

Konike

Smolić, Iva

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:482259>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-05**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Iva Smolić

KONIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Tomislav Pejković

Zagreb, ožujak 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana _____ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. _____, predsjednik
2. _____, član
3. _____, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _____.

Potpisi članova povjerenstva:

1. _____
2. _____
3. _____

Zahvaljujem se svom mentoru, doc. dr. sc. Tomislavu Pejkoviću na strpljenju, pruženoj pomoći i podršci tijekom izrade diplomskog rada.

Od srca se zahvaljujem svojoj obitelji, dečku i prijateljima na strpljenju i velikoj podršci pruženoj tijekom studiranja.

Ovaj rad posvećujem njima.

Sadržaj

Sadržaj	iv
Uvod	1
1 Pomoćne definicije i tvrdnje	2
2 Definicije i karakterizacije konika	5
2.1 Konike kao presjek ravnine i stošca	5
2.2 Planimetrijska definicija konika	6
2.3 Jednadžbe konika	11
3 Osnovna svojstva konika	16
3.1 Zrcalno svojstvo konika	16
3.2 Izogonalno svojstvo konika	20
4 Neki teoremi o konikama	23
4.1 Elipsa i hiperbola	23
4.2 Parabola	28
Bibliografija	34

Uvod

Počeci konika sežu davno u povijest i vezuju se uz Menehmu, koji je otkrio da se presjekom stošca i ravnine koja nije okomita na izvodnicu stošca dobiju do tada nepoznate krivulje, kojima su imena pridružena tek kasnije. Osim njega, konikama su se bavili Euklid i Arhimed, a znatno više od njih Apolonije iz Perge. On je pokazao bitne činjenice o konikama kao presjeku stošca i ravnine, a također je uveo nazive koje koristimo danas. Međutim, Apolonije nije svojstva konika opisivao algebarski, kao što mi to danas činimo. Trebalo je proći 2000 godina da bi matematičari postigli pomak u razumijevanju konika povezivanjem geometrijskih i algebarskih tehnika. Posljednji iz razdoblje antike bio je Papo iz Aleksandrije, koji je uglavnom u svojim djelima komentirao rezultate svojih prethodnika.

Nakon antičke Grčke razvoj konika doživio je stagnaciju, sve do renesanse kada dolazi do oživljavanja interesa za grčko znanje. Nove spoznaje u astronomiji su dodatno pobudile interes za konikama. Ovdje valja istaknuti Keplera, koji je razlikovao pet vrsta konika: kružnicu, elipsu, hiperbolu, parabolu i pravac. Tvrdio je da se jedna može dobiti iz druge neprekidnim mjenjanjem i prvi je uveo naziv "fokus" za značajne točke na osi konike.

U ovom diplomskom radu nakon kratkog poglavlja s pomoćnim definicijama i tvrdnjama, donosimo u drugom poglavlju različite definicije, odnosno karakterizacije konika. Glavninu rada čine treće i četvrto poglavlje u kojima navodimo osnovna kao i nekoliko složenijih svojstava konika. Dokazi su elementarno geometrijski, bez korištenja analitičke i projektivne geometrije.

Diplomski rad napravljen je u sklopu aktivnosti Projekta KK.01.1.1.01.0004 - Znanstveni centar izvrsnosti za kvantne i kompleksne sustave te reprezentacije Liejevih algebri.

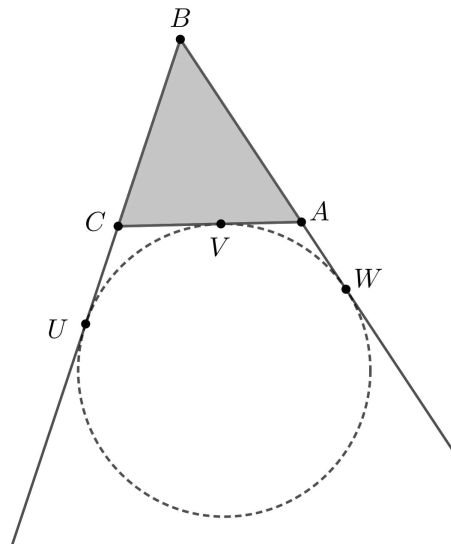
Poglavlje 1

Pomoćne definicije i tvrdnje

U ovom kratkom poglavlju sabrat ćemo neke definicije i tvrdnje potrebne u glavnom dijelu rada.

Definicija 1.1. [4] Neka su o i s dva različita pravca sa zajedničkom točkom O . Skup svih točaka prostora što ga opisuje pravac s kada se rotira oko pravca o za 360° , zove se *stožasta ploha*. Točka O zove se *vrh*, pravac o *os*, a pravac s *izvodnica* stožaste plohe.

Teorem 1.2. Neka trokutu ABC pripisana kružnica koja je nasuprot vrhu B dodiruje stranicu \overline{AC} u točki V . Tada je $|BC| + |CV| = |BA| + |AV|$.



Slika 1.1: Dokaz Teorema 1.2

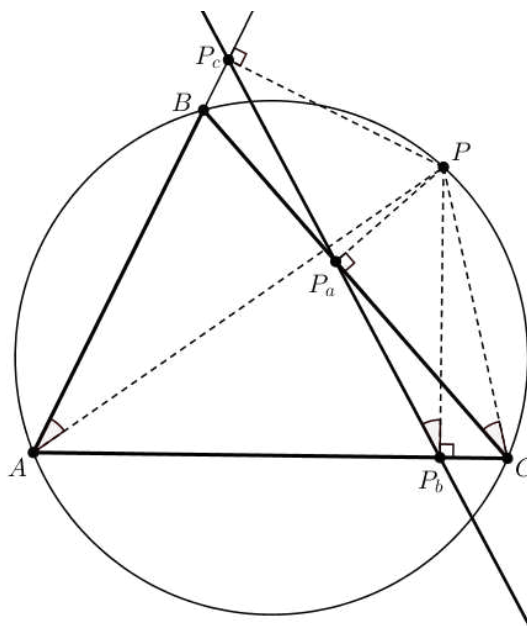
Dokaz. Udaljenost točke izvan kružnice od dirališta tangenata povučениh iz te točke na kružnicu su jednake. Stoga, prema Slici 1 vrijedi

$$|BC| + |CV| = |BC| + |CU| = |BU| = |BW| = |BA| + |AW| = |BA| + |AV|. \quad \square$$

Definicija 1.3. [3] Kružnicu koja dira jednu stranicu trokuta s njezine vanjske strane i produžetke ostalih dviju stranica zovemo **pripisanom** kružnicom trokuta. Središte pripisane kružnice je sjecište simetrala jednog unutarnjeg kuta i dvaju vanjskih kutova trokuta.

Definicija 1.4. [2] **Tangenta** na graf krivulje $y = f(x)$ u točki $D(a, f(a))$ je pravac $y = t(x)$ koji prolazi tom točkom i koji najbolje aproksimira funkciju f u blizini točke D . To znači da za svaki drugi pravac $y = p(x)$ koji prolazi točkom D postoji otvoreni skup A takav da je $a \in A$, te vrijedi $|f(x) - t(x)| \leq |f(x) - p(x)|$, za sve $x \in A$.

Lema 1.5 (Simson). Ortogonalne projekcije točke P na stranice trokuta ABC leže na istom pravcu ako i samo ako P leži na opisanoj kružnici tog trokutu.



Slika 1.2: Dokaz Leme 1.5

Dokaz. [1] Neka su P_a , P_b i P_c projekcije točke P na pravce BC , CA i AB . Na Slici 1.2 prikazan je jedan slučaj, kojeg ćemo ovdje i dokazati, ostali se pokazuju analogno.

Četverokut PCP_bP_a je tetivni. Stoga je $\angle PP_bP_a = \angle PCP_a$. Analogno je $\angle PP_bP_c = \angle PAP_c$. Točke P_a , P_b i P_c leže na istom pravcu ako i samo ako je $\angle PP_bP_c = \angle PP_bP_a$

ili ekvivalentno $\angle PAP_c = \angle PCP_a$, odnosno $\angle PAB = \angle PCB$. To znači da točka P leži na kružnici opisanoj tokutu ABC . \square

Pravac na kojem leže točke P_a , P_b i P_c iz dokaza prethodne leme zove se **Simsonov pravac** točke P (koja pripada kružnici opisanoj trokutu ABC).

Sljedeće svojstvo Simsonova pravca nije teško pokazati, ali dokaz preskačemo.

Lema 1.6. *Simsonov pravac točke P s obzirom na trokut ABC raspolavlja dužinu \overline{PH} , gdje je H ortocentar trokuta ABC .*

Poglavlje 2

Definicije i karakterizacije konika

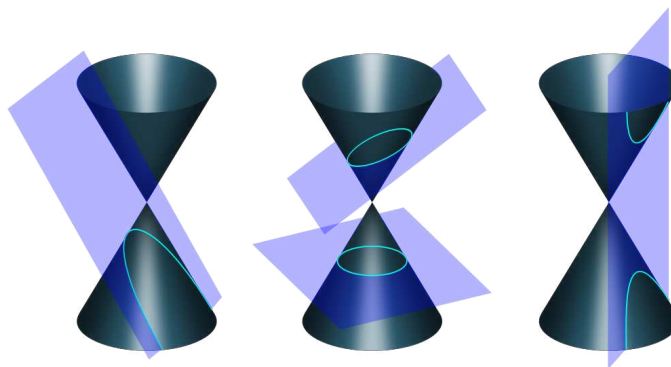
U ovom radu najprije ćemo definirati krivulje drugog stupnja, odnosno konike. Napomenimo da postoji više ekvivalentnih definicija spomenutih krivulja.

2.1 Konike kao presjek ravnine i stošca

Krenimo s definicijom spomenutih krivulja, koja obuhvaća sve takve krivulje. Mi ćemo uskoro svaki od tipova krivulja definirati zasebno, a zatim se može pokazati ekvivalentnost sa sljedećom definicijom.

Definicija 2.1. *Elipsa, parabola i hiperbola su presjek ravnine i stožaste plohe (pri čemu je svaka od tih krivulja poseban slučaj tog presjeka).*

Sada ćemo definirati svaku od navedenih krivulja, koristeći se Definicijom 1.1 stožaste plohe.



Slika 2.1: Presjek ravnine i stošca

Definicija 2.2. *Ako je ravnina usporedna s jednom izvodnicom, a ne sadrži tu izvodnicu, presjek je parabola.*

Ovaj slučaj je prikazan na Slici 2.1 lijevo.

Definicija 2.3. *Ako ravnina siječe sve izvodnice, a ne prolazi vrhom stožaste plohe, presjek je elipsa.*

Ovdje valja napomenuti da ako je ravnina okomita na os stožaste plohe, tada je presjek kružnica. Ta situacija se jasno vidi na Slici 2.1 u sredini.

Preostao nam je još posljednji slučaj.

Definicija 2.4. *Ako je ravnina usporedna s dvjema izvodnicama, a ne prolazi vrhom stožaste plohe, presjek je hiperbola.*

Ovaj slučaj prikazan je na Slici 2.1 desno.

Spomenimo još da u slučaju kada ravnina prolazi vrhom stošca dobivamo degenerirane konike (dva pravca, jedan pravac ili točku) koje općenito nećemo uzimati u obzir.

Iz ove definicije konika možemo dobiti sljedeću Papo-Boškovićevu karakterizaciju. Naime, dubrovački matematičar Ruđer Bošković koristeći se svojstvima koja je opisao Papo iz Aleksandrije izgradio je teoriju konika na čisto geometrijski način.

Definicija 2.5. *Konika s fokusom F , direktrisom d (koja ne prolazi kroz F) i numeričkim ekscentricitetom ε je skup svih točaka za koje je omjer udaljenosti od F i od d jednak ε .*

Ako je $\varepsilon > 1$, ta krivulja je hiperbola.

Ako je $\varepsilon < 1$, ta krivulja je elipsa.

Ako je $\varepsilon = 1$, ta krivulja je parabola.

2.2 Planimetrijska definicija konika

Konika s kojom započinjemo u ovom odjeljku bit će elipsa.

Definicija 2.6. *Dane su točke F_1 i F_2 i duljina $2a$ takva da je $|F_1F_2| < 2a$. Skup svih točaka T takvih da je*

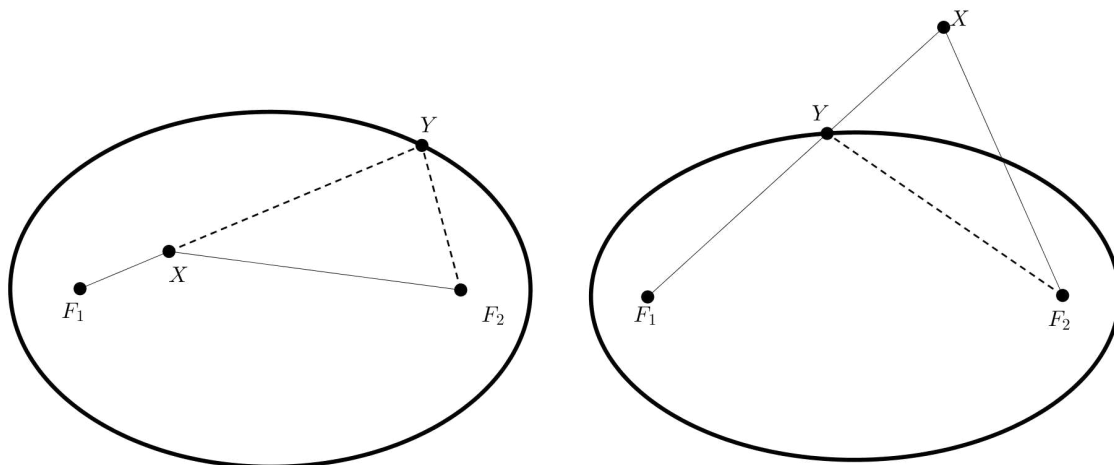
$$|F_1T| + |F_2T| = 2a$$

zovemo elipsa sa žarištima (fokusima) F_1 i F_2 te velikom poluosi a . Dužine $\overline{F_1T}$ i $\overline{F_2T}$ zovu se radijvektori točke T .

Sve točke ravnine koje ne leže na elipsi nalaze se u jednom od dva povezana skupa od kojih je jedan ograničen (**unutrašnje točke**), a drugi neograničen (**vanjske točke**).

Propozicija 2.7. Zbroj udaljenosti bilo koje točke unutar elipse do njezinih fokusa je manji od $2a$. Zbroj udaljenosti bilo koje točke izvan elipse do njezinih fokusa je veći od $2a$.

Dokaz. [1] Neka su F_1 i F_2 fokusi, a X neka točka te Y sjecište pravca F_1X i elipse. Pretpostavimo najprije da je točka X unutar elipse. Tada iz nejednakosti trokuta slijedi



Slika 2.2: Dokaz Propozicije 2.7

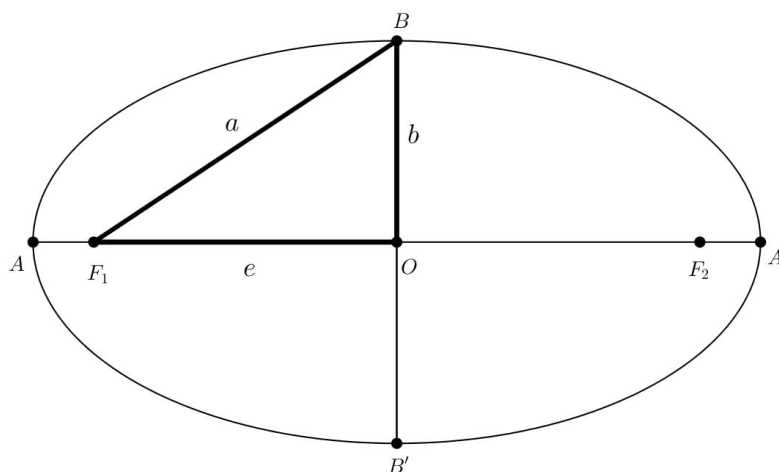
$|F_2X| < |XY| + |F_2Y|$ pa korištenjem te nejednakosti slijedi $|F_1X| + |F_2X| < |F_1X| + |XY| + |F_2Y| = |F_1Y| + |F_2Y|$. Ovo je prikazano na Slici 2.2. Iz Definicije 2.6 znamo da je $|F_1Y| + |F_2Y| = 2a$, pa je tvrdnja dokazana za X unutar elipse. Pretpostavimo sada da je X izvan elipse. Koristeći ponovno nejednakost trokuta dobivamo $|F_2Y| < |XY| + |F_2X|$, iz čega slijedi $|F_1X| + |F_2X| = |F_1Y| + |XY| + |F_2X| > |F_1Y| + |F_2Y| = 2a$. Time je teorem dokazan. \square

Točku X za koju je udaljenost $|F_1T| + |F_2T|$ veća od $2a$ zovemo **vanjska točka** elipse, a točku Y za koju je ta suma manja od $2a$ zovemo **unutrašnja točka** elipse.

Sada kratko uvodimo temeljne pojmove i veličine, a za to će nam koristiti Slika 2.3. Neka je O je polovište dužine $\overline{F_1F_2}$, tada iz Definicije 2.6 zaključujemo da je elipsa simetrična s obzirom na točku O , a pored toga je simetrična i s obzirom na pravac F_1F_2 te s obzirom na simetralu dužine $\overline{F_1F_2}$. Spomenuti pravac F_1F_2 zove se **glavna**, a simetrala dužine $\overline{F_1F_2}$ **sporedna** os elipse. Točka O naziva se **centar elipse**.

Udaljenost $|OF_1| = |OF_2|$ zovemo **linearni ekscentricitet** te ga označavamo s e , dok omjer $\frac{e}{a}$ zovemo **numerički ekscentricitet** elipse i označavamo ga s ε .

Na glavnoj osi elipse postoje dvije točke A i A' , koje su simetrične s obzirom na središte O i za koje vrijedi $|F_1A| + |F_2A| = |F_1A'| + |F_2A'| = 2a$. Te točke zovu se **glavna tjemena elipse**, a duljina $|OA| = |OA'| = a$ **velika poluos** elipse. Kružnica sa središtem u F_1 i



Slika 2.3: Elipsa

polumjerom a siječe sporednu os u dvije točke B i B' koje su simetrične s obzirom na središte O . Točke B i B' zovu se **sporedna tjemena** elipse, a duljina $|OB| = |OB'| = b = \sqrt{a^2 - e^2}$ je **mala poluos** elipse.

Sljedeća krivulja koju ćemo spomenuti jest hiperbola koja je po svojim svojstvima vrlo slična elipsi. Često će nam biti dovoljno da pojedino svojstvo ili tvrdnju dokažemo za elipsu, a onda za hiperbolu analogno zaključimo.

Definicija 2.8. Dane su točke F_1 i F_2 i duljina $2a$ takva da je $|F_1F_2| > 2a$. Skup svih točaka T takvih da je

$$||F_1T| - |F_2T|| = 2a$$

zovemo **hiperbola** sa žarištima (fokusima) F_1 i F_2 te velikom poluosi a . Dužine $\overline{F_1T}$ i $\overline{F_2T}$ zovu se **radijvektori** točke T .

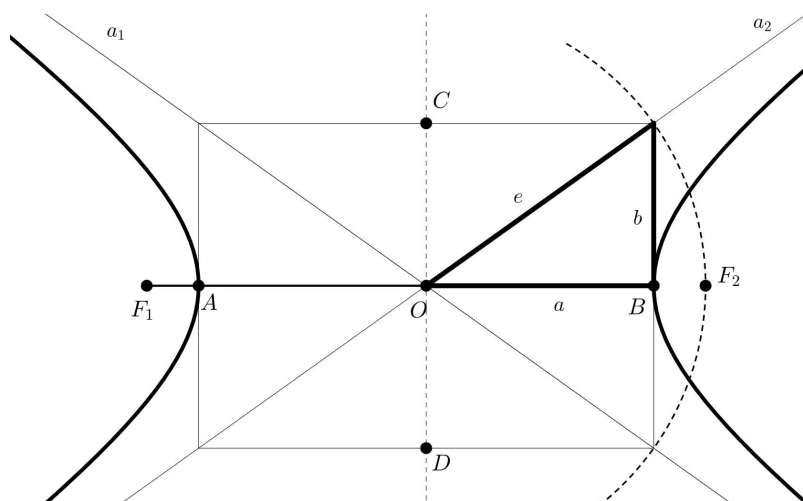
Važno je spomenuti da se hiperbola sastoji od dva povezana skupa koja zovemo **grane hiperbole**. Jedna grana sadrži sve točke T za koje vrijedi $|F_1T| - |F_2T| = -2a$, a druga sve točke T za koje je $|F_1T| - |F_2T| = 2a$.

Slično kao kod elipse, točku T za koju je apsolutna vrijednost razlike duljine radijvektora $||F_1T| - |F_2T||$ veća od $2a$ zovemo **unutrašnja** točka hiperbole, a točku za koju je ta razlika manja od $2a$ zovemo **vanjska** točka hiperbole.

U sljedećem tekstu koristit ćemo notaciju sa Slike 2.4.

Kao i elipsa, hiperbola je simetrična s obzirom na pravac F_1F_2 i simetralu dužine $\overline{F_1F_2}$, koji se redom zovu **glavna** i **sporedna os** hiperbole.

Točka O je **središte** hiperbole, udaljenost $e = |OF_1| = |OF_2|$ se naziva **linearni ekscentricitet**, a broj $\varepsilon = \frac{e}{a}$ **numerički ekscentricitet** hiperbole.



Slika 2.4: Hiperbola

Točke A i B zovu se **glavna tjemena** hiperbole, pravac AB **realna os**, a duljine $|OA|$ i $|OB|$ **realne poluosi**. Točke C i D određuju pravac CD koji nazivamo **imaginarnom osi hiperbole**, dok duljine $|OC|$ i $|OD|$ nazivamo **imaginarnim poluosima** i označavamo s $b = \sqrt{e^2 - a^2}$.

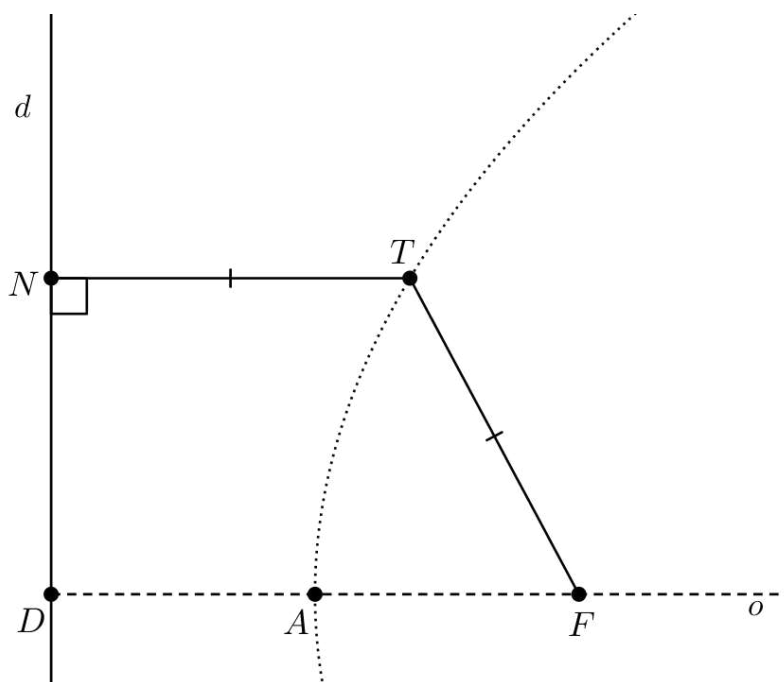
Primijetimo da je glavna razlika između elipse i hiperbole ta što hiperbola ima asimptote, koje su granični položaj tangente kada se diralište kreće prema beskonačnosti po grani hiperbole (na Slici 2.4 pravci a_1 i a_2). Na istoj slici vidimo da asimptote hiperbole leže na dijagonalama pravokutnika sa stranicama duljine $2a$ i $2b$ kojemu je središte u središtu hiperbole, što ćemo kasnije i dokazati (Teorem 4.7).

Preostalo nam je još definirati parabolu.

Definicija 2.9. *Neka je dana točka F i pravac d koji ne prolazi točkom F . Skup svih točaka T koje su jednako udaljene od točke F i pravca d zove se **parabola** s fokusom F i direktrisom (ravnicom) d .*

Na Slici 2.5 točka N je nožište okomice iz T na d , a dužine \overline{FT} i \overline{NT} zovu se **radijvektori** točke T . Pravac o koji prolazi kroz F i okomit je na d zovemo **os parabole**, a iz Definicije 2.9 slijedi da je parabola simetrična s obzirom na o . Primijetimo da je točka A , koju zovemo **tjeme** parabole, jedina točka osi koja je na paraboli. Duljinu $|DF|$ označavamo s p i zovemo **parametar** parabole, gdje je D sjecište osi parabole i direktrise. Ako je T točka takva da je $DFTN$ kvadrat, tada je T na paraboli i vrijedi $|TF| = |TN| = p$.

Točke ravnine koje ne leže na paraboli pripadaju jednom od dva povezana skupa koji su oba neograničeni. Točke koje se nalaze u skupu koji sadrži fokus zovemo **unutrašnje**,



Slika 2.5: Parabola

a one koje se nalaze u skupu koji sadrži direktrisu zovemo **vanjske** točke parabole.

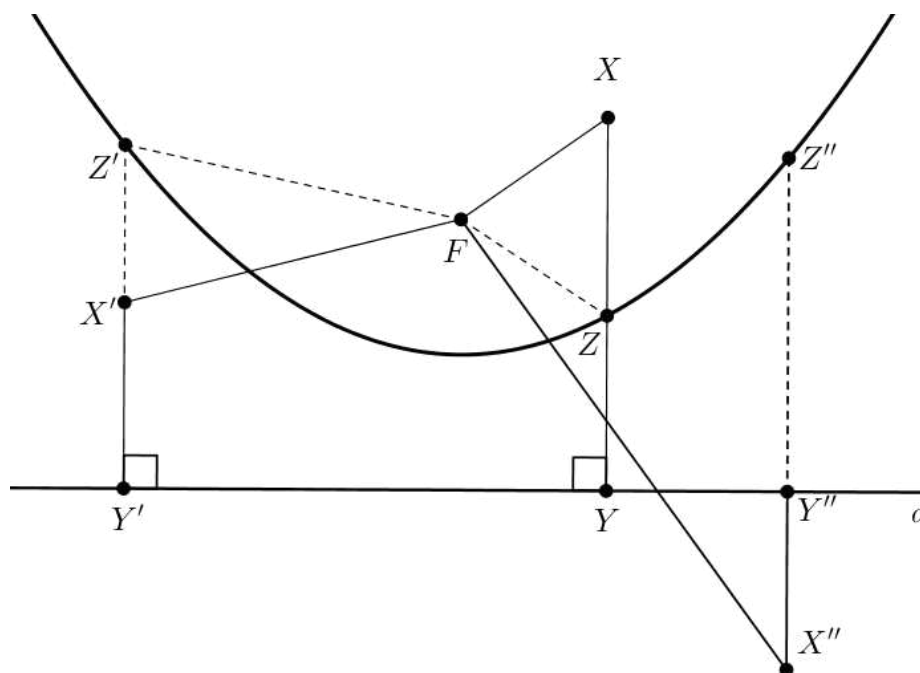
Propozicija 2.10. *Za točke unutar parabole udaljenost do fokusa je manja od udaljenosti do direktrise, a za točke izvan parabole vrijedi obratno.*

Dokaz. Neka je X točka unutar parabole, Y projekcija točke X na direktrisu, a Z sjecište pravca XY s parabolom. Iz Definicije 2.9 znamo da je $|FZ| = |YZ|$.

Budući da točka X leži unutar parabole, vrijedi $|XY| = |XZ| + |YZ|$. Iz nejednakosti trokuta je $|FX| < |FZ| + |XZ| = |YZ| + |XZ| = |XY|$. Dakle, prvi dio tvrdnje je dokazan. Promatrajmo sada točku X' koja se nalazi izvan parabole, ali s iste strane direktrise kao i fokus. Tada, uz oznake na Slici 2.6, vrijedi $|Y'Z'| = |X'Z'| + |X'Y'|$, a iz nejednakosti trokuta $|FX'| + |X'Z'| > |FZ'| = |Y'Z'| = |X'Z'| + |X'Y'|$. Dakle, $|FX'| > |X'Y'|$.

Sada promatrajmo točku X'' koja se nalazi izvan parabole i s druge strane direktrise od fokusa (Slika 2.6). Tada iz nejednakosti trokuta vrijedi $|FX''| > |X''Z''| - |FZ''| = |Y''Z''| + |X''Y''| - |FZ''|$, a kako je $|Y''Z''| = |FZ''|$ slijedi da je $|FX''| > |X''Y''|$. Time je tvrdnja dokazana. \square

Dakle, točka T je **unutrašnja** točka parabole ako vrijedi $|TF| < |TN|$, a **vanjska** ako je $|TF| > |TN|$.



Slika 2.6: Dokaz Propozicije 2.10

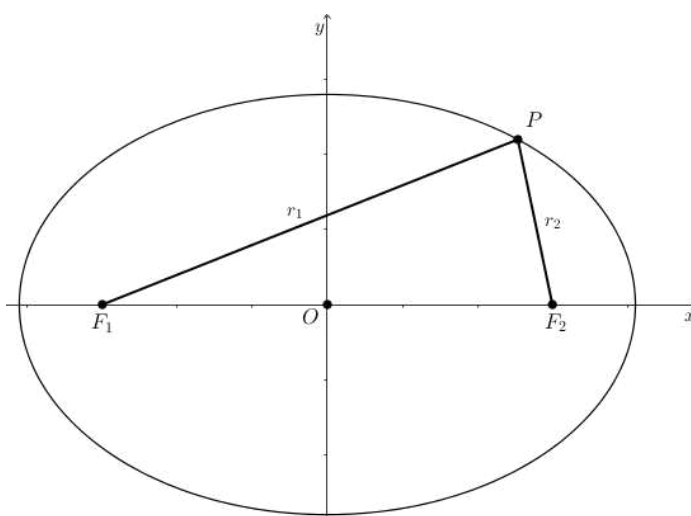
2.3 Jednadžbe konika

U ovom odjeljku proći ćemo različite oblike jednadžbi konika, a neke od njih ćemo i izvesti koristeći [4].

2.3.1 Kanonske jednadžbe

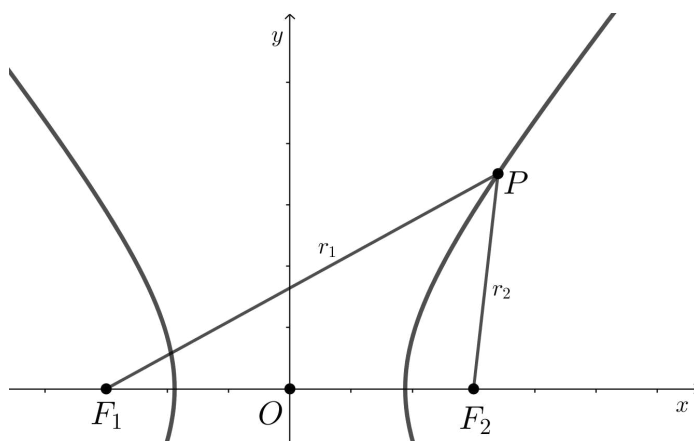
Postavimo Kartezijev koordinatni sustav tako da se osi apscisa i ordinata podudaraju s glavnom i sporednom osi elipse. Neka su koordinate žarišta elipse $F_1(-e, 0)$, $F_2(e, 0)$ i neka vrijede oznake kao na Slici 2.7. Točka $P(x, y)$ proizvoljna je točka elipse pa, prema Definiciji 2.6, vrijedi $r_1 + r_2 = 2a$, $r_1^2 = |F_1P|^2 = (x + e)^2 + y^2$, $r_2^2 = (x - e)^2 + y^2$ i $r_1^2 + r_2^2 = 2(x^2 + y^2 + e^2)$, $r_1^2 - r_2^2 = 4ex$. Odavde je $(r_1 + r_2)(r_1 - r_2) = 4ex$ pa je $r_1 - r_2 = 2ex$. Iz prethodno navedenog slijedi da je $(r_1 + r_2)^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 = 4a^2$ i $(r_1 - r_2)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 = 4e^2x^2$. Dalje, $(r_1 + r_2)^2 + (r_1 - r_2)^2 = 4(a^2 + e^2x^2)$, odakle je $2(r_1^2 + r_2^2) = 4(a^2 + e^2x^2)$, pa dobivamo $4(x^2 + y^2 + e^2) = 4(a^2 + e^2x^2)$. Slijedi $a^2x^2 + a^2y^2 + a^2e^2 = a^4 + e^2x^2$, $(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2)$, a odatle, zbog $e^2 + b^2 = a^2$, $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ili

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.1)$$



Slika 2.7: Ilustracija za izvod kanonske jednadžbe elipse

Nakon elipse prijedimo na hiperbolu, koja joj je po svojstvima vrlo slična.



Slika 2.8: Ilustracija za izvod kanonske jednadžbe hiperbole

Ponovno postavimo Kartezijev koordinatni sustav tako da je ishodište u središtu hiperbole, os apscisa podudara se s realnom osi, a os ordinata s imaginarnom osi hiperbole (Slika 2.8). Žarišta hiperbole su $F_1(-e, 0)$, $F_2(e, 0)$. Neka je $P(x, y)$ bilo koja točka hiperbole, tada je po Definiciji 2.8, $||PF_1| - |PF_2|| = |r_1 - r_2| = 2a$. Vrijedi da je $r_1^2 = (x+e)^2 + y^2$, $r_2^2 = (x-e)^2 + y^2$, odakle je $r_1^2 - r_2^2 = 4ex$, $(r_1 - r_2)(r_1 + r_2) = 4ex$ iz čega slijedi $r_1 + r_2 = |2\frac{e}{a}x| = |2\epsilon x| = 2\epsilon|x|$. Dalje je $(r_1 + r_2)^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 = 4\epsilon^2 x^2$, $(r_1 - r_2)^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 = 4a^2$ iz čega sada slijedi $2(r_1^2 + r_2^2) = 4(\epsilon^2 x^2 + a^2)$, $2(x^2 + y^2 + e^2) = 4(\epsilon^2 x^2 + a^2)$, $x^2 + y^2 + e^2 =$

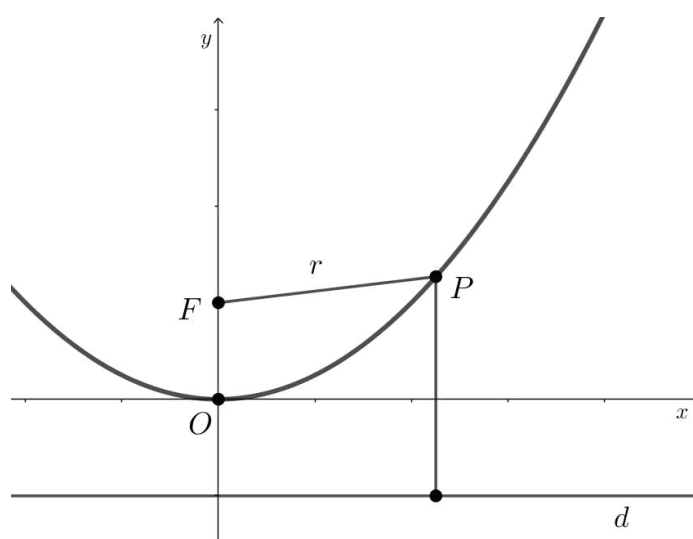
$e^2 x^2 + a^2$, $a^2 x^2 + a^2 y^2 + a^2 e^2 = e^2 x^2 + a^4$, $(e^2 - a^2)x^2 - a^2 y^2 = a^2(e^2 - a^2)$. Iz $e^2 = a^2 + b^2$ slijedi da je $e^2 - a^2 = b^2$, pa je konačno

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2,$$

odnosno

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.2)$$

Preostala nam je još parabola.



Slika 2.9: Ilustracija za izvod kanonske jednadžbe parabole

Ponovno postavimo koordinatni sustav, ali ovoga puta tako da je ishodište u tjemenu parabole i da se os parabole podudara s osi ordinata (Slika 2.9). Budući da smo ranije definirali parametar parabole, vrijedi $|OF| = \frac{p}{2}$, tj. $F(0, \frac{p}{2})$, a tada je jednadžba ravnalice $y = -\frac{p}{2}$. Neka je $P(x, y)$ bilo koja točka parabole. Tada zbog Definicije 2.9 vrijedi $|PF| = d(P, d)$ ili $x^2 + (y - \frac{p}{2})^2 = (y + \frac{p}{2})^2$, a nakon sređivanja dobivamo poznatu jednadžbu

$$x^2 = 2py. \quad (2.3)$$

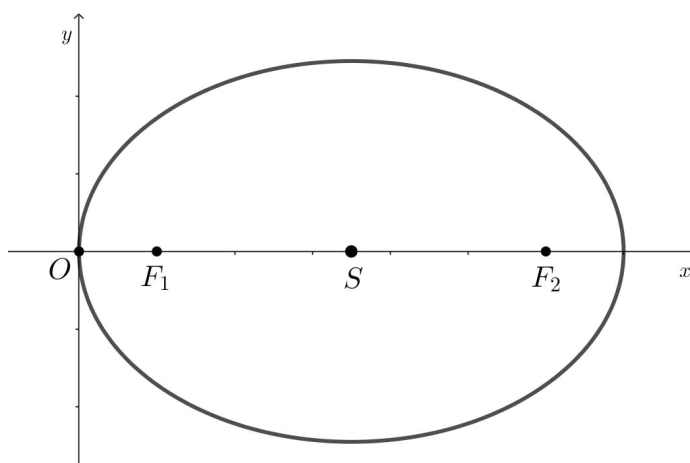
2.3.2 Tjemene jednadžbe

Postavimo li Kartezijev koordinatni sustav tako da os apscisa sadrži žarišta i da je ishodište u jednom tjemenu na toj osi, reći ćemo da je je čunjosječnica u tjemenu položaju. Tada se pripadna jednadžba zove tjemena jednadžba konike.

Prije nego krenemo na same jednadžbe, navest ćemo zajedničku definiciju parametra čunjosječnice.

Definicija 2.11. Duljina tetive čunjosječnice koja prolazi žarištem, a okomita je na glavnu (odnosno realnu) os čunjosječnice zove se parametar čunjosječnice i označava $2p$.

Za elipsu postavimo Kartezijev koordinatni sustav kao na Slici 2.10.



Slika 2.10: Određivanje tjemene jednadžbe elipse

Središte elipse ima koordinate $S(a, 0)$ zbog čega je jednadžba

$$b^2(x - a)^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

a nju preoblikujemo u

$$y^2 = 2 \cdot \frac{b^2}{a}x - \frac{b^2}{a} \cdot \frac{1}{a}x^2.$$

Za $x = a - e$ je $y = \pm p$, pa je $b^2(-e)^2 + a^2p^2 = a^2b^2$ iz čega dobivamo $p^2 = \frac{b^4}{a^2}$, tj. $p = \frac{b^2}{a}$. Zato tjemenu jednadžbu elipse možemo zapisati

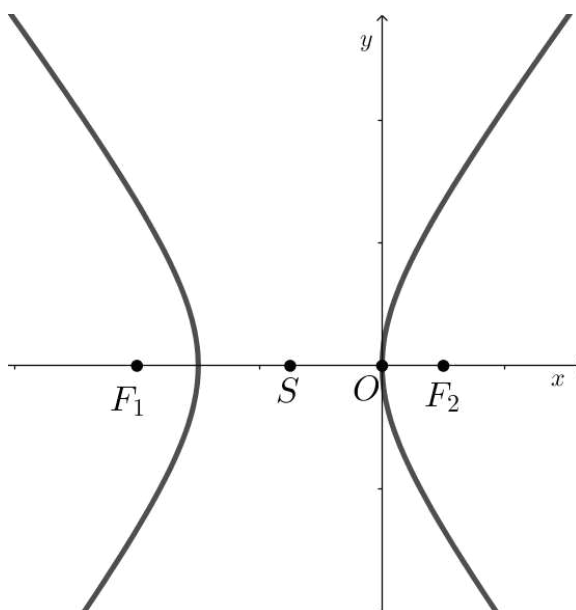
$$y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2. \quad (2.4)$$

Slično kao kod elipse, Kartezijev koordinatni sustav kod hiperbole postavimo kao na Slici 2.11. Tada jednadžbu

$$b^2(x + a)^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

možemo preoblikovati u

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2. \quad (2.5)$$



Slika 2.11: Određivanje tjemene jednadžbe hiperbole

Iz (2.3) zrcaljenjem s obzirom na pravac $y = x$, dobivamo tjemenu jednadžbu parabole

$$y^2 = 2px. \quad (2.6)$$

Primijetimo da jednadžbe (2.4) i (2.5) podsjećaju na jednadžbu (2.6) parabole. Pomoću tih jednadžbi može se pokazati da je parabola granični slučaj elipse i hiperbole. Naime, nju možemo smatrati elipsom, odnosno hiperbolom kojoj je jedno žarište beskonačno daleka točka.

Poglavlje 3

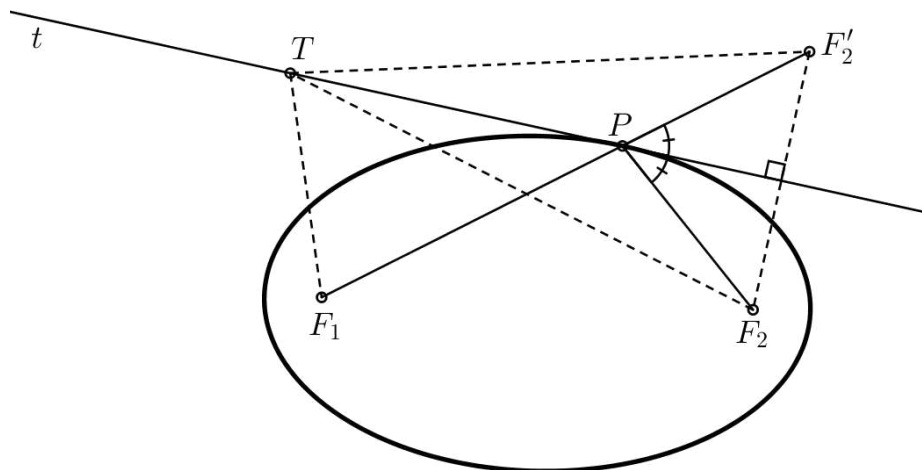
Osnovna svojstva konika

3.1 Zrcalno svojstvo konika

Sljedeća dva dokaza provodimo planimetrijski prema [4], a prije toga se prisjetimo Definicije 1.4.

Teorem 3.1 (Zrcalno svojstvo elipse). *Tangenta elipse je simetrala vanjskog kuta što ga određuju radijvektori pripadnog dirališta.*

Dokaz. Neka je pravac t simetrala vanjskog kuta trokuta F_1F_2P i točka F'_2 simetrična točki F_2 s obzirom na t (Slika 3.1).

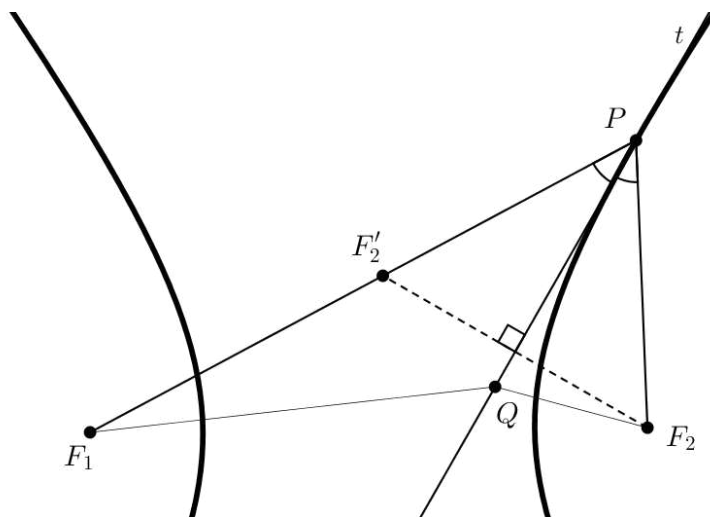


Slika 3.1: Dokaz Teorema 3.1

Nadalje, T je proizvoljna točka pravca t , različita od P . Tada vrijedi $|F_1T| + |F_2T| = |F_1T| + |F'_2T| > |F_1F'_2| = |F_1P| + |F'_2P| = |F_1P| + |F_2P| = 2a$, tj. $|F_1T| + |F_2T| > 2a$. Iz ovoga zaključujemo da je T vanjska točka elipse, tj. da pravac t , osim točke P , nema drugih zajedničkih točaka s elipsom. To bi značilo da je pravac t tangenta elipse s diralištem u P . \square

Teorem 3.2 (Zrcalno svojstvo hiperbole). *Tangenta hiperbole je simetrala unutarnjeg kuta radijvektora dirališta.*

Dokaz. Neka je P neka točka hiperbole sa žarištima F_1 i F_2 te pravcem t kao simetralom kuta $\angle F_1PF_2$. Najprije promotrimo slučaj kada je $|F_1P| > |F_2P|$.



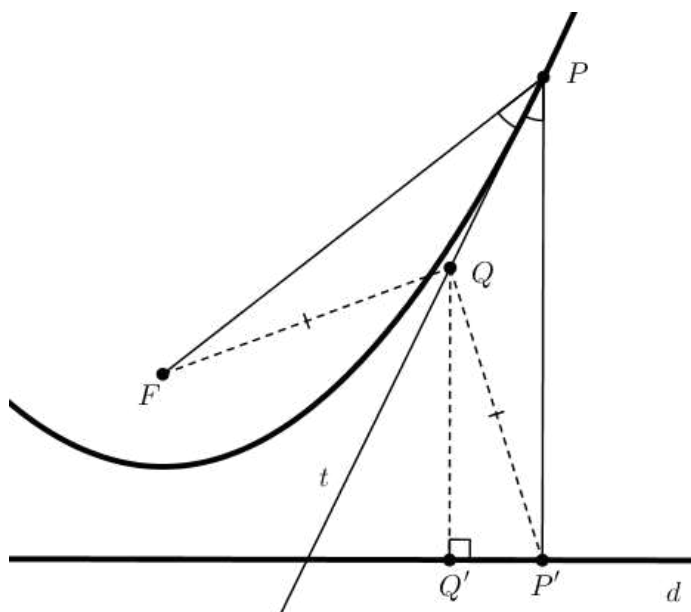
Slika 3.2: Dokaz Teorema 3.2

Neka je Q proizvoljna točka na pravcu t , različita od P , a F'_2 točka simetrična točki F_2 s obzirom na pravac t . Tada vrijedi $|F_1Q| - |F_2Q| = |F_1Q| - |F'_2Q| < |F_1F'_2| = |F_1P| - |F'_2P| = |F_1P| - |F_2P| = 2a$, tj. $|F_1Q| - |F_2Q| < 2a$. Iz ovoga zaključujemo da je Q vanjska točka hiperbole, tj. da pravac t , osim točke P , nema drugih zajedničkih točaka s hiperbolom. Odnosno, pravac t je tangenta hiperbole s diralištem u P .

U drugom slučaju bismo dobili $|F_2Q| - |F_1Q| < 2a$, a općenito $||F_1Q| - |F_2Q|| < 2a$. Odavde slijedi da je Q vanjska točka hiperbole i pravac t nema, osim točke P , drugih zajedničkih točaka s hiperbolom. Dakle, pravac t je tangenta hiperbole. \square

Teorem 3.3 (Zrcalno svojstvo parabole). *Tangenta parabole je simetrala kuta radijvektora dirališta.*

Dokaz. Kao kod elipse i hiperbole, pretpostavimo da je pravac t simetrala kuta radijvektora dirališta i neka je točka Q proizvoljna točka na pravcu t različita od P , Q' ortogonalna projekcija točke Q na direktrisu, a P' ortogonalna projekcija točke P . Trokut FPP' je jednakokrčan, a t je simetrala kuta nasuprot osnovice, pa je i simetrala osnovice FP' . Stoga vrijedi da je $|FQ| = |QP'|$, a kako je trokut $QQ'P'$ pravokutan i QP' hipotenuza slijedi da je $|QP'| > |QQ'|$.



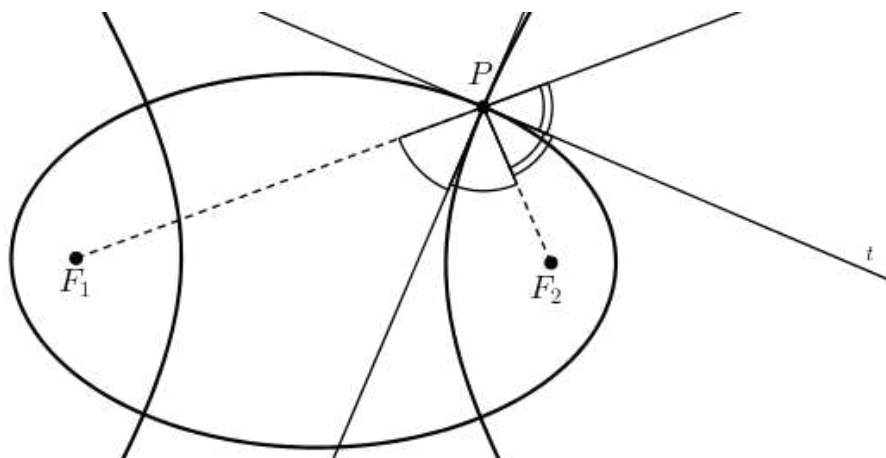
Slika 3.3: Dokaz Teorema 3.3

Dakle $|FQ| > |QQ'|$, čime je dokazano da je točka Q vanjska točka parabole. Dakle, za sve točke na simetrali, različite od P , udaljenost od fokusa je veća od udaljenosti od direktrise. Iz ovoga zaključujemo da pravac t , osim točke P , nema drugih zajedničkih točaka s parabolom i sve ostale točke toga pravca su vanjske točke parabole, što znači da je pravac t tangenta parabole s diralištem u P . \square

Teorem 3.4. *Elipsa i hiperbola s istim fokusima sijeku se pod pravim kutom.*

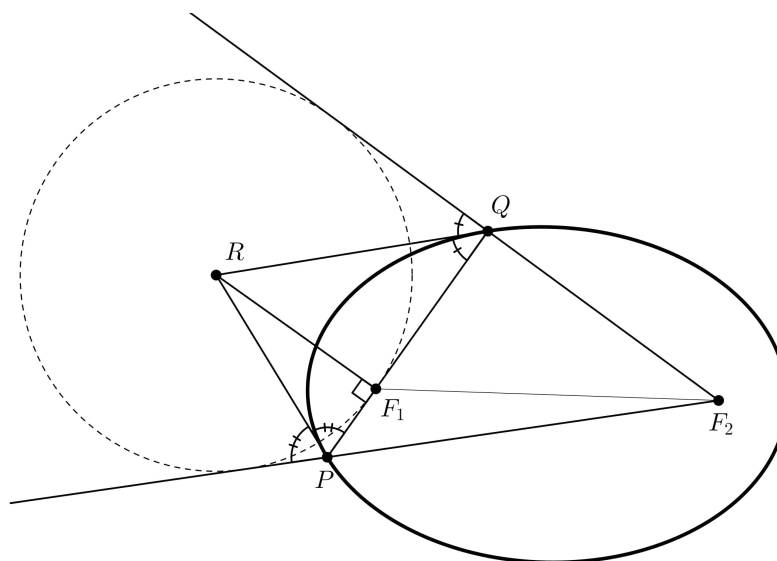
Dokaz. Od prije nam je poznato da je kut između dviju krivulja kut pod kojim se sijeku njihove tangente u točki presjeka.

Neka se elipsa i hiperbola sijeku u točki P (Slika 3.4). Tada iz Teorema 3.1 i 3.2 slijedi da su tangente na hiperbolu i elipsu u točki P simetrale unutarnjeg i vanjskog kuta $\angle F_1PF_2$. Budući da su simetrale sukuta okomite, slijedi tvrdnja teorema. \square



Slika 3.4: Dokaz Teorema 3.4

Teorem 3.5. *Zadana je tetiva \overline{PQ} elipse koja prolazi kroz jedan od njezinih fokusa, F_1 . Neka je R sjecište tangenata na elipsu povučeni iz točaka P i Q . Tada je R središte kružnice pripisane trokutu F_2PQ , a PQ dodiruje tu kružnicu u točki F_1 .*



Slika 3.5: Dokaz Teorema 3.5

Dokaz. Iz Teorema 3.1, PR i QR su simetrale vanjskih kuteva trokuta F_2PQ . Također, iz Definicije 1.3 slijedi da je točka R središte pripisane kružnice trokuta F_2PQ . Diralište

kružnice i tetive \overline{PQ} označimo sa F'_1 . Iz Teorema 1.2 slijedi da točke F'_1 i F_2 dijele opseg trokuta na dva jednaka dijela, tj. $|F'_1P| + |F_2P| = |F_2Q| + |F'_1Q|$. Međutim, točka F_1 ima upravo to svojstvo, pa slijedi $F_1 = F'_1$. \square

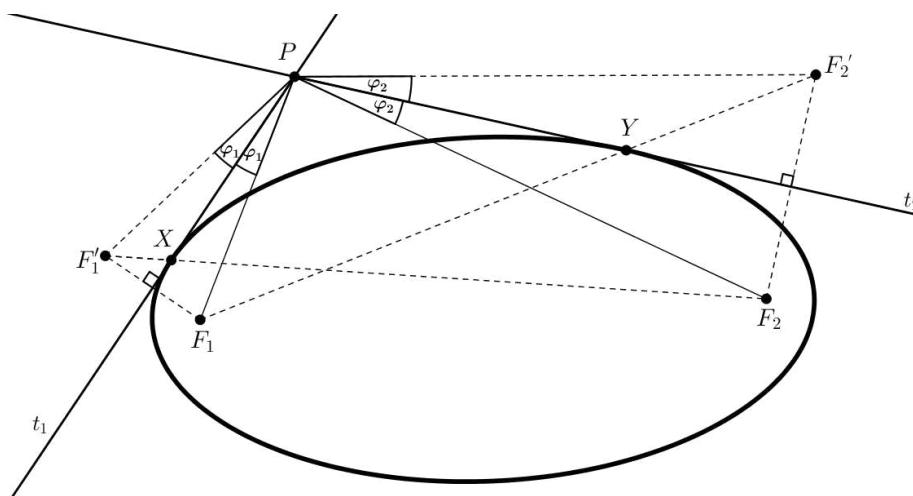
Isti teorem vrijedi za hiperbolu, gdje je umjesto pripisane kružnice riječ o upisanoj.

Teorem 3.6. *Zadana je tetiva \overline{MN} hiperbole koja prolazi kroz jedan od njezinih fokusa F_1 . Neka je Q sjecište tangenta na hiperbolu povučenih iz točaka M i N . Tada je Q središte kružnice upisane trokutu F_2MN , a MN dodiruje tu kružnicu u točki F_1 .*

3.2 Izogonalno svojstvo konika

Zrcalna svojstva konika od iznimne su važnosti te se koriste kod elementarnih dokaza bitnih rezultata, od kojih ćemo neke iskazati i dokazati u ovom i idućem poglavlju.

Teorem 3.7. *Iz bilo koje točke P izvan elipse kojoj su žarišta F_1 i F_2 povuku se tangente na elipsu s diralištima X i Y . Tada su mjere kutova $\angle F_1PX$ i $\angle F_2PY$ jednake.*



Slika 3.6: Dokaz Teorem 3.7

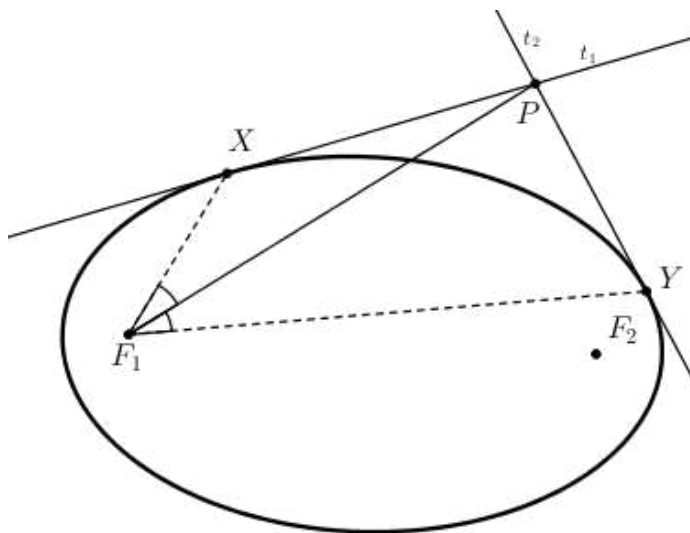
Dokaz. [1] Neka su F'_1 i F'_2 simetrične točke točkama F_1 i F_2 s obzirom na tangente u točkama X i Y . Zbog toga je $|F'_1P| = |F_1P|$, $|F'_2P| = |F_2P|$. Tada je $\angle F_1PX = \angle F'_1PX = \varphi_1$ i $\angle F_2PY = \angle F'_2PY = \varphi_2$. Uz oznake kao na Slici 3.6 trebamo pokazati da je $\varphi_1 = \varphi_2$. Zbog zrcalnog svojstva elipse, tj. Teorema 3.1, točke F_1 , Y i F'_2 leže na istom pravcu. Jednako vrijedi i za F_2 , X i F'_1 , a iz toga slijedi jednakost $|F_2F'_1| = |F_2X| + |F_1X| = |F_2Y| + |F_1Y| =$

$|F'_2F_1|$. Dakle, $\triangle PF_2F'_1$ i $\triangle PF'_2F_1$ su sukladni po *SSS* teoremu o sukladnosti, a zbog toga je $\angle F_1PF'_2 = \angle F'_1PF_2$. Stoga je $\angle F_1PF_2 + \angle F_2PF'_2 = \angle F'_1PF_1 + \angle F_1PF_2$, gdje je prvi pribrojnik na lijevoj strani jednak drugom na desnoj pa slijedi $\angle F_2PF'_2 = \angle F'_1PF_1$, tj. $2\varphi_2 = 2\varphi_1$, odnosno $\varphi_1 = \varphi_2$, čime je dokaz gotov. \square

Isto svojstvo iz Teorema 3.7 vrijedi i za hiperbolu, pa njega nećemo dokazivati.

Teorem 3.8. Uz oznake iz Teorema 3.7, pravac F_1P je simetrala kuta $\angle XF_1Y$.

Dokaz. Iz dokaza Teorema 3.7 odmah dobivamo $\angle XF_1P = \angle XF'_1P = \angle F_2F'_1P = \angle F'_2F_1P = \angle YF_1P$ \square

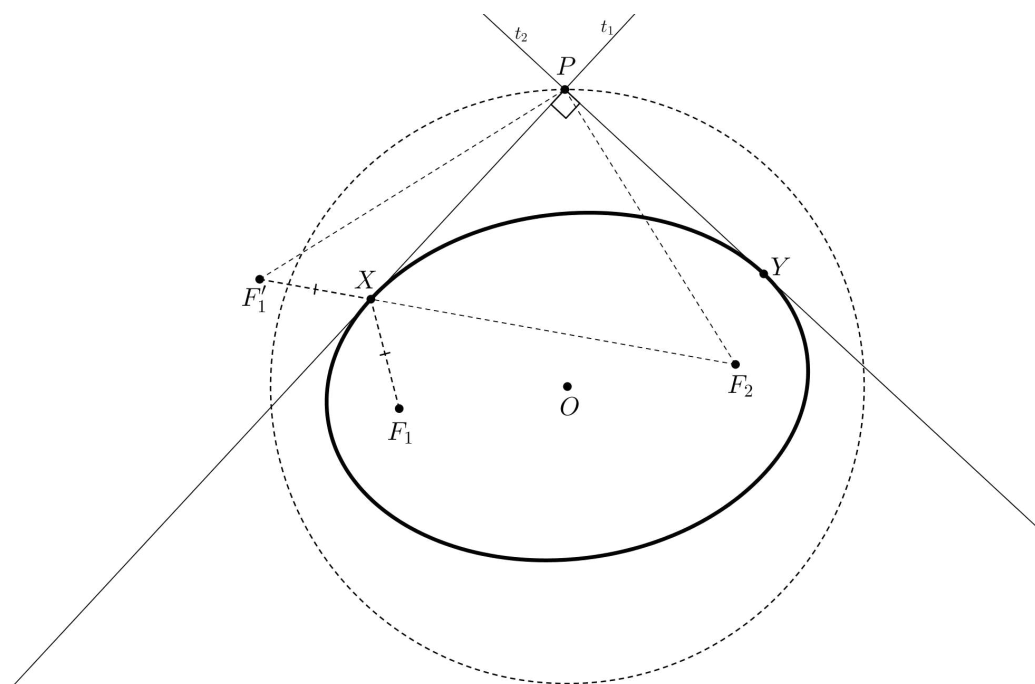


Slika 3.7: Teorem 3.8

Teorem 3.9. Geometrijsko mjesto točkaka iz kojih se elipsa vidi pod pravim kutem je kružnica sa središtem u središtu elipse.

Dokaz. [1] Neka su F_1 i F_2 fokusi elipse i pretpostavimo da se tangente elipse u točkama X i Y sijeku u točki P . Osnosimetrična slika točke F_1 s obzirom na pravac PX je točka F'_1 .

Iz Teorema 3.7 slijedi da je $\angle XPY = \angle F'_1PF_2$, a također je $|F'_1F_2| = |F'_1X| + |F_2X|$, što je po Definiciji 2.6 jednako velikoj osi elipse, odnosno $2a$. Kut $\angle F'_1PF_2$ je pravi ako i samo ako je $|F'_1P|^2 + |F_2P|^2 = |F'_1F_2|^2$ (Pitagorin poučak). Dakle, $\angle XPY$ je pravi ako i samo ako je $|F_1P|^2 + |F_2P|^2$ jednako kvadratu velike osi elipse.



Slika 3.8: Dokaz Teorema 3.9

Nije teško za zaključiti da ovaj uvjet definira kružnicu. Zaista, iz relacije paralelograma dobivamo da u trokutu F_1F_2P duljina težišnice \overline{OP} zadovoljava

$$\begin{aligned} |OP|^2 &= \frac{1}{4}(2|F_1P|^2 + 2|F_2P|^2 - |F_1F_2|^2) \\ &= \frac{|F_1P|^2 + |F_2P|^2}{2} - e^2 \\ &= 2a^2 - e^2 = a^2 + b^2 \end{aligned}$$

Ovime smo dokazali da je udaljenost $|OP|$ konstantna i završili dokaz. \square

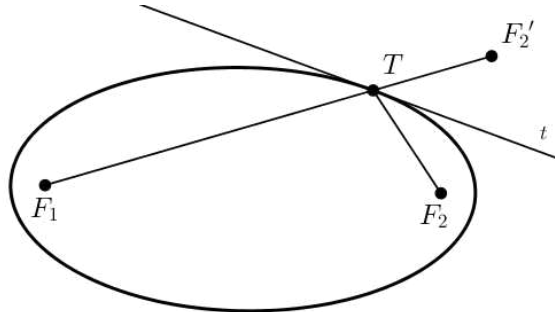
Kod hiperbole ovo svojstvo ne vrijedi uvijek. Kada je kut između asimptota hiperbole šiljast, radijus kružnice je imaginaran broj, a kada su asimptote međusobno okomite kružnica degenerira u centar hiperbole.

Poglavlje 4

Neki teoremi o konikama

4.1 Elipsa i hiperbola

Točka F'_2 simetrična fokusu F_2 s obzirom na tangentu elipse, odnosno hiperbole zove se **suprotište** fokusa F_2 s obzirom na tu tangentu. Zbog zrcalnog svojstva elipse sa Slike 4.1 vidimo da je $|F_1F'_2| = |F_1T| + |F'_2T| = |F_1T| + |F_2T| = 2a$, pa vrijede sljedeće tvrdnje koje odmah iskazujemo i za hiperbolu.



Slika 4.1: Suprotište fokusa F_2 s obzirom na tangentu t elipse

Teorem 4.1. *Skup suprotišta jednog fokusa **elipse** s obzirom na sve tangente te elipse je kružnica sa središtem u drugom fokusu i polumjerom jednakim velikoj osi te elipse.*

*Skup suprotišta jednog fokusa **hiperbole** s obzirom na sve tangente te hiperbole je kružnica sa središtem u drugom fokusu i polumjerom jednakim velikoj osi te hiperbole.*

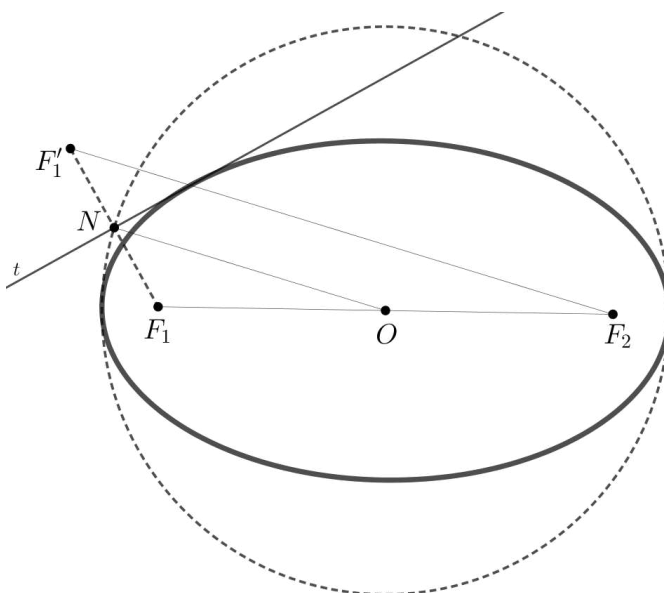
Kružnica $(F_1, 2a)$ iz Teorema 4.1 se zove **kružnica suprotišta** fokusa F_2 . Za navedeni teorem vrijedi i obrat, kojeg nećemo dokazivati.

Teorem 4.2. Dana je kružnica $(F_1, 2a)$ i točka F_2 unutar kružnice. Ako je P varijabilna točka te kružnice, onda simetrala dužine $\overline{F_2P}$ omata jednu **elipsu** s fokusima F_1 i F_2 i velikom osi $2a$.

Dana je kružnica $(F_1, 2a)$ i točka F_2 izvan kružnice. Ako je P varijabilna točka te kružnice, onda simetrala dužine $\overline{F_2P}$ omata jednu **hiperbolu** s fokusima F_1 i F_2 i velikom osi $2a$.

Teorem 4.3. Skup nožišta okomica iz fokusa **elipse** na njezine tangente je kružnica sa središtem u središtu elipse i polumjerom jednakim velikoj poluosi elipse.

Skup nožišta okomica iz fokusa **hiperbole** na njezine tangente je kružnica sa središtem u središtu hiperbole i polumjerom jednakim velikoj poluosi hiperbole.



Slika 4.2: Dokaz Teorema 4.3 za elipsu

Dokaz. [7] Neka je točka F_1' suprotište fokusa F_1 s obzirom na tangentu t elipse, a N nožište okomice iz F_1 na t (Slika 4.2). Tada je \overline{ON} srednjica trokuta $F_1F_2F_1'$, pa je $|ON| = \frac{1}{2}|F_1'F_2| = \frac{1}{2} \cdot 2a = a$.

Analogan dokaz vrijedi za hiperbolu. □

Vrijedi i obrat Teorema 4.3.

Teorem 4.4. *Neka je F bilo koja točka unutar kružnice (O, a) . Ako točka N opisuje tu kružnicu, onda okomica na pravac FN u točki N omata **elipsu** kojoj je O središte, F jedan fokus i a velika poluos.*

*Neka je F bilo koja točka izvan kružnice (O, a) . Ako točka N opisuje tu kružnicu, onda okomica na pravac FN u točki N omata **hiperbolu** kojoj je O središte, F jedan fokus i a realna poluos.*

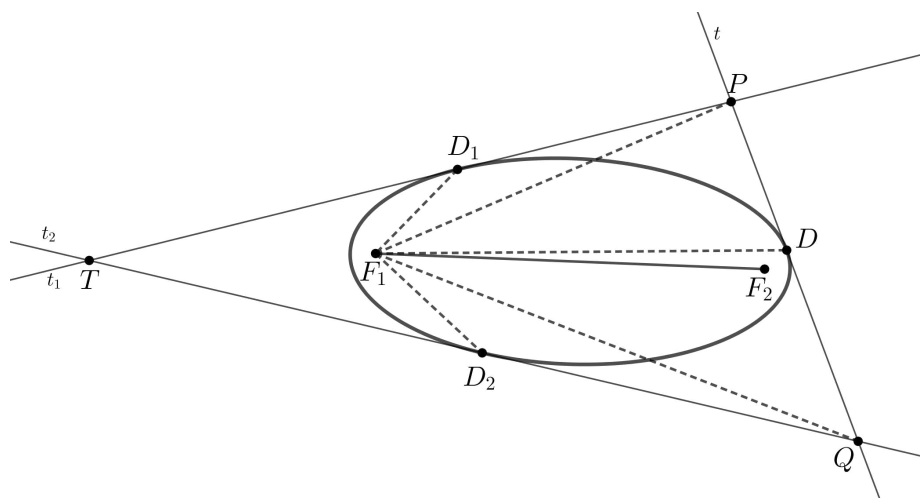
Prema Teoremu 4.3, nožišta okomica spuštenih iz oba žarišta elipse na tangentu elipse leže na kružnici polumjera jednakog velikoj poluosi elipse sa središtem u središtu elipse. Tu kružnicu nazivamo **glavnom kružnicom elipse**. Jednako vrijedi i za hiperbolu.

Sada slijedi jedan od najviše proučavanih teorema u projektivnoj geometriji.

Teorem 4.5 (Prvi Ponceletov teorem za elipsu). *Spojnice žarišta elipse sa sjecištem dviju tangenata simetrale su kutova što ih tvore spojnice žarišta s diralištima tangenata.*

Ovaj teorem smo prethodno dokazali u Teoremu 3.8.

Teorem 4.6 (Drugi Ponceletov teorem za elipsu). *Odsječak varijabilne tangente elipse između dviju fiksnih tangenata vidi se iz žarišta pod stalnim kutom koji je jednak polovini kuta pod kojim se iz žarišta vide dirališta fiksnih tangenata.*



Slika 4.3: Dokaz Teorema 4.6

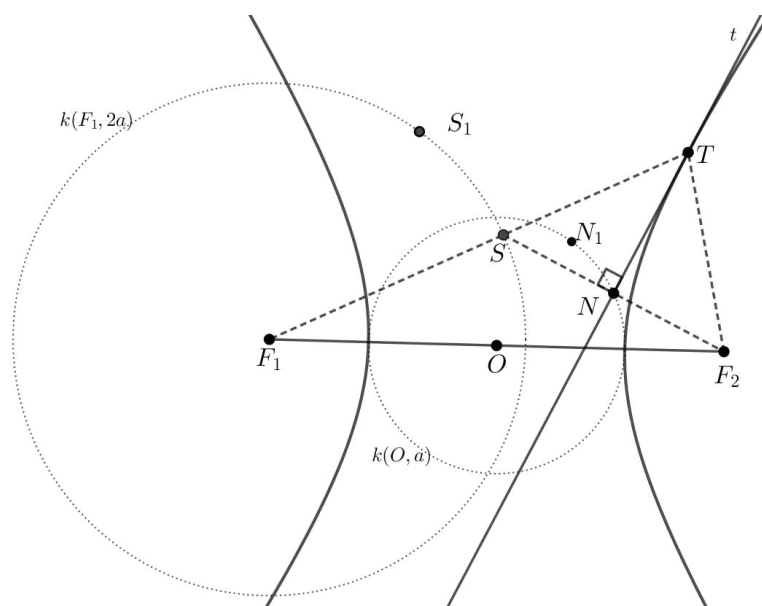
Dokaz. [6] Neka su t_1 i t_2 fiksne tangente, a t varijabilna tangenta. Točka D je diralište varijabilne tangente s elipsom. Koristeći Teorem 4.5 na tangente t i t_1 dobivamo da je $\angle D_1 F_1 P = \angle P F_1 D$, gdje su točke P , D i D_1 kao na Slici 4.3. Primjenom Teorema 4.5 na t i t_2 dobivamo da je $\angle D F_1 Q = \angle D_2 F_1 Q$. Odavde slijedi da je $\angle P F_1 Q = \frac{1}{2} \angle D_1 F_1 D_2$. \square

Za hiperbolu vrijede analogni Prvi i Drugi Ponceletov teorem.

Dokažimo sada tvrdnju koju smo spomenuli kod definicije i karakterizacije hiperbole.

Teorem 4.7. *Asimptote hiperbole sadrže dijagonale pravokutnika sa stranicama $2a$ i $2b$, čije je središte u središtu hiperbole.*

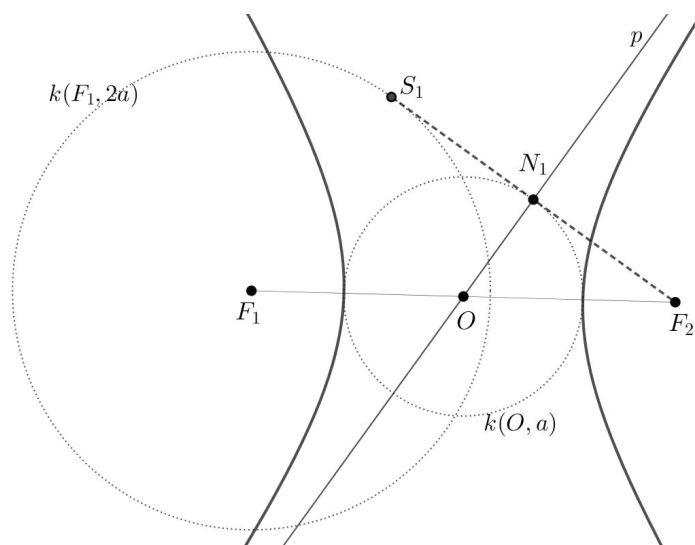
Dokaz. [6] Neka je t tangenta hiperbole u proizvoljnoj točki T , a S suprotište i N ortogonalna projekcija fokusa F_2 na spomenutu tangentu (Slika 4.4).



Slika 4.4: Dokaz Teorema 4.7

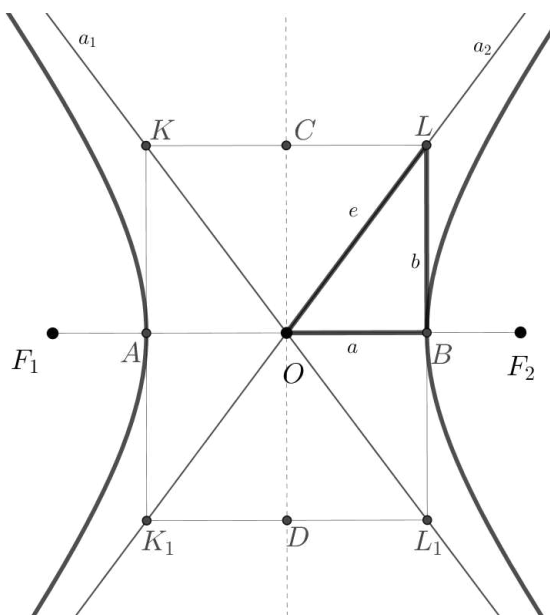
Zamislimo da se točka T „giba“ po hiperboli tako da se njezina udaljenost od neke fiksne točke povećava prema beskonačnosti, tada je to prethodno spomenuti granični položaj tangente. Tangenta hiperbole past će u tom graničnom položaju u neki pravac p , kojeg nazivamo asimptomom hiperbole (Slika 4.5).

Sa S_1 označimo točku u koju će u tom graničnom slučaju pasti suprotište S i s N_1 točku u koju će pasti točka N . Tada je S na kružnici suprotišta sa središtem u F_1 pa je i S_1 na toj kružnici, a N je na glavnoj kružnici hiperbole iz čega je i N_1 na glavnoj kružnici. Budući da je $F_2N \perp t$, to je i $F_2N_1 \perp p$. Pri tomu pravac F_1T prelazi u F_1S_1 . Osim toga, F_1S_1 i p se „sijeku“ u beskonačno dalekoj točki (tj. $F_1S_1 \parallel p$) jer je $F_1T \cap t = \{T\}$ pa je $F_2N_1 \perp F_1S_1$. Kako je pravac koji prolazi točkama F_2 , N i S prešao u pravac koji prolazi točkama F_2 , N_1 i S_1 , to je F_2S_1 tangenta, a $|F_1S_1|$ polumjer kružnice suprotišta $k(F_1, 2a)$. Iz $|F_2N| = |NS|$ slijedi $|F_2N_1| = |N_1S_1|$. Dakle, asimptota p je simetrala dužine $\overline{S_1F_2}$ pa onda i $O \in p$.



Slika 4.5: Dokaz Teorema 4.7

Zbog toga smijemo definirati asimptotu hiperbole kao simetralu dužine $\overline{S_1F_2}$, gdje je S_1F_2 tangenta na $k(F_1, 2a)$ iz F_2 , a S_1 njezino diralište.



Slika 4.6: Dokaz Teorema 4.7

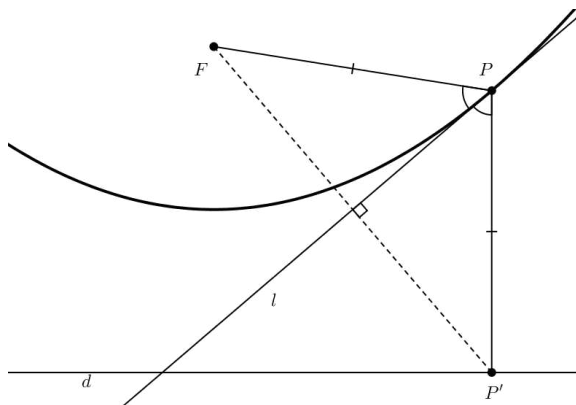
Jednako, možemo reći da je asimptota normala na $k(O, a)$ u točki N_1 , gdje je N_1 diralište

tangente iz F_2 na $k(O, a)$. U tjemenu A i B povucimo okomice na os AB i označimo njihova sjecišta s asimptotama hiperbole sa K, L, K_1 i L_1 (Slika 4.6). Tada je $\triangle OAK_1 \cong \triangle OBL \cong \triangle ON_1F_2$ (sukladni po KSK teoremu o sukkladnosti). Osim toga, vrijedi $|OL| = |OF_2| = e$ pa je $|BL| = b$. \square

4.2 Parabola

U ovom odjeljku navest ćemo nekoliko teorema o paraboli. Neke od njih ćemo dokazati, dok ćemo kod nekih ostati samo na iskazu.

Teorem 4.8. *Skup suprotišta fokusa parabole s obzirom na sve njezine tangente je ravnanica te parabole.*



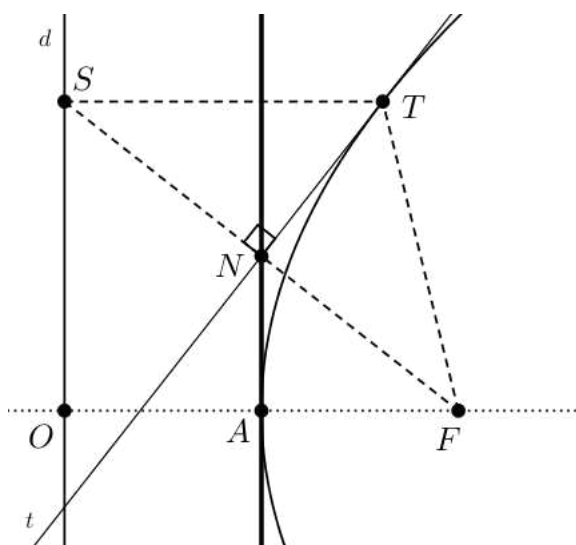
Slika 4.7: Dokaz Teorema 4.8

Ovdje je **suprotište** fokusa s obzirom na neku tangentu, kao kod elipse i hiperbole, točka simetrična tom fokusu s obzirom na tu tangentu.

Dokaz. [1] Neka je pravac l tangenta parabole u točki P i neka je P' projekcija točke P na direktrisu (Slika 4.7). Trokut FPP' je jednakokračan i l je simetrala kuta $\angle FPP'$, pa slijedi da je l os simetrije $\triangle FPP'$ i da je P' točka simetrična točki F s obzirom na tangentu t . \square

Teorem 4.9. *Skup nožišta okomica iz fokusa parabole na njezine tangente je tjemena tangenta te parabole.*

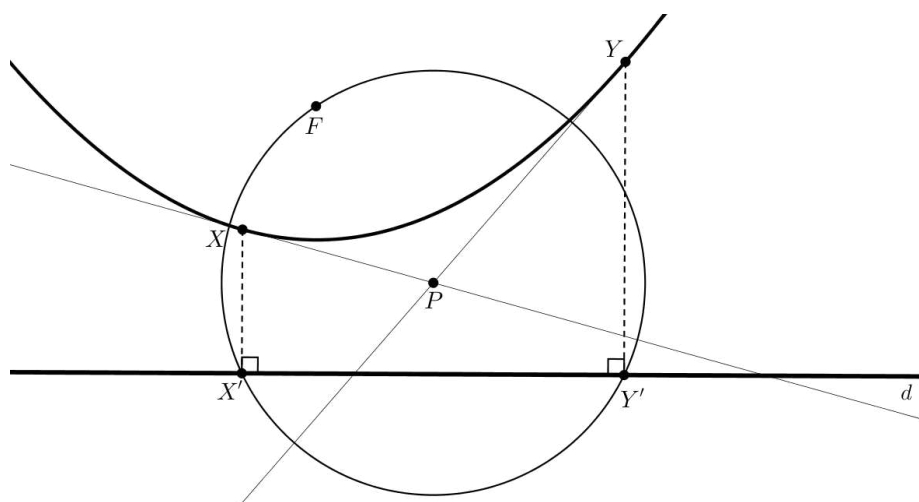
Dokaz. [6] Neka je N ortogonalna projekcija žarišta F na tangentu t s diralištem u točki T i S suprotište fokusa F s obzirom na tangentu t (Slika 4.8). Budući da je t simetrala dužine \overline{SF} , točke F, N i S su kolinearne i N je polovište dužine \overline{SF} . Dužina \overline{NA} , gdje je A tjeme



Slika 4.8: Dokaz Teorema 4.9

parabole, je srednjica trokuta OFS , pa je $AN \parallel d$, tj. $AN \perp OF$, što znači da je AN tjemena tangenta parabole. \square

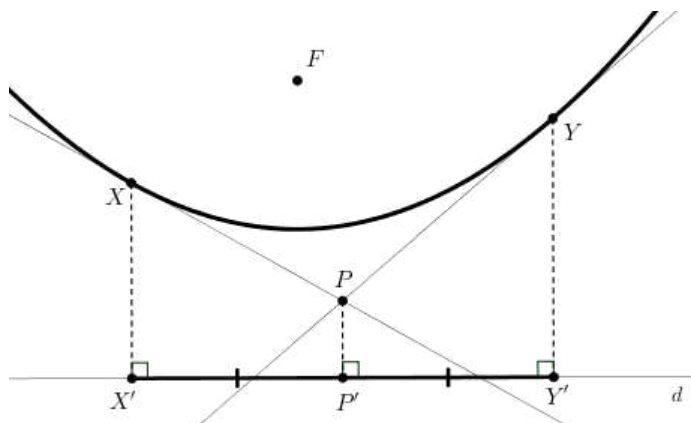
Lema 4.10. *Pretpostavimo da se tangente parabole u točkama X i Y sijeku u točki P . Tada je P središte opisane kružnice trokuta $FX'Y'$, gdje su X' i Y' ortogonalne projekcije točaka X i Y na direktrisu parabole, a F fokus parabole.*



Slika 4.9: Dokaz Leme 4.10

Dokaz. [1] Prema prethodno dokazanom Teoremu 4.8, te dvije tangente su simetrale dužina $\overline{FX'}$ i $\overline{FY'}$. Kako znamo od prije, sjecište simetrala stranica jest središte trokutu opisane kružnice. Simetrale dužina $\overline{FX'}$ i $\overline{FY'}$ se sijeku u točki P , čime smo dokazali da je točka P središte trokutu $FX'Y'$ opisane kružnice (Slika 4.9). \square

Korolar 4.11. *Ako su PX i PY tangente parabole, onda je projekcija točke P na direktrisu polovište dužine $\overline{X'Y'}$ gdje su X' i Y' projekcije točaka X i Y na direktrisu.*



Slika 4.10: Korolar 4.11

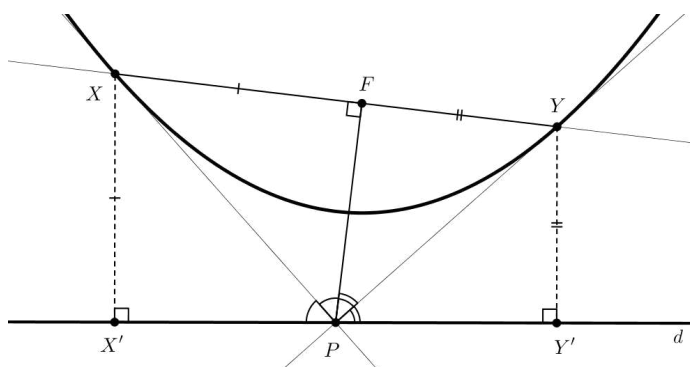
Sljedeći teorem je vrlo sličan Teoremima 3.5 i 3.9 za elipsu.

Teorem 4.12. *Skup točaka P iz kojih se parabola vidi pod pravim kutom jest direktrisa parabole.*

Nadalje, ako su PX i PY tangente parabole povučene iz točke P na direktrisi, tada pravac XY sadrži fokus parabole i PF je visina u trokutu PXY .

Dokaz. [1] Pretpostavimo da točka P leži na direktrisi i neka su X' i Y' projekcije točaka X i Y na direktrisu. Tada su $\triangle PXF$ i $\triangle PXX'$ sukladni po S-K-S teoremu o sukladnosti (Slika 4.11). Slijedi da je $\angle PFX = \angle PX'X = 90^\circ$. Analogno, $\angle PFY = \angle PY'Y = 90^\circ$. Nadalje, $\angle XPY = \frac{1}{2}(\angle FPX' + \angle FPY') = 90^\circ$.

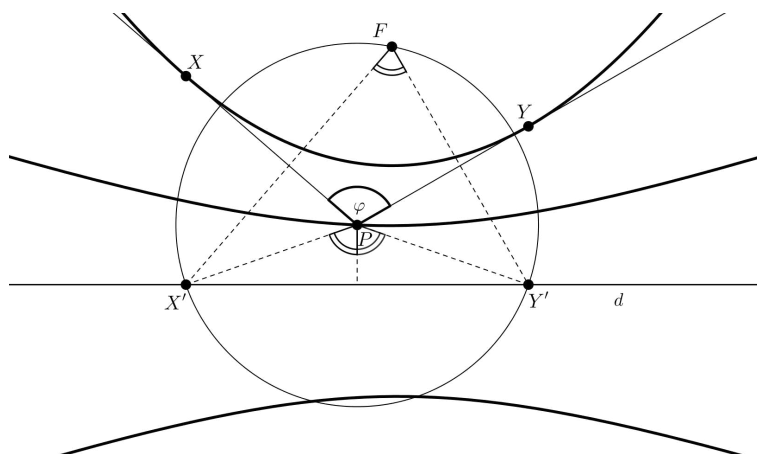
Ako točka P nije na direktrisi, lako se vidi da je $\angle XPY$ manji ili veći od 90° ovisno o tome s koje strane direktrise se P nalazi. \square



Slika 4.11: Dokaz Teorema 4.12

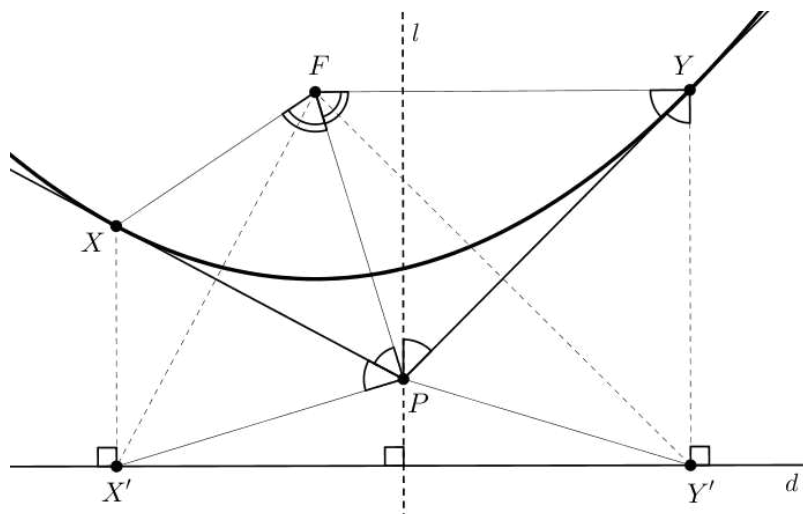
Teorem 4.13. Skup točaka iz kojih se parabola vidi pod kutem φ ili $180^\circ - \varphi$ je hiperbola s jednim fokusom F i s imaginarnom osi d , gdje je F fokus, a d direktrisa parabole.

Dokaz. [1] Pretpostavimo da su PX i PY tangente na parabolu povučene iz točke P i da zatvaraju kut φ . Najprije ćemo gledati slučaj kada je $\varphi > 90^\circ$. Neka su X' i Y' projekcije točaka X i Y na direktrisu. Zbog $XP \perp FX'$ i $YP \perp FY'$ je $\angle X'FY' = 180^\circ - \varphi$. Po Lemi 4.10, P je središte opisane kružnice $\triangle FX'Y'$. Stoga je $\angle X'PY' = 360^\circ - 2\varphi$. Prema tome, udaljenost točke P od direktrise jednaka je $|PF| \cdot |\cos(180^\circ - \varphi)| = |PF| \cdot |\cos \varphi|$ i zbog Papo-Boškovićeve karakterizacije konika točka P leži na hiperboli čiji se fokus podudara s fokusom parabole, imaginarna os s direktrisom i čiji numerički ekscentricitet je jednak $|\cos \varphi|$ (tj. kut između asimptota je jednak 2φ). Jednako se pokazuje kada je kut između tangenata jednak $180^\circ - \varphi$. \square



Slika 4.12: Dokaz Teorema 4.13

Teorem 4.14. Neka su PX i PY tangente na parabolu iz točke P i neka je l pravac koji prolazi kroz P paralelno s osi parabole. Tada je kut između pravaca PY i l jednak $\angle XPF$ i trokuti XFP i PFY su slični. Također vrijedi da je FP simetrala kuta $\angle XFY$ (vidi Sliku 4.13).



Slika 4.13: Dokaz Teorema 4.14

Dokaz. [1] Neka su X' i Y' projekcije točaka X i Y na direktrisu. Tada po Lemi 4.10 točke F , X' i Y' leže na kružnici sa središtem u P , pa je $\angle X'Y'F = \frac{1}{2}\angle X'PF = \angle XPF$. S druge strane, kut između PY i l je jednak kutu između $Y'F$ i $X'Y'$ zato što je l okomit na $X'Y'$ (direktrisu parabole) i $Y'F$ je okomit na PY (štoviše, PY je simetrala dužine $Y'F$). Time je dokazan prvi dio teorema.

Sada ćemo dokazati drugi dio teorema. Budući da je l paralelan s YY' , kut između PY i l je jednak kutu $\angle PYY'$ pa je i $\angle FYP = \angle XPF$, a analogno dobivamo i $\angle FXP = \angle YPF$. Stoga su $\triangle XFP$ i $\triangle PFY$ slični. \square

Sljedeći teorem je posljedica prethodnog, a za njegov dokaz koristit ćemo Simsonovu lemu, tj. Lemu 1.5.

Teorem 4.15. Neka je trokut ABC opisan oko parabole, tj. pravci AB , BC i CA su tangente parabole. Tada fokus parabole leži na opisanoj kružnici trokuta ABC .

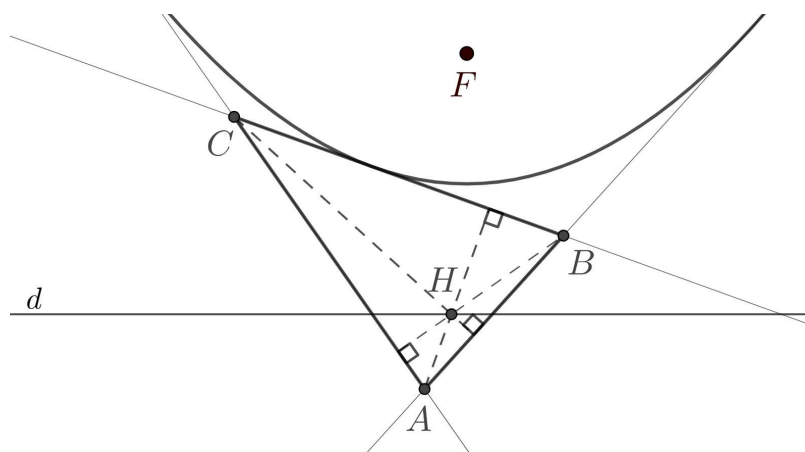
Dokaz. [1] Iz Teorema 4.9 slijedi da projekcije fokusa na stanice trokuta ABC leže na istom pravcu, tjemenoj tangenti te parabole. Tada direktno iz Leme 1.5 slijedi da fokus parabole leži na opisanoj kružnici trokuta ABC . \square

Tako svakoj točki na kružnici opisanoj trokutu ABC možemo pridružiti jedinstvenu parabolu koja dodiruje sve stranice (ili produžetke stranica) trokuta. Naime, točku P na kružnici opisanoj trokutu ABC zrcalimo s obzirom na stranice trokuta te dobivamo tri točke jednog pravca koji je direktrisa tražene parabole, a fokus joj je točka P .

Iz Leme 1.6, Teorema 4.9 i Teorema 4.15 slijedi odmah lijepi rezultat.

Teorem 4.16. *Ortocentar trokuta opisanog paraboli leži na direktrisi te parabole.*

Dokaz. Ako je trokut ABC opisan paraboli, onda je Simsonov pravac fokusa upravo tjemena tangenta. Homotetijom sa centrom u fokusu i koeficijentom 2 taj se pravac preslika u direktrisu, a s druge strane slika je pravac koji prolazi kroz ortocentar trokuta. \square



Slika 4.14: Dokaz Teorema 4.16

Bibliografija

- [1] A.V.Akopyan, A.A.Zaslavsky, *Geometry of Conics*, AMS, Providence, SAD, 2007.
- [2] A. Hatzivelkos, Tangenta u nastavi matematike, *Poučak* Vol. 22, No. 86, 2021. Dostupno na <https://hrcak.srce.hr/file/390479> (pristupljeno 13.9.2022.).
- [3] D. Ilišević, M. Bombardelli, *Elementarna geometrija*, dostupno na: <https://web.math.pmf.unizg.hr/~ilisevic/Slike/EGskripta.pdf> (pristupljeno 15.10.2022.).
- [4] A. Marić, *Čunjosječnice*, Element, Zagreb, 2004.
- [5] D. Menon, Povijesni pregled konika, 2006. Dostupno na http://www.mathos.unios.hr/~dmenon/dmenon/Nastava/MNM2/mnm2_sem_konike.pdf (pristupljeno 25.10.2022.).
- [6] I. Mirošević, N. Koceić-Bilan, J. Jurko, Različiti nastavno-metodički pristupi čunjosječnicama, *Math.e* Vol. 27, 5-6 i 8-9, 2015. Dostupno na <https://hrcak.srce.hr/file/212655> (pristupljeno 15.10.2022.).
- [7] Skripta za *Konstruktivne metode u geometriji*, dostupno na: https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/kmg/kmg_predavanja.pdf (pristupljeno 15.10.2022.).

Izvori slika

- Slika 2.1, dostupna na https://hr.wikipedia.org/wiki/Krivulje_drugog_reda
- Ostale slike nacrtane su u programu GeoGebra.

Sažetak

Konike ili čunjosječnice su algebarske ravninske krivulje drugoga reda nastale presjekom ravnine i stožaste plohe. To su kružnica, elipsa, parabola i hiperbola, te njihove degeneracije, koje u ovom radu općenito nismo uzimali u obzir.

Ovaj diplomski rad podijeljen je u četiri poglavlja. U prvom poglavlju naveli smo temeljne pojmove i tvrdnje potrebne za razumijevanje daljnjeg rada i dokaza. U drugom poglavlju su za svaku krivulju navedena neka osnovna svojstva i definicije te različiti oblici jednadžbi. U trećem poglavlju iskazali smo i dokazali zrcalno te izogonalno svojstvo konika, dok smo u posljednjem poglavlju naveli još neka važna svojstva i teoreme o konikama. Dokazi tvrdnji provedeni su bez korištenja analitičke i projektivne geometrije.

Summary

Conics are algebraic plane curves of the second degree formed by the intersection of a plane and a double cone. These are the circle, ellipse, parabola and hyperbola, and their degenerations, which we generally do not take into account in this thesis.

This Master's thesis is divided into four chapters. In the first one we introduce notions and statements needed in the thesis. In the second chapter we present some basic properties and definitions for each curve and different forms of their equations. In the third chapter, we state and prove the mirror and isogonal properties of conics, while in the last chapter we give some additional important properties and theorems about conics. The proofs of the statements are carried out without using analytic and projective geometry.

Životopis

Rođena sam 15.2.1999. u Zadru. Osnovnoškolsko obrazovanje započela sam u Osnovnoj školi u Sukošanu, nakon čega sam 2013. upisala Gimanziju Jurja Barakovića u Zadru. U srpnju 2017. godine, nakon završetka gimnazije, upisala sam studij matematike, nastavnički smjer, na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2020. završila sam preddiplomski studij te nastavila obrazovanje na diplomskom studiju matematike, nastavnički smjer, na istom fakultetu. U svibnju 2022. kao studentica zaposlila sam se u osnovnoj školi gdje još uvijek radim.