

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Matej Vugrinec

MODELI GRAVITACIJE U VIŠE OD 4 DIMENZIJE
I OGRANIČENJA NA NJIHOVE PARAMETRE
POMOĆU OPAŽANJA EVENT HORIZON
TELESCOPE-A

Diplomski rad

Zagreb, 2022.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

Matej Vugrinec

Diplomski rad

**Modeli gravitacije u više od 4
dimenzije i ograničenja na njihove
parametre pomoću opažanja Event
Horizon Telescope-a**

Voditelj diplomskog rada: izv. prof. dr. sc. Maro Cvitan

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____

Zagreb, 2022.

Zahvaljujem mentoru izv. prof. dr. sc. Mari Cvitanu na strpljivom
vođenju kroz pisanje rada.

Sažetak

Modeli gravitacije u više od četiri dimenzije daju efektivno proširenje na teoriju gravitacije kakvu je postulirao Einstein. Pomoću njih je moguće ispitati posljedice koje bi postojanje dodatnih dimenzija ostavilo na naš svemir. U ovom radu bavimo se upravo takvim modelima, s naglaskom na peterodimenzionalnim "brane-world" modelima. Krećemo od povijesnog razvoja, počevši s Einsteinovom općom teorijom relativnosti i prvih proširenja u više dimenzija, koja se pripisuju Kaluzi i Kleinu i dolazimo do sve modernijih modela u više dimenzija, konkretno Randall-Sundrum modela. Nakon toga, izvodimo efektivne jednadžbe polja koje vrijede u "brane-world" modelima. Poslije jednadžbi polja, osvrćemo se na anti-de Sitter prostorvremena i formalnije predstavljamo Randall-Sundrum modele. U sljedećih nekoliko poglavlja poslije toga, promatraju se posljedice koje bi postojanje jedne dodatne prostorne dimenzije ostavilo na Newtonov zakon gravitacije, metrike crnih rupa i na kozmologiju. Na kraju, opisujemo kako se opažanja Event Horizon Telescope-a mogu povezati s teorijom iza "brane-world" modela i pomoću tih opažanja stavljene su neke gornje granice na parametre modela. Isto tako, naglašavamo važnost detekcije gravitacijskih valova pri ograničavanju parametara takvih modela te njihovu važnost u potrazi za novom fizikom.

Ključne riječi: gravitacija, dimenzije, "brane-world" modeli, Randall-Sundrum modeli, crne rupe, kozmologija, Event Horizon Telescope, gravitacijski valovi

Models of gravity in more than 4 dimensions and constraints on their parameters from Event Horizon Telescope observations

Abstract

Models of gravity in more than four dimensions offer a way to find an effective theory of gravity beyond the one postulated by Einstein. By using them as toy theories, we can determine the consequences that the existence of extra dimensions would imprint on our universe. This work is devoted to those models, with the emphasis on five dimensional "brane-world" models. We begin with an overview of history, starting from Einstein's general relativity and its first modifications which include extra dimensions - credited to Kaluza and Klein, up to Randall-Sundrum models. After that, we derive effective field equations in "brane-world" models. We then deal with anti-de Sitter spacetimes and formally present Randall-Sundrum models. In the following chapters we explore the consequences of one extra spatial dimension on Newton's law of gravity, different black hole metrics and on the cosmology. We finally describe how the observations made by the Event Horizon Telescope can be used in conjunction with the theory behind "brane-world" models and using those observations we constrain some parameters of those models. We also emphasise the importance of detecting gravitational waves and their use in constraining parameters of "brane-world" models and more generally, their importance in the search for new physics.

Keywords: gravity, dimensions, "brane-world" models, Randall-Sundrum models, black holes, cosmology, Event Horizon Telescope, gravitational waves

Sadržaj

1	Uvod	1
1.1	Povijesni put prema više dimenzija	2
2	Osnove višedimenzionalnog pristupa gravitaciji	4
2.1	Jednadžbe polja za <i>volumen</i> i <i>površinu</i> u 5D	4
3	AdS prostorvrijeme i Randall-Sundrum modeli	11
3.1	Anti-de Sitter prostorvrijeme	11
3.2	Randall-Sundrum modeli	14
4	Linearizirana gravitacija na <i>površini</i>	17
4.1	"Brane-world" newtonovski potencijal	21
4.2	Linearizirana metrika rotirajućeg objekta na <i>površini</i>	22
5	"Brane-world" crne rupe	25
5.1	Crna struna	25
5.2	"Brane-world" rotirajuća crna rupa	26
5.3	Geodezici svjetlosnog tipa rotirajuće crne rupe	28
5.3.1	Geodezici svjetlosnog tipa blizu crne rupe	29
5.3.2	Geodezici svjetlosnog tipa daleko od crne rupe	31
6	"Brane-world" kozmologija	33
7	Ograničenja na parametre "brane-world" modela	37
7.1	Gornja granica na radijus zakrivljenosti dodatne dimenzije pomoću sjene M87*	37
7.2	Oblik sjene M87* i slaganje s "brane-world" modelom	39
7.3	Sjena crne rupe Sgr A* i "brane-world" modeli	49
8	Gravitacijski valovi: sadašnjost i budućnost	50
8.1	Teorijska osnova	50
8.2	Gornja granica na dodatnu dimenziju pomoću gravitacijskih valova	51
8.3	Potruga za novom fizikom pomoću gravitacijskih valova	55
9	Zaključak	58

Dodaci	60
A Jednadžbe polja	60
B Gaussove normalne koordinate	63
C Einsteinov tenzor za Randall-Sundrum metriku	64
D Einsteinov tenzor za 5D FLRW metriku	66
Literatura	69

1 Uvod

Einstein je 1915. predstavio opću teoriju relativnosti, a ona se kao vrlo uspješna teorija održala sve do danas. U suštini, Einsteinove jednadžbe povezuju geometriju sustava s raspodjelom materije unutar njega. Iako u početku nije bilo eksperimentalnih razloga za modificiranje opće teorije relativnosti, već nekoliko godina nakon uvođenja razmatrane su određene modifikacije teorije [1], [2]. U općoj teoriji relativnosti Einstein-Hilbert akcija, bez kozmološke konstante, je

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (1.1)$$

gdje je $\kappa^2 = 8\pi G$. Želimo li dodati neke modifikacije općoj teoriji relativnosti, to postizemo poopćavanjem akcije (1.1). Jedan od načina na koji se to može postići je dodavanjem skalarnog polja ψ toj akciji. Takve teorije nazivaju se skalarno-tenzorskim teorijama. Jedan od primjera takve skalarno tenzorske teorije je Brans-Dicke teorija [3] kod koje je akcija oblika

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} (\psi R - \frac{\omega}{\psi} (\partial\psi)^2 - V(\psi)), \quad (1.2)$$

gdje je ψ skalarno polje, a ω parametar. Varijacijom akcije (1.2) dobije se jednadžba za skalarno polje ψ i jednadžbe koje podsjećaju na Einsteinove jednadžbe s dodatnim članovima koji dolaze od polja ψ . Drugi primjer dobiva se ako se a priori ne pretpostavi da je akcija direktno proporcionalna Riccijevom skalaru R , već nekoj općenitijoj funkciji Riccijevog skalara (1.1)

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} f(R), \quad (1.3)$$

što se u literaturi naziva $f(R)$ teorijom gravitacije. Možda glavna motivacija za takav pristup gravitaciji krije se u tome da bi se ubrzano širenje svemira tako moglo objasniti bez uvođenja tamne energije [4]. Može se pokazati da u takvim teorijama gravitacijska konstanta nije više konstanta, već postane ovisna o prostorvremenu [42]. Postoje i teorije u kojima se akcija poopćava na način da ovisi o još nekim invarijantama poput $R_{ab}R^{ab}$, $R_{abcd}R^{abcd}$ [5]. Iako se sve ovdje nabrojene teorije razlikuju od teorije gravitacije koju je predstavio Einstein, sve one i dalje imaju jednu zajedničku

stvar s općom teorijom relativnosti, a to je četverodimenzionalno prostorvrijeme. Prvi pokušaji poopćenja prostorvremena na više od 4 dimenzije pripisuju se Kaluzi i Kleinu.

1.1 Povijesni put prema više dimenzija

Kaluza je pokušao ujediniti gravitaciju i elektromagnetizam razmatranjem opće teorije relativnosti u pet dimenzija [6]. Ako se na akciju (1.1) doda akcija

$$S_{EM} = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (1.4)$$

gdje je $F_{\mu\nu}$ tenzor elektromagnetskog polja, mogu se dobiti Einstein-Maxwellove jednadžbe. S druge strane, Kaluza kreće od 5D gravitacije opisane akcijom

$$S = \frac{1}{2\kappa_5^2} \int d^4x dy \sqrt{-{}^{(5)}g} {}^{(5)}R, \quad (1.5)$$

gdje se y odnosi na dodatnu dimenziju, što je i običaj u ostatku ovog rada. Peterodimenzionalna metrika je

$${}^{(5)}g_{AB} = \phi^{-1/3} \begin{pmatrix} g_{\mu\nu} + \phi A_\mu A_\nu & \phi A_\mu \\ \phi A_\nu & \phi \end{pmatrix}, \quad (1.6)$$

pri čemu je $g_{\mu\nu}$ 4D metrika, A_μ elektromagnetski potencijal, a ϕ skalarno polje. Kako bi se osiguralo da je teorija neovisna o dodatnoj dimenziji uvodi se uvjet

$$\frac{\partial {}^{(5)}g_{AB}}{\partial y} = 0. \quad (1.7)$$

U tom slučaju akcija se može zapisati kao

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left(R - \frac{1}{4} \phi F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{6\phi^2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \right). \quad (1.8)$$

Vidi se da se u slučaju $\phi = 1$ reproducira akcija koja se dobiva zbrajanjem (1.1) i (1.4). Skalarno polje ϕ u literaturi se naziva dilaton. U Kaluzinoj teoriji peta dimenzija postoji, ali nijedna fizikalna veličina ne ovisi o njoj. Ovakvu ideju Kaluze nadopunio je Klein [7]. Klein je dodatnu dimenziju sažeo u krug polumjera R , na način da se poistovjete točke y i $y + 2\pi R$. To znači da za svaku fizikalnu veličinu

vrijedi $f(x^\mu, y) = f(x^\mu, y + 2\pi R)$, tj. da je ona periodična u y . Dakle, ona se može razviti u Fourierov red

$$f(x^\mu, y) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f_n(x^\mu) e^{iny/R}, \quad (1.9)$$

gdje se f_n nazivaju amplitudama Kaluza-Klein (KK) modova. Uzme li se da je $f(x^\mu, y)$ bezmaseno skalarno polje koje zadovoljava valnu jednadžbu

$${}^{(5)}\square f = \square f + \partial_y^2 f = 0, \quad (1.10)$$

dobiva se da KK modovi zadovoljavaju 4D Klein-Gordonovu jednadžbu s efektivnom masom m_n

$$\square f_n = m_n^2 f_n, \quad m_n \equiv \frac{n}{R}. \quad (1.11)$$

Dakle, iz 4D perspektive f se sastoji od bezmasenog moda f_0 i masivnih KK modova. Klein je pretpostavio da se na niskim energijama može opaziti samo f_0 i da se fizika čini efektivno četverodimenzionalnom. Spomenimo još i ADD modele, kod kojih se prvi put predlaže da dodatne dimenzije mogu biti velike [8]. Ovdje se već govori o 4D "brane-u", na koji su ograničena polja Standardnog Modela, dok se kroz "bulk" širi gravitacija. Takvo razmišljanje otvorilo je put nastanku Randall-Sundrum modela [9], [10]. Većina ovog rada usko je vezana uz Randall-Sundrum modele, a opširnije o njima može se naći u trećem poglavlju. Ukratko, u Randall-Sundrum modelima geometrija "bulk-a" je zakrivljena, a "brane-ovi" imaju neku napetost. U ostatku rada, gdje je moguće, koristit će se hrvatski nazivi. Pa će se za "brane" koristiti naziv *površina*, dok će se za "bulk" koristiti naziv *volumen*.

2 Osnove višedimenzionalnog pristupa gravitaciji

Zapišimo Einstein-Hilbert akciju u 4 dimenzije, koja u prisustvu kozmološke konstante ima sljedeći oblik

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) + S_M, \quad (2.1)$$

gdje S_M opisuje dio koji se odnosi na materiju. Varijacijom te akcije i zahtijevanjem $\frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = 0$ dobivaju se Einsteinove jednadžbe

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa^2 T_{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

gdje je tenzor energije i impulsa standardno dan s

$$T_{\mu\nu} = \frac{-2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (2.3)$$

Poopćenjem ovog pristupa na više od 4 dimenzije, jednadžbe polja mogu se zapisati na sljedeći način

$${}^{(4+d)}R_{AB} - \frac{1}{2} {}^{(4+d)}R {}^{(4+d)}g_{AB} + \Lambda_{4+d} {}^{(4+d)}g_{AB} = \kappa_{4+d}^2 {}^{(4+d)}T_{AB}, \quad (2.4)$$

gdje je d broj dodatnih dimenzija.

2.1 Jednadžbe polja za volumen i površinu u 5D

Većina ovog rada temelji se upravo na modelima gravitacije u pet dimenzija pa se ograničimo sada na peterodimenzionalni *volumen* i četverodimenzionalnu *površinu*, koja čini vidljiv svemir, smještenu u njemu. Ovdje pratimo analizu iz [11]. Neka je y Gaussova normalna koordinata ortogonalna na *površinu*. Gaussove normalne koordinate definirane su u Dodatku B. Koordinate vezane uz *površinu* dane su s x^μ , dok su koordinate vezane općenito uz *volumen* dane s $X^A = (x^\mu, y)$. Bez smanjenja općenitosti, *površina* se može smjestiti na $y = 0$. Označimo sada s n^A jedinični vektor koji je normala na *površinu*, tj. za njega vrijedi $n_A dX^A = dy$. Pomoću takvog vektora

može se definirati metrika g_{AB} :

$$g_{AB} = {}^{(5)}g_{AB} - n_A n_B, \quad {}^{(5)}g_{AB} n^A n^B = 1, \quad g_{AB} n^B = 0, \quad (2.5)$$

koja odgovara metriki induciranoj na *površini*. Smještanje ploha za koje vrijedi $y = konst.$ u 5D volumen opisuje se ekstrinzičnom zakrivljenošću K_{AB} koja se može definirati preko kovarijantne derivacije [11]

$$K_{AB} = g_A{}^C {}^{(5)}\nabla_C n_B, \quad (2.6)$$

ili preko Liejeve derivacije

$$K_{AB} = \frac{1}{2} \mathcal{L}_n g_{AB}. \quad (2.7)$$

Gaussovom jednažbom

$$R_{ABCD} = {}^{(5)}R_{EFGH} g_A{}^E g_B{}^F g_C{}^G g_D{}^H + K_{AC} K_{DB} - K_{AD} K_{BC} \quad (2.8)$$

dan je 4D tenzor zakrivljenosti u ovisnosti o projekciji 5D tenzora zakrivljenosti i ekstrinzičnoj zakrivljenosti. S druge strane, Codazzijevom jednažbom

$$\nabla_B K^B{}_A - \nabla_A K = {}^{(5)}R_{BC} g_A{}^B n^C \quad (2.9)$$

određena je promjena K_{AB} uzduž plohe za koju vrijedi $y = konst.$, gdje je $K = K^A{}_A$. U jednažbi (2.9) nalazi se projekcija kovarijantne derivacije na *površinu* koja je npr. za neki (1,1) tenzor dana s

$$\nabla_A T^B{}_C \equiv g_A{}^D g_E{}^B g_C{}^F {}^{(5)}\nabla_D T^E{}_F, \quad (2.10)$$

pri čemu je očito proširenje za druge tenzore. Tenzor zakrivljenosti u 5D može se raspisati kao

$${}^{(5)}R_{ABCD} = {}^{(5)}C_{ABCD} + \frac{2}{3} \left({}^{(5)}g_{A[C} {}^{(5)}R_{D]B} - {}^{(5)}g_{B[C} {}^{(5)}R_{D]A} \right) - \frac{1}{6} {}^{(5)}g_{A[C} {}^{(5)}g_{D]B} {}^{(5)}R, \quad (2.11)$$

gdje je ${}^{(5)}C_{ABCD}$ Weylov tenzor i njegov trag iščezava. Jednadžbe polja na *površini*

$$G_{AC} = -\frac{1}{2}\Lambda_5 g_{AC} + \frac{2}{3}\kappa_5^2 \left[{}^{(5)}T_{HF} g_A^H g_C^F + \left({}^{(5)}T_{HF} n^H n^F - \frac{1}{4} {}^{(5)}T \right) g_{AC} \right] \\ + K_{AC}K - K_A^D K_{DC} - \frac{g_{AC}}{2} (K^2 - K_{EG}K^{EG}) - {}^{(5)}C_{EFGH} n^F n^H g_A^E g_C^G. \quad (2.12)$$

izvedene su u Dodatku A. Vidi se da se u njima nalazi ekstrinzična zakrivljenost pa je sljedeći cilj prikazati ekstrinzičnu zakrivljenost pomoću tenzora energije i impulsa. Ukupan tenzor energije i impulsa na *površini* je

$$T_{\mu\nu}^{brane} = T_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu}, \quad (2.13)$$

pri čemu je $T_{\mu\nu}$ tenzor energije i impulsa čestica i polja ograničenih na *površinu*, dok je λ napetost *površine*. Zapišimo sada 5D jednadžbe polja, na način da se eksplicitno uključi doprinos *površine* na sljedeći način

$${}^{(5)}G_{AB} = -\Lambda_5 {}^{(5)}g_{AB} + \kappa_5^2 [{}^{(5)}T_{AB} + T_{AB}^{brane} \delta(y)], \quad (2.14)$$

gdje $\delta(y)$ reflektira ograničenje materije na *površinu*. Dakle, u ${}^{(5)}T_{AB}$ nema doprinosa s *površine*. Od sada pa nadalje konvencija će biti da tenzor energije i impulsa označen s ${}^{(5)}T_{AB}$ ne uključuje doprinose s *površina* dok će ti doprinosi biti uključeni u tenzor energije i impulsa označen s ${}^{(5)}\bar{T}_{AB}$. Kontrahiranjem (2.14) dobiva se

$${}^{(5)}g^{AB} {}^{(5)}R_{AB} - \frac{1}{2} {}^{(5)}R {}^{(5)}g^{AB} {}^{(5)}g_{AB} = -\Lambda_5 {}^{(5)}g_{AB} {}^{(5)}g^{AB} + \kappa_5^2 [{}^{(5)}T_{AB} + T_{AB}^{brane} \delta(y)] {}^{(5)}g^{AB} \\ {}^{(5)}R - \frac{5}{2} {}^{(5)}R = -5\Lambda_5 + \kappa_5^2 [{}^{(5)}T + T^{brane} \delta(y)] \\ {}^{(5)}R = -\frac{2}{3} [-5\Lambda_5 + \kappa_5^2 ({}^{(5)}T + T^{brane} \delta(y))], \quad (2.15)$$

što uvrštavanjem u (2.14) daje

$$\begin{aligned}
{}^{(5)}R_{AB} + \frac{1}{3}[-5\Lambda_5 + \kappa_5^2({}^{(5)}T + T^{brane}\delta(y))] {}^{(5)}g_{AB} &= -\Lambda_5 {}^{(5)}g_{AB} + \kappa_5^2 [{}^{(5)}T_{AB} + T_{AB}^{brane}\delta(y)] \\
{}^{(5)}R_{AB} &= \frac{2}{3}\Lambda_5 {}^{(5)}g_{AB} + \kappa_5^2 [{}^{(5)}T_{AB} + T_{AB}^{brane}\delta(y)] \\
&\quad - \frac{1}{3}\kappa_5^2({}^{(5)}T + T^{brane}\delta(y)) {}^{(5)}g_{AB}.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

U Dodatku A, definirana je veličina $\rho_{AC} \equiv {}^{(5)}R_{EFG}{}^H n_H n^F g_A{}^E g_C{}^G$. Vrijedi [11]

$${}^{(5)}R_{EFGH}{}^H n^F g_A{}^E g_C{}^G = -\mathcal{L}_n K_{AC} + K_{CB} K_A{}^B, \tag{2.17}$$

a budući da je u Gaussovima normalnim koordinatama Liejeva derivacija dana s $\mathcal{L}_n = \partial_y$, veličina ρ_{AC} može se zapisati kao [11]

$$\rho_{AC} = -\partial_y K_{AC} + K_{CB} K_A{}^B, \tag{2.18}$$

pa se uz iskorištavanje relacije dobivene u Dodatku A

$$R_{AC} = {}^{(5)}R_{EG} g_A{}^E g_C{}^G - {}^{(5)}R_{EFG}{}^H n_H n^F g_A{}^E g_C{}^G + K_{AC} K - K_A{}^D K_{DC} \tag{2.19}$$

dobiva

$${}^{(5)}R_{EG} g_A{}^E g_C{}^G = P_{AC} - \partial_y K_{AC}, \tag{2.20}$$

gdje je $P_{AC} \equiv R_{AC} + 2K_{CB} K_A{}^B - K_{AC} K$. Kombiniranjem (2.20) i (2.16) i integracijom po y na intervalu $(-\epsilon, \epsilon)$ za $\epsilon \rightarrow 0$ traži se diskontinuitet ekstrinzične zakrivljenosti

$$\begin{aligned}
P_{AC} - \partial_y K_{AC} &= \left\{ \frac{2}{3}\Lambda_5 {}^{(5)}g_{EG} + \kappa_5^2 [{}^{(5)}T_{EG} + T_{EG}^{brane}\delta(y)] \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{3}\kappa_5^2({}^{(5)}T + T^{brane}\delta(y)) {}^{(5)}g_{EG} \right\} g_A{}^E g_C{}^G,
\end{aligned} \tag{2.21}$$

tj. ako zanemarimo članove koji pri integraciji nestaju dobiva se

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} \frac{d}{dy} K_{AC} dy = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{+\epsilon} -\kappa_5^2 \left[T_{AC}^{brane}\delta(y) - \frac{1}{3} T^{brane}\delta(y) g_{AC} \right]. \tag{2.22}$$

Dakle, za diskontinuitet imamo

$$K_{AB}^+ - K_{AB}^- = -\kappa_5^2 \left[T_{AB}^{brane} - \frac{1}{3} T^{brane} g_{AB} \right]. \quad (2.23)$$

Očekuje se da vrijedi Z_2 simetrija [11] - prolaskom kroz *površinu* uđe se u *volumen* koji isto izgleda, ali je normala suprotnog smjera $n_A \rightarrow -n_A$ što uz relaciju (2.23) znači da vrijedi

$$K_{AB}^- = -K_{AB}^+ \quad (2.24)$$

pa ako se makne (+), za ekstrinzičnu zakrivljenost na *površini* dobiva se

$$K_{AB} = -\frac{1}{2} \kappa_5^2 \left[T_{AB}^{brane} - \frac{1}{3} T^{brane} g_{AB} \right]. \quad (2.25)$$

Nadalje, ako se pomoću (2.13) zapiše T_{AB}^{brane} , dolazi se do izraza

$$K_{AB} = -\frac{1}{2} \kappa_5^2 \left[T_{AB} + \frac{1}{3} (\lambda - T) g_{AB} \right]. \quad (2.26)$$

Nakon svega, uvrštavanje (2.26) u (2.12) - što je detaljno napravljeno u Dodatku A, daje efektivne jednadžbe polja na *površini*

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} + \kappa^2 T_{\mu\nu} + 6 \frac{\kappa^2}{\lambda} \mathcal{S}_{\mu\nu} - \mathcal{E}_{\mu\nu} + 4 \frac{\kappa^2}{\lambda} \mathcal{F}_{\mu\nu}, \quad (2.27)$$

U (2.27) λ je napetost *površine*, a Λ i κ dani su s

$$\kappa^2 \equiv \kappa_4^2 = \frac{1}{6} \lambda \kappa_5^4 \quad (2.28)$$

$$\Lambda = \frac{1}{2} [\Lambda_5 + \kappa^2 \lambda], \quad (2.29)$$

iz čega se vidi da je 4D kozmološka konstanta različita od 0 u slučaju kada je narušena ravnoteža između napetosti *površine* i 5D kozmološke konstante. U ovom slučaju, u odnosu na standardne Einsteinove jednadžbe, postoje tri nova člana. Prvi od njih

$$\mathcal{S}_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{12} T T_{\mu\nu} - \frac{1}{4} T_{\mu\alpha} T^\alpha{}_\nu + \frac{1}{24} g_{\mu\nu} [3T_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta} - T^2] \quad (2.30)$$

koji je kvadratan u tenzoru energije i impulsa, dolazi od ekstrinzične zakrivljenosti površine. Drugi od njih

$$\mathcal{E}_{\mu\nu} \equiv {}^{(5)}C_{ABCD}n^C n^D g_{\mu}{}^A g_{\nu}{}^B \quad (2.31)$$

naziva se električnim dijelom Weylovog tenzora. Zadnji od dodatnih članova je

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} \equiv {}^{(5)}T_{AB} g_{\mu}{}^A g_{\nu}{}^B + \left[{}^{(5)}T_{AB} n^A n^B - \frac{1}{4} {}^{(5)}T \right] g_{\mu\nu}, \quad (2.32)$$

a u njemu su grupirani članovi koji uključuju 5D tenzor energije i impulsa iz kojega su isključeni doprinosi na površini. Promotrimo Codazzijevu jednadžbu (2.9) te uvrstimo ${}^{(5)}R_{BC}$ izražen iz (2.14), čime se dobiva

$$\nabla_B K^B{}_A - \nabla_A K = -\kappa_5^2 {}^{(5)}T_{BC} g_A{}^B n^C, \quad (2.33)$$

gdje ostali članovi iščezavaju zbog n^C . Uvrstimo još sada (2.23) u (2.33) kako bismo dobili relaciju

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu} = -2 {}^{(5)}T_{AB} n^A g^B{}_{\mu}, \quad (2.34)$$

koja govori da općenito postoji neka izmjena energije i impulsa između *volumena* i *površine*. Od sada pa nadalje, kao što je i uobičajeno u "brane-world" analizama, pretpostavljat će se da vrijedi

$${}^{(5)}T_{AB} = 0 \rightarrow \mathcal{F}_{\mu\nu} = 0, \quad (2.35)$$

čime se onda iz relacije (2.34) dobiva uobičajena jednadžba očuvanja

$$\nabla^\nu T_{\mu\nu} = 0, \quad (2.36)$$

što zapravo znači da nema izmjene energije i impulsa između *volumena* i *površine*, već da je njihovo međudjelovanje svedeno samo na gravitaciju. Druga posljedica uvjeta (2.35) je da kontrahirani Bianchijev identitet $\nabla^\nu G_{\mu\nu} = 0$ vodi na

$$\nabla^\mu \mathcal{E}_{\mu\nu} = 6 \frac{\kappa^2}{\lambda} \nabla^\mu \mathcal{S}_{\mu\nu}. \quad (2.37)$$

Vidi se da se električni dio Weylovog tenzora ne može zadati proizvoljno, već da je on ograničen članovima vezanim uz materiju na *površini*. To znači da se jednačbe (2.27) ne mogu riješiti same po sebi, već da je potrebno riješiti i 5D jednačbe polja uz jednačbe polja na *površini*. Za kraj ove analize, zapišimo zajedno 5D i 4D jednačbe polja, uz uvjet (2.35)

$${}^{(5)}G_{AB} = -\Lambda_5 {}^{(5)}g_{AB} \quad (2.38)$$

$$G_{\mu\nu} = -\Lambda g_{\mu\nu} + \kappa^2 T_{\mu\nu} + 6 \frac{\kappa^2}{\lambda} \mathcal{S}_{\mu\nu} - \mathcal{E}_{\mu\nu}, \quad (2.39)$$

pri čemu su iz ${}^{(5)}G_{AB}$ isključeni doprinosi na *površini*.

3 AdS prostorvrijeme i Randall-Sundrum modeli

Ovdje će biti predstavljene osnove Randall-Sundrum (u nastavku "RS") modela. U RS modelima postoje jedna ili dvije *površine* koje se nalaze u *volumenu* [9], [10]. Sam *volumen* je AdS_5 prostorvrijeme - posebnu važnost ima zbog AdS/CFT korespondencije [12]. Prije predstavljanja RS modela, krenut će se od anti-de Sitter prostora - maksimalno simetričnog prostora s konstantnom i negativnom zakrivljenošću.

3.1 Anti-de Sitter prostorvrijeme

Pratit će se analiza iz [13]. Za početak, razmotrimo 3D euklidski prostor. U njemu je linijski element

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2, \quad (3.1)$$

a ako se u njega smjesti sfera S^2 ona zadovoljava

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2. \quad (3.2)$$

Sfera je ploha konstantne pozitivne zakrivljenosti. Prostor koji ima konstantnu negativnu zakrivljenost je hiperbolički prostor. Njega se ne može smjestiti u euklidski prostor, već ga se treba smjestiti u prostorvrijeme Minkowskog. Razmotrimo 3D prostorvrijeme Minkowskog u kojem je linijski element dan s

$$ds^2 = -dZ^2 + dX^2 + dY^2. \quad (3.3)$$

U njega se može smjestiti hiperbolički prostor H^2 definiran s

$$-Z^2 + X^2 + Y^2 = -l^2, \quad (3.4)$$

gdje se vidi njegova konstantna negativna zakrivljenost. Za rješavanje (3.4) uvode se koordinate dane s

$$X = l \sinh \rho \cos \phi, \quad Y = l \sinh \rho \sin \phi, \quad Z = l \cosh \rho, \quad (3.5)$$

iz čega se dobiva linijski element

$$ds^2 = l^2(d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\phi^2). \quad (3.6)$$

Ova jednostavna analiza odnosila se na prostore, a sada se pažnja skreće na prostorvremena. U nastavku, naglasak je na AdS prostorvremenu. Krenimo od AdS_2 . Njega možemo smjestiti u ravno prostorvrijeme, no ono mora imati dvije dimenzije vremenskog tipa

$$ds^2 = -dZ^2 - dX^2 + dY^2. \quad (3.7)$$

U tom slučaju 2D Anti-de Sitter prostorvrijeme zadovoljava sljedeću jednadžbu

$$-Z^2 - X^2 + Y^2 = -l^2, \quad (3.8)$$

gdje se u ovom slučaju l naziva AdS radijusom. Ovdje odabiremo sljedeće koordinate

$$X = l \cosh \rho \sin \tau, \quad Y = l \sinh \rho, \quad Z = l \cosh \rho \cos \tau, \quad (3.9)$$

u kojima linijski element postaje

$$ds^2 = l^2(d\rho^2 - \cosh^2 \rho d\tau^2), \quad (3.10)$$

gdje je bitna stvar za primijetiti to što iako je 2D AdS prostorvrijeme smješteno u prostorvrijeme s dvije dimenzije vremenskog tipa, AdS prostorvrijeme ima jednu dimenziju vremenskog tipa. Za daljnju analizu, uvedimo Poincareov koordinatni sustav

$$X = lrt, \quad Y = \frac{lr}{2} \left(-t^2 + \frac{1}{r^2} - 1 \right), \quad Z = \frac{lr}{2} \left(-t^2 + \frac{1}{r^2} + 1 \right), \quad (3.11)$$

gdje $-\infty < t < \infty$ i $0 < r < \infty$. Sada je linijski element dan s

$$ds^2 = -l^2 r^2 dt^2 + \frac{l^2}{r^2} dr^2. \quad (3.12)$$

Poopćimo ovu analizu na način da se doda p dimenzija prostora u linijski element (3.7)

$$ds_{p+3}^2 = -dX_0^2 - dX_{p+2}^2 + dX_1^2 + \dots + dX_{p+1}^2, \quad (3.13)$$

stoga se u ovo prostorvrijeme može smjestiti AdS_{p+2} prostorvrijeme zadano s

$$-X_0^2 - X_{p+2}^2 + X_1^2 + \dots + X_{p+1}^2 = -l^2. \quad (3.14)$$

U ovom slučaju Poincareove koordinate dane su s

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{lr}{2} \left(x_i^2 - t^2 + \frac{1}{r^2} + 1 \right) \\ X_i &= lrx_i \\ X_{p+1} &= \frac{lr}{2} \left(x_i^2 - t^2 + \frac{1}{r^2} - 1 \right) \\ X_{p+2} &= lrt, \end{aligned} \quad (3.15)$$

u kojima metrika postaje

$$ds^2 = -l^2 r^2 dt^2 + l^2 r^2 \delta_{ij} dx^i dx^j + \frac{l^2}{r^2} dr^2, \quad (3.16)$$

gdje je δ_{ij} p -dimenzionalni Kroneckerov simbol. AdS_{p+2} je jedno od maksimalno simetričnih prostorvremena pa Riemannov tenzor ima oblik

$${}^{(p+2)}R_{ABCD} = -\frac{1}{l^2} ({}^{(p+2)}g_{AC} {}^{(p+2)}g_{BD} - {}^{(p+2)}g_{AD} {}^{(p+2)}g_{BC}). \quad (3.17)$$

Iz takvog Riemannovog tenzora slijede Riccijev tenzor

$${}^{(p+2)}R_{AB} = -\frac{p+1}{l^2} {}^{(p+2)}g_{AB} \quad (3.18)$$

i Riccijev skalar

$${}^{(p+2)}R = -\frac{(p+1)(p+2)}{l^2}. \quad (3.19)$$

Iz gornjih relacija slijedi

$${}^{(p+2)}R_{AB} - \frac{1}{2} {}^{(p+2)}g_{AB} {}^{(p+2)}R = \frac{p(p+1)}{2l^2} {}^{(p+2)}g_{AB}, \quad (3.20)$$

a jednačbe polja u prisustvu kozmološke konstante, bez materije, su sljedećeg oblika

$${}^{(p+2)}G_{AB} = -\Lambda_{(p+2)} {}^{(p+2)}g_{AB}. \quad (3.21)$$

Sada se vidi jednostavna povezanost između kozmološke konstante i radijusa zakrivljenosti AdS_{p+2} prostorvremena

$$\Lambda_{(p+2)} = -\frac{p(p+1)}{2l^2}, \quad (3.22)$$

što u slučaju AdS_5 postaje

$$\Lambda_5 = -\frac{6}{l^2}. \quad (3.23)$$

3.2 Randall-Sundrum modeli

Kao što je već rečeno, u RS modelima se pretpostavlja postojanje jedne ili dvije površine u AdS_5 volumenu [9], [10]. Zapišimo 5D jednadžbe polja

$${}^{(5)}R_{AB} - \frac{1}{2} {}^{(5)}g_{AB} {}^{(5)}R = - {}^{(5)}g_{AB} \Lambda_5 + \kappa_5^2 {}^{(5)}\bar{T}_{AB}, \quad (3.24)$$

u kojima su sada u ${}^{(5)}\bar{T}_{AB}$ uključeni mogući doprinosi s površina. U duhu RS modela, za metriku pretpostavljamo Ansatz oblika

$$ds^2 = e^{-2A(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (3.25)$$

gdje je $\eta_{\mu\nu}$ 4D metrika Minkowskog. Takva metrika uvrštena je u (3.24), te je za nju dobiven Einsteinov tenzor. Izvod se nalazi u Dodatku C. Uz uvjet da je materija ograničena na površine, tj. da vrijedi ${}^{(5)}\bar{T}_{55} = 0$, dobivaju se

$$A'^2 = -\frac{1}{6} \Lambda_5 \quad (3.26)$$

$$A'' {}^{(5)}g_{\mu\nu} = -\frac{1}{3} \kappa_5^2 {}^{(5)}\bar{T}_{\mu\nu}. \quad (3.27)$$

Razmotrimo prvo slučaj bez površina, dakle volumen ispunjen vakuumskom energijom Λ_5 . U tom slučaju (3.26) i (3.27) postaju

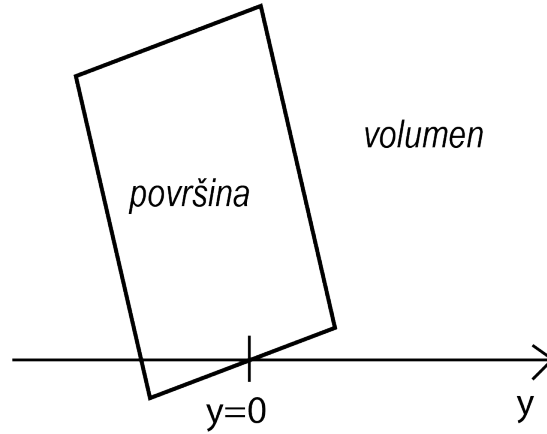
$$A'' = 0, \quad A'^2 = -\frac{\Lambda_5}{6}, \quad (3.28)$$

iz čega se odmah vidi da mora vrijediti $\Lambda_5 < 0$ kako bi postojalo realno rješenje. Općenito rješenje gornjih jednadžbi, uzimajući u obzir relaciju između radijusa za-

krivljenosti i kozmološke konstante (3.23), dano je s

$$A_{\pm}(y) = \pm \frac{y}{l} + A_0, \quad (3.29)$$

gdje se može staviti $A_0 = 0$ skaliranjem koordinata. Metrika dobivena prethodnom relacijom je lokalno anti-de Sitter, a diskusija se može naći u [48]. Sljedeće proširenje ovog modela je da se doda površina napetosti λ u $y = 0$. Prikaz tog modela dan je na slici (Slika 3.1). To se naziva Randall-Sundrum model 2. U tom slučaju, prema



Slika 3.1: Prikaz RS modela 2

${}^{(5)}\bar{T}_{\mu\nu} = -\lambda {}^{(5)}g_{\mu\nu}\delta(y)$ jednadžba (3.27) postaje

$$A_2'' = -\frac{1}{3}\kappa_5^2\lambda\delta(y). \quad (3.30)$$

Ovdje nas zanimaju rješenja u kojima nema divergencije u $y = \infty$. Prirodan način na koji ih pronalazimo je povezivanjem dva rješenja dana u (3.29). Budući da nas ne zanima rješenje koje bi eksponencijalno raslo, dva dobivena rješenja (3.29) se povezuju na sljedeći način

$$A_2(y) = \frac{|y|}{l}, \quad (3.31)$$

pa slijedi

$$A_2' = \frac{1}{l}(\theta(y) - \theta(-y)), \quad (3.32)$$

gdje je θ step-funkcija. Iz gornje relacije slijedi

$$A_2'' = \frac{2}{l}\delta(y). \quad (3.33)$$

Sada se vidi da vrijedi

$$\frac{1}{3}\kappa_5^2\lambda = \frac{2}{l}, \quad (3.34)$$

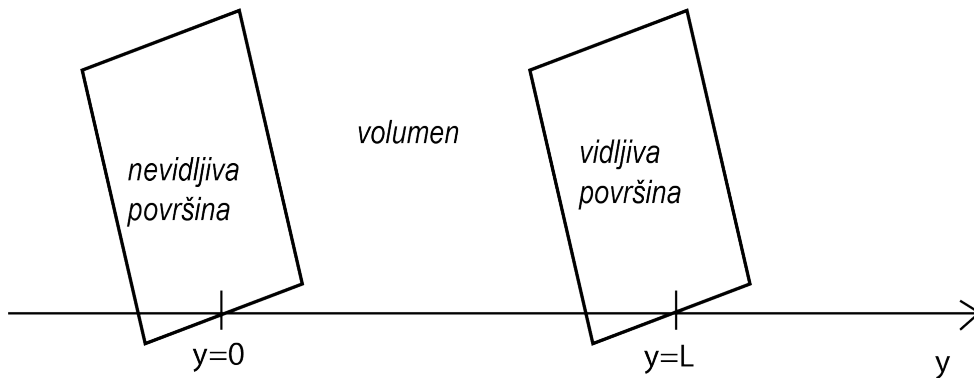
tj.

$$\lambda = \frac{6}{\kappa_5^2 l}. \quad (3.35)$$

Glavnina ovog rada, upravo je u kontekstu RS modela 2. Dakle, ako je u tekstu spomenuta *površina* misli se baš na ovu *površinu* pozitivne napetosti koji se nalazi u AdS_5 volumenu, osim ako je drugačije rečeno. Kod Randall-Sundrum modela 1, dodatna dimenzija se kompaktificira na način da se od koordinate y ne očekuje samo Z_2 simetrija, već i periodičnost. Dodatna dimenzija onda postaje orbifold - kružnica S^1 sa Z_2 simetrijom. Dakle na toj kržnici poistovjećene su točke y i $-y$ te $r_c\pi + y$ i $r_c\pi - y$, gdje je r_c radijus te kružnice. Najlakše je to zamisliti kao kružnicu presavinutu po promjeru. Nama zanimljiva fizika onda se odvija u $y \in [0, r_c\pi]$. Model je specifičan po tome što se ovdje nalaze dvije *površine*: jedna nevidljiva *površina* se nalazi u $y = 0$, druga vidljiva, naša *površina* se nalazi na $y = r_c\pi$. Sličnom analizom kao i za RS2 model može se dobiti da *površina* na $y = 0$ ima pozitivnu napetost, dok *površina* na $y = r_c\pi$ ima negativnu napetost. Metrika se u ovom slučaju piše kao

$$ds^2 = e^{-2kr_c\varphi}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu - r_c^2 d\varphi^2, \quad (3.36)$$

uz uvjet $0 \leq \varphi \leq \pi$. Randall-Sundrum model 1 prikazan je na slici (Slika 3.2).



Slika 3.2: Prikaz RS modela 1.

4 Linearizirana gravitacija na površini

U ovom poglavlju prati se uobičajeni pristup lineariziranoj gravitaciji na *površini* [14]. Razmatraju se perturbacije $h_{\mu\nu}$ oko AdS_5

$$ds^2 = (e^{-2|y|/l}\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (4.1)$$

gdje su odabrane koordinate tako da vrijedi $h_{A4} = 0$. To je izbor koji se smije napraviti u blizini *površine*. Lineariziranjem (2.38) dobivaju se

$$R_{44} + \frac{4}{l^2} = -\frac{1}{2}\partial_y(e^{2|y|/l}\partial_y h) = 0 \quad (4.2)$$

$$R_{\mu 4} = \frac{1}{2}\partial_y[e^{2|y|/l}(\partial_\nu h_\mu{}^\nu - \partial_\mu h)] = 0 \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} + \frac{4}{l^2}g_{\mu\nu} = & \frac{1}{2}e^{2|y|/l}(2\partial_\sigma\partial_{(\nu}h_{\mu)}{}^\sigma - \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu h_{\mu\nu} - \partial_\mu\partial_\nu h) \\ & - \frac{1}{2}\partial_y^2 h_{\mu\nu} + \frac{2}{l^2}h_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\left(\frac{h}{l^2} + \frac{\partial_y h}{2l}\right) = 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

gdje je $h \equiv h^\mu{}_\mu$. Svugdje u *volumenu*, može se odabrati Randall-Sundrum baždarenje za koje vrijedi

$$h_{A4} = 0, \quad \partial_\nu h_\mu{}^\nu = 0, \quad h = 0. \quad (4.5)$$

U tom baždarenju, relacije (4.2) i (4.3) su trivijalno zadovoljene, dok (4.4) postaje

$$\left(e^{2|y|/l}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + \partial_y^2 - \frac{4}{l^2}\right)h_{\mu\nu} = 0. \quad (4.6)$$

No, problem s RS baždarenjem je taj da se u prisustvu materije na *površini* sama *površina* zakrivi. Zbog toga se više ne nalazi na $y = 0$ pa se definiraju i Gaussove normalne koordinate (\bar{x}^μ, \bar{y}) , u kojima je *površina* fiksirana na $\bar{y} = 0$. Takve koordinate definirane su i s $\bar{h}_{A4} = 0$. Sada se uvjeti spajanja (2.26) mogu iskoristiti. U Gaussovim normalnim koordinatama ekstrinzična zakrivljenost dana je s

$$K_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\partial_{\bar{y}}\bar{g}_{\mu\nu} \quad (4.7)$$

pa se korištenjem (4.1) i uvjeta spajanja (2.26) s $\bar{y} > 0$ strane dobiva

$$-\frac{2}{l}\eta_{\mu\nu} + \partial_{\bar{y}}\bar{h}_{\mu\nu} = -\kappa_5^2 \left[T_{\mu\nu}^{brane} + \frac{1}{3}(\lambda - T^{brane})\bar{g}_{\mu\nu}^0 \right], \quad (4.8)$$

gdje je $\bar{g}_{\mu\nu}^0 = \eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu}$ metrika inducirana na *površini*, dakle u $\bar{y} = 0$. Nadalje, uvrsti li se u prethodnu relaciju (2.13) te ako se još iskoristi (3.35), dobiva se

$$\left(\frac{2}{l} + \partial_{\bar{y}} \right) \bar{h}_{\mu\nu} = -\kappa_5^2 \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}T^{brane}\eta_{\mu\nu} \right). \quad (4.9)$$

Sada je cilj gornji uvjet spajanja napisati u RS baždarenju, kako bi se mogao povezati s (4.6). Metrika u Gaussovima normalnim koordinatama ima sljedeći oblik

$$ds^2 = \bar{g}_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (4.10)$$

tj. i u Gaussovima normalnim koordinatama vrijedi $\bar{h}_{A4} = 0$. Promotrimo transformaciju između dva baždarenja

$$\bar{y} = y + \xi^4(x^A) \quad (4.11)$$

$$\bar{x}^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x^A). \quad (4.12)$$

Općenito se pri koordinatnoj transformaciji metrika transformira na sljedeći način

$$\bar{g}_{AB} = \frac{\partial x^C}{\partial \bar{x}^A} \frac{\partial x^D}{\partial \bar{x}^B} g_{CD}, \quad (4.13)$$

što u slučaju infinitezimalne transformacije u najvišem redu postaje

$$\bar{g}_{AB} = g_{AB} - (g_{AC}\partial_B\xi^C + g_{BC}\partial_A\xi^C + \xi^C\partial_C g_{AB}). \quad (4.14)$$

Ako prethodnu relaciju raspišemo za \bar{g}_{44} i $\bar{g}_{4\mu}$ dobiva se

$$\begin{aligned} \partial_y \xi^4 &= 0, \\ \partial_y \xi^\mu &= -e^{2|y|/l} \eta^{\mu\sigma} \partial_\sigma \xi^4. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Razmatranjem strane na kojoj vrijedi $y > 0$ kao najopćenitije rješenje dobiva se

$$\xi^4 = \xi^4(x^\nu) \quad (4.16)$$

$$\xi^\mu = -\frac{l}{2}e^{2|y|/l}\eta^{\mu\sigma}\partial_\sigma\xi^4(x^\nu) + F^\mu(x^\nu), \quad (4.17)$$

gdje se nalazi i dodatna baždarna sloboda koja će se kasnije iskoristiti. Vidi se da se u RS baždarenju *površina* nalazi na $y = -\xi^4$. Sve skupa, relacija koja povezuje perturbacije u oba baždarenja je

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - l\partial_\mu\partial_\nu\xi^4 - \frac{2}{l}e^{2|y|/l}\eta_{\mu\nu}\xi^4 + e^{2|y|/l}\partial_{(\mu}\eta_{\nu)\rho}F^\rho. \quad (4.18)$$

Budući da ni F^ρ ni ξ^4 ne ovise o y , uvjet spajanja (4.9) u RS baždarenju postaje

$$\left(\frac{2}{l} + \partial_y\right)h_{\mu\nu} = -\Sigma_{\mu\nu}, \quad (4.19)$$

uz

$$\Sigma_{\mu\nu} \equiv \kappa_5^2 \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}T\right) + 2\partial_\mu\partial_\nu\xi^4. \quad (4.20)$$

U RS baždarenju vrijedi $h^\mu{}_\mu = 0$, što prema relaciji (4.19) znači da vrijedi i $\Sigma^\mu{}_\mu = 0$ iz čega slijedi jednačba za dobivanje ξ^4

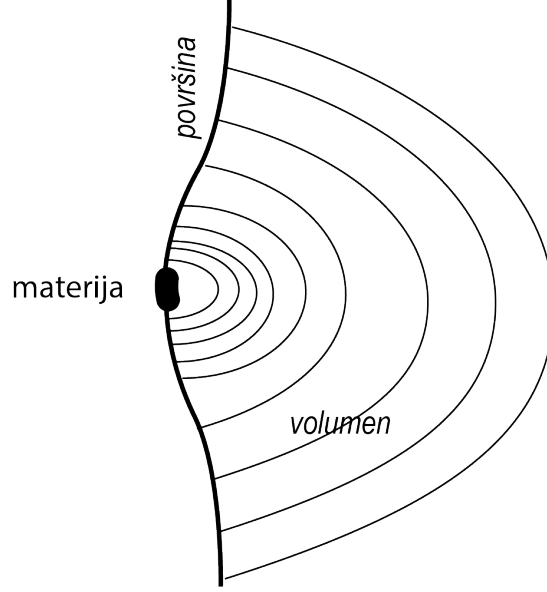
$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\xi^4 = \frac{\kappa_5^2}{6}T, \quad (4.21)$$

koja eksplicitno pokazuje zakrivljanje *površine* pod utjecajem materije, što je i prikazano na slici (Slika 4.1). Povežimo sada (4.6) i (4.19) u istu jednačbu pomoću δ -funkcije na diskontinuitetu

$$\left[e^{2|y|/l}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + \partial_y^2 - \frac{4}{l^2} + \frac{4}{l}\delta(y)\right]h_{\mu\nu} = -2\Sigma_{\mu\nu}\delta(y). \quad (4.22)$$

Definirajmo 5D retardiranu Greenovu funkciju

$$\left[e^{2|y|/l}\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + \partial_y^2 - \frac{4}{l^2} + \frac{4}{l}\delta(y)\right]G(x, y; x', y') = \delta^{(4)}(x - x')\delta(y - y') \quad (4.23)$$



Slika 4.1: Prikaz zakrivljanja površine pod utjecajem materije.

pomoću koje se rješava jednačba (4.22)

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} &= -2 \int d^4x' dy' G(x, y; x', y') \Sigma_{\mu\nu}(x') \delta(y') \\ &= -2 \int d^4x' G(x, y; x', 0) \Sigma_{\mu\nu}(x'). \end{aligned} \quad (4.24)$$

Korisno je opet se vratiti u Gaussove normalne koordinate zato što nas zanimaju perturbacije na površini. Iz (4.18) slijedi

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}^{(m)} + \frac{2}{l} e^{2|y|/l} \eta_{\mu\nu} \xi^4 + l \partial_\mu \partial_\nu \xi^4 + h_{\mu\nu}^{(\xi)} - e^{2|y|/l} \partial_{(\mu} \eta_{\nu)\rho} F^\rho, \quad (4.25)$$

gdje vrijedi

$$h_{\mu\nu}^{(m)} \equiv -2\kappa_5^2 \int d^4x' G(x, y; x', 0) \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} T \right), \quad (4.26)$$

$$h_{\mu\nu}^{(\xi)} \equiv -4 \int d^4x' G(x, y; x', 0) \partial_\mu \partial_\nu \xi^4. \quad (4.27)$$

Odabirom $F^\rho(x^\nu)$, pri čemu se sada iskorištava baždarna sloboda ostavljena u (4.17), relacija (4.25) može se svesti na

$$\bar{h}_{\mu\nu} = -2\kappa_5^2 \int d^4x' G(x, y; x', 0) \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} T \right) + \frac{2}{l} e^{2|y|/l} \eta_{\mu\nu} \xi^4, \quad (4.28)$$

što u slučaju da se ograničimo na *površinu* ($y = 0$) postaje

$$\bar{h}_{\mu\nu} = -2\kappa_5^2 \int d^4x' G(x, 0; x', 0) \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu}T \right) + \frac{2}{l}\eta_{\mu\nu}\xi^4. \quad (4.29)$$

Greenova funkcija za stacionaran slučaj je izvedena u [14]. Ako još vrijedi $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \gg l$, razvoj Greenove funkcije s korekcijom najnižeg reda je

$$G(\mathbf{x}, 0; \mathbf{x}', 0) \approx -\frac{1}{4\pi lr} \left(1 + \frac{l^2}{2r^2} \right), \quad (4.30)$$

gdje vrijedi $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$. Dakle, pomoću Greenove funkcije koja je preuzeta iz [14], ovdje je smo pokazali kako povezati perturbacije u RS baždarenju s onima u Gaussovima normalnim koordinatama, za stacionaran slučaj.

4.1 "Brane-world" newtonovski potencijal

Kako bi se odredio oblik newtonovskog potencijala, izračunajmo perturbaciju metrike za mirujuću točkastu masu M koja se nalazi na *površini*. U tom slučaju tenzor energije i impulsa ima oblik

$$T_{\mu\nu} = M\delta^{(3)}(\mathbf{x})\delta_\mu^0\delta_\nu^0. \quad (4.31)$$

Takav tenzor energije i impulsa se uvrsti u jednadžbu (4.21), čime se dobiva

$$\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\xi^4 = -\frac{\kappa_5^2}{6}M\delta^{(3)}(\mathbf{x}). \quad (4.32)$$

Za vremenski neovisno rješenje, s lijeve strane se nalazi 3D Laplaceov operator i u tom slučaju rješenje je

$$\xi^4 = \frac{\kappa_5^2 M}{24\pi r}, \quad (4.33)$$

uz $r = |\mathbf{x}|$. S druge strane, uvrštavanjem (4.31) u (4.26), uz korištenje Greenove funkcije dane s (4.30) dobiva se

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu}^{(m)} &= 2\kappa_5^2 \int d^3\mathbf{x}' \frac{1}{4\pi l|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left(1 + \frac{l^2}{2|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \right) \left(\delta_\mu^0\delta_\nu^0 + \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu} \right) M\delta^{(3)}(\mathbf{x}') \\ &= \frac{\kappa_5^2 M}{2\pi lr} \left(1 + \frac{l^2}{2r^2} \right) \left(\delta_\mu^0\delta_\nu^0 + \frac{1}{3}\eta_{\mu\nu} \right), \end{aligned} \quad (4.34)$$

što zajedno s (4.33), uvršteno u (4.29) daje

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \frac{\kappa_5^2 M}{4\pi l r} \left[\left(1 + \frac{l^2}{3r^2}\right) \eta_{\mu\nu} + \left(2 + \frac{l^2}{r^2}\right) \delta_\mu^0 \delta_\nu^0 \right]. \quad (4.35)$$

Konkretno, \bar{h}_{00} komponenta dana je s

$$\bar{h}_{00} = \frac{2GM}{r} \left(1 + \frac{2l^2}{3r^2}\right), \quad (4.36)$$

gdje je $G \equiv \kappa_5^2/8\pi l$. Iz nje se može iščitati newtonovski potencijal na površini

$$\phi = -\frac{1}{2}\bar{h}_{00} = -\frac{GM}{r} \left(1 + \frac{2l^2}{3r^2}\right). \quad (4.37)$$

Newtonov zakon gravitacije izmjeren je do 0.1mm [15] pa ga gornja relacija ne krši u slučaju da je dodatna dimenzija manja. S druge strane, prostorne komponente dane su s

$$\bar{h}_{ij} = \frac{2GM}{r} \left(1 + \frac{l^2}{3r^2}\right) \delta_{ij}. \quad (4.38)$$

4.2 Linearizirana metrika rotirajućeg objekta na površini

U ovom dijelu cilj je izračunati lineariziranu metriku općenitijeg, rotirajućeg objekta s

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu. \quad (4.39)$$

Desni član u (4.29) ne pridonosi nedijagonalnim elementima pa vrijedi

$$\begin{aligned} \bar{h}_{0i} &= -2\kappa_5^2 \int d^4x' G(x, 0; x', 0) T_{0i}(x') \\ &= 4G \int d^3\mathbf{x}' \frac{T_{0i}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \left(1 + \frac{l^2}{2|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}\right), \end{aligned} \quad (4.40)$$

gdje je opet iskorištena relacija (4.30). Iskoristi li se još sad multipolna ekspanzija, uz $r \approx |\mathbf{x}| \gg |\mathbf{x}'|$

$$\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}'}{r^3} + \dots, \quad (4.41)$$

dobiva se

$$\begin{aligned}\bar{h}_{0i} &= \int d^3x' T_{0i}(x') \left(\frac{1}{r} + \frac{x^j x'_j}{r^3} \right) \left[1 + \frac{l^2}{2} \left(\frac{1}{r^2} + 2 \frac{x^j x'_j}{r^4} + \dots \right) \right] \\ &= 4G \left[\left(1 + \frac{l^2}{2r^2} \right) \frac{1}{r} P_i + \left(1 + \frac{3l^2}{2r^2} \right) \frac{x^j}{r^3} J_{ij} \right],\end{aligned}\quad (4.42)$$

uz

$$P_i = \int d^3x' T_{0i}(x'), \quad J_{ij} = \int d^3x' x'_j T_{0i}(x'). \quad (4.43)$$

Na površini vrijedi (2.36), koja se u linearnom redu reducira na $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$. U stacionarnom slučaju vrijedi

$$\partial_i T^{i0} = 0, \quad (4.44)$$

čime se uz parcijalnu integraciju dobiva

$$0 = - \int d^3x x_i \frac{\partial}{\partial x^j} T^{j0} = P_i, \quad (4.45)$$

$$0 = -2 \int d^3x x_i x_j \frac{\partial}{\partial x^k} T^{k0} = J_{ij} + J_{ji}. \quad (4.46)$$

Zbog $J_{ij} = -J_{ji}$ može se pisati

$$J_{ij} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} J^k, \quad (4.47)$$

pri čemu vrijedi

$$J^k \equiv \int d^3x \varepsilon_{mnk} x^m T^{n0}. \quad (4.48)$$

Iskorištavanjem gornjih relacija u (4.42) dobiva se

$$\bar{h}_{0i} = 2G \frac{\varepsilon_{ijk} x^j J^k}{r^3} \left(1 + \frac{3l^2}{2r^2} \right). \quad (4.49)$$

Zadavanjem zakretnog impulsa s $J = J^z = Ma$ i uvrštavanjem u prethodnu relaciju, ukupnu metriku možemo zapisati kao (uz $G = 1$)

$$\begin{aligned}ds^2 &= - \left[1 - \frac{2M}{r} \left(1 + \frac{2l^2}{3r^2} \right) \right] dt^2 + \left[1 - \frac{2M}{r} \left(1 + \frac{l^2}{r^2} \right) \right]^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 \\ &\quad + r^2 \sin^2 \theta \left[d\phi - \frac{4Ma}{r^3} \left(1 + \frac{3l^2}{2r^2} \right) dt d\phi \right].\end{aligned}\quad (4.50)$$

Ova metrika izvedena je korištenjem Greenove funkcije za stacionaran slučaj. Gornja metrika onda odgovara i lineariziranoj metrici rotirajuće crne rupe na *površini*, a u tom kontekstu će se i koristiti u sljedećem poglavlju. Ovisnost gornje metrike o a točna je do r^{-3} , a ovisnost o l točna je do r^{-5} .

5 "Brane-world" crne rupe

Za dobivanje uvida u naš svemir, jedan od važnijih objekta promatranja mogu biti crne rupe. Nedavno [16] je snimljena sjena supermasivne crne rupe M87*. Dio ovog rada posvećen je upravo ograničenjima, koja se mogu odrediti iz opažanja Event Horizon Telescope-a, na parametre specifične za "brane-world" modele. S tim na umu, u ovom poglavlju razmatraju se razne varijante crnih rupa na *površini*. Posebna pažnja posvećena je rotirajućoj crnoj rupi baš zbog kasnije rasprave o mogućim ograničenjima na parametre "brane-world" modela. Za početak, zapišimo efektivne jednadžbe polja na *površini* (2.27) u vakuumu koji se nalazi izvan zvijezde ili crne rupe, uz $\Lambda = 0$

$$R_{\mu\nu} = -\mathcal{E}_{\mu\nu}. \quad (5.1)$$

Očekuje se da je razumno zanemariti kozmološku konstantu u blizini horizonta crne rupe jer očekujemo da za masu crne rupe vrijedi $M \gg \Lambda$. Naravno, vrijedi: $R = 0 = g^{\mu\nu} \mathcal{E}_{\mu\nu}$. Zbog (2.37) dobiva se i

$$\nabla^\mu \mathcal{E}_{\mu\nu} = 0. \quad (5.2)$$

5.1 Crna struna

Kao što je već bilo rečeno u trećem poglavlju, kod Randall-Sundrum modela, 5D prostorvrijeme unutar kojega je smještena *površina* koja čini naš svemir, je anti-de Sitter. Metrika je

$$ds^2 = e^{-2|y|/l} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (5.3)$$

gdje je $\eta_{\mu\nu}$ 4D Minkowski metrika dok je l , kao što je već rečeno, radijus zakrivljenosti AdS_5 . Iskoristi li se sada nova koordinata $z \equiv le^{y/l}$, metrika (5.3) može se napisati kao

$$ds^2 = \frac{l^2}{z^2} (dz^2 + \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu). \quad (5.4)$$

Ako se Minkowski metrika u (5.4) zamijeni bilo kojom 4D metrikom za koju vrijedi

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (5.5)$$

metrika (5.4) je i dalje rješenje 5D jednadžbi polja [17]. Najjednostavniji slučaj, koji opisuje crnu rupu na 4D *površini*, dobiva se zamjenom Minkowski metrike u (5.4)

Schwarzschildovom metrikom

$$ds^2 = \frac{l^2}{z^2} \left[- \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2M/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + dz^2 \right]. \quad (5.6)$$

Gornje rješenje naziva se (Schwarzschildovom) "crnom strunom"(engl. black string). Svaka ploha za koju vrijedi $y = konst.$ čini 4D Schwarzschildovo prostorvrijeme - 5D metrika dobivena je slaganjem Schwarzschildovih metrika uzduž dodatne dimenzije. Izračuna li se Kretschmannov skalar za metriku (5.6) dobiva se [17]

$${}^{(5)}R_{ABCD} {}^{(5)}R^{ABCD} = \frac{1}{l^4} \left(40 + \frac{48M^2 z^4}{r^6} \right). \quad (5.7)$$

Kao što bi se i očekivalo za način na koji je dobivena metrika (5.6), za svaki z u $r = 0$ postoji singularitet. Isto tako, Kretschmannov skalar divergira u slučaju da $z \rightarrow \infty$. Sve u svemu, (5.6) nema zadovoljavajuće ponašanje [17]. Kao prvo, ako je materija ograničena na *površinu* očekivalo bi se da su i gravitacijski efekti lokalizirani blizu *površine*. No, iako bi se horizont događaja potencijalno mogao širiti u *volumen* blizu *površine*, ovdje se događa da se sam singularitet širi kroz cijeli *volumen*. Kao drugo, zakrivljenost u $z \rightarrow \infty$ divergira, što znači da se ovdje radi o fizikalnom, a ne koordinatnom singularitetu.

5.2 "Brane-world" rotirajuća crna rupa

Metrika rotirajuće crne rupe na *površini* za RS2 model izvedena je u [19], [49]. Ona ima sljedeći oblik

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr - Q}{\Sigma} \right) dt^2 - 2 \frac{a(2Mr - Q) \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Mr - Q}{\Sigma} a^2 \sin^2 \theta \right) \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (5.8)$$

U metrici (5.8) vrijedi

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv r^2 + a^2 - 2Mr + Q \\ \Sigma &\equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \end{aligned} \quad (5.9)$$

pri čemu standardno vrijedi $a \equiv J/M$, gdje je J zakretni impuls crne rupe, a M njena masa. Može se vidjeti da metrika (5.8) zapravo ima isti oblik kao Kerr-Newmannova

metrika, koja opisuje nabijenu rotirajuću crnu rupu. No, postoji i jedna bitna razlika. U Kerr-Newmanovoj metrici q^2 , je kvadrat naboja i on može poprimiti samo pozitivne vrijednosti. S druge strane, Q bi mogao poprimiti i pozitivne i negativne vrijednosti. "Plimni naboj" (engl. tidal charge), kako se obično Q naziva, u sebi sadržava ne-lokalne efekte koji dolaze od postojanja *volumena*. Metrika (5.8) zahtijeva dodatne komentare. Ta metrika dobivena je pomoću Kerr-Schild ansatza traženjem traga relacije (5.1). Tj. zanemarena je kozmološka konstanta u 4D i dobivena je relacija

$$R = 0. \quad (5.10)$$

To znači da je samo pronađen izgled efektivnog rješenja na *površini*. No, nije poznato postoji li rješenje za rotirajuću crnu rupu na *površini* u 5 dimenzija. Dakle, jedino što se sa sigurnošću može reći je da ako rješenje u 5 dimenzija postoji, ono na *površini* reproducira metriku 5.8. U principu bi u 5D metrici plimni naboj Q mogao ovisiti o koordinatama y, r, θ . No, na $y = 0$, tj. na *površini*, on ne ovisi o njima. Isto tako, za očekivati je da bi Q mogao ovisiti o M, a i l , ali općenito se u literaturi uzima da vrijedi $Q = Q(M)$, a postojanje tih efekata intuitivno se pripisuje [18] tome da gravitacijsko polje reflektira negativna kozmološka konstanta koja postoji u *volumenu*. Zapravo, svo neznanje koje postoji zbog nemogućnosti pronalaženja ukupnog rješenja u 5 dimenzija upisano je u plimni naboj Q . Uvrštavanjem metrike (5.8) u jednadžbe polja (5.1) za električni dio Weylovog tenzora dobiva se [20]

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^t_t = -\mathcal{E}^\phi_\phi &= -\frac{Q}{\Sigma^3}(\Sigma - 2(r^2 + a^2)) \\ \mathcal{E}^r_r = -\mathcal{E}^\theta_\theta &= \frac{Q}{\Sigma^2} \\ \mathcal{E}^t_\phi = -\frac{2Qa}{\Sigma^3}(r^2 + a^2) \sin^2 \theta \\ \mathcal{E}^\phi_t &= -\frac{2Qa}{\Sigma^3}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Odmah je jasno da takav električni dio Weylovog tenzora zadovoljava relaciju $\mathcal{E}^\mu_\mu = 0$, a može se provjeriti da je zadovoljena i relacija (5.2). Nadalje, promotrimo još dvije značajke rotirajuće crne rupe na *površini*. To su njezin horizont događaja i statički limit koji definira ergosferu. Horizont događaja u ovom slučaju definiran je jednadžbom $\Delta = 0$. Kao rješenje te kvadratne jednadžbe dobivaju se r_+ i r_- , pri čemu $r_+ > r_-$. Veći korijen jednadžbe, dakle r_+ , definira poziciju horizonta događaja

$$r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2 - Q}, \quad (5.12)$$

pri čemu se vidi da horizont događaja postoji ako je zadovoljeno

$$M^2 \geq a^2 + Q. \quad (5.13)$$

Jasno je da u slučaju pozitivnog plimnog naboja gravitacijsko polje slabi i da se horizont smanjuje. No, u nekim radovima, npr. u [20], argumentirano je da negativan plimni naboj fizikalno ima više smisla. Budući da plimni naboj proizlazi iz mase, pri čemu je on sam veći što je masa crne rupe veća, intuitivno je za očekivati da će za veći apsolutni iznos naboja i gravitacijsko polje biti jače, što odgovara negativnom plimnom naboju. Negativan naboj omogućuje veći radijus horizonta, nego u slučaju Kerr-Newman metrike. Konkretnije, za $Q < 0$ i $a \rightarrow M$

$$r_+ \rightarrow (M + \sqrt{-Q}) > M, \quad (5.14)$$

što u kontekstu opće relativnosti ne postoji za Kerr-Newmanovu crnu rupu. U slučaju da vrijedi $r_+ = M$ i uz $Q < 0$ prema (5.12) ispada da je rotacijski parametar a veći od njene mase. Zbog toga, utjecaj *volumena* na *površinu* možda omogućava mehanizam zarotiravanja stacionarne i aksijalno-simetrične crne rupe na *površini*, a da pri tome njezin rotacijski parametar postane veći od mase [20]. Statički limit definiran je jednačbom $g_{tt} = 0$. Najveći korijen te jednačbe daje radijus ergosfere oko crne rupe

$$r_0 = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta - Q}. \quad (5.15)$$

U točkama $\theta = 0$ i $\theta = \pi$ ovaj radijus postaje jednak radijusu horizonta. Jasno je da negativan plimni naboj povećava ergosferu, dok je pozitivni naboj smanjuje, kao što je to i kod Kerr-Newmanove metrike.

5.3 Geodezici svjetlosnog tipa rotirajuće crne rupe

Ovdje će cilj biti odrediti geodezike svjetlosnog tipa za rotirajuću crnu rupu na *površini*. U sedmom poglavlju, prilikom određivanja parametara vezanih uz "brane-world" pomoću opažanja Event Horizon Telescope-a, bit će važni geodezici svjetlosnog tipa.

5.3.1 Geodezici svjetlosnog tipa blizu crne rupe

U blizini rotirajuće crne rupe metrika prostorstvremena dana je s (5.8). Već prije je spomenuto da je pri nalaženju metrike (5.8) zanemarena kozmološka konstanta pa se zbog toga očekuje da takva metrika opisuje prostorstvrijeme blizu horizonta. Geodezike tražimo pomoću Hamilton-Jacobi jednadžbe

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} + H = 0, \quad (5.16)$$

gdje je S Jacobi akcija, τ afin parametar, a H Hamiltonijan

$$H = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu. \quad (5.17)$$

Budući da metrika ne ovisi o t i ϕ , pojavljuju se dvije očuvane veličine $E = -p_t$ i $L = \lambda E = p_\phi$, tj. energija i angularni moment. Pretpostavimo sljedeći Ansatz za Jacobi akciju [21]

$$S = \frac{\mu^2}{2} \tau - Et + \lambda E \phi + S_r(r) + S_\theta(\theta), \quad (5.18)$$

gdje je μ masa čestice koja se giba po geodeziku. Uvrštavanjem prethodnog Ansatza u (5.16) i raspisivanjem dobiva se

$$\frac{\Delta}{\Sigma} p_r^2 + \frac{1}{\Sigma} p_\theta^2 + \frac{E^2}{\Sigma} \left(a \sin \theta - \frac{\lambda}{\sin^2 \theta} \right)^2 - \frac{E^2}{\Sigma \Delta} (r^2 + a^2 - a\lambda)^2 = -\mu^2. \quad (5.19)$$

Kao što je najavljeno, zanimaju nas geodezici svjetlosnog tipa pa se stavlja $\mu^2 = 0$. Ako se takva jednadžba pomnoži sa Σ postaje jasno da ju je moguće separirati. Očuvana veličina u tom slučaju je $K_b \equiv C + E^2(\lambda - a)^2$, gdje je C Carterova konstanta [22]. Sve zajedno to izgleda ovako

$$p_\theta^2 + E^2 \left(a \sin \theta - \frac{\lambda}{\sin^2 \theta} \right)^2 = -\Delta p_r^2 + \frac{E^2}{\Delta} (r^2 + a^2 - a\lambda)^2 \equiv K_b. \quad (5.20)$$

Uz

$$p^\theta = \frac{1}{\Sigma} p_\theta, \quad p^r = \frac{\Delta}{\Sigma} p_r \quad (5.21)$$

dobiva se krajnji oblik jednadžbi za p^r i p^θ

$$\frac{\Sigma}{E} p^r = \pm \sqrt{R_b(r)}, \quad \frac{\Sigma}{E} p^\theta = \pm \sqrt{\Theta_b(\theta)}, \quad (5.22)$$

pri čemu vrijedi

$$\begin{aligned} R_b(r) &= (r^2 + a^2 - a\lambda)^2 - \Delta(r)(\eta + (\lambda - a)^2) \\ \Theta_b(\theta) &= \eta + a^2 \cos^2 \theta - \lambda^2 \cot^2 \theta, \end{aligned} \quad (5.23)$$

gdje je $\eta \equiv C/E^2$. Indeks b odnosi se na dio prostorvremena "blizu" crne rupe. Nadalje, mogu se dobiti parametri $\tilde{\lambda}$ i $\tilde{\eta}$ za koje se fotoni oko crne rupe gibaju po zatvorenim putanjama radijusa $r = \tilde{r}$. Takve putanje dobivaju se ako je ispunjeno $R_b = R'_b = 0$, a to se postiže za

$$\tilde{\lambda} = \frac{a^2(M + \tilde{r}) + \tilde{r}[2Q + \tilde{r}(\tilde{r} - 3M)]}{a(M - \tilde{r})}, \quad (5.24)$$

$$\tilde{\eta} = -\tilde{r}^2 \frac{4a^2(Q - M\tilde{r}) + [2Q + \tilde{r}(\tilde{r} - 3M)]^2}{a^2(M - \tilde{r})}, \quad (5.25)$$

i oni se nazivaju kritičnim parametrima, tj. krivulja $\tilde{\eta}(\tilde{\lambda})$ naziva se kritična krivulja. Ako se na kritičnu krivulju $\tilde{\eta}(\tilde{\lambda})$ doda neki pozitivan broj, iz (5.23) se vidi da R_b postaje negativan ($\Delta(r)$ je pozitivno izvan horizonta). Zbog toga se može zaključiti da je dopušteno područje ispod kritične krivulje. Sljedeća bitna stvar za uočiti je da potencijal $\Theta_b(\theta)$ ima isti oblik kao u slučaju Kerrove crne rupe. Kod Kerrove crne rupe, za fotone koji mogu proći kroz ekvatorijalnu ravninu mora vrijediti $\eta \geq 0$ [23] jer za takve fotone postoji interval η unutar kojeg je $\Theta_b(\theta)$ nenegativan. U slučaju da vrijedi $|\lambda| < a$, postoji i dopušteno područje u kojem je $\eta < 0$, ali mora vrijediti $\eta \geq -(|\lambda| - a)^2$ kako bi se postigla nenegativnost potencijala Θ_b . Takvi fotoni ne mogu proći kroz ekvatorijalnu ravninu. Sve skupa za uvjete na η imamo

$$\tilde{\eta} \geq \eta \geq 0, \quad \text{uz } |\lambda| \geq a \quad (5.26)$$

$$\eta \geq -(|\lambda| - a)^2, \quad \text{uz } |\lambda| \leq a. \quad (5.27)$$

Područje u kojem vrijedi $\eta < 0$ neće biti bitno za analizu koja će se odraditi u sedmom poglavlju što se može i vidjeti u [24]. Zbog toga, od sada se pri analizi gleda samo područje određeno s $\eta \geq 0$, pri čemu je gornja granica kritična krivulja $\tilde{\eta}(\tilde{\lambda})$.

5.3.2 Geodezici svjetlosnog tipa daleko od crne rupe

Daleko od crne rupe, metrika koja opisuje prostorvrijeme je linearizirana metrika dana s (4.50). Ta metrika je konzistentna s metrikom (5.8) u limesu velikog r , ako se maknu članovi koji sadrže a^2 i ako se u metrici (4.50) stavi $l = 0$. No, važno je naglasiti da metrika (5.8) sama po sebi ne reproducira metriku (4.50) daleko od crne rupe. To znači da (5.8) ne opisuje cijelo prostorvrijeme oko rotirajuće crne rupe. Budući da pretpostavljamo da koordinate (t, r, θ, ϕ) pokrivaju cijelo prostorvrijeme, metrike (4.50) i (5.8) možemo shvatiti kao dva limesa nepoznate metrike koja opisuje cijelo prostorvrijeme [24]. Prateći istu proceduru kao i za metriku (5.8) i ovdje se može provesti separacija varijabli

$$p_\theta^2 + E^2 \frac{\lambda^2}{\sin^2 \theta} = - \left[r^2 - 2M \left(\frac{l^2}{r^2} - 1 \right) r \right] p_r^2 + \frac{3E^2 [r^3 - Ma\lambda(2 + 3l^2/r^2)]^2}{r^2 (3r - 2M(3 + 2l^2/r^2))} = K_d. \quad (5.28)$$

Ovdje se indeks d odnosi na "daleko". Zbog toga što se pretpostavlja da ove dvije metrike čine dva različita limesa iste metrike, očuvane veličine (E, L, K) , određene simetrijama prostorvremena, vrijede i blizu i daleko od crne rupe. Zbog toga, radi se identifikacija $K \equiv K_d = K_b$. Raspisivanjem se dobiva

$$\frac{r^2}{E} p^r = \pm \sqrt{R_d(r)}, \quad \frac{r^2}{E} p^\theta = \pm \sqrt{\Theta_d(\theta)}, \quad (5.29)$$

uz

$$R_d(r) = r^4 \left[1 + \frac{2M(l^2 - r^2)}{r^3} \right] \left[\frac{(1 - A_2)^2}{A_1} - B \right], \quad (5.30)$$

$$\Theta_d(\theta) = \eta + (\lambda - a)^2 - \frac{\lambda^2}{\sin^2 \theta}.$$

U gornjim relacijama uvedene su oznake

$$A_1 \equiv 1 - \frac{2M}{r} \left(1 + \frac{2l^2}{3r^2} \right)$$

$$A_2 \equiv \frac{Ma\lambda}{r^3} \left(2 + 3\frac{l^2}{r^2} \right) \quad (5.31)$$

$$B \equiv (\eta + (\lambda - a)^2)/r^2.$$

U ovom području, vidi se da je za veliki r , dakle za $r \gg r_+$ uvijek postignuta pozitivnost radijalnog potencijala $R_d(r) > 0$. Nenegativnost potencijala $\Theta_d(\theta)$ zadovoljena

je ako je zadovoljeno

$$\eta \geq \lambda^2 \cot^2 \theta + 2a\lambda - a^2 \geq 2a\lambda - a^2. \quad (5.32)$$

Zapišimo još

$$\eta(\lambda) = \lambda^2 \cot^2 \theta + 2a\lambda - a^2, \quad (5.33)$$

čime smo označili donju granicu parametra η . U sedmom poglavlju provest će se nastavak ove analize s primjenom na sjenu M87*.

6 "Brane-world" kozmologija

Ovdje će se, radi potpunosti, provesti vrlo jednostavna analiza kozmologije u "brane-world" modelima. Pretpostavlja se izotropnost i homogenost u 3 prostorne dimenzije *površine*. Za tenzor energije i impulsa na *površini* se onda uzima

$$T^\mu{}_\nu|^{brane} = diag(-\rho, P, P, P), \quad (6.1)$$

tj. tenzor energije i impulsa savršenog fluida. Nadalje, radi jednostavnosti, pretpostavlja se da se intervali duljine duž dodatne dimenzije ne mijenjaju u vremenu. Za metriku se onda odabire ansatz [25]

$$ds^2 = -w^2(y, t)dt^2 + a^2(y, t)\gamma_{ij}dx^i dx^j + dy^2, \quad (6.2)$$

gdje je $\gamma_{ij} \equiv f(r)\delta_{ij}$, uz $f^{-1}(r) = 1 - kr^2$ i δ_{ij} Kroneckerov simbol. Dakle, $f(r)$ je standardni član, koji se nalazi u 4D FLRW metrici, u kojem se krije zakrivljenost prostora, određena s k , koji može poprimiti vrijednosti $-1, 0, 1$. U daljnjem razmatranju ograničavamo se na $k = 0$. Metrika (6.2) izgleda kao prirodno poopćenje FLRW metrike na 5D. Po uzoru na standardne "brane-world" modele pretpostavlja se i Z_2 simetrija pa članovi $a(y, t)$ i $w(y, t)$ ne ovise direktno o y , već samo o $|y|$. Zapišimo sada 5D jednadžbe polja (2.38) tako da se eksplicitno uključe doprinosi na *površini*

$${}^{(5)}\bar{G}_{AB} = -\Lambda_5 {}^{(5)}g_{AB} + \kappa_5^2 T_{\mu\nu}^{brane} \delta_A^\mu \delta_B^\nu \delta(y). \quad (6.3)$$

Uvrštavanjem metrike (6.2) u

$${}^{(5)}\bar{G}_{AB} = {}^{(5)}R_{AB} - \frac{1}{2} {}^{(5)}g_{AB} {}^{(5)}R \quad (6.4)$$

za komponente 5D Einsteinovog tenzora dobiva se

$${}^{(5)}\bar{G}_{00} = 3 \left\{ \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 - w^2 \left[\left(\frac{a'}{a} \right)^2 + \frac{a''}{a} \right] \right\}, \quad (6.5)$$

$${}^{(5)}\bar{G}_{ij} = \left[a^2 \left\{ \frac{a'}{a} \left(2\frac{w'}{w} + \frac{a'}{a} \right) + 2\frac{a''}{a} + \frac{w''}{w} \right\} + \frac{a^2}{w^2} \left\{ \frac{\dot{a}}{a} \left(2\frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{a}}{a} \right) - 2\frac{\ddot{a}}{a} \right\} \right] \delta_{ij}, \quad (6.6)$$

$${}^{(5)}\bar{G}_{04} = 3 \left(\frac{w'}{w} \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{a}'}{a} \right), \quad (6.7)$$

$${}^{(5)}\bar{G}_{44} = 3 \left\{ \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} + \frac{w'}{w} \right) - \frac{1}{w^2} \left[\dot{a} \left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{w}}{w} \right) + \ddot{a} \right] \right\}, \quad (6.8)$$

što je i detaljnije izvedeno u Dodatku D. S druge strane, integriranjem (6.3) oko 0, uz činjenicu da 5D metrika ne može imati diskontinuitet, dobiva se

$$\int_{0^-}^{0^+} dy {}^{(5)}\bar{G}_{AB} = \kappa_5^2 T_{\mu\nu}^{brane} \delta_A^\mu \delta_B^\nu, \quad (6.9)$$

što uvrštavanjem (6.5) i (6.6) uz oblik tenzora energije i impulsa (6.1) daje diskontinuitet derivacija a i w u $y = 0$:

$$\left. \frac{\Delta a'}{a} \right|_{y=0} = -\frac{\kappa_5^2}{3} \rho, \quad (6.10)$$

$$\left. \frac{\Delta w'}{w} \right|_{y=0} = \frac{\kappa_5^2}{3} (3P + 2\rho). \quad (6.11)$$

U gornjim relacijama vrijedi $\Delta a'(0) \equiv a'(0^+) - a'(0^-) = 2a'(0^+)$, uz istu logiku za $\Delta w'(0)$. Uvrstimo sada (6.7) u (6.9), čime se dobiva

$$\begin{aligned} \int_{0^-}^{0^+} dy {}^{(5)}\bar{G}_{04} &= 3 \int_{0^-}^{0^+} dy \left(\frac{w'}{w} \frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{a}'}{a} \right) \\ &= 3 \int_{0^-}^{0^+} dy \left[\frac{w'}{w} \frac{\dot{a}}{a} + \frac{d}{dt} \left(\frac{a'}{a} \right) - a' \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{a} \right) \right] \\ &= 3 \int_{0^-}^{0^+} dy \left[\frac{w'}{w} \frac{\dot{a}}{a} + \frac{d}{dt} \left(\frac{a'}{a} \right) + \frac{\dot{a} a'}{a a} \right] \end{aligned} \quad (6.12)$$

pa ako se sada još uvrste relacije (6.10) i (6.11) dobiva se standardna jednačba očuvanja

$$\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}_0}{a} (P + \rho) = 0, \quad (6.13)$$

gdje je $a_0(t) \equiv a(y=0, t)$. Iz (6.7) se uz ${}^{(5)}\bar{G}_{04} = 0$ isto može dobiti

$$w(y, t) = \lambda(t)\dot{a}(y, t), \quad (6.14)$$

pri čemu zadajemo $w_0(t) \equiv w(y=0, t)$. U ovom poglavlju λ se ne odnosi na napetost površine. Jednadžba (6.5) se, uz činjenicu da vrijedi ${}^{(5)}\bar{G}_{00} = w(\Lambda_5 + \delta(y)\kappa_5^2\rho)$, može zapisati kao

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = w^2 \left[\frac{\Lambda_5}{3} + \kappa_5^2 \frac{\rho}{3} + \left(\frac{a'}{a}\right)^2 + \frac{a''_R}{a} \right], \quad (6.15)$$

gdje se a''_R odnosi na regularan dio funkcije. Konkretno, ako se prethodna jednadžba izvrijedni na *površini*, treći član s desne strane daje doprinos $(\frac{a'}{a})^2 \propto \rho^2$, što znači da u ovom slučaju kvadrat Hubbleovog faktora ovisi o ρ^2 . Takvo ponašanje se ne dobiva u općoj relativnosti. Ekvivalent drugoj Friedmannovoj jednadžbi može se dobiti putem (6.6) i korištenjem (6.15)

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa_5^2}{6}(3P + \rho)w^2 + w^2 \frac{a'}{a} \frac{w'}{w} + H \frac{\dot{w}}{w} + \frac{w^2}{2} \left[\frac{a''_R}{a} + \frac{w''_R}{w} \right]. \quad (6.16)$$

Radi lakše usporedbe, zapišimo ovdje Friedmannove jednadžbe iz opće relativnosti

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda}{3} + \kappa^2 \frac{\rho}{3}, \quad (6.17)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{\kappa^2}{6}(3P + \rho) + \frac{\Lambda}{3}, \quad (6.18)$$

gdje je četverodimenzionalna kozmološka konstanta eksplicitno napisana. Korištenjem modificiranih Friedmannovih jednadžbi (6.15) i (6.16) u (6.8) može se dobiti jednadžba

$$3\frac{a''}{a} + \frac{w''}{w} = -\frac{2}{3}\kappa_5^2\Lambda_5. \quad (6.19)$$

Prethodna jednadžba, u kombinaciji s (6.14) i rubnim uvjetima (6.10), (6.11) ima sljedeća rješenja [25], uz $\Lambda_5 < 0$

$$\begin{aligned} a(y, t) &= a_0 \left(\cosh(\mu|y|) - \frac{\kappa_5^2}{6\mu}\rho \sinh(\mu|y|) \right), \\ w(y, t) &= w_0 \left(\cosh(\mu|y|) + \frac{\kappa_5^2}{6\mu}(3P + 2\rho) \sinh(\mu|y|) \right), \end{aligned} \quad (6.20)$$

gdje je $\mu^2 = -\kappa_5^2 \Lambda_5 / 6$. Treba naglasiti jednu stvar - u prethodnim je relacijama kozmološka konstanta na *površini* Λ (odnosno napetost *površine*, označena u 2.,3. i 4. poglavlju s λ) apsorbirana u ρ i P .

7 Ograničenja na parametre "brane-world" modela

7.1 Gornja granica na radijus zakrivljenosti dodatne dimenzije pomoću sjene M87*

Kao što je već rečeno, pomoću Event Horizon Telescope-a snimljena je sjena supermasivne crne rupe M87*. Kako bismo točno objasnili što se misli pod pojmom "sjena" crne rupe, moramo objasniti što je točno kritična krivulja. Kritičnu krivulju crne rupe čine svjetlosne zrake koje promatrač uočava s crne rupe, a koje se ako ih pratimo unatrag, asimptotski približavaju zatvorenim fotonskim putanjama oko crne rupe. Dakle, fotoni koji se vide blizu kritične krivulje su na svom putu do promatrača puno puta obišli crnu rupu. Sjenu crne rupe čini unutrašnjost kritične krivulje. Konkretno za M87*, kad bi se radilo o Kerrovoj crnoj rupi, dakle rotirajućoj crnoj rupi bez naboja koja je u potpunosti opisana općom relativnošću, sjena crne rupe bi trebala biti vrlo slična krugu [26]. Za sjenu crne rupe M87* dobiva se, prema opažanjima Event Horizon Telescope-a, da je korijen iz srednjeg kvadrata udaljenosti od prosječnog radijusa manji od 10% [16], tj. sjena odstupa od kruga maksimalno za 10%. Pomoću toga određena je gornja granica relativnog odstupanja kvadrupolnog momenta M87* od Kerrove vrijednosti kvadrupolnog momenta te je dobiveno [16]

$$\left| \frac{\Delta \tilde{Q}}{\tilde{Q}_{Kerr}} \right| \equiv \epsilon \lesssim 4. \quad (7.1)$$

U gornjoj relaciji $\Delta \tilde{Q}$ se odnosi na odstupanje od vrijednosti kvadrupolnog momenta Kerrove crne rupe. Plimni naboj, već spomenut u poglavlju o "brane-world" crnim rupama, u sebi nosi otisak postojanja dodatnih dimenzija. Dakle, ako postoje dodatne dimenzije, kvadrupolni moment crne rupe može se razlikovati od kvadrupolnog momenta Kerrove crne rupe. Ograničenje (7.1) se može iskoristiti da bi se dobila gornja granica dodatne dimenzije. Konkretno, ovdje će se ponoviti već provedena analiza [26] koja se odnosi na "brane-world" RS model 2. Metrika Kerrove crne rupe dobiva se ako se u metrici (5.8) za plimni naboj stavi 0. Ako se linearizira Kerrova metrika, kao što je to već napravljeno u [27], za Newtonov potencijal dobiva se multipolni razvoj

$$\phi(r, \theta) = -\frac{M}{r} \left[1 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \mathcal{P}_2(\cos \theta) + \dots \right], \quad (7.2)$$

gdje je $\mathcal{P}_2(\cos \theta)$ drugi Legendreov polinom. Kvadrupolni moment dan je kao faktor u potencijalu uz $1/r^3$ [50]. Iz (7.2) može se iščitati kvadrupolni moment Kerrove crne rupe i on je $\tilde{Q}_{Kerr} = Ma^2$. No, takva analiza nije kompletna ako se ne uzmu u obzir i korekcije koje dolaze od postojanja dodatne dimenzije. Pa tako, na temelju analize napravljene u četvrtom poglavlju, iz (4.37) vidi se da je korekcija na potencijal relevantna za kvadrupolni moment oblika $|\Delta\phi| \approx 2Ml^2/3r^3$. Pokazano je da [26], [28] dominantna korekcija metrike (4.50) ide kao l^2a^2/r^4 zbog čega se mogu zbrojiti doprinosi iz potencijala (7.2) i (4.37) do reda $1/r^3$. Kratka digresija - metrika (4.50) predstavlja lineariziranu metriku rotirajuće crne rupe koja se nalazi na *površini* kod koje su uzeti u obzir dominantni doprinos od rotacije i dominantni doprinos od kozmološke konstante. No, bitna razlika je to što su tamo zanemareni članovi $\propto a^2/r^3$. Sve skupa, linearizirani potencijal Kerrove crne rupe u RS modelu 2, dobiven gore objašnjenim zbrajanjem doprinosa, može se pisati kao

$$\phi(r, \theta) = -\frac{M}{r} \left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \mathcal{P}_2(\cos \theta) + \frac{2l^2}{3r^2} + \dots \right]. \quad (7.3)$$

Kut opažanja crne rupe je θ , tj. to je kut između pravca pod kojim se opaža crna rupa i pravca spina crne rupe. Konkretno, za M87* dobiven je kut $\theta \approx 17^\circ$ [16]. Za tako mali kut opažanja

$$\mathcal{P}_2(\cos \theta) = \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) \approx 1. \quad (7.4)$$

Sada se za kvadrupolni moment Kerrove crne rupe u RS modelu 2 može pisati: $\tilde{Q}_{Kerr,RS} \approx Ma^2 + 2Ml^2/3$, iz čega se vidi da je razlika u odnosu na $\tilde{Q}_{Kerr} = Ma^2$ dana s

$$\Delta\tilde{Q} \approx \frac{2Ml^2}{3}. \quad (7.5)$$

Slijedi

$$\epsilon \approx \frac{2l^2}{3a^2} \lesssim 4, \quad (7.6)$$

iz čega se dobiva

$$\frac{2}{3}l^2 \lesssim 4a^2. \quad (7.7)$$

Ako se za plimni naboj uzme $Q = 0$, iz (5.13) vidi se da mora vrijediti $a \leq M$ tj. $4a^2 \lesssim R_S^2$, gdje je R_S Schwarzschildov radijus $R_S \equiv 2MG/c^2$. Stoga, mora vrijediti

$$l \lesssim R_S, \quad (7.8)$$

što se uz procjenu mase M87* dobivenu u [16] svodi na

$$l \lesssim 10^{13} \text{ m.} \quad (7.9)$$

U slučaju da je $Q < 0$ i da vrijedi $|Q| \sim M^2$ vrijedi zaključak kao i za $Q = 0$. S druge strane, u slučaju da je $Q > 0$ i $Q \sim M^2$ to može dati bitno smanjenje gornje granice na l u odnosu na gore navedenu, ali ne znamo Q iz metrike (5.8) dovoljno precizno da bismo to mogli tvrditi. Vidi se da ovaj test veličine radijusa zakrivljenosti nije u rangu onoga dobivenog testiranjem Newtonovog zakona do razine $\mathcal{O}(\text{mm})$. No, on je važan jer je dobiven na neovisan način.

7.2 Oblik sjene M87* i slaganje s "brane-world" modelom

Nadovežimo se sada na priču iz potpoglavlja 5.3. Zamislimo statičkog promatrača s koordinatama $(t_o = 0, r_o, \theta_o, \phi_o = 0)$ koji se nalazi daleko od crne rupe. Za svaku točku u prostorvremenu moguće je naći ortonormalnu bazu vezanu uz promatrača u toj točki. Metrika daleko od crne rupe dana je s (4.50). Budući da je takva metrika dijagonalna u r i θ , za ortonormalnu bazu $\{\hat{e}_{(t)}, \hat{e}_{(r)}, \hat{e}_{(\theta)}, \hat{e}_{(\phi)}\}$ može se uzeti

$$\begin{aligned} \hat{e}_{(t)} &= \zeta \partial_t + \gamma \partial_\phi \\ \hat{e}_{(r)} &= C_1 \partial_r \\ \hat{e}_{(\theta)} &= C_2 \partial_\theta \\ \hat{e}_{(\phi)} &= C_3 \partial_\phi + D \partial_t. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Promatrač lokalno opaža Minkowski prostorvrijeme pa je normalizacija vektora baze dana s

$$\begin{aligned} \hat{e}_{(t)} \cdot \hat{e}_{(t)} &= -1 \\ \hat{e}_{(r)} \cdot \hat{e}_{(r)} &= 1 \\ \hat{e}_{(\theta)} \cdot \hat{e}_{(\theta)} &= 1 \\ \hat{e}_{(\phi)} \cdot \hat{e}_{(\phi)} &= 1. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Isto tako zahtijeva se da vrijedi

$$\hat{e}_{(t)} \cdot \hat{e}_{(\phi)} = 0. \quad (7.12)$$

Iz (7.11) i (7.12) onda slijede

$$\begin{aligned}
g_{tt}\zeta^2 + g_{\phi\phi}\gamma^2 + 2g_{t\phi}\zeta\gamma &= -1 \\
g_{rr}C_1^2 &= 1 \\
g_{\theta\theta}C_2^2 &= 1 \\
g_{\phi\phi}C_3^2 + g_{tt}D^2 + 2g_{t\phi}C_3B &= 1 \\
g_{t\phi}C_3\zeta + g_{\phi\phi}C_3\gamma + g_{tt}D\zeta + g_{t\phi}D\gamma &= 0.
\end{aligned} \tag{7.13}$$

Sustav (7.13) odmah daje

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}}, \quad C_2 = \frac{1}{\sqrt{g_{\theta\theta}}}. \tag{7.14}$$

U sustavu (7.13) prva, četvrta i peta jednadžba određuju preostale četiri nepoznane. Dakle, postoji jedan dodatni stupanj slobode povezan s rotacijama u (t, ϕ) ravнини i zbog toga se bez smanjenja općenitosti može uzeti

$$D = 0 \tag{7.15}$$

pa iz toga slijedi

$$C_3 = \frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}}. \tag{7.16}$$

Na kraju, za ζ i γ dobiva se sustav

$$\begin{aligned}
g_{tt}\zeta^2 + g_{\phi\phi}\gamma^2 + 2g_{t\phi}\zeta\gamma &= -1 \\
\zeta + \frac{g_{\phi\phi}}{g_{t\phi}}\gamma &= 0.
\end{aligned} \tag{7.17}$$

Iz gornjeg sustava slijedi

$$\gamma = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \sqrt{\frac{g_{\phi\phi}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}}, \tag{7.18}$$

gdje je uzet negativan predznak jer je ζ koja se dobiva za takav γ dana s

$$\zeta = \sqrt{\frac{g_{\phi\phi}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}} \tag{7.19}$$

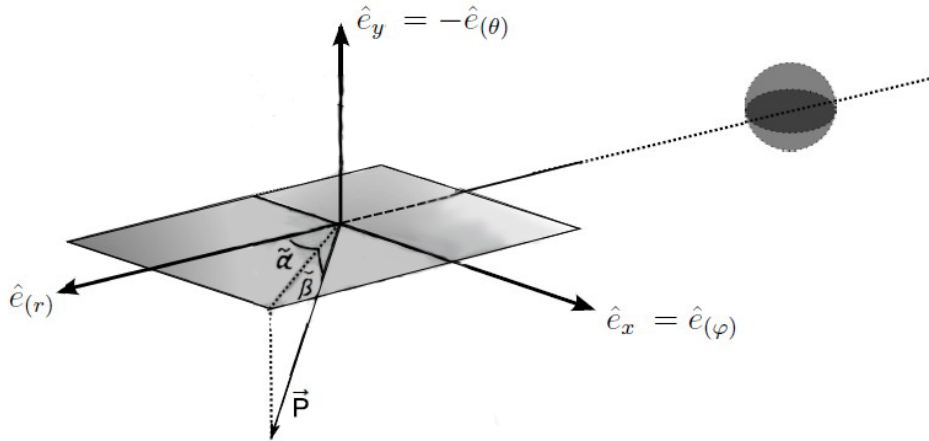
i u tom se slučaju u limesu $r \rightarrow \infty$ reproducira $\hat{e}_{(t)} \rightarrow \partial_t$. Sve zajedno, za vektore baze promatrača se onda može uzeti

$$\begin{aligned}\hat{e}_{(t)} &= \sqrt{\frac{g_{\phi\phi}}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}} \left(\partial_t - \frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \partial_\phi \right) \equiv \zeta \partial_t + \gamma \partial_\phi \\ \hat{e}_{(r)} &= \frac{1}{\sqrt{g_{rr}}} \partial_r \\ \hat{e}_{(\theta)} &= \frac{1}{\sqrt{g_{\theta\theta}}} \partial_\theta \\ \hat{e}_{(\phi)} &= \frac{1}{\sqrt{g_{\phi\phi}}} \partial_\phi,\end{aligned}\tag{7.20}$$

gdje su komponente metrike dane s (4.50). Ta baza se poklapa s onom korištenom u [24]. Projiciranjem četveroimpulsa fotona koji od crne rupe dolazi do promatrača, u sustav tog promatrača dobiva se

$$\begin{aligned}p^{(t)} &= -\hat{e}_{(t)}^\mu p_\mu = E\zeta - L\gamma \\ p^{(i)} &= \hat{e}_{(i)}^\mu p_\mu = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} p_i.\end{aligned}\tag{7.21}$$

Običaj je uvesti kutove opažanja $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$ u sustavu mirovanja promatrača [30], [29] (Slika 7.1).



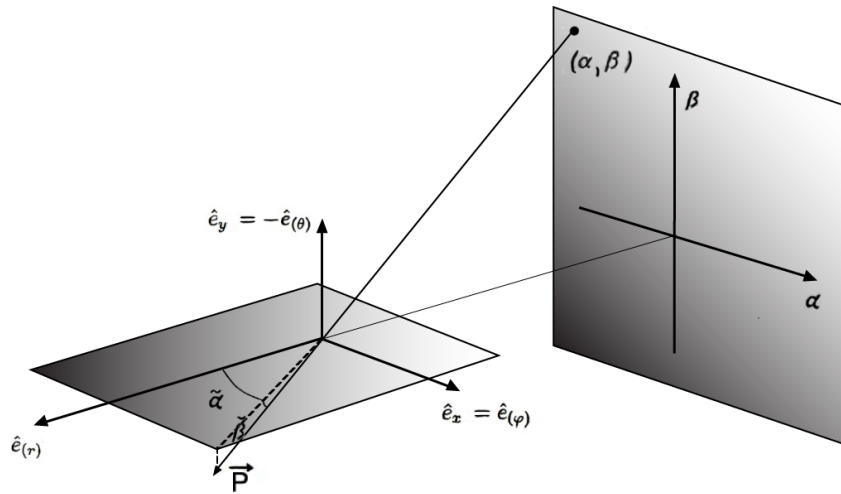
Slika 7.1: Prikaz kutova $\tilde{\alpha}$ i $\tilde{\beta}$. Kutovi su nacrtani kao pozitivni. Kut $\tilde{\beta}$ je kut između impulsa fotona i ravnine određene vektorima \hat{e}_r i \hat{e}_ϕ . Kut $\tilde{\alpha}$ je kut između projekcije impulsa fotona na ravninu određenu vektorima \hat{e}_r i \hat{e}_ϕ i vektora \hat{e}_r . Vektori \hat{e}_x i \hat{e}_y određuju x-y ravninu u kojoj opažatelj vidi kritičnu krivulju crne rupe. Vidi Sliku 7.2. Preuzeto iz [47] i prilagođeno oznakama korištenim u ovom radu.

$$\begin{aligned}
p^{(r)} &= |\vec{P}| \cos \tilde{\alpha} \cos \tilde{\beta} \\
p^{(\theta)} &= |\vec{P}| \sin \tilde{\beta} \\
p^{(\phi)} &= |\vec{P}| \sin \tilde{\alpha} \cos \tilde{\beta}.
\end{aligned}
\tag{7.22}$$

Za tako definirane kutove vrijedi

$$\tan \tilde{\alpha} = \frac{p^{(\phi)}}{p^{(r)}}, \quad \sin \tilde{\beta} = \frac{p^{(\theta)}}{|\vec{P}|}.
\tag{7.23}$$

Budući da je lokalno izmjerena energija fotona dana s $p^{(t)}$, vrijedi $|\vec{P}| = p^{(t)}$. Na Slici 7.2 su s α i β označene koordinate na x i y osima promatračevog nebu. Iz Slike 7.2



Slika 7.2: Prikaz koordinata fotona na promatračevom nebu. Koordinate su dane s (α, β) . Zastor se nalazi na istom mjestu kao i crna rupa na Slici 7.1.

mogu se dobiti relacije koje povezuju kutove $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ i osi α, β na promatračevom nebu za $r_o \gg 1$

$$\alpha = -r_o \tilde{\alpha}, \quad \beta = r_o \tilde{\beta},
\tag{7.24}$$

pri čemu za tako definirane kutove znak negativnosti dolazi od činjenice da se foton s pozitivnim kutom $\tilde{\alpha}$ zapravo nalazi s negativne strane osi α na promatračevom nebu.

Zbog toga što vrijedi $r_o \gg 1$, kutovi opažanja su mali i relacija (7.23) postaje

$$\tilde{\alpha} = \frac{p^{(\phi)}}{p^{(r)}}, \quad \tilde{\beta} = \frac{p^{(\theta)}}{p^{(t)}}. \quad (7.25)$$

Kombiniranjem prethodne dvije relacije može se povezati izgled sjene crne rupe s komponentama četveroimpulsa fotona u sustavu promatrača

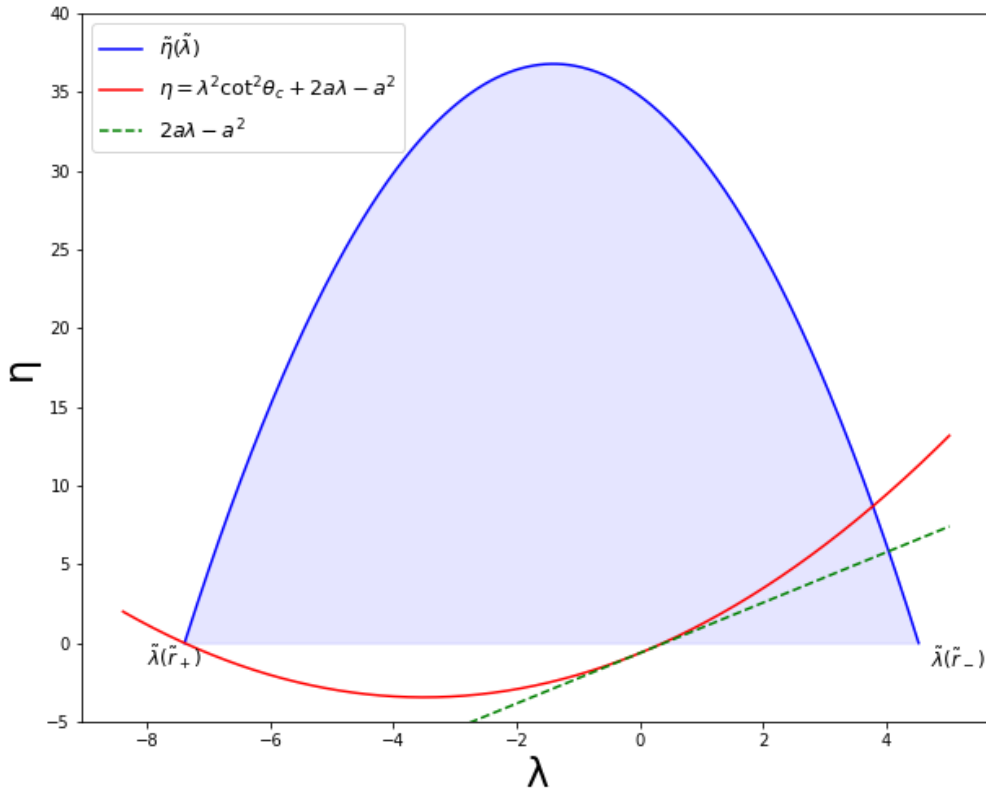
$$\alpha = -r_o \frac{p^{(\phi)}}{p^{(r)}}, \quad \beta = r_o \frac{p^{(\theta)}}{p^{(t)}}. \quad (7.26)$$

Iskoristimo sada još relacije (7.21) i (5.30) kako bi se dobilo

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\sin \theta_0} \sqrt{\frac{A_1}{A_2^2 + A_1(6A_2 - B^2) + 1}}, \quad (7.27)$$

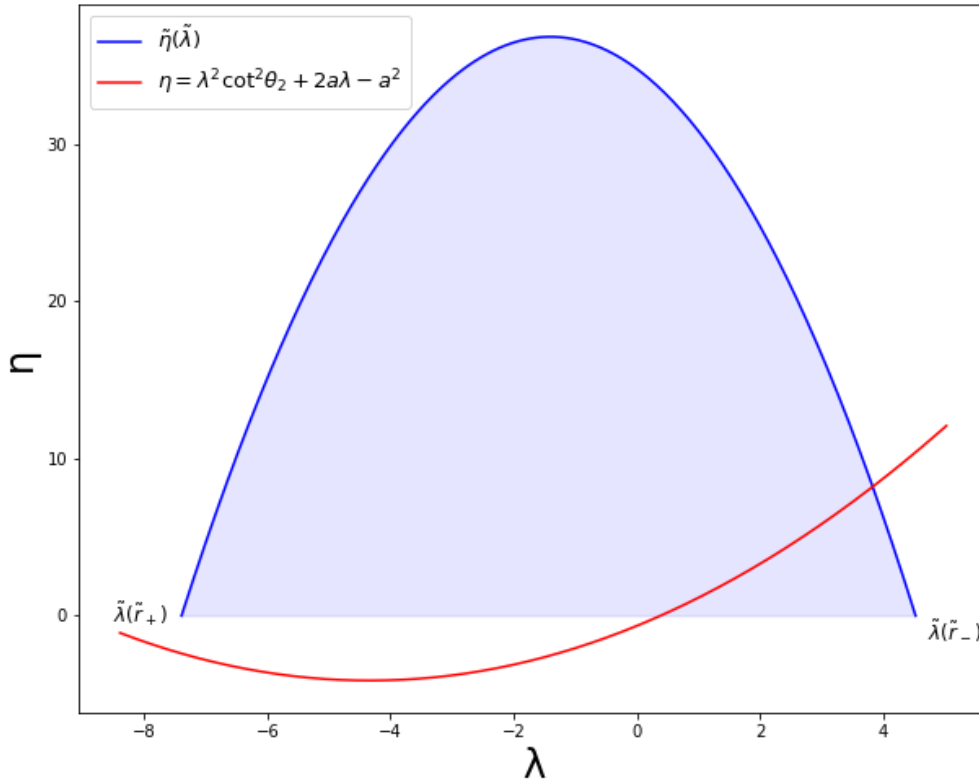
$$\beta = \pm \sqrt{\Theta_d(\theta_o)} \frac{\sqrt{A_1}}{1 - A_2}, \quad (7.28)$$

gdje su A_1, A_2 i B definirani kao u potpoglavlju 5.3, i izvrijednjeni za r_o . Dakle, fotoni s parametrima (λ, η) dolaze do promatrača i zadovoljavaju $\Theta_d(\theta_o) \geq 0$. Kritična krivulja $\tilde{\eta}(\tilde{\lambda})$ predstavlja moguće parametre $\tilde{\eta}$ i $\tilde{\lambda}$ za geodezike konstantnog radijusa. Krivulja $\eta(\lambda)$ dana s (5.33) predstavlja minimalne moguće parametre η za geodezike daleko od crne rupe. Napravimo sada digresiju vezanu uz krivulje $\tilde{\eta}(\tilde{\lambda})$ i $\eta(\lambda)$. Te dvije krivulje mogu imati jednu ili dvije točke u kojima se sijeku. Kako bi to postalo jasnije treba promotriti sljedeću sliku (Slika 7.3). Na Slici 7.3 nacrtana je kritična krivulja $\tilde{\eta}(\tilde{\lambda})$. U intervalu između \tilde{r}_- i \tilde{r}_+ vrijedi $\tilde{\eta}(\tilde{\lambda}) \geq 0$. Taj dio je obojan plavom bojom te se naziva normalnim područjem. Krivulja $\eta(\lambda)$ nacrtana crvenom bojom u ovom je slučaju nacrtana za kritičan kut. Zelenom isprekidanom linijom nacrtana je donja granica krivulje $\eta(\lambda)$, dobivena za kut opažanja $\theta_o = \pi/2$. U ovoj analizi promatramo kutove opažanja za koje vrijedi $0 < \theta_o \leq \pi/2$. Budući da donja granica te krivulje siječe kritičnu krivulju, može se zaključiti da $\tilde{\eta}(\tilde{\lambda})$ i $\eta(\lambda)$ imaju barem jednu točku presjeka. Kao što je već rečeno, na Slici 7.3 $\eta(\lambda)$ nacrtana je za kritičan kut zbog čega prolazi točkom $(\tilde{\lambda}(\tilde{r}_+), 0)$. Kada bi kut opažanja bio veći, $\eta(\lambda)$ ne bi prolazila tom točkom zbog čega bi postojala samo jedna točka u kojoj se sijeku $\eta(\lambda)$ i $\tilde{\eta}(\tilde{\lambda})$. Takav primjer dan je na Slici 7.4. U slučaju da je kut opažanja manji od kritičnog, dobiva se situacija prikazana na Slici 7.5. Tada za krivulje $\eta(\lambda)$ i $\tilde{\eta}(\tilde{\lambda})$ postoje dvije



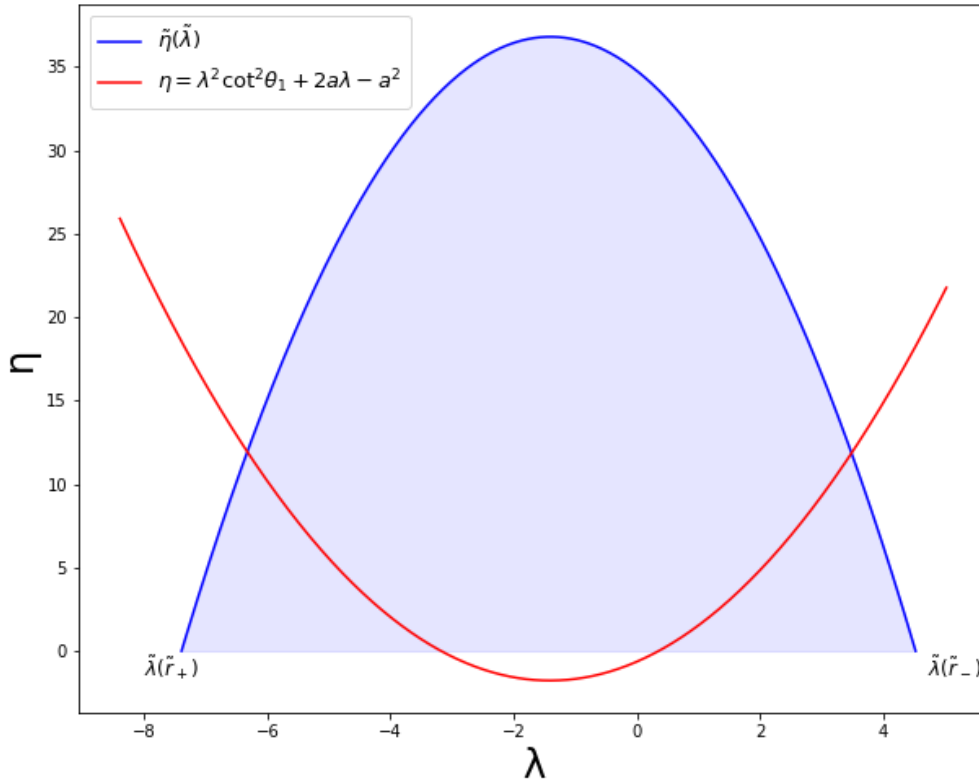
Slika 7.3: Plavom bojom nacrtana je kritična krivulja $\tilde{\eta}(\tilde{\lambda})$, te je plavom bojom ispunjeno područje za fotone koji su na zatvorenim putanjama s $\tilde{\eta} > 0$. Crvenom bojom nacrtana je krivulja $\eta(\lambda)$ za kritičan kut θ_c . Kritičan kut θ_c definiran je na način da $\eta(\lambda)$ prolazi točkom $(\tilde{\lambda}(\tilde{r}_+), 0)$. Zelenom isprekidanom linijom nacrtana je donja granica parabole $\eta(\lambda)$. U slučaju kada je kut opažanja crne rupe $\theta_o = \pi/2$, $\eta(\lambda)$ postaje jednaka $2a\lambda - a^2$.

točke u kojima se sijeku. Kao što je već rečeno u 5. poglavlju, metrike koje opisuju prostorvrijeme blizu i daleko od crne rupe možemo shvatiti kao dva različita limesa neke metrike koja opisuje cijelo prostorvrijeme. Zbog toga su očuvane veličine u oba područja jednake, tj. $K_b = K_d$. Upravo zbog te jednakosti trebaju se tražiti točke presjeka u kojima vrijedi $\tilde{\lambda} = \lambda$ i $\tilde{\eta} = \eta$. Tj., za foton koji krene od crne rupe s parametrima danim relacijama (5.24) i (5.25) vrijedi da on s tim istim parametrima dolazi do promatrača pa se uvrštavanjem (5.24) i (5.25) u (7.27) i (7.28) dobiva kritična krivulja \mathcal{C} , pri čemu su A_1 , A_2 i B izvrijednjeni za r_o . Još samo valja naglasiti da iako smo u 5. poglavlju tražili zatvorene fotonske putanje, parametri fotona koji pripadaju kritičnoj krivulji crne rupe se asimptotski približavaju $\tilde{\eta}$ i $\tilde{\lambda}$ pa s tim parametrima i računamo. Kako (7.27) daje jedinstveni α , a (7.28) daje dvije mogućnosti za



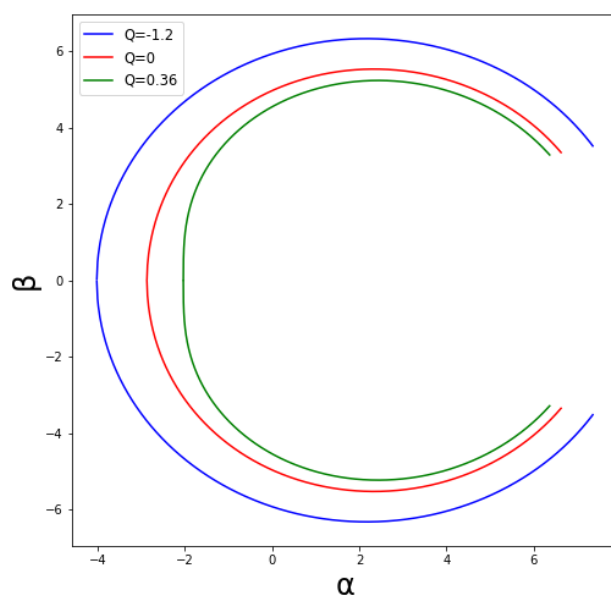
Slika 7.4: Plavom bojom nacrtana je kritična krivulja $\tilde{\eta}(\tilde{\lambda})$, te je plavom bojom ispunjeno područje za fotone koji su na zatvorenim putanjama s $\tilde{\eta} > 0$. Crvenom bojom nacrtana je krivulja $\eta(\lambda)$ za kut opažanja θ_2 koji je veći od kritičnog. Može se vidjeti da u tom slučaju postoji samo jedna točka sjecišta krivulja.

β za zadani $\tilde{\eta}$ i $\tilde{\lambda}$, zaključujemo da postoje dva geodezika koja dođu do opažača koji se nalazi na (r_o, θ_o) . Vratimo se na kritičnu krivulju \mathcal{C} danom s $\beta(\alpha)$. Ona može biti otvorena ili zatvorena, ovisno o kutu promatranja. Ako je kut promatranja veći od kritičnog kuta, krivulja \mathcal{C} je otvorena dok je u suprotnom zatvorena. Objasnimo ovdje zbog čega može doći do toga da je kritična krivulja \mathcal{C} otvorena. Ako se $\tilde{\eta}(\tilde{\lambda})$ i $\eta(\lambda)$ sijeku u dvije točke, maksimalni i minimalni \tilde{r} (preko kojeg je sve parametrizirano) slijede iz zahtjeva $\Theta_d \geq 0$. S druge strane, u slučaju da se $\tilde{\eta}(\tilde{\lambda})$ i $\eta(\lambda)$ sijeku u jednoj točki minimalni \tilde{r} je i dalje određen zahtjevom $\Theta_d > 0$, tj. područjem iznad crvene krivulje na gornjim slikama. No, maksimalni \tilde{r} koji bi se dobio iz tog zahtjeva veći je od \tilde{r}_+ . To znači da za takav $\tilde{r} > \tilde{r}_+$ vrijedi $\tilde{\eta} < 0$, a to područje nije dopušteno. Znači da je maksimalni \tilde{r} u tom slučaju određen uvjetom $\tilde{\eta} \geq 0$. Tj. nisu obuhvaćeni svi \tilde{r} za koje bi trebalo nacrtati $\beta(\alpha(\tilde{r}))$ da bi se krivulja zatvorila - područje između točaka presjeka krivulja $\tilde{\eta}(\tilde{\lambda})$ i $\eta(\lambda)$ se preslika u zatvorenu krivulju \mathcal{C} . Zbog toga je u slučaju

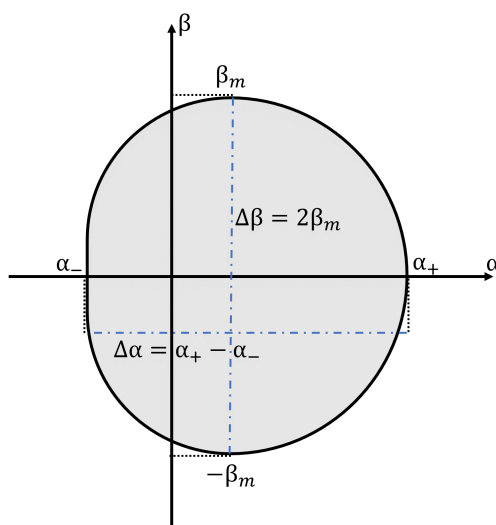


Slika 7.5: Plavom bojom nacrtana je kritična krivulja $\tilde{\eta}(\tilde{\lambda})$, te je plavom bojom ispunjeno područje za fotone koji su na zatvorenim putanjama s $\tilde{\eta} > 0$. Crvenom bojom nacrtana je krivulja $\eta(\lambda)$ za kut opažanja θ_1 koji je manji od kritičnog. Može se vidjeti da u tom slučaju postoje dvije točke sjecišta krivulja.

jedne točke presjeka $\tilde{\eta}(\tilde{\lambda})$ i $\eta(\lambda)$ kritična krivulja \mathcal{C} otvorena. Fizikalna interpretacija te situacije je da za \tilde{r}_+ postoji kružni geodezik koji ne može doći do opažača. U [24] se nalazi puno primjera takvih kritičnih krivulja na kojima je x-os α , a y-os β , za razne parametre r_o , θ_o , l , a i Q . Ako nije drugačije napisano, nadalje se podrazumijeva da je $M = 1$. Pronalaskom minimalnog i maksimalnog \tilde{r} i nakon toga crtanjem $\alpha(\tilde{r})$ i $\beta(\tilde{r})$ reproducirane su kritične krivulje dobivene u [24] te se one nalaze na slici (Slika 7.6). To je primjer otvorenih kritičnih krivulja. Budući da takva krivulja općenito nije kružnica, za zatvorene krivulje običaj je definirati $\Delta\alpha \equiv \alpha_+ - \alpha_-$ i $\Delta\beta \equiv \beta_+ - \beta_-$ na način da se međusobno oduzmu maksimalna i minimalna vrijednost za svaku os. Iz (7.28) vidi se da je krivulja simetrična oko x-osi pa se zato $\Delta\beta$ svodi na $2\beta_+$. Primjer krivulje s takvim veličinama prikazan je na slici (Slika 7.7). Te veličine mogu se



Slika 7.6: Kritične krivulje za parametre $M = 1$, $a = 0.8$, $l = 5$, $r_o = 200$, $\theta_o = \pi/2$. Nacrtane su razne krivulje za različite plimne naboje te se vidi da se porastom plimnog naboja smanjuje veličina kritične krivulje.



Slika 7.7: Primjer zatvorene kritične krivulje \mathcal{C} . Preuzeto iz [24].

objediniti u

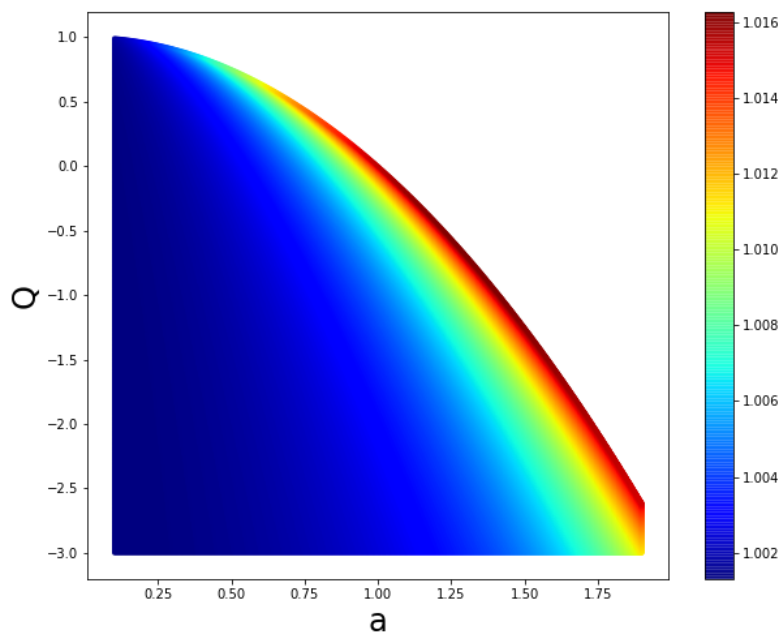
$$\delta \equiv \frac{\Delta\alpha}{\Delta\beta}. \quad (7.29)$$

Primijeni li se sada gore opisana analiza na M87*, može se zaključiti da je $\theta_c \geq 17^\circ$ zato što je krivulja zatvorena [16], a kut promatranja je upravo 17° . Nadalje, iz

opažanja je dobiveno da mora vrijediti

$$\delta < \frac{4}{3}, \quad (7.30)$$

za M87* [16]. U [24] napravljena je analiza za raspon parametara $0.1 < a < 1.5$ i $-2 < Q \leq 1 - a^2$. Budući da se očekuje da je l mali te zbog toga što uvijek dolazi u obliku l^2/r_o^2 očekuje se da nema velik utjecaj na izgled kritične krivulje [24]. Uz pretpostavku da parametri crnih rupa koje Event Horizon Telescope opaža ulaze u gornji raspon, glavni zaključak je da vrijedi $\delta_{max} = 1.015$. Takav $\delta_{max} < 4/3$, što znači da se tom analizom ne može isključiti mogućnost da se zapravo radi o "brane-world" crnoj rupi. Za proširen set parametara, u intervalima $0.1 < a < 1.9$ i $-3 < Q \leq 1 - a^2$, pronađeni su maksimalni i minimalni \tilde{r} . U danom intervalu je za svaki set parametara onda nađena veličina δ definirana relacijom (7.29). Na Slici 7.8 nalazi se prikaz ovisnosti parametra δ o Q i a . Vidi se da je maksimalna vrijednost



Slika 7.8: Prikaz ovisnosti parametra δ o Q i a . Slika je dobivena na analogan način kao i Slika 7.6. - numerički se traže rasponi vrijednosti \tilde{r} za koje vrijedi $\Theta_d \geq 0$. Za svaki raspon vrijednosti pronađeni su $\Delta\alpha$ i $\Delta\beta$ i pomoću njih je određena δ .

δ za takav prošireni set parametara dana s $\delta_{max} = 1.016 < 4/3$. To znači da ni ova analiza ne može isključiti mogućnost da se radi o "brane-world" crnoj rupi.

7.3 *Sjena crne rupe Sgr A* i "brane-world" modeli*

Spomenimo ovdje samo ukratko nedavno snimljenu sjenu Sgr A* - supermasivne crne rupe u središtu naše galaksije [44]. U [45] napravljena je analiza kojom je na temelju kutnog promjera sjene crne rupe Sgr A* bio cilj odrediti moguće vrijednosti plimnog naboja. Konkretno, ako se uzme u obzir jedna standardna devijacija promjera, za plimni naboj se dobiva $0 \lesssim Q \lesssim 0.15M^2$. Slična takva analiza napravljena je i za M87* u [46]. No, tom analizom za M87* zaključeno je da postoji određena sklonost negativnom plimnom naboju što je u suprotnosti s analizom za Sgr A*. Ako se pak uzmu u obzir dvije standardne devijacije promjera sjene Sgr A*, dobiva se $-0.1M^2 \lesssim Q \lesssim 0.2M^2$ pa tako u ovom slučaju u obzir ulaze i negativne vrijednosti plimnog naboja.

8 Gravitacijski valovi: sadašnjost i budućnost

8.1 Teorijska osnova

Provedimo ovdje vrlo jednostavan uvod za gravitacijske valove u prisustvu jedne dodatne prostorne dimenzije. Pretpostavimo općenitiju metriku, oblika (3.25). Dakle razmatraju se male perturbacije $h_{\mu\nu}$ i ukupna metrika je

$$ds^2 = e^{2A(y)}(\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (8.1)$$

Rješavanjem jednadžbi polja za takvu metriku dobiva se

$$\begin{aligned} & \partial_\nu \partial_\mu h^\rho{}_\rho - \partial_{(\nu} \partial^{\rho} h_{\mu)\rho} + \square h_{\mu\nu} \\ & - \eta_{\mu\nu} A' e^{2A} \partial_y h^\rho{}_\rho - e^{2A} [\partial_y^2 h_{\mu\nu} + 4A' \partial_y h_{\mu\nu} + 2(4A'^2 + A'') h_{\mu\nu}] = 0, \end{aligned} \quad (8.2)$$

što ako se opet odabere RS baždarenje (4.5) postaje

$$e^{2A} [\partial_y^2 h_{\mu\nu} + 4A' \partial_y h_{\mu\nu} + 2(4A'^2 + A'') h_{\mu\nu}] - \square h_{\mu\nu} = 0. \quad (8.3)$$

Zapišimo perturbaciju kao umnožak

$$h_{\mu\nu}(y, x^\rho) = \phi(y) \chi_{\mu\nu}(x^\rho), \quad (8.4)$$

što uvrštavanjem u (8.3) za $\chi_{\mu\nu}$ daje

$$\square \chi_{\mu\nu} + n^2 \chi_{\mu\nu} = 0. \quad (8.5)$$

U gornjoj jednadžbi n je konstanta dobivena separacijom varijabli. Rješenje te jednadžbe je

$$\chi_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} \exp(ik_\sigma x^\sigma). \quad (8.6)$$

pri čemu mora vrijediti $k_\mu k^\mu = n^2$. Može se primijetiti da gornje 4D rješenje ne ovisi o y , ali se dobila ovisnost o n . Funkcija $\phi(y)$ zadovoljava jednadžbu

$$\phi'' + 4A' \phi' + 2(4A'^2 + A'' + n^2 e^{-2A}) \phi = 0. \quad (8.7)$$

Dobivene jednadžbe se onda rješavaju za konkretnu funkciju $A(y)$.

8.2 Gornja granica na dodatnu dimenziju pomoću gravitacijskih valova

U slučaju da je naš svemir *površina* smještena u 5D *volumenu*, od svih međudjelovanja jedino se gravitacija može širiti kroz dodatnu dimenziju, dok su druge sile ograničene na *površinu*. Kod takvog scenarija, gravitacijski valovi mogli bi putovati i kroz dodatnu dimenziju, dok bi elektromagnetski valovi bili ograničeni na *površinu*, što znači da bi njihovi putovi bili različiti. Zbog toga bi se prilikom detekcije gravitacijskih i elektromagnetskih valova, koje istovremeno emitira isti izvor, uočila vremenska razlika. Konkretno, takva vremenska razlika je i uočena prilikom detekcije gravitacijskih valova GW170817 i gama zraka GRB170817A [33], nastalih stapanjem dviju neutronskih zvijezda. Ovdje se prati analiza iz [32] gdje se upravo pomoću vremenske razlike u detekciji nastalih gravitacijskih i elektromagnetskih valova pronalazi gornja granica na radijus zakrivljenosti l 5D anti-de Sitter prostora u kojem je smještena *površina* koja čini naš svemir. Krenimo od 5D Schwarzschild-anti de Sitter metrike zapisane u statičkim koordinatama [32]

$$ds^2 = -f(R)dT^2 + f(R)^{-1}dR^2 + R^2d\Sigma_k^2, \quad (8.8)$$

pri čemu je $d\Sigma_k^2$ metrika maksimalno simetričnog 3D prostora, a k određuje njegovu zakrivljenost. U toj metrici $f(R)$ dan je s

$$f(R) = k + \frac{R^2}{l^2} - \frac{M}{R^2}. \quad (8.9)$$

Radi jednostavnosti, ovdje se ograničavamo na slučaj gdje za Schwarzschildovu masu vrijedi $M = 0$ i ravan 3D prostor $k = 0$ pa vrijedi $f(R) = \frac{R^2}{l^2}$. Na *površini*, opisanoj s $R = konst.$, uvodimo sferni koordinatni sustav (r, θ, ϕ) , tako da se bilo koji signal može opisati radijalnim geodezikom svjetlosnog tipa. U tom slučaju mogu se ignorirati varijable θ, ϕ i ostaje metrika dana s

$$ds^2 = -f(R)dT^2 + f(R)^{-1}dR^2 + R^2dr^2. \quad (8.10)$$

Iz te metrike mogu se iščitati Killingovi vektori: $K_1^\mu = (1, 0, 0)$ i $K_2^\mu = (0, 0, 1)$ i pripadajuće očuvane veličine

$$-f(R)\frac{dT}{d\lambda} = -E, \quad (8.11)$$

$$R^2\frac{dr}{d\lambda} = P, \quad (8.12)$$

pri čemu je λ afin parametar. Iskoristimo uvjet

$$g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \quad (8.13)$$

kako bismo za radijalni geodezik svjetlosnog tipa dobili

$$\left(\frac{dR}{d\lambda}\right)^2 = E^2 - \frac{f(R)}{R^2}P^2. \quad (8.14)$$

Ako se povežu (8.12) i (8.14) može se dobiti

$$\left(\frac{E^2}{P^2} - \frac{f(R)}{R^2}\right)^{-1/2} \frac{dR}{R^2} = dr, \quad (8.15)$$

relacija koja povezuje udaljenosti na *površini* s radijalnom koordinatom R u 5D. Integriranjem gornje relacije može se dobiti

$$\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} = \sqrt{\frac{E^2}{P^2} - \frac{1}{l^2}}(r_B - r_A). \quad (8.16)$$

Ako sada jednadžbu radijalnog geodezika (8.14) povežemo s (8.11) dobiva se

$$\left(1 - \frac{P^2 f(R)}{E^2 R^2}\right)^{-1/2} \frac{dR}{f(R)} = dT, \quad (8.17)$$

što integriranjem daje

$$\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} = \frac{1}{l^2} \sqrt{1 - \frac{P^2}{E^2 l^2}}(T_B - T_A). \quad (8.18)$$

Isto tako može se dobiti

$$r_B - r_A = \frac{P}{El^2}(T_B - T_A). \quad (8.19)$$

Ako se iz prethodne relacije izrazi P/E i uvrsti u (8.16) dobiva se

$$\left(\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B}\right)^2 + \frac{r^2}{l^2} = \frac{1}{l^4}(T_B - T_A)^2, \quad (8.20)$$

gdje je $r = r_B - r_A$. Vratimo se na početnu metriku (8.8) i definirajmo vlastito vrijeme za površinu

$$dt^2 \equiv f(R_b)dT^2 - \frac{dR_b^2}{f(R_b)}, \quad (8.21)$$

gdje je s R_b dana pozicija površine. Inducirana metrika na površini onda postaje

$$ds_{brane}^2 = -dt^2 + R_b(t)^2 d\Sigma_k^2, \quad (8.22)$$

iz čega se vidi da se mogu poistovjetiti $R_b(t)$ i $a(t)$ - standardni kozmološki faktor skale pa je Hubbleov faktor dan s $H = \dot{R}_b/R_b$. Iz (8.21) se isto dobiva

$$dT = \frac{\sqrt{f(R_b) + \dot{R}_b^2}}{f(R_b)} dt, \quad (8.23)$$

pomoću čega se može dobiti

$$T_B - T_A = l \int_{t_A}^{t_B} \frac{dt}{a} \sqrt{1 + l^2 H^2}. \quad (8.24)$$

Budući da se mjesto emitiranja signala A i mjesto njegove detekcije B nalaze na površini može se pisati

$$\frac{1}{R_A} - \frac{1}{R_B} = \int_{t_A}^{t_B} \frac{dt}{R} H = \int_{R_A}^{R_B} \frac{dR}{R^2}, \quad (8.25)$$

gdje je maknut indeks b . Uvrste li se (8.25) i (8.24) u (8.20) dobiva se

$$r_g^2 = \left(\int_{t_A}^{t_B} \frac{dt}{R} \sqrt{1 + l^2 H^2} \right)^2 - \left(\int_{t_A}^{t_B} \frac{dt}{R} l H \right)^2, \quad (8.26)$$

što odgovara prijedenoj sugibajućoj udaljenosti gravitacijskih valova. Crveni pomak između A i B dan je s

$$1 + z = \frac{R_B}{R_A}. \quad (8.27)$$

Iskoristimo li $dt/R = dR/R^2H = -dz/H$ i ako vrijedi $lH \ll 1$ može se raspisati (8.26) do na l^2

$$r_g^2 \approx \left(\int_0^z \frac{dz'}{H} \right)^2 + l^2 \left(\int_0^z \frac{dz'}{H} \right) \left(\int_0^z dz' H \right) - l^2 z^2. \quad (8.28)$$

Udaljenost koju prijeđe elektromagnetski val je

$$r_\gamma = \int_{t_A}^{t_B} \frac{dt'}{R} = \int_0^z \frac{dz'}{H(z')}. \quad (8.29)$$

Pomoću relacije za Hubbleov faktor dane u slučaju Λ CDM svemira

$$H \approx H_0 [\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_\Lambda]^{1/2}, \quad (8.30)$$

gdje su Ω_m i Ω_Λ parametri gustoće materije i tamne energije, uz aproksimaciju $z \ll 1$ može se dobiti relacija koja direktno povezuje r_γ i r_g [32]

$$\left| \frac{r_g - r_\gamma}{r_\gamma} \right| \approx \frac{3l^2 \Omega_m^2 z^4}{32r_\gamma^2}. \quad (8.31)$$

Na kraju, ako je razlika u detekciji gravitacijskih i elektromagnetskih valova δt , vrijedi

$$r_g - r_\gamma = c\delta t. \quad (8.32)$$

Još valja reći da većina opažene razlike u detekciji signala dolazi od astrofizičkih procesa. Ukratko, ispada da se elektromagnetski valovi uvijek emitiraju malo poslije gravitacijskih [33]. Zbog toga je ključno moći odrediti barem otprilike koliki doprinos dolazi od astrofizičkih procesa, a koliki doprinos dolazi od potencijalnog postojanja dodatne dimenzije. U [32] odrađena je statistička analiza, kojom je za izmjereni $\delta t = (1.734 \pm 0.054)s$ dobivena gornja granica na radijus zakrivljenosti l . Sa sigurnošću od 95% dobiveno je da vrijedi $l < 6.16 \cdot 10^{22}$ m, dok je sa sigurnošću od 68% dobiveno

$$l < 1.65 \cdot 10^{22} \text{m}. \quad (8.33)$$

Ova gornja granica ne može se mjeriti s onom dobivenom testiranjem Newtonovog zakona niti s onom dobivenom iz sjene M87*, ali ona ima svoju važnost jer ona predstavlja jedan način na koji se mogu koristiti gravitacijski i elektromagnetski valovi u

potrazi za fizikom izvan opće relativnosti - što je i tema sljedećeg potpoglavlja.

8.3 Potraga za novom fizikom pomoću gravitacijskih valova

Prvo direktno opažanje gravitacijskih valova 2015. godine [34] otvorilo je novi pristup promatranju svemira. Opažanja takvih događaja mogu se koristiti pri istraživanju gravitacijske interakcije. Svakako ima smisla promotriti teorije koje krše neke od uobičajenih pretpostavki i odrediti kakav bi točno potpis u nekom eksperimentu ostavilo određeno razlikovanje od opće teorije relativnosti. Ovdje ćemo se samo kratko i na vrlo jednostavan način osvrnuti na neka opažanja koja bi se mogla očekivati od budućih detektora gravitacijskih valova i što bi takva opažanja značila. Prije toga, spomenimo samo neke karakteristične frekvencije gravitacijskih valova i što one znače. Neki od trenutno planiranih detektora trebali bi detektirati gravitacijske valove u intervalu od nHz do kHz [36]. S druge strane, nijedan poznati objekt u svemiru nije dovoljno malen i gust da bi mogao emitirati frekvencije više od 10 kHz [37] pa bi bilo kakva detekcija gravitacijskih valova iznad te frekvencije ukazivala na novu fiziku. Zbog toga veliku važnost u budućnosti imaju detektori koji bi mogli detektirati u intervalu od MHz do GHz, o čemu se više može naći u [37]. Vratimo se sada alternativama općoj teoriji relativnosti i potpisu koji bi one ostavljale u gravitacijskim valovima. U [39] napravljen je sažetak modifikacija opće teorije relativnosti i tragova koje bi one ostavile. Ono što bi se vidjelo u analizi signala gravitacijskog vala je razlika u fazi Fourierovog transformata signala, u odnosu na onu dobivenu u općoj teoriji relativnosti. Zapišimo to na sljedeći način

$$\Psi_{\text{GW,A}} = \Psi_{\text{GW,GR}} + \delta\Psi, \quad (8.34)$$

pri čemu su $\Psi_{\text{GW,A}}$ i $\Psi_{\text{GW,GR}}$ redom Fourierove faze u alternativnoj teoriji i u općoj teoriji relativnosti, dok je $\delta\Psi$ razlika u tim fazama. U općoj teoriji relativnosti, stvaranje gravitacijskih valova opisano je drugom derivacijom kvadrupolnog momenta izvora. Zbog očuvanja tenzora energije i impulsa, postoji očuvanje mase i impulsa zbog čega monopolni i dipolni član ne stvaraju gravitacijske valove. U nekim teorijama gravitacije, interakcija nije opisana samo tenzorom metrike već i skalarnim ili vektorskim poljem, kao u npr. već spomenutoj Brans-Dicke teoriji [3]. Takva dodatna polja nužno ne zadovoljavaju jednake zakone očuvanja što ostavlja mogućnost dipol-

nog zračenja. Promotrimo takvu situaciju za binarni sustav neutronske zvijezde, za što je dalje u tekstu i dana točna promjena faze gravitacijskih valova radi uočavanja fizikalnih veličina koje su bitne u toj promjeni. Za takav binarni sustav, koji se sastoji od neutronske zvijezde masa m_1 i m_2 definirajmo veličine koje se koriste i kasnije u tekstu

$$\begin{aligned}
m &= m_1 + m_2 \\
\eta &= \frac{m_1 m_2}{m^2} \\
\mathcal{M} &= \eta^{3/5} m \\
\mathcal{M}_z &= (1 + z)\mathcal{M},
\end{aligned} \tag{8.35}$$

pri čemu je z crveni pomak binarnog sustava. Dalje u tekstu f je promatrana frekvencija gravitacijskih valova. U slučaju postojanja dipolnog člana, spajanje takvog binarnog sustava je brže nego u općoj teoriji relativnosti - taj sustav brže gubi energiju. Ako se takav dodatan gubitak energije u odnosu na opću teoriju relativnosti označi s $\delta \dot{E}_{dip}$, razlika u fazama iz (8.34) iznosi [40]

$$\delta \Psi = -\frac{3}{224} \eta^{2/5} \delta \dot{E}_{dip} (\pi \mathcal{M}_z f)^{-7/3}. \tag{8.36}$$

Dakle, uoči li se takva razlika u fazi u odnosu na onu predviđenu općom teorijom relativnosti, to bi ukazivalo na postojanje dipolnog člana. Nadalje, u općoj relativnosti, bozon koji je prijenosnik gravitacijskog međudjelovanja - graviton, je bezmasen. U nekim modificiranim teorijama [41] prijenosnik gravitacijskog međudjelovanja dobiva masu zbog čega putuje sporije od brzine svjetlosti. Opet, tako nešto može se prepoznati u Fourierovoj fazi gravitacijskog vala emitiranog iz binarnog sustava te se u tom slučaju očekuje [40]

$$\delta \Psi = \pi^2 \frac{D_0}{(1 + z)} \frac{\mathcal{M}_z}{\lambda_{MG}^2} (\pi \mathcal{M}_z f)^{-1}, \tag{8.37}$$

gdje je D_0 udaljenost od izvora, a λ_{MG}^2 Comptonova valna duljina masivnog gravitona [43]. Neke teorije, poput $f(R)$ teorija, u kojima Einstein-Hilbert akcija više nije direktno proporcionalna Riccijevom skalaru već postaje općenita funkcija njega, dovode do toga da gravitacijska konstanta G postaje vremenski ovisna [42]. Ako G postane ovisna o prostorvremenu, ona više nije konstanta i to je u izravnoj suprot-

nosti s općom teorijom relativnosti. Ovdje se za razliku u fazama dobiva

$$\delta\Psi = -\frac{25}{65526} \frac{\dot{G}_z \mathcal{M}_z}{G} (\pi \mathcal{M}_z f)^{-13/3}, \quad (8.38)$$

gdje je $\dot{G}_z = \dot{G}/(1+z)$ uočena stopa promjene gravitacijske konstante.

9 Zaključak

Raznim izračunima u ovom radu istraženi su modeli gravitacije u više od četiri dimenzije. Najveći dio ovog rada temelji se na Randall-Sundrum modelu 2, kod kojega se u peterodimenzionalnom *volumenu* nalazi jedna četverodimenzionalna *površina*. Prostorvrijeme našeg svemira je upravo ta četverodimenzionalna *površina*. Pri tome su čestice i polja Standardnog Modela ograničene na *površinu*, dok se gravitacija može širiti i kroz *volumen*. U prvom poglavlju opisana je motivacija za uvođenje modela koji se razlikuju od opće teorije relativnosti i predstavljene su alternative opće teorije relativnosti, poput Brans-Dicke teorije i $f(R)$ gravitacije, kao i modeli s brojem dimenzija većim od četiri. U drugom poglavlju raspisane su jednačbe polja za takve modele. Za 4D jednačbe polja dobivene su jednačbe koje nalikuju Einsteinovim jednačbama u općoj teoriji relativnosti, ali uz neke dodatne članove. Tema trećeg poglavlja je anti de-Sitter prostorvrijeme, s naglaskom na peterodimenzionalno AdS prostorvrijeme, a osim njega opisani su i Randall-Sundrum modeli 1 i 2. Nakon toga, u četvrtom poglavlju, proveden je postupak linearizacije gravitacije na *površini*. Zaključeno je da u tako dobivenom newtonovskom potencijalu postoje korekcije $\propto r^{-3}$, koje unatoč mjerenjima točnosti Newtonovog zakona gravitacije do dimenzija 0.1 mm nisu uočene. Nakon toga je izvedena i linearizirana metrika rotirajućeg objekta na *površini*. Crnim rupama na *površini* posvećeno je peto poglavlje s posebnim naglaskom baš na rotirajućim crnim rupama. Tamo je i predstavljena metrika u blizini rotirajuće crne rupe na *površini*. U šestom poglavlju bavimo se "brane-world" kozmologijom na osnovnoj razini, s ciljem uočavanja razlika u odnosu na slučaj opće relativnosti. Osvrt na sjenu supermasivne crne rupe M87* snimljenu Event Horizon Telescope-om napravljen je u sedmom poglavlju te se ispituje slaganje oblika sjene s "brane-world" modelom [24]. Tu se i pomoću te sjene stavlja gornja granica na radijus zakrivljenosti l peterodimenzionalnog anti-de Sitter prostora vremena [26]. Tema osmog poglavlja su gravitacijski valovi i kako se pomoću njih može staviti gornja granica na l . Ove granice dobivene pomoću sjene M87* i gravitacijskih valova manje su striktno od one dobivene testiranjem Newtonovog zakona. Dodatno, u osmom poglavlju, razmotreni su i određeni otisci koje bi modifikacije opće teorije relativnosti ostavile u signalu gravitacijskih valova. Sve u svemu, iako se čini da se trenutno ne može potvrditi ili opovrgnuti postojanje dodatnih dimenzija, upravo "brane-world"

modeli igraju važnu ulogu u razmatranju posljedica koje bi postojanje dodatnih dimenzija imalo.

Dodaci

Dodatak A Jednadžbe polja

Kontrakcijom Gaussove jednadžbe (2.8) dobiva se

$$\begin{aligned}
 R_{AC} &= R_{ADC}{}^D = {}^{(5)}R_{EFG}{}^H g_A{}^E g_C{}^G g_H{}^D g_D{}^F + K_{AC}K_D{}^D - K_A{}^D K_{DC} \\
 &= {}^{(5)}R_{EFG}{}^H g_A{}^E g_C{}^G g_H{}^F + K_{AC}K - K_A{}^D K_{DC} \\
 &= {}^{(5)}R_{EFG}{}^H g_A{}^E g_C{}^G ({}^{(5)}g_H{}^F - n_H n^F) + K_{AC}K - K_A{}^D K_{DC} \\
 &= {}^{(5)}R_{EFG}{}^H ({}^{(5)}g_H{}^F g_A{}^E g_C{}^G - {}^{(5)}R_{EFG}{}^H n_H n^F g_A{}^E g_C{}^G) + K_{AC}K - K_A{}^D K_{DC} \\
 &= {}^{(5)}R_{EG} g_A{}^E g_C{}^G - {}^{(5)}R_{EFG}{}^H n_H n^F g_A{}^E g_C{}^G + K_{AC}K - K_A{}^D K_{DC},
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

gdje je u trećem redu iskorišteno (2.5). Definirajmo $\rho_{AC} \equiv R_{EFG}{}^H n_H n^F g_A{}^E g_C{}^G$ i iskoristimo tu oznaku pri još jednoj kontrakciji:

$$\begin{aligned}
 R &= R_{AC}g^{AC} = {}^{(5)}R_{EG}(g_A{}^E g_C{}^G g^{AC}) - \rho_{AC}g^{AC} + g^{AC}K_{AC}K - K_A{}^D K_{DC}g^{AC} \\
 &= {}^{(5)}R_{EG}g^{EG} - \rho_{EG}g^{EG} + K^2 - K_{EG}K^{EG}.
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Uvrstimo sada dobivene rezultate u 4D Einsteinov tenzor:

$$\begin{aligned}
 G_{AC} &= R_{AC} - \frac{1}{2}Rg_{AC} \\
 &= {}^{(5)}R_{EG} g_A{}^E g_C{}^G - \rho_{AC} + K_{AC}K - K_A{}^D K_{DC} - \frac{g_{AC}}{2} (K^2 - K_{EG}K^{EG}) \\
 &\quad - \frac{1}{2} ({}^{(5)}R_{EG} g^{EG} g_{AC} - \rho_{EG} g^{EG} g_{AC}).
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

U relaciji (A.3) zadnju zagradu moguće je pojednostaviti. Za prvi član vrijedi

$$\begin{aligned}
 {}^{(5)}R_{EG} g^{EG} g_{AC} &= {}^{(5)}R_{EG} ({}^{(5)}g^{EG} - n^E n^G) g_{AC} \\
 &= {}^{(5)}R_{EG} ({}^{(5)}g^{EG} g_{AC} - {}^{(5)}R_{EG} n^E n^G g_{AC}) \\
 &= {}^{(5)}R ({}^{(5)}g_{EG} g_A{}^E g_C{}^G - {}^{(5)}R_{EG} n^E n^G g_{AC}),
 \end{aligned} \tag{A.4}$$

dok za drugi član vrijedi

$$\begin{aligned}
R_{BFD}{}^H n_H n^F g_E{}^B g_G{}^D g^{EG} g_{AC} &= R_{BFD}{}^H n_H n^F g_E{}^B g^{ED} g_{AC} \\
&= R_{BFD}{}^H n_H n^F g^{BD} g_{AC} \\
&= R_F{}^H n_H n^F g_{AC},
\end{aligned} \tag{A.5}$$

tj. drugi član se može zapisati kao ${}^{(5)}R_{EG} n^E n^G g_{AC}$. Ako se sada to iskoristi u (A.3) dobiva se

$$\begin{aligned}
G_{AC} &= \left({}^{(5)}R_{EG} - \frac{1}{2} R {}^{(5)}g_{EG} \right) g_A{}^E g_C{}^G + {}^{(5)}R_{EG} n^E n^G g_{AC} \\
&\quad + K_{AC} K - K_A{}^D K_{DC} - \rho_{AC} - \frac{g_{AC}}{2} (K^2 - K_{EG} K^{EG}).
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Iskoristimo relaciju (2.4) kako bismo zapisali jednadžbe polja u 5D

$${}^{(5)}R_{EG} - \frac{1}{2} {}^{(5)}R {}^{(5)}g_{EG} + \Lambda_5 {}^{(5)}g_{EG} = \kappa_5^2 {}^{(5)}T_{EG} \tag{A.7}$$

i kontrahirajmo

$$\begin{aligned}
{}^{(5)}R_{EG} {}^{(5)}g^{EG} - \frac{1}{2} {}^{(5)}R {}^{(5)}g_{EG} {}^{(5)}g^{EG} + \Lambda_5 {}^{(5)}g_{EG} {}^{(5)}g^{EG} &= \kappa_5^2 {}^{(5)}T_{EG} {}^{(5)}g^{EG} \\
{}^{(5)}R - \frac{5}{2} {}^{(5)}R + 5\Lambda_5 &= \kappa_5^2 {}^{(5)}T \\
{}^{(5)}R &= \frac{2}{3} (5\Lambda_5 - \kappa_5^2 {}^{(5)}T),
\end{aligned} \tag{A.8}$$

a zatim uvrstimo u (A.7) čime se dolazi do sljedeće relacije

$${}^{(5)}R_{EG} = \kappa_5^2 \left({}^{(5)}T_{EG} - \frac{1}{3} {}^{(5)}T {}^{(5)}g_{EG} \right) + \frac{2}{3} \Lambda_5 {}^{(5)}g_{EG}. \tag{A.9}$$

Daljnje pojednostavljenje je moguće korištenjem relacije (2.11) pri raspisivanju ρ_{AC} :

$$\begin{aligned}
\rho_{AC} &= {}^{(5)}R_{EFG}{}^H n_H n^F g_A{}^E g_C{}^G \\
&= {}^{(5)}R_{EFGH}{}^H n^F g_A{}^E g_C{}^G \\
&= {}^{(5)}C_{EFGH}{}^H n^F g_A{}^E g_C{}^G + \frac{2}{3} \left({}^{(5)}g_{E[G} {}^{(5)}R_{H]F} - {}^{(5)}g_{F[G} {}^{(5)}R_{H]E} \right) n^H n^F g_A{}^E g_C{}^G \\
&\quad - \frac{1}{6} {}^{(5)}g_{E[G} {}^{(5)}g_{H]F} {}^{(5)}R n^H n^F g_A{}^E g_C{}^G.
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Promotrimo sada svaki član zasebno. Prvi član se definira kao električni dio Weylovog tenzora $\mathcal{E}_{AC} \equiv {}^{(5)}C_{EFGH}n^H n^F g_A^E g_C^G$. Nadalje,

$$\begin{aligned}
& {}^{(5)}g_{E[G} {}^{(5)}R_{H]F}n^H n^F g_A^E g_C^G \\
&= \frac{1}{2} \left[{}^{(5)}g_{EG} {}^{(5)}R_{HF}n^H n^F g_A^E g_C^G - {}^{(5)}g_{EH} {}^{(5)}R_{GF}n^H n^F g_A^E g_C^G \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[{}^{(5)}R_{HF}n^H n^F g_{AC} - {}^{(5)}R_{GF}n^H n^F g_{AH} g_C^G \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\kappa_5^2 \left({}^{(5)}T_{HF} - \frac{1}{3} {}^{(5)}T {}^{(5)}g_{HF} \right) + \frac{2}{3} \Lambda_5 {}^{(5)}g_{HF} \right) n^H n^F g_{AC} - {}^{(5)}R_{GF}n^H n^F g_{AH} g_C^G \right] \\
&= \frac{1}{2} \left(\kappa_5^2 \left({}^{(5)}T_{HF} - \frac{1}{3} {}^{(5)}T {}^{(5)}g_{HF} \right) + \frac{2}{3} \Lambda_5 {}^{(5)}g_{HF} \right) n^H n^F g_{AC},
\end{aligned} \tag{A.11}$$

gdje u trećoj jednakosti desni član iščezava zbog

$$\begin{aligned}
{}^{(5)}R_{GF}n^H n^F g_{AH} g_C^G &= {}^{(5)}R_{GF}n^H n^F ({}^{(5)}g_{AH} - n_A n_H) g_C^G \\
&= {}^{(5)}R_{GF}(n_A n^F - n_A n^F) g_C^G \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Na isti način za druge članove u relaciji (A.10) dobiva se

$${}^{(5)}g_{F[G} {}^{(5)}R_{H]E}n^H n^F g_A^E g_C^G = -\frac{1}{2} \left(\kappa_5^2 \left({}^{(5)}T_{HF} - \frac{1}{3} {}^{(5)}T {}^{(5)}g_{HF} \right) + \frac{2}{3} \Lambda_5 {}^{(5)}g_{HF} \right) g_A^F g_C^H \tag{A.13}$$

$$\frac{1}{6} {}^{(5)}g_{E[G} {}^{(5)}g_{H]F} {}^{(5)}Rn^H n^F g_A^E g_C^G = \frac{1}{18} (5\Lambda_5 - \kappa_5^2 {}^{(5)}T) g_{AC}. \tag{A.14}$$

Sve zajedno, za ρ_{AC} dobije se

$$\rho_{AC} = \mathcal{E}_{AC} + \frac{\kappa_5^2}{3} \left[g_{AC} \left({}^{(5)}T_{HF} n^H n^F - \frac{{}^{(5)}T}{2} \right) + {}^{(5)}T_{HF} g_C^H g_A^F \right] + \frac{1}{6} \Lambda_5 g_{AC}, \tag{A.15}$$

što nakon uvrštavanja u (A.3), zajedno s (A.8) i (A.9) daje sljedeći oblik jednažbi polja:

$$G_{AC} = -\frac{1}{2}\Lambda_5 g_{AC} + \frac{2}{3}\kappa_5^2 \left[{}^{(5)}T_{HF} g_A^H g_B^F + \left({}^{(5)}T_{HF} n^H n^F - \frac{1}{4} {}^{(5)}T \right) g_{AC} \right] \\ + K_{AC}K - K_A^D K_{DC} - \frac{g_{AC}}{2} (K^2 - K_{EG}K^{EG}) - \mathcal{E}_{AC}. \quad (\text{A.16})$$

U jednažbu (A.16) još se može uvrstiti (2.26). Konkretno, kontrakcijom (2.26) dobiva se

$$K = -\frac{\kappa_5^2}{6}(T - 4\lambda) \quad (\text{A.17})$$

pa se za članove koji se pojavljuju u (A.16) redom dobiva

$$K_{AC}K = -\frac{1}{2}\kappa_5^2 \left[T_{AC} + \frac{1}{3}(\lambda - T)g_{AC} \right] \frac{\kappa_5^2}{6}(T - 4\lambda) \\ = -\frac{\kappa_5^4}{12} \left[TT_{AC} - 4\lambda T_{AC} + \frac{5}{3}\lambda T g_{AC} - \frac{4}{3}\lambda^2 g_{AC} - \frac{T^2 g_{AC}}{3} \right], \quad (\text{A.18})$$

$$K_A^D K_{DC} = -\frac{1}{2}\kappa_5^2 \left[T_A^D + \frac{1}{3}(\lambda - T)g_A^D \right] \left(-\frac{1}{2}\kappa_5^2 \right) \left[T_{DC} + \frac{1}{3}(\lambda - T)g_{DC} \right] \\ = -\frac{\kappa_5^4}{4} \left[T_A^D T_{DC} + \frac{2}{3}(\lambda - T)T_{AC} + \frac{1}{9}(\lambda - T)^2 g_{AC} \right], \quad (\text{A.19})$$

$$K^2 = \frac{\kappa_5^4}{36}(T - 4\lambda)^2, \quad (\text{A.20})$$

$$K_{EG}K^{EG} = -\frac{1}{2}\kappa_5^2 \left[T_{EG} + \frac{1}{3}(\lambda - T)g_{EG} \right] \left(-\frac{1}{2}\kappa_5^2 \right) \left[T^{EG} + \frac{1}{3}(\lambda - T)g^{EG} \right] \\ = \frac{\kappa_5^4}{4} \left[T_{EG}T^{EG} + \frac{2}{3}(\lambda - T)T + \frac{4}{9}(\lambda - T)^2 \right]. \quad (\text{A.21})$$

Uvrste li se prethodne relacije u (A.16) dobiva se (2.27).

Dodatak B Gaussove normalne koordinate

Gaussove normalne koordinate tipične su za višedimenzionalne modele gravitacije. Zamislimo četverodimenzionalnu *površinu* dimenzije koja se nalazi u peterodimenzionalnom *volumenu*. Označimo takvu *površinu* sa Σ . Konstruirajmo geodezik kroz

svaku točku p površine Σ , s tangentnim vektorom n^A . Odaberimo proizvoljne koordinate (x_1, \dots, x_4) na dijelu površine Σ . Označimo svaku točku u okolini Σ pomoću koordinata (x_1, \dots, x_4) točke p kroz koju ide geodezik na kojem se nalazi ta točka u okolini Σ i pomoću parametra y , kojim je parametriziran taj geodezik. Dakle, ako su općenite koordinate vezane uz volumen dane s $X^A = (x^\mu, y)$, vrijedi $n_A dx^A = dy$ i metrika poprima oblik

$$ds^2 = {}^{(5)}g_{AB} dx^A dx^B = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2. \quad (\text{B.1})$$

Metrika zapisana u Gaussovima normalnim koordinatama ima oblik (B.1).

Dodatak C Einsteinov tenzor za Randall-Sundrum metriku

Za početak, zapišimo (3.25) na sljedeći način

$$ds^2 = {}^{(5)}g_{MN}(y) dx^M dx^N, \quad (\text{C.1})$$

gdje je

$${}^{(5)}g_{MN}(y) = e^{-2A(y)} \eta_{\mu\nu} + \delta_M^4 \delta_N^4. \quad (\text{C.2})$$

Inverzna metrika je

$${}^{(5)}g^{MN}(y) = e^{2A(y)} \eta^{\mu\nu} + \delta_4^M \delta_4^N. \quad (\text{C.3})$$

Prema definiciji 5D Christoffelovih simbola vrijedi

$${}^{(5)}\Gamma_{MN}^P = \frac{1}{2} {}^{(5)}g^{PR} (\partial_M {}^{(5)}g_{NR} + \partial_N {}^{(5)}g_{RM} - \partial_R {}^{(5)}g_{MN}). \quad (\text{C.4})$$

Budući da je 5D metrika funkcija samo dodatne dimenzije y i to samo u $\mu\nu$ indeksima, vrijedi

$$\partial_L {}^{(5)}g_{MN} = \partial_4 {}^{(5)}g_{MN} = \partial_4 {}^{(5)}g_{\mu\nu}. \quad (\text{C.5})$$

Zbog toga, samo dvije vrste Christoffelovih simbola ne iščezavaju, a to su

$$\begin{aligned}
{}^{(5)}\Gamma_{\mu\nu}^4 &= \frac{1}{2} {}^{(5)}g^{4R}(-\partial_R g_{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{2} {}^{(5)}g^{44}(-\partial_4 g_{\mu\nu}) \\
&= A' e^{-2A} \eta_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{C.6}$$

$$\begin{aligned}
{}^{(5)}\Gamma_{\mu 4}^\nu &= \frac{1}{2} {}^{(5)}g^{\nu R}(\partial_4 g_{R\mu}) \\
&= \frac{1}{2} e^{2A} \eta^{\nu\rho}(-2A' e^{-2A} \eta_{\rho\mu}) \\
&= -A' \delta_\mu^\nu.
\end{aligned} \tag{C.7}$$

Peterodimenzionalni Riccijev tenzor može se zapisati pomoću Christoffelovih simbola kao

$${}^{(5)}R_{MN} = \partial_P {}^{(5)}\Gamma_{MN}^P - \partial_N {}^{(5)}\Gamma_{MP}^P + {}^{(5)}\Gamma_{PQ}^P {}^{(5)}\Gamma_{MN}^Q - {}^{(5)}\Gamma_{NQ}^P {}^{(5)}\Gamma_{MP}^Q. \tag{C.8}$$

Za njegove komponente se dobiva

$$\begin{aligned}
{}^{(5)}R_{\mu\nu} &= \partial_4 {}^{(5)}\Gamma_{\mu\nu}^4 + {}^{(5)}\Gamma_{\sigma 4}^\sigma {}^{(5)}\Gamma_{\mu\nu}^4 - {}^{(5)}\Gamma_{\nu 4}^\sigma {}^{(5)}\Gamma_{\mu\sigma}^4 - {}^{(5)}\Gamma_{\nu\sigma}^4 {}^{(5)}\Gamma_{\mu 4}^\sigma \\
&= (A'' - 2A'^2) e^{-2A} \eta_{\mu\nu} - 4A'^2 e^{-2A} \eta_{\mu\nu} \\
&\quad + A'^2 e^{-2A} \eta_{\mu\nu} + A'^2 e^{-2A} \eta_{\mu\nu} \\
&= (A'' - 4A'^2) {}^{(5)}g_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{C.9}$$

$${}^{(5)}R_{\mu 4} = 0 \tag{C.10}$$

i

$$\begin{aligned}
{}^{(5)}R_{44} &= -\partial_4 {}^{(5)}\Gamma_{4\sigma}^\sigma - {}^{(5)}\Gamma_{4\rho}^\sigma {}^{(5)}\Gamma_{4\sigma}^\rho \\
&= 4A'' - 4A'^2.
\end{aligned} \tag{C.11}$$

Za 5D Riccijev skalar se onda dobiva

$$\begin{aligned}
{}^{(5)}R &= {}^{(5)}g^{MN} {}^{(5)}R_{MN} \\
&= {}^{(5)}g^{\mu\nu} {}^{(5)}R_{\mu\nu} + {}^{(5)}g^{44} {}^{(5)}R_{44} \\
&= 4(A'' - 4A'^2) + 4A'' - 4A'^2 \\
&= 8A'' - 20A'^2.
\end{aligned} \tag{C.12}$$

I na kraju, za komponente 5D Einsteinovog tenzora dobiva se

$$\begin{aligned}
{}^{(5)}G_{\mu\nu} &= {}^{(5)}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} {}^{(5)}g_{\mu\nu} {}^{(5)}R \\
&= (6A'^2 - 3A'') {}^{(5)}g_{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{C.13}$$

$$\begin{aligned}
{}^{(5)}G_{44} &= {}^{(5)}R_{44} - \frac{1}{2} {}^{(5)}g_{44} {}^{(5)}R \\
&= 6A'^2.
\end{aligned} \tag{C.14}$$

Iz (3.24) vidi se da vrijedi

$${}^{(5)}G_{\mu\nu} = (6A'^2 - 3A'') {}^{(5)}g_{\mu\nu} = -\Lambda_5 + \kappa_5^2 {}^{(5)}T_{\mu\nu} \tag{C.15}$$

i

$${}^{(5)}G_{44} = 6A'^2 = -\Lambda_5 + \kappa_5^2 {}^{(5)}T_{55}, \tag{C.16}$$

iz čega se onda vrlo jednostavno dobivaju (3.26) i (3.27).

Dodatak D Einsteinov tenzor za 5D FLRW metriku

Rješavamo jednađbe polja za metriku

$$ds^2 = -w^2(y, t) dt^2 + a^2(y, t) \delta_{ij} dx^i dx^j + dy^2. \tag{D.1}$$

Inverz te metrike je

$${}^{(5)}g^{00} = -w^{-2}(y, t), \quad {}^{(5)}g^{ii} = a^{-2}(y, t), \quad {}^{(5)}g^{44} = 1. \tag{D.2}$$

Neiščezavajući Christoffelovi simboli su

$$\begin{aligned}
(5)\Gamma_{ii}^0 &= \frac{a\dot{a}}{w^2}, & (5)\Gamma_{00}^4 &= ww', & (5)\Gamma_{ii}^4 &= -aa', \\
(5)\Gamma_{40}^0 &= \frac{w'}{w}, & (5)\Gamma_{0i}^i &= \frac{\dot{a}}{a}, & (5)\Gamma_{4i}^i &= \frac{a'}{a}, \\
(5)\Gamma_{00}^0 &= \frac{\dot{w}}{w}.
\end{aligned} \tag{D.3}$$

Uvrstimo sada te Christoffelove simbole u formulu za Riccijev tenzor

$$(5)R_{MN} = \partial_P (5)\Gamma_{MN}^P - \partial_N (5)\Gamma_{MP}^P + (5)\Gamma_{PQ}^P (5)\Gamma_{MN}^Q - (5)\Gamma_{NQ}^P (5)\Gamma_{MP}^Q, \tag{D.4}$$

čime se za komponente 5D Riccijevog tenzora dobiva

$$(5)R_{00} = ww'' - 3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\frac{\dot{a}\dot{w}}{aw} + 3\frac{a'}{a}ww', \tag{D.5}$$

$$(5)R_{ii} = 2\left(\frac{\dot{a}}{w}\right)^2 + \frac{a\ddot{a}}{w^2} - a\dot{a}\frac{\dot{w}}{w^3} - aa'' - aa'\frac{w'}{w} - 2a'^2, \tag{D.6}$$

$$(5)R_{04} = 3\left(\frac{\dot{a}w'}{aw} - \frac{\ddot{a}}{a}\right), \tag{D.7}$$

$$(5)R_{44} = -\frac{w''}{w} - 3\frac{a''}{a}. \tag{D.8}$$

Odredimo još i Riccijev skalar

$$\begin{aligned}
(5)R &= (5)g^{AB} (5)R_{AB} \\
&= (5)g^{00} (5)R_{00} + (5)g^{ii} (5)R_{ii} + (5)g^{44} (5)R_{44} \\
&= -2\frac{w''}{w} + \frac{6}{w^2}\frac{\ddot{a}}{a} - 6\frac{\dot{a}\dot{w}}{aw^3} - 6\frac{a'w'}{aw} - 6\frac{a''}{a} - 6\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + \frac{6}{w^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2.
\end{aligned} \tag{D.9}$$

Sada se mogu dobiti komponente 5D Einsteinovog tenzora. Promotrimo npr. G_{00} :

$$\begin{aligned}
{}^{(5)}G_{00} &= {}^{(5)}R_{00} - \frac{1}{2} {}^{(5)}g_{00} {}^{(5)}R \\
&= ww'' - 3\frac{\ddot{a}}{a} + 3\frac{\dot{a}\dot{w}}{aw} + 3\frac{a'}{a}ww' \\
&\quad + \frac{1}{2}w^2 \left(-2\frac{w''}{w} + \frac{6}{w^2}\frac{\ddot{a}}{a} - 6\frac{\dot{a}\dot{w}}{aw^3} - 6\frac{a'w'}{aw} - 6\frac{a''}{a} - 6\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + \frac{6}{w^2}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 \right) \\
&= 3 \left\{ \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 - w^2 \left[\left(\frac{a'}{a}\right)^2 + \frac{a''}{a} \right] \right\}.
\end{aligned} \tag{D.10}$$

Analogno, za ostale komponente slijedi

$$\begin{aligned}
{}^{(5)}G_{ij} &= \left[a^2 \left\{ \frac{a'}{a} \left(2\frac{w'}{w} + \frac{a'}{a} \right) + 2\frac{a''}{a} + \frac{w''}{w} \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{a^2}{w^2} \left\{ \frac{\dot{a}}{a} \left(2\frac{\dot{w}}{w} - \frac{\dot{a}}{a} \right) - 2\frac{\ddot{a}}{a} \right\} \right] \delta_{ij},
\end{aligned} \tag{D.11}$$

$${}^{(5)}G_{04} = 3 \left(\frac{w'\dot{a}}{wa} - \frac{\dot{a}'}{a} \right), \tag{D.12}$$

$${}^{(5)}G_{44} = 3 \left\{ \frac{a'}{a} \left(\frac{a'}{a} + \frac{w'}{w} \right) - \frac{1}{w^2} \left[\frac{\dot{a}}{a} \left(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{w}}{w} \right) + \frac{\ddot{a}}{a} \right] \right\}. \tag{D.13}$$

Literatura

- [1] Weyl, H. A new extension of relativity theory. // *Annalen Phys.* Vol. 59 (1919), str. 101-133.
- [2] Eddington, A. S. *The Mathematical theory of relativity*. 1st ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1923.
- [3] Brans, C; Dicke, R. H. Mach's principle and a relativistic theory of gravitation. // *Phys. Rev.* Vol. 124 (1961), str. 925-935.
- [4] Sotiriou, T. P.; Faraoni, V. $f(R)$ theories of gravity. // *Rev. Mod. Phys.* Vol. 82, (2010), str. 451-497.
- [5] Schmidt, H.-J. Fourth order gravity: equations, history, and applications to cosmology. // *arXiv:gr-qc/0602017*, (2006), <https://arxiv.org/abs/gr-qc/0602017>, 3.5.2022.
- [6] Kaluza, T. On the unification problem in physics. // *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* 1921, (1921), str. 966-972.
- [7] Klein, O. Quantum theory and five-dimensional theory of relativity. // *Zeits. Phys.* Vol. 37, (1926), str. 895-906.
- [8] Arkani-Hamed, N. *et al.* The Hierarchy problem and new dimensions at a millimeter. // *Phys. Lett. B* Vol. 429, (1998), str. 263-272.
- [9] Randall, L.; Sundrum, R., A large mass hierarchy from a small extra dimension. // *Phys. Rev. Lett.* Vol. 83, (1999), str. 3370-3373.
- [10] Randall, L.; Sundrum, R., An alternative to compactification. // *Phys. Rev. Lett.* Vol. 83, (1999), str. 4690-4693.
- [11] Maartens, R; Koyama, K. Brane-world gravity. // *arXiv:1004.3962 [hep-th]*, (2010), <https://arxiv.org/abs/1004.3962>, 10.4.2022.
- [12] Maldacena, J. M. The Large N limit of superconformal field theories and supergravity. // *Int.J.Theor.Phys.* Vol. 38, (1999), str. 1113-1133.

- [13] Natsuume, M. AdS/CFT duality user guide. // arXiv:1409.3575 [hep-th], (2014), <https://arxiv.org/abs/1409.3575>, 15.4.2022.
- [14] Garriga, J.; Tanaka, T. Gravity in the brane world. // Phys. Rev. Lett. Vol. 84, (2000), str. 2778-2781.
- [15] Hoyle, C. D. *et al.* Sub-millimeter tests of the gravitational inverse-square law: A search for "large" extra dimensions. // arXiv:hep-ph/0011014, (2000), <https://arxiv.org/abs/hep-ph/0011014>, 18.4.2022.
- [16] Akiyama, K. *et al.* First M87 Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole. // Astrophys.J.Lett. Vol. 87, (2019), L1
- [17] Chamblin, A. *et al.* Brane-World Black Holes. // Phys. Rev. D Vol. 61, (2000), 065007
- [18] Dadhich, N. Negative energy condition and black holes on the brane. // arXiv:hep-th/0009178, (2000), <https://arxiv.org/abs/hep-th/0009178>, 31.3.2022.
- [19] Dadhich, N. *et al.* Black holes on the brane. // Phys.Lett.B Vol. 487, (2000), str. 1-6.
- [20] Aliev, A. N.; Talazan, P. Gravitational effects of rotating braneworld black holes. // arXiv:0906.1465 [gr-qc], (2009), <https://arxiv.org/abs/0906.1465>, 3.5.2022.
- [21] Lima Junior, H. C. D. *et al.* Spinning black holes with a separable Hamilton–Jacobi equation from a modified Newman–Janis algorithm. // Eur.Phys.J.C Vol. 80, (2020), str. 11-23.
- [22] Carter, B. Global structure of the Kerr family of gravitational fields. // Phys.Rev. Vol. 174, (1968), str. 1559-1571.
- [23] Compère, G. *et al.* Classification of radial Kerr geodesic motion. // arXiv:2106.03141 [gr-qc], (2021), <https://arxiv.org/abs/2106.03141>, 6.5.2022.

- [24] Hou, Y. *et al.* Revisiting the shadow of braneworld black holes. // arXiv:2103.04369 [gr-qc], (2021), <https://arxiv.org/abs/2103.04369>, 10.4.2022.
- [25] Mohapatra, R. N. *et al.* Cosmology of Brane-Bulk Models in Five Dimensions. // arXiv:hep-ph/0003328, (2000), <https://arxiv.org/abs/hep-ph/0003328> 27.4.2022.
- [26] Vagnozzi, S.; Visinelli, L. Hunting for extra dimensions in the shadow of M87*. // Phys.Rev.D Vol. 100, (2019), str. 2-9.
- [27] Hernandez, W. C. Material Sources for the Kerr Metric. // Phys.Rev. Vol. 159, (1967), str. 1070-1072.
- [28] da Rocha, R.; Coimbra-Araujo, C. H. Variation in the luminosity of Kerr quasars due to extra dimension in brane Randall-Sundrum model. // arXiv:astro-ph/0510318, (2005), <https://arxiv.org/abs/astro-ph/0510318> 15.5.2022.
- [29] Bardeen, J. M. *et al.* Timelike and null geodesics in the Kerr metric. // Proceedings, Ecole d'Eté de Physique Théorique: Les Astres Occlus : Les Houches, France, August, (1973), str. 215-240.
- [30] Vazquez, S. E.; Esteban, E. P. Strong Field Gravitational Lensing by a Kerr Black Hole. // Nuovo Cim.B Vol. 119., (2004), str. 489-519.
- [31] Caldwell, R. R.; Langlois, D. Shortcuts in the fifth dimension. // Phys.Lett.B Vol. 511, (2001), str. 129-135.
- [32] Visinelli, L. *et al.* Brane-world extra dimensions in light of GW170817. // arXiv:1711.06628 [gr-qc], (2017), <https://arxiv.org/abs/1711.06628>, 30.4.2022.
- [33] Abbott, B. P. *et al.* Gravitational Waves and Gamma-rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A. // arXiv:1710.05834 [astro-ph.HE], (2017), <https://arxiv.org/abs/1710.05834>, 30.4.2022.
- [34] Abbott, B. P. *et al.* Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. // arXiv:1602.03837 [gr-qc], (2016), <https://arxiv.org/abs/1602.03837>, 5.5.2022.

- [35] Siemens, X.; Yunes, N. Gravitational Wave Tests of General Relativity with Ground-Based Detectors and Pulsar Timing Arrays. // *Living Rev.Rel.* Vol. 16, (2013), str. 9-127.
- [36] Perkins, S. E. Probing Fundamental Physics with Gravitational Waves: The Next Generation. // arXiv:2010.09010 [gr-qc], (2020), <https://arxiv.org/abs/2010.09010>, 15.5.2022.
- [37] Aggarwal, N. *et al.* Challenges and Opportunities of Gravitational Wave Searches at MHz to GHz Frequencies. // arXiv:2011.12414 [gr-qc], (2020), <https://arxiv.org/abs/2011.12414>, 16.5.2022.
- [38] Clarkson, C.; Seahra, S. S. A gravitational wave window on extra dimensions. // arXiv:astro-ph/0610470, (2006), <https://arxiv.org/abs/astro-ph/0610470v1>, 20.5.2022.
- [39] Chamberlain, K.; Yunes, N. Theoretical Physics Implications of Gravitational Wave Observation with Future Detectors. // arXiv:1704.08268 [gr-qc], (2017), <https://arxiv.org/abs/1704.08268>, 20.5.2022.
- [40] Yunes, N. *et al.* Theoretical Physics Implications of the Binary Black-Hole Mergers GW150914 and GW151226. // *Phys.Rev.D* Vol. 94, (2016), str. 8-49.
- [41] Hinterbichler, K.; Theoretical Aspects of Massive Gravity. // *Rev.Mod.Phys.*, Vol. 84, (2012), str. 671-710.
- [42] Frolov, A. V.; Guo, J. Small Cosmological Constant from Running Gravitational Coupling. // arXiv:1101.4995 [astro-ph.CO], (2011), <https://arxiv.org/abs/1101.4995> 22.5.2022.
- [43] Will, C. M. Bounding the mass of the graviton using gravitational-wave observations of inspiralling compact binaries. // arXiv:gr-qc/9709011, (1997), <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9709011>, 22.5.2022.
- [44] Akiyama, K. *et al.* First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. IV. Variability, Morphology, and Black Hole Mass. // *Astrophys.J.Lett.* Vol. 930, (2019), L15

- [45] Vagnozzi, S. *et al.* Horizon-scale tests of gravity theories and fundamental physics from the Event Horizon Telescope image of Sagittarius A*. // arXiv:2205.07787 [gr-qc], (2022), <https://arxiv.org/abs/2205.07787>, 13.6.2022.
- [46] Banerjee, I. *et al.* Silhouette of M87*: A new window to peek into the world of hidden dimensions. // arXiv:1909.09385 [gr-qc], (2019), <https://arxiv.org/abs/1909.09385>, 13.6.2022.
- [47] Cunha, P. *et al.* Shadows of Kerr black holes with and without scalar hair. // arXiv:1605.08293 [gr-qc], (2016), <https://arxiv.org/abs/1605.08293>, 6.7.2022.
- [48] Kim, Y. *et al.* Brane World of Warp Geometry: An Introductory Review. // arXiv:hep-th/0307023, (2004), <https://arxiv.org/abs/hep-th/0307023v2>, 26.8.2022.
- [49] Aliev, A. N.; Gumrukcuoglu, A. E. Charged rotating black holes on a 3-brane // arXiv:hep-th/0502223, (2005), <https://arxiv.org/abs/hep-th/0502223> 28.8.2022.
- [50] Hansen, R. O. Multipole moments of stationary spacetimes // J. Math. Phys. Vol. 15, (1974), str. 46.