog dosega	$\rho = 0.3$
Kvadratna funkcija korisnosti	$U(v) = \kappa v - (1-\kappa)(v-\psi)^2$, $\kappa = 0.6$, $\psi = 5$

Tablica 6.1: Odabir iznosa parametara za numeričke račune gdje u portfelju imamo državnu obveznicu, slabo rizičnu dionicu i umjereno rizičnu dionicu.

1. Evolucija granične vrijednosti $\mathfrak{B}$ odgovara očekivanju vrijednosti portfelja:

$$\mathfrak{B}_{t+\Delta t} = \mathbb{E}_t\big\{V_{t+\Delta t}\big\} \tag{6.224}$$

2. Evolucija granične vrijednosti $\mathfrak{B}$ odgovara vrijednosti bezrizičnog ulaganja:

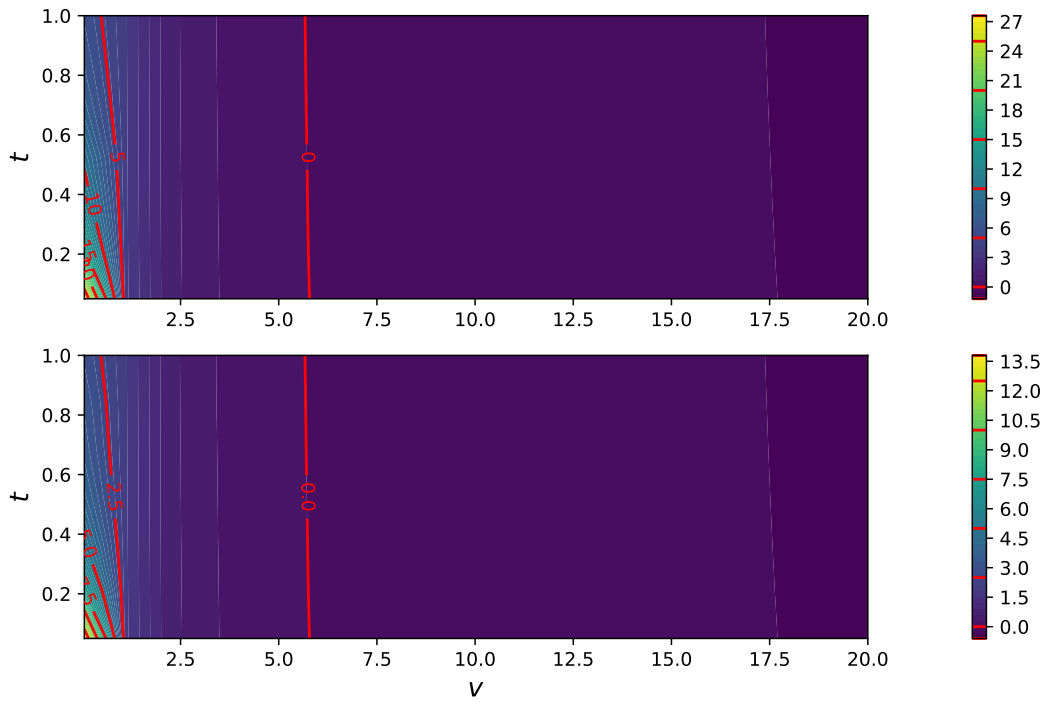
$$\mathfrak{B}_{t+\Delta t} = V_t \cdot e^{r\Delta t} \tag{6.225}$$

Na *Slici 6.4* se može vidjeti optimalni udio uložen u svaku zasebno rizičnu dionicu, odnosno $\boldsymbol{\theta}_t^*$, u ovisnosti o vremenu t i vrijednosti portfelja v za prvi slučaj granične

Parametar	Iznos
1. Rizično ulaganje	$\mu = 4\,\%$, $\sigma^{11} = 20\,\%, \sigma^{12} = 5\,\%$
2. Rizično ulaganje	$\mu = 6\,\%$, $\sigma^{21} = 5\,\%, \sigma^{22} = 40\,\%$
Državna obveznica	$r = 3\,\%$
Investicijski horizont	$t \in [0, 1]$
Domena vrijednosti portfelja	$v \in [0, 20]$
Vjerojatnost negativnog ishoda	$\alpha = 1\,\%$
Skala vremenske diskretizacije	$\Delta t = 1/10$
Skala diskretizacije vrijednosti portfelja	$\Delta v = 0.8$
Faktor vremenskog dosega	$\rho = 0.3$
Kvadratna funkcija korisnosti	$U(v) = \kappa v - (1-\kappa)(v-\psi)^2$, $\kappa = 0.6$, $\psi = 5$

Tablica 6.2: Odabir iznosa parametara za numeričke račune gdje u portfelju imamo državnu obveznicu, umjereno rizičnu dionicu i rizičnu dionicu.

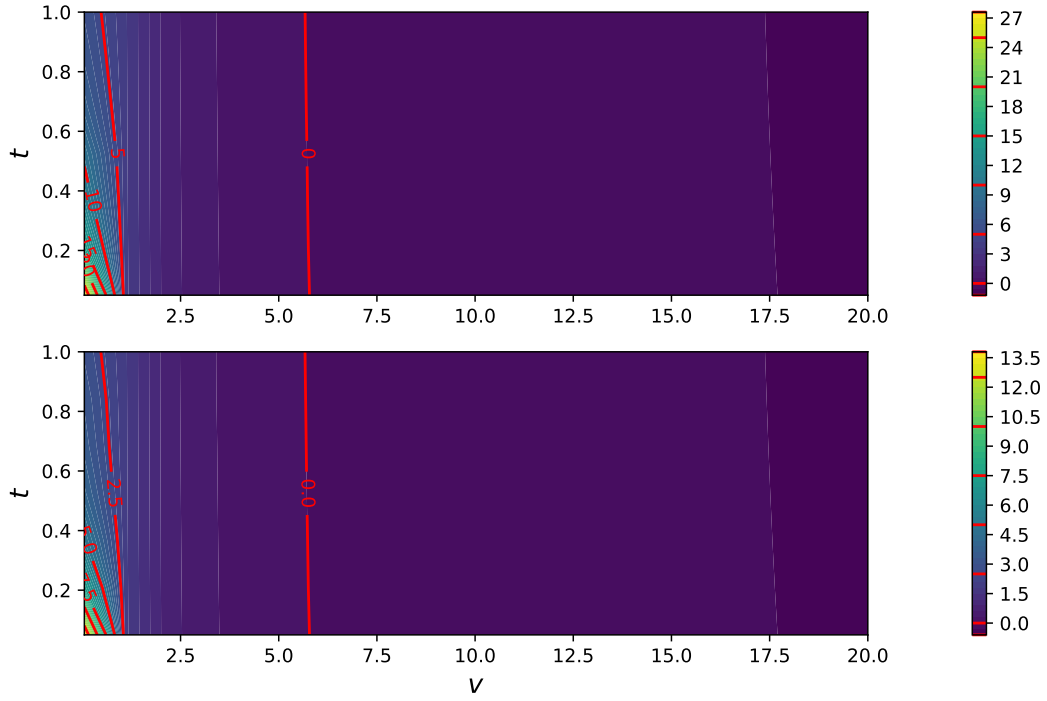
vrijednosti $\mathfrak{B}$ te za slučaj odabira parametara iz *Tablice 6.1*, dok se na *Slici 6.5* može vidjeti analogno postavljeni graf, no za vrijednosti parametara iz *Tablice 6.2*. Sa



Slika 6.4: Skica optimalnog rizičnog ulaganja uzevši u obzir da je evolucija granične vrijednosti $\mathfrak{B}$, dana kao očekivanje vrijednosti portfelja, da je ograničenje na rizik dano s VaR ovisnošću te da su parametri sistema zadani kao u *Tablici 6.1*. Na gornjem se konturnom grafu nalazi ovisnost optimalnog ulaganja u prvu rizičnu dionicu o vremenu i ukupnom bogatstvu, dok se na donjem nalazi za drugu.

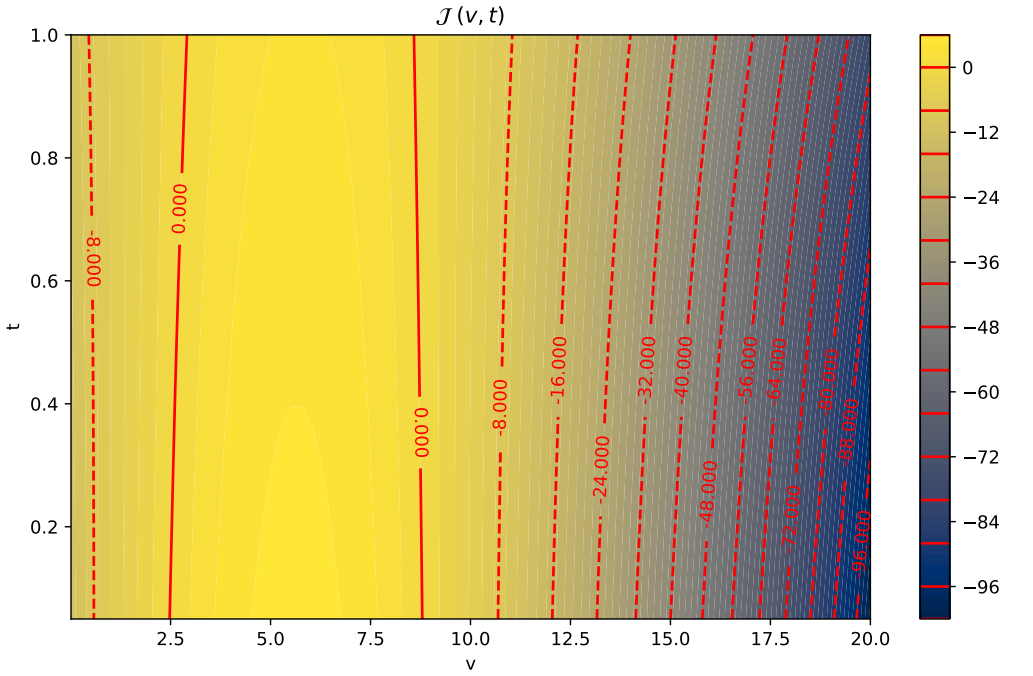
Slike 6.4 se jasno može vidjeti kako voditelj fonda s kvadratnom funkcijom koris-

nosti preferira uložiti u rizičniji dio portfelja ukoliko je vrijednost portfelja manja od ciljane vrijednosti ψ. Nadalje, voditelj osigurava vrijednost portfelja prebacivanjem sredstava u nerizično ulaganje u slučaju da vrijednost portfelja premašuje ciljanu. Ukoliko bi zamijenili graničnu vrijednost $\mathfrak{B}$, takva da postane vrijednost bezrizičnog ulaganja, načelno ponašanje u oba stupnja slobode se ne bi promijenilo. Štoviše, jedino bi mala razlika u iznosima promatranih varijabli na *Slikama 6.4* i *6.5* postojala, stoga te grafove nećemo prikazivati. Ono što možemo primijetiti na *Slikama 6.4* i *6.5* jest to da što više ulazimo u limes $v \to 0$ to je vremenska ovisnost u udjelima optimalnih rizičnih ulaganja veća. Navedeno bi mogli interpretirati uzevši u obzir da je funkcija korisnosti kvadratna, što znači da će postojati određeno ciljano bogatstvo fonda. Ukoliko vrijednost fonda premašuje navedenu ciljanu vrijednost voditelj fonda ne osjeća nikakvu potrebu da dodatno riskira te stoga uz to što se gubi ovisnost u bogatstvu u asimptotskom limesu, također se gubi i ovisnost u vremenu. Što je bogatstvo manje to voditelj fonda osjeća veći imperativ da djeluje, pogotovo u početku vremenske domene. Postavlja se također pitanje interpretacije fonda čija je vrijednost trivijalna u danom trenutku te kakve to mogućnosti ostavlja za evoluciju fonda, obzirom da je došlo do situacije u kojoj fond više ne može podmirivati svoje dugove. Sa gornjih grafova bi mogli zaključiti da kako raste vrijednost portfelja tako pada udio investiran u rizične dionice. Navedeno je rezultat toga što je odabrana funkcija korisnosti kvadratična te kako vrijednost portfelja raste tako prva derivacija apsolutne nesklonosti riziku pada ali uvijek ostaje veća od nule. Navedeno se lako može shvatiti promotrivši *Sliku 4.2*. To da je prva derivacija apsolutne nesklonosti riziku veća od nule definira ponašanje pri kojemu investitor povećanjem vrijednosti portfelja smanjuje udio uložen u rizične dionice. Ovakvo smo ponašanje rizičnih udjela mogli očekivati, samo poznavajući izgled funkcije korisnosti koju smo zadali. Navedeni zaključak, da je potrebno više ulagati što je vrijednost portfelja manja od ciljane jest kontraintuitivan. Naime, intuicija je nagnuta na stranu ulaganja u državne obveznice ukoliko vrijednost dionica pada, računavši da su one sigurnija ulaganja. Sa *Slike 4.2* bi također mogli primijetiti kako prva derivacija apsolutne nesklonosti riziku, iako jest pozitivno definitna, u asimptotskom limesu trne u nulu. Efektivno bi mogli reći da možemo smatrati nakon neke vrijednosti portfelja da apsolutna nesklonost riziku približno jest nula, što bi odgovaralo slučaju u kojem je voditelj fonda indiferentan na promjene vrijednosti portfelja. Navedena se indiferentnost očituje

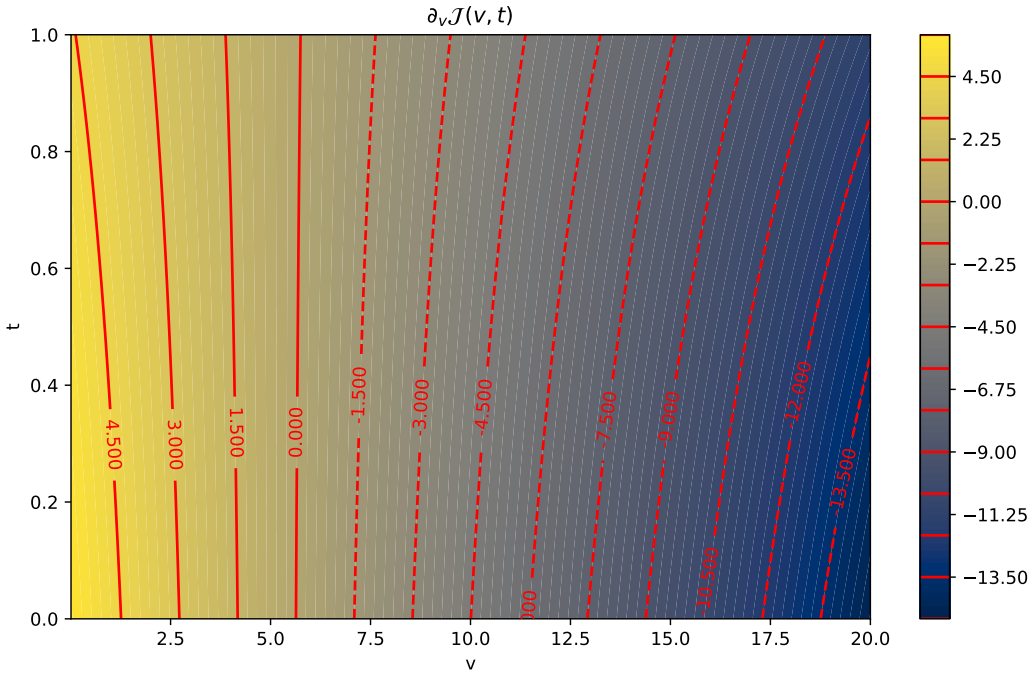


Slika 6.5: Skica optimalnog rizičnog ulaganja uzevši u obzir da je evolucija granične vrijednosti $\mathfrak{B}$, dana kao očekivanje vrijednosti portfelja, da je ograničenje na rizik dano s VaR ovisnošću te da su parametri sistema zadani kao u *Tablici 6.2*. Na gornjem se konturnom grafu nalazi ovisnost optimalnog ulaganja u prvu rizičnu dionicu o vremenu i ukupnom bogatstvu, dok se na donjem nalazi za drugu.

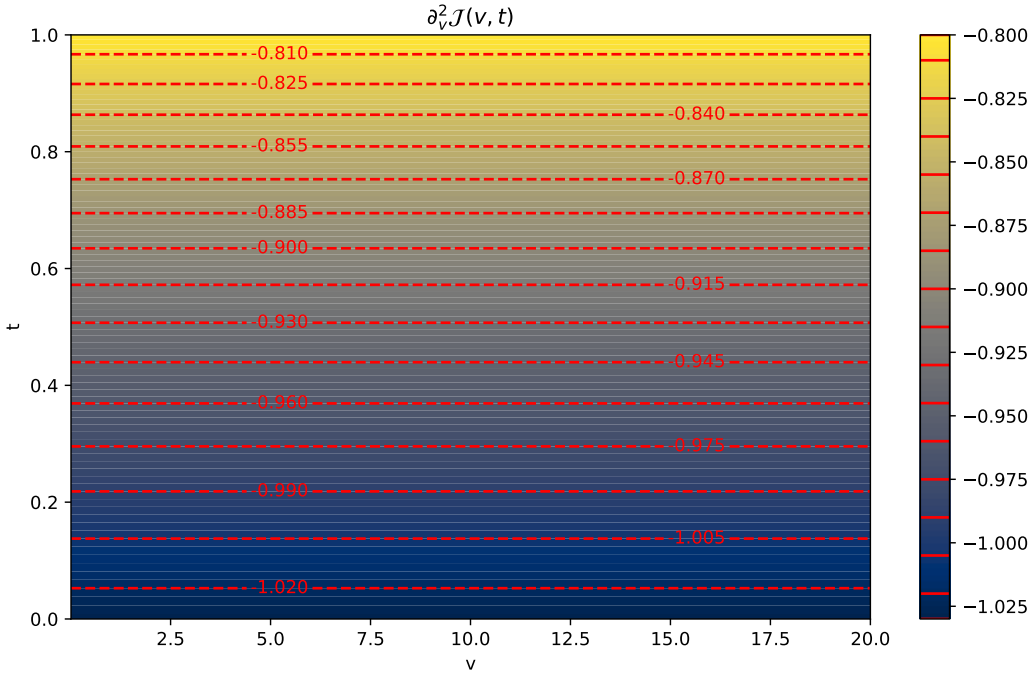
u saturacijskom ponašanju u vrijednosti portfelja te gubitku vremenske ovisnosti u asimptotskom limesu vrijednosti portfelja. Valja naglasiti doduše, kako je izloženost tržištu uvelike ograničena VaR ograničenjem na rizik. Stoga si možemo opravdati navedeno ponašanje. Također ono što možemo zamijetiti jest da što smo bliže horizontu to algoritam manje sugerira izlaganje s povećanjem rizičnih ulaganja. Ukoliko bi vođeni ovisnošću iz jednadžbe (5.206) išli uspoređivati ponašanje optimalne strategije u limesu $v \to 0$ u slučaju primjenjenog i neprimjenjenog ograničenja na rizik, brzo bi mogli shvatiti kako bi ponašanje moglo biti veoma različito. Naime, na *Slici 6.4* vidimo da u navedenom limesu strategija vezana za rizična ulaganja ne divergira, no referiravši se na jednadžbu (5.206) zaključujemo da optimalno neograničeno ulaganje divergira u $v \to 0$ limesu. Uzrok tome jest racionalni faktor $1/v$ u jednadžbi (5.206) te činjenica da niti $\partial_v J$ linearno ili brže trne u nulu, niti $\partial_v^2 J$ linearno ili brže divergira. Navedeno se može vidjeti na *Slikama 6.6-6.8* na kojima možemo vidjeti konturni graf ponašanja nulte, prve te druge parcijalne derivacije funkcije troška po



Slika 6.6: Skica optimalne funkcije troška na konfiguracijskom prostoru $\mathcal{V} \times \mathcal{T} = [0, 20] \times [0, 1]$ god., za slučaj bez ograničenja na rizik.



Slika 6.7: Skica parcijalne derivacije po vrijednosti portfelja optimalne funkcije troška na konfiguracijskom prostoru $\mathcal{V} \times \mathcal{T} = [0, 20] \times [0, 1]$ god., za slučaj bez ograničenja na rizik.



Slika 6.8: Skica kvadratne parcijalne derivacije po vrijednosti portfelja optimalne funkcije troška na konfiguracijskom prostoru $\mathcal{V} \times \mathcal{T} = [0, 20] \times [0, 1]$ god., za slučaj bez ograničenja na rizik.

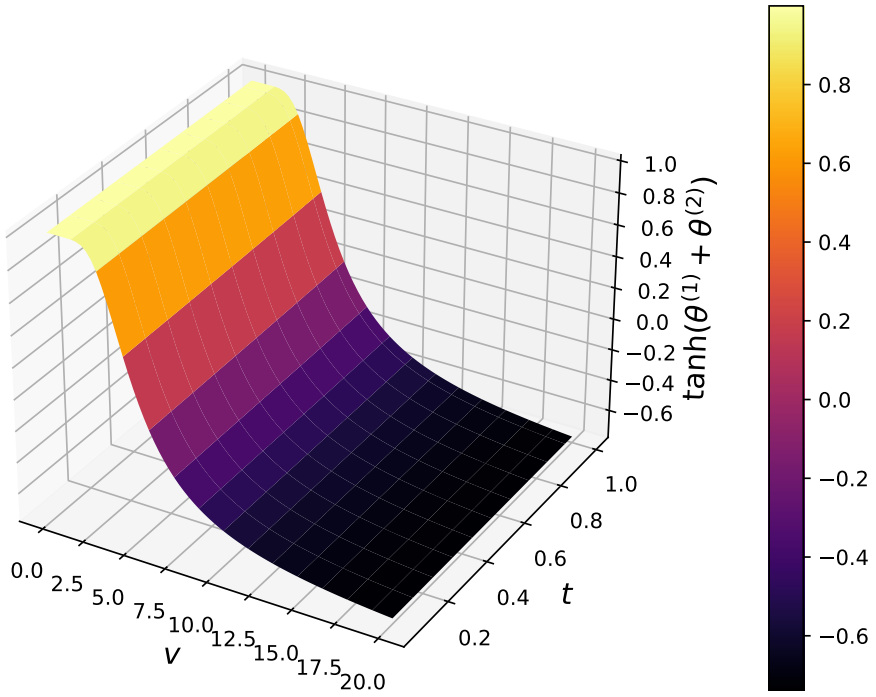
vrijednosti portfelja v. Na *Slici 6.9* vidimo kako izgleda optimalna strategija za rizični dio portfelja u slučaju kada ne uzimamo u obzir ograničenja na rizik. Obzirom da navedena ovisnost divergira $z-$os predstavlja tangens hiperbolni vrijednosti optimalne strategije, odnosno $\tanh\left(\theta^{(1)} + \theta^{(2)}\right)$, čime smo efektivno ukrotili divergenciju s ciljem boljeg prikaza podataka.

6.2 *Tail conditional expectation (TCE)*

Sveukupni problem za slučaj ograničenja po TCE mjeri rizika jest ekvivalentan sustavu (6.217) do na zamjenu VaR mjere rizika s TCE. Osnovni bi problem za SQP glasio:

$$\begin{cases} \text{minimiziraj} - \mathrm{D}^{\boldsymbol{\theta}_t} J(v,t), \text{ po } \boldsymbol{\theta}_t \\ \text{t.d. } \mathrm{TCE}_t^{\alpha} \leq \varepsilon(V_t, t), \quad \text{za svaki } t \in [0, T\rangle \end{cases} . \tag{6.226}$$

Pozivajući se na *Propoziciju 4.4.2* te gornji sustav (6.226) raspisujemo Lagrangijan.



Slika 6.9: Skica tangensa hiperbolnog ukupnog udjela rizičnih ulaganja u portfelj za slučaj kada ne uzimamo u obzir ograničenja na rizik ukoliko parametre sistema postavimo prema *Tablici 6.1*.

Lagrangijan raspisujemo za slučaj ograničenja TCE mjerom rizika:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_t(v,t),\lambda(v,t)) = v\cdot\partial_v J(v,t)\left(\boldsymbol{\theta}_t^T\cdot\overrightarrow{(\mu-r)}+r\right)+\frac{1}{2}v^2\|\boldsymbol{\theta}_t^T\cdot\hat{\sigma}\|^2\partial_v^2 J(v,t)+$$

$$+U(v)-\lambda(v,t)\cdot\left\{\alpha\cdot\mathfrak{B}_{t+\Delta t}-v\cdot\Phi\left(\Phi^{-1}(\alpha)-\|\boldsymbol{\theta}_t^T\cdot\hat{\sigma}\|\sqrt{\Delta đt}\right)e^{\left(\boldsymbol{\theta}_t^T\cdot\overrightarrow{(\mu-r)}+r\right)\Delta t}-\alpha\cdot\varepsilon(v,t)\right\}. \tag{6.227}$$

Iz gornjeg Lagrangijana slijede jednadžbe gibanja za $\boldsymbol{\theta}_t$ te λ:

$$v\cdot\partial_v J\overrightarrow{(\mu-r)}+\frac{1}{2}v^2\partial_v^2 J\,\hat{\sigma}\hat{\sigma}^T\cdot\boldsymbol{\theta}_t+\lambda v\cdot\left[\Delta t\overrightarrow{(\mu-r)}\,e^{\left(\boldsymbol{\theta}_t^T\cdot\overrightarrow{(\mu-r)}+r\right)\Delta t}\cdot\Phi\left(\Phi^{-1}(\alpha)-\|\boldsymbol{\theta}_t^T\cdot\hat{\sigma}\|\sqrt{\Delta t}\right)+\right.$$

$$\left.-e^{\left(\boldsymbol{\theta}_t^T\cdot\overrightarrow{(\mu-r)}+r\right)\Delta t}\cdot\frac{\sqrt{\Delta t}}{2}\frac{\hat{\sigma}\hat{\sigma}^T\cdot\boldsymbol{\theta}_t}{\|\boldsymbol{\theta}_t^T\cdot\hat{\sigma}\|}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\Phi^{-1}(\alpha-\|\boldsymbol{\theta}_t^T\cdot\hat{\sigma}\|\sqrt{\Delta t})\right)^2}\right]=\mathbf{0}\,, \tag{6.228}$$

$$H(v,t)\equiv\alpha\cdot\mathfrak{B}_{t+\Delta t}+v\cdot\Phi\left(\Phi^{-1}(\alpha)-\|\boldsymbol{\theta}_t^T\cdot\hat{\sigma}\|\sqrt{\Delta t}\right)e^{\left(\boldsymbol{\theta}_t^T\cdot\overrightarrow{(\mu-r)}+r\right)\Delta t}=0\,, \tag{6.229}$$

uz dodatne uvjete:

$$\lambda(v,t)H(v,t)=0,\quad \lambda(v,t)\geq 0\,. \tag{6.230}$$

Uz dva slučaja zadavanja parametara koji su dani u *Tablicama 6.1* i *6.2*, također ćemo promotriti slučaj u kojemu preuzimamo iznose varijanci rizičnih ulaganja iz *Tablice 6.2*, ali povećavamo iznose kovarijanci na 20%. Navedeni je slučaj zanimljiv jer tada Wienerov proces jednog rizičnog ulaganja značajnije utječe na onaj drugog rizičnog ulaganja. Svi se parametri za međupovezani rizični slučaj nalaze u *Tablici 6.3*.

Parametar	Iznos
1. Rizično ulaganje	$\mu = 4\,\%$, $\sigma^{11} = 20\,\%, \sigma^{12} = 20\,\%$
2. Rizično ulaganje	$\mu = 6\,\%$, $\sigma^{21} = 20\,\%, \sigma^{22} = 40\,\%$
Državna obveznica	$r = 3\,\%$
Investicijski horizont	$t \in [0, 1]$
Domena vrijednosti portfelja	$v \in [0, 20]$
Vjerojatnost negativnog ishoda	$\alpha = 1\,\%$
Skala vremenske diskretizacije	$\Delta t = 1/10$
Skala diskretizacije vrijednosti portfelja	$\Delta v = 0.8$
Faktor vremenskog dosega	$\rho = 0.3$
Kvadratna funkcija korisnosti	$U(v) = \kappa v - (1-\kappa)(v-\psi)^2$, $\kappa = 0.6$, $\psi = 5$

Tablica 6.3: Odabir iznosa parametara za numeričke račune gdje u portfelju imamo državnu obveznicu, umjereno rizično ulaganje te rizično ulaganje uz napomenu da je kovarijanca Wienerovih procesa rizičnog dijela portfelja netrivijalna i nezanemarivo velika.

Za razliku od prošlog potpoglavlja granični rizik $\varepsilon(v, t)$ ovdje promatramo kroz četiri slučaja. Prvo promatramo najučestaliji slučaj kada je granični rizik konstanta i to jednak 0.05. Drugi će slučaj biti onaj u kojemu se voditelju fonda koji ima više uspjeha daje više slobode i to na način da zadamo ovisnost graničnog rizika kao linearno rastuću funkciju:

$$\varepsilon(V_t, t) = -0.0015 \cdot (N_v \Delta v - V_t) + 0.35\,. \tag{6.231}$$

Za treći slučaj uzimamo granični rizik koji je minimalan oko ciljane vrijednosti portfelja te raste u oba smjera od dotične vrijednosti. Smisao takvog ograničenja na rizik jest taj da se voditelju fonda da više slobode u slučajevima kada je dalje od ciljane vrijednosti portfelja, dok se smanji njegova mogućnost intervencije u slučajevima kada je unutar tražene okoline ciljane vrijednosti portfelja. Pretpostavka ovakvog ograničenja jest da voditelj fonda djeluje *bona fide* u smislu da mu je jedina motivacija poštovati filozofiju ulaganja koja mu je nametnuta odabranom, u ovom slučaju

kvadratičnom, funkcijom korisnosti. Navedeno ograničenje je dano izrazom:

$$\varepsilon_{\gamma,\beta}(v) = \gamma \cdot e^{-\frac{v}{\psi}} \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2\psi} \cdot v\right) + \beta \cdot \tanh\left(\frac{v}{2\psi}\right) \ , \tag{6.232}$$

gdje su parametri zadani kao $(\gamma, \beta) = (0.35, 0.35)$. Na *Slici 6.10* se može vidjeti skica gornjeg ograničenja na rizik. Kao krajnji četvrti slučaj uzimamo korekciju trećeg slučaja. Korekcija je motivirana time da uvedemo vremensko ograničenje na naš sistem. Vremensko smo ograničenje uveli na način da postavljamo jače ograničenje na voditelja fonda ukoliko se nalazi u δ_v okolini ciljane vrijednosti portfelja te unutar $\delta_t \cdot T$ intervala od vremenskog horizonta, gdje su δ_v i δ_t slobodni parametri koje zadajemo u svim računima vezanim za ovo ograničenje rizika kao $(\delta_v, \delta_t) = (2, 0.25)$. Definiramo u kao minimalnu vrijednost ograničenja na rizik:

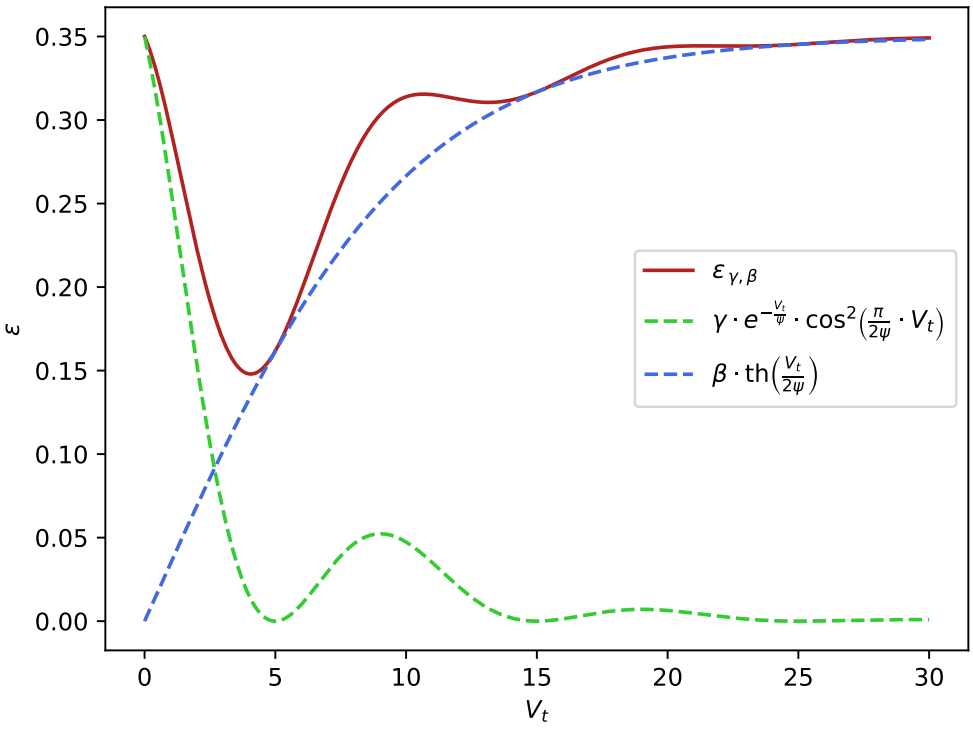
$$u = \min\left\{\varepsilon_{\gamma,\beta} : v \in \mathcal{V}\right\} \tag{6.233}$$

te uvodimo konačno četvrto ograničenje na rizik kao:

$$\varepsilon_{\gamma,\beta}(v,t) = \gamma \cdot e^{-\frac{V_t}{\psi}} \cdot \cos^2\left(\frac{\pi}{2\psi} \cdot V_t\right) + \beta \cdot \tanh\left(\frac{V_t}{2\psi}\right) +$$

$$-u \cdot \Theta\left(-\left|V_t - \psi\right| + \delta_V\right) \Theta\left(-\left|t - T\right| + \delta_t \cdot T\right) \ , \tag{6.234}$$

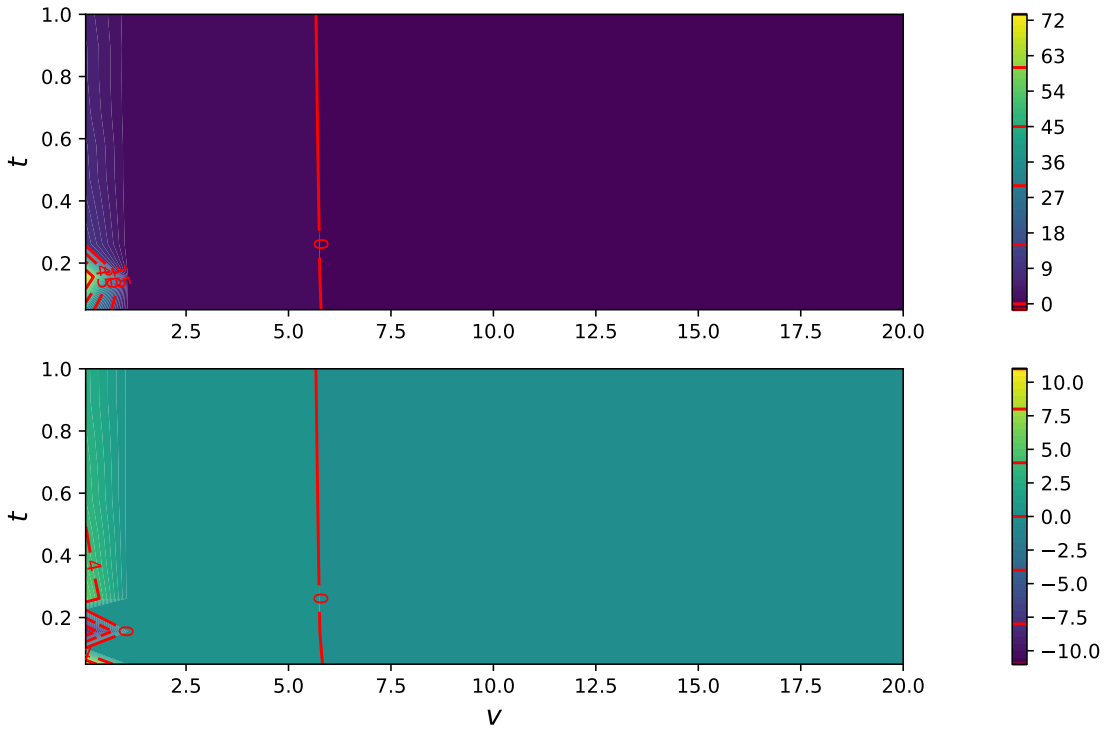
gdje je Θ u gornjoj jednadžbi *Heavisideova step funkcija*. Na *Slikama 6.11-6.13* se mogu vidjeti optimalni udjeli rizičnih ulaganja za redom zadane parametre sistema po *Tablici 6.1, 6.2, 6.3*. Ono što možemo zamijetiti usporedivši ponašanje oba optimalna udjela na *Slikama 6.11* i *6.12* jest da su optimalni udjeli općenito manji u slučaju kada imamo parametre postavljene prema *Tablici 6.2*. Navedeno ima smisla obzirom da su parametri u tom slučaju takvi da je sveukupni rizik u rizičnom dijelu portfelja veći te se stoga više ograničava ulaganje u iste. Osim toga načelno ponašanje jest isto u oba slučaja, imamo konačni maksimum u limesu $v \to 0$, saturaciju u asimptotskom limesu te padajuću vremensku ovisnost koja nestaje što se više udaljavamo od trivijalnog slučaja vrijednosti portfelja. Na *Slici 6.13* se mogu vidjeti optimalni udjeli za slučaj da se parametri sistema postave kao u *Tablici 6.3*. Navedene postavke sistema odgovaraju slučaju kada imamo bezrizično ulaganje, umjereno rizičnu dionicu te rizičnu dionicu s nezanemarivom kovarijancom između Wienerovih procesa dviju dionica. Ono što možemo zamijetiti na grafovima optimalnih ulaganja jest



Slika 6.10: Skica graničnog rizika ε za treći slučaj koji promatramo, zadan u jednadžbi (6.232). Parametri su zadani kao $(\gamma, \beta) = (0.35, 0.35)$.

to da sada u limesu $v \to 0$ voditelj fonda preferira rizičnija ulaganja, ali ne oba već samo ono koje je rizičnije. Navedeno je vrlo zanimljivo obzirom na to da je jedina motivacija voditelja fonda u tom trenutku vratiti se što bliže ciljanoj vrijednosti portfelja. Što više voditelj fonda uloži u rizičniju dionicu to si daje veću mogućnost da se vrati u povoljno područje bogatnosne domene te uz to da povuče za sobom vrijednost manje rizične dionice, obzirom da imaju nezanemarivu kovarijancu. Drugi bi slučaj bio uzeti u obzir da granična vrijednost $\mathfrak{B}$ evoluira kao vrijednost bezrizičnog ulaganja, no razlike u navedenim ovisnostima su zanemarive stoga te slučajeve ne prikazujemo.

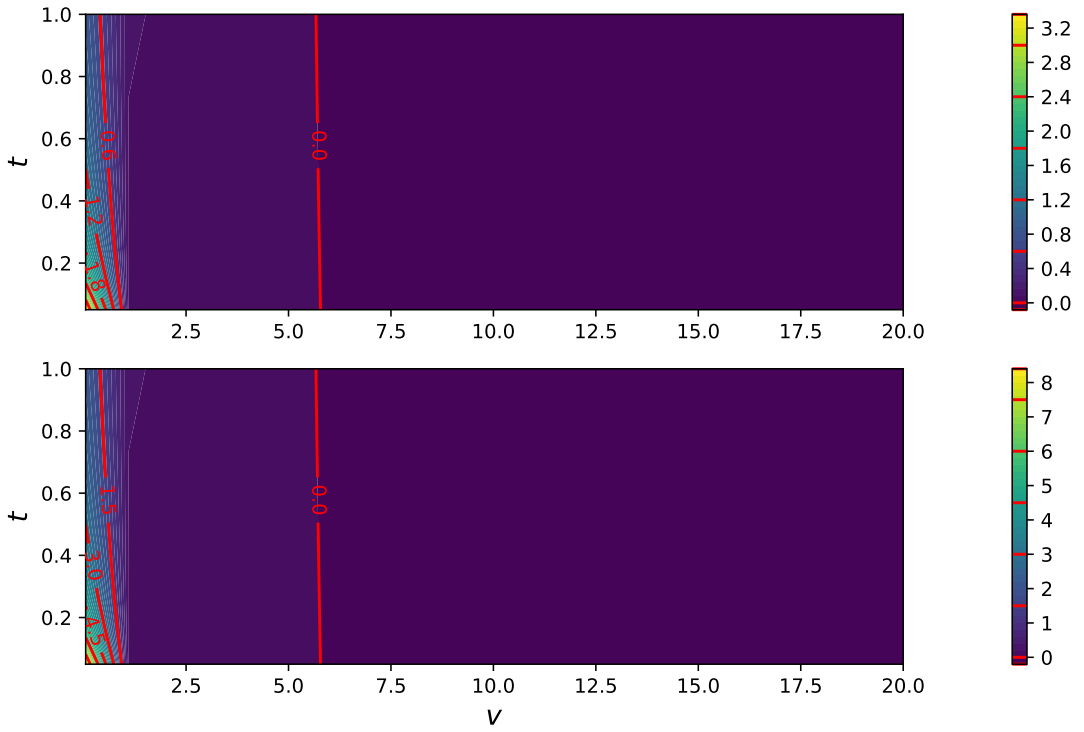
Na *Slikama 6.14-6.16* se može vidjeti ukupna vrijednost rizičnog dijela portfelja za redom slučajeve postavki sistema prema *Tablici 6.1, 6.2* i *6.3*. Navedenu ovisnost dobijemo tako da množimo vrijednost ukupnog portfelja s sumom svih rizičnih komponenti θ_t vektora, $V \cdot \left(\theta_t^{(1)} + \theta_t^{(2)}\right)$. Kao što se može zamijetiti s navedenih grafova kako vrijednost portfelja teži u nulu tako i sve plohe teže u nulu te imamo promjenu ponašanja nakon ciljane vrijednosti portfelja, obzirom da optimalni udjeli saturiraju u konstantnu malu i negativnu vrijednost u asimptotskom limesu. Na-



Slika 6.11: Skica optimalnog rizičnog ulaganja uzevši u obzir da je evolucija granične vrijednosti $\mathfrak{B}$ dana kao očekivanje vrijednosti portfelja, da je ograničenje na rizik dano s TCE ovisnošću te da su parametri sistema zadani kao u *Tablici 6.1*. Ograničenje na rizik ε jest konstantno i jednako 0.05. Na gornjem se konturnom grafu nalazi ovisnost optimalnog ulaganja u prvu rizičnu dionicu o vremenu i ukupnom bogatstvu, dok se na donjem nalazi za drugu.

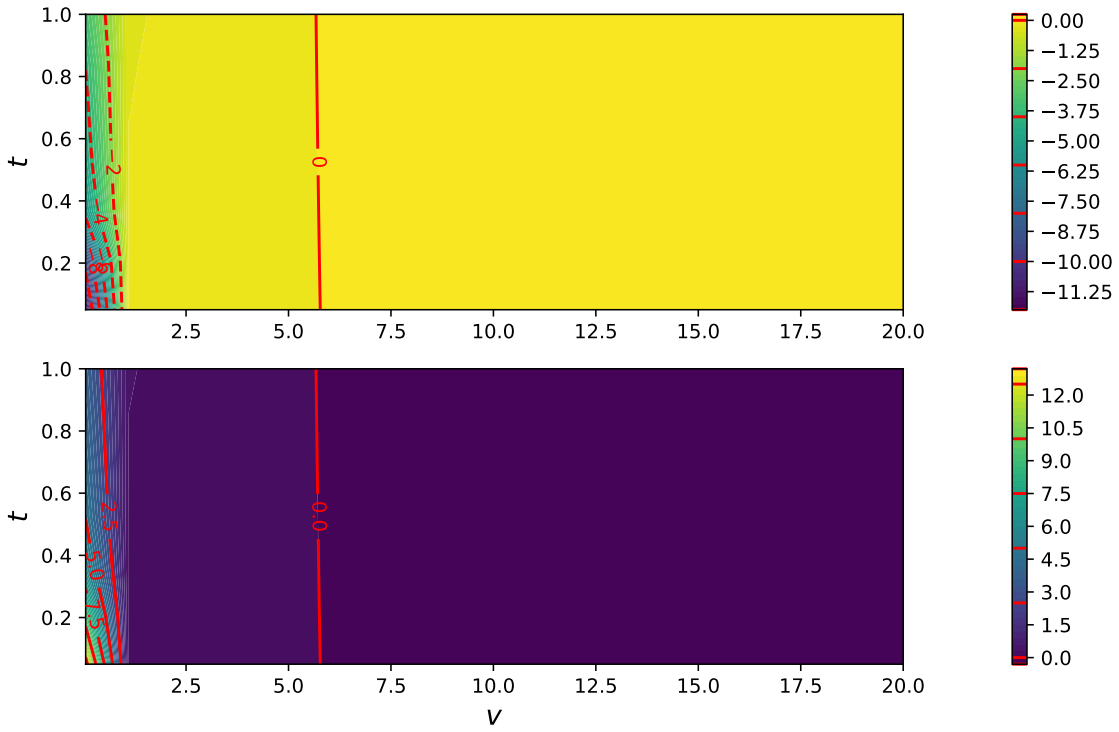
dalje možemo zamijetiti kako povećanje rizika i međuutjecaja dionica uzrokuje da se smanjuje općenita vrijednost rizičnog dijela portfelja kao što bi bilo i očekivano. Također treba napomenuti kako je ponašanje na *Slici 6.16* puno manje ujednačeno u limesu $v \to 0$ nego za ostale slučajeve. Navedeno je uzrokom toga što algoritam preferira rizičniju dionicu te time uklanja sav kapital uložen u manje rizičnu dionicu.

Ponašanje u slučaju da graničnu vrijednost $\mathfrak{B}$, zamijenimo vrijednošću bezrizičnog ulaganja jest identično. Štoviše, iznos optimalne strategije se ne mijenja značajno, stoga ovisnosti analogne onima na *Slikama 6.11-6.13* vezane za graničnu vrijednost danu kao vrijednost bezrizičnog ulaganja, nećemo prikazivati. Na *Slikama 6.17-6.18* se može vidjeti ponašanje optimalnih ulaganja u rizični dio portfelja u slučaju kada je granična vrijednost rizika ε linearno rastuća u vrijednosti portfelja, odnosno konkretno jednaka onoj iz jednadžbe (6.231). Ono što možemo zamijetiti jest to da je dodatna sloboda koja je dana uspješnijem voditelju fonda uzrokovala to da postoji



Slika 6.12: Skica optimalnog rizičnog ulaganja uzevši u obzir da je evolucija granične vrijednosti $\mathfrak{B}$ dana kao očekivanje vrijednosti portfelja, da je ograničenje na rizik dano s TCE ovisnošću te da su parametri sistema zadani kao u *Tablici 6.2*. Ograničenje na rizik ε jest konstantno i jednako 0.05. Na gornjem se konturnom grafu nalazi ovisnost optimalnog ulaganja u prvu rizičnu dionicu o vremenu i ukupnom bogatstvu, dok se na donjem nalazi za drugu.

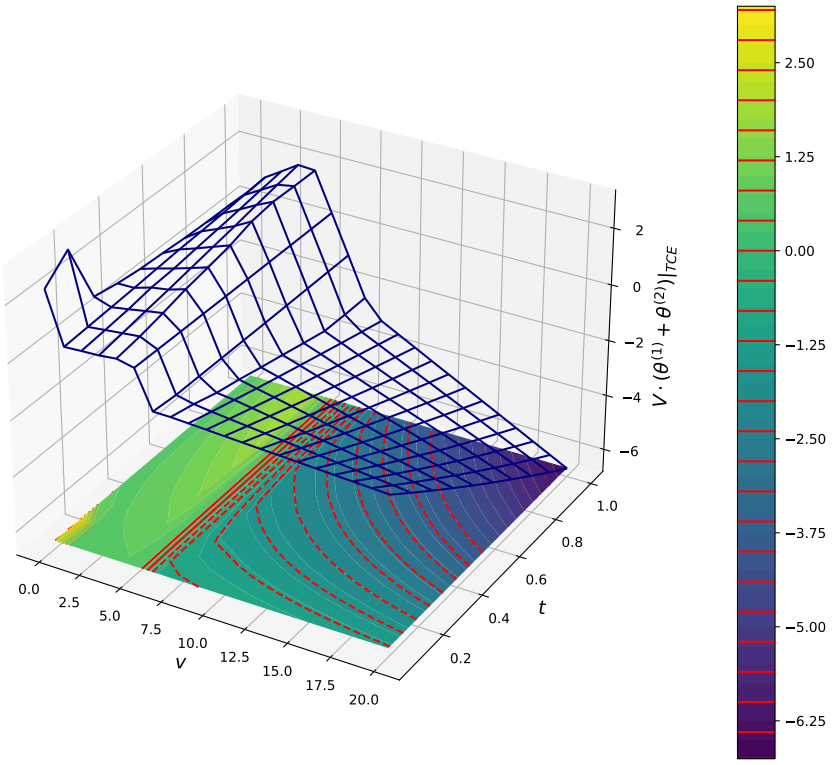
dominantnija vremenska ovisnost. Navedena je ovisnost jače izražena u onom limesu u kojem bi je očekivali, $v \to 0$, no također se može zamijetiti i u tranzijentnom intervalu od $v = 0$ do ciljane vrijednosti portfelja. Osim širenja vremenske ovisnosti dublje u tranzijentni interval, načelno ponašanje optimalnih udjela ulaganja prvu i drugu dionicu ostaje isto kao i u slučaju kada je granična vrijednosti ε konstantna. Ukoliko bi stavili graničnu vrijednost ε da prati ovisnost iz jednadžbe (6.232) ne bi bilo velikih promjena. Jedina bi razlika bila to što bi za slučaj postavki iz *Tablice 6.2* vrijednosti optimalnih ulaganja sporije saturirale te što bi više ulazili u tranzijentni interval to bi više nestajala vremenska ovisnost u rezultatu. Navedeno se može vidjeti na *Slici 6.19*. Na *Slikama 6.20* i *6.21* se mogu vidjeti optimalne vrijednosti rizičnog dijela portfelja, redom za slučaj kada je ograničenje na rizik ε dano s jednadžbom (6.231) te za slučaj kada je dano s jednadžbom (6.232). Posljednji slučaj koji bi trebalo promotriti jest onaj kada je ograničenje ne mjeru rizika dano s jednadžbom



Slika 6.13: Skica optimalnog rizičnog ulaganja uzevši u obzir da je evolucija granične vrijednosti $\mathfrak{B}$ dana kao očekivanje vrijednosti portfelja, da je ograničenje na rizik dano s TCE ovisnošću te da su parametri sistema zadani kao u *Tablici 6.3*. Ograničenje na rizik ε jest konstantno i jednako 0.05. Na gornjem se konturnom grafu nalazi ovisnost optimalnog ulaganja u prvu rizičnu dionicu o vremenu i ukupnom bogatstvu, dok se na donjem nalazi za drugu.

(6.234), odnosno kada uvodimo diskretnu vremensku ovisnost. Dodatak navedenog člana ne čini preveliku razliku u rezultatu nasprem rezultata vezanih za ograničenje dano s jednadžbom (6.232). Razlog za navedeno jest taj što je najveća razlika između ograničenja u slučaju kada se sustav nalazi u uskoj okolini od ciljane vrijednosti portfelja. Iz takvih stanja sistem ne teži izaći te stoga bilo kakvo ograničenje na rizik, pa onda i takvo kakvo smo konstruirali neće činiti razliku jer se ne očekuje nikakva promjena stanja.

Sveukupno usporedivši rezultate numeričke analize VaR mjera rizika te TCE mjera rizika generiraju načelno sličnu razinu ograničenja.



Slika 6.14: Skica vrijednosti rizičnog dijela portfelja $V_t \cdot \left(\theta_t^{(1)} + \theta_t^{(2)}\right)$ uzevši u obzir da je evolucija granične vrijednosti $\mathfrak{B}$ dana kao očekivanje vrijednosti portfelja, da je ograničenje na rizik dano s TCE ovisnošću te da su parametri sistema zadani kao u *Tablici 6.1*. Ograničenje na rizik ε jest konstantno i jednako 0.05.

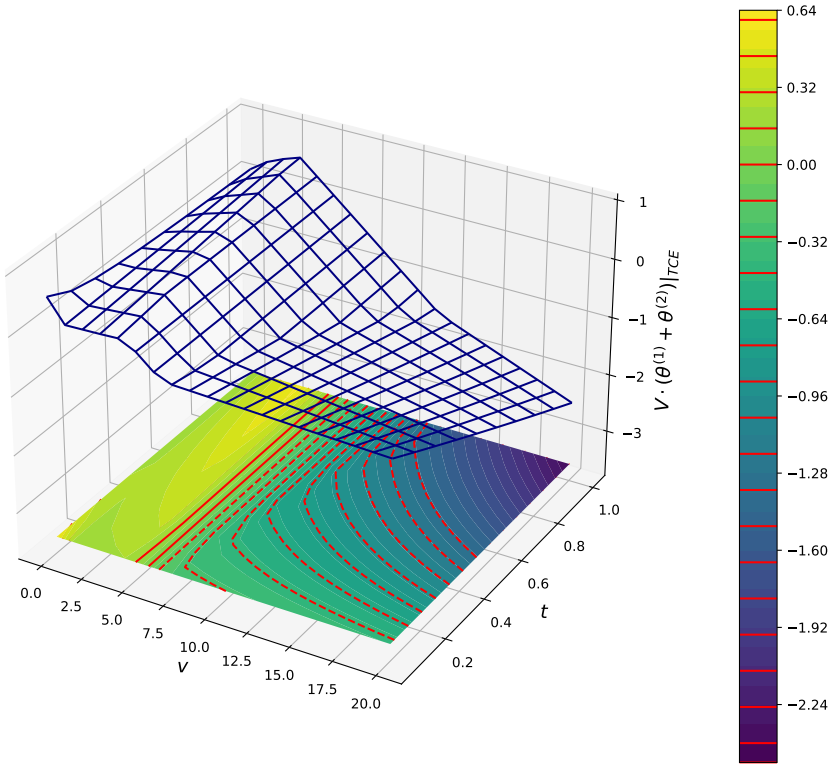
6.3 *Expected shortfall (ES)*

Sveukupni problem optimizacije jest ekvivalentan sustavu (6.217) do na zamjenu VaR mjere rizika s ES. Osnovni SQP problem glasi:

$$\begin{cases} \text{minimiziraj} - \mathrm{D}^{\boldsymbol{\theta}_t} J(v,t), \text{po } \boldsymbol{\theta}_t \\ \text{t.d. } \mathrm{ES}_t \leq \varepsilon(V_t, t), \quad \text{za svaki } t \in [0, T\rangle \end{cases} . \tag{6.235}$$

Koristeći rezultate *Propozicije 4.4.3* te gornji sustav raspisujemo Lagrangijan sistema:

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\theta}_t(v,t), \lambda(v,t)) = v \cdot \partial_v J(v,t) \left(\boldsymbol{\theta}_t^T \cdot \overrightarrow{(\mu - r)} + r\right) + \frac{1}{2} v^2 \|\boldsymbol{\theta}_t^T \cdot \hat{\sigma}\|^2 \partial_v^2 J(v,t) +$$



Slika 6.15: Skica vrijednosti rizičnog dijela portfelja $V_t \cdot \left(\theta_t^{(1)} + \theta_t^{(2)}\right)$ uzevši u obzir da je evolucija granične vrijednosti $\mathfrak{B}$ dana kao očekivanje vrijednosti portfelja, da je ograničenje na rizik dano s TCE ovisnošću te da su parametri sistema zadani kao u *Tablici 6.2*. Ograničenje na rizik ε jest konstantno i jednako 0.05.

$$+U(v) - \lambda\Big\{\Phi(\mathfrak{B}_{t+\Delta t})\mathfrak{B}_{t+\Delta t} - v\cdot\Phi\left(\mathfrak{B}_{t+\Delta t} - \|\boldsymbol{\theta}_t^T\cdot\hat{\sigma}\|\sqrt{\Delta t}\right)\, e^{\left(\boldsymbol{\theta}_t^T\cdot\overrightarrow{(\mu-r)}+r\right)\Delta t} - \varepsilon(v,t)\Big\}\,, \tag{6.236}$$

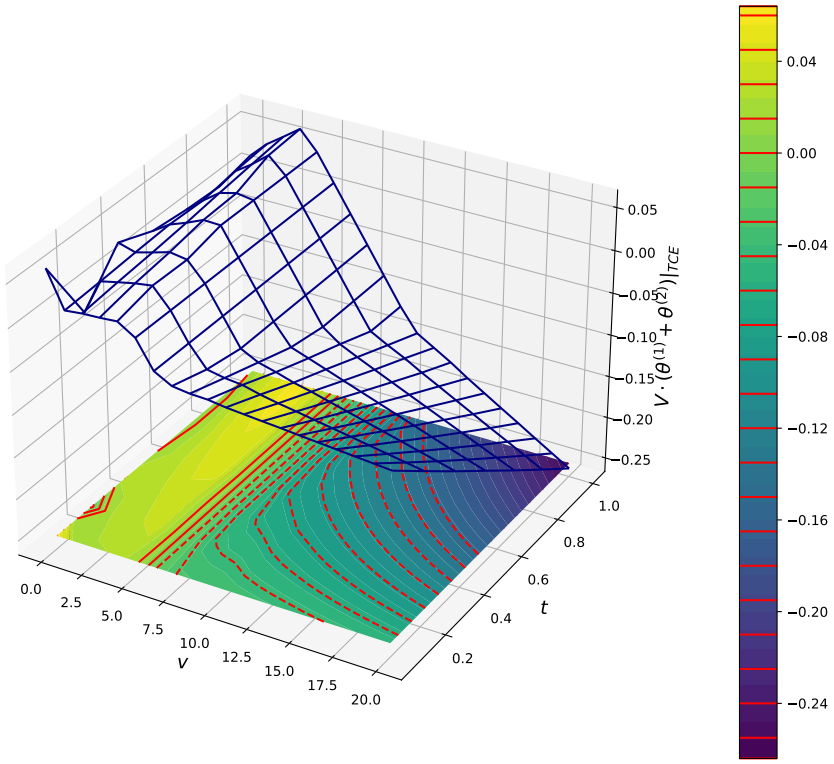
Kao gradijent Lagrangijana slijede jednadžbe gibanja za $\boldsymbol{\theta}_t$ te λ:

$$v\cdot\partial_v J\overrightarrow{(\mu-r)} + \frac{1}{2}v^2\partial_v^2 J\,\hat{\sigma}\hat{\sigma}^T\cdot\boldsymbol{\theta}_t +$$

$$+\lambda v\cdot\Bigg[\overrightarrow{(\mu-r)}\Delta t\cdot\Phi\left(\mathfrak{B}_{t+\Delta t} - \|\boldsymbol{\theta}_t^T\cdot\hat{\sigma}\|\sqrt{\Delta t}\right)\, e^{\left(\boldsymbol{\theta}_t^T\cdot\overrightarrow{(\mu-r)}+r\right)\Delta t} +$$

$$-e^{\left(\boldsymbol{\theta}_t^T\cdot\overrightarrow{(\mu-r)}+r\right)\Delta t}\cdot\frac{\sqrt{\Delta t}}{2}\frac{\hat{\sigma}\hat{\sigma}^T\cdot\boldsymbol{\theta}_t}{\|\boldsymbol{\theta}_t^T\cdot\hat{\sigma}\|}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{1}{2}\left(\mathfrak{B}_{t+\Delta t}-\|\boldsymbol{\theta}_t^T\cdot\hat{\sigma}\|\sqrt{\Delta t}\right)^2}\Bigg] = \mathbf{0}\,, \tag{6.237}$$

$$H(v,t)\equiv\Phi(\mathfrak{B}_{t+\Delta t})\mathfrak{B}_{t+\Delta t} - v\cdot\Phi\left(\mathfrak{B}_{t+\Delta t} - \|\boldsymbol{\theta}_t^T\cdot\hat{\sigma}\|\sqrt{\Delta t}\right)\, e^{\left(\boldsymbol{\theta}_t^T\cdot\overrightarrow{(\mu-r)}+r\right)\Delta t} + \varepsilon(v,t) = 0\,, \tag{6.238}$$



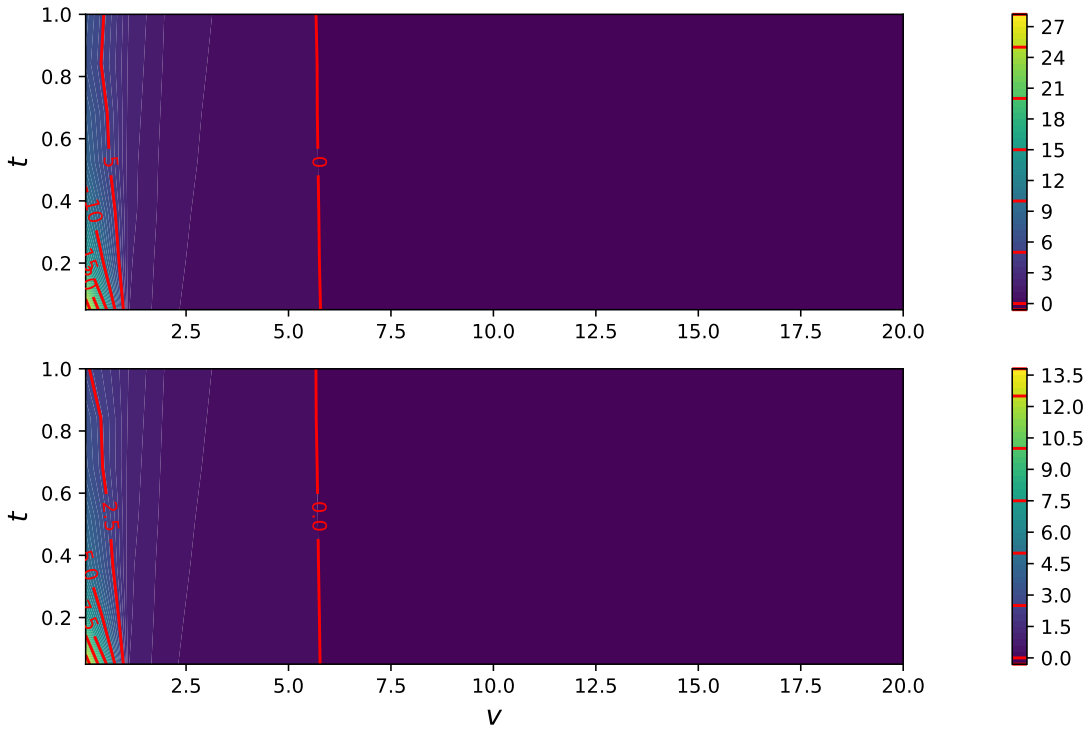
Slika 6.16: Skica vrijednosti rizičnog dijela portfelja $V_t \cdot \left(\theta_t^{(1)} + \theta_t^{(2)}\right)$ uzevši u obzir da je evolucija granične vrijednosti $\mathfrak{B}$ dana kao očekivanje vrijednosti portfelja, da je ograničenje na rizik dano s TCE ovisnošću te da su parametri sistema zadani kao u *Tablici 6.3*. Ograničenje na rizik ε jest konstantno i jednako 0.05.

uz dodatni uvjet:

$$\lambda(v,t)H(v,t) = 0, \quad \lambda(v,t) \geq 0\ . \tag{6.239}$$

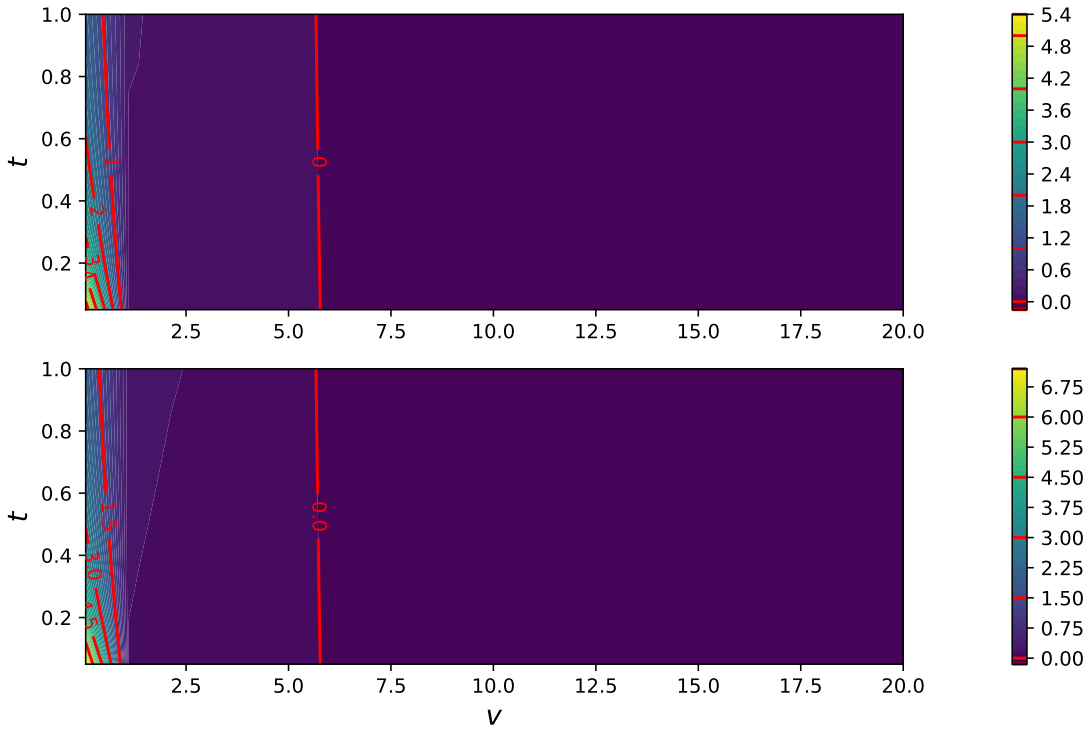
Iznosi svih parametara koji su nam potrebni kako bi izvršili numeričke račune su isti kao i za prošla dva slučaja te dani u *Tablici 6.1* te u *Tablici 6.2*. Rezultati koji se dobiju za optimalni portfelj su poprilično slični onima koji se dobiju za ostale dvije mjere rizika. Na *Slici 6.22* prikazujemo rezultate za optimalne udjele rizičnog dijela portfelja uz to da je ograničenje na mjeru rizika ε konstantno i jednako 0.05, dok na *Slici 6.23* prikazujemo rezultate za vrijednost rizičnog dijela portfelja uz prije navedene uvjete.

Na navedenim je slikama uzeto da je granična vrijednost $\mathfrak{B}$ dana kao očekivanje vrijednosti portfelja. Ukoliko bi zamijenili graničnu vrijednost takvom da bude jed-



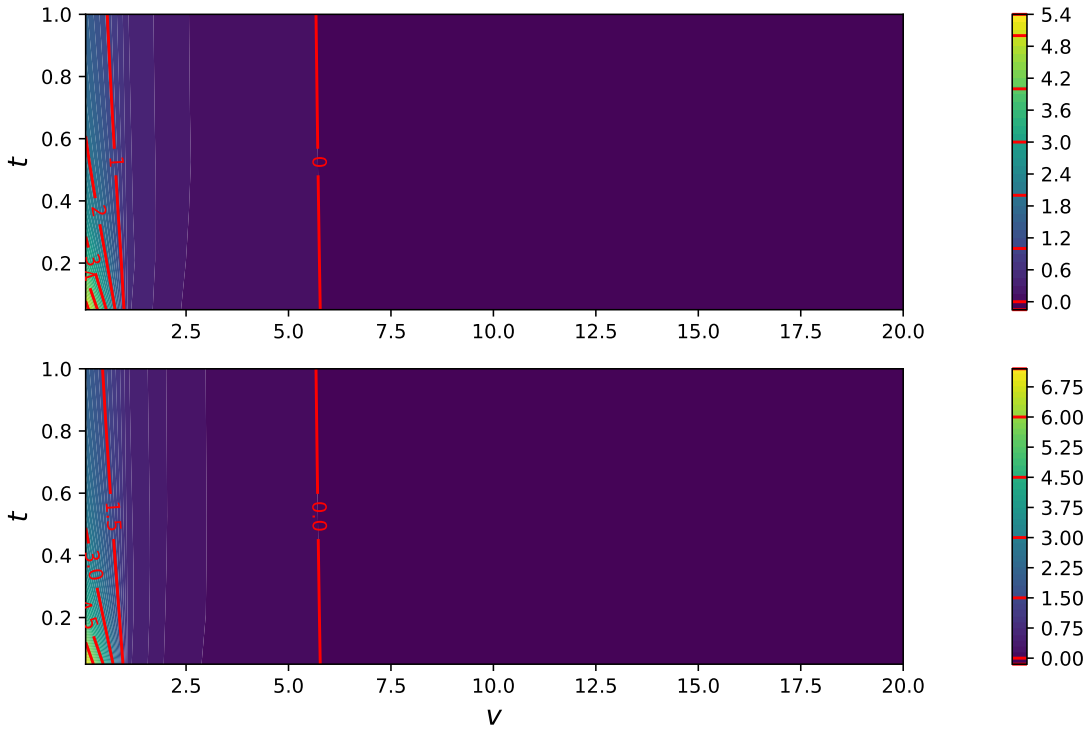
Slika 6.17: Skica optimalnog rizičnog ulaganja uzevši u obzir da je evolucija granične vrijednosti $\mathfrak{B}$ dana kao očekivanje vrijednosti portfelja, da je ograničenje na rizik dano s TCE ovisnošću te da su parametri sistema zadani kao u *Tablici 6.1*. Ograničenje na rizik ε jest linearno rastuće i dano jednadžbom (6.231). Na gornjem se konturnom grafu nalazi ovisnost optimalnog ulaganja u prvu rizičnu dionicu o vremenu i ukupnom bogatstvu, dok se na donjem nalazi za drugu.

naka bezrizičnom ulaganju, ne bi se ovisnosti značajno promijenile ni u vrijednostima ni u ponašanju stoga te grafove nećemo prikazivati. Na *Slikama 6.25* i *6.26* se nalaze optimalni rizični udjeli i optimalna vrijednost rizičnog dijela portfelja ukoliko je mjera rizika dana s ES mjerom. Parametri sistema su zadani kao u *Tablici 6.3* te je ograničenje na rizik linearno rastuće i dano jednadžbom (6.231). Slučaj sistema koji je zadan parametrima po *Tablici 6.3* jest krajnje interesantan obzirom da u optimalnim udjelima najviše dolazi do izražaja panika koju voditelj fonda s kvadratičnom funkcijom korisnosti, osjeća u limesu $v \to 0$. Naime, u navedenom slučaju voditelj fonda bira uložiti što je više moguće u rizičniju od dvije dionice računavši s time da ukoliko mu ona počne rasti da će povući za sobom i manje rizičnu obzirom na visok stupanj međupovezanosti. Ponašanje prema *Slici 6.25* možemo usporediti s ponašanjem na *Slici 6.13* gdje je mjera rizika dana s TCE ovisnošću te je ograničenje na rizik konstantno i jednako 0.05. To da postoji određena razlika u ograničenju na



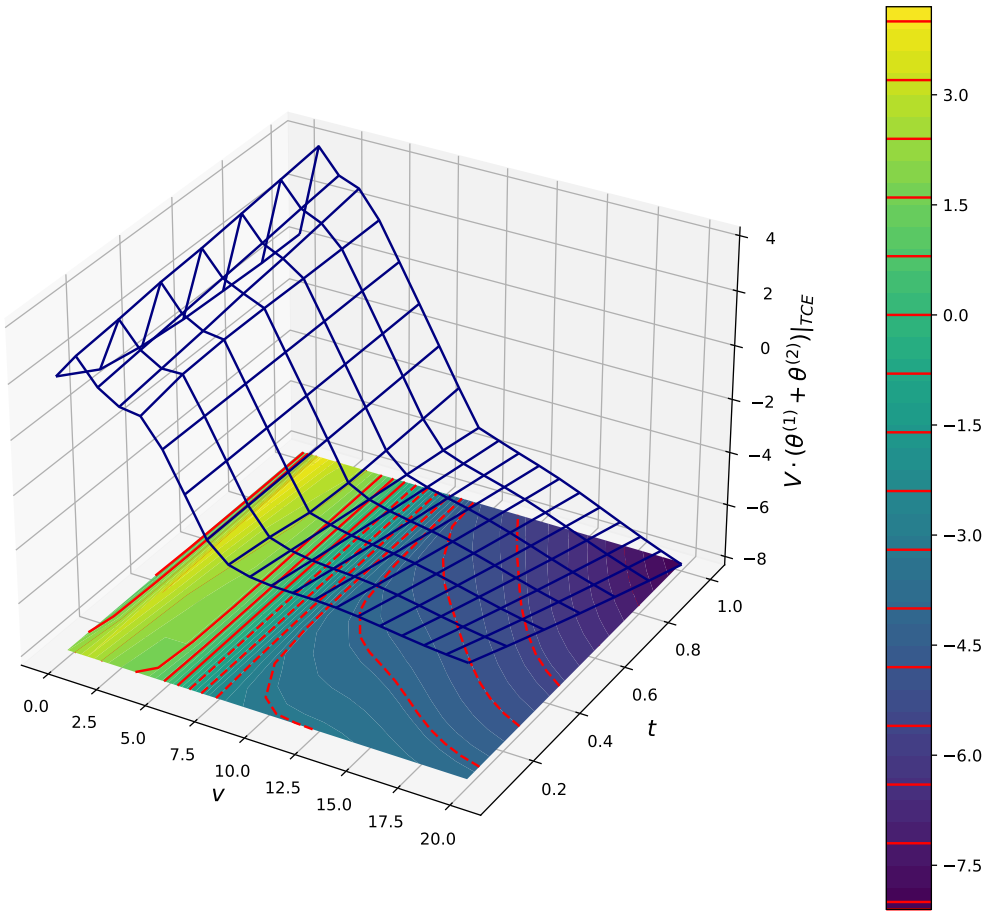
Slika 6.18: Skica optimalnog rizičnog ulaganja uzevši u obzir da je evolucija granične vrijednosti $\mathfrak{B}$ dana kao očekivanje vrijednosti portfelja, da je ograničenje na rizik dano s TCE ovisnošću te da su parametri sistema zadani kao u *Tablici 6.2*. Ograničenje na rizik ε jest linearno rastuće i dano jednadžbom (6.231). Na gornjem se konturnom grafu nalazi ovisnost optimalnog ulaganja u prvu rizičnu dionicu o vremenu i ukupnom bogatstvu, dok se na donjem nalazi za drugu.

rizik ε nam nije problematično, obzirom da nas ponajviše zanima ponašanje u limesu $v \to 0$, u čijoj su okolini otprilike jednake vrijednosti ograničenja te divergiraju što više ulazimo u asimptotski limes bogatstva v. Uzevši navedeno u obzir možemo usporedbom zaključiti kako ES mjera rizika manje ograničava voditelja fonda u kriznim stanjima fonda, odnosno limesu $v \to 0$, vezano za jako međupovezana rizična ulaganja od TCE mjere rizika. Nadalje, koristeći ES mjeru rizika u navedenom limesu $v \to 0$, si ostavljamo veći vremenski okvir za drastičnije mjere ulaganja. Navedeno se vidi po tome što se ekstremne vrijednosti ulaganja u rizičniju dionicu javljaju sve do polovine vremenskog horizonta, dok su u slučaju *Slike 6.13* i TCE mjere rizika ograničene u okolini vremenskog ishodišta. Na *Slici 6.26* vidimo kako se u navedenom interesantnom slučaju udjeli optimalnih rizičnih ulaganja sumiraju u vrijednosti obrnutih predznaka od očekivanih usporedivši s ostalim slučajevima. Naime, inače bi imali da se udjeli sumiraju u pozitivnu vrijednost u limesu $v \to 0$, dok nakon



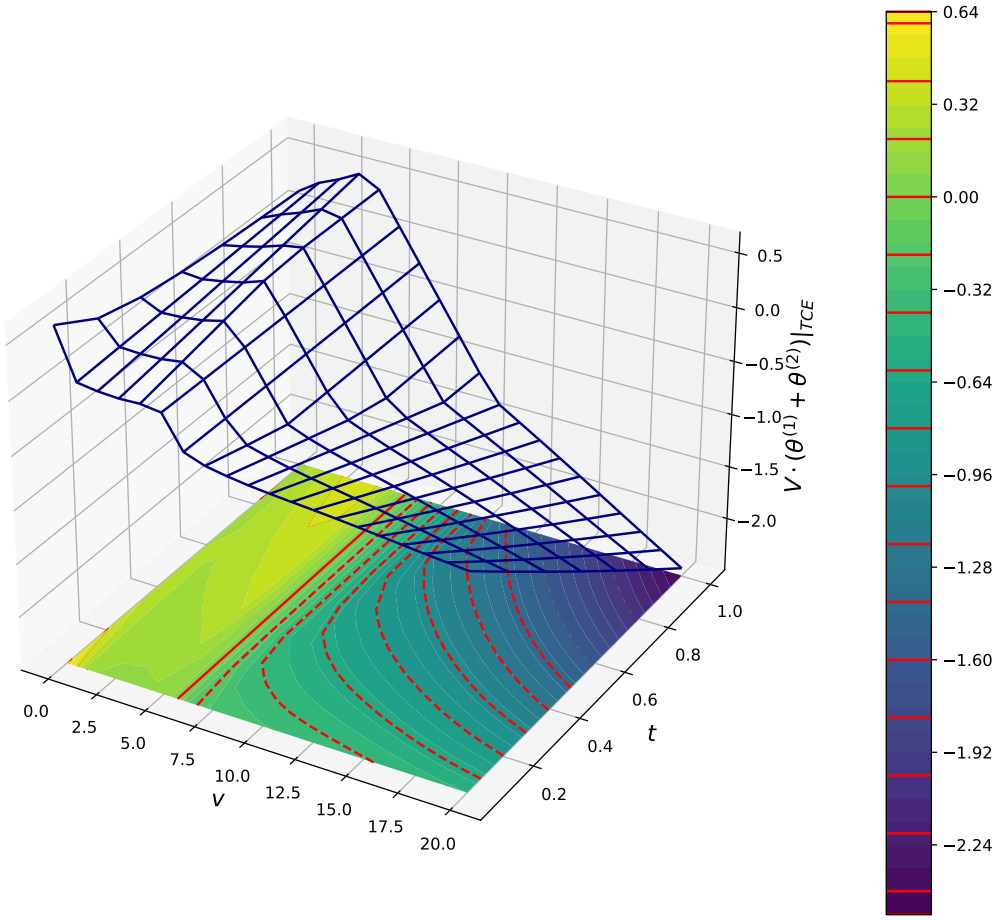
Slika 6.19: Skica optimalnog rizičnog ulaganja uzevši u obzir da je evolucija granične vrijednosti $\mathfrak{B}$ dana kao očekivanje vrijednosti portfelja, da je ograničenje na rizik dano s TCE ovisnošću te da su parametri sistema zadani kao u *Tablici 6.2*. Ograničenje na rizik ε jest složene ovisnosti i dano jednadžbom (6.232). Na gornjem se konturnom grafu nalazi ovisnost optimalnog ulaganja u prvu rizičnu dionicu o vremenu i ukupnom bogatstvu, dok se na donjem nalazi za drugu.

saturacije u asimptotskom području teži suma u malu negativnu vrijednost. Ovdje je obrnuto iz čega možemo zaključiti da je više ideja zadužiti se preko manje rizične dionice nego uložiti maksimalno u više rizičnu dionicu u limesu $v \to 0$, prema optimizacijskom algoritmu. Na *Slici 6.24* se nalazi ovisnost tangensa hiperbolnog udjela rizičnih ulaganja ukoliko ne uzimamo nikakva ograničenja na rizik u obzir u ovisnosti o bogatstvu i vremenu. Parametri sistema su na navedenom prikazu dani s *Tablicom 6.3* što je uzrokom negativne divergencije u limesu $v \to 0$. Navedena ovisnost predstavlja *ansatz* za SQP algoritam u razmatranjima vezanim za visoko međupovezana rizična ulaganja. Vidimo da koju god mjeru rizika koristili, bila to VaR, TCE ili ES mjera rizika, ne možemo korigirati neintuitivnu optimalnu strategiju ulaganja generiranu kvadratičnom funkcijom korisnosti, odnosno u asimptotskom području vrijednosti portfelja udio uložen u rizične dionice trne, dok raste kako vrijednost pada ispod ciljane vrijednosti ψ. Navedeno nam govori da o strategiji ulaga-



Slika 6.20: Skica vrijednosti rizičnog dijela portfelja $V_t \cdot \left(\theta_t^{(1)} + \theta_t^{(2)}\right)$ uzevši u obzir da je evolucija granične vrijednosti $\mathfrak{B}$ dana kao očekivanje vrijednosti portfelja, da je ograničenje na rizik dano s TCE ovisnošću te da su parametri sistema zadani kao u *Tablici 6.1*. Ograničenje na rizik ε jest dano u jednadžbi (6.231).

nja zaključujemo iz empirijske funkcije korisnosti voditelja fonda te iščitavanjem iz ponašanja iste zaključujemo o budućim tendencijama promatranog voditelja fonda. Poglavito jest zanimljivo promotriti ponašanje sistema u slučaju kada postoji nezanemariva međupovezanost dionica. Konkretno slučaj zadan kovarijancom od 20%, kada algoritam optimizira sistem na način da u limesu $v \to 0$, sistem u potpunosti zanemaruje manje rizična ulaganja te sav kapital stavlja u najrizičniju dionicu imajući na umu da se mora vratiti ka ciljanoj vrijednosti portfelja te da će potencijalni porast najrizičnije dionice, zbog netrivijalne i nezanemarive kovarijance Wienerovih procesa

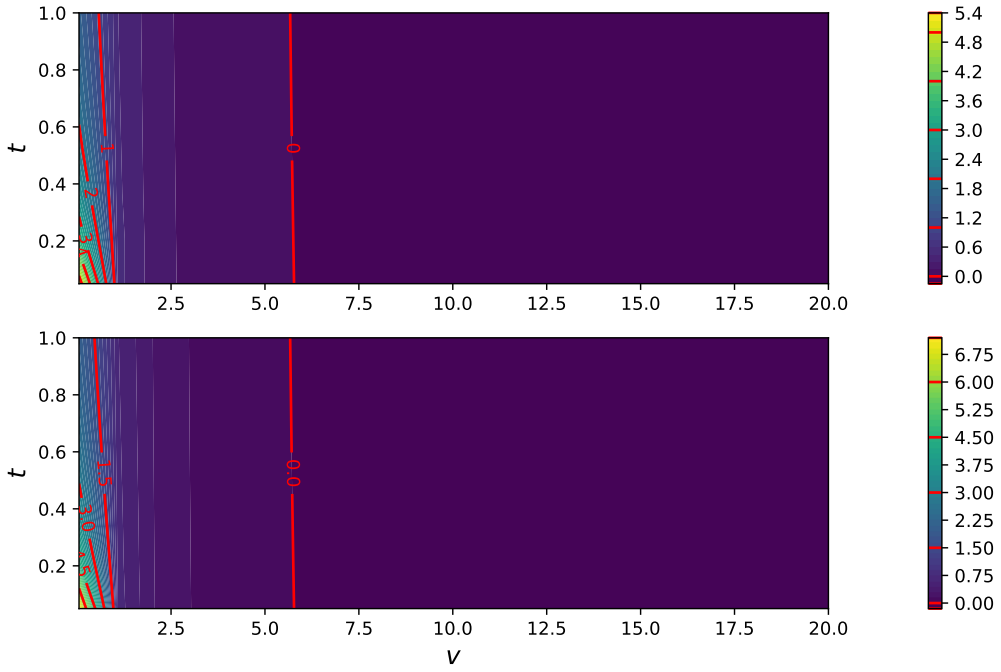


Slika 6.21: Skica vrijednosti rizičnog dijela portfelja $V_t \cdot \left(\theta_t^{(1)} + \theta_t^{(2)}\right)$ uzevši u obzir da je evolucija granične vrijednosti $\mathfrak{B}$ dana kao očekivanje vrijednosti portfelja, da je ograničenje na rizik dano s TCE ovisnošću te da su parametri sistema zadani kao u *Tablici 6.2*. Ograničenje na rizik ε jest dano u jednadžbi (6.232).

dionica, povući za sobom manje rizično ulaganje.

7 Zaključak

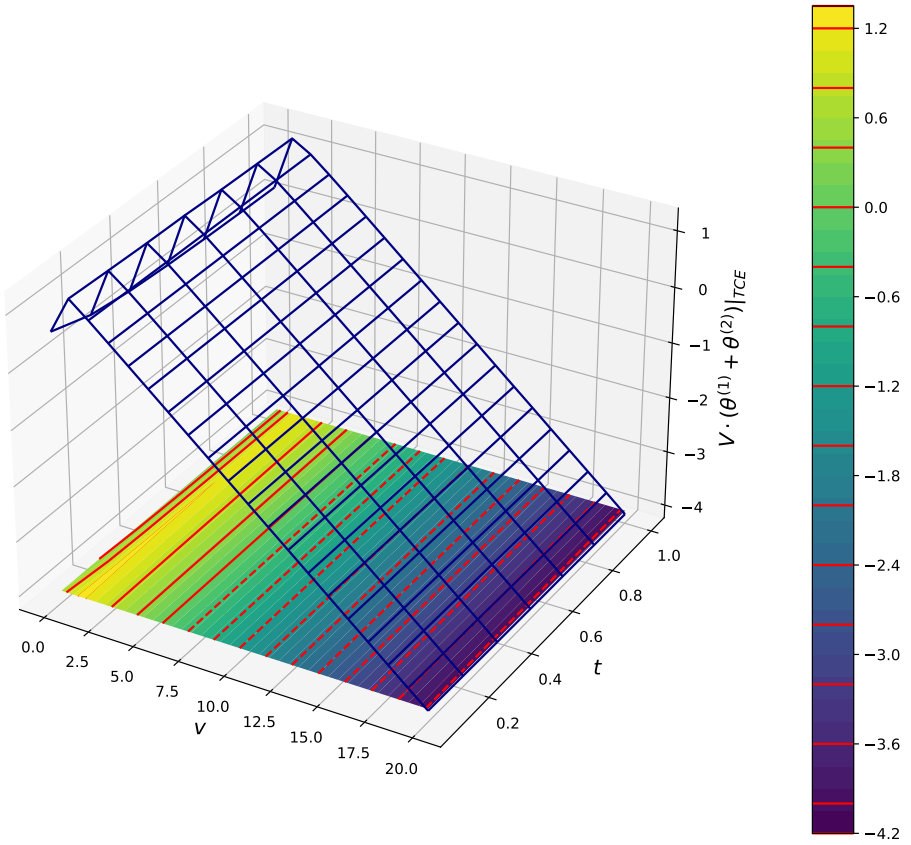
Uveli smo fizikalnu pozadinu problematike HJB jednadžbe kroz problem brahistokrone krivulje. Navedeni smo problem riješili na dva načina, koristeći Fermatov optički princip te koristeći varijacijski postupak. Nadalje koristimo varijacijski postupak kako bi uveli općenito ideju funkcionala korisnosti te njegove optimizacije, od-



Slika 6.22: Skica optimalnog rizičnog ulaganja uzevši u obzir da je evolucija granične vrijednosti $\mathfrak{B}$ dana kao očekivanje vrijednosti portfelja, da je ograničenje na rizik dano s ES ovisnošću te da su parametri sistema zadani kao u *Tablici 6.2*. Ograničenje na rizik ε jest konstantno i jednako 0.05. Na gornjem se konturnom grafu nalazi ovisnost optimalnog ulaganja u prvu rizičnu dionicu o vremenu i ukupnom bogatstvu, dok se na donjem nalazi za drugu.

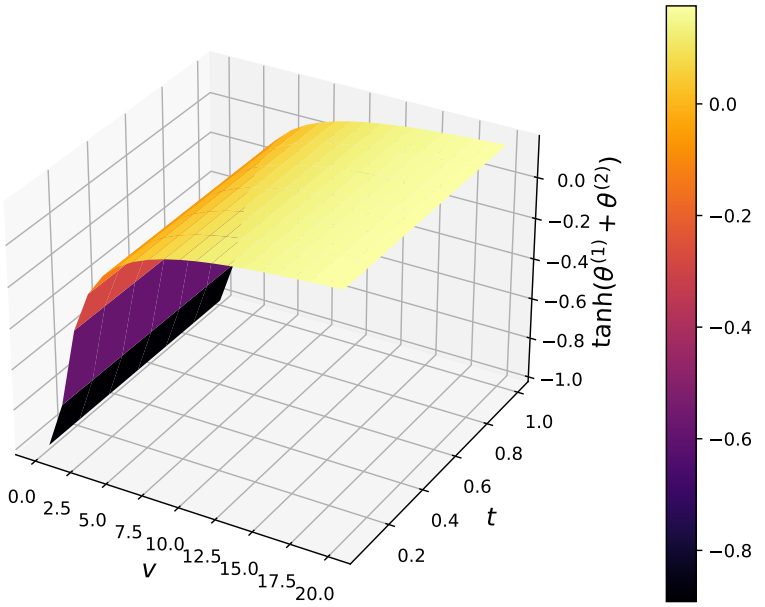
nosno traženja optimalne trajektorije kroz konfiguarcijski prostor stanja. Definiramo nužni Euler-Lagrangeov i Legendreov uvjet na optimalnost trajektorije pri optimizaciji varijacijskog funkcionala. Poglavlje smo zaokružili raspisivanjem Hamiltonovih jednadžbi, izvodom Hamilton-Jacobi jednadžbe te rješavanjem na dva trivijalna primjera.

Izveli smo Weierstrassov uvjet optimlanosti, koji je nužan, ali ne i dovoljan uvjet kako bi odabrana trajektorija u konfiguracijskom prostoru bila strogi minimum optimizacijskog funkcionala. Nadalje uveli smo Bellmanov pristup dinamičkog programiranja te izveli HJB jednadžbu. Pokazali smo kako rješenje HJB jednadžbe odgovara optimalnoj funkciji troška zadanog problema koja se može dobiti pristupom dinamičkog programiranja. Navedeno je jako važno obzirom na to da problem koji je u srži zadan kroz teoriju dinamičkog programiranja, kao što su problemi u ekonofizici koje smo rješavali, možemo zamijeniti analognim problemom s HJB jednadžbom. U tom se trenutku javlja velika razlika između teorije dinamičkog progra-



Slika 6.23: Skica vrijednosti rizičnog dijela portfelja $V_t \cdot \left(\theta_t^{(1)} + \theta_t^{(2)}\right)$ uzevši u obzir da je evolucija granične vrijednosti $\mathfrak{B}$ dana kao očekivanje vrijednosti portfelja, da je ograničenje na rizik dano s ES ovisnošću te da su parametri sistema zadani kao u *Tablici 6.2*. Ograničenje na rizik ε jest konstantno i jednako 0.05.

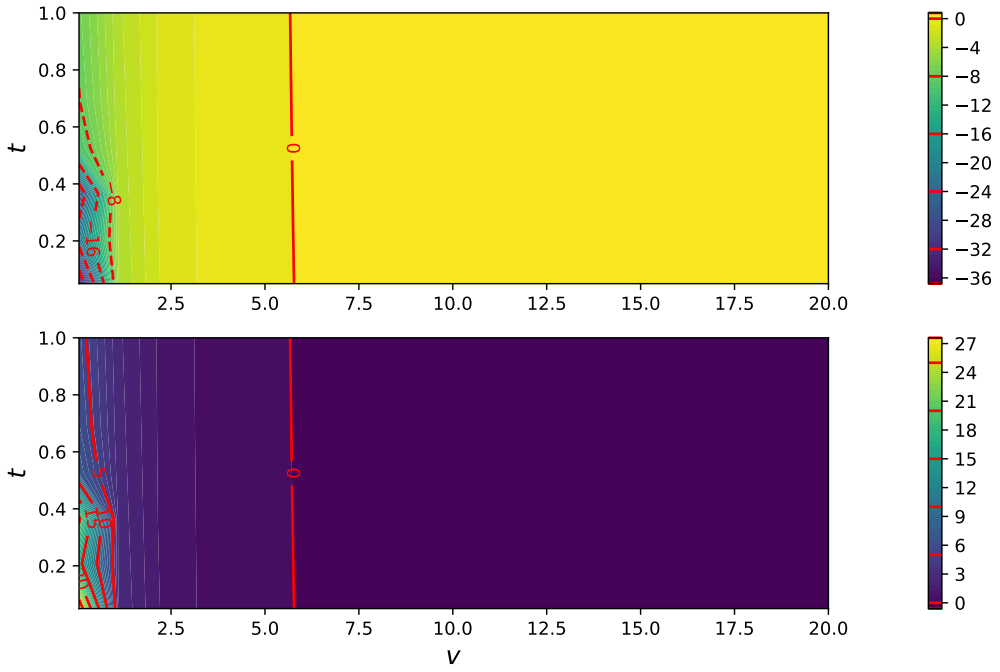
miranja i pristupa rješavanjem HJB jednadžbe. Naime, po svojoj definiciji algoritam dinamičkog programiranja zatvorene petlje izvršavamo na diskretnoj vremenskoj domeni. Razmatranja se određenih problema lakše mogu vršiti na neprekidnoj domeni, koristeći rezultate naprednije matematičke analize. Stoga kompliciranе diskretne probleme koje bi rješavali algoritmom dinamičkog programiranja možemo zamijeniti rješavanjem HJB jednadžbe na neprekidnoj vremenskoj domeni. Uz navedeni važni rezultat također povezujemo općenite principe dinamičkog programiranja s formalizmom Feynmanovih integrala po putovima. Odradili smo samo osnovnu analizu određivanja jezgre evolucije na euklidskoj domeni za problem zadan kroz teoriju dinamičkog programiranja, povezavši optimalnu funkciju troška s prirodnim loga-



Slika 6.24: Skica tangensa hiperbolnog ukupnog udjela rizičnih ulaganja u portfelj za slučaj kada ne uzimamo u obzir ograničenja na rizik ukoliko parametre sistema postavimo prema *Tablici 6.3*.

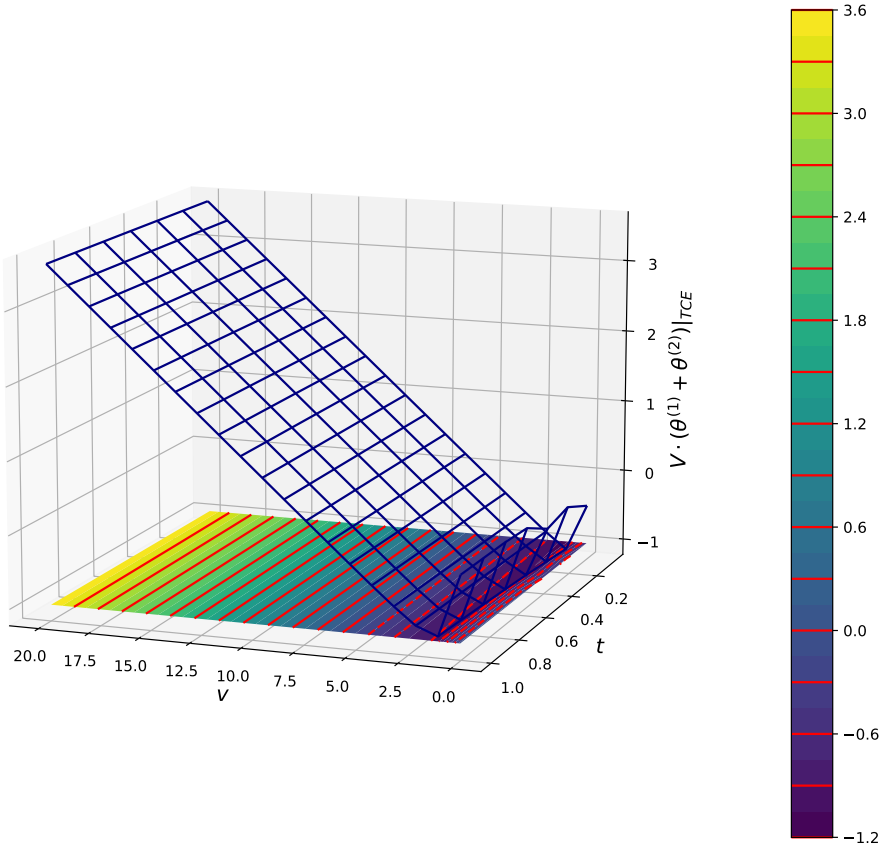
ritmom integrala po putovima jezgre evolucije. Navedena jezgra evolucije naravno poprima oblik negativne akcije na Euklidskom vremenu. Po postavkama teorije dinamičkog programiranja i formalizma Feynmanovih integrala po putovima postoji mnogo sličnosti kojima bi trebalo posvetiti dodatno pažnje te u potpunosti iskoristiti prednosti koje nosi Feynmanov formalizam. Za kraj uvodimo Poyntraginov princip maksimalnosti koji nam olakšava povezati optimalne vrijednosti gradijenata odabranih funkcionala s njihovim vrijednostima u poznatim optimalnim kontrolnim zakonima.

Nadalje, u četvrtom smo poglavlju uveli postavke modela tržišta te sve veličine koje će nam trebati za naredno traženje optimalnih portfelja. Prvo smo uveli model tržišta na neprekidnoj vremenskoj domeni, obzirom na to da postoje mnoge prednosti promatranja problema na neprekidnoj domeni za razliku od diskretne. Zatim smo sve navedene rezultate diskretizirali jer smo numerički rješavali HJB jednadžbu te zato što diskretizirana vremenska domena nosi dodatni značaj i mogućnost interpretacije u ekonofizici. Po prirodi praćenja financijskih tržišta podaci jesu nužno vremenski diskretizirani, nemoguće jest imati neprekidno praćenje ponašanja tržišta.



Slika 6.25: Skica optimalnog rizičnog ulaganja uzevši u obzir da je evolucija granične vrijednosti $\mathfrak{B}$ dana kao očekivanje vrijednosti portfelja, da je ograničenje na rizik dano s ES ovisnošću te da su parametri sistema zadani kao u *Tablici 6.3*. Ograničenje na rizik ε jest linearno rastuće te je dano jednadžbom (6.231). Na gornjem se konturnom grafu nalazi ovisnost optimalnog ulaganja u prvu rizičnu dionicu o vremenu i ukupnom bogatstvu, dok se na donjem nalazi za drugu.

Kako bi se uspješno mogao optimizirani financijski portfelj morali smo uvesti još dvije dodatne stvari, funkciju korisnosti i mjeru rizika. Funkcija korisnosti jest ovisnost koja nam ukazuje o filozofiji ulaganja voditelja fonda kojeg promatramo, odnosno o tome kakvu filozofiju ulaganja želimo nametnuti na našeg voditelja fonda. Izvode se općenita svojstva funkcija korisnosti, kao što je to da kauzalna funkcija korisnosti mora biti konkavna te se povezuje konkavnost funkcije korisnosti, kroz mjeru zvanu apsolutna nesklonost rizika, s time koliko je voditelj fonda sklon riziku. Tako se razlikuje tri režima ponašanja voditelja fonda. Voditelj fonda koji porastom vrijednosti portfelja smanjuje udio rizičnih ulaganja, indiferentni voditelj fonda, koji ne mijenja svoju filozofiju rizičnih strategija ovisno tome kako se mijenja vrijednost portfelja te voditelj fonda koji povećava udio rizičnih ulaganja kako raste vrijednost portfelja. Uz navedenu funkciju korisnosti, jako su važne mjere rizika. Jedna od osnovnih mjera rizika koju je Harry Markowitz koristio u svojim pionirskim razmatranjima optimizacije financijskog portfelja jest varijanca distribucije vjerojatnosti prinosa. Varijanca



Slika 6.26: Skica vrijednosti rizičnog dijela portfelja $V_t \cdot \left(\theta_t^{(1)} + \theta_t^{(2)}\right)$ uzevši u obzir da je evolucija granične vrijednosti $\mathfrak{B}$ dana kao očekivanje vrijednosti portfelja, da je ograničenje na rizik dano s ES ovisnošću te da su parametri sistema zadani kao u *Tablici 6.3*. Ograničenje na rizik ε jest linearno rastuće i dano jednadžbom (6.231).

ima doduše jednu manu, a to jest da gleda jednako na pad i rast cijene, što naravno kod trgovaca i voditelja fonda nije tako jer je psihologija takva da se oni boje pada cijene, ali na porast cijene gledaju kao na mogućnost za još veću dobit. Ovim je argumentom jasno zašto varijanca nije dobra mjera rizika za sve moguće evolucije vrijednosti portfelja, osim u slučaju da zaista distribucija vjerojatnosti prinosa jest parna funkcija oko očekivanja. Naravno navedeno najčešće nije ispunjeno. Imavši gornju motivaciju na umu uvode se tri mjere rizika VaR (”*Value-at-Risk*”), TCE (”*Tail conditional expectation*”) te ES (”*Expected shortfall*”.) Sve su navedene mjere rizika nagnute na stranu pada vrijednosti te trivijalne inače.

Peto i šesto poglavlje smo posvetili rješavanju optimalnog portfelja redom bez

i s ograničenjima na rizik. Problem dinamičkog programiranja na diskretnoj domeni prebacujemo na problem rješavanja HJB jednadžbe na neprekidnoj domeni. Navedenu jednadžbu rješavamo na način da zadovoljavamo nelinearni sustav jednadžbi koji se dobije metodom Lagrangeovih multiplikatora. Nelinearni sustav potom rješavamo SQP (”*Sequential quadratic programming*”) metodom čime pronalazimo optimalnu strategiju ulaganja. U svim razmatranjima uzimamo da imamo jedno bezrizično ulaganje, kao što je na primjer državna obveznica te dvije rizičnije dionice. Razinu rizičnosti dionica mijenjamo kroz razmatranja te također dodajemo nezanemarivu vrijednost na kovarijancu Wienerovih procesa dviju dionica radi razmatranja utjecaja na optimizaciju sistema. Portfelj bez ograničenja na rizik smo analitički riješili te za razliku od optimalnih portfelja pod ograničenjem na rizik pokazuje divergenciju rizičnih ulaganja u limesu kada vrijednost portfelja postaje trivijalna. Načelno ponašanje u ostatku domene jest slično, javlja se racionalna atenuacija u asimptotskom području, napomenuvši da ograničeni optimalni portfelj saturira u malu, ali nezanemarivu negativnu vrijednost, dok neograničeni optimalni portfelj trne u nulu. Navedeno ponašanje optimalnog portfelja ima smisla ukoliko uzmemo u obzir da je jedina funkcija korisnosti koju smo koristili u našim razmatranjima kvadratična. Osnovno svojstvo takve funkcije korisnosti jest to da će imati određenu konačnu vrijednost koja će maksimizirati korisnost. Uzevši to u obzir za sva stanja portfelja u kojima je vrijednost portfelja manja od ciljane vrijednosti će voditelj fonda težiti ulagati rizičnije zbog mogućnosti da se vrati u poželjno stanje ciljane vrijednosti portfelja, neovisno o tome što može izgubiti i to što ima povećanjem rizičnijih ulaganja, dok će u slučaju da je vrijednost veća od ciljane, ulagati sigurnije kako bi osigurao to da vrijednost portfelja bude nužno veća od ciljane. Kada se uzme u obzir kako se ponaša kvadratična funkcija korisnosti, nevedeni rezultati u potpunosti imaju smisla iako možda na prvu mogu zvučati čudno. Navedenu smo optimizaciju vršili za sve tri mjere rizika, za različite ovisnosti ograničenja mjere rizika o vrijednosti portfelja i vremenu te za različite slučajeve odabira rizičnosti dionica.

Kao nastavak istraživanja namjeravamo promotriti optimizaciju preraspodjele kapitala u portfelju baziranu na modelu sa skokovima u distribuciji vjerojatnosti prinosa. Naime, dosada smo uzimali u obzir samo normalne nasumične procese, čime se ne opisuju dovoljno dobro egzogeni nenadani utjecaju na financijsko tržište, zbog trivijalnog očekivanja do na drift te atenuaciju distribucije vjerojatnosti prinosa s po-

rastom vrijednosti portfelja.

Dodaci

Dodatak A Izvod kvadratnog člana HJB jednadžbe

U nastavku ćemo pokazati na koji se način može doći do kvadratnog doprinosa HJB jednadžbe oblika:

$$\mathrm{Tr}\left[\hat{H}_{J^*}\hat{\lambda}^T\right] \ . \tag{A.1}$$

Krećemo s osnovnim optimizacijskim problemom:

$$J^*(\vec{x}(0), t=0, \left\{\vec{u}(s) : s \in \ [0,T]\right\}) = \min_{\vec{u}\in\mathcal{U}} \mathop{\mathbb{E}}_{\vec{\omega}\in\Omega}\left\{h(\vec{x}(T)) + \int_{t=0}^{T} \mathrm{d}t' \cdot g(\vec{x}(t'), \vec{u}(t'), t')\right\} . \tag{A.2}$$

Gornji izraz možemo podijeliti na dvije integracije po $t \in \ [0, t']$ i $t \in \ [t', T]$:

$$J^*(\vec{x}(0), t=0, \left\{\vec{u}(s) : s \in \ [0,T]\right\}) = \min_{\vec{u}\in\mathcal{U}} \mathop{\mathbb{E}}_{\vec{\omega}\in\Omega}\left\{h(\vec{x}(T)) + \int_{t=0}^{t'} \mathrm{d}t'' \cdot g(\vec{x}(t''), \vec{u}(t''), t'') + \right.$$

$$\left. + \int_{t=t'}^{T} \mathrm{d}t'' \cdot g(\vec{x}(t''), \vec{u}(t''), t'')\right\} . \tag{A.3}$$

Razdvajanjem očekivanja i minimuma po intervalima prije i poslije t' na vremenskoj domeni možemo prepoznati optimalnu funkciju troška u trenutku t':

$$J^*(\vec{x}(0), t=0) = \min_{\vec{u}\in\mathcal{U}} \mathop{\mathbb{E}}_{\vec{\omega}\in\Omega}\left\{\int_{t=0}^{t'} \mathrm{d}t'' \cdot g(\vec{x}(t''), \vec{u}(t''), t'') + J^*(\vec{x}(t'), t')\right\} . \tag{A.4}$$

Generalizacijom gornjeg slučaja u kojem promatramo vremena t i $t + \mathrm{d}t$ možemo napraviti infinitezimalni razvoj optimalne funkcije troška oko vremena t:

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\vec{\omega}\in\Omega}\left\{J^*(\vec{x}(t+\mathrm{d}t), t+\mathrm{d}t)\right\} \approx \mathop{\mathbb{E}}_{\vec{\omega}\in\Omega}\left\{J^*(\vec{x}(t), t) + \partial_t J^*(\vec{x}(t), t) + \left(\mathrm{d}\vec{x}\cdot\vec{\nabla}_{\vec{x}}\right) J^*(\vec{x}(t), t) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\vec{\nabla}^2_{\vec{x}} J^*(\vec{x}(t), t)\mathrm{d}\vec{x}^2\right]\right\} . \tag{A.5}$$

Pokažimo zadnji član u gornjoj jednadžbi pod pretpostavkom da je $\vec{x}$ stohastički proces zadan jednadžbom (3.87):

$$\mathbb{E}\Big\{\mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j\Big\} = \mathbb{E}\Big\{(b_i \mathrm{d}t + \mathrm{d}\xi_i) \cdot \ (b_j \mathrm{d}t + \mathrm{d}\xi_j)\Big\} \ . \tag{A.6}$$

Sređivanjem imamo izraz do na ostatak od dt^2:

$$\mathbb{E}\Big\{\mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j\Big\} = \lambda_i \delta_{ij} \ . \tag{A.7}$$

Uzimamo da su korelacije Wienerovih procesa trivijalne te da varijance različitih procesa nisu nužno jednake. Kvadratni član u razvoju:

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} J^*(\vec{x}, t) \mathrm{d}x_i \mathrm{d}x_j \ , \tag{A.8}$$

tada postaje:

$$\frac{1}{2} \mathrm{Tr}\left[\hat{H}_{J^*} \hat{\lambda}^T\right] \mathrm{d}t \ , \tag{A.9}$$

čime smo pokazali oblik dodatnog kvadratnog člana u razvoju.

Dodatak B Dokaz *Leme 3.4.1*

Zapišimo uređeni par koordinate konfiguracijskog prostora $\vec{x}$ i vremena t, kao novu varijablu $\vec{y} = (t, \vec{x})$. Obzirom na to da je $\min_{\vec{u} \in \mathcal{U}} F(\vec{y}, \vec{\mu}^*(\vec{y})) = F(\vec{y}, \vec{\mu}^*(\vec{y}))$ pišemo:

$$\vec{\nabla}_{\vec{y}} \left\{ \min_{\vec{u} \in \mathcal{U}} \ F(\vec{y}, \vec{u}) \right\} = \vec{\nabla}_{\vec{y}} F(\vec{y}, \vec{\mu}^*(\vec{y})) + \left(\vec{\nabla}_{\vec{y}} \cdot \vec{\mu}^*(\vec{y})\right) \vec{\nabla}_{\vec{u}} F(\vec{y}, \vec{\mu}^*(\vec{y})) \ . \tag{B.1}$$

Cilj nam je pokazati da desni član u gornjoj jednadžbi propada. Kada domena $\mathcal{U}$ odgovara cijelom $\mathbb{R}^m$ navedeni zaključak vrijedi obzirom na to da optimalna kontrolna funkcija toka jest neograničeni minimum preslikavanja F te je gradijent od F trivijalan. Malo općenitije vrijedi:

$$\left((\vec{u} - \vec{\mu}^*(\vec{y})) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{u}}\right) F(\vec{y}, \vec{\mu}^*(\vec{y})) \geq 0 \ . \tag{B.2}$$

Ukoliko $m-$torku $\vec{u}$ zapišemo kao promjenu optimalne kontrolne funkcije toka, koristeći Taylorov razvoj te zanemarujući sve promijene više od linearnog člana, $\vec{\mu}^*(\vec{y} +$

$\vec{\varepsilon}) = \vec{\mu}^*(\vec{y}) + \left(\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{y}}\right) \vec{\mu}^*(\vec{y}) + o(\varepsilon)$:

$$\left\{ \left[\left(\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{y}}\right) \vec{\mu}^*(\vec{y}) + o(\varepsilon) \right] \cdot \vec{\nabla}_{\vec{u}} \right\} F(\vec{y}, \vec{\mu}^*(\vec{y})) \geq 0 \ . \tag{B.3}$$

Zanemarujući ostatak reda ε^2 i više dolazimo do zaključka:

$$\left(\vec{\nabla}_{\vec{y}} \cdot \vec{\mu}^*(\vec{y})\right) \vec{\nabla}_{\vec{u}} F(\vec{y}, \vec{\mu}^*(\vec{y})) = 0 \ . \tag{B.4}$$

Q.E.D.

Bibliography

[1] Bertsekas, Dimitri P. *Dynamic Programming and Optimal Control Volume* II. Belmont, Mass. SAD: Athena Scientific, 1995.

[2] Akume, D. A. *Risk-Constrained Dynamic Portfolio Management.*Doktorski rad. Yaounde : University of Yaounde I, 2008.

[3] Voit, J. *The Statistical Mechanics of Financial Markets*. Berlin: Springer, 2005.

[4] Gupta, A.S. *Calculus of Variations With Applications*. 12th ed. Delhi : PHI Learning Private Limited, 2015.

[5] Ruppert, D.; Matteson, D. S. *Statistics and Data Analysis for Financial Engineering*. 2nd ed. Ithaca, NY, SAD : Springer, 2011.

[6] Graves, L. M. : A Proof of the Weierstrass Condition in the Calculus of Variations. Bull. Amer. Math. Soc. 58 (1952), 251-264 (datum pristupanja web stranici srpanj 2022). https://www.ams.org/journals/bull/1952-58-02/S0002-9904-1952-09597-5/?active=current

[7] Hull, J.C. *Options, Futures & Other Derivatives*. Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 2002.

[8] Kleinert, H. *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*. 5th ed. Berlin : World Scientific Pub. Co. Inc., 2009.

[9] Loewen, P. D. *Local Convexity for Equivalent Problems in the Calculus of Variations*. Journal of Mathematical analysis and Applications 146. (1990) 512-522 (datum pristupanja web stranici kolovoz 2022). https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0022247X90903216

[10] Landau, L. D.; Lifshitz, L. M. *Mechanics, Third Edition*. 3rd ed. Butterworth-Heinemann, Oxford: Pergamon Press, 1976.

[11] Herman, E. *Johann Bernoulli's brachistochrone solution using Fermat's principle of least time*. Eur. J. Phys. 20 (1999) 299–304 (datum pristupanja web stranici kolovoz 2022). https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0143-0807/20/5/301/pdf

[12] Padyala, R. *Galileo's Solution for the "Path of Quickest Descent"* (datum pristupanja web stranici srpanj 2022). https://www.researchgate.net/publication/329982486, DOI: 10.13140/RG.2.2.25710.25923 (2018)

[13] Galilei, G. *Dialogues Concerning Two New Sciences by Galileo Galilei*. Translate from Italian and Latin into English by Henry Crew and Alfonso de Salvio of Northwestern University. New York : The McMillan Company, 1914.

[14] Budzban, G.; Hughes, H. R.; Schurz, H.; *Probability on Algebric and Geometric Structures* : International Research Conference in Honor of Philip Feinsilver, Salah-Eldin A. Mohammed, and Arunava Mukherjea, June 5-7, 2014. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island

[15] Kappen, H. J. *Path integrals and symmetry breaking for optimal control theory*. J. Stat. Mech. (2005) P11011 (datum pristupanja web stranici lipanj 2022). arXiv:physics/0505066v4 [physics.gen-ph], DOI : 10.1088/1742-5468/2005/11/P11011

[16] Curtis, F. E.; Overton, M. L. *A Sequential Quadratic Programming Algorithm for Nonconvex, Nonsmooth Optimization*. Society for Industrial and Applied Mathematics (datum pristupanja web stranici srpanj 2022), https://epubs.siam.org/doi/10.1137/090780201, DOI : 10.1137/090780201