Primjena nelinearne funkcionalne analize u teoriji elastičnosti

Samac, Dominik Šime

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:804260

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Dominik Šime Samac

PRIMJENA NELINEARNE FUNKCIONALNE ANALIZE U TEORIJI ELASTIČNOSTI

Diplomski rad

Voditelji rada:
prof. dr. sc. Josip Tambača
dr. sc. Matko Ljulj

Zagreb, veljača 2023.

(Ova stranica namjerno nije ostavljena prazna)

Ovaj diplomski obranjen je dana ______________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik

2. ______________________________, član

3. ______________________________, član.

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________

2. ______________________

3. ______________________

(Ova stranica namjerno nije ostavljena prazna)

Zahvaljujem se obitelji, voditeljima rada i profesorima zbog kojih sam ovdje.

(Ova stranica namjerno nije ostavljena prazna)

Sadržaj

(Ova stranica namjerno nije ostavljena prazna)

1 Uvod

1.1 Uvodni komentar

Cilj ovog rada je dokazati John Ballov teorem o egzistenciji ravnotežnog rješenja za hiperelastično tijelo čija je gustoća unutarnje energije opisana polikonveksnom funkcijom koji ćemo dokazati na kraju rada. Teorem je prvi dokazao John Ball u svome radu [6] iz 1977. godine.

Problemi pronalska minimizatora funkcionala intenzivno se istražuju još od vremena Leonharda Eulera (1707.-1783.) i Joseph-Louisa Lagrangea (1736.-1813.) koji su dali prvi značajniji rezultat o egzistenciji stacionarnih točaka funkcionala, poznatiji kao Euler-Lagrangeove jednadžbe. Važniji rezultati o egzistenciji minimizatora čekali su razvoj funkcionalne analize s obzirom kako je prostor u kojem se traže minimizatori beskonačnodimenzionalan.

Radom Stefana Banacha (1892.-1945.) dolazi do značajnijih pomaka u funkcionalnoj analizi. David Hilbert (1862.-1943.) predlaže metodu pronalska minimizatora korištenjem minimizirajućeg niza koji će konvergirati prema minimizatoru, no u to vrijeme još uvijek nisu riješeni svi tehnički problemi iz funkcionalne analize. Prvi fundamentalni teorem iz funkcionalne analize koji se koristi u dokazu John Ballovog teorema je Banach-Saks-Mazurov teorem koji je dokazan 1930. godine (Stefan Banach i Stanislaw Saks), odnosno neovisno 1933. (Stanislaw Mazur). Idući veliki teorem funkcionalne analize kojeg je John Ball iskoristio je Banach-Eberlein-Šmulianov teorem čiji jedan smjer dokazuje Vitold Lvovitsch Šmulian (1914.-1944.) 1940. godine, dok obrat dokazuje William Frederick Eberlein (1917.-1986.) tek 1947. godine.

Razvijanjem teorije u drugoj polovici 20. stoljeća došlo je do značajnijih pomaka u rješavanju problema egzistencije minimizatora, no razvojem teorije elastičnosti, tj. modeliranjem hiperelastičnih tijela, došlo se do pretpostavki na model hiperelastičnog tijela na koji se nisu mogli iskoristiti ranije dobiveni rezultati. Problem je riješio John Ball uvođenjem pojma polikonveksnosti, slabije pretpostavke od konveksnosti. U radu ćemo razraditi sve detalje potrebne za dokazivanje teorema kroz pet cjelina, kako slijedi.

Poslije uvoda, tj. u drugom dijelu, radimo poglavlja iz funkcionalne analize s naglaskom na Banach-Saks-Mazurov teorem i Banach-Eberlein-Šmulianov teorem. Banach-Saks-Mazurov teorem govori o konstrukciji jako konvergentnog niza iz slabo konvergentnog niza te o povezanosti jako zatvorenih konveksnih skupova sa slabo konvergentnim nizovima unutar takvih skupova. Banach-Eberlein-Šmulianov teorem analogon je teorema o egzistenciji konvergentnog podniza omeđenog niza. Kako bi se dokazao Banach-Eberlein-Šmulianov teorem, napravit ćemo kratki pregled teorije baza i baznih nizova u Banachovim prostorima. Osim navedenog, dokazat će se geometrijske forme Hahn-Banachovog teorema koje će se koristiti na nekoliko mjesta u nastavku rada.

U trećem dijelu razvit ćemo teoriju Soboljevljevih prostora na kojima ćemo raditi do kraja rada. Iznijet ćemo osnovna svojstva Soboljevljevih prostora koja će nam trebati u nastavku, dokazat ćemo potpunost, separabilnost i refleksivnost određenih Soboljevljevih prostora, definirati norme na istima te iskazati Rellich-Kondrachov teorem o kompaktnim ulaganjima Soboljevljevih prostora. Kako bi se motivirala definicija Soboljevljevih prostora, poglavlje kreće s osnovnim razmatranjem slabih derivacija.

Četvrti dio nastavak je diferencijalnog računa s konačnodimenzionalnih prostora na općenite normirane prostore. Uvodi se pojam diferencijabilnosti te dokazuju sva (očekivana) osnovna svojstva diferencijala na normiranim prostorima. Iskazuje se i dokazuje Piolin identitet koji je najvažniji rezultat ovog poglavlja i koji će se na više mjesta koristiti u nastavku. Naposljetku, navedeni su analogoni teorema srednje vrijednosti te teorema o diferencijabilnosti limesa diferencijabilnih funkcija. Iskazan je teorem o implicitnom preslikavanju te su navedeni neki osnovni primjeri gdje se navedeni teoremi koriste.

Peto poglavlje motivacija je za definicije u posljednjem dijelu. Definirana su preslikavanja od interesa, zajedno sa svojstvima koja od njih očekujemo te je obrazloženo zašto promatramo upravo takva preslikavanja.

U šestom, tj. posljednjem poglavlju razvit ćemo teoriju s kojom se dokazuje egzistencija raznih minimizatora na prostorima funkcija koji su definirani u trećem i petom poglavlju. Kako bi olakšali analizu, detaljnije su obrađene konveksne funkcije i pripadna svojstva istih. Uveden je pojam epigrafa funkcije, s čijom zatvorenosti je uspostavljena veza s određenim vrstama neprekidnosti funkcija. Isto tako, definiramo razne vrste neprekidnosti funkcija. Prije samog iskaza John Ballovog teorema, dokazuju se osnovna svojstva preslikavanja vezanih za kofaktor matrica i determinantu te se na kraju navodi i dokazuje John Ballov teorem koji daje egzistenciju minimizatora, tj. ravnotežnog rješenja hiperelastičnog tijela.

U dodatcima navedeni su rezultati koji se smatraju poznati otprije te koji su u nekom obliku iskazani ili dokazani tijekom studija na PMF MO u Zagrebu. Za sve rezultate koji nisu dokazani, navedena je literatura gdje se mogu pronaći dokazi, a isti su izostavljeni jer zahtijevaju razvijanje teorije koja bi napravila značajniji odmak od teme ovog rada.

1.2 Notacija

Sljedeću notaciju koristimo u nastavku. Nalazimo se u topološkom prostoru X.

1. Kugla sa središtem x i radijusa $r > 0$ u normiranom, tj. metričkom prostoru

$$K(x,r) := \{y \in X : \|x-y\| < r\} = \{y \in X : d(x,y) < r\}.$$

2. Za funkciju $f : X \to Y$ sliku skupa $A \subseteq X$ označavat ćemo uglatim zagradama, tj.

$$f[A] := \{f(a) : a \in A\}.$$

   Nadalje, za $B \subseteq Y$ označavamo prasliku kao $f^{\leftarrow}[B]$.

3. Za vektorski prostor X označavamo pripadni prostor linearnih funkcionala kao X^*, dok prostor ograničenih linearnih funkcionala označavamo s X'.

4. Za vektorske prostore X i Y označavamo prostor linearnih funkcionala $A : X \to Y$ kao $\mathcal{L}(X,Y)$. Prostor ograničenih linearnih funkcionala između prostora X i Y označavamo s $\mathbb{B}(X,Y)$, odnosno u slučaju $X = Y$ s $\mathbb{B}(X)$.

5. Multiindeks je n-torka $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ za koju definiramo $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ i $\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f$.
6. Ukoliko ne želimo odrediti nad kojim poljem promatramo prostor X, tada ćemo to polje jednostavno označiti s $\mathbb{F}$.
7. $\mathbb{M}^{m\times n}$ označava skup svih realnih $m \times n$ matrica.
8. Ukoliko kažemo da je A gust u B, tada zapravo mislimo kako je $A \cap B$ gust u B.
9. Rub skupa A označavamo s ∂A, a zatvarač skupa A s $\overline{A}$.
10. Definirajmo $\mathbb{R}_{\geq} := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ i $\mathbb{R}_{>} := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$.
11. U oznakama $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^N$ ili $\mathbb{R}^M$ podrazumijeva se $n, m, N, M \in \mathbb{N}$.
12. Mjere na prostoru X označavamo s μ ili λ.
13. Ukoliko iz konteksta nije jasno na kojem prostoru se promatra norma, funkciju norme na normiranom prostoru X označit ćemo s $\|\cdot\|_X$.

1.3 Uvodne definicije i rezultati

Definirajmo osnovne pojmove koji će se često koristiti u nastavku i čije je poznavanje bitno za razumijevanje daljnjeg teksta. To je ujedno i razlog zbog kojeg ovaj odjeljak nije u Dodatku.

Za neki skup U definiramo familiju kompaktnih skupova

$$\mathcal{K}(U) := \{K \subseteq U : K \text{ kompaktan}\}.$$

Esencijalni supremum označava supremum za g.s. element iz skupa, tj.

$$\operatorname{ess\,sup}_{x\in U} |f(x)| = \inf\{M : |f(x)| \leq M \text{ za g.s. } x \in U\}.$$

Definicija 1.1. *Za $p \in [1, \infty\rangle$ i $U \subseteq X$ definiramo L^p* ***prostore***

$$\begin{aligned}
L^p(U) &:= \{[f] \mid f : U \to \mathbb{R} \text{ izmjeriva, } \int_U |f|^p d\lambda < \infty\}, \\
L^p_{loc}(U) &:= \{[f] \mid f : U \to \mathbb{R} \text{ izmjeriva, } \int_K |f|^p d\lambda < \infty, \forall K \in \mathcal{K}(U)\}, \\
L^\infty(U) &:= \{[f] \mid f : U \to \mathbb{R} \text{ izmjeriva, } \operatorname{ess\,sup}_{x\in U} |f(x)| < \infty\}, \\
L^\infty_{loc}(U) &:= \{[f] \mid f : U \to \mathbb{R} \text{ izmjeriva, } \operatorname{ess\,sup}_{x\in K} |f(x)| < \infty, \forall K \in \mathcal{K}(U)\}
\end{aligned}$$

gdje je $[f]$ klasa ekvivalencija funkcija koje su g.s. jednake funkciji f. Dalje ćemo poistovijetiti klasu funkcija $[f]$ sa samom funkcijom f.

Na $L^p(U)$, $p \in [1, \infty\rangle$, definiramo normu kao:

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p} := \left(\int_U |f|^p d\lambda \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Na $L^\infty(U)$ prostoru definiramo normu kao:

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L^\infty} = \inf \Big\{ M : \operatorname{ess\,sup}_{x \in U} |f(x)| \leq M \Big\}.$$

Osnovna svojstva L^p prostora dana su u sljedećim teoremima.

Teorem 1.1. *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$, U otvoren. Prostori $(L^p(U), \| \cdot \|_{L^p(U)})$ Banachovi su za svaki $p \in [1, \infty]$.*

Dokaz se može pronaći u [9, str. 135, Teorem 3.4-1].

Teorem 1.2. *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$, U otvoren. Prostori $(L^p(U), \| \cdot \|_{L^p(U)})$ separabilni su za svaki $p \in [1, \infty\rangle$. Prostor $L^\infty(U)$ nije separabilan.*

Dokaz se može pronaći u [9, str. 65, Teorem 2.5-4].

Teorem 1.3 (Hölder). *Neka su $f \in L^p(U)$ i $g \in L^q(U)$ gdje je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tada je $fg \in L^1(U)$ i vrijedi*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Dokaz se može pronaći u [20, str. 48, Propozicija 7.10].

Definicija 1.2. *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Rub skupa U je **Lipschitz neprekidan** ako postoje konstante $\alpha > 0$, $L > 0$, $s \in \mathbb{N}$ te funkcije*

$$f_r : \omega_r \to \mathbb{R}, \quad \omega_r := \{z \in \mathbb{R}^{n-1} : |z| < \alpha\},\ 1 \leq r \leq s$$

tako da vrijedi

$$\partial U = \bigcup_{r=1}^{s} \{(z_r', z_r) : z_r' \in \omega_r, z_r = f_r(z_r')\}$$

uz uvjet

$$|f_r(z_r') - f_r(y_r')| \leq L|z_r' - y_r'|, \quad \forall z_r', y_r' \in \omega_r,\ 1 \leq r \leq s.$$

Posljednji uvjet govori kako su funkcije f_r Lipschitz neprekidne. Otvoreni skupovi s Lipschitz neprekidnim rubom su upravo oni skupovi čije rubove možemo dobiti kao slike konačno funkcija koje su Lipschitz neprekidne.

Definicija 1.3. *Podskup $U \subseteq \mathbb{R}^n$ **domena** je ako je omeđen, povezan i otvoren skup s Lipschitz neprekidnim rubom.*

Prisjetimo se definicije kompaktnosti u općenitim topološkim prostorima te normiranim prostorima.

Definicija 1.4. 1. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i $K \subseteq X$. Podskup K kompaktan je skup ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}$, $\mathcal{U} \neq \emptyset$ podskupa K postoji $n \in \mathbb{N}$ i skupovi $U_1, \cdots, U_n \in \mathcal{U}$ takvi da vrijedi*

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

2. *Neka je X normiran prostor i $K \subseteq X$. Podskup K kompaktan je skup ako svaki niz u K ima konvergentan podniz čiji limes je u K.*

Može se pokazati da definicija kompaktnosti u topološkim prostorima povlači definiciju kompaktnosti u normiranim prostorima (gdje se promatra topologija inducirana normom).

U konačnodimenzionalnim prostorima, kompaktnost je ekvivalentna sa zatvorenosti i omeđenosti skupa (Heine-Borelov teorem). U beskonačnodimenzionalnim prostorima vrijedi samo jedna implikacija.

Propozicija 1.1. *Kompaktan skup u normiranom prostoru je omeđen i zatvoren.*

Kompaktan skup u općenitom topološkom prostoru ne mora biti zatvoren. Neka je X neki skup s barem dva elementa i promotrimo topološki prostor $(X, \{\emptyset, X\})$. Neka je $K \subseteq X$ t.d. je $K \neq \emptyset$ i $K \neq X$. Tada je K očito kompaktan (jer je topologija konačna), ali skup K nije zatvoren jer $X \setminus K$ nije u $\{\emptyset, X\}$. Opširnija rasprava dana je u [14, Poglavlje 8].

Budući da će se na više mjesta koristiti u nastavku, navodimo i sljedeći teorem.

Teorem 1.4 (**generalizirana Fatouova lema**). *Neka je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz izmjerivih funkcija $f_n : X \to \mathbb{R}$ za koje postoji integrabilna funkcija $g : X \to \mathbb{R}$ takva da je $f_n \geq -g$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, tada vrijedi*

$$\int \liminf_n f_n d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu.$$

Dokaz. Primijenimo Fatouovu lemu na niz funkcija $(f_n + g)_n$ za koju vrijedi $f_n + g \geq 0$. $\square$

2 Funkcionalna analiza

U ovome poglavlju izložit ćemo kratki pregled pojmova i teorema funkcionalne analize koji će se u bitnome koristiti u nastavku.

2.1 Slaba konvergencija

U općenitim topološkim prostorima pojam konvergencije definira se na sljedeći način.

Definicija 2.1. *Neka je (X, τ) topološki prostor, $(x_n)_n \subseteq X$ niz i $x \in X$. Kažemo da niz $(x_n)_n$ konvergira prema točki x ako*

$$(\forall U \in \tau, x \in U)(\exists n_U \in \mathbb{N})(n > n_U \Rightarrow x_n \in U).$$

Konvergenciju niza označavamo s $x_n \to x$ ili $\lim_n x_n = x$. Točku x nazivamo i limes niza $(x_n)_n$.

Dakle, konvergencija niza uvelike ovisi o tome kako je definirana topologija prostora pa isti vektorski prostor s različitim topologijama može imati različite konvergentne nizove i različite limese istih konvergentnih nizova.

Primjer 2.1. Neka je X skup koji sadrži barem jedan element, $(X, \{\emptyset, X\})$ topološki prostor s indiskretnom topologijom, tj. s najmanjom mogućom topologijom na skupu X. Tada je svaki niz u tom topološkom prostoru konvergentan i konvergira prema svakoj drugoj točki tog prostora.

Pretpostavimo sada da skup X ima dodatnu strukturu, tj. da je normiran vektorski prostor. Tada je dobro definirana operacija oduzimanja točaka i postoji funkcija norme pa vidimo da je gornja definicija konvergencije ekvivalentna sljedećem:

$$(\exists x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N})(n > n_\varepsilon \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon).$$

Topologiju induciranu normom na normiranom prostoru X nazivamo jakom topologijom.

Definicija 2.2. *Potpun normiran prostor nazivamo* ***Banachov prostor****. Potpun unitaran prostor, tj. potpun prostor sa skalarnim produktom, nazivamo* ***Hilbertov prostor****.*

Uzmimo sada beskonačnodimenzionalni separabilni Hilbertov prostor X i njegovu ortonormiranu bazu $(e_n)_n$ (ONB u takvom prostoru postoji, dokaz se može pronaći u [4, str. 35]). Tada je $(e_n)_n \subseteq S(0,1)$, ali taj niz nema konvergentan podniz jer je $\|e_n - e_m\| = \sqrt{2}$, za svaki $n, m \in \mathbb{N}$, tj. postoje ograničeni nizovi koji nemaju konvergentan podniz. To je svojstvo koje smo izgubili s obzirom na konačnodimenzionalne prostore.

Gornja razmatranja motiviraju nas na definiciju nekih drugih topologija na beskonačnodimenzionalnim prostorima.

Definicija 2.3. *Linearan funkcional $f : X \to \mathbb{R}$* ***ograničen*** *je ako postoji konstanta $a > 0$ t.d. vrijedi*

$$|f(x)| \leq a\|x\|_X, \quad \forall x \in X.$$

Skup ograničenih linearnih funkcionala na X označavamo s X'.

Definicija 2.4. ***Slaba topologija*** *na normiranom prostoru X najmanja je topologija u kojoj su svi ograničeni funkcionali neprekidni. Označavamo je sa $\sigma(X, X')$. Niz $(x_n)_n$ konvergira slabo prema x ako konvergira u slaboj topologiji prema x. U oznaci $x_m \xrightarrow{w} x$ ili $(w)x_n \to x$ ili $x_n \rightharpoonup x$.*

Po Teoremu $A.1$ znamo kako je ograničenost linearnog operatora ekvivalentna neprekidnosti linearnog operatora u jakoj topologiji (tj. onoj induciranoj normom). Zaključujemo kako je slaba topologija slabija od topologije inducirane normom na tom prostoru. Lako se vidi da uvjet slabe konvergencije niza možemo zapisati i na sljedeći način: $(x_n)_n$ konvergira slabo prema x ako i samo ako

$$(\forall f \in X')(f(x_n) \to f(x)).$$

Jedan je smjer zbog neprekidnosti ograničenih linearnih funkcionala u slaboj topologiji trivijalan, drugi smjer dobije se raspisom uvjeta konvergencije preko baza okolina (opširnija rasprava dana je u [4, Poglavlje 5.]). Sada lako slijedi da je limes slabo konvergentnog niza jedinstven i da jaka konvergencija (tj. u normi) povlači slabu konvergenciju. Slaba konvergencija ima svojstvo da svaki ograničen niz u refleksivnom prostoru ima slabo konvergentan podniz što ćemo kasnije i pokazati.

Napomena 2.1. Jednu bazu slabe topologije na normiranom prostoru X čine skupovi oblika

$$B(x_0, f_1, \ldots, f_n, \varepsilon) := \{x \in X : |f_i(x - x_0)| < \varepsilon, 1 \leq i \leq n\}$$

za svaki $x_0 \in X$, svaki $\varepsilon > 0$, svaki $n \in \mathbb{N}$ te za sve $f_1, \ldots, f_n \in X'$.

Može se pokazati kako se slaba i jaka topologija podudaraju samo u konačnodimenzionalnim prostorima ([4, str. 84]). Kod beskonačnodimenzionalnih prostora razlika jake i slabe topologije vidi se već kod otvorenih okolina nule gdje otvorene okoline nule u slaboj topologiji sadrže cijele potprostore dok to kod jake topologije očito ne mora biti slučaj.

Definicija 2.5. *Slaba zvijezda topologija (u oznaci w^* ili slaba*) je slaba topologija na X' inducirana svim funkcionalima $\hat{x} : X' \to \mathbb{F}$ definiranim s $\hat{x}(f) := f(x)$ za svaki $x \in X$.*

Niz funkcionala $(f_n)_n \subseteq X'$ konvergira prema $f \in X'$ u slaboj* topologiji ako vrijedi

$$f_n(x) \to f(x), \quad \forall x \in X.$$

Slabu* konvergenciju označavamo s $f_n \overset{w^*}{\to} f$.

2.2 Geometrijske forme Hahn-Banachovog teorema

Za početak, prisjetimo se Hahn-Banachovog teorema.

Teorem 2.1 (Hahn-Banachov teorem za realne vektorske prostore). *Neka je X realan vektorski prostor te $p : X \to \mathbb{R}$ funkcija koja zadovoljava sljedeća svojstva:*

1. $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, $\forall \alpha > 0$, $\forall x \in X$;
2. $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in X$.

Neka je $Y \leq X$ potprostor te $l_0 : Y \to \mathbb{R}$ linearni funkcional koji zadovoljava $l_0(y) \leq p(y)$ za svaki $y \in Y$. Tada postoji linearni funkcional $l : X \to \mathbb{R}$ za koji vrijedi

$$l(y) = l_0(y) \ (\forall y \in Y), \quad l(x) \leq p(x) \ (\forall x \in X).$$

Funkcija $p : X \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava uvjete 1. i 2. iz prethodnog teorema naziva se **sublinearni funkcional**. Sublinearni funkcionali općenitiji su pojam od norme i polunorme s obzirom kako uvjet 1. vrijedi samo za strogo pozitivne skalare. Primjer jednog sublinearnog funkcionala koji nije polunorma ćemo dati kasnije.

Napomena 2.2. Uočimo kako prethodni teorem daje samo egzistenciju linearnog funkcionala koji ne mora biti ograničen, za razliku od sljedećeg teorema.

Teorem 2.2 (**Hahn-Banachov teorem za normirane prostore**)**.** *Neka je X normiran prostor, $Y \leq X$ potprostor i $f_0 \in Y'$. Tada postoji $f \in X'$ takav da vrijedi*

$$f(x) = f_0(x) \text{ za } \forall x \in Y \text{ te } \|f\|_{X'} = \|f_0\|_{Y'}.$$

Dokaz prethodna dva teorema može se pronaći u [9, str. 261-264] ili u [4, str. 64-66]. U nastavku će nam trebati geometrijske forme gornjeg teorema.

Teorem 2.3 (Prva geometrijska forma Hahn-Banachovog teorema)**.** *Neka je X realni normirani vektorski prostor, $A, B \subseteq X$, $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$ te $A \cap B = \emptyset$. Nadalje, neka je*

1. *A konveksan i otvoren;*
2. *B konveksan.*

Tada postoje $l \in X' \setminus \{0\}$ i $\gamma \in \mathbb{R}$ t.d. vrijedi

$$l(x) \leq \gamma \leq l(y), \qquad \forall x \in A,\ \forall y \in B.$$

Interpretacija 2.1. Teorem daje dva neovisna uvjeta. Prvi kaže kako djelovanjem funkcionala l na A dobivamo samo vrijednosti manje od $\gamma \in \mathbb{R}$, dok drugi tvrdi da djelovanjem funkcionala l na B dobivamo samo vrijednosti veće od γ. Zapravo smo podijelili prostor X na dva dijela sa skupom $l^{\leftarrow}[\{\gamma\}]$, od kojih jedan sadrži skup A, dok drugi sadrži skup B.

Dokaz. Uzmimo skup $C \subseteq X$ koji je neprazan, konveksan, otvoren i $0 \in C$. Definirajmo funkciju

$$p : X \to [0, \infty\rangle, \qquad p(x) := \inf\left\{b > 0 : \frac{x}{b} \in C\right\}. \tag{1}$$

1. Postoji $M > 0$ t.d. vrijedi $0 \leq p(x) \leq M\|x\|$ za svaki $x \in X$.
   C je otvoren i $0 \in C$ pa postoji $r > 0$ t.d. je $K(0, r) \subseteq C$. Za proizvoljni $x \in X$ i $b > \frac{\|x\|}{r}$ vrijedi $\frac{x}{b} \in K(0, r)$ pa je i $\frac{x}{b} \in C$. Zato imamo
   $$p(x) = \inf\left\{b > 0 : \frac{x}{b} \in C\right\} \leq \inf\left\{b > \frac{\|x\|}{r}\right\} = \frac{1}{r}\inf\{b > \|x\|\} = \frac{1}{r}\|x\|,$$
   odakle slijedi tvrdnja za $M := \frac{1}{r}$.

2. Vrijedi $C = \{x \in X : p(x) < 1\}$.
   Naime, C je otvoren pa za proizvoljni $x \in C$ postoji $\delta > 0$ t.d. je $(1 + \delta)x = \frac{x}{\frac{1}{1+\delta}} =: \frac{x}{b} \in C$, zato je
   $$p(x) = \inf\left\{b > 0 : \frac{x}{b} \in C\right\} \leq \frac{1}{1 + \delta} < 1.$$
   Za obrat, neka je $x \in X$ t.d. je $p(x) < 1$. Tada postoji $0 < b < 1$ t.d. je $\frac{x}{b} \in C$, a jer je C konveksan te sadrži ishodište to je $\left(b\frac{x}{b} + (1 - b)0\right) \in C$ tj. $x \in C$.

3. Za svaki $a > 0$ i svaki $x \in X$ vrijedi $p(ax) = ap(x)$.
   Neka je $a > 0$ i $x \in X$. Imamo
   $$p(ax) = \inf\left\{d > 0 : \frac{ax}{d} \in C\right\} = \inf\left\{ab > 0 : \frac{ax}{ab} = \frac{x}{b} \in C\right\} = ap(x).$$

4. Vrijedi $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$ za sve $x, y \in X$.
   Uzmimo $x, y \in X$ i $\varepsilon > 0$. Po prethodnim svojstvima vrijedi
   $$p\left(\frac{x}{p(x)+\varepsilon}\right) = \frac{p(x)}{p(x)+\varepsilon} < 1 \Rightarrow \frac{x}{p(x)+\varepsilon} \in C.$$
   Analogno, imamo i $\frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C$. Jer je C konveksan, to za svaki $\mu \in \langle 0,1\rangle$ vrijedi
   $$\mu\frac{x}{p(x)+\varepsilon} + (1-\mu)\frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C.$$
   Ako uzmemo $\mu := \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+\varepsilon} < 1$ dobivamo
   $$\frac{1}{p(x)+p(y)+\varepsilon}(x+y) \in C. \tag{2}$$
   Ako primjenimo funkciju p na izraz (2), imamo
   $$\frac{1}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}p(x+y) < 1$$
   tj.
   $$p(x+y) < p(x) + p(y) + 2\varepsilon.$$
   Pustimo li $\varepsilon \to 0$, slijedi tvrdnja.

Pretpostavimo sada kako je $C \subseteq X$ neprazan, konveksan i otvoren skup te neka je $y_0 \in X \setminus C$. Pokažimo kako postoji $l \in X'$ t.d.
$$l(x) < l(y_0), \quad \forall x \in C.$$
Prvo pretpostavimo kako je $0 \in C$ te neka je $p : X \to [0, \infty\rangle$ funkcija definirana kao u (1). Definirajmo $Y := [y_0]$, tj. kao linearnu ljusku vektora y_0. Potprostor Y dobro je definiran s obzirom kako je $y_0 \notin C$, a $0 \in C$. Nadalje, definirajmo funkcional $l_0 : Y \to \mathbb{R}$ kao $l_0(\alpha y_0) := \alpha$, za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$. Jer $y_o \notin C$, to je $p(y_0) \geq 1$ pa vrijedi
$$l_0(\alpha y_0) = \alpha \leq \alpha p(y_0) = p(\alpha y_0), \quad \forall \alpha \geq 0,$$
odnosno
$$l_0(\alpha y_0) = \alpha \leq 0 \leq p(\alpha y_0), \quad \forall \alpha < 0$$
tj. imamo
$$l_0(y) \leq p(y), \quad \forall y \in Y.$$
Po Hahn-Banachovu teoremu 2.1 slijedi kako postoji linearni funkcional $l : X \to \mathbb{R}$ t.d. vrijedi $l(y_0) = l_0(y_0) = 1$ i $l(x) \leq p(x)$ za svaki $x \in X$. Iz nejednakosti $p(x) \leq M\|x\|$ imamo
$$l(x) \leq p(x) \leq M\|x\|,$$

$$-l(x) = l(-x) \leq p(-x) \leq M\|x\|$$

odakle slijedi $|l(x)| \leq M\|x\|$ pa je $l \in X'$. Vrijedi $p(x) < 1$ pa za svaki $x \in C$ slijedi

$$l(x) \leq p(x) < 1 = l_0(y_0)$$

što smo i trebali pokazati. Očito je $l \neq 0$.
Pretpostavimo sada kako $0 \notin C$. Odaberimo proizvoljnu točku $x_0 \in C$ i definirajmo

$$D := \{x - x_0 : x \in C\}, \quad z_0 := y_0 - x_0.$$

Očito je $0 \in D$ i $z_0 \notin D$. Naime, kada bi bilo $z_0 \in D$, tada je $z_0 + x_0 = y_0 \in C$ što nije po pretpostavci $y_0 \notin C$. Po prethodno dokazanome slijedi kako postoji $l \in X'$ t.d. $l(x - x_0) < l(y_0 - x_0)$ za sve $(x - x_0) \in D$ odakle iz linearnosti funkcionala l slijedi $l(x) < l(y_0)$ za svaki $x \in C$.
Definirajmo skup

$$C := \bigcup_{y \in B} \{(x - y) \in X : x \in A\}.$$

Skup C otvoren je jer je unija otvorenih skupova. Također, skup C je konveksan. Uzmimo $x_1, x_2 \in A$ i $y_1, y_2 \in B$. Kako su A i B konveksni imamo

$$(\mu x_1 + (1-\mu)x_2) \in A, \quad (\mu y_1 + (1-\mu)y_2) \in B, \quad \forall \mu \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Definirajmo $z_1 := x_1 - y_1 \in C$ i $z_2 = x_2 - y_2 \in C$, tada je

$$\mu z_1 + (1-\mu)z_2 = (\mu x_1 + (1-\mu)x_2) - (\mu y_1 + (1-\mu)y_2) \in C$$

tj. skup C je konveksan (jer sve elemente skupa C možemo prikazati kao razliku elementa iz A i eleemnta iz B). Vrijedi $A \cap B = \emptyset$ pa $0 \notin C$. Po prije dokazanom slijedi kako postoji $l \in X' \setminus \{0\}$ t.d. $l(z) < l(0) = 0$ (ovdje je $y_0 = 0 \notin C$) za svaki $z \in C$, odnosno $l(x - y) < 0$ za svaki $x \in A$ i svaki $y \in B$. Zato možemo odabrati $\gamma \in \mathbb{R}$ t.d. vrijedi

$$l(x) \leq \gamma \leq \inf_{y \in B} l(y), \ \forall x \in A.$$

□

Funkcija $p : X \to [0, \infty\rangle$ iz dokaza prethodnog teorema naziva se Minkowskijev funkcional i to je primjer jednog sublinearnog funkcionala.

Teorem 2.4 (Druga geometrijska forma Hahn-Banachovog teorema)**.** *Neka je X realni normirani vektorski prostor, $A, K \subseteq X$, $A \neq \emptyset$, $K \neq \emptyset$ te $A \cap K = \emptyset$. Nadalje, neka je*

1. *A konveksan i zatvoren;*

2. *K konveksan i kompaktan.*

Tada postoji $l \in X'$, $\gamma \in \mathbb{R}$ i $\delta > 0$ t.d. vrijedi

$$l(x) \leq \gamma - \delta \leq \gamma + \delta \leq l(y), \quad \forall x \in A, \ \forall y \in K.$$

Interpretacija 2.2. Za razliku od prve geometrijske forme, ovdje smo dodatno razdijelili skupove $l[A]$ i $l[K]$ za neki broj strogo veći od nule, tj. najmanje za 2δ.

Dokaz. Fiksirajmo $r > 0$ i definirajmo skupove

$$A(r) := \bigcup_{x \in A} K(x, r), \qquad K(r) := \bigcup_{y \in K} K(y, r).$$

Skupovi $A(r)$ i $K(r)$ su neprazni, konveksni i otvoreni. Pokažimo kako postoji $r_0 > 0$ t.d. za svaki $r \leq r_0$ vrijedi $A(r) \cap K(r) = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, tada možemo odabrati nizove $(x_n)_n \subseteq A$ i $(y_n)_n \subseteq K$ t.d. vrijedi

$$x_n + v_n = y_n + w_n, \; \forall n \in \mathbb{N},$$

gdje su $(v_n)_n$ i $(w_n)_n$ nizovi t.d. $\lim_n v_n = 0$ i $\lim_n w_n = 0$. Naime, možemo promatrati $r := \frac{1}{n}$ te izabrati neku točku $z \in A\big(\frac{1}{n}\big) \cap K\big(\frac{1}{n}\big)$. Tada očito kugla $K(z, \frac{2}{n})$ siječe i A i K pa za x_n uzmemo proizvoljnu točku iz $K\big(z, \frac{2}{n}\big) \cap A$, dok za y_n uzmemo neku točku iz $K\big(z, \frac{2}{n}\big) \cap K$, tada je $\|v_n\|, \|w_n\| < \frac{2}{n}$ što nam i treba.

Kako je K kompaktan, tada postoji podniz $(y_{\sigma(n)})_n$ koji je konvergentan u K. Vrijedi $v_{\sigma(n)} \to 0$ i $w_{\sigma(n)} \to 0$ pa i $(x_{\sigma(n)})_n$ konvergira u X, a kako je A zatvoren, onda je $\lim_n x_{\sigma(n)} \in A$. Iz toga slijedi $\lim_n x_{\sigma(n)} = \lim_n y_{\sigma(n)} \in A \cap K$, što je kontradikcija. Zato postoji r_0 s gornjim svojstvom.

Za skupove $A(r_0)$ i $K(r_0)$ po prvoj geometrijskoj formi Hahn-Banachovog teorema 2.3 postoji $l \in X' \setminus \{0\}$ i $\gamma \in \mathbb{R}$ t.d. za svaki $x' \in A(r_0)$ i svaki $y' \in K(r_0)$ vrijedi

$$l(x') \leq \gamma \leq l(y'),$$

odnosno

$$l(x + v) \leq \gamma \leq l(y + w), \qquad \forall v, w \in X \text{ takve da je } \|v\|, \|w\| \leq r_0.$$

Posebno, možemo promatrati samo $v, w \in X$ t.d. je $\|v\|, \|w\| = r_0$ pa iz gornjeg slijedi

$$l(x) + \sup_{\|v\| = r_0} l(v) \leq \gamma \leq l(y) + \inf_{\|w\| = r_0} l(w).$$

Uočimo još kako je $\sup_{\|v\|=r_0} l(v) = r_0 \|l\|$ te je $\inf_{\|w\|=r_0} l(w) = -\sup_{\|w\|=r_0} l(w) = -r_0\|l\|$ prema teoremu $A.2$. Ako definiramo $\delta := r_0\|l\|$ ($\delta > 0$, jer je $l \neq 0$) slijedi tvrdnja. □

Napomena 2.3. Za razliku od prve geometrijske forme Hahn-Banachovog teorema, u drugoj geometrijskoj formi su oba promatrana skupa zatvorena.

2.3 Banach-Saks-Mazurov teorem

Kako bi skratili zapis u dokazu sljedećeg teorema, uvodimo definiciju konveksne ljuske.

Definicija 2.6. *Neka je $A \subseteq X$ neki skup. Definiramo*

$$\operatorname{Co} A := \bigcap_{A \subseteq K, \; K \textit{ konveksan}} K.$$

Skup $\operatorname{Co} A$ nazivamo ***konveksna ljuska*** *od A.*

Jasno je kako je konveksna ljuska ujedno i konveksan skup, tj. najmanji konveksan skup koji sadrži promatrani skup.

Teorem 2.5 (Banach-Saks-Mazur). *Neka je X realan normiran vektorski prostor, $(x_k)_k \subseteq X$ i $x \in X$ takav da $x_k \overset{w}{\to} x$.*

1. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje $\lambda_1^n, \lambda_2^n \ldots, \lambda_n^n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ t.d. $\sum_{k=1}^n \lambda_k^n = 1$ i*
$$y_n := \sum_{k=1}^n \lambda_k^n x_k, \quad y_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x.$$

2. *Ako je $C \subseteq X$ neprazan, jako zatvoren, konveksan i takav da je $(x_k)_k \subseteq C$, onda je i $x \in C$.*

3. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje $m(n) \in \mathbb{N}_0$, $\mu_k^n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gdje je $n \leq k \leq n + m(n)$ i $\sum_{k=n}^{n+m(n)} \mu_k^n = 1$ takvi da*
$$z_n := \sum_{k=n}^{n+m(n)} \mu_k^n x_k, \quad z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x.$$

Interpretacija 2.3. 1. Tvrdnja kaže kako za svaki slabo konvergentan niz možemo konstruirati jako konvergentan niz koji će konvergirati prema istom limesu, a da pritom n-ti član jako konvergentnog niza ovisi samo o prvih n članova slabo konvergentnog niza.

2. Otprije je poznato kako jako zatvoren skup sadrži sve limese jako konvergentnih nizova. Ova tvrdnja kaže kako imamo isti slučaj i kod slabo konvergentnih nizova uz dodatnu pretpostavku na konveksnost skupa. Dodatno, može se pokazati kako su takvi skupovi i slabo zatvoreni.

3. Konstruiramo jako konvergentan niz kojemu n-ti član ne ovisi ni o jednom od prvih n članova niza.

Dokaz. Definirajmo niz konveksnih skupova $A_n := \mathrm{Co}(\cup_{k=1}^n \{x_k\})$ i $A := \cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Uzmimo $x, y \in A$. Tada je $x \in A_n$ i $y \in A_m$ za neke $m, n \in \mathbb{N}$. Neka je bez smanjenja općenitosti $n < m$. Tada je $A_n \subseteq A_m$ pa iz konveksnosti od A_m slijedi $[x, y] \in A_m \subseteq A$. Dakle, A je konveksan.

Definirajmo $\rho_n = \inf_{w\in A_n} \|x - w\|$ i pokažimo da je $\lim_n \rho_n = 0$ (primijetimo da je x element prema kojem niz $(x_n)_n$ slabo konvergira). Kako je $(A_n)_n$ rastući niz, to je $(\rho_n)_n$ padajući niz. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\lim_n \rho_n = \rho > 0$ (niz $(\rho_n)_n$ je padajući i omeđen odozdo pa zato limes u svakom slučaju postoji), tj. $K(x, \rho) \cap A = \emptyset$. Iz prve geometrijske forme Hahn-Banachova teorema 2.3 (primijenjene na skupove A i $K(x, \rho)$) slijedi kako postoji $l \in X'$ i $\gamma \in \mathbb{R}$ t.d.
$$l(x + \rho v) = l(x) + \rho l(v) \leq \gamma \leq l(w), \quad \forall v \in K(0, 1), \ \forall w \in A.$$

Zajedno s Teoremom A.2, imamo
$$l(x) + \rho\|l\| = l(x) + \rho \sup_{\|v\|\leq 1} l(v) \leq l(w), \quad \forall w \in A.$$

Ako odaberemo $w = x_n$, tada imamo
$$l(x) + \underbrace{\rho\|l\|}_{>0} = l(x_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

što je kontradikcija jer $l(x_n) \to l(x)$ po definiciji slabe topologije. Dakle, $\inf_{w\in A_n} \|x - w\| \to 0$ kada $n \to \infty$ pa za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $y_n \in A_n$ takvi da $\|x - y_n\| \to 0$ (kako su A_n kompaktni, onda se infimum postiže u skupu). Budući da je $y_n \in A_n$, a A_n je konveksna ljuska od $\{x_1, \ldots, x_n\}$, vrijedi y_n oblika $y_n := \sum_{k=1}^n \lambda_k^n x_k$ gdje su $\lambda_1^n, \ldots, \lambda_n^n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ t.d. $\sum_{k=1}^n \lambda_k^n = 1$, čime je prva tvrdnja dokazana.

Kako je $y_n \in A_n$ i $A_n \subseteq C$ (jer je $(x_n)_n \subseteq C$ i C konveksan) vrijedi $y_n \in C$ pa jer je C jako zatvoren to je $x \in C$.

Za dokaz treće tvrdnje definirajmo $C_n := \mathrm{Co}(\cup_{k=n}^{\infty}\{x_k\})$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Fiksirajmo $n \in \mathbb{N}$. Tada je $x_m \in C_n \subseteq \overline{C}_n$ za svaki $m \geq n$ pa je po drugoj tvrdnji teorema i $x \in \overline{C}_n$. Kako se x nalazi u zatvaraču skupa C_n, zato postoji $z_n \in C_n$ takav da je $\|x - z_n\| < \frac{1}{n}$. Uočimo kako je

$$C_n = \lim_{m\to\infty} \mathrm{Co}\left(\bigcup_{k=n}^{m}\{x_k\}\right)$$

pa zato postoji niz $(y_m)_m$ takav da je $y_m \in \mathrm{Co}\cup_{k=n}^{m}\{x_k\}$ te takav da $y_m \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} z_n$. Za dovoljno velik $m \in \mathbb{N}$ vrijedi $\|y_m - z_n\| < \frac{1}{n}$, a po definiciji skupa $\mathrm{Co}\cup_{k=n}^{m}\{x_k\}$ slijedi kako je y_m oblika

$$y_m = \sum_{k=n}^{m} \alpha_k^m x_k, \qquad \sum_{k=n}^{m} \alpha_k^m = 1,\ \alpha_k^m \geq 0.$$

Naposljetku dobijemo

$$\|x - y_m\| \leq \|x - z_n\| + \|y_m - z_n\| \leq \frac{2}{n}$$

Zadnja tvrdnja ekvivalentna je sljedećem: za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje $m(n) \in \mathbb{N}_0$ i $\mu_k^n \geq 0$ za $n \leq k \leq n + m(n)$ takvi da vrijedi

$$\sum_{k=n}^{n+m(n)} \mu_k^n = 1, \qquad \lim_n \left\| x - \sum_{k=n}^{n+m(n)} \mu_k^n x_k \right\| = 0$$

odakle slijedi posljednja tvrdnja. □

2.4 Baze i bazni nizovi

Prisjetimo se pojma baze u općenitim normiranim Banachovim prostorima.

Definicija 2.7. *Neka je X Banachov prostor. Niz $(e_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ je* ***baza*** *za X ako za svaki $x \in X$ postoji jedinstveni niz skalara $(\alpha_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ takav da*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(x) e_n.$$

U prethodnoj definiciji bitna je jedinstvenost skalara α_n, kao i poredak vektora e_n.

Napomena 2.4. Promotrimo preslikavanja $e_n^* : X \to \mathbb{F}$, $e_n^*(x) := \alpha_n(x)$ za $n \in \mathbb{N}$. Tada je očito $e_n^* \in X^*$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ te vrijedi

1. $e_n^*(e_m) = \delta_{nm}$;
2. za svaki $x \in X$ vrijedi

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^*(x) e_n.$$

Funkcionale e_n^* nazivamo biortogonalni funkcionali te kažemo da je baza **Schauderova** ako su svi funkcionali e_n^* neprekidni. Na Banachovim prostorima može se pokazati kako su pojmovi baze i Schauderove baze ekvivalentni, tj. na Banachovim prostorima vrijedi $e_n^* \in X'$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ (dokaz se može pronaći u [1, str. 3],), što je posljedica teorema o zatvorenom grafu ([4, str. 103]).

Definicija 2.8. *Neka je X Banachov prostor. Niz $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ je* ***bazni niz*** *ako je $(x_n)_n$ baza za $[\{x_n : n \in \mathbb{N}\}]$, tj. za zatvarač linearne ljuske tog niza.*

Napomena 2.5. Uočimo kako su svi elementi baznog niza različiti jer tvore bazu nekog zatvorenog potprostora u X. Kada bi postojali $m, n \in \mathbb{N}$ t.d. je $x_m = x_n$, tada bi za $x := x_m$ imali dvije mogućnosti u zapisu preko baze, tj. $x = 1 \cdot x_m = 1 \cdot x_n$ što je kontradikcija s jedinstvenosti niza skalara u zapisu elementa preko baze. Zbog ovoga je za bazni niz $(x_n)_n$ ekvivalentno:

1. $(x_n)_n$ ima gomilište x;
2. skup $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ ima gomilište x.

Napomena 2.6. Razlika između baze i baznog niza je ta što bazni niz ne treba biti baza za cijeli prostor X, već samo za neki zatvoreni potprostor. Isto tako, bazni niz se utoliko razlikuje i od fundamentalnog niza koji razapinje cijeli prostor, ali nije mu baza.

Definicija 2.9. *Neka je X topološki prostor i $A \subseteq X$.*

1. *Skup A je* ***slabo kompaktan*** *ako je A kompaktan u slaboj topologiji prostora X. Skup A je relativno slabo kompaktan ako je slabi zatvarač skupa A kompaktan u slaboj topologiji prostora X.*
2. *Skup A je (slabo)* ***nizovno kompaktan*** *ako svaki niz u A ima podniz koji (slabo) konvergira prema nekoj točki iz A. Skup A je relativno nizovno kompaktan ako svaki niz u A ima podniz koji konvergira prema nekoj točki iz X.*
3. *Skup A je (slabo)* ***prebrojivo kompaktan*** *ako svaki niz u A ima (slabo) gomilište u A. Skup A je relativno prebrojivo kompaktan ako svaki niz u A ima gomilište u X.*

Napomena 2.7. U metričkim prostorima gornje tri definicije kompaktnih skupova su ekvivalentne po Teoremu $C.4$.

Lema 2.1. *Neka je $(x_n)_n$ bazni niz u Banachovom prostoru i x slabo gomilište tog niza. Tada je $x = 0$.*

Dokaz. Kako je x slabo gomilište niza $(x_n)_n$, onda je i slabo gomilište konveksnog skupa $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$, tj. linearne ljuske niza $(x_n)_n$ prema Napomeni 2.5. Po tvrdnji 1. Banach-Saks-Mazurovog teoremu 2.5 slijedi kako postoji niz $(y_n)_n$ koji jako konvergira prema x, tj. $y_n \to x$ te y_k ovisi o prvih k članova niza $(x_n)_n$ zbog čega je $(y_n)_n \subseteq \langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$. To upravo znači da je x sadržan u zatvaraču skupa $\langle x_n : n \in \mathbb{N}\rangle$ prema Teoremu $C.2$, tj. $x \in [\{x_n : n \in \mathbb{N}\}]$. Kako je $(x_n)_n$ baza za $[\{x_n : n \in \mathbb{N}\}]$, možemo zapisati x kao

$$x = \sum_{n \in \mathbb{N}} x_n^*(x) x_n$$

gdje su x_n^* biortogonalni funkcionali baze $(x_n)_n$. Jer je x slabo gomilište niza $(x_n)_n$, to znači da je $f(x)$ gomilište niza $(f(x_m))_m$ za svaki $f \in X'$. Kako su prema Napomeni 2.4 funkcionali x_n^*

neprekidni, to je $x_n^*(x)$ gomilište niza $(x_n^*(x_m))_{m\in\mathbb{N}}$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Po definiciji biortogonalnih funkcionala, vrijedi $x_n^*(x_m) = 0$ za svaki $n \neq m$ zbog čega su svi članovi niza $(x_n^*(x_m))_{m\in\mathbb{N}}$ jednaki nuli nakon n-tog mjesta pa mora biti $x = 0$ kao gomilište tog niza. □

Lema 2.2. *Neka je A (relativno) slabo prebrojivo kompaktan podskup Banachovog prostora X. Pretpostavimo da je $x \in X$ jedino gomilište niza $(x_n)_n \subseteq A$. Tada $(x_n)_n$ konvergira slabo prema x.*

Dokaz. Pretpostavimo kako $(x_n)_n$ ne konvergira slabo prema x. Tada za neki $f \in X'$ niz $(f(x_n))_n$ ne konvergira prema $f(x)$ pa možemo odabrati podniz $(f(x_{n_k}))_k$ tako da vrijedi

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} |f(x) - f(x_{n_k})| > 0.$$

To je kontradikcija jer je x slabo gomilište niza $(x_n)_n$ pa i niza $(x_{n_k})_k$ (uočimo kako $(x_{n_k})_k \subseteq A$ mora imati gomilište jer je A prebrojivo kompaktan, a s obzirom kako je x jedino gomilište niza $(x_n)_n$, to može biti samo točka x). □

Teorem 2.6. *Neka je X Banachov prostor te $S \subseteq X$ omeđen skup za kojeg vrijedi $0 \notin \overline{S}$, tj. nula se ne nalazi u jakom zatvaraču skupa S. Tada je ekvivalentno:*

1. *S ne sadrži bazni niz;*
2. *S je relativno slabo kompaktan skup i slabi zatvarač skupa S ne sadrži nulu, tj. $\overline{S}^w$ je slabo komapktan i $0 \notin \overline{S}^w$.*

Dokaz se može pronaći u [1, str. 22].

2.5 Banach-Eberlein-Šmulianov teorem

Idući veći teorem funkcionalne analize koji će nam trebati u nastavku je Banach-Eberlein-Šmulianov teorem. Za normiran prostor X definirajmo preslikavanje

$$\varphi : X \to X'', \quad \varphi(x) = \hat{x} \tag{3}$$

gdje je $\hat{x}(f) := f(x)$.

Definicija 2.10. *Normiran prostor X **refleksivan** je ako je preslikavanje φ definirano u (3) surjektivno.*

Teorem 2.7. *Sljedeći Banachovi prostori refleksivni su:*

1. *konačno-dimenzionalni normirani vektorski prostori;*
2. *Hilbertovi prostori;*
3. *zatvoreni podskupovi refleksivnog Banachovog prostora;*
4. *dualni prostor refleksivnog Banachovog prostora;*
5. *prostori l^p i $L^p(U)$ za $1 < p < \infty$ gdje je $U \subseteq \mathbb{R}^N$, U otvoren.*

Dokaz. Dokažimo samo treću tvrdnju koju ćemo iskoristiti u dokazu refleksivnosti Soboljevljevih prostora.
Za proizvoljni $y'' \in Y''$ trebamo pokazati kako postoji $y \in Y$ za koji vrijedi $y''(y') = y'(y)$ za svaki $y' \in Y'$.
Neka je Y zatvoren potprostor normiranog refleksivnog prostora X i $y'' \in Y''$ proizvoljan. Promotrimo linearni funkcional

$$x'' : X' \to \mathbb{F}, \quad x''(x') := y''(x'|_Y).$$

Taj linearni funkcional je neprekidan zbog

$$|y''(x'|_Y)| \leq \|y''\|\|x'|_Y\| \leq \|y''\|\|x'\|, \quad \forall x' \in X'.$$

Zato je $x'' \in X''$, a kako je X refleksivan, postoji $y \in X$ za kojeg je

$$x'(y) = x''(x') = y''(x'|_Y), \quad \forall x' \in X'.$$

Posebno je $x'(y) = 0$ za sve $x' \in X'$ za koje je $x'|_Y = 0$ pa zaključujemo kako je $y \in Y$ (kada bi bilo $y \in X \setminus Y$, tada bi po Teoremu A.10 postojao funkcional $x' \in X'$ za kojeg je $x'|_Y = 0$ i $x'(y) = d(y, Y) > 0$ gdje je $d(y, Y) > 0$ jer je Y zatvoren potprostor). Za proizvoljni $y' \in Y'$, neka je $x' \in X'$ neko proširenje funkcionala y' (koje postoji po Hahn-Banachovom teoremu 2.2). Tada vrijedi $y' = x'|_Y$ i imamo

$$y''(y') = y''(x'|_Y) = x'|_Y(y) = y'(y).$$

Za proizvoljni $y'' \in Y''$ smo našli pripadni $y \in Y$ za kojeg vrijedi $y''(y') = y'(y)$ pa zaključujemo kako je Y refleksivan prostor. □

Ostatak dokaza može se pronaći u [9, str. 298].

Napomena 2.8. Pretpostavimo kako je $A \subseteq X$ slabo prebrojivo komapaktan, gdje je X normiran Banachov prostor. Tada je nužno A omeđen skup. Pretpostavimo suprotno, tada A nije ni slabo omeđen skup, tj. postoji funkcional $f \in X'$ za koji vrijedi $\sup_{a \in A} |f(a)| = \infty$. Posebno, postoji niz $(a_n)_n \subseteq A$ za koji vrijedi $|f(a_n)| = n$, tj. $\lim_n |f(a_n)| = \infty$ te ima gomilište a jer je sadržan u A. Tada za svaki $\varepsilon > 0$ kugla $K(a, \varepsilon)$ sadrži beskonačno članova niza $(a_n)_n$ što je nemoguće jer je $f[\overline{K}(a, \varepsilon)]$ kompaktan skup u $\mathbb{R}$, a vrijedi $\lim_n |f(a_n)| = \infty$.

Teorem 2.8. *Neka je X Banachov prostor i $A \subseteq X$. Ekvivalentno je:*

1. *A je (relativno) slabo kompaktan;*
2. *A je (relativno) slabo nizovno kompaktan;*
3. *A je (relativno) slabo prebrojivo kompaktan.*

Dokaz. Iz definicija očito vrijedi 1. ⇒ 3. i 2. ⇒ 3. Pokažimo relativne obrate (analogno se dokazuje ne relativni slučaj). Prije svega, uočimo da je A omeđen zbog Napomene 2.8 i jer svaka pretpostavka na A implicira slabu prebrojivu kompaktnost.

(i) 3. ⇒ 2. Proizvoljan niz u A ima slabo gomilište u X te trebamo pokazati kako sadrži podniz koji slabo konvergira prema nekoj točki iz X.
Neka je $(x_n)_n \subseteq A$ neki niz. Po pretpostavci postoji slabo gomilište x niza $(x_n)_n$. Ako za beskonačno članova niza vrijedi $x_n = x$ tada smo gotovi. Zato pretpostavimo kako za svaki

član niza vrijedi $x_n \neq x$. Ako se x nalazi u jakom zatvaraču skupa $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, tada postoji podniz $(x_{n_k})_k$ koji konvergira jako prema x (pa i slabo) te smo gotovi.
Ukoliko x nije u jakom zatvaraču, definirajmo skup

$$S := \{x_n - x : n \in \mathbb{N}\}.$$

Kako x nije u jakom zatvaraču skupa $(x_n)_n$, vrijedi $0 \notin \overline{S}$, a budući da je x slabo gomilište niza $(x_n)_n$, to upravo znači da je $0 \in \overline{S}^w$. Zato možemo primijeniti Teorem 2.6 prema kojem postoji bazni niz $(y_k - x)_k$ sadržan u S. Vrijedi

$$(y_k)_k \subseteq (x_n)_n \subseteq A$$

pa $(y_k)_k$ ima slabo gomilište y. Zbog linearnosti funkcionala je $y - x$ slabo gomilište niza $(y_k - x)_k$ koji je bazni niz pa možemo primijeniti Lemu 2.1 prema kojoj je $y - x = 0$, tj. $y = x$. Dakle svako gomilište niza $(y_k)_k$ jednako je x, tj. $(y_k)_k$ ima samo jedno gomilište. Prema Lemi 2.2 slijedi kako niz $(y_k)_k$ slabo konvergira prema x odakle slijedi tvrdnja.

(ii) 3. $\Rightarrow$ 1. Pretpostavimo suprotno, tj. neka A nije relativno slabo kompaktan. Neka je

$$\varphi : X \to X''$$

ulaganje definrano u (3). Kako je A omeđen, prema Banach-Alaogluovom teoremu $A.7$ slijedi kako je slabi* zatvarač $W := \overline{\varphi[A]}^{w^*}$ slabo* kompaktan[1] u X''. Jer je A omeđen i nije (relativno) slabo kompaktan, to po Teoremu $A.9$ vrijedi

$$W \nsubseteq \varphi[X].$$

Zato postoji $x'' \in W \setminus \varphi[X] \subseteq X''$. Tada je $x'' \neq 0$ pa možemo odabrati $f \in X'$ za koji vrijedi $x''(f) > 1$. Definirajmo skup

$$A_0 := \{x \in A : f(x) > 1\} \subseteq A.$$

Pokažimo kako skup A_0 nije relativno slabo kompaktan. Uzmimo slabo* otvorenu okolinu U elementa x'' i promotrimo skup

$$V := U \cap \{y'' \in X'' : y''(f) > 1\}.$$

Očito je $x'' \in V$, a kako je V presjek dva slabo* otvorena skupa tada je i sam slabo* otvoren. Zato je V isto slabo* otvorena okolina elementa x''. Vrijedi [2]

$$V \cap \varphi[A] \neq \emptyset$$

jer je $x'' \in W$. Ako raspišemo uvjet skupa $\varphi[A_0]$ dobivamo

$$\varphi[A_0] = \{\varphi(x) : x \in A,\ f(x) > 1\} = \{\hat{x} \in X'' : x \in A,\ \hat{x}(f) > 1\}^3$$

[1]Kako je A omeđen, tada je i $\varphi[A]$ omeđen pa je sadržan u nekoj zatvorenoj kugli prostora X'' koja je po Banach-Alaogluovom teoremu slabo* kompaktna pa i slabo* zatvorena. Nadalje, slabi* zatvarač skupa $\varphi[A]$ onda je sadržan toj istoj kugli. Dakle, slabi* zatvarač skupa $\varphi[A]$ je slabo* zatvoren podskup nekog slabo* kompaktnog skupa pa je i sam slabo* kompaktan.

[2]Ako je $x \in \overline{A}$ i U otvorena okolina točke x, tada je općenito $U \cap A \neq \emptyset$.

[3]Ovdje možemo zamijeniti uvjet $f(x) > 1$ s uvjetom $\hat{x}(f) > 1$ jer gledamo samo $x \in A \subseteq X$ pa je dobro definirana funkcija $\hat{x}$. To ne bi mogli napraviti da nema uvjeta $x \in A$.

što je upravo uvjet na skup V zbog čega vrijedi

$$\emptyset \neq V \cap \varphi[A] = V \cap \varphi[A_0].$$

Zato vrijedi

$$U \cap \varphi[A_0] \neq \emptyset,$$

tj. proizvoljna slabo* otvorena okolina elementa x'' siječe skup $\varphi[A_0]$ pa vrijedi

$$x'' \in \overline{\varphi[A_0]}^{w^*}. \tag{4}$$

Kako je $A_0 \subseteq A$, tada je i omeđen skup, ali po (4) vrijedi

$$\overline{\varphi[A_0]}^{w^*} \nsubseteq \varphi[X]$$

pa po Teoremu A.9 slijedi kako A_0 nije relativno slabo kompaktan. Očito vrijedi $0 \notin \overline{A_0}$ (jer je $f \in X'$, tj. f je neprekidan) pa po Teoremu 2.6 postoji bazni niz $(x_n)_n \subseteq A_0$. Posebno, niz $(x_n)_n$ se nalazi u A pa ima slabo gomilište $x \in X$. Po Lemi 2.1 vrijedi $x = 0$, no to je nemoguće jer po definiciji skupa A_0 vrijedi $f(x_n) > 1$, tj. ne može postojati podniz $(x_{n_k})_k$ takav da

$$1 < f(x_{n_k}) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x) = 0.$$

Skup A je relativno slabo kompaktan.

□

Teorem 2.9 (**Banach-Eberlein-Šmulian**). *Neka je X normiran Banachov prostor. Svaki omeđen niz ima slabo konvergentan podniz ako i samo ako je prostor X refleksivan.*

Dokaz. Uzmimo omeđen niz $(x_n)_n$ u X. Tada je $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\| =: M < \infty$. Prema Teoremu 2.8 skup $K(0, M)$ je slabo kompaktan ako i samo ako je slabo nizovno kompaktan dok je po Kakutanijevom teoremu A.8 zatvorena kugla $K(0, M)$ slabo komapktna ako i samo ako je X refleksivan prostor. □

Šmulian je dokazao 1940. jedan smjer gornjeg teorema, tj. da slaba kompaktnost povlači slabu nizovnu kompaktnost. Puno teži obrat dokazao je Eberlein 1947. godine čiji dokaz se uvelike razlikuje od ovog ovdje. Većina rezultata potrebnih za dokazivanje ovog teorema mogli su se već pronaći i u Banachovoj knjizi iz 1930.
Nešto drukčiji (elementarniji, ali značajno duži) dokaz može se pronaći u [26, dodatak V., str. 141].

Banach-Eberlein-Šmulianov teorem kaže kako se na refleksivnim prostorima slaba topologija ponaša kao metrizabilna topologija, sukladno Napomeni 2.7. Dokaz Banach-Eberlein-Šmulianovog teorema preko metrizabilnosti slabo kompaktnih skupova može se pronaći u [19, str. 130.-136].

3 Soboljevljevi prostori

Za $U \subseteq \mathbb{R}^n$ definirajmo skup

$$\mathcal{D}(U) := C_c^\infty(U) = \{f \in C^\infty(U) | f : U \to \mathbb{R},\ \text{supp}(f) \text{ kompaktan je podskup od } U\}$$

gdje je $\text{supp}(f) = \overline{\{x \in U : f(x) \neq 0\}}$. Dakle, za $f \in \mathcal{D}(U)$ postoji $M_f > 0$ takav da za svaki $x \notin K(0, M_f)$ vrijedi $f(x) = 0$.

3.1 Slabe derivacije

Kako bi motivirali definiciju slabih derivacija dokažimo sljedeću jednostavnu propoziciju.

Propozicija 3.1. *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$, U otvoren, $m \in \mathbb{N}$ i $v \in C^m(U)$. Tada je*

$$\int_U (\partial^\alpha v) f dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \partial^\alpha f dx, \qquad \forall f \in \mathcal{D}(U)$$

gdje je multiindeks α takav da je $|\alpha| \leq m$.

Interpretacija 3.1. Uočimo kako se radi o istoj tvrdnji kao kod parcijalne integracije, no bez rubnog člana što je rezultat činjenice da je $\text{supp}(f)$ kompaktan.

Dokaz. Neka je $m = 1$ i $v \in C^1(U)$. Tada su po Lebesgueovom teoremu integrali $\int_U f \partial_i v dx$ dobro definirani za svaki $i \in \{1, \dots, N\}$ i $w := vf$ ima kompaktan nosač. Definirajmo

$$\hat{w} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad \hat{w}(x) := \begin{cases} w(x), & x \in U \\ 0, & x \notin U \end{cases}.$$

Postoji $M > 0$ t.d. je $\text{supp}(\hat{w}) \subseteq \langle -M, M \rangle^n$. Računamo

$$\int_U \partial_i w dx = \int_{\langle -M, M \rangle^n} \partial_i \hat{w} dx \overset{\text{Fubini}}{=}$$

$$= \int_{\langle -M, M \rangle^{n-1}} \Big(\int_{-M}^{M} \partial_i \hat{w}(x_1, \dots, t, x_{i+1}, \dots, x_n) dt \Big) dx_1 \dots \widehat{dx_i} \dots dx_n = 0$$

jer je $\hat{w}(x_1, \dots, \pm M, x_{i+1}, \dots, x_n) = 0$ prema izboru broja M. Iz definicije funkcije w slijedi tvrdnja. Analogno se pokaže za $m > 1$. $\square$

Definicija 3.1. *Neka je $v \in L^1_{loc}(U)$[4] i α multiindeks t.d. $|\alpha| \geq 1$. Svaka funkcija $v^\alpha \in L^1_{loc}(U)$ koja zadovoljava uvjet*

$$\int_U v^\alpha f dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \partial^\alpha f dx, \qquad \forall f \in \mathcal{D}(U) \tag{5}$$

*naziva se **slaba** (parcijalna) **derivacija** funkcije v. Za funkciju koja ima slabu derivaciju kažemo da je slabo derivabilna.*

[4] L^1_{loc} prostor je izmjerivih funkcija $f : U \to \mathbb{R}$ koje su integrabilne na svakom kompaktu $K \subseteq U$, tj. t.d. je $f|_K \in L^1(K)$

Primijetimo kako još nemamo dobru definiranost, tj. jedinstvenost slabih derivacija. Zato nam treba sljedeća lema.

Lema 3.1 (Osnovna lema varijacijskog računa)**.** *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$, U otvoren i $v \in L^1_{loc}(U)$ takva da vrijedi*

$$\int_U vf dx = 0, \quad \forall f \in \mathcal{D}(U).$$

Tada je $v = 0$.

Dokaz se može pronaći u [13, Lema 8.4 i Lema 8.5]. Dokažimo sada jedinstvenost slabe derivacije i činjenicu da je ista poopćenje parcijalne derivacije.

Teorem 3.1. *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$, U otvoren, $v \in L^1_{loc}(U)$ i α multiindeks takav da $|\alpha| \geq 1$. Tada je slaba derivacija v^α jedinstvena. Dodatno, vrijedi $v^\alpha = \partial^\alpha v$ ako je $v \in C^{|\alpha|}(U)$.*

Dokaz. Neka su $v^\alpha, w^\alpha \in L^1_{loc}(U)$ takvi da je

$$\int_U v^\alpha f dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \partial^\alpha f dx = \int_U w^\alpha f dx, \quad \forall f \in \mathcal{D}(U)$$

Po osnovnoj lemi varijacijskog računa 3.1 dobijemo $v^\alpha - w^\alpha = 0$ čime je dokazana prva tvrdnja. Nadalje,

$$\int_U (\partial^\alpha v) f dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v \partial^\alpha f dx = \int_U v^\alpha f dx, \quad \forall f \in \mathcal{D}(U)$$

gdje prva jednakost slijedi iz Propozicije 3.1, a druga iz definicije slabe derivacije. Opet je po osnovnoj lemi varijacijskog računa 3.1 $v^\alpha - \partial^\alpha v = 0$. □

Distribucija T antilinearan je funkcional na $\mathcal{D}(U)$ koji zadovoljava

$$(\forall K \in \mathcal{K}(U))(\exists m \in \mathbb{N})(\exists C > 0)(\forall \varphi \in \mathcal{D}(U)) \quad \operatorname{supp} \varphi \subseteq K \Rightarrow |\langle T, \varphi \rangle| \leq C \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K)}$$

gdje je $\mathcal{K}(U)$ skup svih kompaktnih skupova koji su sadržani u U, a s $\langle T, \varphi \rangle := T(\varphi)$ označeno je djelovanje distribucije T na funkciju φ. Poznato je da svaka funkcija $f \in L^1_{loc}(U)$ definira distribuciju koja je dana formulom

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_U f(x) \overline{\varphi}(x) dx.$$

U teoriji distribucija derivaciju distribucije određene fukcijom definiramo na način da vrijedi $\partial_j T_f := T_{\partial_j f}$ (zatim se ta definicija proširi i na ostale distribucije) pa dobivamo

$$\langle T_{\partial_j f}, \varphi \rangle = \int (\partial_j f)(x) \overline{\varphi}(x) dx \overset{P.I.}{=} -\int f(x) \partial_j \overline{\varphi}(x) dx = -\langle T_f, \partial_j \varphi \rangle.$$

Vrijedi

$$|\langle \partial_j T, \varphi \rangle| = |\langle T, \partial_j \varphi \rangle| \leq C \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha \partial_j \varphi\|_{L^\infty(K)} \leq C \max_{|\alpha| \leq m+1} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^\infty(K)}$$

te su ovako definirane derivacije doista i distribucije, tj. zadovoljavaju gornju definiciju. Indukcijom se dalje pokaže da vrijedi

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$$

pa su slabe derivacije zapravo derivacije funkcije ukoliko na njih promatramo kao na distribucije.

3.2 Definicija i osnovna svojstva Soboljevljevih prostora

Kako bi pojednostavnili zapis, nadalje ćemo s istom oznakom $\partial^\alpha v$ označavati i obične i slabe derivacije. Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$, U otvoren.

Definicija 3.2. *Neka je $m \in \mathbb{N}$ i $p \in [1, +\infty]$. Definiramo* ***Soboljevljev prostor*** *kao*

$$W^{m,p}(U) := \{v \in L^p(U) : \exists \partial^\alpha v, \partial^\alpha v \in L^p(U),\ \forall \alpha, 1 \leq |\alpha| \leq m\}$$

Dodatno, definiramo $H^m(U) := W^{m,2}(U)$.

Napomena 3.1. Vrijedi $W^{m,p}(U) < L^p(U)$.

Primjer 3.1. Za $m = 1$ i $n = 1$ uzmimo $U := \langle 0, 1\rangle$. Definirajmo funkciju

$$f : \langle 0, 1\rangle \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \begin{cases} 0, & x \in \langle 0, \frac{1}{2}\rangle \\ 1, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right\rangle \end{cases}.$$

Očito je $f \in L^p(U)$, ali funkcija f ne posjeduje slabu derivaciju prvog reda u prostoru $L^p(U)$. Kada bi postojala slaba derivacija prvog reda ∂f, tada bi vrijedilo

$$\int_0^1 \partial f(x) g(x) dx = -\int_0^1 f(x) g'(x) dx = -\int_{\frac{1}{2}}^1 g'(x) dx = -\Big[g(1) - g\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big] = g\Big(\frac{1}{2}\Big), \quad \forall g \in \mathcal{D}(\langle 0, 1\rangle).$$

S druge strane, ako postoji ∂f, ona mora g.s. biti jednaka nuli po definiciji funkcije f. Zato dobivamo

$$0 = \int_0^1 \partial f(x) g(x) dx = g\Big(\frac{1}{2}\Big)$$

što je očito kontradikcija jer postoje funkcije $g \in \mathcal{D}(\langle 0, 1\rangle)$ takve da je $g\big(\frac{1}{2}\big) \neq 0$. Vrijedi $W^{1,p}(U) \subsetneq L^p(U)$. Slično se pokaže i za $n > 1$.

Na Soboljevljevim prostorima definiramo norme na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \|v\|_{m,p,U} &:= \left(\int_U \sum_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha v|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha v\|^p_{L^p(U)}\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p \leq \infty, \\ \|v\|_{m,p,U} &:= \max_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha v\|_{L^\infty(U)}, \quad p = \infty. \end{aligned} \tag{6}$$

U nastavku ćemo dokazati neka od osnovnih svojstava Soboljevljevih prostora.

Teorem 3.2. *Gore definirana preslikavanja* (6) *su norme na $W^{m,p}(U)$ te su prostori $W^{m,p}(U)$ Banachovi (s obzirom na te norme) za svaki $m \in \mathbb{N}$ i svaki $p \in [1, \infty]$.*

Dokaz. Lagano slijedi kako su gornja preslikavanja norme na $W^{m,p}(U)$. Pokažimo potpunost prostora. Uzmimo Cauchyjev niz $(v_k)_k \subseteq W^{m,p}(U)$. Iz definicije norme na $W^{m,p}(U)$ očito je

$$\|\partial^\alpha v_k - \partial^\alpha v_l\|^p_{L^p(U)} \leq \|v_k - v_l\|^p_{m,p,U}, \quad \forall k, l \in \mathbb{N},\ \forall \alpha,\ |\alpha| \leq m$$

pa kako je $(v_k)_k$ Cauchyjev niz to je i $(\partial^\alpha v_k)_k$ Cauchyjev u $L^p(U)$. $L^p(U)$ je potpun prema Teoremu 1.1, zato postoje funkcije $v^\alpha \in L^p(U)$ za svaki α, $0 \leq |\alpha| \leq m$ takve da

$$\|\partial^\alpha v_k - v^\alpha\|_{L^p(U)} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{7}$$

Posebno, za neku funkciju $v^0 \in L^p(U)$ vrijedi i

$$\|v_k - v^0\|_{L^p(U)} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Budući da su funkcije $v_k \in W^{m,p}(U)$, postoje slabe derivacije reda α, $|\alpha| \leq m$ pa za svaku funkciju $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ vrijedi

$$\int_U (\partial^\alpha v_k)\varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v_k \partial^\alpha \varphi dx \tag{8}$$

za sve α, $1 \leq |\alpha| \leq m$ i sve $k \geq 1$. Dalje računamo

$$\left| \int_U (\partial^\alpha v_k)\varphi dx - \int_U v^\alpha \varphi dx \right| \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|\partial^\alpha v_k - v^\alpha\|_{L^p(U)} \|\varphi\|_{L^q(U)} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

$$\left| \int_U v_k \partial^\alpha \varphi dx - \int_U v^0 \partial^\alpha \varphi dx \right| \stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|v_k - v^0\|_{L^p(U)} \|\partial^\alpha \varphi\|_{L^q(U)} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

gdje norme teže prema nuli zbog (7). Dobivamo da je

$$\int_U (\partial^\alpha v_k)\varphi dx = \int_U v^\alpha \varphi dx, \qquad \int_U v_k \partial^\alpha \varphi dx = \int_U v^0 \partial^\alpha \varphi dx$$

pa vraćanjem u (8) zaključujemo

$$\int_U v^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_U v^0 \partial^\alpha \varphi dx, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

Slijedi da je $v^0 \in W^{m,p}(U)$ sa slabim derivacijama v^α za $1 \leq |\alpha| \leq m$, a iz defincije norme vrijedi i

$$\|v_k - v^0\|_{m,p,U} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \underbrace{\|\partial^\alpha v_k - \partial^\alpha v^0\|^p_{L^p(U)}}_{\to 0} \right)^{\frac{1}{p}} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

pa je v^0 limes polaznog Cauchyjevog niza. Time smo pokazali kako je prostor $W^{m,p}(U)$ Banachov. □

Teorem 3.3. *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^N$, U otvoren. Za svaki $m \in \mathbb{N}$ vrijedi:*

1. *prostor $W^{m,p}(U)$ separabilan je za $1 \leq p < \infty$ te je refleksivan za $1 < p < \infty$;*
2. *prostor $H^m(U)$ je Hilbertov prostor.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $m = 1$. Tada na prostor $W^{1,p}(U)$ možemo gledati kao na normirani vektorski prostor

$$A := \Big\{(v_0, \cdots, v_N) \in (L^p(U))^{N+1} : \int_U v_i \varphi dx = -\int_U v_0 \partial_i \varphi dx, \forall \varphi \in \mathcal{D}(U), 1 \le i \le N\Big\}.$$

Naime, svaku funkciju $v \in W^{1,p}(U)$ poistovijetili smo s $(N+1)$-torkom na način da je $v_0 = v$, a $v_i = \partial_i v$, dodatnim uvjetom skupa rekli smo kako sve slabe derivacije postoje te su po definiciji u $L^p(U)$ pa je izomorfizam između $W^{1,p}(U)$ i A očit. Sada je jasno kako je $W^{1,p}(U)$ separabilan jer je A podskup prostora $(L^p(U))^{N+1}$ koji je separabilan po Teoremu 1.2.

Za $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ definirajmo funkciju $f_\varphi : (L^p(U))^{N+1} \to \mathbb{R}^N$ kao

$$f_\varphi(v_0, \cdots, v_N) = \left(\int_U v_1 \varphi dx + \int_U v_0 \partial_1 \varphi dx, \dots, \int_U v_N \varphi dx + \int_U v_0 \partial_N \varphi dx\right).$$

Očito su funkcije f_φ neprekidne za svaki $\varphi \in \mathcal{D}(U)$ (uočimo kako ovdje nije važno što funkcije v_i možda nisu neprekidne jer su one varijable funkciji f_φ). Skup A možemo zapisati kao

$$A = \bigcap_{\varphi \in \mathcal{D}(U)} (f_\varphi)^{\leftarrow}[\{0\}].$$

Kako su skupovi $(f_\varphi)^{\leftarrow}[\{0\}]$ zatvoreni zbog neprekidnosti, A je zatvoren skup. Sada po Teoremu 2.7 slijedi kako je A refleksivan prostor kao zatvoren potprostor refleksivnog prostora.
Definirajmo preslikavanje

$$\langle u, v\rangle_{m,U} : H^m(U) \times H^m(U) \to \mathbb{R}, \quad \langle u, v\rangle_{m,U} := \sum_{|\alpha| \le m} \int_U \partial^\alpha u \partial^\alpha v dx.$$

Lagano slijedi da je gornje preslikavanje skalarni produkt odakle slijedi da je $H^m(U)$ Hilbertov prostor jer su prostori $W^{m,2}(U)$ Banachovi prostori. □

Napomena 3.2.
1. U prethodnom teoremu dokazali smo kako su prostori $W^{m,p}(U)$ separabilni za $1 \le p < \infty$ te nismo dokazali za $p = \infty$ jer prostor $L^\infty(U)$ nije separabilan. Lagano se pokaže da ni prostor $W^{m,\infty}(U)$ nije separabilan.
2. Zbog pretpostavke Teorema 2.7, dokazali smo refleksivnost samo za $1 < p < \infty$.

Definicija 3.3. *Neka su X i Y normirani vektorski prostori. Prostor X je* ***kompaktno uložen*** *u Y ako je $X \hookrightarrow Y$ i ako je ulaganje $i : X \to Y$ kompaktan linearan operator. Ekvivalentno, X je kompaktno uložen u Y ako vrijedi*

1. *$\|x\|_Y \le C\|x\|_X$ za neku konstantu $C > 0$ i svaki $x \in X$;*
2. *svaki omeđen niz $(x_n)_n \subseteq X$ ima podniz koji je konvergentan u Y.*

Kompaktno uložen prostor X koji je uložen u prostor Y označavamo s $X \Subset Y$.

Napomena 3.3. Neka je $X \Subset Y$ i $(x_n)_n \subseteq X$ slabo konvergentan niz, tj. $x_n \xrightarrow{w} x \in X$. Kako je svaki slabo konvergentan niz omeđen po Teoremu A.5, tada u prostoru Y postoji podniz $(x_{n_k})_k$ niza $(x_n)_n$ koji je jako konvergentan pa je i $(x_n)_n$ jako konvergentan u prostoru Y.

Teorem 3.4. *(**Rellich-Kondrachov**) Neka je U domena u $\mathbb{R}^N$, $m \in \mathbb{N}$ i $p \in [1, \infty\rangle$. Vrijede sljedeća kompaktna ulaganja*

1. $W^{m,p}(U) \Subset L^q(U)$ *za sve* $1 \leq q \leq p^*$ *ako je* $m < \frac{N}{p}$;
2. $W^{m,p}(U) \Subset L^q(U)$ *za sve* $1 \leq q \leq \infty$ *ako je* $m = \frac{N}{p}$;
3. $W^{m,p}(U) \Subset C(\overline{U})$ *ako je* $\frac{N}{p} < m$.

gdje je $\frac{1}{p^*} := \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$.

Dokaz je tehnički pa ga izostavljamo, a može se pronaći u [15, str. 286-289].

Teorem 3.5. *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^N$ domena, $m \in \mathbb{N}_0$ i $1 \leq p \leq \infty$. Tada je prostor $C^\infty(\overline{U})$ gust u $W^{m,p}(U)$.*

Dokaz se može pronaći u [11, str. 998-1001].

4 Nelinearna funkcionalna analiza

Ovo poglavlje svojevrsni je nastavak razmatranja diferencijabilnosti na konačno-dimenzionalnim prostorima. Prisjetimo se, za $A \subseteq \mathbb{R}^n$, A otvoren i $f : A \to \mathbb{R}^m$ definiran je diferencijal u točki $c \in A$ kao linearni operator $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ takav da vrijedi

$$\lim_{x \to c} \frac{\|f(x) - f(c) - L(x - c)\|_{\mathbb{R}^m}}{\|x - c\|_{\mathbb{R}^n}} = 0.$$

Zamjenom $h := x - c$ gornji limes postaje

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(c + h) - f(c) - Lh\|_{\mathbb{R}^m}}{\|h\|_{\mathbb{R}^n}} = 0.$$

Motivirani gornjom jednakosti za preslikavanje između općenitih normiranih prostora X i Y imamo sljedeću definiciju.

Definicija 4.1. *Neka su X i Y normirani prostori, $U \subseteq X$, U otvoren te $f : U \to Y$. Definiramo (Frechetovu)* ***derivaciju*** *u točki $a \in U$ kao operator $L \in \mathcal{L}(X, Y)$ koji zadovoljava*

$$f(a + h) = f(a) + Lh + \|h\|_X \delta(h), \qquad \lim_{h \to 0} \delta(h) = 0. \tag{9}$$

Operator L još označavamo i s $f'(a)$. Funkcija f diferencijabilna je na A ako je diferencijabilna u svakoj točki skupa A.

Iz gornje definicije slijedi većina poznatih pravila o ponašanju derivacije što ćemo vidjeti u nastavku. Cilj nam je dokazati Piolin identitet koji će nam trebati u dokazu John Ballovog teorema. Pokažimo odmah da je definicija dobra, tj. da je operator L sa svojstvom (9) jedinstven. Pretpostavimo suprotno, tj. neka postoje $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$ koji zadovoljavaju uvjet (9) u točki $a \in U$. Neka je $r > 0$ t.d. $K(a, r) \subseteq U$, tada je

$$f(a + h) = f(a) + L_1 h + \|h\|\delta_1(h) = f(a) + L_2 h + \|h\|\delta_2(h), \qquad \forall h \in K(0, r)$$

odakle dobivamo

$$\begin{aligned} (L_1 - L_2)h &= \|h\|(\delta_2(h) - \delta_1(h)) \\ \Rightarrow \|(L_1 - L_2)h\| &= \|h\|\|\delta_2(h) - \delta_1(h)\|, \qquad \forall h, \|h\| < r' < r \\ \|L_1 - L_2\| \leq \sup_{\|h\| \neq 0} \frac{\|(L_1 - L_2)h\|}{\|h\|} &= \|\delta_2(h) - \delta_1(h)\| \xrightarrow{r' \to 0} 0 \end{aligned}$$

pa po Teoremu $A.2$ slijedi $\|L_1 - L_2\| = 0$ tj. $L_1 = L_2$. Pokažimo još da diferencijabilnost funkcije povlači neprekidnost. Kao gore, imamo

$$f(a + h) - f(a) = Lh + \|h\|\delta(h) \Rightarrow \|f(a + h) - f(a)\| \leq \|h\|(\|L\| + \|\delta(h)\|),$$

$$\lim_{h \to 0} \|f(a + h) - f(a)\| \leq \lim_{h \to 0} \|h\|(\|L\| + \|\delta(h)\|) = 0.$$

Kod posebnog slučaja $X = \mathbb{R}$ vrijedi $\delta(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{|h|}$ i dvije se definicije derivacije podudaraju, a $f'(a)$ možemo pridružiti nekom elementu prostora Y. U nijednom drugom slučaju $f'(a)$ nećemo moći pridružiti nekom elementu prostora Y. Ukoliko je $Y = \mathbb{R}$ i X Hilbertov prostor, tada je diferencijal funkcije f element prostora $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ te po Rieszovom teoremu o reprezentaciji postoji jedinstveni element, u oznaci $\operatorname{grad} f(a) \in X$ za kojeg vrijedi $f'(a)h = \langle \operatorname{grad} f(a), h \rangle$.

Poznate definicije na standardan način proširujemo.

Definicija 4.2. *1. Funkcija $f : U \to Y$ klase je C^1 ako je diferencijabilna na U i ako je $f' : U \to \mathcal{L}(X,Y)$ neprekidna na U.*

*2. Funkcija $f : U \to Y$ je C^1-**difeomorfizam** ako je f injektivna, $f \in C^1(U;Y)$ te je $f^{-1} \in C^1(f[U];X)$.*

4.1 Osnovna svojstva Frechetove derivacije

Započinjemo s jednostavnim primjerom.

Primjer 4.1. Neka je $f : X \to Y$, $f(x) := Ax + b$ gdje je $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Vrijedi

$$f(x+h) = A(x+h) + b = Ax + b + Ah = f(x) + Ah$$

pa vidimo da je $\delta(h) = 0$ i $f'(x) = A$ za svaki $x \in X$. Vrijedi i obrat koji ćemo kasnije pokazati.

Teorem 4.1. *Neka su X i Y_i normirani vektorski prostori za $1 \leq i \leq n$. Definirajmo $Y := Y_1 \times \cdots \times Y_n$ i neka je $f : X \to Y$. Označimo s $f_i : X \to Y_i$ i-tu komponentu funkcije f. Tada je f diferencijabilna u točki x ako i samo ako su komponentne funkcije f_i, $1 \leq i \leq n$, diferencijabilne u točki x. Dodatno, vrijedi i $f'(a) = (f_1'(a), \dots, f_n'(a))$, tj. element prostora $f'(a) \in \mathcal{L}(X,Y)$ možemo poistovijetiti s elementom prostora $\mathcal{L}(X,Y_1) \times \cdots \times \mathcal{L}(X,Y_n)$.*

Dokaz. Na Y promatramo normu $\|y\|_Y := \max_i \|y_i\|_{Y_i}$. Ako je f diferencijabilna, tada uvjet diferencijabilnosti po komponentama daje n jednadžbi

$$f_i(a+h) = f_i(a) + A_i h + \|h\|\delta_i(h), \qquad 1 \leq i \leq n$$

gdje je A_i i-ta komponenta derivacije $f'(a) \in \mathcal{L}(X,Y)$. Iz definicije norme na Y slijedi $\|\delta_i(h)\| \leq \|\delta(h)\|$ pa su funkcije f_i diferencijabilne te je $f_i'(a) = A_i$.
Obrnuto, ako su funkcije f_i diferencijabilne u $a \in U$, tada je

$$f(a+h) - f(a) = \big(f_i(a+h) - f_i(a)\big)_{i=1}^n = \big(f_i'(a)h + \|h\|\delta_i(h)\big)_{i=1}^n = \big(f_i'(a)h\big)_{i=1}^n + \|h\|\big(\delta_i(h)\big)_{i=1}^n.$$

Definirajmo $\delta(h) := \big(\delta_i(h)\big)_{i=1}^n$, očito vrijedi $\lim_{h\to 0}\delta(h) = 0$. Nadalje, linearni operator $h \to \big(f_i'(a)h\big)_{i=1}^n$ neprekidan je zbog

$$\max_{1\leq i\leq n} \|f_i'(a)h\|_{Y_i} \leq \Big(\max_{1\leq i\leq n} \|f_i'(a)\|\Big)\|h\|.$$

Zaključujemo kako je f diferencijabilna u $a \in U$ i vrijedi $f'(a) = \big(f_i'(a)\big)_{i=1}^n$. □

Neka je sada $X := X_1 \times \cdots \times X_n$ produkt n normiranih prostora. Kako je

$$\{A_1 \times \cdots \times A_n : A_i \text{ otvoren u } X_i \text{ za svaki } i\}$$

baza topologije za X, postoje $U_i \subseteq X_i$ otvoreni skupovi takvi da za $a = (a_1, \dots, a_n) \in U \subseteq X$ vrijedi $a_i \in U_i$. Ako je preslikavanje f diferencijabilno u točki a, onda je diferencijabilno i preslikavanje

$$f(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \dots, a_n) : U_i \to Y$$

i pripadni diferencijal označavamo s $\partial_i f(a) \in \mathcal{L}(X_i, Y)$.

Definicija 4.3. *Diferencijal $\partial_i f(a) \in \mathcal{L}(X_i, Y)$ nazivamo i-ta* ***parcijalna derivacija*** *preslikavanja f. Označavamo je još i kao $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.*

Sada još pretpostavimo da je $X := X_1 \times \cdots \times X_n$ i $Y := Y_1 \times \cdots \times Y_m$ gdje su X_i i Y_j normirani prostori. Uzmimo $U \subseteq X$, U otvoren. Tada je funkcija $f : U \to Y$ određena s m komponentnih funkcija $f_i : U \to Y_i$ s n varijabli. Analogno kao i prije, možemo diferencijal u točki $a \in X$ zapisati matrično kao

$$\begin{bmatrix} \partial_1 f_1(a) & \partial_2 f_1(a) & \dots & \partial_n f_1(a) \\ \partial_1 f_2(a) & \partial_2 f_2(a) & \dots & \partial_n f_2(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \partial_2 f_m(a) & \dots & \partial_n f_m(a) \end{bmatrix}$$

Matrica se još naziva i gradijentna matrica i označava se s $\nabla f(a)$. Ukoliko je $m = n$, tada gornju matricu nazivamo **Jacobijanova matrica** funkcije f.

Definicija 4.4. *Neka je X normiran prostor i $f : U \to Y$ funkcija gdje je $U \subseteq X$, U otvoren. Kažemo da f u točki $a \in U$ ima* ***Gateauxovu derivaciju u smjeru*** *h ako postoji limes*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a + th) - f(a)}{t}.$$

Gateauxovu derivaciju u smjeru h označavamo s $\partial_h f(a)$.

Izračunajmo sada derivaciju funkcije inverza matrice.

Primjer 4.2. Označimo s $\mathbb{U}^n \subseteq \mathbb{M}^n$ skup svih invertibilnih kvadratnih matrica reda n. Promotrimo preslikavanje

$$f : \mathbb{U}^n \to \mathbb{M}^n, \quad f(A) := A^{-1}.$$

Po Teoremu $A.4$, $\mathbb{U}^n$ je otvoren skup i za $A \in \mathbb{U}^n$ vrijedi $A + H = A(I + A^{-1}H) \in \mathbb{U}^n$ ako je $\|H\| < \|A^{-1}\|^{-1}$. Za takav H računamo

$$f(A+H) - f(A) = (A+H)^{-1} - A^{-1} = (A(I + A^{-1}H))^{-1} - A^{-1} = (I + A^{-1}H)^{-1}A^{-1} - A^{-1} =$$

$$\overset{\text{Teorem } A.4}{=} \sum_{n=0}^{\infty} (-A^{-1}H)^n A^{-1} - A^{-1} = -A^{-1}HA^{-1} + \sum_{n=2}^{\infty} (-A^{-1}H)^n A^{-1}.$$

Dalje vrijedi

$$\left\| \sum_{n=2}^{\infty} (-A^{-1}H)^n A^{-1} \right\| \le \sum_{n=2}^{\infty} \|A^{-1}H\|^n \|A^{-1}\| \le$$

$$\le \|A^{-1}\| \|A^{-1}H\|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \|A^{-1}H\|^n \overset{\text{geometrijski red}}{\le} \frac{\|A^{-1}\|^3 \|H\|^2}{1 - \|A^{-1}H\|} \le \frac{\|A^{-1}\|^3 \|H\|^2}{1 - \|A^{-1}\| \|H\|}. \tag{10}$$

Po odabiru matrice H vrijedi $\|A^{-1}H\| \le \|A^{-1}\| \|H\| < 1$ pa zato imamo geometrijski red. Definirajmo

$$\delta(H) := \frac{1}{\|H\|} \sum_{n=2}^{\infty} (-A^{-1}H)^n A^{-1}.$$

Prema (10) vrijedi

$$\lim_{H\to 0}\|\delta(H)\| \leq \lim_{H\to 0}\frac{1}{\|H\|}\cdot\frac{\|A^{-1}\|^3\|H\|^2}{1-\|A^{-1}\|\|H\|} = \lim_{H\to 0}\frac{\|A^{-1}\|^3\|H\|}{1-\|A^{-1}\|\|H\|} = 0.$$

Iz neprekidnosti norme slijedi i $\lim_{H\to 0}\delta(H) = 0$, a po definiciji δ imamo

$$f(A+H) = f(A) - A^{-1}HA^{-1} + \|H\|\delta(H)$$

pa vidimo da je Gateauxova derivacija u smjeru H upravo $f'(A)H = -A^{-1}HA^{-1}$.

Definicija 4.5. *Za matricu $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ reda n neka je A'_{ij} matrica reda $n-1$ dobivena brisanjem i-tog retka i j-tog stupca matrice A. Definiramo vrijednost*

$$d_{ij} := (-1)^{i+j}\det A'_{ij}$$

koju nazivamo (i,j)-ti kofaktor matrice A. Dalje definiramo matricu

$$\operatorname{Cof} A := (d_{ij})_{i,j=1}^n$$

*i nazivamo je **kofaktor** matrice A.*

Napomena 4.1. Ako je matrica A invertibilna, kofaktor matrice A je $\operatorname{Cof} A = (\det A)A^{-T}$ po [5, Teorem 3.2.27, str. 73].

Teorem 4.2. *(lančano pravilo) Neka su X, Y i Z normirani vektorski prostori, $U \subseteq X$, U otvoren i $V \subseteq Y$, V otvoren. Dalje, neka je $f : U \to Y$, $g : V \to Z$ i $f[U] \subseteq V$. Ako je f diferencijabilna u $a \in U$ i g diferencijabilna u $f(a) \in V$ tada je $g \circ f : U \to Z$ diferencijabilna u $a \in U$ te vrijedi*

$$(g\circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Također, $g \circ f \in C^1(U;Z)$ ako je $f \in C^1(U;Y)$ i $g \in C^1(V;Z)$.

Dokaz. Neka je $(a+h) \in U$ i definirajmo $b := f(a)$ te $k(h) := f(a+h)-b$. Kako je f diferencijabilna u $a \in U$, f je i neprekidna u a zbog čega vrijedi $\lim_{h\to 0} k(h) = 0$. Iz diferencijabilnosti slijedi

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \|h\|\delta(h), \qquad \lim_{h\to 0}\delta(h) = 0;$$

$$g(b+k) = g(b) + g'(b)k + \|k\|\eta(k), \qquad \lim_{h\to 0}\eta(k) = 0.$$

Imamo

$$(g\circ f)(a+h) - (g\circ f)(a) = g(f(a+h)) - g(b) = g'(b)\big(f(a+h) - f(a)\big) + \|k(h)\|\eta(k(h)) =$$

$$= g'(b)\big(f'(a)h + \|h\|\delta(h)\big) + \|k(h)\|\eta(k(h)).$$

Vrijedi

$$\|g'(b)\big(\|h\|\delta(h)\big)\| \leq \|h\|\|g'(b)\|\|\delta(h)\|,$$
$$\|k(h)\| = \|f(a+h) - f(a)\| = \|f'(a)h + \|h\|\delta(h)\| \leq \|h\|\big(\|f'(a)\| + \|\delta(h)\|\big).$$

Iz svega zaključujemo

$$g'(b)\big(\|h\|\delta(h)\big) + \|k(h)\|\eta(k(h)\big) = \|h\|\rho(h), \qquad \lim_{h\to 0}\rho(h) = 0$$

pa slijedi da je $(g\circ f)$ diferencijabilna te je $(g\circ f)' = g'(f(a))f'(a)$.
Pretpostavimo kako je $f \in C^1(U;Y)$ i $g \in C^1(V;Z)$. Budući da su preslikavanja $f' : U \to \mathcal{L}(X,Y)$ i $g'\circ f : U \to \mathcal{L}(Y,Z)$ neprekidna, to je i preslikavanje $x \to \big(f'(x), g'(f(x))\big)$ neprekidno. Uočimo još da je bilinearna forma $M : \mathcal{L}(X,Y)\times\mathcal{L}(Y,Z) \to \mathcal{L}(X,Z)$, $M(A,B) := B\circ A$ neprekidna jer je $\|B\circ A\| \le \|A\|\|B\|$, to zaključujemo da je i kompozicija

$$(g'\circ f)\circ f' = (g\circ f)' : U \to \mathcal{L}(X;Z)$$

također neprekidna, tj. $(g\circ f) \in C^1(U;Z)$. $\square$

4.2 Piolin identitet

Definicija 4.6. *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren podskup. Za preslikavanje $F : U \to \mathbb{M}^n$, kojeg možemo zapisati kao $F = (F_{ij})_{i,j=1}^n$, definiramo* ***divergenciju***

$$(\operatorname{div} F(x))_i := \sum_{j=1}^n \partial_j F_{ij}(x), \qquad 1 \le i \le n.$$

Teorem 4.3. *Neka su $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoreni skupovi i $\varphi : U \to V$ preslikavanje koje je dva puta diferencijabilno.*

1. ***(Piolin identitet)*** *Vrijedi*
$$\operatorname{div}(\operatorname{Cof}\nabla\varphi) = 0.$$

2. ***(Piolina transformacija)*** *Za dano diferencijabilno preslikavanje $G : V \to \mathbb{M}^n$ definirajmo*
$$F(x) := G(\varphi(x))\operatorname{Cof}\nabla\varphi(x).$$
Pretpostavimo još da je $\nabla\varphi(x) \in \mathbb{M}^n$ invertibilna za $\forall x \in U$. Tada je F također diferencijabilno preslikavanje na U i
$$\operatorname{div} F(x) = (\det\nabla\varphi(x))\operatorname{div} G(\varphi(x)).$$

Dokaz. Uočimo da vrijedi $(\operatorname{Cof}\nabla\varphi)_{ij} = (-1)^{i+j}\det A_{ij}$ gdje je A_{ij} preslikavanje dobiveno brisanjem i-tog stupca i j-tog retka u matričnom prikazu preslikavanja $\nabla\varphi^T : U \to \mathbb{M}^n$, tj.

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} \partial_1\varphi_1 & \cdots & \partial_1\varphi_{i-1} & \partial_1\varphi_{i+1} & \cdots & \partial_1\varphi_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_{j-1}\varphi_1 & \cdots & \partial_{j-1}\varphi_{i-1} & \partial_{j-1}\varphi_{i+1} & \cdots & \partial_{j-1}\varphi_n \\ \partial_{j+1}\varphi_1 & \cdots & \partial_{j+1}\varphi_{i-1} & \partial_{j+1}\varphi_{i+1} & \cdots & \partial_{j+1}\varphi_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \partial_n\varphi_1 & \cdots & \partial_n\varphi_{i-1} & \partial_n\varphi_{i+1} & \cdots & \partial_n\varphi_n \end{bmatrix} \tag{11}$$

Sada je

$$\sum_{j=1}^{n}\partial_j(\mathrm{Cof}\,\nabla\varphi)_{ij}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\partial_j\det A_{ij}=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\sum_{k\neq j}\det A_{ij}^k=(\clubsuit)$$

gdje je A_{ij}^k preslikavanje dobiveno zamjenom retka $(\partial_k\varphi_1\ldots\partial_k\varphi_{i-1}\partial_k\varphi_{i+1}\ldots\partial_k\varphi_n)$ u A_{ij} s retkom $(\partial_{jk}\varphi_1\ldots\partial_{jk}\varphi_{i-1}\partial_{jk}\varphi_{i+1}\ldots\partial_{jk}\varphi_n)$, gdje smo s ∂_j ušli u izraz $\det A_{ij}$, tj.

$$A_{ij}^k=\begin{bmatrix}\partial_1\varphi_1 & \cdots & \partial_1\varphi_{i-1} & \partial_1\varphi_{i+1} & \cdots & \partial_1\varphi_n\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \partial_{jk}\varphi_1 & \cdots & \partial_{jk}\varphi_{i-1} & \partial_{jk}\varphi_{i+1} & \cdots & \partial_{jk}\varphi_n\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \partial_{j-1}\varphi_1 & \cdots & \partial_{j-1}\varphi_{i-1} & \partial_{j-1}\varphi_{i+1} & \cdots & \partial_{j-1}\varphi_n\\ \partial_{j+1}\varphi_1 & \cdots & \partial_{j+1}\varphi_{i-1} & \partial_{j+1}\varphi_{i+1} & \cdots & \partial_{j+1}\varphi_n\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \partial_n\varphi_1 & \cdots & \partial_n\varphi_{i-1} & \partial_n\varphi_{i+1} & \cdots & \partial_n\varphi_n\end{bmatrix}\tag{12}$$

Kako je φ preslikavanje u $\mathbb{R}^n$, vrijedi Schwarzova lema pa je $\partial_{jk}\varphi_i=\partial_{kj}\varphi_i$ zbog čega je $\det A_{ij}^k=(-1)^{k-j-1}\det A_{ik}^j$.

$$A_{ik}^j=\begin{bmatrix}\partial_1\varphi_1 & \cdots & \partial_1\varphi_{i-1} & \partial_1\varphi_{i+1} & \cdots & \partial_1\varphi_n\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \partial_{kj}\varphi_1 & \cdots & \partial_{kj}\varphi_{i-1} & \partial_{kj}\varphi_{i+1} & \cdots & \partial_{kj}\varphi_n\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \partial_{k-1}\varphi_1 & \cdots & \partial_{k-1}\varphi_{i-1} & \partial_{k-1}\varphi_{i+1} & \cdots & \partial_{k-1}\varphi_n\\ \partial_{k+1}\varphi_1 & \cdots & \partial_{k+1}\varphi_{i-1} & \partial_{k+1}\varphi_{i+1} & \cdots & \partial_{k+1}\varphi_n\\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots\\ \partial_n\varphi_1 & \cdots & \partial_n\varphi_{i-1} & \partial_n\varphi_{i+1} & \cdots & \partial_n\varphi_n\end{bmatrix}\tag{13}$$

Dakle, u A_{ij}^k nedostaje j-ti redak dok je k-ti redak oblika $\partial_{jk}\varphi_1\ldots\partial_{jk}\varphi_{i-1}\partial_{jk}\varphi_{i+1}\ldots\partial_{jk}\varphi_n)$, a u A_{ik}^j nedostaje k-ti redak dok je j-ti redak oblika $(\partial_{kj}\varphi_1\ldots\partial_{kj}\varphi_{i-1}\partial_{kj}\varphi_{i+1}\ldots\partial_{kj}\varphi_n)$. Kako bi doveli j-ti redak u u A_{ik}^j do k-tog retka imamo $(-1)^{k-j-1}$ zamjena redaka zbog čega imamo jednakost $\det A_{ij}^k=(-1)^{k-j-1}\det A_{ik}^j$. Zato je

$$(\clubsuit)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\Big(\sum_{k<j}\det A_{ij}^k+\sum_{k>j}\det A_{ij}^k\Big)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\Big(\sum_{k<j}\det A_{ij}^k+\sum_{k>j}(-1)^{k-j-1}\det A_{ik}^j\Big)=0$$

što dokazuje prvu tvrdnju.
Ako je $\nabla\varphi(x)\in\mathbb{M}^n$ invertibilna u svim točkama $x\in U$, onda Piolin identitet možemo zapisati kao

$$\partial_j(\mathrm{Cof}\,\nabla\varphi)_{ij}=\partial_j\big((\det\nabla\varphi)\nabla\varphi^{-T}\big)_{ij}=0\tag{14}$$

zbog Napomene 4.1. Nadalje je

$$F_{ij}=(\det\nabla\varphi(x))\sum_{k=1}^{n}G_{ik}(\varphi(x))(\nabla\varphi(x)^{-T})_{kj},$$

odakle je

$$\Rightarrow \partial_j F_{ij} = (\det \nabla\varphi(x)) \sum_{k=1}^{n} \partial_j G_{ik}(\varphi(x))(\nabla\varphi(x)^{-T})_{kj} + \sum_{k=1}^{n} G_{ik}(\varphi(x))\, \underbrace{\partial_j\big((\det \nabla\varphi(x))\nabla\varphi(x)^{-T}\big)_{ij}}_{=0}$$

Odavde slijedi

$$\sum_{j=1}^{n} \partial_j F_{ij} = (\det \nabla\varphi(x)) \sum_{j,k=1}^{n} \partial_j G_{ik}(\varphi(x))(\nabla\varphi(x)^{-T})_{kj}.$$

Po lančanom pravilu (Teorem 4.2) imamo

$$\partial_j G_{ik}(\varphi(x)) = \sum_{l=1}^{n} \partial_l G_{ik}(\varphi(x))\partial_j(\varphi_l(x)) = \sum_{l=1}^{n} \partial_l G_{ik}(\varphi(x))(\nabla\varphi(x))_{lj}.$$

Uočimo još da vrijedi

$$\sum_{j=1}^{n} (\nabla\varphi(x))_{lj}(\nabla\varphi(x))^{-T})_{kj} = \sum_{j=1}^{n} (\nabla\varphi(x))_{lj}(\nabla\varphi(x))^{-1})_{jk} = \delta_{kl}$$

pa je

$$\begin{aligned}
\big(\operatorname{div} F(x)\big)_i &= \sum_{j=1}^{n} \partial_j F_{ij}(x) = (\det \nabla\varphi(x)) \sum_{j,k=1}^{n} \partial_j G_{ik}(\varphi(x))(\nabla\varphi(x)^{-T})_{kj} = \\
&= (\det \nabla\varphi(x)) \sum_{j,k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \partial_l G_{ik}(\varphi(x))(\nabla\varphi(x))_{lj}(\nabla\varphi(x)^{-T})_{kj} = \\
&= (\det \nabla\varphi(x)) \sum_{k,l=1}^{n} \partial_l G_{ik}(\varphi(x)) \sum_{j=1}^{n} (\nabla\varphi(x))_{lj}(\nabla\varphi(x)^{-T})_{kj} = \\
&= (\det \nabla\varphi(x)) \sum_{k=1}^{n} \partial_k G_{ik}(\varphi(x)) = (\det \nabla\varphi(x))\big(\operatorname{div} G(\varphi(x))\big)_i.
\end{aligned}$$

□

Očekivano vrijedi i rezultat o nužnom uvjetu derivacije u točki lokalnog ekstrema.

Teorem 4.4 (Fermat). *Neka je X normiran vektorski prostor, $U \subseteq X$, U otvoren te $f : U \to \mathbb{R}$. Ako funkcija f u točki $a \in U$ ima lokalni ekstrem, onda je $f'(a) = 0$.*

Dokaz. Neka je $v \in X$ proizvoljan. U je otvoren pa postoji $\varepsilon > 0$ tako da je funkcija

$$\varphi : \langle -\varepsilon, \varepsilon\rangle \to U, \qquad \varphi(t) := f(a + tv)$$

dobro definirana. Po lančanom pravilu funkcija φ je diferencijabilna u nuli te vrijedi $\varphi'(0) = f'(a)v$. Pretpostavimo sada da je a lokalni minimum, tj. funkcija φ u nuli ima lokalni minimum. Vrijedi

$$0 \le \lim_{t\to 0+} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} = \varphi'(0) = \lim_{t\to 0-} \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t} \le 0$$

pa je

$$f'(a)v = 0$$

odakle iz proizvoljnosti vektora v slijedi tvrdnja. Analogno slijedi i slučaj kada je a lokalni maksimum. □

4.3 Teorem srednje vrijednosti i primjene

Klasični Lagrangeov teorem srednje vrijednosti ne može se poopćiti niti na općenite konačnodimenzionalne prostore, tako se ne može poopćiti niti u slučaju općenitih vektorskih prostora. U konačnodimenzionalnim prostorima vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 4.5. *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f : A \to \mathbb{R}^m$ funkcija koja je diferencijabilna na A i čije su sve parcijalne derivacije neprekidne na A. Ako je $\|Df\|_\infty := \sup\{\|Df(x')\| : x' \in A\} < \infty$, tada za svaki $x, y \in A$ t.d. je $[x, y] = \{ta + (1-t)b : t \in [0,1]\} \subseteq A$ vrijedi*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|Df\|_\infty \|x - y\|.$$

Ako je dodatno A povezan putevima, tada je f Lipschitzova.

Dokaz se može pronaći u [17, poglavlje 13]. Slično poopćenje vrijedi i u beskonačnodimenzionalnim prostorima.

Teorem 4.6 (Teorem srednje vrijednosti). *Neka su X i Y normirani vektorski prostori, $U \subseteq X$, U otvoren takav da je $[a, b] = \{ta + (1-t)b : t \in [0,1]\} \subseteq U$. Neka je $f : U \to Y$ neprekidna na $[a, b]$ i diferencijabilna na $\langle a, b\rangle$. Tada vrijedi*

$$\|f(a) - f(b)\|_Y \leq \|b - a\|_X \sup_{t \in \langle a,b\rangle} \|f'(t)\|_{\mathcal{L}(X,Y)}.$$

Dokaz. Ako je $\sup_{t\in\langle a,b\rangle} \|f'(t)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = \infty$ gotovi smo pa pretpostavimo kako vrijedi

$$M := \sup_{t\in\langle a,b\rangle} \|f'(t)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty.$$

Definirajmo $\varphi : [0,1] \to Y$ kao $\varphi(t) := f(a+t(b-a))$. Po Teoremu 4.2, funkcija φ je diferencijabilna te vrijedi $\varphi'(t) = f'(a + t(b-a))(b-a)$ odakle dobivamo

$$\sup_{t\in\langle 0,1\rangle} \|\varphi'(t)\| \leq M\|b - a\|. \tag{15}$$

Za $\varepsilon > 0$ definiramo skup

$$I(\varepsilon) := \{t \in [0,1] : \|\varphi(t) - \varphi(0)\| \leq \big(M\|b-a\| + \varepsilon\big)t + \varepsilon\}.$$

Kako je $0 \in I(\varepsilon)$, za svaki $\varepsilon > 0$ skup $I(\varepsilon)$ je neprazan. Isto tako, budući da je funkcija

$$\psi(t) := \|\varphi(t) - \varphi(0)\| - \big(M\|b-a\| + \varepsilon\big)t + \varepsilon$$

neprekidna, $I(\varepsilon)$ je zatvoren jer je

$$I(\varepsilon) = \psi^{\leftarrow}[\langle -\infty, 0]].$$

Definirajmo

$$t_0 := \sup\{t \in [0,1] : t \in I(\varepsilon)\}.$$

Kako je $I(\varepsilon)$ zatvoren, vrijedi $t_0 \in I(\varepsilon)$. Vrijedi i $t_0 > 0$ jer je $\psi(0) = -\varepsilon < 0$ pa je $\psi(\alpha) < 0$ i za neki $\alpha > 0$ što slijedi iz neprekidnosti funkcije ψ, tj. $\alpha \in I(\varepsilon)$. Pokažimo kako je $t_0 = 1$. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je $t_0 \in \langle 0, 1\rangle$. Tada je φ diferencijabilna u t_0 pa vrijedi

$$\varphi(t_0 + \delta) - \varphi(t_0) = \varphi'(t_0)\delta + |\delta|\eta(\delta), \qquad \lim_{\delta\to 0} \eta(\delta) = 0.$$

Neka je $\delta_0 > 0$ takav da vrijedi

$$t_0 < t_0 + \delta_0 < 1, \qquad \|\eta(\delta_0)\| \leq \varepsilon. \tag{16}$$

Takav δ_0 postoji jer $\eta(h) \xrightarrow{h \to 0} 0$. Tada je

$$\begin{aligned}\|\varphi(t_0+\delta_0) - \varphi(0)\| &\leq \|\varphi(t_0+\delta_0) - \varphi(t_0)\| + \|\varphi(t_0) - \varphi(0)\| \\ &= \|\varphi'(t_0)\delta_0 + |\delta_0|\eta(\delta_0)\| + \|\varphi(t_0) - \varphi(0)\| \\ &\leq M\|b-a\|\delta_0 + \delta_0\varepsilon + \big(M\|b-a\| + \varepsilon\big)t_0 + \varepsilon \\ &= \big(M\|b-a\| + \varepsilon\big)(t_0+\delta_0) + \varepsilon,\end{aligned}$$

gdje druga nejednakost slijedi iz diferencijabilnosti funkcije φ, a treća iz (15) i (16) te iz definicije skupa $I(\varepsilon)$. Dodatno, iz definicije skupa $I(\varepsilon)$ slijedi kako je i $t_0 + \delta_0 \in I(\varepsilon)$ što je kontradikcija s odabirom vrijednosti t_0. Vrijedi $t_0 = 1$, tj. $1 \in I(\varepsilon)$ pa imamo

$$\|f(b) - f(a)\| = \|\varphi(1) - \varphi(0)\| \leq M\|b-a\| + 2\varepsilon.$$

Pustimo li $\varepsilon \to 0$ slijedi tvrdnja. □

Neke od glavnih posljedica teorema srednje vrijednosti dani su u sljedeća dva teorema. Prvi je o diferencijabilnosti limesa niza diferencijabilnih funkcija.

Teorem 4.7 (diferencijabilnost limesa diferencijabilnih funkcija). *Neka su X i Y normirani vektorski prostori, $U \subseteq X$, U otvoren i $(f_n)_n$, $f_n : U \to Y$, niz diferencijabilnih funkcija koji po točkama konvergira prema funkciji $f : U \to Y$. Neka niz $(f_n')_n$ konvergira lokalno uniformno prema funkciji $g : U \to \mathcal{L}(X,Y)$. Tada i $(f_n)_n$ konvergira lokalno uniformno prema f, f je diferencijabilna te je $f' = g$. Ako su f_n klase C^1 onda je i f klase C^1.*

Dokaz. Pokažimo kako niz $(f_n)_n$ konvergira lokalno uniformno prema f. Neka je $x_0 \in X$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Po pretpostavci o lokalno uniformnoj konvergenciji niza $(f_n')_n$ postoji $r > 0$ i kugla $K(x_0, r)$ t.d.

$$\lim_n \sup_{x \in K(x_0,r)} \|f_n'(x) - g(x)\|_{\mathcal{L}(X,Y)} = 0.$$

Vrijedi $\|f_m'(x) - f_n'(x)\| \leq \|f_m'(x) - g(x)\| + \|f_n'(x) - g(x)\|$ za sve $m, n \in \mathbb{N}$ i svaki $x \in K(x_0, r)$ pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ t.d.

$$\sup_{x \in K(x_0,r)} \|f_m'(x) - f_n'(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2r}, \qquad \forall m, n \geq n_0.$$

Po Teoremu srednje vrijednosti 4.6, koji primjenjujemo na kuglu $K(x_0, r)$, imamo

$$\|f_m(x) - f_n(x) - f_m(x_0) + f_n(x_0)\| \leq r \sup_{x \in K(x_0,r)} \|f_m'(x) - f_n'(x)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

za svaki $m, n \geq n_0$ i za svaki $x \in K(x_0, r)$. Po pretpostavci $(f_n)_n$ konvergira po točkama prema f pa postoji $n_1 > n_0$ takav da

$$\|f_m(x_0) - f_n(x_0)\| \leq \|f_m(x_0) - f(x_0)\| + \|f_n(x_0) - f(x_0)\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall m, n \geq n_1.$$

Kombinirajući prethodne dvije nejednakosti dobivamo

$$\|f_m(x) - f_n(x)\| \le \varepsilon, \quad \forall m, n > n_1,\ \forall x \in K(x_0, r).$$

Fiksirajmo $x \in K(x_0, r)$ i pustimo $m \to \infty$. Zbog konvergencije po točkama dobivamo

$$\|f(x) - f_n(x)\| \le \varepsilon, \quad \forall n > n_1.$$

Kako n_1 ne ovisi o x zapravo smo dobili

$$\sup_{x \in K(x_0,r)} \|f(x) - f_n(x)\| \le \varepsilon, \quad \forall n > n_1,$$

tj. $(f_n)_n$ konvergira lokalno uniformno prema f.
Pokažimo sada kako je f diferencijabilna te kako vrijedi $f' = g$. Neka je $x_0 \in U$ i $K(x_0, r)$ kugla definirana kao i prije. Za $n \in \mathbb{N}$ definirajmo funkcije $k_n : K(x_0, r) \to Y$ na sljedeći način

$$k_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{\|x - x_0\|}\big(f_n(x) - f_n(x_0) - f_n'(x_0)(x - x_0)\big), & x \ne x_0; \\ 0, & x = x_0. \end{cases}$$

Zbog pretpostavljene konvergencije i niz funkcija $(k_n)_n$ konvergira po točkama i to prema funkciji

$$k(x) := \begin{cases} \frac{1}{\|x - x_0\|}\big(f(x) - f(x_0) - g(x_0)(x - x_0)\big), & x \ne x_0; \\ 0, & x = x_0. \end{cases}$$

Po teoremu srednje vrijednosti (4.6) (kojeg ovdje primjenjujemo na funkciju $f_m(x) - f_n(x) - (f_m'(x_0) - f_n'(x_0))(x))$ za svaki $x \in K(x_0, r)$ vrijedi

$$\begin{aligned} \|k_m(x) - k_n(x)\| &= \frac{1}{\|x - x_0\|}\|f_m(x) - f_m(x_0) - (f_n(x) - f_n(x_0)) - (f_m'(x_0) - f_n'(x_0))(x - x_0)\| \\ &\le \sup_{y \in K(x_0,r)} \|(f_m'(y) - f_n'(y)) - (f_m'(x_0) - f_n'(x_0))\| \end{aligned}$$

ako je $x \ne x_0$, odnosno

$$\|k_m(x) - k_n(x)\| = 0$$

ako je $x = x_0$, za sve $m, n \in \mathbb{N}$. Za proizvoljni $\varepsilon > 0$ zbog lokalno uniformne konvergencije niza $(f_n')_n$ postoji $n_2 \in \mathbb{N}$ t.d.

$$\sup_{x \in K(x_0,r)} \|k_m(x) - k_n(x)\| \le \varepsilon, \quad \forall m, n > n_2.$$

Kao i u prvom dijelu dokaza, ako fiksiramo točku x te puštajući $m \to \infty$ dobivamo

$$\lim_n \sup_{x \in K(x_0,r)} \|k_n(x) - k(x)\| = 0.$$

Funkcije k_n neprekidne su u x_0 jer su funkcije f_n diferencijabilne u x_0. Kako je funkcija k limes lokalno uniformno konvergentnog niza neprekidnih funkcija, to je i sama neprekidna u x_0 prema Teoremu $B.2$, no iz definicije funkcije k slijedi da je onda f diferencijabilna u x_0 te vrijedi $f'(x_0) = g(x_0)$.
Ako su funkcije f_n klase C^1, tada su f_n' neprekidne funkcije pa je i funkcija g neprekidna na U kao limes lokalno uniformno konvergentnog niza neprekidnih funkcija prema Teoremu $B.2$, tj. f je klase C^1. $\square$

Sljedeći teorem analogon je Teorema o implicitnom preslikavanju u konačnodimenzionalnom prostoru.

Teorem 4.8 (**Teorem o implicitnom preslikavanju**). *Neka je X normiran vektorski prostor te Y i Z Banachovi prostori, $U \subseteq X \times Y$, U otvoren i $(a,b) \in U$. Neka je $\varphi \in C(U;Z)$ funkcija sa sljedećim svojstvima*

(i) $\varphi(a,b) = 0$;

(ii) $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \in \mathcal{L}(Y,Z)$ *postoji u svim točkama* $(x,y) \in U$ *te je* $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \in C(U;\mathcal{L}(Y,Z))$;

(iii) $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(a,b) \in \mathcal{L}(Y,Z)$ *je bijekcija te je* $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}(a,b)\right)^{-1} \in \mathcal{L}(Z,Y)$.

Tada vrijede sljedeće tvrdnje:

1. *Postoji otvorena okolina V točke a u X, otvorena okolina W točke b u Y, $V \times W \subseteq U$ te implicitna funkcija $f \in C(V;W)$ takva da je*

$$\{(x,y) \in V \times W : \varphi(x,y) = 0\} = \{(x,y) \in V \times W : y = f(x)\}.$$

2. *Ako je φ diferencijabilna u $(a,b) \in U$, tada je f diferencijabilna u a te vrijedi*

$$f'(a) = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}(a,b)\right)^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a,b) \in \mathcal{L}(X,Y).$$

3. *Ako je $\varphi \in C^m(U;Z)$ za neki $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, tada postoji otvorena okolina $V' \subseteq V$ točke a i otvorena okolina $W' \subseteq W$ točke b takve da vrijedi*

   (a) $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) \in \mathcal{L}(Y,Z)$ *je bijekcija te je*

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y)\right)^{-1} \in \mathcal{L}(Y,Z), \qquad \forall (x,y) \in V' \times W';$$

   (b) $f \in C^m(V';Y)$;

   (c)

$$f'(x) = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,f(x))\right)^{-1} \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,f(x)) \in \mathcal{L}(X,Y), \qquad \forall x \in V'.$$

Dokaz se može pronaći u [9, str. 548-554].

Vratimo se sada na Primjer 4.1 i pokažimo obrat.

Primjer 4.3. Neka su X i Y normirani vektorski prostori, $U \subseteq X$, U otvoren i povezan te $f : U \to Y$ diferencijabilna funkcija za koju postoji $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ t.d. vrijedi $f'(x) = A$ za svaki $x \in U$. Uzmimo proizvoljnu točku $x \in X$ te $r > 0$ t.d. $K(x,r) \subseteq U$. Za $y \in K(x,r)$ vrijedi $[x,y] \subseteq K(x,r)$ pa možemo primijeniti Teorem srednje vrijednosti 4.6 (koji ovdje primjenjujemo na funkciju $f(x) - Ax$), imamo

$$\|f(y) - f(x) - A(y-x)\| \leq \sup_{z \in \langle x,y \rangle} \|f'(z) - A\| \|y - x\| = 0, \qquad \forall y \in K(x,r).$$

Funkcija $g : U \to Y$ definirana kao $g(x) := f(x) - Ax$ zadovoljava $g(x) = g(y)$ za svaki $y \in K(x, r)$. Definirajmo $V := \{x \in U : g(x) = g(x_0)\}$, V je očito neprazan, relativno zatvoren u U (jer je g neprekidna, a $V = g^{\leftarrow}[\{g(x_0)\}]$) i otvoren jer oko svake točke x postoji kugla $K(x, r)$ za koju je svaki $y \in K(x, r)$ ujedno i $y \in V$. Po pretpostavci je U otvoren i povezan pa mora biti $U = V$. Ako definiramo $b := g(x_0)$, dobili smo kako za svaki $x \in U$ vrijedi $f(x) - Ax = b$ tj.

$$f(x) = Ax + b$$

što smo i trebali pokazati.

Ukoliko se nalazimo u Hilbertovom prostoru H, tada nam Teorem o drugom korijenu ([4, str. 99]) kaže kako za svaki pozitivno-semidefinitni operator $A \in \mathbb{B}(H)$ postoji jedinstveni drugi korijen $\sqrt{A}$, tj. pozitivno-semidefinitni operator za koji vrijedi $(\sqrt{A})^2 = A$. Ukoliko označimo prostor svih simetričnih pozitivno-definitnih matrica s $\mathbb{S}^n_>$, tada je dobro definirano preslikavanje

$$\Psi : \mathbb{S}^n_> \to \mathbb{S}^n_>, \quad \Psi(A) := \sqrt{A}.$$

Pomoću Teorema o implicitnom preslikavanju pokaže se kako je preslikavanje Ψ zapravo klase C^∞.

5 Teorija elastičnosti

U ovom poglavlju uvodimo definicije i oznake potrebne za John Ballov teorem.

Dalje ćemo se ograničiti na prostor $\mathbb{R}^3$. Također, $U \subseteq \mathbb{R}^3$ bit će domena.

Definicija 5.1. *Definiramo funkciju*

$$\varphi : \overline{U} \to \mathbb{R}^3$$

koja je dovoljno glatka, čuva orijentaciju i $\varphi|_U$ je injektivna. Funkciju φ nazivamo ***deformacija****.*

Ukoliko skup U zamišljamo kao tijelo u prostoru, onda njegovo ponašanje u prostoru opisuje funkcija φ. Odavde i uvjet na injektivnost u unutrašnjosti tijela, dok se injektivnost možda izgubi na rubu ukoliko dođe do samododira tijela. Glatkoća funkcije φ je dovoljna da tvrdnje izložene u nastavku imaju smisla.

Pripadna matrica $\nabla\varphi := ((\partial_i \varphi_j)_{i,j=1}^3)^T$ naziva se **gradijent deformacije**.

Označimo

$$\mathbb{M}^3_+ := \{F \in \mathbb{M}^3 : \det F > 0\}.$$

Neka je $\Gamma_0 \subseteq \Gamma := \partial\overline{U}$ istaknuti dio ruba tijela. Pretpostavimo da na tijelo U djeluju unutarnje i vanjske sile koje su redom opisane funkcijama

$$f : U \to \mathbb{R}^3, \quad g : \Gamma_1 \to \mathbb{R}^3$$

gdje je $\Gamma_1 := \Gamma \setminus \Gamma_0$. Ove dvije funkcije implicitno određuju deformaciju $\varphi : x \to \varphi(x)$ koju želimo izračunati. Neka je U hiperelastično tijelo. To znači da postoji funkcija gustoće unutarnje (potencijalne) energije kao funkciju

$$W : \overline{U} \times \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{R}$$

pa je **ukupna energija** dana funkcionalom I, tj.

$$I : \Phi \to \mathbb{R}, \quad I(\psi) = \int_U W(x, \nabla\psi(x))dx - L(\psi)$$

gdje je

$$L : \Phi \to \mathbb{R}, \quad L(\psi) := \int_U f \cdot \psi dx + \int_{\Gamma_1} g \cdot \psi d\Gamma.$$

Određenosti radi, pretpostavimo da je funkcija $\varphi_0 := \varphi|_{\Gamma_0} = \mathbf{id}|_{\Gamma_0}$ pa definirajmo skup

$$\Phi := \{\psi : \overline{U} \to \mathbb{R}^3 : \psi|_U \text{ je injekcija}, \det\nabla\psi > 0 \text{ na } \overline{U}, \psi|_{\Gamma_0} = \varphi_0 = \mathbf{id}|_{\Gamma_0}\}.$$

što je po definiciji skup svih deformacija (uvjet o očuvanju orijentacije zapisali smo preciznije preko determinante).

Prvenstveno nas zanima ravnoteža rješenja što su minimumi funkcionala ukupne energije, tj. ukoliko je promatrano tijelo hiperelastično, tražena deformacija φ biti će stacionarna točka funkcionala I i to ona koja je minimum.

U idućem dijelu promatrat ćemo minimizatore općenitih funkcionala. Uz pomoć teorije razvijene u tome dijelu, u posljednjem dijelu raspravit ćemo koje sve pretpostavke moramo postaviti na funkcinal I i L kako bi matematički model promatranog (hiper)elastičnog tijela imao smisla te razmotritit postojanje minimizatora ukupne energije pod tim uvjetima, što je rezultat John Ballovog teorema.

6 Minimizatori funkcionala

6.1 Pronalazak minimizatora funkcionala

U prvom poglavlju uvedena je slaba topologija na prostorima s ciljem poopćenja Bolzano Weierstrassova teorema na beskonačnodimenzionalne prostore. S generalizacijom Bolzano Weierstrassova teorema nameće se i pitanje generalizacije teorema o ekstremima prema kojem funkcija na kompaktu postiže minimum i maksimum.

Neka je $U \subseteq V$ neomeđen podskup normiranog prostora V i $J : U \to \mathbb{R}$ funkcional. Algoritam za pronalazak ekstrema funkcionala početkom 20. stoljeća predložio je Hilbert kroz tri koraka:

1. pronađimo niz $(u_n)_n$ u U takav da niz vrijednosti $(J(u_n))_n$ konvergira prema infimumu na U;
2. pokažemo da neki podniz gornjeg niza konvergira prema elementu iz U u nekoj topologiji;
3. pokažemo da je limes podniza traženi minimizator.

U drugom koraku ključan je odabir topologije te će se u našem slučaju raditi upravo o slaboj topologiji. Ako je U omeđen, tada je egzistencija konvergentnog podniza direktna posljedica Banach-Alaogluovog teorema A.7. Za slučaj kada je U neomeđen, treba nam sljedeća definicija.

Definicija 6.1. *Neka je $U \subseteq V$ neomeđen podskup normiranog prostora V. Kažemo da je funkcional $J : U \to \mathbb{R}$* ***koercitivan*** *ako vrijedi*

$$(\forall v \in U) \quad \|v\| \to \infty \Rightarrow J(v) \to \infty.$$

Ograničit ćemo se samo na koercitivne funkcionale. Iz same definicije koercitivnosti jasno je kako minimizirajući niz može ležati samo u omeđenom skupu. Za provedbu trećeg koraka trebat će nam dodatne pretpostavke na promatrani funkcional, a koje su slabije od neprekidnosti.

Definicija 6.2. *Neka je V Banachov vektorski prostor. Kažemo da je funkcional $J : V \to \mathbb{R}$*

1. ***odozdo poluneprekidan*** *ako je za svaki $a \in \mathbb{R}$ skup $J^{\leftarrow}[\langle a, \infty]]$ otvoren u V.*
2. ***nizovno slabo odozdo poluneprekidan*** *na U ako za svaki niz $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq U$ t.d. $u_n \overset{w}{\to} u \in U$ vrijedi*
$$I(u) \leq \liminf_{n\to\infty} I(u_n).$$

Napomena 6.1. Uočimo da je svaka neprekidna funkcija odozdo poluneprekidna što slijedi direktno iz definicije neprekidnosti u topološkim prostorima. Obrnuto, ako je funkcija f odozdo poluneprekidna i ako je $-f$ odozdo poluneprekidna, onda je f neprekidna što slijedi iz činjenice da je $\{\langle a, \infty] : a \in \mathbb{R}\} \cup \{[-\infty, a\rangle : a \in \mathbb{R}\}$ predbaza standardne topologije na $\mathbb{R}$, gdje još preostaje primijeniti Teorem C.1.

6.2 Konveksne funkcije

U nastavku promatramo funkcije kojima je slika sadržana u $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Neka je X vektorski prostor i $U \subseteq X$ konveksan podskup. Definirajmo konveksnost funkcija s takvom domenom i kodomenom.

Definicija 6.3. *Funkcija* $f : U \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *je* ***konveksna*** *ako*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \quad \forall x, y \in U,\ \forall \lambda \in [0,1],$$

odnosno, f *je* ***strogo konveksna*** *ako vrijedi*

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) < \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y), \quad \forall x, y \in U,\ x \neq y,\ \forall \lambda \in [0,1].$$

Uočimo da su u prethodnoj definiciji $x, y \neq -\infty$ pa su izrazi s desne strane uvijek dobro definirani brojevi u $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Zbog navedenog, moramo promatrati kodomene samo kao podskupove od $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, a ne kao podskupove proširenih realnih brojeva $\overline{\mathbb{R}}$.

Kako bi u nastavku izbjegli raspravu o funkcijama koje nam nisu od interesa uvodimo i sljedeću definiciju.

Definicija 6.4. *Funkcija* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *naziva se* ***prava*** *ukoliko je*

$$\{x \in X : f(x) < \infty\} \neq \emptyset.$$

Nadalje ćemo se ograničiti samo na prave funkcije.

Definicija 6.5. ***Epigraf*** *prave funkcije* $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *je skup*

$$\operatorname{Epi} f := \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}.$$

Uočimo kako je, zbog pretpostavke o pravoj funkciji, epigraf uvijek neprazan skup.
Cilj nam je preko konveksnosti pronaći uvjet kada je funkcija slabo odozdo poluneprekidna.

Teorem 6.1. *Neka je* V *vektorski prostor. Funkcija* $f : V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *je konveksna ako i samo ako je* $\operatorname{Epi} f$ *konveksan podskup prostora* $V \times \mathbb{R}$.

Dokaz. Neka je f konveksna funkcija. Uzmimo $(u, a), (v, b) \in \operatorname{Epi} f$. Iz definicije epigrafa je $f(u) \leq a$ i $f(v) \leq b$ pa za svaki $\lambda \in [0,1]$ imamo

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \overset{\text{konveksnost funkcije } f}{\leq} \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v) \leq \lambda a + (1-\lambda)b$$

tj. vrijedi

$$\lambda(u, a) + (1-\lambda)(v, b) = (\lambda u + (1-\lambda)v, \lambda a + (1-\lambda)b) \in \operatorname{Epi} f$$

tj. $\operatorname{Epi} f$ je konveksan skup.
Pretpostavimo da je $\operatorname{Epi} f$ konveksan skup. Kako je f prava funkcija postoji točka u t.d. je $f(u) < \infty$. Ako je to jedina takva točka onda smo gotovi. Inače postoji točka $v \neq u$ t.d. $f(v) < \infty$. Tada su parovi $(u, f(u)), (v, f(v))$ sadržani u epigrafu pa iz pretpostavke na konveksnost slijedi da za svaki $\lambda \in [0,1]$ vrijedi

$$\lambda(u, f(u)) + (1-\lambda)(v, f(v)) = (\lambda u + (1-\lambda)v, \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v)) \in \operatorname{Epi} f.$$

Iz definicije epigrafa zaključujemo da je

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq \lambda f(u) + (1-\lambda)f(v).$$

Time smo pokazali da funkcija f zadovoljava uvjet konveksnosti za sve točke kojima je vrijednost konačna (tj. koje su u epigrafu). Ako je točka u t.d. vrijedi $f(u) = \infty$ onda je nejednakost trivijalno zadovoljena pa zaključujemo da je f konveksna. □

Definicija 6.6. *Neka je V normiran vektorski prostor i $\emptyset \neq U \subseteq V$. Funkcional $J : U \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ je* ***jako odozdo poluneprekidan*** *ako je odozdo poluneprekidan kada na U promatramo jaku (relativnu) topologiju, tj. onu topologiju induciranu normom na V.*

Sljedeći teorem biti će ključan u dokazivanju egzistencije minimizatora funkcionala s konveksnim podintegralnim funkcijama.

Teorem 6.2. *Neka je $(V, \mathcal{T})$ topološki prostor.*

1. *Funkcija $J : V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ odozdo je poluneprekidna ako i samo ako je $\operatorname{Epi} J$ zatvoren podskup prostora $V \times \mathbb{R}$.*

2. *Odozdo poluneprekidna funkcija $J : V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ je nizovno odozdo poluneprekidna, tj. vrijedi*
$$\lim_k u_k = u \text{ u } V \Rightarrow J(u) \leq \liminf_k J(u_k). \tag{17}$$

3. *Neka je topologija $\mathcal{T}$ metrizabilna i neka funkcija $J : V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ zadovoljava uvjet*
$$\lim_k u_k = u \text{ u } V \Rightarrow J(u) \leq \liminf_k J(u_k).$$
Tada je funkcija J odozdo poluneprekidna.

Interpretacija 6.1. Kraće zapisano, kod metrizabilnih topologija ekvivalentno je:

1. funkcija f odozdo je poluneprekidna;
2. $\operatorname{Epi} f$ zatvoren je podskup u $V \times \mathbb{R}$;
3. uvjet (17).

Dokaz. 1. Neka je J odozdo poluneprekidna, tj. za svaki $a \in \mathbb{R}$ skup $\{v \in V : a < J(v) \leq \infty\}$ je otvoren u V. Pokažimo da je skup $(V \times \mathbb{R} \setminus \operatorname{Epi} J)$ otvoren. Uzmimo točku $(v_0, a_0) \in V \times \mathbb{R} \setminus \operatorname{Epi} J = \{(v, a) \in V \times \mathbb{R} : a < J(v) \leq \infty\}$. Jer je $a_0 < J(v)$ to postoji točka b_0 t.d. $a_0 < b_0 < J(v)$. Tada je skup
$$A := \{v \in V : b_0 < J(v)\} \times \langle -\infty, b_0 \rangle$$
očito otvoren i sadržan u $(\operatorname{Epi} J)^c$ jer za proizvoljnu točku $(w, \alpha) \in A$ vrijedi $b_0 < J(w)$ po definiciji prvog skupa te $\alpha < b_0$ po definiciji drugog skupa, tj. vrijedi $\alpha < J(w)$ pa mora biti $(w, \alpha) \notin \operatorname{Epi} J$. Dakle, A je otvoren skup u $(\operatorname{Epi} J)^c$, tj. $(\operatorname{Epi} J)^c$ otvoren je skup pa je $\operatorname{Epi} J$ zatvoren skup.
Obrnuto, neka je $\operatorname{Epi} J$ zatvoren skup, tj. $\{(v, a) \in V \times \mathbb{R} : a < J(v) \leq \infty\}$ je otvoren. Iz definicije produktne topologije (Napomena C.1) slijedi kako je skup $\{v \in V : a < J(v)\}$ otvoren za svaki $a \in \mathbb{R}$, odnosno funkcija J odozdo je poluneprekidna.

2. Neka je $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq V$ te $u \in V$ t.d. $\lim_k u_k = u$ te neka je $J(u) < \infty$. Za proizvoljni $\varepsilon > 0$ iz odozdo poluneprekidnosti funkcije J slijedi kako je skup $V(\varepsilon) := \{v \in V : J(u) - \varepsilon < J(v)\}$ otvoren u V. Očito je $u \in V(\varepsilon)$ pa je $V(\varepsilon)$ otvorena okolina točke u u V zbog čega postoji

$k(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ t.d. za svaki $k > k(\varepsilon)$ vrijedi $u_k \in V(\varepsilon)$, tj. $J(u) - \varepsilon < J(u_k)$. Nejednakost vrijedi za svaki $k > k(\varepsilon)$ što upravo znači kako je

$$J(u) - \varepsilon \leq \liminf_k J(u_k).$$

Puštajući $\varepsilon \to 0$ slijedi $J(u) \leq \liminf_k J(u_k)$.
Neka je sada $u \in V$ t.d. vrijedi $J(u) = \infty$. Za proizvoljni $a > 0$ odozdo poluneprekidnost implicira kako je skup $H(a) := \{v \in V : a < J(v)\}$ otvorena okolina točke u. Kao i prije, postoji $n(a) \in \mathbb{N}$ t.d. za sve $k > n(a)$ vrijedi $a < J(u_k)$ što opet implicira $a \leq \liminf_k J(u_k)$. Kako je a proizvoljan, pustimo li $a \to +\infty$ slijedi $\liminf_k J(u_k) = +\infty = J(u)$.

3. Prema prvom dijelu dokaza, dovoljno je pokazati kako je $\operatorname{Epi} J$ zatvoren skup u $V \times \mathbb{R}$, tj.

$$(u_k, a_k)_k \subseteq \operatorname{Epi} J, \quad \lim_k (u_k, a_k) = (u, a) \in V \times \mathbb{R} \Rightarrow (u, a) \in \operatorname{Epi} J.$$

Ovdje smo koristili Teorem $C.2$ zbog čega nam je trebala dodatna pretpostavka na metrizabilnost topologije. Takav niz zadovoljava $\lim_k u_k = u$ u V te $J(u_k) \leq a_k$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, tj.

$$\liminf_k J(u_k) \leq \liminf_k a_k = \lim_k a_k = a$$

pa slijedi

$$J(u) \overset{\text{pretpostavka}}{\leq} \liminf_k J(u_k) \leq a$$

pa vrijedi $J(u) \leq a$ tj. $(u, a) \in \operatorname{Epi} J$. Skup $\operatorname{Epi} J$ zatvoren je što smo i trebali pokazati.

□

Teorem 6.3. *Neka je V normiran vektorski prostor. Tada je svaka konveksna jako odozdo poluneprekidna funkcija $J : V \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ i nizovno slabo odozdo poluneprekidna na V.*

Dokaz. Vrijedi $\operatorname{Epi} J \neq V \times \mathbb{R}$ pa postoji točka $(v_0, a_0) \notin \operatorname{Epi} J$, tj. $a_0 < J(v_0)$. Kako je $\operatorname{Epi} J$ konveksan i zatvoren podskup skupa $V \times \mathbb{R}$, po drugoj geometrijskoj formi Hahn-Banachovog teorema 2.4 primijenjenoj na skupove $\operatorname{Epi} J$ i $\{(v_0, a_0)\}$ slijedi kako postoji neprekidan linearni funkcional $k \in (V \times \mathbb{R})' = V' \times \mathbb{R}$ i $c \in \mathbb{R}$ t.d.

$$k(v_0, a_0) < c < k(v, a), \qquad \forall (v, a) \in \operatorname{Epi} J. \tag{18}$$

Znamo da je funkcional k oblika $k(v, a) = k'(v) + \alpha a$ za neki $k' \in V'$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Jer je očito svaki par $(v, J(v)) \in \operatorname{Epi} J$, pa po (18) slijedi

$$k'(v_0) + \alpha a_0 < c < k'(v) + \alpha J(v)$$

za svaki $v \in V$. Za $v = v_0$ dobivamo da je $\alpha a_0 < \alpha J(v_0)$ tj. $\alpha(a_0 - J(v_0)) < 0$. Vrijedi $(v_0, a_0) \notin \operatorname{Epi} J$ pa je $a_0 < J(v_0)$ zbog čega mora biti $\alpha > 0$. Dakle, imamo

$$\frac{1}{\alpha}(c - k'(v)) < J(v).$$

Ako sad definiramo $l := \frac{-1}{\alpha} k'$ i $d := \frac{1}{\alpha} c$, iz prethodne nejednakosti slijedi

$$J(v) > l(v) + d, \qquad \forall v \in V. \tag{19}$$

Uzmimo sada niz $(u_k)_k$ u V t.d. $u_k \stackrel{w}{\to} u$ i promotrimo $L := \liminf_k J(u_k)$. Po definiciji limes inferiora postoji podniz $(u_n)_n$ niza $(u_k)_k$ t.d. $L = \lim_n J(u_n)$. Jer niz $(u_n)_n$ slabo konvergira prema u, to je po Teoremu $A.5$ i omeđen pa je dobro definirana vrijednost $M := \sup_n \|u_n\| < \infty$. Kako je funkcional l omeđen to vrijedi $|l(u_n)| \leq \|l\|_{V'}\|u_n\| \leq \|l\|_{V'}M$ tj. $l(u_n) \geq -\|l\|_{V'}M$ pa iz (19) imamo

$$J(u_n) > -\|l\|_{V'}M + d > -\infty$$

odakle slijedi da je $L > -\infty$.
Trebamo pokazati da je $J(u) \leq \liminf_k J(u_k)$. Ako je $L = \infty$, tvrdnja očito vrijedi pa pretpostavimo da je L konačan. Tada je $(u, L) \in V \times \mathbb{R}$. Kako je očito $(u_n, J(u_n)) \in \operatorname{Epi} J$ i $(u_n, J(u_n)) \stackrel{w}{\to} (u, L)$, vrijedi $(u, L) \in \operatorname{Epi} J$. Naime, $\operatorname{Epi} J$ je konveksan i zatvoren skup pa je po Banach-Saks-Mazurovom teoremu 2.5 i slabo zatvoren. Iz definicije epigrafa imamo da vrijedi

$$J(u) \leq L = \lim_n J(u_n) = \liminf_k J(u_k)$$

što je i trebalo pokazati. □

Primjer 6.1. Neka je V normiran vektorski prostor. Promotrimo funkciju norme $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$. Norma je konveksna jer za sve $x, y \in V$ i $\lambda \in [0, 1]$ jer je

$$\|\lambda x + (1-\lambda)y\| \leq \|\lambda x\| + \|(1-\lambda)y\| \leq \lambda\|x\| + (1-\lambda)\|y\|.$$

Isto tako, norma je neprekidna pa je i (jako) odozdo poluneprekidna. Po prethodnom teoremu, norma je onda i nizovno slabo odozdo poluneprekidna. Odnosno, za niz $(u_n)_n \subseteq V$ i $u \in V$ za koje vrijedi $u_n \stackrel{w}{\to} u$ imamo

$$\|u\| \leq \liminf_n \|u_n\|$$

što je tvrdnja (dijela) Teorema $A.5$. Standardni dokaz tog teorema koristi Banach-Steinhausov teorem ([4, str. 89]).

Definicija 6.7. *Podskup $U \subseteq V$ normiranog prostora V je* ***nizovno slabo zatvoren*** *ako za svaki niz $(u_n)_n \subseteq U$ koji slabo konvergira prema $u \in V$, tj. $u_n \stackrel{w}{\to} u$, vrijedi $u \in U$.*

Napomena 6.2. Po Banach-Saks-Mazurovom teoremu 2.5 slijedi kako su jako zatvoreni konveksni skupovi ujedno i nizovno slabo zatvoreni.

Teorem 6.4. *Neka je V refleksivan Banachov vektorski prostor, $U \subseteq V$ nizovno slabo zatvoren skup i $J : U \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ funkcional koji je nizovno slabo odozdo poluneprekidan. Dodatno, neka je J koercitivan ako je U neomeđen skup. Tada postoji barem jedan element $u \in U$ t.d. je*

$$J(u) = \inf_{v \in U} J(v)$$

i posebno je $\inf_{v \in U} J(v) > -\infty$.

Dokaz. Ako je $J(v) = \infty$ za svaki $v \in V$ onda nemamo što dokazivati pa pretpostavimo da postoji $v \in V$ t.d. je $J(v) < \infty$. Neka je $(u_k)_k$ niz u U t.d. je $\lim_k J(u_k) = \inf_{v \in V} J(v)$. Ako je U omeđen, onda je i niz $(u_k)_k$, ako U nije omeđen onda je po pretpostavci J koercitivan pa je opet $(u_k)_k$ omeđen (inače bi postojao podniz $(u_n)_n$ t.d. $\|u_n\| \to \infty$ pa bi iz koercitivnosti imali i $J(u_n) \to \infty$, odakle bi slijedilo $\inf_{v \in U} J(v) = \infty$ što smo pretpostavili da nije). Po Banach-Eberlein-Šmulianovom teoremu

2.9 postoji podniz $(u_n)_n$ niza $(u_k)_k$ i $u \in V$ t.d. $u_n \xrightarrow{w} u$, a kako je U nizovno slabo zatvoren skup, to je $u \in U$ pa je i $J(u)$ dobro definirana vrijednost. Iz pretpostavljene nizovne slabe odozdo poluneprekidnosti funkcionala J na U imamo

$$-\infty < J(u) \leq \liminf_n J(u_n) = \inf_{v \in U} J(v),$$

gdje prva nejednakost slijedi iz dobre definiranosti funkcionala J u točki u. □

Napomena 6.3. U prethodnom dokazu mogli smo iskoristiti Banach-Eberlein-Šmulianov teorem jer je V po pretpostavci refleksivan prostor.

Ukoliko funkcional J nije slabo odozdo poluneprekidan, tada ne mora postojati minimizator. Štoviše, to je dovoljan, ali ne i nužan uvjet za egzistenciju minimizatora.

6.3 Funkcionali s konveksnim integrandima

Definicija 6.8. *Neka je U otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ i $B \subseteq \mathbb{R}^m$ Borelov skup*[5]. *Funkcija $h : U \times B \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ je **Caratheodoryjeva funkcija** ako je $h(x, \cdot) : B \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ neprekidna za g.s. $x \in U$ te ako je $h(\cdot, y) : U \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ izmjeriva* [6] *za svaki $y \in B$.*

Teorem 6.5. *Neka je U omeđen otvoren skup u $\mathbb{R}^n$ i $h : U \times \mathbb{R}^M \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ Caratheodoryjeva funkcija takva da je za g.s. $x \in U$ funkcija $h(x, \cdot)$ konveksna i $\inf_{(x,y) \in U \times \mathbb{R}^M} h(x, y) > -\infty$. Uzmimo niz $(y_k)_k \subseteq (L^1(U))^M$ i $y \in (L^1(U))^M$. Tada slaba konvergencija $y_k \xrightarrow{w} y$ u $(L^1(U))^M$ implicira*

$$\int_U h(x, y(x))dx \leq \liminf_{k \to \infty} \int_U h(x, y_k(x))dx.$$

Dokaz. Definirajmo $m := \inf_{(x,y) \in U \times \mathbb{R}^M} h(x, y)$. Tada je funkcija $g := h - m$ integrabilna i vrijedi $\inf_{(x,y) \in U \times \mathbb{R}^M} g(x, y) = 0$ pa bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je

$$\inf_{(x,y) \in U \times \mathbb{R}^M} h(x, y) = 0.$$

Kako je h Caratheodoryjeva funkcija, to je i izmjeriva kada god je funkcija $y : U \to \mathbb{R}^M$ izmjeriva. Pretpostavili smo da je h nenegativna pa su svi integrali dobro definirani za svaku funkciju $y \in (L^1(U))^M$. Definirajmo sada funkcional

$$H : (L^1(U))^M \to [0, \infty], \qquad H(y) := \int_U h(x, y(x))dx$$

i pokažimo da je jako odozdo poluneprekidan s obzirom na jaku topologiju prostora $L^1(U)$. Nalazimo se u $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ što je metrizabilan prostor pa je po Teoremu 6.2 odozo poluneprekidnost ekvivalentna nizovnoj odozdo poluneprekidnosti, tj. dovoljno je pokazati

$$y_k \to y, \qquad \int_U h(x, y(x))dx \leq \liminf_{k \to \infty} \int_U h(x, y_k(x))dx.$$

[5]Označimo s $\mathcal{B}$ σ-algebru nad $\mathbb{R}$ generiranu s otvorenim skupovima (tj. skupovima iz euklidske topologije). Tada skupove $B \in \mathcal{B}$ nazivamo Borelovim skupovima.

[6]Neka je $f : X \to Y$ funkcija između izmjerivih prostora $(X, \mathcal{F})$ i $(Y, \mathcal{G})$, tj. $\mathcal{F}$ i $\mathcal{G}$ su σ-algebre nad X i Y, respektivno. Tada kažemo da je f $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$-izmjeriva ako za svaki $G \in \mathcal{G}$ vrijedi $f^{\leftarrow}[G] \in \mathcal{F}$. Na prostoru $\mathbb{R}$ podrazumijevamo Borelovu σ-algebru.

Uočimo da se prethodni izraz razlikuje od tvrdnje teorema jer sada dokazujemo tvrdnju uz pretpostavku na jaku kovergenciju niza $(y_k)_k$ dok je u pretpostavci teorema slaba konvergencija.
Neka je $(y_n)_n$ podniz niza (y_k) takav da niz $(\alpha_n)_n$, gdje je

$$\alpha_n := \int_U h(x, y_n(x))dx,$$

konvergira u $[0, \infty]$ (takav podniz postoji jer se niz $(\alpha_k)_k$ nalazi u $[0, \infty]$). Kako $(y_n)_n$ jako konvergira prema y u $L^1(U)$, postoji podniz $(y_m)_m$ podniza $(y_n)_n$ takav da $y_m(x) \to y(x)$ za g.s. $x \in U$ (egzistencija podniza slijedi iz Teorema $A.3$). Iz pretpostavljene neprekidnosti funkcije $h(x, \cdot)$ za g.s. $x \in U$ vrijedi $\lim_m h(x, y_m(x)) = h(x, y(x))$ pa imamo

$$\int_U h(x, y(x))dx = \int_U \lim_m h(x, y_m(x))dx \overset{\text{Fatouova lema}}{\leq}$$

$$\leq \liminf_m \int_U h(x, y_m(x))dx = \lim_n \int_U h(x, y_n(x))dx$$

odakle zadnja jednakost slijedi jer smo izabrali podniz $(y_n)_n$ niza $(y_m)_m$ takav da gornji integrali konvergiraju pa se limes podudara s limesom inferiorom. Zaključujemo da je funkcional H jako odozdo poluneprekidan.
Za $\lambda \in [0, 1]$ i $y, z \in (L^1(U))^M$ računamo

$$H(\lambda y + (1-\lambda)z) = \int_U h(x, \lambda y(x) + (1-\lambda)z(x))dx \overset{\text{konveksnost funkcije } h(x,\cdot)}{\leq}$$

$$\leq \int_U \lambda h(x, y(x)) + (1-\lambda)h(x, z(x))dx = \lambda H(y) + (1-\lambda)H(z)$$

pa je i funkcional H konveksan. Po Teoremu 6.3 funkcional H je nizovno slabo odozdo poluneprekidan. □

Napomena 6.4. Ako je U omeđen skup i $p \in [1, \infty\rangle$. Uzmimo $(f_n)_n \subseteq L^p(U)$ i $f \in L^p(U)$. Ako $f_n \overset{w}{\to} f$ u $L^p(U)$, tada $f_n \overset{w}{\to} f$ i u $L^1(U)$.

Teorem 6.6 (minimizatori u $W^{1,p}(U)$)**.** *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^n$ domena s rubom $\Gamma := \partial U$ i $h : U \times \mathbb{M}^{m\times n} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ funkcija koja je*

1. *za g.s. $x \in U$ funkcija $h(x, \cdot) : \mathbb{M}^{m\times n} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konveksna i neprekidna;*
2. *za svaki $F \in \mathbb{M}^{m\times n}$ funkcija $h(\cdot, F)$ je izmjeriva;*
3. *postoje konstante $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ i $p > 1$ takve da je*

$$h(x, F) \geq \alpha|F|^p + \beta, \qquad \text{za g.s. } x \in U, \quad \forall F \in \mathbb{M}^{m\times n}.$$

Neka je $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ izmjeriv podskup takav da mu je mjera $\mu(\Gamma_0) > 0$ i $u_0 : \Gamma_0 \to \mathbb{R}^m$ izmjeriva funkcija takva da je skup

$$W := \{v \in W^{1,p}(U) : v|_{\Gamma_0} = u_0\}$$

neprazan. Neka je $L : W^{1,p}(U) \to \mathbb{R}$ neprekidan linearni funkcional te definirajmo funkcional J na sljedeći način

$$J : W^{1,p}(U) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}, \qquad J(v) := \int_U h(x, \nabla v(x))dx - L(v).$$

Ako pretpostavimo da je $\inf_{v \in W} J(v) < \infty$, tada postoji $u \in W$ za kojeg je

$$J(u) = \inf_{v \in W} J(v).$$

Dodatno, ako je funkcija $h(x, \cdot) : \mathbb{M}^{m \times n} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ strogo konveksna za g.s. $x \in U$, tada je minimizator u jedinstven.

Dokaz. Ako uzmemo niz $(z_n)_n \subseteq W$ t.d. je $z = \lim_n z_n$, tada je očito $z|_{\Gamma_0} = \lim_n (z_n|_{\Gamma_0}) = \lim_n u_0 = u_0$, tj. $z \in W$ pa je W jako zatvoren. Nadalje, za $z_1, z_2 \in W$ promotrimo $(\lambda z_1 + (1-\lambda)z_2)|_{\Gamma_0} = \lambda z_1|_{\Gamma_0} + (1-\lambda)z_2|_{\Gamma_0} = \lambda u_0 + (1-\lambda)u_0 = u_0$ pa je W i konveksan. Po Banach-Saks-Mazurovom teoremu 2.5 skup W ujedno je i nizovno slabo zatvoren. Nadalje, po Teoremu 3.3 Banachov prostor $W^{1,p}(U)$ je i refleksivan jer je $p \in \langle 1, \infty \rangle$.
Nejednakosti iz pretpostavki teorema daju

$$J(v) \geq \alpha \int_U |\nabla v|^p + \beta \mu(U) - \|L\| \|v\|_{1,p,U} \tag{20}$$

za svaki $v \in W^{1,p}(U)$ (po pretpostavci je U domena pa je i omeđen skup zbog čega je $\mu(U) < \infty$). Po generaliziranoj Poincareovoj nejednakosti (Teorem B.4) postoji konstanta $c_1 > 0$ za koju je

$$\int_U |\psi|^p dx \leq c_1 \left(\int_U |\nabla \psi|^p dx + \left| \int_{\Gamma_0} \psi d\Gamma \right|^p \right)$$

za svaki $\psi \in W^{1,p}(U)$. Ako u prethodnu nejednakost uvrstimo $\psi = v$ dobivamo

$$c_1 \int_U |\nabla v|^p dx \geq \int_U |v|^p dx - c_1 \left| \int_{\Gamma_0} \underbrace{v|_{\Gamma_0}}_{=u_0} d\Gamma \right|^p = \int_U |v|^p dx - \alpha_1$$

za neki $\alpha_1 > 0$. Kombinirajući s (20), zaključujemo (objašnjenje je dano u Napomeni 6.5) kako postoje konstante $c_2 > 0$ i $c_3 \in \mathbb{R}$ t.d.

$$J(v) \geq c_2 \|v\|_{1,p,U}^p - \|L\| \|v\|_{1,p,U} + c_3, \qquad \forall v \in W. \tag{21}$$

Nadalje, kako je $p > 1$, vrijedi $\|v\|_{1,p,U} \leq \|v\|_{1,p,U}^p$ pa je

$$J(v) \geq c_2 \|v\|_{1,p,U}^p - \|L\| \|v\|_{1,p,U} + c_3 \geq c_2 \|v\|_{1,p,U}^p - \|L\| \|v\|_{1,p,U}^p + c_3 = \|v\|_{1,p,U}^p (c_2 - \|L\|) + c_3,$$

tj. postoje konstante $c > 0$ i d takve da je

$$J(v) \geq c \|v\|_{1,p,U}^p + d, \qquad \forall v \in W.$$

Promatrimo niz $(v_k)_k$ u W t.d. je $\|v_k\|_{1,p,U} \to \infty$. Po prethodnoj nejednakosti slijedi da je $J(v_k) \to \infty$ pa je funkcional J koercitivan nad skupom W.

Jer slaba konvergencija $u_k \overset{w}{\to} u$ u $W^{1,p}(U)$ povlači i konvergenciju $\nabla u_k \overset{w}{\to} \nabla u$ u $(L^p(U))^{m\times n}$ te prema Napomeni 6.4 i u $(L^1(U))^{m\times n}$, po Teoremu 6.5 (uz $M = m\times n$ i identifikaciju $\mathbb{R}^M$ s $\mathbb{M}^{m\times n}$) vrijedi

$$\int_U h(x,\nabla u(x))dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_U h(x,\nabla u_k(x))dx.$$

Također, L je neprekidan linearni funkcional na $W^{1,p}(U)$ po pretpostavci pa iz $u_k \overset{w}{\to} u$ slijedi $L(u) = \lim_k L(u_k)$ po definiciji slabe konvergencije. Zaključujemo da je funkcional $J : W^{1,p}(U) \to \mathbb{R}$ nizovno slabo odozdo poluneprekidan, dok egzistencija minimizatora funkcionala J nad skupom W slijedi iz Teorema 6.4.
Dokažimo sada jedinstvenost minimizatora u slučaju stroge konveksnosti funkcije $h(x,\cdot)$. Neka su $u_1, u_2 \in W$, $u_1 \neq u_2$ t.d. je

$$J(u_1) = J(u_2) = \inf_{u\in W} J(u).$$

Preslikavanje $v \to \left(\int_U |\nabla v|^p\right)^{1/p}$ je norma na prostoru

$$V := \{v \in W^{1,p}(U) : v|_{\Gamma_0} = 0\}$$

jer je po pretpostavci $\mu(\Gamma_0) > 0$. Isto tako, kako je $(u_1 - u_2) \in V$, $u_1 \neq u_2$ povlači da je $\mu(A) > 0$ gdje je

$$A := \{x \in U : \nabla u_1(x) \neq \nabla u_2(x)\}.$$

Naime, kada bi vrijedilo $\mu(A) = 0$, tada bi za g.s. $x \in U$ vrijedilo $\nabla u_1(x) = \nabla u_2(x)$ odakle bi imali da je $u_1(x) = u_2(x) + c$ za neku konstantu c, ali kako je $(u_1 - u_2) \in V$ vrijedi $c = 0$ (jer je po definiciji skupa V $(u_1 - u_2)|_{\Gamma_0} = 0$) pa bi slijedilo g.s. $u_1 = u_2$ što je kontradikcija s $u_1 \neq u_2$. Dakle, vrijedi $\mu(A) > 0$. Sada za $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ imamo

$$J(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) = \int_U h(x, \lambda\nabla u_1(x) + (1-\lambda)\nabla u_2(x))dx - L(\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2) <$$

$$\overset{\text{(stroga) konveksnost funkcije } h\text{, linearnost funkcionala } L}{<} \lambda\int_A h(x,\nabla u_1(x))dx + (1-\lambda)\int_A h(x,\nabla u_2(x))dx +$$

$$+\lambda\int_{U\setminus A} h(x,\nabla u_1(x))dx + (1-\lambda)\int_{U\setminus A} h(x,\nabla u_2(x))dx -$$

$$-\lambda L(u_1) - (1-\lambda)L(u_2) = \lambda J(u_1) + (1-\lambda)J(u_2) = \inf_{u\in W} J(u).$$

Ovdje na skupu A koristimo strogu konveksnost (uočimo da je u definiciji stroge konveksnosti nužno gledati različite točke), dok na skupu $U \setminus A$ koristimo konveksnost funkcije h, a jer je $\mu(A) > 0$ to imamo strogu nejednakost u gornjem izrazu.
Dobili smo kontradikciju jer u točkama $\lambda u_1 + (1-\lambda)u_2$ funkcional J postiže strogo manju vrijednost od infimuma, što je pak nemoguće. Dakle, minimizator je jedinstven. □

Napomena 6.5. Pokažimo tvrdnju (21) iz dokaza prethodnog teorema. Vrijedi

$$J(v) \geq \alpha\int_U |\nabla v|^p + \beta\mu(U) - \|L\|\|v\|_{1,p,U}, \qquad c_1 \underbrace{\int_U |\nabla v|^p dx}_{A:=} \geq \underbrace{\int_U |v|^p dx}_{B:=} - \alpha_1,$$

tj. imamo

$$A \geq \frac{1}{c_1} B - \frac{\alpha_1}{c_1} \tag{22}$$

gdje su $c_1 > 0$ i $\alpha_1 > 0$ neke konstante. Uzmimo konstante γ_1 i γ_2 za koje vrijedi

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 1, \qquad \frac{\gamma_2}{c_1} = \gamma_1.$$

Tada je $\gamma_2 = \gamma_1 c_1$ pa uvrštavanjem u gornju jednakost imamo $\gamma_1 + \gamma_1 c_1 = 1$, tj.

$$\gamma_1 = \frac{1}{1 + c_1} > 0, \qquad \gamma_2 = \frac{c_1}{1 + c_1} > 0.$$

Računamo

$$A = \gamma_1 A + \gamma_2 A \overset{(22)}{\geq} \gamma_1 A + \underbrace{\frac{\gamma_2}{c_1}}_{=\gamma_1} B - \gamma_2 \frac{\alpha_1}{c_1} = \gamma_1 (A + B) - \gamma_2 \frac{\alpha_1}{c_1}.$$

Jer vrijedi $A + B = \|v\|_{1,p,U}^p$, vratimo li se na početak slijedi

$$J(v) \geq \alpha\gamma_1 \|v\|_{1,p,U}^p - \alpha\gamma_2 \frac{\alpha_1}{c_1} + \beta\mu(U) - \|L\| \|v\|_{1,p,U}^p$$

odakle slijedi tvrdnja za $c_2 := \alpha\gamma_1 > 0$ i $c_3 := \beta\mu(U) - \alpha\gamma_2 \frac{\alpha_1}{c_1}$.

Primjer 6.2. Definirajmo funkcional

$$J : W_0^{1,4}(\langle 0, 1\rangle) \to \mathbb{R}, \qquad J(v) := \int_0^1 \big((v'(x)^2 - 1)^2 + v(x)^2\big) dx.$$

Može se pokazati kako je J koercitivan funkcional, ali nije konveksan, kao ni podintegralna funkcija. Vrijedi $\inf_{v \in W_0^{1,4}(\langle 0,1\rangle)} J(v) = 0$, ali se infimum ne postiže u $W_0^{1,4}(\langle 0, 1\rangle)$.

Prethodni primjer kaže kako u Teoremu 6.6 ne možemo ispustiti pretpostavku na konveksnost funkcije h. Isto tako, može se pokazati da ne možemo ispustiti ni pretpostavku na podintegralnu funkciju prema kojoj je omeđena odozdo funkcijom oblika $\alpha|F|^p + \beta$.

6.4 John Ballov teorem

Kao u prethodnom poglavlju i sada ćemo promatrati minimizaciju funkcionala oblika $J(v) = \int_U h(x, \nabla v(x)) dx - L(v)$ (ukupna energija tijela), ali za razliku od prethodnog poglavlja, promijenit ćemo pretpostavke na skup U i podintegralnu funkciju. Tako ćemo promatrati skupove U koji nisu nužno konveksni i podintegralne funkcije koje nisu konveksne. U Primjeru 6.2 smo ustanovili kako ne možemo u potpunosti ukloniti pretpostavku na konveksnost bez dodavanja neke nove pretpostavke.

Pretpostavke na funkciju W gustoće unutarnje energije:

1. (uvjet rasta) Slično kao i u Teoremu 6.6, funkciju W ograničavamo odozdo pa pretpostavimo kako postoje konstante $p \geq 2$, $q \geq \frac{p}{p-1}$, $r > 1$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ t.d.

$$W(x, F) \geq \alpha(|F|^p + |\operatorname{Cof} F|^q + (\det F)^r) + \beta \tag{23}$$

za g.s. $x \in U$. Iz ovog uvjeta ćemo dobiti i koercitivnost funkcije W.

2. Za g.s. $x \in U$ vrijedi
$$\det F \searrow 0 \Rightarrow W(x, F) \to \infty \tag{24}$$
što odgovara ideji da beskonačna kompresija u točki povlači beskonačno naprezanje. Iz ovog uvjeta ćemo dobiti i očuvanje orijentacije kod deformacija koje su minimizatori ukupne energije.

Pretpostavka na konveksnost funkcije $W(x, \cdot)$ s obzirom na varijablu F bila bi u kontradikciji s pretpostavljenim aksiomima. Naime, lako se vidi da skup $\mathbb{M}_+^n$ nije konveksan te da je $\operatorname{Co} \mathbb{M}_+^n = \mathbb{M}^n$ pa kada bi funkcija $W(x, \cdot)$ bila konveksna tada bi postojala konveksna funkcija $K : \mathbb{M}^3 \to \mathbb{R}$ za koju je $K(x, F) = W(x, F)$ za svaki $F \in \mathbb{M}_+^3$. Taj uvjet je u kontradikciji s uvjetom (24). Dakle, podintegralna funkcija nije konveksna pa vidimo kako nećemo moći iskoristiti Teorem 6.6 za pronalazak minimizatora. Zato uvodimo sljedeći pojam.

Definicija 6.9. *Funkcija $W : U \times \mathbb{M}_+^3 \to \mathbb{R}$ je **polikonveksna** ako za g.s. $x \in U$ postoji konveksna funkcija $K(x, \cdot) : \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times \langle 0, \infty \rangle \to \mathbb{R}$ t.d. vrijedi*
$$W(x, F) = K(x, F, \operatorname{Cof} F, \det F), \qquad \forall F \in \mathbb{M}_+^3.$$

Uočimo kako uvjet (23) daje
$$\int_U W(x, \nabla\varphi(x))dx \geq \alpha\Big(\|\nabla\varphi\|_{0,p,U}^p + \|\operatorname{Cof} \nabla\psi\|_{0,g,U}^q + \|\det \nabla\psi\|_{0,r,U}^r\Big) + \beta$$
zbog čega ćemo na skup Φ (kojeg smo definirali u prethodnom poglavlju) trebati dodati i uvjete
$$\nabla\psi \in L^p(U), \qquad \operatorname{Cof} \nabla\psi \in L^q(U), \qquad \det \nabla\psi \in L^r(U).$$
Kako bi imali refleksivnost prostora (tako da možemo primijeniti Banach-Eberlein-Šmulianov teorem 2.9), trebamo još zahtijevati da su $p, q, r > 1$.

Za glavni rezultat trebaju nam još dva teorema o slaboj konvergenciji i limesima u prostoru $W^{1,p}(U)$. Naime, ne možemo očekivati da će skup Φ biti konveksan zbog čega nećemo moći direktno primijeniti Banach-Saks-Mazurov teorem 2.5. Taj problem otklonit će iduća dva teorema.

Napomena 6.6. Na prostorima $H^m(U) := W^{m,2}(U)$ definirana je norma kao $\| \cdot \|_{m,2,U}$, a ona je oblika
$$\|v\|_{m,U} := \|v\|_{m,2,U} = \left(\int_U \sum_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha v|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha v\|_{L^2(U)}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Teorem 6.7. *Neka je U domena u $\mathbb{R}^3$. Preslikavanje*
$$\gamma : W^{1,p}(U) \to L^{\frac{p}{2}}(U), \qquad \gamma(\psi) := \operatorname{Cof} \nabla\psi$$
dobro je definirano i neprekidno preslikavanje za svaki $p \geq 2$. Dodatno, ako je $(\varphi^k)_k$ niz u $W^{1,p}(U)$ takav da
$$\varphi^k \xrightarrow{w} \varphi, \qquad \operatorname{Cof} \nabla\varphi^k \xrightarrow{w} H \quad u \ L^q(U)$$
za $q \geq 1$, tada je $H = \operatorname{Cof} \nabla\varphi$.

Dokaz. Po Hölderovoj nejednakosti preslikavanje $(x, y) \in (L^p(U))^2 \to xy \in L^{\frac{p}{2}}(U)$ dobro je definirano i neprekidno za $p \geq 2$ odakle iz definicije kofaktora slijedi da je i preslikavanje γ dobro definirano i neprekidno.
Primijetimo kako se nalazimo u prostoru $\mathbb{R}^3$, zato možemo napisati

$$\begin{aligned}(\mathrm{Cof}\,\nabla\psi)_{i,j} &= \partial_{i+1}\psi_{j+1}\partial_{i+2}\psi_{j+2} - \partial_{i+2}\psi_{j+1}\partial_{i+1}\psi_{j+2} = \\ &= \partial_{i+1}\psi_{j+1}\partial_{i+2}\psi_{j+2} - \partial_{i+2}\psi_{j+1}\partial_{i+1}\psi_{j+2} + \psi_{j+2}\partial_{i+2}\partial_{i+1}\psi_{j+1} - \psi_{j+2}\partial_{i+2}\partial_{i+1}\psi_{j+1} = \\ &= \partial_{i+2}(\psi_{j+2}\partial_{i+1}\psi_{j+1}) - \partial_{i+1}(\psi_{j+2}\partial_{i+2}\psi_{j+1})\end{aligned} \tag{25}$$

gdje indekse gledamo modulo 3 (tj. $4 \to 1$ i sl.). Greenova formula $B.3$ nam za sve funkcije $\psi \in C^2(\overline{U})$ i sve $\theta \in \mathcal{D}(U)$ daje

$$\int_U (\mathrm{Cof}\,\nabla\psi)_{i,j}\theta dx = -\int_U \psi_{j+2}\partial_{i+1}\psi_{j+1}\partial_{i+2}\theta dx + \int_U \psi_{j+2}\partial_{i+2}\psi_{j+1}\partial_{i+1}\theta dx. \tag{26}$$

Za fiksnu funkciju $\theta \in \mathcal{D}(U)$, funkcije s lijeve i desne strane jednakosti (26) (varijabla je ψ) su neprekidne u normi $\|\cdot\|_{1,U}$ (na prostoru $C^2(\overline{U})$) jer postoje konstante $c_1(\theta)$ i $c_2(\theta)$ takve da

$$\begin{aligned}\left|\int_U (\mathrm{Cof}\,\nabla\psi)_{i,j}\theta dx\right| &\leq \sup_{x\in U}|\theta(x)| \int_U |(\mathrm{Cof}\,\nabla\psi)_{i,j}| dx = \|(\mathrm{Cof}\,\nabla\psi)_{i,j}\|_{0,1,U}\|\theta\|_{0,\infty,U} \leq c_1(\theta)\|\psi\|_{1,U}^2, \\ \left|\int_U \psi_i\partial_j\psi_k\partial_l\theta dx\right| &\leq \underbrace{\|\psi_i\|_{0,U}}_{\leq\|\psi\|_{1,U}}\underbrace{\|\psi_k\|_{1,U}}_{\leq\|\psi\|_{1,U}}\|\theta\|_{1,\infty,U} \leq c_2(\theta)\|\psi\|_{1,U}^2\end{aligned} \tag{27}$$

(nejednakosti su detaljnije objašnjene u Napomeni 6.8) pa tvrdnja (26) vrijedi i za sve funkcije $\psi \in H^1(U)$, a onda i za sve funkcije iz skupa $W^{1,p}(U)$ za $p \geq 2$ jer je skup $C^2(\overline{U})$ gust u skupu $W^{1,p}(U)$, $p \geq 2$, prema Teoremu 3.5.

Hölderova nejednakost govori da je preslikavanje

$$B : L^r(U) \times W^{1,p}(U) \to \mathbb{R}, \quad B(\xi, \eta) := \int_U \xi\partial_j\eta\partial_m\theta dx, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{r} \leq 1$$

neprekidno za fiksnu funkciju $\theta \in \mathcal{D}(U)$ te po Teoremu $A.6$-3. vrijedi

$$\xi^k \to \xi \ \text{ u } \ L^r(U), \ \ \eta^k \xrightarrow{w} \eta \ \text{ u } \ W^{1,p}(U) \Rightarrow B(\xi^k, \eta^k) \to B(\xi, \eta)$$

tj.

$$\int_U \xi^k\partial_j\eta^k\partial_m\theta dx \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_U \xi\partial_j\eta\partial_m\theta dx. \tag{28}$$

Po Teoremu 3.4 vrijedi

$$W^{1,p}(U) \Subset L^r(U), \qquad \forall r \in [1, p^*\rangle \tag{29}$$

gdje je $p^* := \frac{3p}{3-p}$ ako je $p < 3$, odnosno $p^* = \infty$ ako je $p \geq 3$. Ako odaberemo r takav da vrijedi $r \leq p^*$ i $\frac{1}{p} + \frac{1}{r} \leq 1$ (takav očito postoji), tada (29) kaže da slaba konvergencija $\varphi^n \xrightarrow{w} \varphi$ u $W^{1,p}(U)$ implicira jaku konvergenciju $\varphi_n \to \varphi$ u $L^r(U)$ po definiciji kompaktnog ulaganja. Ako uzmemo slabo konvergentan niz $\varphi^n \xrightarrow{w} \varphi$ u $W^{1,p}(U)$, tada po (28) imamo

$$\int_U \varphi_i^n\partial_j\varphi_k^n\partial_m\theta dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_U \varphi_i\partial_j\varphi_k\partial_m\theta dx \tag{30}$$

odakle iz (26) slijedi

$$\int_U (\operatorname{Cof} \nabla \varphi^n)_{i,j} \theta dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_U (\operatorname{Cof} \nabla \varphi)_{i,j} \theta dx. \tag{31}$$

Po pretpostavci vrijedi

$$\int_U (\operatorname{Cof} \nabla \varphi^n)_{i,j} \theta dx \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_U H_{i,j} \theta dx$$

odakle zajedno s (31) imamo da svaka funkcija $(\operatorname{Cof} \nabla \varphi - H)_{i,j} \in L^1(U)$ zadovoljava

$$\int_U (\operatorname{Cof} \nabla \varphi - H)_{i,j} \theta dx = 0, \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(U). \tag{32}$$

Po Osnovnoj lemi varijacijskog računa 3.1 slijedi kako je $(\operatorname{Cof} \nabla \varphi - H)_{i,j} = 0$ g.s. na U odakle slijedi tvrdnja. □

Napomena 6.7. Prethodni teorem kaže kako je skup

$$\{(\psi, K) \in W^{1,p}(U) \times L^q(U) : K = \operatorname{Cof} \nabla \psi\}$$

nizovno slabo zatvoren za $p \geq 2$ i $q \geq 1$. No, može se pokazati kako skup

$$\{\psi \in W^{1,p}(U) : \operatorname{Cof} \nabla \psi \in L^q(U)\}$$

nije uvijek nizovno slabo zatvoren u $W^{1,p}(U)$ za $p \geq 2$ i $q \geq 1$.

Napomena 6.8. Vrijedi

$$\|\nabla \psi\|^2_{L^2(U)} \leq \|\psi\|^2_{L^2(U)} + \|\nabla \psi\|^2_{L^2(U)} = \|\psi\|^2_{H^1(U)}. \tag{33}$$

Dalje računamo

$$\|(\operatorname{Cof} \nabla \psi)_{i,j}\|_{0,1,U} = \int_U |(\operatorname{Cof} \nabla \psi)_{i,j}| dx \overset{(25)}{\leq} \int_U |\partial_{i+1}\psi_{j+1}\partial_{i+2}\psi_{j+2}| + |\partial_{i+2}\psi_{j+1}\partial_{i+1}\psi_{j+2}| dx$$

te vrijedi

$$\int_U |\partial_{i+1}\psi_{j+1}\partial_{i+2}\psi_{j+2}| \overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int_U |\partial_{i+1}\psi_{j+1}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_U |\partial_{i+2}\psi_{j+2}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq c_2 \|\nabla \psi\|_{L^2(U)}$$

za neku konstantu $c_2 > 0$ i za sve i, j. Ako primijenimo (33) na prethodni izraz, dobijemo

$$\|(\operatorname{Cof} \nabla \psi)_{i,j}\|_{0,1,U} \leq c_3 \|\psi\|_{H^1(U)}$$

za neku konstantu $c_3 > 0$. Analogno se dobije i druga nejednakost iz dokaza teorema.

Uočimo kako je trilinearna forma

$$(x, y, z) \in (L^p(U))^3 \to xyz \in L^{\frac{p}{3}}(U) \tag{34}$$

po Hölderovoj nejednakosti dobro definirana i neprekidna za $p \geq 3$. Zatim promotrimo funkciju

$$\Lambda : W^{1,p}(U) \to L^1(U), \quad \Lambda(\varphi) := \det \nabla \varphi = \sum \alpha_{ijk}\beta_{klm}\partial_k\varphi_i\partial_m\varphi_j\partial_n\varphi_k.$$

Postavlja se pitanje dobre definiranosti i neprekidnosti funkcije Λ. Direktna primjena Hölderove nejednakosti na Λ daje dobru definiranost i neprekidnost, ali za $p \geq 3$ prema (34). Zanima nas je li moguće postići isti rezultat za $p \geq 2$. Uočimo da determinantu možemo zapisati preko kofaktora tako da vrijedi

$$\det \nabla\varphi = \sum_{j=1}^{3} \partial_j \varphi_1 (\mathrm{Cof}\, \nabla\varphi)_{1j}.$$

Odabir prvog retka nije bitan, tj. tvrdnja vrijedi za svaki redak. Sljedeći teorem odgovara na naše pitanje.

Teorem 6.8. *Neka je U domena u $\mathbb{R}^3$. Tada je za sve $p \geq 2$ i $q \in \mathbb{R}$ takve da $\frac{1}{s} := \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$ preslikavanje*

$$\gamma : W^{1,p}(U) \times L^q(U) \to L^s(U), \qquad \gamma(\psi, \mathrm{Cof}\, \nabla\psi) := \sum_{j=1}^{3} \partial_j \psi_1 (\mathrm{Cof}\, \nabla\psi)_{1j}$$

dobro definirano i neprekidno. Dodatno, slabe konvergencije

(i) $\varphi^k \overset{w}{\to} \varphi$ *u* $W^{1,p}(U)$ *za* $p \geq 2$,

(ii) $\mathrm{Cof}\, \nabla\varphi^k \overset{w}{\to} H$ *u* $L^q(U)$ *za* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$,

(iii) $\det \nabla\varphi^k \overset{w}{\to} \delta$ *u* $L^r(U)$ *za* $r \geq 1$

povlače

$$H = \mathrm{Cof}\, \nabla\varphi, \qquad \delta = \det \nabla\varphi.$$

Dokaz. Opet je po Hölderovoj nejednakosti (bilinearno) preslikavanje γ dobro definirano i neprekidno. Uočimo, ako je $\psi \in C^2(\overline{U})$, tada je

$$\sum_{j=1}^{3} \partial_j (\mathrm{Cof}\, \nabla\psi)_{1j} = 0 \tag{35}$$

što je posljedica Piolinog identiteta 4.3, $\operatorname{div} \mathrm{Cof}\, \nabla\psi = 0$. Zato vrijedi

$$\sum_{j=1}^{3} \partial_j \big(\psi_1 (\mathrm{Cof}\, \nabla\psi)_{1j}\big) = \sum_{j=1}^{3} \partial_j \psi_1 (\mathrm{Cof}\, \nabla\psi)_{1j} + \psi_1 \underbrace{\sum_{j=1}^{3} \partial_j (\mathrm{Cof}\, \nabla\psi)_{1j}}_{=0} = \det \nabla\psi, \quad \forall \psi \in C^2(\overline{U}) \tag{36}$$

Greenova formula $B.3$ daje

$$\int_U \partial_j \psi_1 (\mathrm{Cof}\, \nabla\psi)_{1j} \theta dx = -\int_U \psi_1 (\mathrm{Cof}\, \nabla\psi)_{1j} \partial_j \theta dx, \qquad \forall \psi \in C^2(\overline{U}),\ \forall \theta \in \mathcal{D}(U),$$

gdje nema rubnog uvjeta jer funkcija θ ima kompaktni nosač sadržan u U. Cilj nam je dokazati prethodni izraz za sva preslikavanja $\psi \in W^{1,p}(U)$, $p \geq 2$. Ovdje ne možemo, kao u prethodnom teoremu, primijeniti direktni argument gustoće prostora $C^2(\overline{U})$ u $W^{1,p}(U)$ jer preslikavanje s lijeve strane posljednje jednakosti nije neprekidno s obzirom na normu $\|\cdot\|_{1,p,U}$ ako je $p < 3$. Zato nastavljamo dodatnu analizu. Izraz (35) za svaki $\psi \in C^2(\overline{U})$ nam daje

$$\int_U \sum_{j=1}^{3} (\mathrm{Cof}\,\nabla\psi)_{1j}\partial_j\eta dx \overset{P.I.}{=} -\int_U \underbrace{\sum_{j=1}^{3} \partial_j(\mathrm{Cof}\,\nabla\psi)_{1j}}_{=0}\,\eta dx = 0, \qquad \forall \eta \in \mathcal{D}(U)$$

gdje nema rubnog člana jer funkcija η ima kompaktni nosač sadržan u U.
Za fiksni $\eta \in \mathcal{D}(U)$ preslikavanje

$$\psi \in C^2(\overline{U}) \to \int_U (\mathrm{Cof}\,\nabla\psi)_{1j}\partial_j\eta dx$$

je neprekidno ako na $C^2(\overline{U})$ promatramo normu $\|\cdot\|_{1,p,U}$, $p \geq 2$ jer je

$$\begin{aligned}\left|\int_U (\mathrm{Cof}\,\nabla\psi)_{1j}\partial_j\eta dx\right| &\leq \sup \|\partial_j\eta\|_{L^\infty(U)} \int_U |(\mathrm{Cof}\,\nabla\psi)_{1j}| dx \\ &\leq \|\,\mathrm{Cof}\,\nabla\psi\|_{0,1,U}\|\eta\|_{1,\infty,U} \leq c_1\|\psi\|_{1,p,U}\|\eta\|_{1,\infty,U}\end{aligned}$$

za neku konstantu $c_1 > 0$. Kako je $C^2(\overline{U})$ gust u $W^{1,p}(U)$, po neprekidnosti slijedi

$$\int_U \sum_{j=1}^{3} (\mathrm{Cof}\,\nabla\psi)_{1j}\partial_j\eta dx = 0, \qquad \forall \psi \in W^{1,p}(U),\ p \geq 2,\ \forall \eta \in \mathcal{D}(U).$$

Pokažimo sada kako za svaku funkciju $\psi \in W^{1,p}(U)$ i svaku funkciju $w \in L^{p'}(U)$, gdje je $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, koja zadovoljava

$$\int_U w_j\partial_j\eta dx = 0, \qquad \forall \eta \in \mathcal{D}(U)$$

vrijedi

$$-\int_U \psi w_j\partial_j\theta dx = \int_U (\partial_j\psi)w_j\theta dx, \qquad \forall \theta \in \mathcal{D}(U). \tag{37}$$

Ako fiksiramo w i θ, tada s obje strane jednakosti imamo definiran neprekidan funkcional (varijabla je ψ). Kako je prema Teoremu 3.5 $C^\infty(\overline{U})$ gust u $W^{1,p}(U)$, to možemo uzeti $\psi \in C^\infty(\overline{U})$ pa po neprekidnosti proširiti na sve funkcije iz $W^{1,p}(U)$ i dobiti tvrdnju. Očito je $\psi\theta \in \mathcal{D}(U)$ pa iz pretpostavke imamo

$$0 = \int_U w_j\partial_j(\psi\theta)dx = \int_U \psi w_j\partial_j\theta dx + \int_U (\partial_j\psi)w_j\theta dx$$

što je upravo (37). Uzmemo li $\psi := \psi_1$ i $w_j := (\mathrm{Cof}\,\nabla\psi)_{1,j}$ dobivamo

$$-\int_U \psi_1(\mathrm{Cof}\,\nabla\psi)_{1,j}\partial_j\theta dx = \int_U \partial_j\psi_1(\mathrm{Cof}\,\nabla\psi)_{1,j}\theta dx, \qquad \forall \psi \in W^{1,p}(U),\ \forall \theta \in \mathcal{D}(U), \tag{38}$$

dakle proširili smo izraz dobiven iz Greenove formule na sve funkcije $\psi \in W^{1,p}(U)$.

Dalje pokažimo kako slabe konvergencije $\varphi^k \overset{w}{\to} \varphi$ u $W^{1,p}(U)$ te $\mathrm{Cof}\,\nabla\varphi^k \overset{w}{\to} \mathrm{Cof}\,\nabla\varphi$ u $L^{p'}(U)$ impliciraju da za svaku funkciju $\theta \in \mathcal{D}(U)$ vrijedi

$$\int_U (\det \nabla\varphi^k)\theta dx \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_U (\det\nabla\varphi)\theta dx. \tag{39}$$

Kako je determinanta dana kao $\det\nabla\psi = \sum_{j=1}^3 \partial_j(\psi_1(\mathrm{Cof}\,\nabla\psi)_{1j})$, to je prema (38) dovoljno pokazati

$$\int_U \varphi_1^k(\mathrm{Cof}\,\nabla\varphi^k)_{1,j}\partial_j\theta dx \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_U \varphi_1(\mathrm{Cof}\,\nabla\varphi)_{1,j}\partial_j\theta dx.$$

Već smo prije teorema ustanovili kako vrijedi gornja konvergencija (39) kada je $p \geq 3$. Promotrimo sada slučaj kada je $2 \leq p < 3$. Pokažimo prvo kako slaba konvergencija $\varphi^k \overset{w}{\to} \varphi$ u $W^{1,p}(U)$ povlači jaku konvergenciju $\varphi^k \to \varphi$ u $L^s(U)$ gdje je $\frac{1}{s} + \frac{1}{p'} \leq 1$. Odaberimo $s < p^* = \frac{3p}{3-p} = \frac{1}{\frac{1}{p}-\frac{1}{3}}$, što možemo jer je

$$\frac{1}{p^*} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{p} - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{p} = \frac{2}{3} < 1.$$

pa postoji s takav da je $1 < s < p^*$ i $\frac{1}{s} + \frac{1}{p'} \leq 1$. Po Teoremu 3.4-1. dio slijedi kompaktna uloženost prostora $W^{1,p}(U) \Subset L^s(U)$ zbog čega imamo jaku konvergenciju $\varphi^k \to \varphi$ u $L^s(U)$. Kao i u prethodnom teoremu, slijedi konvergencija u (39) prema Teoremu $A.6$ za nizove $\varphi^k \to \varphi$ i $\mathrm{Cof}\,\nabla\varphi^k \overset{w}{\to} \mathrm{Cof}\,\nabla\varphi$.
Po prethodnome, za $\varphi^k \overset{w}{\to} \varphi$ u $W^{1,p}(U)$ imamo konvergenciju

$$\int_U (\det\nabla\varphi^k)\theta dx \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_U (\det\nabla\varphi)\theta dx, \quad \forall\theta \in \mathcal{D}(U).$$

Po pretpostavci vrijedi

$$\int_U (\det\nabla\varphi^k)\theta dx \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_U \delta\theta dx, \quad \forall\theta \in \mathcal{D}(U).$$

Kao i u prethodnom teoremu, zaključujemo kako funkcije $(\det\nabla\varphi - \delta)\theta \in L^1(U)$ zadovoljavaju

$$\int_U (\det\nabla\varphi - \delta)\theta dx = 0, \quad \forall\theta \in \mathcal{D}(U)$$

odakle po Osnovnoj lemi varijacijskog računa 3.1 slijedi tvrdnja. Tvrdnja $H = \mathrm{Cof}\,\nabla\varphi$ slijedi analogno. □

Napomena 6.9. Prethodni teorem kaže kako je skup

$$\{(\psi, K, \delta) \in W^{1,p}(U) \times L^q(U) \times L^r(U) \,:\, K = \mathrm{Cof}\,\nabla\psi,\ \delta = \det\nabla\psi\}$$

nizovno slabo zatvoren u prostoru $W^{1,p}(U) \times L^q(U) \times L^r(U)$.

Teorem 6.9 (John Ball). *Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^3$ domena i neka je $W : U \times \mathbb{M}^3_+ \to \mathbb{R}$ funkcija sa sljedećim svojstvima:*

1. *polikonveksnost: za g.s. $x \in U$ postoji konveksna funkcija $K(x,\cdot) : \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ takva da*
$$W(x,F) = K(x, F, \mathrm{Cof}\,F, \det F), \quad \forall F \in \mathbb{M}^3_+, \tag{40}$$

2. *izmjerivost: funkcija* $K(\cdot, F, H, \delta) : U \to \mathbb{R}$ *izmjeriva je za svaki* $(F, H, \delta) \in \mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times \langle 0, +\infty \rangle$,

3. *koercitivnost: postoje konstante* $p \geq 2$, $q \geq \frac{p}{p-1}$, $r > 1$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ *t.d. za g.s.* $x \in U$ *vrijedi*
$$W(x, F) \geq \alpha(|F|^p + |\operatorname{Cof} F|^q + (\det F)^r) + \beta, \tag{41}$$

4. *za g.s.* $x \in U$ *vrijedi*
$$\det F \searrow 0 \Rightarrow W(x, F) \to \infty. \tag{42}$$

Nadalje, neka je $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ *izmjerivi podskup ruba* $\Gamma := \partial U$ *površine* $\mu(\Gamma_0) > 0$ *i neka je* $\varphi_0 : \Gamma_0 \to \mathbb{R}^3$ *izmjeriva funkcija takva da je skup*

$$\Phi := \{\psi \in W^{1,p}(U) : \operatorname{Cof} \nabla\psi \in L^q(U), \det \nabla\psi \in L^r(U), \psi = \varphi_0 \text{ g.s. na } \Gamma_0, \det \nabla\psi > 0 \text{ g.s. na } U\}$$

neprazan.
Na kraju, neka je L *neprekidan linearni operator na* $W^{1,p}(U)$ *i*

$$I(\psi) := \int_U W(x, \nabla\psi(x))dx - L(\psi)$$

funkcional takav da je
$$\inf_{\psi \in \Phi} I(\psi) < \infty.$$

Tada postoji najmanje jedna deformacija φ *takva da je*

$$\varphi \in \Phi, \quad I(\varphi) = \inf_{\psi \in \Phi} I(\psi).$$

Dokaz. 1. Kako bi tvrdnja imala smisla, prvo pokažimo kako je preslikavanje I dobro definirano, tj. da je integral
$$\int_U W(x, \nabla\psi(x))dx$$
dobro definiran. Budući da je $\mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times \langle 0, +\infty \rangle$ otvoren i konveksan podskup konačno dimenzionalnog prostora i funkcija K je za g.s. $x \in U$ konveksna, po Teoremu B.1 funkcija K je neprekidna za g.s. $x \in U$.

Po pretpostavci, K je izmjeriva u posljednje tri koordinate i neprekidna po prvoj, zato je i sama izmjeriva (čak štoviše, K je Caratheodoryjeva). Nadalje, po definiciji skupa Φ gledamo samo deformacije ψ takve da je $\det \nabla\psi(x) > 0$ g.s. na U zbog čega je

$$(\nabla\psi(x), \operatorname{Cof} \nabla\psi(x), \det \nabla\psi(x)) \in \mathbb{M}^3_+ \times \mathbb{M}^3_+ \times \langle 0, +\infty \rangle$$

pa za proizvoljnu deformaciju ψ imamo jednakost

$$W(x, \nabla\psi(x)) = K(x, \nabla\psi(x), \operatorname{Cof} \nabla\psi(x), \det \nabla\psi(x)).$$

Slijedi da je gornji integral dobro definiran kao integral izmjerive funkcije nad izmjerivim skupom.

2. Pronađimo donju ogradu za funkcional I na skupu Φ. Pretpostavljena nejednakost (41) daje nam
$$I(\psi) \geq \alpha \int_U \Big(|\nabla\psi|^p + |\operatorname{Cof}\nabla\psi|^q + (\det\nabla\psi)^r \Big) dx + \beta\mu(U) - \|L\|\|\psi\|_{1,p,U} \tag{43}$$
gdje smo podintegralnu funkciju omeđili po pretpostavci, funkcional L u vrijednosti ψ smo omeđili odozgo s $\|L\|\|\psi\|_{1,p,U}$ što možemo jer je po pretpostavci neprekidan pa i ograničen, a $\mu(U)$ označava mjeru skupa U. Kako je U domena, vrijedi $\mu(U) < \infty$. Kao i u Napomeni 6.5, uz pomoć Poincareove nejednakosti $B.4$, zaključujemo kako postoje konstante $c > 0$ i $d \in \mathbb{R}$ takve da
$$I(\psi) \geq c\Big(\|\psi\|_{1,p,U}^p + |\operatorname{Cof}\nabla\psi|_{0,q,U}^q + |\det\nabla\psi|_{0,r,U}^r \Big) + d, \quad \forall\psi \in \Phi. \tag{44}$$

3. Neka je $(\varphi^k)_k \subseteq \Phi$ za koji vrijedi
$$\lim_k I(\varphi^k) = \inf_{\psi\in\Phi} I(\psi).$$
Po pretpostavci je $\inf_{\psi\in\Phi} I(\psi) < \infty$ pa po (44) vrijedi
$$c\Big(\|\varphi^k\|_{1,p,U}^p + |\operatorname{Cof}\nabla\varphi^k|_{0,q,U}^q + |\det\nabla\varphi^k|_{0,r,U}^r \Big) + d < \infty, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$
Zato je niz $(\varphi^k, \operatorname{Cof}\nabla\varphi^k, \det\nabla\varphi^k)_k$ omeđen u prostoru $W^{1,p}(U) \times L^q(U) \times L^r(U)$. Taj prostor je (Banachov) refleksivan (jer su $p, q, r > 1$) pa po Banach-Eberlein-Šmulianovom teoremu 2.9 postoji podniz $(\varphi^l, \operatorname{Cof}\nabla\varphi^l, \det\nabla\varphi^l)_l$ koji slabo konvergira prema elementu (φ, H, δ) odakle po Teoremu 6.8 imamo
$$H = \operatorname{Cof}\nabla\varphi, \quad \delta = \det\nabla\varphi.$$

4. Kako bi zaključili da je φ traženi minimizator, trebamo pokazati $\varphi \in \Phi$. Ako pokažemo
$$\det\nabla\varphi > 0 \text{ g.s. na } U, \quad \varphi|_{\Gamma_0} = \varphi_0,$$
slijedit će $\varphi \in \Phi$. Vrijedi $\det\nabla\varphi^l \overset{w}{\to} \det\nabla\varphi$ u $L^r(U)$ pa po Banach-Saks-Mazurovom teoremu 2.5 za svaki $l \in \mathbb{N}$ postoje $i(l) \geq l$ i $\lambda_s^l \geq 0$ za $l \leq s \leq i(l)$ takvi da je $\sum_{s=l}^{i(l)} \lambda_s^l = 1$ i u $L^r(U)$ vrijedi
$$d^l := \sum_{s=l}^{i(l)} \lambda_s^l \det\nabla\varphi^s \xrightarrow{l\to\infty} \det\nabla\varphi.$$
Po Teoremu $A.3$ postoji podniz $(d^m)_m$ niza $(d^l)_l$ t.d. za g.s. $x \in U$ $(d^m(x))_m$ konvergira prema $\det\nabla\varphi(x)$. Kako je $\varphi^k \in \Phi$, vrijedi $\det\nabla\varphi^k > 0$ za svaki $k \in \mathbb{N}$ zbog čega je $d^l > 0$ pa kako $(d^l)_l \to \det\nabla\varphi$ zaključujemo kako je $\det\nabla\varphi \geq 0$. Pokažimo sada da i ovdje g.s. vrijedi stroga nejednakost. Pretpostavimo suprotno, tada postoji podskup $A \subseteq U$ t.d. $\mu(A) > 0$ i da je $\det\nabla\varphi|_A = 0$. Budući da su $\det\nabla\varphi^l > 0$ g.s. na A i $\det\nabla\varphi^l \overset{w}{\to} \det\nabla\varphi$ to iz slabe konvergencije slijedi
$$\int_A |\det\nabla\varphi^l| dx = \int_U \det\nabla\varphi^l 1_A dx \xrightarrow{l\to\infty} \int_U \det\nabla\varphi 1_A dx = \int_A \det\nabla\varphi dx = 0 \tag{45}$$

po definiciji slabe konvergencije jer je $f \in (L^r(U))'$ za $f(\psi) := \int_U \psi 1_A dx$. Posebno vrijedi

$$\int_A |\det \nabla \varphi^l| dx \overset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

tj. imamo $\det \nabla\varphi^l \to 0$ u $L^1(A)$. Zato po Teoremu $A.3$ postoji podniz $(\varphi^m)_m$ niza $(\varphi^l)_l$ takav da

$$\det \nabla\varphi^m(x) \to 0 \text{ za g.s. } x \in A.$$

Promotrimo funkcije $f_m : A \to \mathbb{R}$, $f_m(x) := W(x, \nabla\varphi^m(x))$. Za njih vrijedi $f_m \geq \beta$, za svaki $m \in \mathbb{N}$, pa možemo primijeniti Fatouovu lemu te dobivamo

$$\int_A \liminf_{m\to\infty} f_m(x)dx \leq \liminf_{m\to\infty} \int_A f_m(x)dx. \tag{46}$$

Po pretpostavci (42) iz teorema i kako vrijedi $\det \nabla\varphi^m(x) \to 0$ imamo

$$\liminf_{m\to\infty} f_m(x) = \liminf_{m\to\infty} W(x, \nabla\varphi^m(x)) = \lim_{m\to\infty} W(x, \nabla\varphi^m(x)) = +\infty \text{ za g.s. } x \in A.$$

Prethodni rezultat zajedno s (46) daje

$$+\infty \leq \liminf_{m\to\infty} \int_A f_m(x)dx = \lim_{m\to\infty} \int_A W(x, \nabla\varphi^m(x))dx. \tag{47}$$

Niz $(\varphi^k)_k$ odabran je tako da vrijedi $\lim_k I(\varphi^k) = \inf_{\varphi\in\Phi} I(\varphi) < \infty$ te je po definiciji ukupne energije I

$$+\infty > I(\varphi) \geq \int_A W(x, \nabla\varphi^m(x))dx - \|L\|\|\varphi^k\|_{1,p,U},$$

odakle zajedno s (47) dobivamo

$$+\infty \leq I(\varphi) < +\infty,$$

što je kontradikcija. Napomenimo da je izraz $\|L\|\|\psi\|_{1,p,U}$ omeđen jer je $(\varphi^m)_m$ slabo konvergentan niz pa je po Teoremu $A.5$ niz omeđen. Zaključujemo kako vrijedi $\det \nabla\varphi > 0$.

Jednakost $\varphi|_{\Gamma_0} = \varphi_0$ pokazuje se jednako kao i u Teoremu 6.6.

5. Pokažimo kako vrijedi

$$\int_U W(x, \nabla\varphi(x))dx \leq \liminf_{l\to\infty} \int_U W(x, \nabla\varphi^l(x))dx.$$

Za to je dovoljno pokazati da za svaki podniz $(\varphi^m)_m$ niza $(\varphi^l)_l$, takav da niz

$$\left(\int_U W(x, \nabla\varphi^m(x))dx\right)_m$$

konvergira, vrijedi

$$\int_U W(x, \nabla\varphi(x))dx \leq \lim_{m\to\infty} \int_U W(x, \nabla\varphi^m(x))dx.$$

Stoga uzmimo takav podniz $(\varphi^m)_m$ niza $(\varphi^l)_l$. Svaki podniz slabo konvergentnog niza slabo konvergira prema istom limesu, zato vrijedi $\varphi^m \overset{w}{\to} \varphi$ pa po Banach-Saks-Mazurovom teoremu 2.5 za svaki $m \in \mathbb{N}$ postoji $j(m) \in \mathbb{N}$, $m \leq j(m)$ i brojevi $\mu_t^m \geq 0$ za $m \leq t \leq j(m)$ takvi da je $\sum_{t=m}^{j(m)} \mu_t^m = 1$ i takvi da niz

$$D^m := \sum_{t=m}^{j(m)} \mu_t^m (\nabla\varphi^t, \operatorname{Cof} \nabla\varphi^t, \det \nabla\varphi^t) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} (\nabla\varphi, \operatorname{Cof} \nabla\varphi, \det \nabla\varphi)$$

konvergira jako u prostoru $L^p(U) \times L^q(U) \times L^r(U)$. Kao i prije, po Teoremu $A.3$ postoji podniz $(D^n)_n$ niza $(D^m)_m$ takav da za g.s. $x \in U$ vrijedi

$$\sum_{t=n}^{j(n)} \mu_t^n (\nabla\varphi^t(x), \operatorname{Cof} \nabla\varphi^t(x), \det \nabla\varphi^t(x)) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (\nabla\varphi(x), \operatorname{Cof} \nabla\varphi(x), \det \nabla\varphi(x)). \tag{48}$$

Po prvom dijelu dokaza, funkcija $K(x,\cdot)$ neprekidna je na $\mathbb{M}^3 \times \mathbb{M}^3 \times \langle 0, \infty\rangle$ za g.s. $x \in U$ pa vrijedi

$$\begin{aligned} W(x, \nabla\varphi(x)) &\overset{(40)}{=} K(x, \nabla\varphi(x), \operatorname{Cof} \nabla\varphi(x), \det \nabla\varphi(x)) \overset{\text{neprekidnost i (48)}}{=} \\ &= \lim_{n\to\infty} K\left(x, \sum_{t=n}^{j(n)} \mu_t^n (\nabla\varphi^t(x), \operatorname{Cof} \nabla\varphi^t(x), \det \nabla\varphi^t(x))\right) \end{aligned}$$

za g.s. $x \in U$ te možemo iskoristiti (40) jer je $\det \nabla\varphi(x) > 0$. Dalje računamo

$$\begin{aligned} \int_U W(x, \nabla\varphi(x)) &= \int_U \lim_{n\to\infty} K\left(x, \sum_{t=n}^{j(n)} \mu_t^n (\nabla\varphi^t(x), \operatorname{Cof} \nabla\varphi^t(x), \det \nabla\varphi^t(x))\right) dx \overset{\text{Fatouova lema}}{\leq} \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_U K\left(x, \sum_{t=n}^{j(n)} \mu_t^n (\nabla\varphi^t(x), \operatorname{Cof} \nabla\varphi^t(x), \det \nabla\varphi^t(x))\right) dx \overset{\text{konveksnost } K}{\leq} \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \sum_{t=n}^{j(n)} \mu_t^n \int_U W(x, \nabla\varphi^t(x)) dx \overset{\text{Teorem } B.5 \text{ i odabir podniza } n}{=} \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_U W(x, \nabla\varphi^n(x)) dx = \\ &= \lim_{m\to\infty} \int_U W(x, \nabla\varphi^m(x)) dx. \end{aligned}$$

Zaključujemo kako vrijedi

$$\int_U W(x, \nabla\varphi(x)) dx \leq \liminf_{l\to\infty} \int_U W(x, \nabla\varphi^l(x)) dx. \tag{49}$$

L je neprekidan linearni funkcional pa po definiciji slabe konvergencije vrijedi

$$L(\varphi) = \lim_{l\to\infty} L(\varphi^l)$$

što zajedno s (49) daje

$$I(\varphi) \leq \liminf_{l \to \infty} I(\varphi^l) \overset{\text{odabir podniza } (\varphi^l)_l}{=} \inf_{\psi \in \Phi} I(\psi).$$

U četvrtom koraku dokazali smo da je $\varphi \in \Phi$, a iz prethodnog je $I(\varphi) = \inf_{\psi \in \Phi} I(\psi)$ što je i trebalo pokazati.

$\square$

A Funkcionalna analiza

Teorem A.1 ([4, str. 15, Propozicija 1.3.2]). *Za linearni funkcional f ekvivalentno je (s obzirom na jaku topologiju, tj. onu induciranu normom):*

1. *f je ograničen operator;*
2. *f je uniformno neprekidan operator;*
3. *f je neprekidan operator;*
4. *f je neprekidan u jednoj točki.*

Teorem A.2 ([7, str. 11]). *Neka su X i Y normirani prostori te $A \in \mathbb{B}(X,Y)$. Tada je*

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}.$$

Teorem A.3 ([20, str. 54, Propozicija 8.7]). *Neka je $(f_n)_n$ konvergentan niz u $L^p(U)$ za $p \in [1,\infty\rangle$ i neka je $f \in L^p(U)$ limes tog niza. Tada postoji podniz $(f_{n_k})_k$ niza $(f_n)_n$ t.d. za g.s. $x \in U$ vrijedi $\lim_k f_{n_k}(x) = f(x)$.*

Teorem A.4 ([11, str. 96, Korolar 4.21]). *Neka je X Banachov i Y normiran vektorski prostor. Tada je skup*

$$GL(X,Y) := \{A \in \mathcal{L}(X,Y) : A : X \to Y \text{ je bijekcija i } A^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)\}$$

otvoren u $\mathcal{L}(X,Y)$. Ako je $A \in GL(X,Y)$ onda je $B \in GL(X,Y)$ ako je $\|A-B\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$ i tada je

$$B^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (I - A^{-1}B)^n A^{-1} \in GL(Y,X);$$

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}(B-A)\|};$$

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|^2 \|B-A\|}{1 - \|A^{-1}(B-A)\|}.$$

Posebno je preslikavanje $A \to A^{-1}$ neprekidno.

Teorem A.5 ([9, str. 288, Teorem 5.12-2]). *Neka je $(x_n)_n$ slabo konvergentan niz u normiranom prostoru X t.d. $x_n \xrightarrow{w} x$. Tada je slabi limes x jedinstven, niz $(x_n)_n$ je omeđen i vrijedi*

$$\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|.$$

Teorem A.6 ([9, str. 290, Teorem 5.12-4]). *Neka su X i Y normirani vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Tada*

1. *za $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ vrijedi*
$$x_n \xrightarrow{w} x \Longrightarrow Ax_n \xrightarrow{w} Ax;$$

2. za $A \in \mathcal{L}(X, Y)$*, A kompaktan, vrijedi*

$$x_n \xrightarrow{w} x \Longrightarrow Ax_n \to Ax;$$

3. za $B \in \mathcal{L}_2(X \times Y, \mathbb{F})$ *vrijedi*

$$x_n \xrightarrow{w} x, y_n \to y \Longrightarrow B(x_n, y_n) \to B(x, y).$$

Uočimo kako je u prethodnom teoremu u (b) dijelu jaka konvergencija s desne strane te kako u (c) tvrdnji niz $(y_n)_n$ konvergira jako.

Teorem A.7 (**Banach-Alaoglu**, [12, str. 256., Teorem 8.10])**.** *Neka je* X *normiran prostor, tada je zatvorena jedinična kugla* $\{f \in X' : \|f\| \leq 1\}$ *kompaktan skup u slaboj* topologiji prostora* X'*.*

Teorem A.8 (**Kakutani**)**.** *Neka je* X *Banachov prostor. Tada je* $K(0, 1)$ *slabo kompaktan skup ako i samo ako je* X *refleksivan.*

Dokaz se može pronaći u [16, str. 75., Teorem 3.31] ili u [8, str. 67, Teorem 3.17].

Teorem A.9 ([25, str. 49])**.** *Neka je* X *Banachov prostor i* $A \subseteq X$*. Tada je ekvivalentno:*

1. $\overline{A}^w$ *je slabo kompaktan, tj. A je relativno slabo kompaktan;*

2. *A je omeđen i* $\overline{\varphi[A]}^{w^*} \subseteq \varphi[X]$*,*

gdje je $\varphi : X \to X''$ *ulaganje definirano s* $\varphi(x) := \hat{x}$ *te je* $\hat{x}(f) := f(x)$*.*

Dokaz. Teorem je direktna posljedica Banach-Alaogluovog teorema $A.7$ jer su svi funkcionali $\hat{x}(f) = f(x)$ neprekidni u slaboj* topologiji. □

Teorem A.10 ([4, str. 68])**.** *Neka je* X *normiran prostor i* X_0 *neki potprostor. Uzmimo* $x_1 \in X$ *za koji vrijedi* $d := d(x_1, X_0) = \inf\{\|x_1 - x\| : x \in X_0\} > 0$*. Tada postoji* $f \in X'$*,* $\|f\| = 1$ *za koji vrijedi*

$$f(x_1) = d, \quad f(x) = 0, \ \forall x \in X_0.$$

B Analiza

Teorem B.1 ([9, str. 118, Teorem 2.17-1])**.** *Neka je $U \subseteq X$ konveksan podskup konačno dimenzionalnog prostora X. Tada je konveksna funkcija $f : U \to \mathbb{R}$ i neprekidna.*

Teorem B.2 ([9, str. 55, Teorem 2.3-3])**.** *Neka je X topološki prostor te Y normiran vektorski prostor. Neka je $(f_n)_n$ niz funkcija, $f_n : X \to Y$, koji konvergira lokalno uniformno prema funkciji $f : X \to Y$. Ako su preslikavanja f_n neprekidna u točki $x \in X$ (na cijelom X), tada je i f neprekidna u x (na cijelom X).*

Više o iduća dva teorema može se pronaći u [23, str. 49 i str. 69].

Teorem B.3 (**Greenova formula**, [9, str. 336])**.** *Neka je U domena u $\mathbb{R}^N$ i $n = (n_1, \cdots, n_N)$ vanjska jedinična normala na ∂U. Neka su $1 \leq p, q < \infty$ takvi da*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + \frac{1}{N}$$

tako da vrijedi jedan od sljedećih uvjeta:

1. $1 \leq p, q < N$;
2. $1 < q$ *i* $N \leq p$;
3. $1 < p$ *i* $N \leq q$.

Za funkcije $u \in W^{1,p}(U)$ i $v \in W^{1,q}(U)$ svaka funkcija uvn_i, $1 \leq i \leq N$ pripada skupu $L^1(\partial U)$ te vrijedi

$$\int_U u\partial_i v dx = -\int_U (\partial_i u) v dx + \int_{\partial U} uvn_i d\Gamma.$$

Teorem B.4 (**generalizirana Poincare-Friedrichsova nejednakost**, [9, str. 336])**.** *Neka je U domena u $\mathbb{R}^n$ i $1 \leq p < \infty$.*

1. *Tada postoji konstanta c_0 takva da*

$$\int_U |v|^p dx \leq c_0 \left(\int_U \sum_{i=1}^n |\partial_i v|^p dx + \left| \int_U v dx \right|^p \right), \qquad \forall v \in W^{1,p}(U).$$

2. *Neka je $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ izmjeriv podskup t.d. $\mu(\Gamma_0) > 0$. Tada postoji konstanta c_2 takva da je*

$$\|v\|_{1,p,U} \leq c_2 |v|_{1,p,U}$$

   za sve $v \in W^{1,p}(U)$ za koje je $v = 0$ na Γ_0.

3. *Neka je $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ izmjeriv podskup t.d. $\mu(\Gamma_0) > 0$. Tada postoji konstanta c_1 takva da*

$$\int_U |v|^p dx \leq c_1 \left(\int_U \sum_{i=1}^n |\partial_i v|^p dx + \left| \int_{\Gamma_0} v d\Gamma \right|^p \right)$$

   za svaki $v \in W^{1,p}(U)$.

Teorem B.5. *Neka je* $(a_n)_n$ *konvergentan niz realnih brojeva. Neka za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *postoji* $j(n) \in \mathbb{N}$ *t.d. je* $n \leq j(n)$. *Neka su za svaki* $t \in \{n, \dots, j(n)\}$ *dani brojevi* $\mu_t^n \geq 0$ *t.d.* $\sum_{t=n}^{j(n)} \mu_t^n = 1$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *Tada je niz*

$$b_n := \sum_{t=n}^{j(n)} \mu_t^n a_t$$

konvergentan i vrijedi

$$\lim_n a_n = \lim_n b_n.$$

C Topologija

Definicija C.1. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Tada je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ baza topologije $\mathcal{T}$ ako za svaki $U \in \mathcal{T}$ postoji skup A i familija skupova $(B_\alpha)_{\alpha \in A} \subseteq \mathcal{B}$ takva da vrijedi*

$$U = \bigcup_{\alpha \in A} B_\alpha.$$

Definicija C.2. *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor te $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}$. Tada je $\mathcal{P}$* ***predbaza*** *topologije ako je familija skupova $\{P_1 \cap \cdots \cap P_n : n \in \mathbb{N}, P_i \in \mathcal{P}\}$ baza topologije $\mathcal{T}$.*

Teorem C.1 ([14, Propozicija 2.10])**.** *Neka su $(X, \mathcal{T})$ i $(Y, \mathcal{S})$ topološki prostori te $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{S}$ predbaza topologije. Tada je funkcija $f : X \to Y$ neprekidna ako i samo ako je $f^{\leftarrow}[P] \in \mathcal{T}$ za svaki $P \in \mathcal{P}$.*

Teorem C.2 ([14, str. 11])**.** *Neka je X metrički prostor te $A \subseteq X$. Podskup A zatvoren je skup ako i samo ako za svaki niz $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ t.d. $\lim_n x_n = x$ u X vrijedi $x \in A$.*

Teorem C.3 ([14, Propozicija 5.4])**.** *Neka je X topološki prostor i $A \subseteq X$ neki podskup. Tada je $x \in \overline{A}$ ako i samo ako za svaku otvorenu okolinu U točke x vrijedi $U \cap A \neq \emptyset$.*

Napomena C.1. Neka je A neki skup i $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ topološki prostor za svaki $\alpha \in A$. Tada je

$$\left(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha, \mathcal{R} \right)$$

produktni topološki prostor gdje je $\mathcal{R}$ topologija inducirana bazom $\mathcal{B}$ koja je dana kao

$$\mathcal{B} := \left\{ \prod_{\alpha \in A} U_\alpha : U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha,\, U_\alpha = X_\alpha \text{ za sve osim konačno mnogo } \alpha \right\}.$$

Teorem C.4. *Neka je X metrički prostor i $A \subseteq X$. Tada je ekvivalentno:*

1. *A je kompaktan;*
2. *Svaki niz u A ima konvergentan podniz čiji je limes sadržan u A;*
3. *Svaki niz u A ima gomilište u A.*

Dokaz. Ekvivalencija 1. $\Leftrightarrow$ 3. dana je u [14]: Teorem 9.8, Teorem 9.9.

Neka vrijedi tvrdnja 3., tj. svaki niz u A ima gomilište u A. Uzmimo $(x_n)_n$ niz u A koji ima gomilište x. Svaka kugla $K\big(x, \frac{1}{k}\big)$ sadrži beskonačno članova niza $(x_n)_n$ za svaki $k \in \mathbb{N}$ pa možemo odabrati x_{n_k} kao prozvoljni član skupa $(x_n)_n \cap K\big(x, \frac{1}{k}\big)$. Očito vrijedi $\lim_k x_{n_k} = x$.

Neka vrijedi 2., tj. svaki niz ima konvergentan podniz čiji je limes sadržan u A, tada je limes tog podniza gomilište početnog niza pa vrijedi tvrdnja pod 3. $\square$

Literatura

[1] Fernando Albiac, Nigel J. Kalton: *Topics in Banach Space Theory*, New York, Springer, 2006.

[2] Nenad Antonić: *Parcijalne diferencijalne jednadžbe 2*, Zagreb, PMF MO skripta, 2021.

[3] Lawrence Baggett: *Functional Analysis*, Boulder, Marcel-Dekker, 1991.

[4] Damir Bakić: *Normirani prostori*, Zagreb, PMF MO skripta, 2018.

[5] Damir Bakić: *Linearna algebra*, Zagreb, PMF MO skripta, 2008.

[6] John M. Ball: *Convexity Conditions and Existence Theorems in Nonlinear Elasticity*, Archive for Rational Mechanics and Analysis, Volume 63, Number 4, 1977., 337-403

[7] Tomislav Berić: *Normirani prostori - vježbe*, zagreb PMF MO skripta, 2019.

[8] Haim Brezis: *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equation*, London, Springer, 2011.

[9] Philippe G. Ciarlet: *Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications*, Philadelphia, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2013.

[10] Philippe G. Ciarlet: *Mathematical Elasticity, Volume I: Three-dimensional elasticity*, Amsterdam, Elsevier, 1988.

[11] Bruce K. Driver: *Analysis Tools with Applications*, New York, Springer, 2003.

[12] Manfred Einsiedler, Thomas Ward: *Functional Analysis, Spectral Theory and Applications*, Springer, 2017.

[13] Marko Erceg, Marija Galić, Petar Kunštek, Marko Vrdoljak: *Metode matemtičke fizike*, Zagreb, PMF MO skripta, 2020.

[14] Zvonko Iljazović: *Opća topologija*, Zagreb, PMF MO skripta, 2021.

[15] Lawrence C. Evans: *Partial Differential Equations*, Providence, American Mathematical Society, 2010.

[16] Marian Fabian, Petr Habala, Petr Hajek, Vicente Montesinos Santalucia, Jan Pelant, Vaclav Zizler: *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, New York, Springer, 2001.

[17] Ilja Gogić, Pavle Pandžić, Josip Tambača: *Diferencijalni račun funkcija više varijabli*, Zagreb, PMF MO skripta, 2018.

[18] Ilja Gogić, Pavle Pandžić, Josip Tambača: *Integrali funkcija više varijabli*, Zagreb, PMF MO skripta, 2019.

[19] Terry J. Morrison: *Functional Analysis - An Introduction to Banach Space Theory*, Minnesota, John Wiley & Sons, 2001.

[20] Rudi Mrazović: *Mjera i integral*, Zagreb, PMF MO skripta, 2020.

[21] Jan van Neerven: *Functional Analysis*, Cambridge, Cambridge University Press, 2022.

[22] Nikola Sarapa: *Teorija vjerojatnosti*, Zagreb, Školska knjiga, 2002.

[23] Luc Tartar: *An Introduction to Sobolev Spaces and Interpolation Spaces*, Milano, Springer, 2006.

[24] Gerald Teschl: *Nonlinear Functional Analysis*, Beč, Fakultät für Mathematik, 2005.

[25] Przemyslaw Wojtaszczyk: *Banach spaces for analysts*, Cambridge, Cambridge University Press, 1991.

[26] Kosaku Yosida: *Functional Analysis*, Berlin, Springer, 1968.

[27] Eberhard Zeidler: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications, II/A: Linear Monotone Operators*, New York, Springer, 1990.

Sažetak

U ovome radu iskazan je i dokazan John Ballov teorem o egzistenciji minimizatora određenih vrsta funkcionala. Kako bi se dokazao teorem, razvijena je teorija koja pokriva funkcionalnu analizu, s naglaskom na Banach-Saks-Mazurov teorem i Banach-Eberlein-Šmulianov teorem. Uvedeni su Soboljevljevi prostori na kojim se traže minimizatori te su dokazana osnovna svojstva Soboljevljevih prostora neophodna za dokazivanje kasnijih teorema. Prije završnih rezultata, napravljen je pregled nekih tema iz nelinearne funkcionalne analize gdje se definirala Frechetova derivacija. Naglasak tog poglavlja je na Piolinom identitetu koji se nekoliko puta iskoristio u kasnijim teoremima. Posljednje poglavlje kreće s egzistencijom minimizatora na općenitim funkcionalima. S razvijanjem teorije određene pretpostavke na funkcionale su nadodane kako bi promatrani matematički model iz teorije elastičnosti imao smisla. Naposljetku, John Ballov teorem riješi pitanje pronalaska minimizatora i za takve funkcionale.

(Ova stranica namjerno nije ostavljena prazna)

Summary

In this work the John Ball theorem is stated and proved. It states existence of minimizer for functionals of special form. To prove the theorem, we develop theory in a functional analysis, with emphasis on Banach-Saks-Mazur theorem and Banach-Eberlein-Šmulian theorem. Sobolev spaces are introduced as the spaces on which we search minimizers. Basic properties of the Sobolev spaces that are used in later results are proved. We define the Frechet derivative and we prove the Piola identity that will be used several times later. In the last chapter, we first look for minimizers of general functionals after which we add extra assumptions on the functionals so that observed mathematical model would be realistic. Finally we prove existence of energy minimizers for such functionals in the John Ball theorem.

(Ova stranica namjerno nije ostavljena prazna)

Životopis

Rođen sam 27.10.1998. godine u Splitu. Pohađao sam Osnovnu školu Bijaći u Kaštel Novom koju sam završio s odličnim uspjehom. Potom upisujem matematičku gimnaziju u Splitu, tj. srednju školu III. gimnazija Split koju također završavam s odličnim uspjehom. Tijekom srednje škole sudjelujem na brojnim natjecanjima iz matematike, fizike i geografije. Po završetku srednje škole 2017. upisujem predidplomski sveučilišni studij na Prirodoslovno matematičkom fakultetu u Zagrebu, smjer Matematika. Na istom fakultetu upisujem i diplomski studija Teorijska matematika kojeg završavam s odličnim uspjehom. U slobodno vrijeme aktivno se bavim planinarenjem, slobodnim penjanjem i speleologijom te u međuvremenu stječem nazive za alpinista i instruktora speleologije.

(Ova stranica namjerno nije ostavljena prazna)