Teleparalelna gravitacija

Benić, Luka

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Luka Benić

TELEPARALELNA GRAVITACIJA

Diplomski rad

Zagreb, 2023.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

Luka Benić

Diplomski rad

Teleparalelna gravitacija

Voditelj diplomskog rada: izv. prof. dr. sc. Ivica Smolić

Ocjena diplomskog rada: ______________________

Povjerenstvo: 1. ________________________

2. ________________________

3. ________________________

Datum polaganja: ________________
Zagreb, 2023.

Zahvaljujem se mentoru izv. prof. dr. sc. Ivici Smoliću na uloženom vremenu te na brojnim korisnim raspravama.

Sažetak

Opća teorija relativnosti, kao klasična teorija gravitacije, bazira se na jedinstvenoj Levi-Civitinoj koneksiji, koja je u potpunosti određena metričkim tenzorom dane glatke mnogostrukosti. Jedinstvenost Levi-Civitine koneksije temelji se na pretpostavkama iščezavajućeg tenzora torzije i kompatibilnosti metrike s kovarijantnom derivacijom, odnosno iščezavajućeg tenzora nemetričnosti. Posljedično u takvom formalizmu gravitacija je u potpunosti opisana svojstvima Riemannovog tenzora zakrivljenosti, odnosno zakrivljenošću promatranog prostorvremena. U ovom radu razmotramo posljedice popuštanja navedenih pretpostavki te dolazimo do zaključka da postoji dinamička ekvivalentnost opće teorije relativnosti s teorijama koje se temelje na iščezavanju Riemannovog tenzora zakrivljenosti, a na neiščezavanju ili istovremeno tenzora torzije i tenzora nemetričnosti ili na neiščezavanju samo tenzora nemetričnosti ili na neiščezavanju samo tenzora torzije. Također pokazujemo da u ovakvom formalizmu postoji mogućnost promatranja klasične gravitacije kao baždarne teorije bazirane na Liejevoj grupi translacija. Nadalje, promatramo pripadne modificirane teorije gravitacije te pokazujemo da time dolazimo do novih dinamičkih modela, koji se općenito razlikuju od dinamičkih modela dobivenih modificiranim teorijama opće teorije relativnosti. Tako dobiveni dinamički modeli su intenzivan predmet istraživanja, naročito u kozmološkim modelima.

Ključne riječi: Riemannova geometrija, opća teorija relativnosti, teleparalelne geometrije, teleparalelne gravitacije, baždarenje gravitacije

Teleparallel Gravitation

Abstract

The general theory of relativity, as a classical theory of gravitation, is based on a unique Levi-Civita connection, which is entirely given by the metric tensor of a given smooth manifold. The uniqueness of the Levi-Civita connection is based on the assumptions of vanishing torsion tensor and compatibility of the metric with the covariant derivative, or in other words vanishing non-metricity tensor. As a consequence of this formalism, gravitation is entirely given by the properties of the Riemann curvature tensor, or with the curvature of a given spacetime. In this text, we are exploring the consequences of relaxing the aforementioned assumptions and we conclude that there exists a dynamical equivalence between the general theory of relativity with theories based on a vanishing Riemann curvature tensor, and simultaneously nonvanishing torsion and non-metricity tensors, or with only non-metricity as a nonvanishing tensor, or with only torsion as a nonvanishing tensor. We also show that in this formalism there is a possibility of treating classical gravitation as a gauge theory based on the Lie group of translations. Furthermore, we look at given modified theories of gravitation in this formalism and we see that we end up with new dynamical models, which are in general different from dynamical models obtained from modified theories of the general theory of relativity. Those dynamical models are the subject of intense research, especially in the cosmological models.

Keywords: Riemannian geometry, general theory of relativity, teleparallel geometries, teleparallel gravitations, gauging of gravitation

Sadržaj

1 Uvod

U ranoj prvoj polovici prošlog stoljeća A. Einstein je razvio formalizam opće teorije relativnosti u kojemu je gravitacija formulirana u potpunosti kao geometrijska teorija. Nedugo nakon što je teorija postavljena počeli su brojni pokušaji ujedinjenja klasičnog elektromagnetizma i gravitacije u jednu teoriju. Naravno dva su glavna razloga tome, prvi je taj da su formalizmi klasičnog elektromagnetizma i opće teorije relativnosti dosta slični, a drugi je taj da je kvantna teorija tek bila u začecima te još nije bio poznat formalizam kvantne teorije polja. No iako su pokušaji bili brojni i neuspješni iz njih su se izrodile brojne ideje koje su utjecale na daljnji razvoj fizike. Kao što ćemo vidjeti opća teorija relativnosti se bazira na Riemannovoj geometriji u kojoj tenzori torzije i nemetričnosti iščezavaju, a samo Riemannov tenzor zakrivljenosti ne iščezava. Stoga, bitno je spomenuti jedan od prvih pokušaja ujedinjenja gravitacije i elektromagnetizma koji se bazirao na neiščezavanju tenzora nemetričnosti, za kojega ćemo se kasnije uvjeriti da je zaslužan za promjenu duljine vektora pri tzv. paralelnom transportu te na neiščezavanju Riemannovog tenzora zakrivljenosti, a to je slučaj tzv. Weylove geometrije. Za ovu ideju je zaslužan njemački matematičar H. Weyl [1]. On je u razvoju svoje teorije uveo pojam tzv. baždarne transformacije, za kojega se može reći da je vjerojatno usmjerio cijelu fiziku dvadesetog stoljeća u novom smjeru. Weylovu ideju je opovrgnuo sam Einstein jer je pokazao da bi takva teorija implicirala nepostojanje dobro definiranih atomskih spektralnih linija [2]. S druge strane ćemo spomenuti pokušaj ujedinjenja klasičnog elektromagnetizma i gravitacije baziran na tenzoru torzije. Tu ideju je predstavio E. Schrödinger [3]. Problem na koji je naišao je taj da je u njegovoj teoriji foton morao imati neiščezavajuću masu, što danas znamo da je zasigurno nemoguće. Za podrobniji povijesni pregled ideja ujedinjenja gravitacije s ostalim silama preporučuje se pogledati [4, 5].

Ovdje ćemo još spomenuti tzv. Einstein-Cartan(–Sciama–Kibbleovu) teoriju gravitacije [6] koja je specijalni slučaj tzv. Poincaréove baždarne gravitacije koja počiva na baždarenju cijele Poincaréove grupe. Geometrija u kojoj je ova teorija razvijena je Riemann-Cartanova, za koju tenzor nemetričnosti iščezava, a ostala dva relevantna tenzora ne. Specifičnost ove teorije je ta da je masa vezana uz Riemannov tenzor zakrivljenosti, a torzija uz intrinzični spin. Također, bitno je za napomenuti da ova teorija i dalje nije niti potvrđena niti opovrgnuta, niti teorijski niti eksperimentalno.

Ono što je tema ovog rada je tzv. teleparalelna gravitacija (grč. *tele*=udaljeno, daleko). Ona se bazira na iščezavanju Riemannovog tenzora zakrivljenosti, dakle teoriju razvijamo u tzv. teleparalelnoj geometriji. Naziv ove teorije dolazi upravo od iščezavanja Riemannovog tenzora zakrivljenosti jer to znači da pri paralelnom transportu vektori ne mijenjaju svoju orijentaciju u odnosu na početnu, dakle paralelni su sa svojom početnom orijentacijom i na „dalekim" udaljenostima. Začetnik ovog pristupa je sam Einstein [7] koji je također nakon formuliranja opće teorije relativnosti pokušao ujediniti klasični elektromagnetizam i gravitaciju. On je svoju teleparalelnu teoriju razvijao u tzv. tetradnom formalizmu kojeg ćemo detaljnije izložiti kasnije kroz rad. Naravno i taj pokušaj ujedinjenja je bio osuđen na propast s današnje pozicije. No moderni tretman teleparalelizma ne počiva na pokušaju ujedinjenja gravitacije s klasičnim elektromagnetizmom, već se promatra kao zaseban formalizam. Tema ovog rada je razviti formalizme opće teleparalelne, simetrične teleparalelne i metričke teleparalelne gravitacije te njihovih pripadnih modificiranih teorija. Pokazat ćemo da teleparalelne gravitacije posjeduju specijalne slučajeve koji su dinamički ekvivalentni s općom teorijom relativnosti te općenitu dinamičku neekvivalentnost njihovih pripadnih modificiranih teorija s modificiranim teorijama opće teorije relativnosti. Postoje dva ekvivalentna pristupa razvoju ovog formalizma koja ćemo pokazati. Jedan će se bazirati na tzv. Palatinijevom formalizmu u kojemu su metrika i afina koneksija dinamičke varijable (ovaj ćemo formalizam kraće zvati metrički) [8], a drugi na tetradnom formalizmu u kojemu su tetrada i spinska koneksija dinamičke varijable. Posebno ćemo se posvetiti metričkom teleparalelizmu kojeg ćemo tretirati u tetradnom formalizmu te ćemo vidjeti da se tu otvara mogućnost tretiranja gravitacije kao klasične baždarne teorije bazirane na Liejevoj grupi translacija. Ovaj rad za svrhu ima razviti cijeli formalizam teleparalelne gravitacije i pokazati sve glavne rezultate te time poslužiti kao svojevrstan uvod u formalizam teleparalelne gravitacije.

Potrebnu notaciju ćemo uvoditi postupno kroz rad. Sva razmatranja radimo u četiri prostorvremenske dimenzije. Signatura metrike koju ćemo koristiti je $(-,+,+,+)$. Također, većinom ćemo koristiti sustav mjernih jedinica u kojem vrijedi $\hbar = c = 1$, ako nam negdje te mjerne jedinice budu potrebne za neku argumentaciju, posebno ćemo naglasiti da koristimo $\hbar \neq 1$ ili $c \neq 1$.

Ovdje ćemo još sugerirati kojim redoslijedom bi trebalo čitati ovaj rad. Poglavlje

Diferencijalna geometrija se prolazi u cijelosti te se nakon njega prelazi na Dodatak A u kojemu se izvodi tzv. Jacobijev identitet. Nakon toga se vraćamo na poglavlje Opća teorija relativnosti. Zatim prelazimo na poglavlje Tetradni formalizam i prolazimo ga do kraja potpoglavlja Relevantne tenzorske veličine u tetradnom formalizmu. Krajem čitanja tog potpoglavlja preporučuje se pročitati Dodatak B i Dodatak C za detalje o varijacijama po tetradi, odnosno o Poincaréovoj algebri. Zatim se vraćamo na potpoglavlje Spinska kovarijantna derivacija i prolazimo kroz poglavlje Tetradni formalizam do kraja te zatim prolazimo kroz poglavlje Teleparalelna gravitacija. Nakon toga preporučuje se pročitati Dodatak D za detalje o baždarnim grupama te nakon toga prelazimo na poglavlje MTEGR kao baždarna teorija te ga prolazimo u cijelosti, kao i nakon njega poglavlje Modificirane teorije gravitacije. Čitanje naravno završavamo poglavljem Rasprava i zaključak.

2 Diferencijalna geometrija

U ovom poglavlju dajemo sve definicije i rezultate diferencijalne geometrije potrebne za ovaj rad. Ovdje nećemo ulaziti u prevelike detalje, već nam je fokus na potrebnim tenzorskim veličinama i njihovim svojstvima. Sve tenzorske veličine ćemo tretirati u indeksnoj notaciji. Za potpuni tretman diferencijalne geometrije (DG) preporučuje se pogledati [9–11].

Za početak nam je potrebna definicija glatke mnogostrukosti [12]:

Definicija 2.1 (Glatka mnogostrukost). *Realna glatka n-dimenzionalna mnogostrukost $\mathcal{M}$ je skup čiji podskupovi $\{O_\alpha\}$ zadovoljavaju:*

- $(\forall p \in \mathcal{M})\,(\exists O_\alpha : p \in O_\alpha)$ *, drugim riječima podskupovi $\{O_\alpha\}$ pokrivaju $\mathcal{M}$,*
- $\forall \alpha\ \exists$ *bijektivno preslikavanje $\Phi_\alpha : O_\alpha \to U_\alpha$, gdje je U_α otvoreni podskup od $\mathbb{R}^n$,*
- *ako se dva podskupa O_α i O_β preklapaju, odnosno ako vrijedi $O_\alpha \cap O_\beta \neq \emptyset$, onda postoji preslikavanje $\Phi_\beta \circ \Phi_\alpha^{-1} : \Phi_\alpha[O_\alpha \cap O_\beta] \subset U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to \Phi_\beta[O_\alpha \cap O_\beta] \subset U_\beta \subset \mathbb{R}^n$ koje je klase C^∞ te gdje su svi podskupovi otvoreni.*

2.1 Relevantne tenzorske veličine

Za početak definiramo metriku $g_{\mu\nu}$, simetričan, nedegeneriran tenzor tipa $(0, 2)$. Dakle vrijedi

$$g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu} \ . \tag{2.1}$$

Kontrahiranje metrike s njenim inverzom $g^{\mu\nu}$ daje

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta^\rho_\mu \ . \tag{2.2}$$

Iz DG nam je poznato da se parcijalne derivacije tenzora ne transformiraju kao tenzori pri koordinatnim transformacijama, stoga je potrebno uvesti tzv. kovarijantnu derivaciju koja rješava taj problem. Uvođenjem kovarijantne derivacije smo uveli i tzv. koeficijente afine koneksije $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ na način

$$\nabla_\mu T^{\alpha_1 \ldots \alpha_i}{}_{\beta_1 \ldots \beta_j} = \partial_\mu T^{\alpha_1 \ldots \alpha_i}{}_{\beta_1 \ldots \beta_j} + \sum_{k=1}^{i} \Gamma^{\alpha_k}{}_{\sigma\mu} T^{\ldots\sigma\ldots}{}_{\beta_1 \ldots \beta_j} - \sum_{l=1}^{j} \Gamma^{\tau}{}_{\beta_l \mu} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_i}{}_{\ldots\tau\ldots} \ , \tag{2.3}$$

gdje je $T^{\alpha_1 \dots \alpha_i}{}_{\beta_1 \dots \beta_j}$ proizvoljan tenzor tipa (i, j). Napomenimo da veličine $\Gamma^\alpha{}_{\beta\gamma}$ nisu tenzori.

Nadalje, definiramo sljedeće tenzore:

- tenzor torzije:

$$T^\mu{}_{\nu\rho} = 2\Gamma^\mu{}_{[\rho\nu]} = \Gamma^\mu{}_{\rho\nu} - \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} \ , \tag{2.4}$$

- tenzor nemetričnosti:

$$Q_{\mu\nu\rho} = \nabla_\mu g_{\nu\rho} \overset{(2.3)}{=} \partial_\mu g_{\nu\rho} - \Gamma^\lambda{}_{\nu\mu} g_{\lambda\rho} - \Gamma^\lambda{}_{\rho\mu} g_{\nu\lambda} \ . \tag{2.5}$$

U (2.4) smo uveli notaciju antisimetriziranja [ ], koja će nam uz notaciju simetriziranja ( ) biti poprilično korisna dalje kroz rad.

Uvedeni tenzori posjeduju sljedeće (anti)simetrije

$$T^\mu{}_{\nu\rho} = -T^\mu{}_{\rho\nu} \ , \tag{2.6}$$

$$Q_{\mu\nu\rho} = Q_{\mu\rho\nu} \ . \tag{2.7}$$

Također kada oba ova tenzora iščezavaju, odnosno kada su koeficijenti afine koneksije simetrični u donjim indeksima te kada je metrika kompatibilna s kovarijantnom derivacijom, koeficijente afine koneksije nazivamo Christoffelovim simbolima, a samu afinu koneksiju Levi-Civitinom koneksijom. Levi-Civitina koneksija je jedinstvena i u potpunosti je određena metrikom te je dana s [9]

$$\mathring{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} \left(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu} \right) \ . \tag{2.8}$$

Uveli smo notaciju $\mathring{}$, koja će nam odsada nadalje označavati veličine definirane u odnosu na Levi-Civitinu koneksiju. Dakle, vrijedi simetrija

$$\mathring{\Gamma}^\rho{}_{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^\rho{}_{\nu\mu} \ . \tag{2.9}$$

Izrazi (2.4), (2.5) i (2.8) nam omogućuju dekompoziciju općenite afine koneksije. Da bismo to izveli promatramo sljedeću kombinaciju tenzora nemetričnosti

$$Q_{\rho\mu\nu} - Q_{\mu\rho\nu} - Q_{\nu\rho\mu} = \partial_\rho g_{\mu\nu} - \partial_\mu g_{\rho\nu} - \partial_\nu g_{\rho\mu} + 2\Gamma^\lambda{}_{(\mu\nu)} g_{\rho\lambda} + 2\Gamma^\lambda{}_{[\rho\nu]} g_{\mu\lambda} + 2\Gamma^\lambda{}_{[\rho\mu]} g_{\nu\lambda} \ ,$$

iz ovoga nakon kratkog računa slijedi tražena dekompozicija

$$\Gamma^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \mathring{\Gamma}^{\alpha}{}_{\mu\nu} + K^{\alpha}{}_{\mu\nu} + L^{\alpha}{}_{\mu\nu} \ . \tag{2.10}$$

Ovdje smo uveli nova dva tenzora:

- tenzor kontorzije (engl. *contortion tensor*):

$$K^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(T_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu} + T_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\mu} - T^{\alpha}{}_{\mu\nu}\right) \ , \tag{2.11}$$

- tenzor disformiranosti (engl. *disformation tensor*):

$$L^{\alpha}{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(Q^{\alpha}{}_{\mu\nu} - Q_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu} - Q_{\nu}{}^{\alpha}{}_{\mu}\right) \ . \tag{2.12}$$

Ovi tenzori posjeduju sljedeće (anti)simetrije

$$K^{\mu}{}_{\nu\rho} = -K_{\nu}{}^{\mu}{}_{\rho} \ , \tag{2.13}$$

$$L^{\mu}{}_{\nu\rho} = L^{\mu}{}_{\rho\nu} \ . \tag{2.14}$$

Uvodimo i Riemannov tenzor zakrivljenosti

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_{\rho}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} + \Gamma^{\mu}{}_{\tau\rho}\Gamma^{\tau}{}_{\nu\sigma} - \Gamma^{\mu}{}_{\tau\sigma}\Gamma^{\tau}{}_{\nu\rho} \ , \tag{2.15}$$

koji posjeduje antisimetriju

$$R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = -R^{\mu}{}_{\nu\sigma\rho} \ . \tag{2.16}$$

Kroz rad će nam biti korisna i sljedeća dva tenzora:

- superpotencijal:

$$S_{\rho}{}^{\mu\nu} = K^{\mu\nu}{}_{\rho} - \delta^{\mu}_{\rho}T_{\sigma}{}^{\sigma\nu} + \delta^{\nu}_{\rho}T_{\sigma}{}^{\sigma\mu} \ , \tag{2.17}$$

- tenzor distorziranosti (engl. *distortion tensor*):

$$D^{\mu}{}_{\nu\rho} = \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} - \mathring{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu\rho} \overset{(2.10)}{=} K^{\mu}{}_{\nu\rho} + L^{\mu}{}_{\nu\rho} \ , \tag{2.18}$$

od kojih samo superpotencijal posjeduje antisimetriju

$$S_\rho{}^{\mu\nu} = -S_\rho{}^{\nu\mu} \ . \tag{2.19}$$

Pomoću dekompozicije (2.10) te (2.18) izraz za Riemannov tenzor (2.15) možemo zapisati kao

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \mathring{R}^\mu{}_{\nu\rho\sigma} + \mathring{\nabla}_\rho D^\mu{}_{\nu\sigma} - \mathring{\nabla}_\sigma D^\mu{}_{\nu\rho} + D^\mu{}_{\tau\rho} D^\tau{}_{\nu\sigma} - D^\mu{}_{\tau\sigma} D^\tau{}_{\nu\rho} \ . \tag{2.20}$$

Također sličnim postupkom možemo povezati kovarijantnu derivaciju općenitog tenzora koja odgovara općenitoj afinoj koneksiji s kovarijantnom derivacijom istog tenzora koja odgovara Levi-Civitinoj koneksiji

$$\nabla_\mu T^{\alpha_1\ldots\alpha_i}{}_{\beta_1\ldots\beta_j} = \mathring{\nabla}_\mu T^{\alpha_1\ldots\alpha_i}{}_{\beta_1\ldots\beta_j} + \sum_{k=1}^{i} D^{\alpha_k}{}_{\sigma\mu} T^{\ldots\sigma\ldots}{}_{\beta_1\ldots\beta_j} - \sum_{l=1}^{j} D^\tau{}_{\beta_l\mu} T^{\alpha_1\ldots\alpha_i}{}_{\ldots\tau\ldots} \ . \tag{2.21}$$

Ono što je bitno za napomenuti je to da su tenzori (2.4), (2.5) i (2.15) definirani s obzirom na odabranu afinu koneksiju. To će nam postati jasno već u narednom poglavlju kada budemo razmatrali svojstva opće teorije relativnosti (OTR) te u kasnijim poglavljima kada budemo razvijali formalizam teleparalelne gravitacije.

2.2 Paralelni transport

Za tenzor tipa (i, j) kažemo da je paralelno transportiran duž vektorskog polja X^μ ako je zadovoljeno

$$X^\mu \nabla_\mu T^{\alpha_1\ldots\alpha_i}{}_{\beta_1\ldots\beta_j} = 0 \ . \tag{2.22}$$

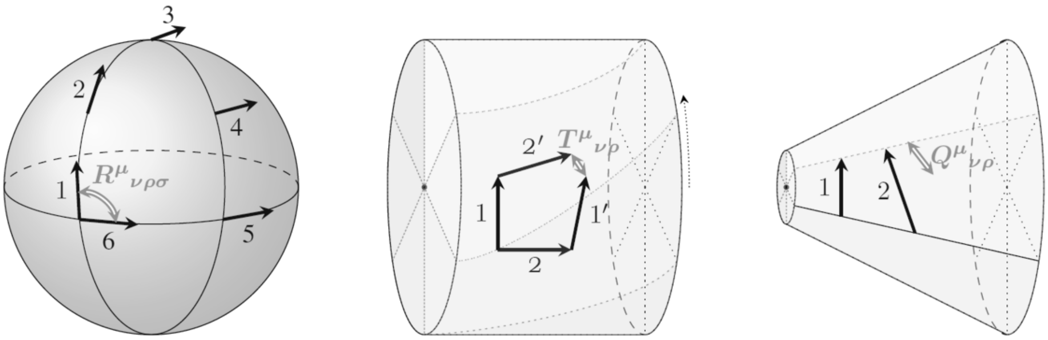
Ako je vektorsko polje transportirano duž samoga sebe, nazivamo ga autoparalelnim vektorskim poljem, dakle u tom slučaju vrijedi

$$X^\mu \nabla_\mu X^\nu = 0 \ . \tag{2.23}$$

Uz standardnu parametrizaciju $X^\mu = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}$ jednadžba (2.23) postaje

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\tau} \frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \ , \tag{2.24}$$

dakle ovu jednadžbu nazivamo autoparalelnom jednadžbom, a u slučaju kada je koneksija koju koristimo Levi-Civitina, odnosno kada vrijedi $\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \mathring{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\beta}$, ova jednadžba se naziva geodetskom jednadžbom.
Također uočavamo da (2.24) poprima jednaki oblik uz reparametrizaciju $\lambda = a\tau + b$ za $a, b \in \mathbb{R}$.



Slika 2.1: Shematski prikaz, redom s lijeva na desno, utjecaja Riemannovog tenzora zakrivljenosti, tenzora torzije i tenzora nemetričnosti na proizvoljni vektor pri paralelnom transportu u proizvoljnom prostorvremenu. Slika je preuzeta iz [13] te je modificirana.

Na Slici 2.1 uočavamo da vektor nakon paralelnog transporta natrag u početnu točku zbog Riemannovog tenzora zakrivljenosti zatvara neki kut u odnosu na svoju početnu orijentaciju. Nadalje, prisutnost torzije uzrokuje nekomutiranje vektora kojeg transportiramo sa smjerom u kojem ga transportiramo. Naposljetku, nemetričnost uzrokuje promjenu duljine vektora pri paralelnom transportu. Ove tvrdnje ćemo sada potkrijepiti kratkim računima.

Direktan račun djelovanja komutatora kovarijantnih derivacija danih općenitom afinom koneksijom na neki proizvoljan vektor, uz korištenje (2.3), (2.4) i (2.15), daje

$$[\nabla_\alpha, \nabla_\beta] u^\mu = R^{\mu}{}_{\rho\alpha\beta} u^\rho - T^{\rho}{}_{\alpha\beta} \nabla_\rho u^\mu \ . \tag{2.25}$$

Nadalje, ako izračunamo tzv. usmjerenu kovarijantnu derivaciju [14] produkta dva vektora ($a_\mu b^\mu = g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu$) imamo

$$\frac{D(g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu)}{d\lambda} = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \nabla_\alpha (g_{\mu\nu} a^\mu b^\nu) = g_{\mu\nu} b^\nu \underbrace{\frac{dx^\alpha}{d\lambda} \nabla_\alpha a^\mu}_{=0} + g_{\mu\nu} a^\mu \underbrace{\frac{dx^\alpha}{d\lambda} \nabla_\alpha b^\nu}_{=0} + a^\mu b^\nu \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \underbrace{\nabla_\alpha g_{\mu\nu}}_{=Q_{\alpha\mu\nu}}$$

$$\implies \frac{D(a^\mu a_\mu)}{d\lambda} = \frac{dx^\alpha}{d\lambda} a^\mu a^\nu Q_{\alpha\mu\nu} \ , \tag{2.26}$$

gdje su dva člana identički jednaki nuli po definiciji paralelnog transporta.

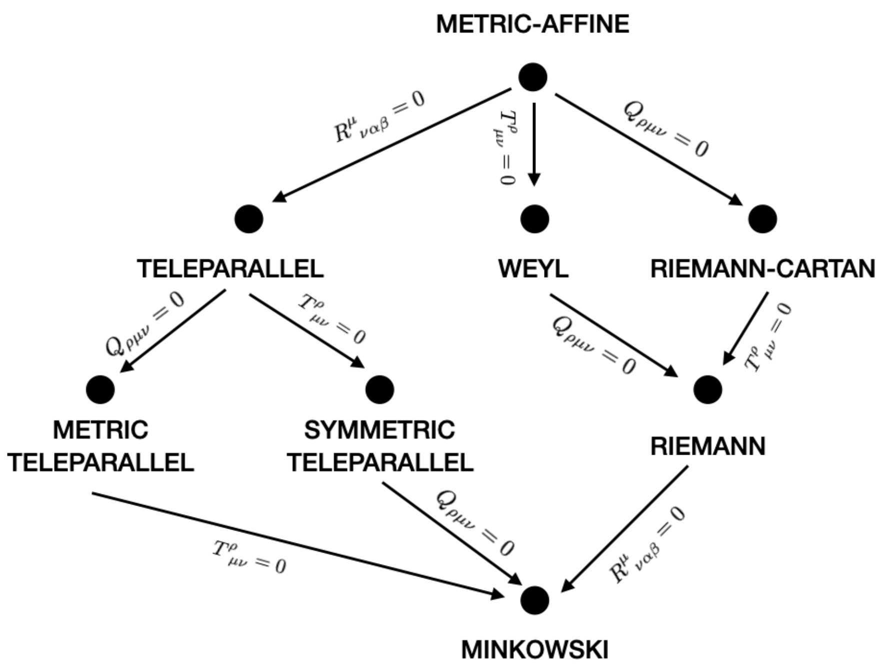
Kao što vidimo pomoću (2.25) i (2.26) smo potkrijepili gore navedene tvrdnje. U [15] se može pronaći nekoliko instruktivnih primjera torzije i nemetričnosti.

2.3 Klasifikacija geometrija

Sada smo u prilici navesti sve moguće geometrije u odnosu na to koji od (2.4), (2.5), (2.15) tenzora iščezava. Klasifikacija je sljedeća:

- opća teleparalelna geometrija: $R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = 0$,
- Weylova geometrija: $T^{\mu}{}_{\nu\rho} = 0$,
- Riemann-Cartanova geometrija: $Q_{\mu\nu\rho} = 0$,
- metrička teleparalelna geometrija: $R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = 0,\ Q_{\mu\nu\rho} = 0$,
- simetrična teleparalelna geometrija: $R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = 0,\ T^{\mu}{}_{\nu\rho} = 0$,
- Riemannova geometrija: $T^{\mu}{}_{\nu\rho} = 0,\ Q_{\mu\nu\rho} = 0$,
- geometrija Minkowskog: $R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = 0,\ T^{\mu}{}_{\nu\rho} = 0,\ Q_{\mu\nu\rho} = 0$.

Na Slici 2.2 se nalazi shematski prikaz ove klasifikacije.



Slika 2.2: Shematski prikaz klasifikacije geometrija u odnosu na Riemannov tenzor zakrivljenosti, tenzor torzije i tenzor nemetričnosti. Slika je preuzeta iz [16].

2.4 *Relevantne kontrakcije tenzora*

Sada ćemo navesti sve važne kontrakcije ranije uvedenih tenzorskih veličina te prodiskutirati neka njihova svojstva.

2.4.1 Kontrakcije Riemannovog tenzora zakrivljenosti

- Riccijev tenzor:

$$R_{\alpha\beta} = R^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta} \tag{2.27}$$

- Riccijev skalar:

$$R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \tag{2.28}$$

- tenzor homotetičke zakrivljenosti [17]:

$$\hat{R}_{\alpha\beta} = R^{\mu}{}_{\mu\alpha\beta} = \partial_{\alpha}\Gamma^{\mu}{}_{\mu\beta} - \partial_{\beta}\Gamma^{\mu}{}_{\mu\alpha} \ , \tag{2.29}$$

  ovaj tenzor ne iščezava kada je $Q_{\mu\nu\rho} \neq 0$

- ko-Riccijev tenzor (engl. *co-Ricci tensor*) [17]:

$$\breve{R}^{\mu}{}_{\beta} = g^{\nu\alpha} R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} \tag{2.30}$$

- ko-Riccijev skalar (engl. *co-Ricci scalar*):

$$\breve{R} = \breve{R}^{\alpha}{}_{\alpha} = g^{\beta\mu} R^{\alpha}{}_{\beta\mu\alpha} \overset{(2.16)}{=} -g^{\beta\mu} R^{\alpha}{}_{\beta\alpha\mu} \overset{(2.27)}{=} -g^{\beta\mu} R_{\beta\mu} \overset{(2.28)}{=} -R$$
$$\implies \breve{R} = -R \tag{2.31}$$

2.4.2 Kontrakcije tenzora torzije

- vektor torzije:

$$T_{\mu} = T^{\nu}{}_{\nu\mu} \tag{2.32}$$

- pseudovektor torzije:

$$\tilde{T}^{\mu} = \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} T_{\nu\rho\sigma} \tag{2.33}$$

  gdje je $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ tzv. totalno antisimetrični Levi-Civitin simbol [14]

- skalar torzije:

$$T = \frac{1}{2} S_\rho{}^{\mu\nu} T^\rho{}_{\mu\nu} \overset{(2.17)}{=} \frac{1}{4} T^{\rho\mu\nu} T_{\rho\mu\nu} + \frac{1}{2} T^{\mu\nu\rho} T_{\nu\mu\rho} - T^\mu T_\mu \tag{2.34}$$

2.4.3 Kontrakcije tenzora nemetričnosti

Za početak ćemo pronaći izraz za $Q_\rho{}^{\alpha\beta}$

$$Q_\rho{}^{\alpha\beta} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} Q_{\rho\mu\nu} = g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \nabla_\rho g_{\mu\nu} \ ,$$

sada računamo

$$\begin{aligned} &\nabla_\rho (g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} g_{\mu\nu}) \overset{(2.1),(2.2)}{=} \nabla_\rho (g^{\alpha\mu} \delta^\beta_\mu) = \nabla_\rho g^{\alpha\beta} = g^{\beta\nu} g_{\nu\mu} \nabla_\rho g^{\mu\alpha} + g^{\alpha\mu} g_{\mu\alpha} \nabla_\rho g^{\nu\beta} + \\ &+ g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \nabla_\rho g_{\mu\nu} \overset{(2.1),(2.2)}{=} 2\nabla_\rho g^{\alpha\beta} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \nabla_\rho g_{\mu\nu} \implies g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \nabla_\rho g_{\mu\nu} = -\nabla_\rho g^{\alpha\beta} \ , \end{aligned}$$

stoga dobivamo

$$Q_\rho{}^{\alpha\beta} = -\nabla_\rho g^{\alpha\beta} \ . \tag{2.35}$$

- Weylov vektor:

$$Q_\alpha = g^{\mu\nu} Q_{\alpha\mu\nu} = Q_{\alpha\mu}{}^\mu \tag{2.36}$$

- drugi vektor nemetričnosti (engl. 2^{nd} *non-metricity vector*) [15]:

$$\tilde{Q}_\nu = Q^\mu{}_{\mu\nu} = g^{\mu\alpha} Q_{\alpha\mu\nu} = g^{\mu\alpha} \nabla_\alpha g_{\mu\nu} \tag{2.37}$$

2.5 Bianchijevi identiteti

2.5.1 Prvi Bianchijev identitet

Promatramo sljedeću antisimetričnu kombinaciju Riemannovog tenzora zakrivljenosti

$$\begin{aligned} R^\mu{}_{[\nu\rho\sigma]} &= \frac{1}{3!} \left(R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} - R^\mu{}_{\nu\sigma\rho} + R^\mu{}_{\rho\sigma\nu} - R^\mu{}_{\rho\nu\sigma} + R^\mu{}_{\sigma\nu\rho} - R^\mu{}_{\sigma\rho\nu} \right) \\ &\overset{(2.16)}{=} \frac{1}{3} \left(R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} + R^\mu{}_{\rho\sigma\nu} + R^\mu{}_{\sigma\nu\rho} \right) \\ &\overset{(2.4),(2.15)}{=} \frac{1}{3} \left(\partial_\rho T^\mu{}_{\sigma\nu} + \partial_\sigma T^\mu{}_{\nu\rho} + \partial_\nu T^\mu{}_{\rho\sigma} + \Gamma^\mu{}_{\tau\rho} T^\tau{}_{\sigma\nu} + \Gamma^\mu{}_{\tau\sigma} T^\tau{}_{\nu\rho} + \Gamma^\mu{}_{\tau\nu} T^\tau{}_{\rho\sigma} \right) \\ &\overset{(2.3),(2.4)}{=} \frac{1}{6} \left(\nabla_\nu T^\mu{}_{\rho\sigma} - \nabla_\nu T^\mu{}_{\sigma\rho} + \nabla_\rho T^\mu{}_{\sigma\nu} - \nabla_\rho T^\mu{}_{\nu\sigma} + \nabla_\sigma T^\mu{}_{\nu\rho} - \nabla_\sigma T^\mu{}_{\rho\nu} \right) + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{6}\left(T^{\mu}{}_{\tau\nu}T^{\tau}{}_{\rho\sigma}-T^{\mu}{}_{\tau\nu}T^{\tau}{}_{\sigma\rho}+T^{\mu}{}_{\tau\sigma}T^{\tau}{}_{\nu\rho}-T^{\mu}{}_{\tau\sigma}T^{\tau}{}_{\rho\nu}+T^{\mu}{}_{\tau\rho}T^{\tau}{}_{\sigma\nu}-T^{\mu}{}_{\tau\rho}T^{\tau}{}_{\nu\sigma}\right)\\
&=\nabla_{[\nu}T^{\mu}{}_{\rho\sigma]}+T^{\mu}{}_{\tau[\nu}T^{\tau}{}_{\rho\sigma]}\\
&\qquad\implies R^{\mu}{}_{[\nu\rho\sigma]}=\nabla_{[\nu}T^{\mu}{}_{\rho\sigma]}+T^{\mu}{}_{\tau[\nu}T^{\tau}{}_{\rho\sigma]}\ .
\end{aligned} \tag{2.38}
$$

2.5.2 Drugi Bianchijev identitet

Sada nas zanima sljedeća kombinacija kovarijantnih derivacija Riemannovog tenzora zakrivljenosti

$$
\begin{aligned}
\nabla_{[\alpha}R^{\mu}{}_{|\nu|\rho\sigma]}&=\frac{1}{3!}\left(\nabla_{\alpha}R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}-\nabla_{\alpha}R^{\mu}{}_{\nu\sigma\rho}+\nabla_{\rho}R^{\mu}{}_{\nu\sigma\alpha}-\nabla_{\rho}R^{\mu}{}_{\nu\alpha\sigma}+\nabla_{\sigma}R^{\mu}{}_{\nu\alpha\rho}-\nabla_{\sigma}R^{\mu}{}_{\nu\rho\alpha}\right)\\
&\overset{(2.16)}{=}\frac{1}{3}\left(\nabla_{\alpha}R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}+\nabla_{\rho}R^{\mu}{}_{\nu\sigma\alpha}+\nabla_{\sigma}R^{\mu}{}_{\nu\alpha\rho}\right)\\
&\overset{(2.3),(2.4)}{=}\frac{1}{3}\left(\partial_{\alpha}R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}+\Gamma^{\mu}{}_{\tau\alpha}R^{\tau}{}_{\nu\rho\sigma}-\Gamma^{\tau}{}_{\nu\alpha}R^{\mu}{}_{\tau\rho\sigma}+\partial_{\rho}R^{\mu}{}_{\nu\sigma\alpha}+\Gamma^{\mu}{}_{\tau\rho}R^{\tau}{}_{\nu\sigma\alpha}-\Gamma^{\tau}{}_{\nu\rho}R^{\mu}{}_{\tau\sigma\alpha}+\right.\\
&\quad\left.+\partial_{\sigma}R^{\mu}{}_{\nu\alpha\rho}+\Gamma^{\mu}{}_{\tau\sigma}R^{\tau}{}_{\nu\alpha\rho}-\Gamma^{\tau}{}_{\nu\sigma}R^{\mu}{}_{\tau\alpha\rho}\right)-\frac{1}{6}\left(R^{\mu}{}_{\nu\tau\alpha}T^{\tau}{}_{\rho\sigma}-R^{\mu}{}_{\nu\tau\alpha}T^{\tau}{}_{\sigma\rho}+\right.\\
&\quad\left.+R^{\mu}{}_{\nu\tau\rho}T^{\tau}{}_{\sigma\alpha}-R^{\mu}{}_{\nu\tau\rho}T^{\tau}{}_{\alpha\sigma}+R^{\mu}{}_{\nu\tau\sigma}T^{\tau}{}_{\alpha\rho}-R^{\mu}{}_{\nu\tau\sigma}T^{\tau}{}_{\rho\alpha}\right)=0-R^{\mu}{}_{\nu\tau[\alpha}T^{\tau}{}_{\rho\sigma]}\\
&\qquad\implies \nabla_{[\alpha}R^{\mu}{}_{|\nu|\rho\sigma]}=-R^{\mu}{}_{\nu\tau[\alpha}T^{\tau}{}_{\rho\sigma]}\ .
\end{aligned} \tag{2.39}
$$

Napomenimo da smo uveli notaciju u kojoj s vertikalnim linijama odvajamo indekse koji ne ulaze u (anti)simetrizaciju.

2.5.3 Specijalni slučajevi

Dva specijalna slučaja izvedenih Bianchijevih identiteta su važna za ovaj rad:

- $T^{\mu}{}_{\nu\rho}=0,\ Q_{\mu\nu\rho}=0 \implies R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}=\mathring{R}^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}$:
  - prvi Bianchijev identitet: $\mathring{R}^{\mu}{}_{[\nu\rho\sigma]}=0$
  - drugi Bianchijev identitet: $\mathring{\nabla}_{[\alpha}\mathring{R}^{\mu}{}_{|\nu|\rho\sigma]}=0$
- $R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}=0$:
  - prvi Bianchijev identitet: $\nabla_{[\nu}T^{\mu}{}_{\rho\sigma]}+T^{\mu}{}_{\tau[\nu}T^{\tau}{}_{\rho\sigma]}=0$
  - drugi Bianchijev identitet: trivijalno zadovoljen.

2.6 *Liejeva derivacija*

Još jedan bitan koncept iz DG će nam biti potreban kasnije kroz rad, a to je Liejeva derivacija. Liejeva derivacija nam daje informaciju kako se mijenja neki geometrijski objekt duž nekog vektorskog polja.

Kada je geometrijski objekt neki proizvoljan tenzor $T^{\alpha_1 \ldots \alpha_i}{}_{\beta_1 \ldots \beta_j}$ te kada promatramo njegovu promjenu duž nekog vektorskog polja X^μ, onda je Liejeva derivacija dana s [9]

$$\pounds_X T^{\alpha_1 \ldots \alpha_i}{}_{\beta_1 \ldots \beta_j} = X^\mu \partial_\mu T^{\alpha_1 \ldots \alpha_i}{}_{\beta_1 \ldots \beta_j} - \sum_{k=1}^{i} T^{\ldots \sigma \ldots}{}_{\beta_1 \ldots \beta_j} \partial_\sigma X^{\alpha_k} + \sum_{l=1}^{j} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_i}{}_{\ldots \tau \ldots} \partial_{\beta_l} X^\tau \ . \tag{2.40}$$

Dalje kroz rad će nam biti potrebna Liejeva derivacija metrike, tako da primjenjujemo (2.40) na $g_{\mu\nu}$

$$\pounds_X g_{\mu\nu} = X^\rho \partial_\rho g_{\mu\nu} + g_{\rho\nu} \partial_\mu X^\rho + g_{\mu\rho} \partial_\nu X^\rho \ ,$$

koristimo

$$g_{\rho\nu} \partial_\mu X^\rho = \partial_\mu X_\nu - X^\rho \partial_\mu g_{\nu\rho} \ ,$$
$$g_{\mu\rho} \partial_\nu X^\rho = \partial_\nu X_\mu - X^\rho \partial_\nu g_{\mu\rho}$$

te dobivamo uz korištenje (2.8)

$$\pounds_X g_{\mu\nu} = \partial_\mu X_\nu + \partial_\nu X_\mu - 2\mathring{\Gamma}^\alpha{}_{\nu\mu} X_\alpha \ .$$

Nadalje, imamo

$$2\mathring{\nabla}_{(\mu} X_{\nu)} = \mathring{\nabla}_\mu X_\nu + \mathring{\nabla}_\nu X_\mu \overset{(2.9)}{=} \partial_\mu X_\nu + \partial_\nu X_\mu - 2\mathring{\Gamma}^\alpha{}_{\nu\mu} X_\alpha \ .$$

Stoga, dobivamo da je Liejeva derivacija metrike jednaka

$$\pounds_X g_{\mu\nu} = 2\mathring{\nabla}_{(\mu} X_{\nu)} \ . \tag{2.41}$$

Također, bit će nam potrebna i Liejeva derivacija koeficijenata afine koneksije, koju preuzimamo iz [18]

$$\pounds_X \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} = X^{\sigma}\partial_{\sigma}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} - \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\rho}\partial_{\sigma}X^{\mu} + \Gamma^{\mu}{}_{\sigma\rho}\partial_{\nu}X^{\sigma} + \Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma}\partial_{\rho}X^{\sigma} + \partial_{\nu}\partial_{\rho}X^{\mu} \ ,$$

ovaj izraz je ekvivalentan s

$$\pounds_X \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} = \nabla_{\rho}\nabla_{\nu}X^{\mu} - X^{\sigma}R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} - \nabla_{\rho}\left(X^{\sigma}T^{\mu}{}_{\nu\sigma}\right) \ . \tag{2.42}$$

Kao i kod Bianchijevih identiteta možemo promatrati dva specijalna slučaja izraza (2.42):

- $T^{\mu}{}_{\nu\rho} = 0, \ Q_{\mu\nu\rho} = 0 \implies R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \mathring{R}^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}$:

$$\pounds_X \mathring{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu\rho} = \mathring{\nabla}_{\rho}\mathring{\nabla}_{\nu}X^{\mu} - X^{\sigma}\mathring{R}^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} \ , \tag{2.43}$$

- $R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = 0$:

$$\pounds_X \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} = \nabla_{\rho}\nabla_{\nu}X^{\mu} - \nabla_{\rho}\left(X^{\sigma}T^{\mu}{}_{\nu\sigma}\right) \ . \tag{2.44}$$

3 Opća teorija relativnosti

Nakon što smo u prethodnom poglavlju uveli sve relevantne tenzorske veličine i opisali njihova svojstva, sada možemo promatrati opću teoriju relativnosti (OTR) u kontekstu toga koja od tih veličina iščezava.

A. Einstein je početkom dvadesetog stoljeća formulirao klasičnu teoriju gravitacije kao OTR. On je u svojim radovima [19] pretpostavio iščezavanje tenzora torzije (2.4) i tenzora nemetričnosti (2.5). Stoga, prema klasifikaciji geometrija iz 2.3 OTR razvijamo u Riemannovoj geometriji. Dakle, imamo

$$T^{\mu}{}_{\nu\rho} = 0 \,, Q_{\mu\nu\rho} = 0 \implies R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \mathring{R}^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} \,.$$

Jedan od glavnih ciljeva ovog rada je upravo to da pokažemo da i drugačiji odabiri geometrija u odnosu na Riemannovu mogu dati jednaku dinamiku kao OTR.

Dakle, formalizam OTR bazira se na jedinstvenoj Levi-Civitinoj koneksiji, odnosno na Christoffelovim simbolima (2.8), a kako su oni u potpunosti određeni komponentama metrike, to znači da nam je metrika jedina dinamička varijabla u ovakvom opisu gravitacije. Stoga, cilj nam je doći do jednadžbi koje nam određuju sve komponente metrike, odnosno do Einsteinovih jednadžbi polja (EJP). Metrika je po svojoj definiciji simetrična, tako da u slučaju 4-dimenzionalnog prostorvremena, s kakvima se kroz ovaj rad bavimo, ona ima 10 nezavisnih komponenti.

Riemannov tenzor zakrivljenosti je također sada jedinstven, jer je u potpunosti dan jedinstvenim Christoffelovim simbolima

$$\mathring{R}^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_{\rho}\mathring{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma}\mathring{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu\rho} + \mathring{\Gamma}^{\mu}{}_{\tau\rho}\mathring{\Gamma}^{\tau}{}_{\nu\sigma} - \mathring{\Gamma}^{\mu}{}_{\tau\sigma}\mathring{\Gamma}^{\tau}{}_{\nu\rho} \,. \tag{3.1}$$

Iz tog razloga se u kontekstu OTR gravitacija interpretira kao zakrivljenje samog promatranog prostorvremena, odnosno glatke mnogostrukosti.

Bianchijevi identiteti za OTR dani su u 2.5.3, a sam Riemannov tenzor zakrivljenosti u OTR ima dodatne (anti)simetrije u odnosu na općenitu antisimetriju (2.16).

Sve navedene (anti)simetrije su [20]:

$$\mathring{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = -\mathring{R}_{\mu\nu\sigma\rho} \ , \tag{3.2}$$

$$\mathring{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = -\mathring{R}_{\nu\mu\rho\sigma} \ , \tag{3.3}$$

$$\mathring{R}_{\mu\nu\rho\sigma} = \mathring{R}_{\rho\sigma\mu\nu} \ . \tag{3.4}$$

Kao posljedicu prethodnih (anti)simetrija u OTR imamo i simetriju Riccijevog tenzora

$$\mathring{R}_{\mu\nu} = \mathring{R}_{\nu\mu} \ . \tag{3.5}$$

Napomenimo da autoparalelna jednadžba (2.24) u OTR slučaju postaje geodetska jednadžba

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \mathring{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = 0 \ . \tag{3.6}$$

Interpretacija jednadžbe (3.6) je ta da je akceleracija čestice na koju djeluje samo gravitacija, odnosno niti jedna druga sila, jednaka nuli. Drugim riječima, slobodne čestice se gibaju po geodezicima.

Također, izvest ćemo još nekoliko identiteta koji će nam biti korisni dalje kroz rad. Krenut ćemo od Christoffelovog simbola s kontrahiranim parom indeksa

$$\mathring{\Gamma}^\mu{}_{\mu\nu} \overset{(2.9)}{=} \mathring{\Gamma}^\mu{}_{\nu\mu} = \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\left(\partial_\mu g_{\lambda\nu} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}\right) \overset{(2.1)}{=} \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\partial_\nu g_{\mu\lambda} \ . \tag{3.7}$$

Dalje nas zanima kovarijantna derivacija nekog vektora u kojoj su indeksi pokontrahirani

$$\mathring{\nabla}_\mu X^\mu = \partial_\mu X^\mu + \mathring{\Gamma}^\mu{}_{\nu\mu}X^\nu \overset{(2.9),(3.7)}{=} \partial_\mu X^\mu + \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\left(\partial_\nu g_{\mu\lambda}\right)X^\nu \ .$$

S druge strane promatramo izraz

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}X^\mu\right) = \partial_\mu X^\mu + \frac{1}{\sqrt{-g}}X^\mu\partial_\mu\sqrt{-g} = \partial_\mu X^\mu + \frac{1}{2g}X^\mu\partial_\mu g \ ,$$

korištenjem (A.2) dobivamo

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}X^\mu\right) = \partial_\mu X^\mu + \frac{1}{2g}X^\mu g g^{\nu\lambda}\partial_\mu g_{\nu\lambda} = \partial_\mu X^\mu + \frac{1}{2}g^{\mu\lambda}\left(\partial_\nu g_{\mu\lambda}\right)X^\nu \ .$$

Dakle, zaključujemo

$$\mathring{\nabla}_\mu X^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} X^\mu \right) \ . \tag{3.8}$$

3.1 Einsteinove jednadžbe polja

Sada smo u prilici izvesti jednadžbe koje nam daju sve komponente metrike $g_{\mu\nu}$, odnosno Einsteinove jednadžbe polja. To ćemo učiniti na dva načina, prvo heuristički te ćemo pri tom izvodu pomoću tzv. Newtonovog limesa odrediti pripadnu konstantu proporcionalnosti, a zatim egzaktno postupkom ekstremizacije akcije [21]. Ovdje ćemo radi potpunosti i zbog Newtonovog limesa koristiti $c \neq 1$.

3.1.1 Heuristički izvod EJP

Ideja je pretvoriti Poissonovu jednadžbu za gravitacijski potencijal ϕ [22]

$$\vec{\nabla}^2 \phi = 4\pi G \rho \ , \tag{3.9}$$

u tenzorsku, koordinatno neovisnu jednadžbu, odnosno u jednadžbu koja uključuje i vremensku i prostorne koordinate. U (3.9) $\vec{\nabla}^2$ je laplasijan iz $\mathbb{R}^3$ vektorske analize, a ρ je masena gustoća, dok je G naravno Newtonova konstanta. Kako smo rekli da je A. Einstein odabrao Riemannovu geometriju pri formulaciji OTR, to nam nameće za pretpostavku da gravitaciju možemo opisati kao zakrivljenost samog prostorvremena, koja je uzrokovana raspodjelom mase u samom tom prostorvremenu. Stoga, polazimo od pretpostavke da je Riccijev tenzor $\mathring{R}^{\mu\nu}$ proporcionalan nekakvom tenzoru koji sadrži informacije o raspodjeli mase, taj tenzor zovemo tenzor energije i impulsa $\Theta^{\mu\nu}$ te je on simetričan

$$\Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu} \ . \tag{3.10}$$

Ova pretpostavka nije dobra iz sljedećeg razloga, naime u specijalnoj relativnosti (SR) znamo da je tenzor energije i impulsa sačuvana veličina koju dobijemo iz Noetherinog teorema promatrajući translacijsku simetriju. U tom sačuvanju su sadržani zakoni sačuvanja energije i impulsa, dakle vrijedi [23]

$$\partial_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0 \ . \tag{3.11}$$

Postupkom tzv. minimalne supstitucije ili kovarijantizacije [9] iz (3.11) dobivamo

$$\mathring{\nabla}_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0 \ . \tag{3.12}$$

Sada vidimo gdje je problem s prethodnom pretpostavkom, izraz (3.12) mora vrijediti uvijek, no općenito ne vrijedi $\mathring{\nabla}_\mu \mathring{R}^{\mu\nu} = 0$. Stoga uvodimo tzv. Einsteinov tenzor $\mathring{G}^{\mu\nu}$, koji je simetričan

$$\mathring{G}^{\mu\nu} = \mathring{G}^{\nu\mu} \tag{3.13}$$

i proporcionalan s $\Theta^{\mu\nu}$ te za kojeg uvijek vrijedi $\mathring{\nabla}_\mu \mathring{G}^{\mu\nu} = 0$.

Sada ćemo se uvjeriti da možemo izaziti $\mathring{G}^{\mu\nu}$ preko kombinacije Riccijevog tenzora i Riccijevog skalara, odnosno da i dalje možemo tvrditi da raspodjela mase uzrokuje zakrivljenost prostorvremena te da time možemo formulirati gravitaciju kao geometrijsku teoriju u formalizmu OTR.

Krećemo od drugog Bianchijevog identiteta u formalizmu OTR, odnosno od

$$\mathring{\nabla}_{[\alpha} \mathring{R}^{\mu}{}_{|\nu|\rho\sigma]} = \mathring{\nabla}_\alpha \mathring{R}^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} + \mathring{\nabla}_\rho \mathring{R}^{\mu}{}_{\nu\sigma\alpha} + \mathring{\nabla}_\sigma \mathring{R}^{\mu}{}_{\nu\alpha\rho} = 0 \ ,$$

ovaj izraz kontrahiramo s $g^{\nu\sigma}$ i δ^μ_ρ te koristimo iščezavanje tenzora nemetričnosti i komutiranje Kroneckerove delte δ^β_γ s $\mathring{\nabla}_\tau$. Time nakon kratkog računa dolazimo do

$$\mathring{\nabla}_\mu \left(\mathring{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathring{R} \right) = 0 \ . \tag{3.14}$$

Izraz (3.14) nam sugerira da uzmemo

$$\mathring{G}^{\mu\nu} = \mathring{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathring{R} \tag{3.15}$$

jer je onda automatski zadovoljeno i $\mathring{G}^{\mu\nu} = \mathring{G}^{\nu\mu}$ i $\mathring{\nabla}_\mu \mathring{G}^{\mu\nu}$=0. Dakle, izrazili smo Einsteinov tenzor preko Riccijevog tenzora i Riccijevog skalara. Sada imamo

$$\mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathring{R} = \kappa \Theta_{\mu\nu} \ , \tag{3.16}$$

gdje je κ konstanta proporcionalnosti koji ćemo odrediti pomoću tzv. Newtonovog limesa.

Newtonov limes:

1. Samo Θ_{00} ne iščezava i $\Theta_{00} = \rho c^2$, stoga $\begin{cases} \mathring{R}_{00} - \frac{1}{2} g_{00} \mathring{R} = \kappa \Theta_{00} = \kappa \rho c^2 \\ \mathring{R}_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} \mathring{R} = 0 \ , \ i, j = 1, 2, 3 \end{cases}$.

2. Čestice se gibaju nerelativističkim brzinama: $\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau}$, $i = 1, 2, 3$.

3. Metrika je stacionarna: $\partial_0 g_{\mu\nu} = 0$, $\partial_0 g^{\mu\nu} = 0$.

Krećemo od dodavanja malene perturbacije na metriku Minkowskog u Kartezijevim koordinatama $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \ , |h_{\mu\nu}| \ll 1 \ . \tag{3.17}$$

U svim računima u Newtonovom limesu zahtijevamo linearnost u $h_{\mu\nu}$ i pripadnim derivacijama od $h_{\mu\nu}$ te stoga sve nelinearne članove zanemarujemo.
Da bi (2.2) ostalo zadovoljeno za (3.17), mora vrijediti $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}$, u što se lako uvjeravamo

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} &= (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) (\eta^{\nu\rho} - h^{\nu\rho}) = \eta_{\mu\nu} \eta^{\nu\rho} - \eta_{\mu\nu} h^{\nu\rho} + h_{\mu\nu} \eta^{\nu\rho} - \underbrace{h_{\mu\nu} h^{\nu\rho}}_{\approx 0} \\ &\overset{(2.2)}{=} \delta^\rho_\mu - h_\mu{}^\rho + h_\mu{}^\rho = \delta^\rho_\mu \implies g_{\mu\nu} g^{\nu\rho} = \delta^\rho_\mu \ . \end{aligned}$$

Promatramo geodetsku jednadžbu (3.6) uz 2. pretpostavku

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \mathring{\Gamma}^\mu{}_{00} \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} = 0 \ ,$$

$\mathring{\Gamma}^\mu{}_{00}$ uz 3. pretpostavku i uz zahtjev linearnosti u $h_{\mu\nu}$ i pripadnim derivacijama od $h_{\mu\nu}$ postaje

$$\mathring{\Gamma}^\mu{}_{00} = -\frac{1}{2} \eta^{\mu\sigma} \partial_\sigma h_{00} \ .$$

Stoga, imamo

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\sigma} \left(\partial_\sigma h_{00}\right) \left(\frac{dx^0}{d\tau}\right)^2 \ ,$$

uz 3. pretpostavku iz ovoga dobivamo

$$\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} \equiv \ddot{x}^0 = 0 \implies \dot{x}^0 = \text{konst.} = c \ .$$

Za prostorne indekse dobivamo

$$\ddot{x}^i = \frac{c^2}{2}\partial^i h_{00} \ ,$$

ako uzmemo $h_{00} = -\frac{2\phi}{c^2}$, gdje je ϕ gravitacijski potencijal iz (3.9), onda prethodni izraz pomnožen s masom postaje upravo izraz za Newtonovu gravitacijsku silu napisan pomoću gradijenta gravitacijskog potencijala. Dakle, dobili smo $g_{00} = -1 - \frac{2\phi}{c^2}$. Stoga, (3.17) postaje

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}\left(-\left(1+\frac{2\phi}{c^2}\right), 1, 1, 1\right) \ . \tag{3.18}$$

Nadalje, zbog 1. pretpostavke (3.16) za prostorne indekse daje

$$\mathring{R}_{ij} = \frac{1}{2} g_{ij} \mathring{R} \ .$$

Sada računamo Riccijev skalar i primjenjujemo prethodni izraz

$$\mathring{R} = g^{00}\mathring{R}_{00} + g^{ij}\mathring{R}_{ij} = g^{00}\mathring{R}_{00} + \frac{1}{2}\underbrace{g^{ij}g_{ij}}_{=3}\mathring{R} = g^{00}\mathring{R}_{00} + \frac{3}{2}\mathring{R}$$

te dobivamo

$$\mathring{R} = -2g^{00}\mathring{R}_{00} \ . \tag{3.19}$$

Korištenjem (2.9), (2.15) i (2.27) za $\mathring{R}_{00}$ dobivamo

$$\mathring{R}_{00} = \partial_\mu \mathring{\Gamma}^\mu{}_{00} - \partial_0 \mathring{\Gamma}^\mu{}_{\mu 0} + \mathring{\Gamma}^\mu{}_{\mu\tau}\mathring{\Gamma}^\tau{}_{00} - \mathring{\Gamma}^\mu{}_{\tau 0}\mathring{\Gamma}^\tau{}_{\mu 0} \ ,$$

gdje drugi član propada zbog (3.7) i 3. pretpostavke. Članove s umnošcima Christoffelovih simbola također zanemarujemo jer su svi koji ne iščezavaju proporcionalni nekoj manjoj potenciji od c^{-2} zbog (3.18). Tako da nam ostaje

$$\mathring{R}_{00} = \partial_\mu \mathring{\Gamma}^\mu{}_{00} \ ,$$

zbog 3. pretpostavke $\partial_0 \mathring{\Gamma}^0{}_{00}$ propada i time dolazimo do

$$\mathring{R}_{00} = \partial_i \mathring{\Gamma}^i{}_{00} \ , i = 1, 2, 3 \ . \tag{3.20}$$

Dalje, korištenjem (2.8) i uz 3. pretpostavku imamo

$$\mathring{\Gamma}^{i}{}_{00} = \frac{1}{c^2} g^{ij} \partial_j \phi \ ,$$

kako je $g_{\mu\nu}$ dijagonalna i u prostornom dijelu sadrži samo diag$(1, 1, 1)$, odnosno $g_{ij} =$ diag$(1, 1, 1)$, tako je i $g^{ij} =$ diag$(1, 1, 1)$, odnosno možemo zamijeniti g^{ij} sa η^{ij}. Time dolazimo do

$$\mathring{\Gamma}^{i}{}_{00} = \frac{1}{c^2} \eta^{ij} \partial_j \phi = \frac{1}{c^2} \partial^i \phi \ . \tag{3.21}$$

Sada uz (3.21) za (3.20) dobivamo

$$\mathring{R}_{00} = \frac{1}{c^2} \underbrace{\partial_i \partial^i \phi}_{=\vec{\nabla}^2 \phi} \implies \mathring{R}_{00} = \frac{1}{c^2} \vec{\nabla}^2 \phi \ . \tag{3.22}$$

Dok izraz (3.19) za Riccijev skalar sada postaje

$$\mathring{R} = \frac{2}{c^2} \frac{1}{1 + \frac{2\phi}{c^2}} \vec{\nabla}^2 \phi \approx \underbrace{\frac{2}{c^2} \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right)}_{\approx \frac{2}{c^2}} \vec{\nabla}^2 \phi \approx \frac{2}{c^2} \vec{\nabla}^2 \phi \implies \mathring{R} = \frac{2}{c^2} \vec{\nabla}^2 \phi \ . \tag{3.23}$$

Sada korištenjem (3.22) i (3.23) te uz 1. pretpostavku imamo

$$\mathring{R}_{00} - \frac{1}{2} g_{00} \mathring{R} = \frac{1}{c^2} \vec{\nabla}^2 \phi + \underbrace{\frac{1}{c^2} \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)}_{\approx \frac{1}{c^2}} \vec{\nabla}^2 \phi \approx \frac{2}{c^2} \vec{\nabla}^2 \phi = \kappa \Theta_{00} = \kappa \rho c^2$$

$$\implies \vec{\nabla}^2 \phi = \frac{\kappa \rho c^4}{2} \ . \tag{3.24}$$

Usporedbom (3.24) s (3.9) zaključujemo

$$\kappa = \frac{8\pi G}{c^4} \ . \tag{3.25}$$

Time (3.16) postaje

$$\mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathring{R} = \frac{8\pi G}{c^4} \Theta_{\mu\nu} \ . \tag{3.26}$$

Izraz (3.26) su upravo Einsteinove jednadžbe polja.

Nadalje, zbog iščezavanja tenzora nemetričnosti u (3.26) možemo dodati član oblika $\Lambda g_{\mu\nu}$, čime je i dalje zadovoljeno (3.12); Λ je tzv. kozmološka konstanta. Tako da uz taj član EJP postaju

$$\mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathring{R} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \Theta_{\mu\nu} \ . \tag{3.27}$$

3.1.2 Egzaktni izvod EJP metodom ekstremizacije akcije

Metoda ekstremizacije akcije daje jednadžbe polja iz zahtjeva

$$\delta \mathcal{S} = 0 \ . \tag{3.28}$$

Ukupna akcija sastoji se od gravitacijskog dijela i dijela koji nosi informacije o materiji

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_G + \mathcal{S}_M \ . \tag{3.29}$$

U formalizmu OTR jedina dinamička varijabla je metrika $g_{\mu\nu}$, stoga se varijacija δ svodi na varijaciju po metrici δ_g.

U općoj teoriji relativnosti do Einsteinovih jednadžbi polja dolazimo iz tzv. Einstein-Hilbertove (EH) akcije

$$\mathcal{S}_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa} \left(\mathring{R} - 2\Lambda \right) + \mathcal{L}_M \right) \ , \tag{3.30}$$

gdje je $\mathcal{L}_M$ lagranžijan materije.

Sada moramo izračunati sve potrebne varijacije da bismo iz (3.30) došli do EJP. Varijacija korijena od negativne determinante metrike slijedi iz Jacobijevog identiteta (A.2)

$$\delta_g \sqrt{-g} = \frac{1}{2} \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta_g g_{\mu\nu} \ . \tag{3.31}$$

Sljedeće što nas zanima je varijacija inverza metrike

$$g_{\nu\alpha} g^{\alpha\mu} = \delta^\mu_\nu \overset{(2.1)}{\Longrightarrow} g^{\mu\alpha} \delta_g g_{\alpha\nu} + g_{\alpha\nu} \delta_g g^{\mu\alpha} = 0 \implies \underbrace{g_{\alpha\nu} g^{\nu\sigma}}_{\overset{(2.2)}{=} \delta^\sigma_\alpha} \delta_g g^{\mu\alpha} + g^{\mu\alpha} g^{\nu\sigma} \delta_g g_{\alpha\nu} = 0$$

$$\implies \delta_g g^{\mu\nu} = -g^{\mu\alpha} g^{\beta\nu} \delta_g g_{\alpha\beta} \ . \tag{3.32}$$

Nadalje, varijaciju Christoffelovog simbola dobivamo uz korištenje (2.8), (3.32) i (2.3)

$$\delta_g \mathring{\Gamma}^\mu{}_{\nu\rho} = \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} \left(\mathring{\nabla}_\nu \delta_g g_{\sigma\rho} + \mathring{\nabla}_\rho \delta_g g_{\nu\sigma} - \mathring{\nabla}_\sigma \delta_g g_{\nu\rho} \right) \ . \tag{3.33}$$

Ono što je bitno napomenuti je da iako $\mathring{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu\rho}$ nije tenzor, $\delta_g\mathring{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu\rho}$ jest.
Varijaciju Riemannovog tenzora zakrivljenosti dobivamo korištenjem (3.1), (3.33) i (2.3)

$$\delta_g \mathring{R}^{\mu}{}_{\alpha\nu\beta} = \mathring{\nabla}_\nu \delta_g \mathring{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\beta} - \mathring{\nabla}_\beta \delta_g \mathring{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\nu} \ . \tag{3.34}$$

Sada možemo odmah izračunati i varijaciju Riccijevog tenzora

$$\delta_g \mathring{R}_{\alpha\beta} = \delta_g \mathring{R}^{\mu}{}_{\alpha\mu\beta} = \mathring{\nabla}_\mu \delta_g \mathring{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\beta} - \mathring{\nabla}_\beta \delta_g \mathring{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\mu} \ . \tag{3.35}$$

Napokon možemo izračunati varijaciju Riccijevog skalara

$$\begin{aligned} \delta_g \mathring{R} &= \delta_g \left(g^{\alpha\beta} \mathring{R}_{\alpha\beta} \right) = \mathring{R}_{\alpha\beta} \delta_g g^{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta} \delta_g \mathring{R}_{\alpha\beta} \\ &\overset{(3.32),(3.35)}{=} \underbrace{-\mathring{R}_{\alpha\beta} g^{\alpha\mu} g^{\nu\beta}}_{=-\mathring{R}^{\mu\nu}} \delta_g g_{\mu\nu} + g^{\alpha\beta} \left(\mathring{\nabla}_\mu \delta_g \mathring{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\beta} - \mathring{\nabla}_\beta \delta_g \mathring{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\mu} \right) \ , \end{aligned}$$

u drugom članu možemo inverz metrike uvući u kovarijantne derivacije jer u OTR tenzor nemetričnosti iščezava. Time, uz nekoliko preimenovanja slijepih indeksa, dobivamo

$$\delta_g \mathring{R} = -\mathring{R}^{\mu\nu} \delta_g g_{\mu\nu} + \mathring{\nabla}_\mu \left(g^{\alpha\beta} \delta_g \mathring{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\beta} - g^{\alpha\mu} \delta_g \mathring{\Gamma}^{\beta}{}_{\alpha\beta} \right) \ . \tag{3.36}$$

U (3.36) primjećujemo da je član s kovarijantnom derivacijom upravo kovarijantna derivacija nekog vektora u kojoj su indeksi pokontrahirani. Stoga, možemo primijeniti (3.8) na taj član te dobivamo

$$\mathring{\nabla}_\mu \left(g^{\alpha\beta} \delta_g \mathring{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\beta} - g^{\alpha\mu} \delta_g \mathring{\Gamma}^{\beta}{}_{\alpha\beta} \right) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(\sqrt{-g} \left(g^{\alpha\beta} \delta_g \mathring{\Gamma}^{\mu}{}_{\alpha\beta} - g^{\alpha\mu} \delta_g \mathring{\Gamma}^{\beta}{}_{\alpha\beta} \right) \right) \ .$$

Ono što smo ovime je postigli je to da ovaj član propada pod integralom zbog Gaussovog teorema [24].

Uz definiranje tenzora energije i impulsa na način

$$\Theta^{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta_g \left(\sqrt{-g} \mathcal{L}_M \right)}{\delta_g g_{\mu\nu}} \ , \tag{3.37}$$

koji je očito simetričan

$$\Theta^{\mu\nu} = \Theta^{\nu\mu} \ ,$$

za varijaciju EH akcije dobivamo

$$
\begin{aligned}
\delta_g \mathcal{S}_{EH} &\overset{(3.37)}{=} \int d^4x \left(\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \delta_g \mathring{R} + \frac{\mathring{R}}{2\kappa} \delta_g \sqrt{-g} - \frac{\Lambda}{\kappa} \delta_g \sqrt{-g} + \frac{\sqrt{-g}}{2} \Theta^{\mu\nu} \delta_g g_{\mu\nu} \right) \\
&\overset{(3.31),(3.36)}{=} \int d^4x \left(-\frac{\sqrt{-g}}{2\kappa} \mathring{R}^{\mu\nu} + \frac{\mathring{R}}{2\kappa} \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu} - \frac{\Lambda}{\kappa} \frac{\sqrt{-g}}{2} g^{\mu\nu} + \frac{\sqrt{-g}}{2} \Theta^{\mu\nu} \right) \delta_g g_{\mu\nu} = 0 \\
&\implies \mathring{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \mathring{R} + \Lambda g^{\mu\nu} = \kappa \Theta^{\mu\nu} \\
&\overset{(3.25)}{\implies} \mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \mathring{R} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} \Theta_{\mu\nu} \, .
\end{aligned} \tag{3.38}
$$

Izraz (3.38) su upravo EJP (3.27) dobivene heurističkim izvodom.

3.2 *Interpretacija i eksperimentalne potvrde*

U prethodnom poglavlju smo izveli Einsteinove jednadžbe polja koje nam određuju sve komponente metrike. No preostaje nam argumentirati zašto smo kroz izvode, pogotovo onaj heuristički iz 3.1.1, pretpostavljali da je gravitaciju moguće formulirati kao geometrijsku teoriju. Razlog tome leži u tzv. principima ekvivalencije [14]:

- slabi princip ekvivalencije: Ovaj princip ekvivalencije nalaže da su gravitacijska i inercijska masa jednake, odnosno govori nam da na dovoljno malim skalama prostorvremena ne možemo vidjeti razliku između slobodnog pada u gravitacijskom polju i konstantnog ubrzanog gibanja.

- Einsteinov princip ekvivalencije: Prema ovom principu ekvivalencije na dovoljno malim prostorvremenskim skalama svi fizikalni zakoni osim gravitacijskih se svode na svoje verzije iz specijalne relativnosti. Drugim riječima, lokalnim eksperimentima je nemoguće detektirati gravitacijske efekte. Ovaj princip ekvivalencije je dakle primjenjiv na sve interakcije osim gravitacijskih.

- jaki princip ekvivalencije: U ovom principu ekvivalencije su sadržane iste tvrdnje kao u prethodnom, no on je za razliku od prethodnog primjenjiv i na gravitacijske efekte.

Pretpostavka da bi se gravitacija mogla formulirati kao geometrijska teorija slijedi upravo iz Einsteinovog principa ekvivalencije, jer njime postižemo to da je gravitacija uvijek prisutna te da je stoga usko vezana uz samu strukturu prostorvremena.

Opća teorija relativnosti je prošla brojne klasične, odnosno makroskopske, eksperimentalne potvrde. Tri najpoznatije, a koje je predložio sam A. Einstein, su:

- točan opis precesije Merkura,
- točan kut zakretanja svjetlosnih zraka pri prolasku pored Sunca,
- gravitacijski crveni pomak.

Dok su neke od modernijih eksperimentalnih potvrda:

- opservacije crnih rupa,
- detekcija gravitacijskih valova.

No iako je OTR za sada eksperimentalno najpotvrđenija teorija gravitacije, gravitacija je i dalje intenzivan predmet istraživanja. Razlozi su i teorijski i eksperimentalni. Za eksperimentalne razloge preporučuje se pogledati [25]. Glavni teorijski razlog zasigurno je nerenormalizabilnost gravitacije [26]. Također, još od prve polovice prošlog stoljeća gravitacija se pokušava postaviti u okvire baždarnih teorija, jer kao što znamo za sve ostale poznate interakcije to je moguće. Toga ćemo se dotaći kasnije kroz rad.

Zanimljiva konstrukcija koja sugerira da bi OTR uistinu mogla biti efektivna teorija neke dublje teorije može se pronaći u [27]. U tom radu autor iz zakona termodinamike uspijeva dobiti EJP (3.38) te zatim daje argumente zašto bi to moglo ukazivati da je OTR zapravo efektivna teorija.

Bilo kako bilo, ovim zaključujemo ovo poglavlje o općoj teoriji relativnosti. U njemu smo dali najvažnije rezultate i došli do EJP koje nam određuju sve komponente metrike. Dalje nastavljamo s ciljem razvijanja formalizma koji daje ekvivalentnu dinamiku kao OTR, no koji kao što ćemo vidjeti otvara mogućnosti za neke nove rezultate u odnosu na OTR.

4 Tetradni formalizam

Kao što smo rekli u Uvodu tetradni formalizam je uveo A. Einstein u svom neuspjelom pokušaju ujedinjenja klasičnog elektromagnetizma i gravitacije. U ovom poglavlju ćemo razviti cijeli tetradni formalizam i objasniti zašto je Einstein mislio da će ovim putem uspjeti ujediniti klasični elektromagnetizam i gravitaciju te zašto je bio u krivu. Ovaj formalizam ćemo koristiti kasnije kroz rad pri tretmanu tzv. metričke teleparalelne gravitacije. Također, pokazat ćemo neke važne primjere u kojima se očituje prednost korištenja tetradnog formalizma u odnosu na metrički.

4.1 Tetrada

Definicija 4.1 (Karta). *Karta na nekoj n-dimenzionalnoj mnogostrukosti $\mathcal{M}$ je uređen par (O, Φ), otvorenog podskupa $O \subseteq \mathcal{M}$ i homeomorfizma $\Phi : O \to U \subseteq \mathbb{R}^n$.* [9]

Komponente preslikavanja $\Phi : O \to U \subseteq \mathbb{R}^n$ se mogu konstruirati tako da bude zadovoljeno [9]

$$(O, \Phi) = \left(O, x^1, ...x^n\right) = (O, \{x^\mu\}) \ . \tag{4.1}$$

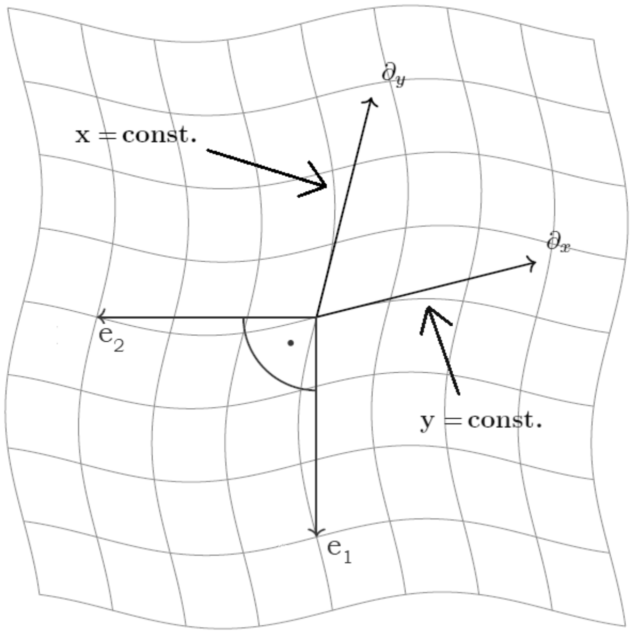
Iz DG nam je poznato da za neku točku p na glatkoj mnogostrukosti $\mathcal{M}$, koja pripada nekoj karti poput (4.1), možemo konstruirati tzv. koordinatnu ili prirodnu bazu pripadnog tangentnog prostora $T_p\mathcal{M}$. Vektori ove baze dani su s

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p \equiv \left.\partial_\mu\right|_p \ . \tag{4.2}$$

Vektorima baze (4.2) su pridruženi dualni vektori koji razapinju tzv. kotangentni prostor $T_p^*\mathcal{M}$. Dakle,

$$\left.dx^\mu\right|_p \tag{4.3}$$

razapinju $T_p^*\mathcal{M}$. Vektori dani s (4.2) općenito nisu ortonormirani (naravno u smislu signature metrike koju smo dali u Uvodu). Zato nam je cilj iskoristiti slobodu odabira baze tangentnog prostora te konstruirati pripadnu ortonormiranu bazu. Upravo to je srž tetradnog formalizma.



Slika 4.1: Dvodimenzionalni shematski prikaz baze $T_p\mathcal{M}$ dane s (4.2) i tetradne baze. Slika je preuzeta iz [13] te je modificirana.

Na Slici 4.1 je prikazan dvodimenzionalni shematski prikaz razlike navedenih dvaju baza. Dakle, uvodimo tetradno vektorsko polje

$$e_a = e_a{}^\mu \partial_\mu \tag{4.4}$$

i kotetradno vektorsko polje

$$e^a = e^a{}_\mu dx^\mu \tag{4.5}$$

Koeficijente $e^a{}_\mu$ iz (4.5) nazivamo tetradama (njem. *vierbein*), a koeficijente $e_a{}^\mu$ iz (4.4) nazivamo inverznim tetradama.
Tetrade i njihovi inverzi zadovoljavaju

$$\begin{aligned} e^a{}_\mu e_a{}^\nu &= \delta^\nu_\mu \ , \\ e^a{}_\mu e_b{}^\mu &= \delta^a_b \ . \end{aligned} \tag{4.6}$$

Rekli smo da zahtijevamo ortonormiranost tetrada, to znači da mora biti zadovoljena relacija

$$g_{\mu\nu} = e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab} \ , \tag{4.7}$$

gdje je $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Specifičnost tetrada je ta da im je jedan indeks (grčki) prostorvremenski, odnosno iz ranije uvedene karte $(O, \{x^\mu\})$, a drugi (latinski) im je iz tangentnog prostora. Nadalje, iz (4.7) i korištenjem Cauchy-Binetove formule za determinantu produkta dobivamo

$$\det g_{\mu\nu} = g = \det\left(e^a{}_\mu e^b{}_\nu \eta_{ab}\right) = \underbrace{\det\left(e^a{}_\mu\right)}_{\equiv e} \underbrace{\det\left(e^b{}_\nu\right)}_{\equiv e} \underbrace{\det(\eta_{ab})}_{=-1} = -e^2$$
$$\implies e = \sqrt{-g}\ . \tag{4.8}$$

Zbog (4.7) i (4.8) neki autori [28] tetrade nazivaju „korijenom" metrike.

Tetrade kojima s lijeve strane jednadžbe (4.7) stoji $\eta_{\mu\nu}$ nazivamo trivijalnim tetradama i označavamo ih s $h^a{}_\mu$. Dakle, za trivijalne tetrade vrijedi

$$\eta_{\mu\nu} = h^a{}_\mu h^b{}_\nu \eta_{ab}\ . \tag{4.9}$$

Očito je da je determinanta trivijalne tetrade jednaka jedan. Trivijalne tetrade koristimo kada želimo prijeći iz zapisa metrike Minkowskog u Kartezijevim koordinatama u zapis u npr. polarnim, Rindlerovim, itd. koordinatama.

Definicija 4.2 (Paralelizabilna mnogostrukost). *n-dimenzionalna mnogostrukost $\mathcal{M}$ je paralelizabilna ako je moguće konstruirati n-torku $(X_1, ..., X_n)$ nigdje iščezavajućih vektorskih polja, takvih da $(X_1(p), ..., X_n(p))$ tvore bazu od $T_p\mathcal{M}$ $\forall p \in \mathcal{M}$.* [29]

Općenito nije moguće definirati tetradu globalno za cijelu mnogostrukost $\mathcal{M}$, kada je to moguće, onda je prema Definiciji 4.2 $\mathcal{M}$ paralelizabilna. Dakle, općenito moramo definirati tetrade od karte do karte, koje su dane Definicijom 4.1. Sada ćemo se uvjeriti da je odabir tetrade ekvivalentan do na lokalnu Lorentzovu transformaciju, ta lokalnost dolazi upravo od toga da je tetrade najopćenitije moguće definirati samo lokalno na $\mathcal{M}$. Dakle, promatramo

$$e'_a{}^\mu = \Lambda_a{}^b(x) e_b{}^\mu \tag{4.10}$$

te se želimo uvjeriti da $\Lambda(x)$ zadovoljava definicijsku relaciju za matrice Lorentzovih transformacija. Dakle, imamo koristeći inverznu relaciju od (4.7)

$$\eta_{ad} = e'_a{}^\mu e'_d{}^\nu g_{\mu\nu} \overset{(4.10)}{=} \Lambda_a{}^b(x)\Lambda_d{}^c(x) \underbrace{e_b{}^\mu e_c{}^\nu g_{\mu\nu}}_{\overset{(4.7)}{=}\eta_{bc}} \implies \eta_{ad} = \Lambda_a{}^b(x)\Lambda_d{}^c(x)\eta_{bc}\ . \tag{4.11}$$

Iz (4.11) vidimo da $\Lambda(x)$ stvarno zadovoljava definicijsku relaciju za matrice Lorentzovih transformacija [30].

Nadalje, neki proizvoljan vektor X možemo raspisati i u koordinatnoj i u tetradnoj bazi te time dobivamo

$$X = X^\mu \partial_\mu = X^a e_a \overset{(4.4)}{=} X^a e_a{}^\mu \partial_\mu \implies X^\mu = e_a{}^\mu X^a \ . \tag{4.12}$$

Iz (4.12) zaključujemo da nam tetrade i inverzne tetrade mogu poslužiti za pretvaranje grčkih i latinskih indeksa jednih u druge. Naravno (4.12) poopćavamo na komponente proizvoljnog tenzora

$$T^{a_1 \dots a_i}{}_{b_1 \dots b_j} = e^{a_1}{}_{\mu_1} \dots e^{a_i}{}_{\mu_i} e_{b_1}{}^{\nu_1} \dots e_{b_j}{}^{\nu_j} T^{\mu_1 \dots \mu_i}{}_{\nu_1 \dots \nu_j} \ . \tag{4.13}$$

Nadalje, vidimo da se komponente proizvoljnog tenzora s miješanim indeksima mogu transformirati i na lokalne Lorentzove transformacije i na promjenu koordinata

$$T'^{a\mu \dots}{}_{b\nu \dots} = \Lambda^a{}_c(x) \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\rho} \Lambda_b{}^d(x) \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\nu} \dots T^{c\rho \dots}{}_{d\sigma \dots} \ . \tag{4.14}$$

Bitno svojstvo tetradnih vektorskih polja je vrijednosti njihovog komutatora

$$[e_a, e_b] = e_a e_b - e_b e_a \overset{(4.4)}{=} \left(e_a{}^\mu \partial_\mu\right) \left(e_b{}^\nu \partial_\nu\right) - \left(e_b{}^\nu \partial_\nu\right) \left(e_a{}^\mu \partial_\mu\right) \ ,$$

korištenjem

$$\partial_\mu \left(e^c{}_\nu e_b{}^\nu\right) \overset{(4.6)}{=} \partial_\mu \delta^c_b = 0 \implies e^c{}_\mu \partial_\nu e_a{}^\mu = -e_a{}^\mu \partial_\nu e^c{}_\mu \tag{4.15}$$

dobivamo

$$[e_a, e_b] = e_a{}^\mu e_b{}^\nu \left(\partial_\nu e^c{}_\mu - \partial_\mu e^c{}_\nu\right) e_c \equiv f^c{}_{ab} e_c \ . \tag{4.16}$$

Prema vrijednostima tzv. koeficijenata neholonomije $f^c{}_{ab}$ iz (4.16) tetradne baze možemo klasificirati na holonomne i neholonomne. Holonomne tetradne baze su one za koje vrijedi $f^c{}_{ab} = 0$, dok za neholonomne vrijedi $f^c{}_{ab} \neq 0$. Odmah primjećujemo da je koordinatna baza također holonomna jer prema Schwarzovom teoremu parcijalne derivacije komutiraju.

Također, zanima nas kako se koeficijenti neholonomije transformiraju pri lokalnim Lorentzovim transformacijama, za ovaj i kasnije račune nam je potreban identitet koji vrijedi i za globalne i za lokalne Lorentzove transformacije pa ćemo ga napisati bez eksplicitne ovisnosti o prostorvremenskim koordinatama

$$\Lambda^a{}_b \Lambda_a{}^c = \delta^c_b \implies \Lambda^a{}_b \Lambda_c{}^b = \delta^a_c \ . \tag{4.17}$$

Iz (4.17) također slijedi

$$\Lambda^a{}_b \partial_\mu \Lambda_a{}^c = -\Lambda_a{}^c \partial_\mu \Lambda^a{}_b \implies \Lambda^a{}_b \partial_\mu \Lambda_c{}^b = -\Lambda_c{}^b \partial_\mu \Lambda^a{}_b \ . \tag{4.18}$$

Stoga, za transformirane $f'^c{}_{ab}$

$$f'^c{}_{ab} = e'_a{}^\mu e'_b{}^\nu \left(\partial_\nu e'^c{}_\mu - \partial_\mu e'^c{}_\nu \right) \ ,$$

uz korištenje (4.10), (4.6), i (4.18), imamo

$$f'^c{}_{ab} = \Lambda_a{}^e(x) \Lambda_b{}^d(x) \Lambda^c{}_f(x) f^f{}_{ed} + \Lambda^c{}_d(x) \left(e'_a{}^\mu \partial_\mu \Lambda_b{}^d(x) - e'_b{}^\nu \partial_\nu \Lambda_a{}^d(x) \right) \ . \tag{4.19}$$

Iz (4.19) vidimo da se koeficijenti neholonomije pri lokalnim Lorentzovim transformacijama ne transformiraju kao tenzori u latinskim indeksima, no kada je Lorentzova transformacija globalna transformiraju se kao tenzori, odnosno za globalnu Lorentzovu transformaciju imamo

$$f'^c{}_{ab} = \Lambda_a{}^e \Lambda_b{}^d \Lambda^c{}_f f^f{}_{ed} \ . \tag{4.20}$$

Kroz rad će nam biti potrebna još neka svojstva tetrada i njihovih inverza. Jedno od njih je podizanje i spuštanje indeksa na tetradama i pripadnim inverzima, za grčke indekse to radimo s metrikom $g_{\mu\nu}$ koja stoji na lijevoj strani izraza (4.7), a za latinske s metrikom η_{ab} s desne strane istog izraza, odnosno imamo

$$e_{a\mu} = g_{\mu\nu} e_a{}^\nu \ , \tag{4.21}$$

$$e_{a\mu} = \eta_{ab} e^b{}_\mu \ . \tag{4.22}$$

Nadalje, bit će nam potrebne i Diracove gama matrice koje dolaze u brojnim reprezentacijama [30]. U tetradnom formalizmu uvodimo gama matrice koje ovise o položaju u prostorvremenu na način

$$\gamma^{\mu}(x) = e_a{}^{\mu}\gamma^a \implies \gamma^a = e^a{}_{\mu}\gamma^{\mu}(x) \ , \tag{4.23}$$

gdje su γ^a konstantne gama matrice iz specijalne relativnosti [30]. Matrice γ^a zadovoljavaju Cliffordovu algebru

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab}\mathbb{1}_{4\times 4} \ , \tag{4.24}$$

a matrice $\gamma^{\mu}(x)$

$$\{\gamma^{\mu}(x), \gamma^{\nu}(x)\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}_{4\times 4} \ . \tag{4.25}$$

Po uzoru na (4.21) i (4.22) uvodimo Diracove gama matrice sa spuštenim indeksima jer iz (4.23) vidimo da to spuštanje indeksa možemo u cijelosti obaviti na tetradi, odnosno na inverznoj tetradi. Stoga, imamo

$$\gamma_{\mu}(x) = e_{a\mu}\gamma^a \stackrel{(4.21)}{=} g_{\mu\nu}e_a{}^{\nu}\gamma^a \stackrel{(4.22)}{=} \eta_{ab}e^b{}_{\mu}\gamma^a \ , \tag{4.26}$$

$$\gamma_a = e_{a\mu}\gamma^{\mu}(x) \stackrel{(4.21)}{=} g_{\mu\nu}e_a{}^{\nu}\gamma^{\mu}(x) \stackrel{(4.22)}{=} \eta_{ab}e^b{}_{\mu}\gamma^{\mu}(x) \ . \tag{4.27}$$

Sada kada smo uveli tetrade, njihove inverze i sve pripadne relacije možemo zaključiti da u tetradnom formalizmu tetrade imaju ulogu koju metrika ima u metričkom formalizmu.

Također, sada nam postaje jasno zašto je Einsteinova ideja ujedinjenja klasičnog elektromagnetizma s gravitacijom bila osuđena na propast. Naime, primjećujemo da tetrada ima 16 nezavisnih komponenti (u 4 prostorvremenske dimenzije). To je Einsteina navelo na ideju da bi 10 od tih 16 komponenti određivalo komponente metrike, a ostalih 6 komponente klasičnog elektromagnetskog polja. No njemu nije bila poznata ranije spomenuta lokalna Lorentzova invarijantnost koja je upravo zaslužna za tih 6 komponenti jer znamo da su Lorentzove transformacije određene upravo sa 6 parametara.

4.2 *Spinska koneksija*

Dosad smo vidjeli da u tetradnom formalizmu tetrade imaju ulogu koju metrika ima u metričkom formalizmu. Sada nam je cilj konstruirati veličinu koja u tetradnom formalizmu ima ulogu koju u metričkom formalizmu ima afina koneksija. Tu veličinu nazivamo spinskom koneksijom, a notacija za nju je ω_μ, dok je notacija za koeficijente spinske koneksije $\omega^a{}_{b\mu}$.

Promatramo općenitu kovarijantnu derivaciju nekog vektora X u reprezentaciji samo pomoću koordinatne baze te u reprezentaciji pomoću koordinatne i tetradne baze [9, 28]

$$\begin{aligned}
\nabla X &= (\nabla_\mu X^\nu)\, dx^\mu \otimes \partial_\nu \overset{(2.3)}{=} \left(\partial_\mu X^\nu + \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} X^\lambda\right) dx^\mu \otimes \partial_\nu \\
&= (\nabla_\mu X^a)\, dx^\mu \otimes e_a = \left(\partial_\mu X^a + \omega^a{}_{b\mu} X^b\right) dx^\mu \otimes e_a \\
&\overset{(4.13)}{=} \left(\partial_\mu \left(e^a{}_\nu X^\nu\right) + \omega^a{}_{b\mu} e^b{}_\lambda X^\lambda\right) dx^\mu \otimes \left(e_a{}^\sigma \partial_\sigma\right) \\
&\overset{(4.6)}{=} \left(\partial_\mu X^\sigma + e_a{}^\sigma (\partial_\mu e^a{}_\nu) X^\nu + e_a{}^\sigma e^b{}_\lambda \omega^a{}_{b\mu} X^\lambda\right) dx^\mu \otimes \partial_\sigma \\
&\overset{\sigma\to\nu,\nu\to\lambda}{=} \left(\partial_\mu X^\nu + \left(e_a{}^\nu \partial_\mu e^a{}_\lambda + e_a{}^\nu e^b{}_\lambda \omega^a{}_{b\mu}\right) X^\lambda\right) dx^\mu \otimes \partial_\nu \;.
\end{aligned}$$

Usporedbom druge i zadnje jednakosti u prethodnom računu dobivamo

$$\Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} = e_a{}^\nu \partial_\mu e^a{}_\lambda + e_a{}^\nu e^b{}_\lambda \omega^a{}_{b\mu} \;. \tag{4.28}$$

Korištenjem (4.6) iz (4.28) dobivamo

$$\omega^a{}_{b\mu} = e^a{}_\nu e_b{}^\lambda \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} - e_b{}^\lambda \partial_\mu e^a{}_\lambda \;. \tag{4.29}$$

Također, korištenjem (4.6) izraze (4.28) i (4.29) možemo pretvoriti u

$$\partial_\mu e^a{}_\nu - e^a{}_\sigma \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} + \omega^a{}_{b\mu} e^b{}_\nu = \nabla_\mu e^a{}_\nu = 0 \;. \tag{4.30}$$

Izraz (4.30) se naziva tetradnim postulatom. On govori da je kovarijantna derivacija tetrade jednaka nuli. Ovdje treba biti oprezan s notacijom, kao što vidimo u izvodu (4.30) kovarijantna derivacija je djelovala i na grčki i na latinski indeks. Toga ćemo se držati na mjestima u radu na kojima to bude potrebno, drugim riječima kada kovarijantna derivacija ∇_μ djeluje na neki objekt s miješanim indeksima, podrazumijevat ćemo da djeluje na sve indekse, osim ako eksplicitno ne naglasimo da neke indekse izostavljamo. Nadalje, uskoro ćemo uvesti kovarijantnu derivaciju koja djeluje samo na latinske indekse.

Sada nas zanima kako se koeficijenti spinske koneksije transformiraju na lokalne Lorentzove transformacije. Da bismo to vidjeli zahtijevamo da se općenita kovarijantna derivacija nekog vektora X na lokalne Lorentzove transformacije transformira na jednak način kao i sam taj vektor (na sličan način smo uveli i samu kovarijantnu derivaciju jer nam obična parcijalna derivacija nije imala dobra transformacijska svojstva pri promjenama koordinata). Dakle, imamo

$$\nabla_\mu X'^a = \nabla_\mu \left(\Lambda^a{}_b(x) X^b\right) = \Lambda^a{}_b(x) \nabla_\mu X^b + X^b \underbrace{\nabla_\mu \Lambda^a{}_b(x)}_{\overset{!}{=}0} \ .$$

Vidimo da se taj zahtjev svodi na

$$\nabla_\mu \Lambda^a{}_b(x) = 0 \implies \partial_\mu \Lambda^a{}_b(x) + \omega^a{}_{c\mu} \Lambda^c{}_b(x) - \omega^c{}_{b\mu} \Lambda^a{}_c(x) = 0 \ . \tag{4.31}$$

Kontrakcijom izraza (4.31) s $\Lambda_d{}^b(x)$ te korištenjem (4.17), uz nekoliko preimenovanja indeksa dobivamo

$$\omega'^a{}_{b\mu} = \Lambda^a{}_c(x) \Lambda_b{}^d(x) \omega^c{}_{d\mu} - \Lambda_b{}^e(x) \partial_\mu \Lambda^a{}_e(x) \ . \tag{4.32}$$

Korištenjem (4.18) izraz (4.32) postaje

$$\omega'^a{}_{b\mu} = \Lambda^a{}_c(x) \Lambda_b{}^d(x) \omega^c{}_{d\mu} + \Lambda^a{}_e(x) \partial_\mu \Lambda_b{}^e(x) \ . \tag{4.33}$$

Kao i za koeficijente neholonomije vidimo da se koeficijenti spinske koneksije ne transformiraju kao tenzori u latinskim indeksima pri lokalnim Lorentzovim transformacija, dok se pri globalnim transformiraju kao tenzori, odnosno vrijedi

$$\omega'^a{}_{b\mu} = \Lambda^a{}_c \Lambda_b{}^d \omega^c{}_{d\mu} \ . \tag{4.34}$$

Napomenimo da smo do zasad dobivenih rezultata vezanih uz spinske koneksije došli korištenjem nekog proizvoljnog vektora, no naravno do istih rezultata bismo došli da smo koristili bilo koji drugi tenzor, samo bi računi bili duži.

Također, primijetimo da koeficijente spinske koneksije ${\omega^a}_{b\mu}$ možemo promatrati kao tenzore tipa $(0,1)$ u grčkom indeksu. Iz tog razloga je zbog (4.13) moguće napisati koeficijente spinske koneksije sa svim latinskim indeksima

$$
{\omega^a}_{bc} = {e_c}^\mu {\omega^a}_{b\mu} \,. \tag{4.35}
$$

Veličine (4.35) su u literaturi poznate kao Riccijevi koeficijenti rotacije [16].

Dekompoziciju koeficijenata općenite afine koneksije (2.10) prevodimo u tetradnom formalizmu u dekompoziciju koeficijenata općenite spinske koneksije. Na (2.10) djelujemo s ${e^a}_\alpha$ i ${e_b}^\mu$ te koristimo (4.28) i (4.13), time dolazimo do

$$
{e^a}_\alpha {e_b}^\mu \left({e_c}^\alpha \partial_\nu {e^c}_\mu + {e_c}^\alpha {e^d}_\mu {\omega^c}_{d\nu} \right) = {e^a}_\alpha {e_b}^\mu \left({e_c}^\alpha \partial_\nu {e^c}_\mu + {e_c}^\alpha {e^d}_\mu {\mathring{\omega}^c}_{d\nu} \right) + {K^a}_{b\nu} + {L^a}_{b\nu} \,,
$$

članovi s parcijalnim derivacijama se krate te korištenjem (4.6) dobivamo

$$
{\omega^a}_{b\mu} = {\mathring{\omega}^a}_{b\mu} + {K^a}_{b\mu} + {L^a}_{b\mu} \,. \tag{4.36}
$$

Korištenjem (4.35) dekompoziciju (4.36) možemo napisati preko svih latinskih indeksa

$$
{\omega^a}_{bc} = {\mathring{\omega}^a}_{bc} + {K^a}_{bc} + {L^a}_{bc} \,. \tag{4.37}
$$

4.3 *Relevantne tenzorske veličine u tetradnom formalizmu*

Ovdje ćemo izvesti razne forme s latinskim indeksima tenzora uvedenih u potpoglavlju 2.1 (tenzor torzije, tenzor nemetričnosti, Riemannov tenzor zakrivljenosti) jer će nam ti izrazi biti korisni dalje kroz rad.

4.3.1 Tenzor torzije

Za početak nas zanima sljedeći oblik tenzora torzije s jednim latinskim indeksom

$$
\begin{aligned}
{T^a}_{\nu\rho} = {e^a}_\mu {T^\mu}_{\nu\rho} &\overset{(2.4)}{=} {e^a}_\mu \left({\Gamma^\mu}_{\rho\nu} - {\Gamma^\mu}_{\nu\rho} \right) \\
\overset{(4.28),(4.6)}{\Longrightarrow} {T^a}_{\nu\rho} &= \partial_\nu {e^a}_\rho - \partial_\rho {e^a}_\nu + {\omega^a}_{c\nu} {e^c}_\rho - {\omega^a}_{c\rho} {e^c}_\nu \,.
\end{aligned} \tag{4.38}
$$

Iz (4.38) možemo doći do izraza za tenzor torzije sa svim latinskim indeksima

$$T^a{}_{bc} = e_b{}^\mu e_c{}^\nu T^a{}_{\mu\nu} \overset{(4.38),(4.6)}{=} \omega^a{}_{cb} - \omega^a{}_{bc} - \underbrace{e_b{}^\mu e_c{}^\nu \left(\partial_\nu e^a{}_\mu - \partial_\mu e^a{}_\nu\right)}_{\overset{(4.16)}{=} f^a{}_{bc}}$$

$$\Longrightarrow \; T^a{}_{bc} = \omega^a{}_{cb} - \omega^a{}_{bc} - f^a{}_{bc} \; . \tag{4.39}$$

Uočavamo da (4.39) za holonomnu tetradnu bazu poprima oblik

$$T^a{}_{bc} = \omega^a{}_{cb} - \omega^a{}_{bc} \; . \tag{4.40}$$

4.3.2 Tenzor nemetričnosti

Za početak promatramo tenzor nemetričnosti s drugim i trećim latinskim indeksom

$$Q_{\mu ab} = e_a{}^\nu e_b{}^\rho Q_{\mu\nu\rho} = e_a{}^\nu e_b{}^\rho \nabla_\mu g_{\nu\rho} \overset{(2.3)}{=} e_a{}^\nu e_b{}^\rho \left(\partial_\mu g_{\nu\rho} - \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} g_{\sigma\rho} - \Gamma^\sigma{}_{\rho\mu} g_{\nu\sigma}\right) \; ,$$

iz ovoga korištenjem (4.6), (4.7), (4.21), (4.22), (4.28) i uz činjenicu $\partial_\mu \eta_{ab} = 0$ (jer je η_{ab} po definiciji dan s diag$(-1, 1, 1, 1)$) dobivamo

$$Q_{\mu ab} = -\eta_{ac}\omega^c{}_{b\mu} - \eta_{bc}\omega^c{}_{a\mu} = -\omega_{ab\mu} - \omega_{ba\mu} \; \Longrightarrow \; Q_{\mu ab} = -\omega_{ab\mu} - \omega_{ba\mu} \; . \tag{4.41}$$

Iz (4.41) odmah slijedi izraz za tenzor nemetričnosti sa sva tri latinska indeksa

$$Q_{cab} \overset{(4.13)}{=} e_c{}^\mu Q_{\mu ab} \overset{(4.41)}{=} -\omega_{abc} - \omega_{bac} \; \Longrightarrow \; Q_{cab} = -\omega_{abc} - \omega_{bac} \; . \tag{4.42}$$

Iz (4.41) možemo iščitati jedno važno svojstvo, naime kada tenzor nemetričnosti iščezava, tada koeficijenti spinske koneksije posjeduju antisimetriju u prva dva indeksa i obratno, odnosno

$$Q_{\mu\nu\rho} = 0 \; \Longleftrightarrow \; \omega_{ab\mu} = -\omega_{ba\mu} \; . \tag{4.43}$$

4.3.3 Riemannov tenzor zakrivljenosti

Krećemo od Riemannovog tenzora zakrivljenosti s prva dva latinska indeksa

$$R^a{}_{b\rho\sigma} \overset{(4.13)}{=} e^a{}_\mu e_b{}^\nu R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} \; .$$

Korištenjem (2.15) i (4.6) dobivamo

$$R^a{}_{b\rho\sigma} = \partial_\rho \omega^a{}_{b\sigma} - \partial_\sigma \omega^a{}_{b\rho} + \omega^a{}_{c\rho}\omega^c{}_{b\sigma} - \omega^a{}_{c\sigma}\omega^c{}_{b\rho} \, . \tag{4.44}$$

Izraz (4.44) uz korištenje (4.16) možemo pretvoriti u formu sa sva četiri latinska indeksa

$$R^a{}_{bcd} \overset{(4.13)}{=} e_c{}^\rho e_d{}^\sigma R^a{}_{b\rho\sigma} = e_c{}^\rho \partial_\rho \omega^a{}_{bd} - e_d{}^\sigma \partial_\sigma \omega^a{}_{bc} + \omega^a{}_{ec}\omega^e{}_{bd} - \omega^a{}_{ed}\omega^e{}_{bc} - f^e{}_{cd}\omega^a{}_{be} \, . \tag{4.45}$$

Uočavamo da (4.45) za holonomnu tetradnu bazu poprima oblik

$$R^a{}_{bcd} = e_c{}^\rho \partial_\rho \omega^a{}_{bd} - e_d{}^\sigma \partial_\sigma \omega^a{}_{bc} + \omega^a{}_{ec}\omega^e{}_{bd} - \omega^a{}_{ed}\omega^e{}_{bc} \, . \tag{4.46}$$

4.4 Spinska kovarijantna derivacija

Sada ćemo konstruirati derivaciju koja će djelovati samo na latinske indekse. U literaturi je ona poznata kao spinska ili Fock-Ivanenkova kovarijantna derivacija [30]. Notacija za ovu kovarijantnu derivaciju je $\mathcal{D}_\mu$.

Do sada smo u svim konstrukcijama vezanim uz spinsku koneksiju bili u potpunosti općeniti, odnosno nismo nametali iščezavanje niti jednog od tri tenzora prema kojima klasificiramo geometriju s kojom radimo. No u 4.3.2 smo vidjeli da iščezavanje tenzora nemetričnosti implicira antisimetriju koeficijenata spinske koneksije u prva dva indeksa i obratno (4.43). To svojstvo ćemo iskoristiti, odnosno pri konstrukciji spinske kovarijantne derivacije se ograničavamo na geometrije s iščezavajućim tenzorom nemetričnosti.

Po uzoru na konstrukciju općenite kovarijantne derivacije (2.3) krećemo od

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \omega_\mu \, ,$$

gdje je ω_μ ranije uvedena spinska koneksija. Sada ćemo iskoristiti antisimetriju koeficijenata spinske koneksije u prva dva indeksa i činjenicu da je spinska koneksija tenzor $(0,1)$ tipa u grčkom indeksu te ćemo uzeti da koeficijenti spinske koneksije odgovaraju koeficijentima u razvoju spinske koneksije po generatorima Lorentzove algebre (čija reprezentacija ovisi o spinu polja koje razmatramo, odnosno na koje spinska kovarijantna derivacija djeluje) [31]. To možemo učiniti jer generatori Lorentzove algebre čine bazu vektorskog prostora. Imamo stoga

$$\omega_\mu = \frac{1}{2}\omega_{ab\mu}S^{ab} = \frac{1}{2}\omega^{ab}{}_{\mu}S_{ab} = \frac{1}{2}\omega^{a}{}_{b\mu}S_{a}{}^{b} = \frac{1}{2}\omega_{a}{}^{b}{}_{\mu}S^{a}{}_{b}\ . \tag{4.47}$$

Sada vidimo zašto nam je bitna antisimetrija koeficijenata spinske koneksije, kako znamo iz Dodatka C generatori Lorentzove algebre su antisimetrični, stoga pri razvoju (4.47) uz antisimetriju koeficijenata spinske koneksije nemamo „predefiniranost", odnosno potencijalni simetrični dio koeficijenata spinske koneksije ne bi ostao isključen u razvoju (4.47). Drugim riječima, antisimetrija koeficijenata spinske koneksije nam osigurava da će se svi koeficijenti spinske koneksije koje razmatramo pri rješavanju nekog problema pojaviti u razvoju (4.47).

Ovakvom konstrukcijom spinske kovarijantne derivacije smo postigli to da ona djeluje na isti način na polja ψ bilo kojeg spina, odnosno djeluje na način

$$\mathcal{D}_\mu\psi = \partial_\mu\psi + \frac{1}{2}\omega_{ab\mu}S^{ab}\psi\ . \tag{4.48}$$

Ovakvo univerzalno djelovanje ne bismo mogli postići u metričkom formalizmu [32]. Iz tog razloga se pri tretmanu fermionskih polja u općoj teoriji relativnosti koristi tetradni formalizam. Uskoro ćemo se na primjeru polja spina $\frac{1}{2}$ uvjeriti da se spinska kovarijantna derivacija nekog polja transformira na isti način kao i samo polje pri lokalnim Lorentzovim transformacijama.

Kroz rad će nam također biti potreban komutator spinskih kovarijantnih derivacija

$$\begin{aligned}
[\mathcal{D}_\mu,\mathcal{D}_\nu]\psi &= \mathcal{D}_\mu\mathcal{D}_\nu\psi - \mathcal{D}_\nu\mathcal{D}_\mu\psi \overset{(4.48)}{=} \mathcal{D}_\mu\left(\partial_\nu\psi + \frac{1}{2}\omega_{ab\nu}S^{ab}\psi\right) - \mathcal{D}_\nu\left(\partial_\mu\psi + \frac{1}{2}\omega_{cd\mu}S^{cd}\psi\right)\\
&\overset{(4.48)}{=} \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\omega_{ab\nu}\right)S^{ab}\psi - \frac{1}{2}\left(\partial_\nu\omega_{ab\mu}\right)S^{ab}\psi - \frac{1}{4}\omega_{ab\nu}\omega_{cd\mu}[S^{ab},S^{cd}]\psi\\
&\overset{(C.1)}{=} \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\omega_{ab\nu}\right)S^{ab}\psi - \frac{1}{2}\left(\partial_\nu\omega_{ab\mu}\right)S^{ab}\psi -\\
&\quad - \frac{1}{4}\omega_{ab\nu}\omega_{cd\mu}\left(\eta^{bc}S^{ad} - \eta^{ac}S^{bd} - \eta^{bd}S^{ac} + \eta^{ad}S^{bc}\right)\psi\\
&\overset{(C.3),(4.43)}{=} \frac{1}{2}\left(\partial_\mu\omega^{a}{}_{b\nu} - \partial_\nu\omega^{a}{}_{b\mu} + \omega^{a}{}_{c\mu}\omega^{c}{}_{b\nu} - \omega^{a}{}_{c\nu}\omega^{c}{}_{b\mu}\right)S_{a}{}^{b}\psi\\
&\overset{(4.44)}{=} \frac{1}{2}R^{a}{}_{b\mu\nu}S_{a}{}^{b}\psi
\end{aligned}$$

$$\implies [\mathcal{D}_\mu,\mathcal{D}_\nu]\psi = \frac{1}{2}R^{a}{}_{b\mu\nu}S_{a}{}^{b}\psi\ . \tag{4.49}$$

4.5 Neinercijalni efekti

Sada smo u prilici dati interpretaciju spinske koneksije. Ovdje ćemo to napraviti za slučaj geometrije Minkowskog, odnosno za slučaj gdje sva tri relevantna tenzora iščezavaju. Dakle, promatramo slučaj trivijalnih tetrada (4.9).

Iz (4.16) vidimo da iščezavanje koeficijenata neholonomije $f^a{}_{bc}$ možemo postići izborom tetrade na sljedeći način

$$h^a{}_\mu = \partial_\mu x^a \ , \tag{4.50}$$

gdje su x^a koordinate tangentnog prostora kojemu odgovara metrika η_{ab} iz (4.9). Specijalni slučaj izraza (4.50) je

$$h^a{}_\mu = \delta^a_\mu \ . \tag{4.51}$$

Sada nas zanima što se događa s (4.50) pri lokalnoj Lorentzovoj transformaciji, za to nam je potrebna i transformacija x^a iz (4.50)

$$x^a = \Lambda_b{}^a(x) x'^b \ . \tag{4.52}$$

Stoga, imamo

$$\begin{aligned}
h'^a{}_\mu &= \Lambda^a{}_b(x) h^a{}_\mu \overset{(4.50)}{=} \Lambda^a{}_b(x)\partial_\mu x^b \overset{(4.52)}{=} \Lambda^a{}_b(x)\partial_\mu \left(\Lambda_c{}^b(x) x'^c\right) \\
&= \underbrace{\Lambda^a{}_b(x)\Lambda_c{}^b(x)}_{\overset{(4.17)}{=}\delta^a_c} \partial_\mu x'^c + \Lambda^a{}_b(x) x'^c \partial_\mu \Lambda_c{}^b(x) \\
&= \partial_\mu x'^a + x'^b \underbrace{\Lambda^a{}_c(x)\partial_\mu \Lambda_b{}^c(x)}_{\equiv \overset{\bullet}{\omega}{}^a{}_{b\mu}} \\
&\implies h'^a{}_\mu = \partial_\mu x'^a + \overset{\bullet}{\omega}{}^a{}_{b\mu} x'^b \ ,
\end{aligned} \tag{4.53}$$

ovdje smo uveli notaciju

$$\overset{\bullet}{\omega}{}^a{}_{b\mu} = \Lambda^a{}_c(x)\partial_\mu \Lambda_b{}^c(x) \ , \tag{4.54}$$

koja označava tzv. koeficijente inercijalne spinske koneksije jer ako pogledamo izraz (4.33) vidimo da su $\overset{\bullet}{\omega}{}^a{}_{b\mu}$ dobiveni lokalnom Lorentzovom transformacijom nad koeficijentima iščezavajuće spinske koneksije. U literaturi se odabir sustava u kojemu spinska koneksija iščezava naziva Weitzenböckovim baždarenjem [13]. Naravno mogućnost dobivanja neiščezavajuće spinske koneksije transformacijom iščezavajuće nije začuđujuća jer kada npr. tretiramo metriku Minkowskog u metričkom formalizmu u npr. polarnim koordinatama, tada dobivamo neiščezavajuće Christoffelove simbole, iako za metriku Minkowskog u Kartezijevim koordinatama oni iščezavaju.

Nadalje, moramo se uvjeriti da su sva tri relevantna tenzora i dalje jednaka nuli za (4.53) i (4.54). Za iščezavanje tenzora nemetričnosti ćemo provjeriti posjeduje li (4.54) antisimetriju u prva dva indeksa

$$\begin{aligned}
\overset{\bullet}{\omega}{}^{a}{}_{b\mu} = \Lambda^{a}{}_{c}(x)\partial_{\mu}\Lambda_{b}{}^{c}(x) \implies \overset{\bullet}{\omega}_{ab\mu} = \Lambda_{ac}(x)\partial_{\mu}\Lambda_{b}{}^{c}(x) \\
\implies \overset{\bullet}{\omega}_{ba\mu} = \Lambda_{bc}(x)\partial_{\mu}\Lambda_{a}{}^{c}(x) = \eta_{bd}\Lambda^{d}{}_{c}(x)\partial_{\mu}\Lambda_{a}{}^{c}(x) \overset{(4.18)}{=} -\eta_{bd}\Lambda_{a}{}^{c}(x)\partial_{\mu}\Lambda^{d}{}_{c}(x) \\
= -\Lambda_{a}{}^{c}(x)\partial_{\mu}\Lambda_{bc}(x) = -\Lambda_{ac}(x)\partial_{\mu}\Lambda_{b}{}^{c}(x) = -\overset{\bullet}{\omega}_{ab\mu} \\
\implies \overset{\bullet}{\omega}_{ba\mu} = -\overset{\bullet}{\omega}_{ab\mu} \ ,
\end{aligned} \tag{4.55}$$

ovdje smo na više mjesta koristili činjenicu da je parcijalna derivacija metrike η_{ab} jednaka nuli zbog definicijske relacije (4.9). Zaključujemo da tenzor nemetričnosti očekivano iščezava.

Korištenjem (4.54) i (4.17) se lako uvjeravamo da Riemannov tenzor zakrivljenosti također iščezava, odnosno da vrijedi

$$\overset{\bullet}{R}{}^{a}{}_{b\nu\mu} = \partial_{\nu}\overset{\bullet}{\omega}{}^{a}{}_{b\mu} - \partial_{\mu}\overset{\bullet}{\omega}{}^{a}{}_{b\nu} + \overset{\bullet}{\omega}{}^{a}{}_{c\nu}\overset{\bullet}{\omega}{}^{c}{}_{b\mu} - \overset{\bullet}{\omega}{}^{a}{}_{c\mu}\overset{\bullet}{\omega}{}^{c}{}_{b\nu} = 0 \ . \tag{4.56}$$

Za tenzor torzije imamo

$$\begin{aligned}
\overset{\bullet}{T}{}^{a}{}_{\mu\nu} &= \partial_{\mu}h'^{a}{}_{\nu} - \partial_{\nu}h'^{a}{}_{\mu} + \overset{\bullet}{\omega}{}^{a}{}_{c\mu}h'^{c}{}_{\nu} - \overset{\bullet}{\omega}{}^{a}{}_{c\nu}h'^{c}{}_{\mu} \\
&\overset{(4.53)}{=} -\left(\partial_{\nu}\overset{\bullet}{\omega}{}^{a}{}_{b\mu} - \partial_{\mu}\overset{\bullet}{\omega}{}^{a}{}_{b\nu} + \overset{\bullet}{\omega}{}^{a}{}_{c\nu}\overset{\bullet}{\omega}{}^{c}{}_{b\mu} - \overset{\bullet}{\omega}{}^{a}{}_{c\mu}\overset{\bullet}{\omega}{}^{c}{}_{b\nu}\right) x'^{b} \\
&\overset{(4.44)}{=} -\overset{\bullet}{R}{}^{a}{}_{b\nu\mu}x'^{b} \overset{(4.56)}{=} 0 \implies \overset{\bullet}{T}{}^{a}{}_{\mu\nu} = 0 \ .
\end{aligned} \tag{4.57}$$

Iz (4.55), (4.56) i (4.57) vidimo da sva tri relevantna tenzora i dalje iščezavaju. Drugim riječima, krenuli smo od slučaja gdje oni, uz iščezavajuću spinsku koneksiju, iščezavaju te smo napravili lokalnu Lorentzovu transformaciju i dobili neiščezavajuću spinsku koneksiju, ali su i dalje sva tri relevantna tenzora jednaka nuli. Iz toga zaključujemo da nam u slučaju geometrije Minkowskog spinska koneksija služi za opis neinercijalnih efekata u sustavu, kao što npr. neiščezavanje Christoffelovih simbola pri opisu metrike Minkowskog u općenitim koordinatama daje informacije o neinercijalnim efektima u odnosu na opis metrike Minkowskog pomoću Kartezijevih koordinata u kojima svi Christoffelovi simboli iščezavaju.

Također, lako se uvjeravamo da izraz (4.53) možemo zapisati pomoću ranije uvedene spinske kovarijantne derivacije koja odgovara ovdje uvedenim koeficijentima inercijalne spinske koneksije $\overset{\bullet}{\omega}{}^a{}_{b\mu}$. Stoga, računamo sljedeću veličinu $\overset{\bullet}{\mathcal{D}}_\mu x'^a$, kako je x'^a vektor u latinskom indeksu, koristimo reprezentaciju Lorentzove algebre za vektorsko polje iz Dodatka C. Dakle, uz (4.48) dobivamo

$$\begin{aligned}\overset{\bullet}{\mathcal{D}}_\mu x'^c &= \partial_\mu x'^c + \frac{1}{2}\overset{\bullet}{\omega}_{ab\mu}\left(S^{ab}\right)^c{}_d\, x'^d = \partial_\mu x'^c + \frac{1}{2}\overset{\bullet}{\omega}_{ab\mu} x'^d \left(\eta^{ac}\delta^b_d - \eta^{bc}\delta^a_d\right) \\ &\overset{(4.55)}{=} \partial_\mu x'^c + \overset{\bullet}{\omega}{}^c{}_{b\mu} x'^b \\ &\implies \overset{\bullet}{\mathcal{D}}_\mu x'^a = \partial_\mu x'^a + \overset{\bullet}{\omega}{}^a{}_{b\mu} x'^b \ . \end{aligned} \tag{4.58}$$

Dakle, iz (4.53) i (4.58) vidimo da vrijedi

$$h'^a{}_\mu = \overset{\bullet}{\mathcal{D}}_\mu x'^a \ . \tag{4.59}$$

Primijetimo da Riccijeve koeficijente rotacije (4.35) zbog iščezavajuće torzije u ovom slučaju uz korištenje (4.39) možemo napisati kao

$$\overset{\bullet}{\omega}{}^a{}_{bc} = \frac{1}{2}\left(f_b{}^a{}_c + f_c{}^a{}_b - f^a{}_{bc}\right) \tag{4.60}$$

iz (4.60) vidimo da iščezavanje koeficijenata neholonomije povlači iščezavanje Riccijevih koeficijenata rotacije, odnosno posljedično koeficijenata spinske koneksije.

Također, primijetimo da se i u slučaju geometrije Minkowskog (specijalna relativnost) i u slučaju Riemannove geometrije (opća teorija relativnosti) dekompozicija koeficijenata spinske koneksije (4.36) svodi na

$$\omega^a{}_{b\mu} = \overset{\circ}{\omega}{}^a{}_{b\mu} \ ,$$

drugim riječima nije uvijek moguće razlučiti gravitacijske efekte od neinercijalnih u samoj spinskoj koneksiji. Taj problem ćemo riješiti kasnije kroz rad pri tretmanu metričke teleparalelne gravitacije u tetradnom formalizmu. Vidjet ćemo da će ondje prisutnost torzije omogućiti razdvajanje neinercijalnih efekata od gravitacijskih.

4.6 OTR u tetradnom formalizmu

Sada ćemo sličnim računom kao u [32] pokazati da možemo izvesti Einsteinove jednadžbe polja (3.38) u tetradnom formalizmu, odnosno da je tetradni formalizam stvarno ekvivalentan s metričkim.
Po uzoru na izvod EJP u metričkom formalizmu za varijaciju po tetradi dijela akcije koji odgovara materiji imamo

$$\delta_e S_M = \int d^4x e \Theta_a{}^\mu \delta_e e^a{}_\mu \ , \tag{4.61}$$

ovdje je $\Theta_a{}^\mu$ tetradna verzija tenzora energije i impulsa. Ranije smo za varijaciju po metrici dijela akcije koji odgovara materiji u 3.1.2 dobili

$$\delta_g S_M = \frac{1}{2} \int d^4x \underbrace{\sqrt{-g}}_{\stackrel{(4.8)}{=} e} \Theta^{\mu\nu} \delta_g g_{\mu\nu} \ ,$$

ovdje ćemo zamijeniti varijaciju po metrici s varijacijom po tetradi, to možemo napraviti jer je varijacija zapravo definirana kao derivacija po nekom parametru, time dobivamo

$$\delta_e S_M = \frac{1}{2} \int d^4x e \Theta^{\mu\nu} \delta_e g_{\mu\nu} \ .$$

Sada korištenjem (B.4) dobivamo

$$\begin{aligned} \delta_e S_M &= \frac{1}{2} \int d^4x e \Theta^{\mu\nu} \eta_{ab} \left(e^a{}_\mu \delta_e e^b{}_\nu + e^a{}_\nu \delta_e e^b{}_\mu \right) \\ &= \frac{1}{2} \int d^4x e \Theta^{\mu\nu} \left(e_{a\mu} \delta_e e^a{}_\nu + e_{a\nu} \delta_e e^a{}_\mu \right) \ . \end{aligned} \tag{4.62}$$

Usporedbom (4.61) i (4.62) dobivamo

$$\Theta_a{}^\mu \delta_e e^a{}_\mu = \frac{1}{2} \big(\underbrace{\Theta^{\nu\mu}}_{\stackrel{(3.10)}{=} \Theta^{\mu\nu}} e_{a\nu} \delta_e e^a{}_\mu + \Theta^{\mu\nu} e_{a\nu} \delta_e e^a{}_\mu \big) = \Theta^{\mu\nu} e_{a\nu} \delta_e e^a{}_\mu \ .$$

Iz ovoga uz korištenje (4.6) dobivamo

$$\Theta^{\nu\mu} = e_a{}^\nu \Theta^{a\mu} \ . \tag{4.63}$$

Relacija (4.63) je očekivan rezultat između tenzora energije i impulsa u metričkom i tetradnom formalizmu jer znamo da vrijedi (4.13).

Za varijaciju po metrici gravitacijskog dijela akcije u 3.1.2 dobili smo

$$\delta_g S_G = -\frac{c^4}{16\pi G}\int d^4x \underbrace{\sqrt{-g}}_{\overset{(4.8)}{=} e}\left(\mathring{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathring{R} + \Lambda g^{\mu\nu}\right)\delta_g g_{\mu\nu} \ .$$

Ovaj izraz uz zamjenu varijacije po metrici s varijacijom po tetradi te uz korištenje (B.4) postaje

$$\delta_e S_G = -\frac{c^4}{8\pi G}\int d^4x e\left(\mathring{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathring{R} + \Lambda g^{\mu\nu}\right)e_{a\nu}\delta_e e^a{}_\mu \ . \tag{4.64}$$

Sada ekstremizacijom ukupne akcije uz (4.61) i (4.64) dobivamo

$$\begin{aligned}
\delta_e S_G + \delta_e S_M = 0 \implies & \left(\mathring{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathring{R} + \Lambda g^{\mu\nu}\right)e_{a\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\Theta_a{}^\mu \\
\implies & \left(\mathring{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathring{R} + \Lambda g^{\mu\nu}\right)e^a{}_\nu = \frac{8\pi G}{c^4}\Theta^{a\mu} \Big/ e_a{}^\rho \\
\overset{(4.6),(4.63)}{\implies} & \mathring{R}^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\mathring{R} + \Lambda g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\Theta^{\mu\nu} \ .
\end{aligned} \tag{4.65}$$

Izraz (4.65) su upravo EJP (3.38).

4.7 *Diracovo polje u tetradnom formalizmu*

Ovdje ćemo na primjeru polja spina $\frac{1}{2}$ pokazati da se spinska kovarijantna derivacija transformira na isti način kao i samo polje na koje djeluje pri lokalnoj Lorentzovoj transformaciji. Također, doći ćemo do izraza za Diracov lagranžijan u tetradnom formalizmu, dalje kroz rad ćemo koristiti taj rezultat.

U (4.23) smo uveli prostorvremenski ovisne gama matrice, to ćemo ovdje iskoristiti i uzet ćemo da su polja ψ spina $\frac{1}{2}$ koordinatni skalari [33]

$$\psi(x) = \psi'(x') \ . \tag{4.66}$$

U (4.66) nam $'$ označava koordinatnu transformaciju, a nadalje će nam $'$ označavati lokalnu Lorentzovu transformaciju. Zbog (4.66) se kovarijantna derivacija (2.3) koja djeluje na polja $\psi(x)$ svodi na parcijalnu derivaciju, također ista stvar vrijedi i za $S(x)$, koji određuje način na koji se polje spina $\frac{1}{2}$ transformira pri lokalnoj Lorentzovoj transformaciji. Drugim riječima, vrijedi

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \psi(x) &= \partial_\mu \psi(x) \ , \\ \nabla_\mu S(x) &= \partial_\mu S(x) \ . \end{aligned} \tag{4.67}$$

Kako smo već rekli, odabir tetrade je ekvivalentan do na lokalnu Lorentzovu transformaciju (4.10), a svako polje, ovisno o svom spinu, se također transformira prilikom takve lokalne Lorentzove transformacije. U Dodatku C smo klasificirali generatore Lorentzove algebre prema spinu te smo rekli da se eksponenciranjem pripadnih generatora dobivaju elementi Lorentzove grupe. Time nam je određeno kako se transformiraju i sama polja. Transformaciju polja spina $\frac{1}{2}$ pri lokalnoj Lorentzovoj transformaciji smo rekli da ćemo nadalje označavati s

$$\psi'(x) = S(x)\psi(x) \ , \tag{4.68}$$

gdje je $S(x)$ dobiven eksponenciranjem generatora pripadne Lorentzove algebre. Također, sve ostale veličine transformirane lokalnom Lorentzovom transformacijom smo rekli da nadalje označavamo s $'$.

Uzimanjem kovarijantne derivacije (2.3) transformiranog polja spina $\frac{1}{2}$

$$\nabla_\mu \psi'(x) \overset{(4.67)}{=} \partial_\mu \psi'(x) \overset{(4.67),(4.68)}{=} S(x)\partial_\mu \psi(x) + (\partial_\mu S(x))\psi(x)$$

vidimo da se $\nabla_\mu \psi(x)$ ne transformira na isti načina kao $\psi(x)$. Taj ćemo problem sada riješiti ranije uvedenom spinskom kovarijantnom derivacijom. Pokazat ćemo pod kojim uvjetom se

$$\mathcal{D}_\mu \psi(x) = \partial_\mu \psi(x) + \omega_\mu \psi(x)$$

transformira kao i samo polje $\psi(x)$ pri lokalnim Lorentzovim transformacijama. Zbog toga računamo

$$\begin{aligned} & \mathcal{D}'_\mu \psi'(x) = S(x)\mathcal{D}_\mu \psi(x) \\ \overset{(4.68)}{\Longrightarrow} \ & S(x)\partial_\mu \psi(x) + (\partial_\mu S(x))\,\psi(x) + \omega'_\mu S(x)\psi(x) = S(x)\partial_\mu \psi(x) + S(x)\omega_\mu \psi(x) \\ \Longrightarrow \ & \omega'_\mu = S(x)\omega_\mu S^{-1}(x) - (\partial_\mu S(x))\,S^{-1}(x) \ . \end{aligned} \tag{4.69}$$

Iz (4.69) korištenjem

$$S(x)S^{-1}(x) = \mathbb{1}_{4\times4} \implies (\partial_\mu S(x))\, S^{-1}(x) = -S(x)\partial_\mu S^{-1}(x) \tag{4.70}$$

dobivamo

$$\omega'_\mu = S(x)\omega_\mu S^{-1}(x) + S(x)\partial_\mu S^{-1}(x) \; . \tag{4.71}$$

Izraz (4.71) nam očekivano govori da se spinska koneksija ω_μ mora transformirati kao i sva ostala poznata baždarna polja. U Dodatku D su dani detalji o baždarnim poljima.

Nadalje, iz (4.25) lako uočavamo da se $\gamma^\mu(x)$ transformira prema

$$\gamma'^\mu(x) = S(x)\gamma^\mu(x)S^{-1}(x) \; , \tag{4.72}$$

jer (4.72) očito zadovoljava (4.25).

Sada uvodimo tzv. adjungirani spinor

$$\bar{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0 \; , \tag{4.73}$$

gdje je $\psi^\dagger(x)$ hermitski konjugirani spinor $\psi(x)$, a γ^0 konstantna nulta gama matrica. Nadalje, iz zahtjeva da veličina $\bar{\psi}(x)\psi(x)$ bude skalar i u odnosu na koordinatne i u odnosu na lokalne Lorentzove transformacije, odnosno da vrijedi

$$\bar{\psi}'(x)\psi'(x) = \bar{\psi}(x)\psi(x) \; , \tag{4.74}$$

lako dolazimo do

$$\mathcal{D}_\mu\bar{\psi}(x) = \partial_\mu\bar{\psi}(x) - \bar{\psi}(x)\omega_\mu \; . \tag{4.75}$$

Zatim iz (4.75) dobivamo

$$\mathcal{D}'_\mu\bar{\psi}'(x) = \big(\mathcal{D}_\mu\bar{\psi}(x)\big)\, S^{-1}(x) \; . \tag{4.76}$$

Sada ćemo se uvjeriti da se

$$\mathcal{D}_\mu\left(e\gamma^\nu(x)\right) = \nabla_\mu\left(e\gamma^\nu(x)\right) + [\omega_\mu, e\gamma^\nu(x)] \; , \tag{4.77}$$

gdje je e determinanta tetrade, transformira na isti način kao $e\gamma^\mu(x)$, odnosno na način dan s (4.72) [33]. Pri izvodu jednadžbi gibanja, odnosno Diracovih jednadžbi iz Diracovog lagranžijana u tetradnom formalizmu do kojega ćemo uskoro doći će biti jasno zašto smo u (4.77) stavili determinantu tetrade. Još nam je potrebna činjenica da iz (A.5) uz (4.8) dolazimo do

$$\nabla_\mu e = \frac{1}{2} e Q_{\mu\nu}{}^{\nu} \ , \tag{4.78}$$

a kako smo rekli da se pri radu sa spinskim koneksijama ograničavamo na geometrije za koje je tenzor nemetričnosti jednak nuli, time dobivamo

$$\nabla_\mu e = 0 \ . \tag{4.79}$$

Sada možemo računati

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}'_\mu \left(e\gamma'^\nu(x)\right) &= \nabla_\mu \left(e\gamma'^\nu(x)\right) + [\omega'_\mu, e\gamma'^\nu(x)] \\
&\overset{(4.79)}{=} e\nabla_\mu \gamma'^\nu(x) + e\left(\omega'_\mu \gamma'^\nu(x) - \gamma'^\nu(x)\omega'_\mu\right) \\
&\overset{(4.71),(4.72)}{=} S(x)\left(e\nabla_\mu \gamma^\nu(x) + [\omega_\mu, e\gamma^\nu(x)]\right) S^{-1}(x) \\
&\overset{(4.79)}{=} S(x)\left(\nabla_\mu \left(e\gamma^\nu(x)\right) + [\omega_\mu, e\gamma^\nu(x)]\right) S^{-1}(x) \\
&\overset{(4.77)}{=} S(x)\left(\mathcal{D}_\mu \left(e\gamma^\nu(x)\right)\right) S^{-1}(x) \\
\implies \mathcal{D}'_\mu \left(e\gamma'^\nu(x)\right) &= S(x)\left(\mathcal{D}_\mu \left(e\gamma^\nu(x)\right)\right) S^{-1}(x) \ .
\end{aligned} \tag{4.80}$$

Iz (4.80), dakle zaključujemo da se $\mathcal{D}_\mu \left(e\gamma^\nu(x)\right)$ transformira na isti način kao $e\gamma^\mu(x)$, što naravno i želimo.

Nadalje, nametnut ćemo neku vrstu kompatibilnosti spinske kovarijantne derivacije s metrikom $g_{\mu\nu}$, to ćemo učiniti na sljedeći način

$$\mathcal{D}_\mu \left(e g^{\mu\nu} \mathbb{1}_{4\times 4}\right) = 0 \implies \mathcal{D}_\mu \left(2e g^{\mu\nu} \mathbb{1}_{4\times 4}\right) = 0 \overset{(4.25)}{\implies} \mathcal{D}_\mu \left(e\{\gamma^\mu(x), \gamma^\nu(x)\}\right) = 0 \ . \tag{4.81}$$

Iz (4.81) vidimo da je dovoljan uvjet da bi ta jednadžba bila ispunjena

$$\mathcal{D}_\mu \left(e\gamma^\nu(x)\right) = 0 \ . \tag{4.82}$$

Sada iz (4.77) i (4.82), uz (4.23) i (4.79) imamo

$$
\begin{aligned}
0 = &\underbrace{\partial_\mu \left(e_a{}^\nu \gamma^a\right)}_{=(\partial_\mu e_a{}^\nu)\gamma^a} + \Gamma^\nu{}_{\lambda\mu} e_a{}^\lambda \gamma^a + e_b{}^\nu [\omega_\mu, \gamma^b] \\
&\overset{(4.6)}{\Longrightarrow} \ [\omega_\mu, \gamma^a] = -e^{a\nu} (\nabla_\mu e_{b\nu}) \gamma^b \ ,
\end{aligned} \tag{4.83}
$$

ovdje je važno za napomenuti da u (4.83) kovarijantna derivacija djeluje samo na grčki indeks tetrade. Izraz (4.83) korištenjem (4.15) i (4.30) postaje

$$
[\omega_\mu, \gamma^a] = -\omega^a{}_{b\mu} \gamma^b \ . \tag{4.84}
$$

Sada ćemo se uvjeriti da spinska koneksija uvedena u (4.47) očekivano zadovoljava (4.84). Za početak ćemo korištenjem generatora Lorentzove algebre za polja spina $\frac{1}{2}$ ω_μ zapisati na način

$$
\begin{aligned}
\omega_\mu = \frac{1}{2} \omega_{ab\mu} S^{ab} = \frac{1}{8} \omega_{ab\mu} [\gamma^a, \gamma^b] = \frac{1}{8} \left(\omega_{ab\mu} \gamma^a \gamma^b - \underbrace{\omega_{ab\mu}}_{\overset{(4.43)}{=} -\omega_{ba\mu}} \gamma^b \gamma^a \right) \\
\Longrightarrow \ \omega_\mu = \frac{1}{4} \omega_{ab\mu} \gamma^a \gamma^b \ .
\end{aligned} \tag{4.85}
$$

Stoga, imamo

$$
\begin{aligned}
[\omega_\mu, \gamma^a] &\overset{(4.85)}{=} \frac{1}{4} \left(\omega_{cb\mu} \gamma^c \gamma^b \gamma^a - \gamma^a \omega_{cb\mu} \gamma^c \gamma^b \right) \overset{(4.43)}{=} -\frac{1}{4} \omega_{cb\mu} \left(\gamma^b \gamma^c \gamma^a + \gamma^a \gamma^c \gamma^b \right) \\
&\overset{(4.24)}{=} -\omega^a{}_{b\mu} \gamma^b + \frac{1}{4} \left(\underbrace{\omega_{cb\mu} \gamma^b \gamma^a \gamma^c + \omega_{bc\mu} \gamma^b \gamma^a \gamma^c}_{\overset{(4.43)}{=} 0} \right) = -\omega^a{}_{b\mu} \gamma^b \ .
\end{aligned}
$$

Dakle, zaključujemo da (4.47) zadovoljava (4.84).

Sada imamo sve potrebne rezultate za napisati Diracov lagranžijan u tetradnom formalizmu. Za početak Diracova akcija u tetradnom formalizmu glasi [30]

$$
\mathcal{S}_D = \int d^4 x e \left(\frac{i}{2} \left(\bar{\psi}(x) \gamma^a e_a{}^\mu \mathcal{D}_\mu \psi(x) - (\mathcal{D}_\mu \bar{\psi}(x)) \gamma^a e_a{}^\mu \psi(x) \right) - m \bar{\psi}(x) \psi(x) \right) \ . \tag{4.86}
$$

Iz (4.86) vidimo da je Diracova gustoća lagranžijana dana s

$$
\mathcal{L}_D = \frac{i}{2} \left(\bar{\psi}(x) \gamma^a e_a{}^\mu \mathcal{D}_\mu \psi(x) - (\mathcal{D}_\mu \bar{\psi}(x)) e_a{}^\mu \psi(x) \right) - m \bar{\psi}(x) \psi(x) \ , \tag{4.87}
$$

odnosno Diracov lagranžijan glasi

$$L_D = e\mathcal{L}_D \ . \tag{4.88}$$

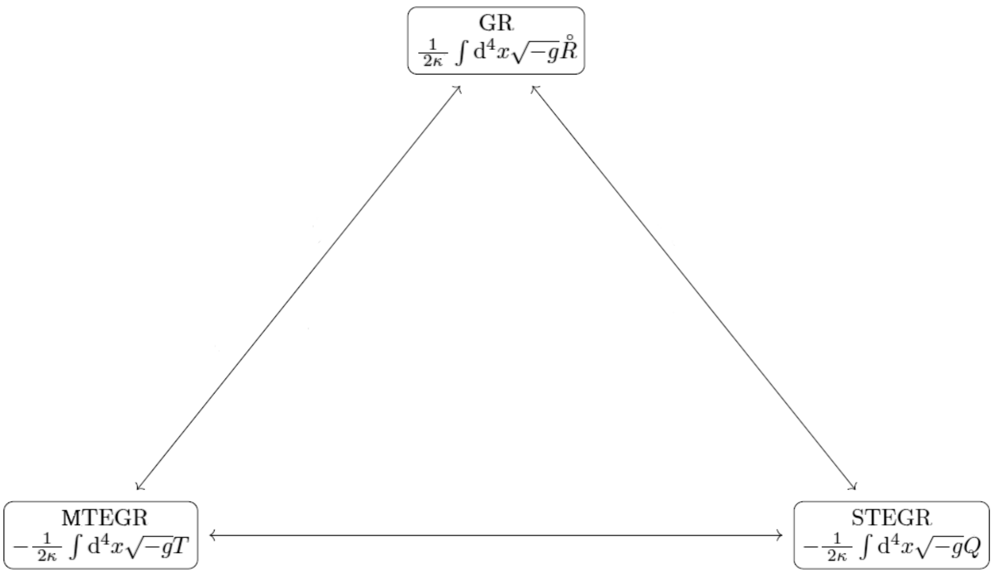
Sada možemo izvesti pripadne jednadžbe gibanja, odnosno Diracove jednadžbe za $\psi(x)$ i $\bar{\psi}(x)$. Koristimo činjenicu da u Euler-Lagrangeovim jednadžbama možemo koristiti spinsku kovarijantnu derivaciju umjesto parcijalne derivacije [34,35]. Dakle, Diracova jednadžba za $\psi(x)$ glasi

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L_D}{\partial\bar{\psi}(x)} - \mathcal{D}_\rho\left(\frac{\partial L_D}{\partial(\mathcal{D}_\rho\bar{\psi}(x))}\right) = 0 \\ \Longrightarrow\ &\frac{i}{2}e_a{}^\mu\gamma^a\mathcal{D}_\mu\psi(x) - m\psi(x) + \frac{i}{2}\frac{1}{e}\Big(\underbrace{\mathcal{D}_\mu(e\gamma^\mu)}_{\overset{(4.82)}{=}0}\psi(x) + ee_a{}^\mu\gamma^a\mathcal{D}_\mu\psi(x)\Big) = 0 \\ \Longrightarrow\ &ie_a{}^\mu\gamma^a\mathcal{D}_\mu\psi(x) - m\psi(x) = 0 \ . \end{aligned} \tag{4.89}$$

Izraz (4.89) je Diracova jednadžba za $\psi(x)$ u tetradnom formalizmu, analognim postupkom se dolazi i do Diracove jednadžbe za $\bar{\psi}(x)$. Bitno je naglasiti da je (4.89) kovarijantna, odnosno koordinatno neovisna jednadžba.

5 Teleparalelna gravitacija

U prethodnim smo poglavljima došli do većine potrebnih rezultata za razvoj formalizma teleparalelne gravitacije. Kroz ovo poglavlje ćemo doći do jednadžbi za opću, simetričnu i metričku teleparalelnu gravitaciju koje svaka počivaju na svojoj geometriji prema klasifikaciji iz 2.3. Također, uvjerit ćemo se da svaka od tih gravitacija posjeduje svoj specijalni slučaj koji daje dinamiku ekvivalentnu dinamici OTR. Ta tri specijalna slučaja su redom: opći teleparalelni ekvivalent opće teorije relativnosti - GTEGR (od engl. *general teleparallel equivalent of general relativity*), simetrični teleparalelni ekvivalent opće teorije relativnosti - STEGR (od engl. *symmetric teleparallel equivalent of general relativity*) i metrički teleparalelni ekvivalent opće teorije relativnosti - MTEGR (od engl. *metric teleparallel equivalent of general relativity*). Zbog postojanja ovih specijalnih slučajeva u literaturi se taj skup ekvivalentnih opisa gravitacije naziva tzv. geometrijskim trojstvom gravitacije. Na Slici 5.1 dan je shematski



Slika 5.1: Shematski prikaz tzv. geometrijskog trojstva gravitacije. Slika je preuzeta iz [13] te je modificirana.

prikaz tzv. geometrijskog trojstva gravitacije, primijetimo da GTEGR služi kao poveznica MTEGR i STEGR.

Kako smo već rekli, sve teleparalelne geometrije imaju zajedničko svojstvo da je $R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = 0$. Također, opću i simetričnu teleparalelnu gravitaciju ćemo tretirati u metričkom, a metričku, kako smo i najavili u tetradnom formalizmu te ćemo se njoj najviše posvetiti. Pripadne jednadžbe polja se u literaturi mogu naći u brojnim oblicima, no mi ćemo ih ovdje izvoditi u oblicima danima u [13, 36, 37]. Također, prikazat ćemo nekoliko ekvivalentnih metoda za izvod jednadžbi polja. Prije nego počnemo izvoditi sve pripadne jednadžbe polja, što nam je jedan od glavnih ciljeva ovog poglavlja, moramo dati još nekoliko važnih rezultata.

5.1 Invarijantnost na difeomorfizme

Gravitacijski dio akcije te dio akcije koji dolazi od polja materije moraju biti invarijantni na difeomorfizme. Ovdje ćemo to nametnuti na oba dijela akcije prvo koristeći metrički formalizam, a potom tetradni te ćemo vidjeti koje su posljedice toga.

Za početak, najopćenitiji oblik akcije u metričkom formalizmu glasi

$$\mathcal{S}[g,\Gamma,\psi] = \mathcal{S}_G[g,\Gamma] + \mathcal{S}_M[g,\Gamma,\psi] \ . \tag{5.1}$$

Dakle, u najopćenitijem slučaju je afina koneksija također dinamička varijabla poput metrike te i po njoj vršimo varijacije. U $\mathcal{S}_M$ ψ su polja materije te smo također za sada dopustili da i taj dio akcije ovisi o afinoj koneksiji, odnosno da se materija može vezati na afinu koneksiju.

Iz (5.1) slijede izrazi za varijacije $\mathcal{S}_M$ i $\mathcal{S}_G$

$$\delta\mathcal{S}_M = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\Theta^{\mu\nu}\delta_g g_{\mu\nu} + H_\lambda{}^{\mu\nu}\delta_\Gamma\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} + \Psi_i\delta_\psi\psi^i\right) \ , \tag{5.2}$$

ovdje je $\Theta^{\mu\nu}$ tenzor energije i impulsa, $H_\lambda{}^{\mu\nu}$ je tzv. tenzor hiperimpulsa (engl. *hypermomentum tensor*) dan s

$$H_\lambda{}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\delta_\Gamma\mathcal{S}_M}{\delta_\Gamma\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu}} \ , \tag{5.3}$$

u Ψ_i i je indeks kojim označavamo tip polja materije te pomoću

$$\Psi_i = 0 \tag{5.4}$$

namećemo jednadžbe gibanja za polja materije ψ^i. Dalje imamo

$$\delta\mathcal{S}_G = -\int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}W^{\mu\nu}\delta_g g_{\mu\nu} + Y_\mu{}^{\nu\rho}\delta_\Gamma\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}\right) \ , \tag{5.5}$$

za $W^{\mu\nu}$ očito uzimamo da je simetričan jer stoji uz $\delta_g g_{\mu\nu}$, odnosno u metričkom formalizmu vrijedi

$$W^{\mu\nu} = W^{\nu\mu} \ . \tag{5.6}$$

Za početak ćemo promotriti invarijantnost na difeomorfizme gravitacijskog dijela akcije

$$\begin{aligned}
\delta_X \mathcal{S}_G = \pounds_X \mathcal{S}_G &= -\int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}W^{\mu\nu}\delta_X g_{\mu\nu} + Y_\mu{}^{\nu\rho}\delta_X \Gamma^\mu{}_{\nu\rho}\right)\\
&\overset{(2.41),(2.44)}{=} -\int d^4x\sqrt{-g}\Big(\underbrace{W^{\mu\nu}\mathring{\nabla}_\mu X_\nu}_{W^{\mu\nu}\mathring{\nabla}_\mu X_\nu \overset{(5.6)}{=} W_\mu{}^\nu \mathring{\nabla}_\nu X^\mu} + Y_\mu{}^{\nu\rho}\left(\nabla_\rho\nabla_\nu X^\mu - \nabla_\rho(X^\sigma T^\mu{}_{\nu\sigma})\right)\Big)\\
&\overset{(3.8)}{=} \int d^4x\sqrt{-g}\left(X^\mu\mathring{\nabla}_\nu W_\mu{}^\nu - Y_\mu{}^{\nu\rho}(\nabla_\rho\nabla_\nu X^\mu - (\nabla_\rho X^\sigma)T^\mu{}_{\nu\sigma} - X^\sigma\nabla_\rho T^\mu{}_{\nu\sigma})\right)\\
&\overset{(2.21)}{=} \int d^4x\sqrt{-g}\Big(\mathring{\nabla}_\nu W_\mu{}^\nu X^\mu + (\nabla_\nu X^\mu)(\mathring{\nabla}_\rho Y_\mu{}^{\nu\rho}) + Y_\mu{}^{\nu\rho}D^\alpha{}_{\nu\rho}\nabla_\alpha X^\mu -\\
&\quad - Y_\alpha{}^{\nu\rho}D^\alpha{}_{\mu\rho}\nabla_\nu X^\mu - (\mathring{\nabla}_\rho T^\sigma{}_{\nu\mu}Y_\sigma{}^{\nu\rho})X^\mu + D^\sigma{}_{\mu\rho}Y_\alpha{}^{\nu\rho}T^\alpha{}_{\nu\sigma}X^\mu + Y_\sigma{}^{\nu\rho}(\nabla_\rho T^\sigma{}_{\nu\mu})X^\mu\Big)\\
&\overset{(3.8),(2.21)}{=} \int d^4x\sqrt{-g}\Big(\mathring{\nabla}_\nu W_\mu{}^\nu + T^\sigma{}_{\mu\nu}(\nabla_\rho Y_\sigma{}^{\nu\rho} - D^\tau{}_{\rho\tau}Y_\sigma{}^{\nu\rho}) -\\
&\quad - \nabla_\nu(\nabla_\rho Y_\mu{}^{\nu\rho} - D^\tau{}_{\rho\tau}Y_\mu{}^{\nu\rho}) + D^\sigma{}_{\nu\sigma}(\nabla_\rho Y_\mu{}^{\nu\rho} - D^\tau{}_{\rho\tau}Y_\mu{}^{\nu\rho})\Big)X^\mu = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\implies \mathring{\nabla}_\nu W_\mu{}^\nu + T^\sigma{}_{\mu\nu}(\nabla_\rho Y_\sigma{}^{\nu\rho} - D^\tau{}_{\rho\tau}Y_\sigma{}^{\nu\rho}) - \nabla_\nu(\nabla_\rho Y_\mu{}^{\nu\rho} - D^\tau{}_{\rho\tau}Y_\mu{}^{\nu\rho}) +\\
+ D^\sigma{}_{\nu\sigma}(\nabla_\rho Y_\mu{}^{\nu\rho} - D^\tau{}_{\rho\tau}Y_\mu{}^{\nu\rho}) = 0 \ .
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Primijetimo da (5.7) vrijedi uvijek, neovisno jesmo li nametnuli jednadžbe gibanja $\Psi_i = 0$ ili ne.

Dalje promatramo invarijantnost na difeomorfizme dijela akcije koji sadrži polja materije

$$\delta_X S_M = \pounds_X S_M = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\Theta^{\mu\nu}\delta_X g_{\mu\nu} + H_\mu{}^{\nu\rho}\delta_X\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} + \Psi_i\delta_X\psi^i\right) = 0 \ ,$$

ovdje ćemo nametnuti jednadžbe gibanja $\Psi_i = 0$ i time dolazimo do

$$\delta_X S_M = \pounds_X S_M = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2}\Theta^{\mu\nu}\delta_X g_{\mu\nu} + H_\mu{}^{\nu\rho}\delta_X\Gamma^\mu{}_{\nu\rho}\right) = 0,$$

primjećujemo da je račun sada u potpunosti analogan s računom za dobivanje (5.7).

Stoga, dobivamo

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\nabla}_\nu \Theta_\mu{}^\nu + T^\sigma{}_{\mu\nu}(\nabla_\rho H_\sigma{}^{\nu\rho} - D^\tau{}_{\rho\tau} H_\sigma{}^{\nu\rho}) - \nabla_\nu(\nabla_\rho H_\mu{}^{\nu\rho} - D^\tau{}_{\rho\tau} H_\mu{}^{\nu\rho}) + \\ + D^\sigma{}_{\nu\sigma}(\nabla_\rho H_\mu{}^{\nu\rho} - D^\tau{}_{\rho\tau} H_\mu{}^{\nu\rho}) = 0 \, .\end{aligned} \tag{5.8}$$

Iz (5.8) vidimo da kada tenzor hiperimpulsa iščezava, odnosno kada vrijedi $H_\mu{}^{\nu\rho} = 0$, dobivamo

$$\overset{\circ}{\nabla}_\nu \Theta_\mu{}^\nu = 0 \overset{(3.10)}{\Longrightarrow} \overset{\circ}{\nabla}_\mu \Theta^{\mu\nu} = 0 \, .$$

Drugim riječima, kada nametnemo jednadžbe gibanja $\Psi_i = 0$ i uzmemo da tenzor hiperimpulsa iščezava $H_\mu{}^{\nu\rho} = 0$ zakon sačuvanja (3.12) ostaje zadovoljen. Stoga, kroz sve daljnje račune ćemo od početka uzimati $H_\mu{}^{\nu\rho} = 0$, a ako želimo analizirati slučajeve $H_\mu{}^{\nu\rho} \neq 0$, lako uočavamo da je proširenje potrebnih računa trivijalno.

Nema potrebe da provodimo analogne račune u tetradnom formalizmu jer dolazimo do jednakih zaključaka kao u metričkom formalizmu. Samo ćemo napomenuti da u tetradnom formalizmu imamo tetradu umjesto metrike te spinsku koneksiju umjesto afine kao dinamičke varijable. Također, radi potpunosti ćemo navesti Liejeve derivacije tetrade i spinske koneksije koje su obje tenzori tipa $(0,1)$ u grčkim indeksima

$$\pounds_X e^a{}_\mu = X^\nu \partial_\nu e^a{}_\mu + e^a{}_\nu \partial_\mu X^\nu \, , \tag{5.9}$$

$$\pounds_X \omega^a{}_{b\mu} = X^\nu \partial_\nu \omega^a{}_{b\mu} + \omega^a{}_{b\nu} \partial_\mu X^\nu \, . \tag{5.10}$$

5.2 Invarijantnost na infinitezimalne lokalne Lorentzove transformacije

Kao što smo se već uvjerili u 4. poglavlju kada radimo u tetradnom formalizmu javlja se potreba za nametanjem lokalne Lorentzove invarijantnosti, stoga to moramo nametnuti i na gravitacijski dio akcije te na dio akcije koji odgovara poljima materije. Ovdje ćemo promotriti posljedice toga. Za početak, bitan nam je najopćenitiji oblik akcije u tetradnom formalizmu, napomenimo da ćemo uzeti da se spinska koneksija ne veže na polja materije, jer kao što smo se uvjerili u 5.1 nepostojanje vezanja koneksije s poljima materije, uz nametanje jednadžbi gibanja (5.4), osigurava zadovoljavanje zakona sačuvanja (3.12). Dakle, imamo

$$\mathcal{S}[e,\omega,\psi] = \mathcal{S}_G[e,\omega] + \mathcal{S}_M[e,\psi] \ . \tag{5.11}$$

Iz (5.11) dobivamo da je varijacija $\mathcal{S}_M$

$$\delta\mathcal{S}_M = \int d^4xe \left(\Theta_a{}^\mu \delta_e e^a{}_\mu + \Psi_i \delta_\psi \psi^i\right) \ , \tag{5.12}$$

dok je varijacija $\mathcal{S}_G$

$$\delta\mathcal{S}_G = -\int d^4xe \left(W_a{}^\mu \delta_e e^a{}_\mu + Y_a{}^{b\mu} \delta_\omega \omega^a{}_{b\mu}\right) \ , \tag{5.13}$$

primijetimo da vrijedi antisimetrija

$$Y_a{}^{b\mu} = -Y^b{}_a{}^\mu \ , \tag{5.14}$$

jer $Y_a{}^{b\mu}$ stoji uz $\delta_\omega \omega^a{}_{b\mu}$.

Sada prelazimo na infinitezimalnu lokalnu Lorentzovu transformaciju, definiramo ju na način

$$\Lambda^a{}_b(x) = \delta^a_b + \lambda^a{}_b(x) \ , |\lambda^a{}_b(x)| \ll 1 \ . \tag{5.15}$$

Iz (5.15) je očito da sve račune vezane uz infinitezimalnu lokalnu Lorentzovu transformaciju radimo do reda $\mathcal{O}(\lambda^2)$. Lako se uvjeravamo da mora vrijediti

$$\Lambda_b{}^a(x) = \delta^a_b - \lambda^a{}_b(x) \ . \tag{5.16}$$

Naime, imamo

$$\Lambda^a{}_b(x)\Lambda_a{}^c(x) = (\delta^a_b + \lambda^a{}_b(x))(\delta^c_a - \lambda^c{}_a(x)) = \delta^c_b - \lambda^c{}_b(x) + \lambda^c{}_b(x) - \underbrace{\lambda^a{}_b(x)\lambda^c{}_a(x)}_{\approx 0} = \delta^c_b \ .$$

Nadalje, iz definicijske relacije za Lorentzove matrice imamo

$$\eta_{cd} = \eta_{ab}\Lambda^a{}_c(x)\Lambda^b{}_d(x) \overset{(5.15)}{=} \eta_{ab}\left(\delta^a_c\delta^b_d + \delta^a_c\lambda^b{}_d(x) + \delta^b_d\lambda^a{}_c(x) + \underbrace{\lambda^a{}_c(x)\lambda^b{}_d(x)}_{\approx 0}\right)$$
$$\implies \lambda_{cd}(x) = -\lambda_{dc}(x)\ . \tag{5.17}$$

Sada nas zanima kako se transformiraju tetrada i spinska koneksija na infinitezimalne lokalne Lorentzove transformacije. Za tetradu imamo

$$\delta_\lambda e^a{}_\mu \overset{(4.10)}{=} \Lambda^a{}_b(x)e^b{}_\mu - e^a{}_\mu \overset{(5.15)}{=} \lambda^a{}_b(x)e^b{}_\mu \implies \delta_\lambda e^a{}_\mu = \lambda^a{}_b(x)e^b{}_\mu\ . \tag{5.18}$$

S druge strane za spinsku koneksiju dobivamo

$$\begin{aligned}
\delta_\lambda\omega^a{}_{b\mu} &\overset{(4.33)}{=} \Lambda^a{}_c(x)\Lambda_b{}^d(x)\omega^c{}_{d\mu} + \Lambda^a{}_c(c)\partial_\mu\Lambda_b{}^c(x) - \omega^a{}_{b\mu} \\
&\overset{(5.15),(5.16)}{=} \omega^a{}_{b\mu} - \omega^a{}_{d\mu}\lambda^d{}_b(x) + \omega^c{}_{b\mu}\lambda^a{}_c(x) - \underbrace{\lambda^a{}_c(x)\lambda^d{}_b(x)}_{\approx 0}\omega^c{}_{d\mu} - \\
&\quad - \partial_\mu\lambda^a{}_b(x) - \underbrace{\lambda^a{}_c(x)\partial_\mu\lambda^c{}_b(x)}_{\approx 0} - \omega^a{}_{b\mu} \\
\implies \delta_\lambda\omega^a{}_{b\mu} &= -\partial_\mu\lambda^a{}_b(x) - \omega^a{}_{c\mu}\lambda^c{}_b(x) + \omega^c{}_{b\mu}\lambda^a{}_c(x) \overset{(4.48)}{=} -\mathcal{D}_\mu\lambda^a{}_b(x)\ .
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Sada ćemo nametnuti jednadžbe gibanja $\Psi_i = 0$ te vidjeti koje su posljedice invarijantnosti dijela akcije koji dolazi od materije na infinitezimalne lokalne Lorentzove transformacije

$$\delta_\lambda\mathcal{S}_M = \int d^4xe\Theta_a{}^\mu\delta_\lambda e^a{}_\mu \overset{(5.18)}{=} \int d^4xe\Theta_a{}^\mu\lambda^a{}_b(x)e^b{}_\mu \overset{(4.13)}{=} \int d^4xe\Theta_{\mu\nu}\lambda^{\mu\nu}(x) = 0$$
$$\overset{(5.17)}{\implies} \Theta_{[\mu\nu]} = 0 \implies \Theta_{\mu\nu} = \Theta_{\nu\mu}\ . \tag{5.20}$$

Dakle, zaključujemo da je nepostojanjem vezanja između spinske koneksije i polja materije te nametanjem jednadžbi gibanja $\Psi_i = 0$ zadovoljena simetrija (3.10).

S druge strane za gravitacijski dio akcije imamo

$$
\begin{aligned}
\delta_\lambda \mathcal{S}_G &= -\int d^4xe \left(W_a{}^\mu \delta_\lambda e^a{}_\mu + Y_a{}^{b\mu}\delta_\lambda \omega^a{}_{b\mu}\right) \\
&\overset{(5.18),(5.19)}{=} -\int d^4xe \left(W_a{}^\mu \lambda^a{}_b(x) e^b{}_\mu - Y_a{}^{b\mu}\left(\partial_\mu \lambda^a{}_b(x) + \omega^a{}_{c\mu}\lambda^c{}_b(x) - \omega^c{}_{b\mu}\lambda^a{}_c(x)\right)\right) \\
&\overset{(3.8)}{=} -\int d^4xe \left(W^{a\mu}e^b{}_\mu + \partial_\mu Y^{ab\mu} + \mathring{\Gamma}^\mu{}_{\nu\mu}Y^{ab\nu} - \omega^{ca}{}_\mu Y_c{}^{b\mu} + \omega^b{}_{c\mu}Y^{ac\mu}\right)\lambda_{ab}(x) = 0 \\
&\overset{(5.17)}{\implies} \underbrace{W^{[a|\mu|}e^{b]}{}_\mu}_{\overset{(4.13)}{=} W^{[ab]}} + \underbrace{\partial_\mu Y^{[ab]\mu} + \mathring{\Gamma}^\mu{}_{\nu\mu}Y^{[ab]\nu} - \omega^{c[a}{}_\mu Y_c{}^{b]\mu} + \omega^{[b}{}_{c\mu}Y^{a]c\mu}}_{\equiv -\tilde{W}^{ab}} = 0 \\
&\implies W^{[ab]} = \tilde{W}^{ab} \implies W^{[\mu\nu]} = \tilde{W}^{\mu\nu} \; . \qquad (5.21)
\end{aligned}
$$

5.3 *Opća teleparalelna gravitacija*

Opća teleparalelna gravitacija bazira se na općoj teleparalelnoj geometriji, za koju vrijedi: $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = 0$, $T^\mu{}_{\nu\rho} \neq 0$ i $Q_{\mu\nu\rho} \neq 0$. Nadalje, kao što smo već rekli, uzimamo da tenzor hiperimpulsa iščezava te odmah namećemo jednadžbe gibanja $\Psi_i = 0$. Jednadžbe polja za opću teleparalelnu gravitaciju ćemo izvesti metodom Lagrangeovih multiplikatora, odnosno uvjet

$$
R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \partial_\rho \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} + \Gamma^\mu{}_{\tau\rho}\Gamma^\tau{}_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu{}_{\tau\sigma}\Gamma^\tau{}_{\nu\rho} = 0
$$

ćemo nametnuti pomoću navedenih Lagrangeovih multiplikatora.

5.3.1 Jednadžbe polja za opću teleparalelnu gravitaciju

Metoda Lagrangeovih multiplikatora sastoji se od toga da u akciju (5.1) dodajemo član $\mathcal{S}_r[g,\Gamma,r]$, odnosno imamo

$$
\mathcal{S}[g,\Gamma,\psi] = \mathcal{S}_G[g,\Gamma] + \mathcal{S}_M[g,\psi] + \mathcal{S}_r[g,\Gamma,r] \; , \qquad (5.22)
$$

član $\mathcal{S}_r$ je oblika

$$
\mathcal{S}_r = \int d^4x\sqrt{-g}\, r_\mu{}^{\nu\rho\sigma} R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} \; . \qquad (5.23)
$$

Primijetimo da zbog antisimetrije (2.16) ${r_\mu}^{\nu\rho\sigma}$ također posjeduje antisimetriju

$$
{r_\mu}^{\nu\rho\sigma} = -{r_\mu}^{\nu\sigma\rho} \; . \tag{5.24}
$$

Iz (5.22) je očito da ekstremizacijom cijele akcije po r dobivamo

$$
\delta_r \mathcal{S} = \delta_r \mathcal{S}_r = \int d^4x \sqrt{-g} R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} \delta_r {r_\mu}^{\nu\rho\sigma} = 0 \implies R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = 0 \; .
$$

Također, $\mathcal{S}_r$ moramo varirati po g i Γ

$$
\begin{aligned}
\delta \mathcal{S}_r &\overset{(3.31)}{=} \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2} g^{\mu\nu} {r_\mu}^{\nu\rho\sigma} \underbrace{R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}}_{=0} \delta_g g_{\mu\nu} + {r_\mu}^{\nu\rho\sigma} \delta_\Gamma R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} \right) \\
&\implies \delta \mathcal{S}_r = \delta_\Gamma \mathcal{S}_r = \int d^4x \sqrt{-g} {r_\mu}^{\nu\rho\sigma} \delta_\Gamma R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} \; .
\end{aligned} \tag{5.25}
$$

Dakle, potreban nam je izraz za $\delta_\Gamma R^\mu{}_{\nu\rho\sigma}$, stoga iz (2.15) imamo

$$
\begin{aligned}
\delta_\Gamma R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = {} & \partial_\rho \delta_\Gamma \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} - \partial_\sigma \delta_\Gamma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} + (\delta_\Gamma \Gamma^\mu{}_{\tau\rho}) \Gamma^\tau{}_{\nu\sigma} + \Gamma^\mu{}_{\tau\rho} (\delta_\Gamma \Gamma^\tau{}_{\nu\sigma}) - \\
& - (\delta_\Gamma \Gamma^\mu{}_{\tau\sigma}) \Gamma^\tau{}_{\nu\rho} - \Gamma^\mu{}_{\tau\sigma} (\delta_\Gamma \Gamma^\tau{}_{\nu\rho}) \; ,
\end{aligned}
$$

što uz korištenje (2.3) i (2.4) postaje

$$
\delta_\Gamma R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \nabla_\rho \delta_\Gamma \Gamma^\mu{}_{\nu\sigma} - \nabla_\sigma \delta_\Gamma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} + T^\tau{}_{\rho\sigma} \delta_\Gamma \Gamma^\mu{}_{\nu\tau} \; . \tag{5.26}
$$

Primijetimo da korištenjem (2.18), (2.4) i (2.9) $T^\tau{}_{\rho\sigma}$ možemo zapisati kao

$$
T^\tau{}_{\rho\sigma} = D^\tau{}_{\sigma\rho} - D^\tau{}_{\rho\sigma} = 2 D^\tau{}_{[\sigma\rho]} \; . \tag{5.27}
$$

Sada korištenjem (5.26), (5.27), (2.21), (3.8) i (5.24) te Gaussovog teorema za (5.25) dobivamo

$$
\delta_\Gamma \mathcal{S}_r = \int d^4x \sqrt{-g} \left(2 \nabla_\sigma {r_\mu}^{\nu[\tau\sigma]} - 2 {r_\mu}^{\nu[\tau\sigma]} D^\rho{}_{\sigma\rho} - 2 {r_\mu}^{\nu[\sigma\rho]} D^\tau{}_{\sigma\rho} \right) \delta_\Gamma \Gamma^\mu{}_{\nu\tau} \; . \tag{5.28}
$$

Ekstremizacijom ukupne akcije uz (5.2), (5.5) i (5.28) dolazimo do

$$W^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} \ , \tag{5.29}$$

$$2\nabla_\sigma r_\mu{}^{\nu[\tau\sigma]} - 2r_\mu{}^{\nu[\tau\sigma]} D^\rho{}_{\sigma\rho} - 2r_\mu{}^{\nu[\sigma\rho]} D^\tau{}_{\sigma\rho} - Y_\mu{}^{\nu\tau} = 0 \ . \tag{5.30}$$

Nadalje, moramo se riješiti Lagrangeovih multiplikatora iz (5.30). Stoga krećemo s uzimanjem kovarijantne derivacije ∇_τ izraza (5.30) te dobivamo

$$\nabla_\tau Y_\mu{}^{\nu\tau} = \underbrace{2\nabla_\tau \nabla_\sigma r_\mu{}^{\nu[\tau\sigma]}}_{\overset{(5.24)}{=} 2\nabla_{[\tau}\nabla_{\sigma]} r_\mu{}^{\nu\tau\sigma}} - 2\nabla_\tau \left(r_\mu{}^{\nu[\tau\sigma]} D^\rho{}_{\sigma\rho} \right) - 2\nabla_\tau \left(r_\mu{}^{\nu[\sigma\rho]} D^\tau{}_{\sigma\rho} \right) \ . \tag{5.31}$$

Za prvi član s desne strane iz (5.31) uz korištenje $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = 0$ imamo [37]

$$\begin{aligned} 2\nabla_{[\tau}\nabla_{\sigma]} r_\mu{}^{\nu\tau\sigma} &= -T^\rho{}_{\tau\sigma} \nabla_\rho r_\mu{}^{\nu\tau\sigma} \overset{(5.24)}{=} -T^\rho{}_{\tau\sigma} \nabla_\rho r_\mu{}^{\nu[\tau\sigma]} \overset{(5.27)}{=} -2D^\rho{}_{[\sigma\tau]} \nabla_\rho r_\mu{}^{\nu[\tau\sigma]} \\ &= 2D^\rho{}_{[\sigma\tau]} \nabla_\rho r_\mu{}^{\nu[\sigma\tau]} = 2D^\rho{}_{\sigma\tau} \nabla_\rho r_\mu{}^{\nu[\sigma\tau]} = 2D^\tau{}_{\sigma\rho} \nabla_\tau r_\mu{}^{\nu[\sigma\rho]} \\ &\implies 2\nabla_{[\tau}\nabla_{\sigma]} r_\mu{}^{\nu\tau\sigma} = 2D^\tau{}_{\sigma\rho} \nabla_\tau r_\mu{}^{\nu[\sigma\rho]} \ . \end{aligned} \tag{5.32}$$

Nadalje, za $D^\rho{}_{\sigma\rho}$ uz korištenje (2.13) i (2.14) imamo

$$D^\rho{}_{\sigma\rho} = T^\rho{}_{\rho\sigma} - \frac{1}{2} Q_{\sigma\rho}{}^\rho \ . \tag{5.33}$$

Sada korištenjem (5.32), (5.33), (5.24) i (2.6) izraz (5.31) postaje

$$\nabla_\tau Y_\mu{}^{\nu\tau} = 2D^\rho{}_{\tau\rho} \nabla_\sigma r_\mu{}^{\nu[\tau\sigma]} + r_\mu{}^{\nu[\tau\sigma]} \left(3\nabla_{[\rho} T^\rho{}_{\tau\sigma]} + \nabla_{[\tau} Q_{\sigma]\rho}{}^\rho \right) \ . \tag{5.34}$$

Nadalje, korištenjem specijalnog slučaja prvog Bianchijevog identiteta iz 2.5.3 uz (2.6) imamo

$$\nabla_{[\rho} T^\rho{}_{\tau\sigma]} + T^\rho{}_{\omega[\rho} T^\omega{}_{\tau\sigma]} = 0 \implies 3\nabla_{[\rho} T^\rho{}_{\tau\sigma]} = T^\rho{}_{\rho\omega} T^\omega{}_{\tau\sigma} \ . \tag{5.35}$$

Također, zbog $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = 0$ imamo

$$\nabla_{[\tau} Q_{\sigma]\rho}{}^\rho = -\frac{1}{2} T^\mu{}_{\tau\sigma} Q_{\mu\rho}{}^\rho \ . \tag{5.36}$$

Stoga, korištenjem (5.35), (5.36), (5.27) i (5.33) izraz (5.34) postaje

$$\nabla_\tau Y_\mu{}^{\nu\tau} = 2D^\rho{}_{\tau\rho}\nabla_\sigma r_\mu{}^{\nu[\tau\sigma]} - 2r_\mu{}^{\nu[\tau\sigma]}D^\omega{}_{\tau\sigma}D^\rho{}_{\omega\rho} \ . \tag{5.37}$$

S druge strane, izraz (5.30) kontrahiramo s $D^\rho{}_{\tau\rho}$ te dobivamo

$$D^\rho{}_{\tau\rho}Y_\mu{}^{\nu\tau} = 2D^\rho{}_{\tau\rho}\nabla_\sigma r_\mu{}^{\nu[\tau\sigma]} - 2r_\mu{}^{\nu[\tau\sigma]}D^\omega{}_{\tau\sigma}D^\rho{}_{\omega\rho} - 2\underbrace{r_\mu{}^{\nu[\tau\sigma]}D^\omega{}_{\sigma\omega}D^\rho{}_{\tau\rho}}_{=0} \ ,$$

zadnji član propada jer imamo kontrakciju antisimetričnog $r_\mu{}^{\nu[\tau\sigma]}$ i simetričnog $D^\omega{}_{\sigma\omega}D^\rho{}_{\tau\rho}$ tenzora, stoga imamo

$$D^\rho{}_{\tau\rho}Y_\mu{}^{\nu\tau} = 2D^\rho{}_{\tau\rho}\nabla_\sigma r_\mu{}^{\nu[\tau\sigma]} - 2r_\mu{}^{\nu[\tau\sigma]}D^\omega{}_{\tau\sigma}D^\rho{}_{\omega\rho} \ . \tag{5.38}$$

Sada oduzimanjem (5.38) od (5.37) dobivamo

$$\nabla_\tau Y_\mu{}^{\nu\tau} - D^\rho{}_{\tau\rho}Y_\mu{}^{\nu\tau} = 0 \ . \tag{5.39}$$

Dakle, jednadžbe (5.29) i (5.39) su jednadžbe polja za opću teleparalelnu gravitaciju uz pretpostavku iščezavanja tenzora hiperimpulsa te uz nametnute jednadžbe gibanja $\Psi_i = 0$. Izraz (5.29) nam opisuje dinamiku metrike, dok (5.39) opisuje dinamiku afine koneksije.

5.3.2 GTEGR

Važan specijalni slučaj opće teleparalelne gravitacije je opći teleparalelni ekvivalent opće teorije relativnosti - GTEGR. Iz tog razloga promatramo izraz za Riccijev skalar u OTR, uz $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = 0$, (2.20) i (2.28) imamo

$$\mathring{R} = \underbrace{D^{\mu\rho\nu}D_{\rho\nu\mu} - D^\mu{}_{\rho\mu}D^{\rho\nu}{}_\nu}_{\equiv -G} + \mathring{\nabla}_\mu\left(D^{\nu\mu}{}_\nu - D^{\mu\nu}{}_\nu\right) = -G + \mathring{\nabla}_\mu\left(D^{\nu\mu}{}_\nu - D^{\mu\nu}{}_\nu\right) \ , \tag{5.40}$$

veličina G je očito skalar. Sada možemo promatrati izraz za Einstein-Hilbertovu akciju (3.30), uz zamjenu $\mathring{R}$ s izrazom (5.40)

$$\mathcal{S}_{EH} = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2\kappa}\left(-G - 2\Lambda\right) + \mathcal{L}_M + \mathring{\nabla}_\mu\left(D^{\nu\mu}{}_\nu - D^{\mu\nu}{}_\nu\right)\right) \ , \tag{5.41}$$

koji uz korištenje (3.8) i Gaussovog teorema postaje

$$\mathcal{S}_{EH} = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2\kappa}(-G-2\Lambda)+\mathcal{L}_M\right) = \mathcal{S}_{GTEGR}\ . \tag{5.42}$$

Drugim riječima, imamo dinamičku ekvivalentnost između OTR i GTEGR. U [37] je eksplicitnim računom uz korištenje rezultata iz 5.3.1 pokazano da iz akcije za GTEGR (5.42) stvarno dobivamo jednadžbe polja za OTR, odnosno dobivamo EJP. Dok je izraz (5.39) za afinu koneksiju identički zadovoljen.

5.4 Simetrična teleparalelna gravitacija

Simetrična teleparalelna gravitacija bazira se na simetričnoj teleparalelnoj geometriji, za koju vrijedi: $R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = 0$, $T^{\mu}{}_{\nu\rho} = 0$ i $Q_{\mu\nu\rho} \neq 0$. Naravno, opet uzimamo da tenzor hiperimpulsa iščezava te namećemo jednadžbe gibanja $\Psi_i = 0$. Za izvod jednadžbi polja simetrične teleparalelne gravitacije prezentiramo još jednu metodu, tzv. metodu ograničene varijacije (engl. *method of restricted variation*). Bit ove metode je da uz iščezavanje Riemannovog tenzora zakrivljenosti i tenzora torzije namećemo i iščezavanje njihovih varijacija.

5.4.1 Jednadžbe polja za simetričnu teleparalelnu gravitaciju

Za početak primjećujemo da su varijacije po afinoj koneksiji jedine varijacije Riemannovog tenzora zakrivljenosti i tenzora torzije koje imamo. Za varijaciju Riemannovog tenzora zakrivljenosti smo već dobili izraz (5.26), koji uz ovom slučaju postaje

$$\delta_\Gamma R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \nabla_\rho \delta_\Gamma \Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma} - \nabla_\sigma \delta_\Gamma \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho}\ . \tag{5.43}$$

Sada ćemo se uvjeriti da uzimanjem

$$\delta_\Gamma \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} = \nabla_\rho x^{\mu}{}_{\nu}\ , \tag{5.44}$$

gdje je $x^{\mu}{}_{\nu}$ proizvoljan tenzor tipa $(1,1)$, osiguravamo iščezavanje varijacije Riemannovog tenzora zakrivljenosti (5.43). Dakle, imamo

$$\delta_\Gamma R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = \nabla_\rho\nabla_\sigma x^{\mu}{}_{\nu} - \nabla_\sigma\nabla_\rho x^{\mu}{}_{\nu} = [\nabla_\rho, \nabla_\sigma]x^{\mu}{}_{\nu} = 0 \implies \delta_\Gamma R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = 0\ , \tag{5.45}$$

kako smo se u (2.25) uvjerili komutator kovarijantnih derivacija koji djeluje na neki tenzor daje članove proporcionalne s Riemannovim tenzorom zakrivljenosti te s tenzorom torzije, a kako su oba od njih ovdje po definiciji jednaki nuli, iz toga dobivamo (5.45).

Nadalje, za varijaciju tenzora torzije uz korištenje (2.4) i (5.44), imamo

$$\delta_\Gamma T^\mu{}_{\nu\rho} = \nabla_\nu x^\mu{}_\rho - \nabla_\rho x^\mu{}_\nu \ . \tag{5.46}$$

Sada ćemo se uvjeriti da uzimanjem

$$x^\mu{}_\nu = \nabla_\nu y^\mu \ , \tag{5.47}$$

gdje je y^μ neki proizvoljan tenzor tipa $(1,0)$, dobivamo iščezavanje varijacije tenzora torzije (5.46). Dakle, imamo

$$\delta_\Gamma T^\mu{}_{\nu\rho} = \nabla_\nu \nabla_\rho y^\mu - \nabla_\rho \nabla_\nu y^\mu = [\nabla_\nu, \nabla_\rho] y^\mu = 0 \implies \delta_\Gamma T^\mu{}_{\nu\rho} = 0 \ , \tag{5.48}$$

gdje komutator iščezava iz već ranije navedenog razloga.

Sada možemo izvesti potrebne jednadžbe polja ekstremizacijom ukupne akcije. Iz (5.2) i (5.5) uz iščezavanje tenzora hiperimpulsa i uz nametnute jednadžbe gibanja (5.4) te uz $\delta_\Gamma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} = \nabla_\rho \nabla_\nu y^\mu$, imamo

$$W^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} \ , \tag{5.49}$$

$$\int d^4x \sqrt{-g} Y_\mu{}^{\nu\rho} \nabla_\rho \nabla_\nu y^\mu = 0 \ . \tag{5.50}$$

Preostaje nam prevesti (5.50) u povoljniju formu. Korištenjem (2.21) uz $K^\mu{}_{\nu\rho} = 0$ te (3.8) uz Gaussov teorem, imamo

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^4x \sqrt{-g} Y_\mu{}^{\nu\rho} \left(\mathring{\nabla}_\rho (\nabla_\nu y^\mu) - L^\alpha{}_{\nu\rho} \nabla_\alpha y^\mu + L^\mu{}_{\alpha\rho} \nabla_\nu y^\alpha \right) \\ &\implies \int d^4x \sqrt{-g} \left(\nabla_\rho Y_\mu{}^{\nu\rho} - Y_\mu{}^{\nu\rho} L^\tau{}_{\rho\tau} \right) \nabla_\nu y^\mu = 0 \ . \end{aligned} \tag{5.51}$$

Nadalje, jednakim postupkom dobivamo

$$
\begin{aligned}
0 &= \int d^4x\sqrt{-g}\left(\nabla_\rho Y_\mu{}^{\nu\rho} - Y_\mu{}^{\nu\rho}L^\tau{}_{\rho\tau}\right)\left(\mathring{\nabla}_\nu y^\mu + L^\mu{}_{\tau\nu}y^\tau\right) \\
\Longrightarrow\ 0 &= \int d^4x\sqrt{-g}\left(\nabla_\nu\nabla_\rho Y_\mu{}^{\nu\rho} - \nabla_\nu\left(Y_\mu{}^{\nu\rho}L^\tau{}_{\rho\tau}\right) - \left(\nabla_\rho Y_\mu{}^{\nu\rho} - Y_\mu{}^{\nu\rho}L^\tau{}_{\rho\tau}\right)L^\omega{}_{\nu\omega}\right)y^\mu \ .
\end{aligned}
\tag{5.52}
$$

Korištenjem (2.14) imamo

$$
L^\tau{}_{\rho\tau} = L^\tau{}_{\tau\rho} = -\frac{1}{2}Q_{\rho\tau}{}^\tau \overset{(2.36)}{=} -\frac{1}{2}Q_\rho \ . \tag{5.53}
$$

Nadalje, imamo

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\nabla_{(\nu}Q_{\rho)}Y_\mu{}^{\nu\rho} &= \frac{1}{4}\left(Y_\mu{}^{\nu\rho}\nabla_\nu Q_\rho + Y_\mu{}^{\nu\rho}\underbrace{\nabla_\rho Q_\nu}_{=\nabla_\nu Q_\rho \text{ jer je } [\nabla_\mu,\nabla_\nu]Q_\alpha=0}\right) = \frac{1}{2}Y_\mu{}^{\nu\rho}\nabla_\nu Q_\rho \\
\Longrightarrow\ \frac{1}{2}\nabla_{(\nu}Q_{\rho)}Y_\mu{}^{\nu\rho} &= \frac{1}{2}Y_\mu{}^{\nu\rho}\nabla_\nu Q_\rho \ .
\end{aligned}
\tag{5.54}
$$

Sada iz (5.52) korištenjem (5.53) i (5.54) dobivamo

$$
\nabla_\nu\nabla_\rho Y_\mu{}^{\nu\rho} + Q_{(\nu}\nabla_{\rho)}Y_\mu{}^{\nu\rho} + \frac{1}{2}\nabla_{(\nu}Q_{\rho)}Y_\mu{}^{\nu\rho} + \frac{1}{4}Q_\nu Q_\rho Y_\mu{}^{\nu\rho} = 0 \ . \tag{5.55}
$$

Izraz (5.55) možemo zapisati u kompaktnijoj formi, što će se pokazati korisnim kasnije kroz rad pri tretmanu modificiranih teorija gravitacije baziranih na simetričnoj teleparalelnoj geometriji. Iz toga razloga uvodimo tenzorsku gustoću

$$
\tilde{Y}_\mu{}^{\nu\rho} = \sqrt{-g}Y_\mu{}^{\nu\rho} \ . \tag{5.56}
$$

Računamo sljedeću veličinu

$$
\nabla_\nu\nabla_\rho\tilde{Y}_\mu{}^{\nu\rho} \overset{(5.56)}{=} \nabla_\nu\nabla_\rho\left(\sqrt{-g}Y_\mu{}^{\nu\rho}\right) \ ,
$$

koja uz (A.5) i (5.53) postaje

$$
\begin{aligned}
\nabla_\nu\nabla_\rho\tilde{Y}_\mu{}^{\nu\rho} &= \sqrt{-g}\left(\nabla_\nu\nabla_\rho Y_\mu{}^{\nu\rho} + Q_{(\nu}\nabla_{\rho)}Y_\mu{}^{\nu\rho} + \frac{1}{2}\nabla_{(\nu}Q_{\rho)}Y_\mu{}^{\nu\rho} + \frac{1}{4}Q_\nu Q_\rho Y_\mu{}^{\nu\rho}\right) \overset{(5.55)}{=} 0 \ . \\
&\Longrightarrow\ \nabla_\nu\nabla_\rho\tilde{Y}_\mu{}^{\nu\rho} = 0 \ .
\end{aligned}
\tag{5.57}
$$

Dakle, zaključujemo da (5.49) određuje dinamiku metrike, a (5.55) ili ekvivalentno (5.57) određuje dinamiku afine koneksije za simetričnu teleparalelnu gravitaciju.

5.4.2 STEGR

Važan specijalni slučaj simetrične teleparalelne gravitacije je simetrični teleparalelni ekvivalent opće teorije relativnosti - STEGR. Iz tog razloga promatramo izraz za Riccijev skalar u OTR, uz $R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = 0$ i $T^{\mu}{}_{\nu\rho} = 0$ te (2.20) i (2.28) imamo

$$\mathring{R} = L^{\mu\rho\nu} L_{\rho\nu\mu} - L^{\mu}{}_{\rho\mu} L^{\rho\nu}{}_{\nu} + \mathring{\nabla}_{\mu} \left(L^{\nu\mu}{}_{\nu} - L^{\mu\nu}{}_{\nu} \right) \ . \tag{5.58}$$

Korištenjem (2.12) i (2.14) te (2.36) i (2.37) za (5.58) dobivamo

$$\mathring{R} = \underbrace{-\frac{1}{4} Q_{\mu\nu\rho} Q^{\mu\nu\rho} + \frac{1}{2} Q_{\mu\nu\rho} Q^{\nu\mu\rho} + \frac{1}{4} Q_{\mu} Q^{\mu} - \frac{1}{2} Q_{\mu} \tilde{Q}^{\mu}}_{\equiv -Q} + \mathring{\nabla}_{\mu} \left(L^{\nu\mu}{}_{\nu} - L^{\mu\nu}{}_{\nu} \right)$$

$$\implies \mathring{R} = -Q + \mathring{\nabla}_{\mu} \left(L^{\nu\mu}{}_{\nu} - L^{\mu\nu}{}_{\nu} \right) \ , \tag{5.59}$$

veličina Q je očito skalar. Sada zamjenom $\mathring{R}$ s izrazom (5.59) u Einstein-Hilbertovoj akciji (3.30) dobivamo

$$\mathcal{S}_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa} \left(-Q - 2\Lambda \right) + \mathcal{L}_M + \mathring{\nabla}_{\mu} \left(L^{\nu\mu}{}_{\nu} - L^{\mu\nu}{}_{\nu} \right) \right) \ , \tag{5.60}$$

što uz korištenje (3.8) i Gaussovog teorema postaje

$$\mathcal{S}_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa} \left(-Q - 2\Lambda \right) + \mathcal{L}_M \right) = \mathcal{S}_{STEGR} \ . \tag{5.61}$$

Dakle, zaključujemo da postoji dinamička ekvivalentnost između OTR i STEGR.

5.5 *Metrička teleparalelna gravitacija*

Metrička teleparalelna gravitacija bazira se na metričkoj teleparalelnoj geometriji, za koju vrijedi: $R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = 0$, $T^{\mu}{}_{\nu\rho} \neq 0$ i $Q_{\mu\nu\rho} = 0$. Kao i ranije, uzimamo da tenzor hiperimpulsa iščezava te namećemo jednadžbe gibanja $\Psi_i = 0$. Ranije smo najavili da ćemo metričku teleparalelnu gravitaciju promatrati u tetradnom formalizmu, koji je kako smo vidjeli ekvivalentan metričkom formalizmu. U tetradnom formalizmu, dakle imamo $R^a{}_{b\mu\nu} = 0$, $T^a{}_{\mu\nu} \neq 0$ i $Q_{\mu ab} = 0$. Također, jednadžbe polja metričke teleparalelne gravitacije ćemo izvesti metodom ograničene varijacije.

5.5.1 Jednadžbe polja za metričku teleparalelnu gravitaciju

Dakle, krećemo od oblika akcije (5.11) te pripadnih varijacija (5.12) uz $\Psi_i = 0$ i (5.13). Varijacije po spinskoj koneksiji Riemannovog tenzora zakrivljenosti i tenzora nemetričnosti su jedine koje moramo izračunati te naravno namećemo njihovo iščezavanje. Krećemo od računa varijacije Riemannovog tenzora zakrivljenosti (4.44) te dobivamo

$$\delta_\omega R^a{}_{b\mu\nu} = \partial_\mu \delta_\omega \omega^a{}_{b\nu} - \partial_\nu \delta_\omega \omega^a{}_{b\mu} + \omega^c{}_{b\nu}\delta_\omega \omega^a{}_{c\mu} + \omega^a{}_{c\mu}\delta_\omega \omega^c{}_{b\nu} - \omega^c{}_{b\mu}\delta_\omega \omega^a{}_{c\nu} - \omega^a{}_{c\nu}\delta_\omega \omega^c{}_{b\mu} \ ,$$

Korištenjem spinske kovarijantne derivacije (4.48) i generatora Lorentzove algebre za tenzore u latinskim indeksima, koji su jednostavno, u ovisnosti broju indeksa tenzora, umnošci generatora polja spina 1 danih u Dodatku C, odnosno generatora koji odgovaraju vektorima s jednim latinskim indeksom, gornji izraz postaje

$$\delta_\omega R^a{}_{b\mu\nu} = \mathcal{D}_\mu \delta_\omega \omega^a{}_{b\nu} - \mathcal{D}_\nu \delta_\omega \omega^a{}_{b\mu} \ . \tag{5.62}$$

Sada ćemo se uvjeriti da uzimanjem

$$\delta_\omega \omega^a{}_{b\mu} = \mathcal{D}_\mu x^a{}_b \ , \tag{5.63}$$

gdje je $x^a{}_b$ proizvoljno tenzorsko polje tipa $(1,1)$, postižemo iščezavanje varijacije (5.62)

$$\begin{aligned}
\delta_\omega R^a{}_{b\mu\nu} &= \mathcal{D}_\mu \delta_\omega \omega^a{}_{b\nu} - \mathcal{D}_\nu \delta_\omega \omega^a{}_{b\mu} = \mathcal{D}_\mu \mathcal{D}_\nu x^a{}_b - \mathcal{D}_\nu \mathcal{D}_\mu x^a{}_b \\
&= [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu] x^a{}_b \overset{(4.49)}{=} \frac{1}{2} \underbrace{R^c{}_{d\mu\nu}}_{=0} S_c{}^d x^a{}_b = 0 \\
&\implies \delta_\omega R^a{}_{b\mu\nu} = 0 \ .
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Nadalje, moramo nametnuti iščezavanje varijacije tenzora nemetričnosti za koju uz (4.41) i (5.63) imamo

$$\delta_\omega Q_{\mu ab} = -\mathcal{D}_\mu \left(x_{ab} + x_{ba} \right) \ . \tag{5.65}$$

Vidimo da (5.65) iščezava pod uvjetom da vrijedi antisimetrija

$$x_{ab} = -x_{ba} \ . \tag{5.66}$$

Sada napokon možemo doći do potrebnih jednadžbi polja za metričku teleparalelnu gravitaciju. Iz ekstremizacije ukupne akcije uz (5.12), (5.13), (5.4) i (5.63) dobivamo

$$W_a{}^\mu = \Theta_a{}^\mu \implies W^{\mu\nu} = \Theta^{\mu\nu} \ , \tag{5.67}$$

$$\int d^4x \sqrt{-g} Y_a{}^{b\mu} \left(\partial_\mu x^a{}_b + \omega^a{}_{c\mu} x^c{}_b - \omega^c{}_{b\mu} x^a{}_c \right) = 0 \ . \tag{5.68}$$

Preostaje nam izraz (5.68) pretvoriti u povoljniju formu. Korištenjem (3.8) i Gaussovog teorema te (5.66) dobivamo

$$\partial_\mu Y^{[ab]\mu} + \mathring{\Gamma}^\mu{}_{\nu\mu} Y^{[ab]\nu} - \omega^{c[a}{}_\mu Y_c{}^{b]\mu} + \omega^{[b}{}_{c\mu} Y^{a]c\mu} \overset{(5.21)}{=} -\tilde{W}^{ab} = 0 \ . \tag{5.69}$$

Još ćemo (5.69) prevesti u oblik sa svim grčkim indeksima. Krećemo od

$$\partial_\mu Y^{[ab]\mu} \overset{(4.13)}{=} \partial_\mu \left(Y^{[\rho\sigma]\mu} e^a{}_\rho e^b{}_\sigma \right) = e^a{}_\rho e^b{}_\sigma \partial_\mu Y^{[\rho\sigma]\mu} + Y^{\rho\sigma\mu} \left(\partial_\mu e^{[a}{}_\rho \right) e^{b]}{}_\sigma + Y^{\rho\sigma\mu} e^{[a}{}_\rho \left(\partial_\mu e^{b]}{}_\sigma \right) \ . \tag{5.70}$$

Također, imamo

$$\omega^{c[a}{}_\mu Y_c{}^{b]\mu} = -\omega^{[a}{}_{c\mu} Y_\mu{}^{|c|b]\mu} \ . \tag{5.71}$$

Korištenjem tetradnog postulata (4.30) te antisimetrizacijom a i b indeksa dobivamo

$$Y^{\rho\sigma\mu} \left(\partial_\mu e^{[a}{}_\rho \right) e^{b]}{}_\sigma + \omega^{[a}{}_{c\mu} Y^{|c|b]\mu} = \Gamma^\nu{}_{\rho\mu} Y^{\rho\sigma\mu} e^{[a}{}_\nu e^{b]}{}_\sigma \ . \tag{5.72}$$

Analognim postupkom dolazimo i do

$$Y^{\rho\sigma\mu} e^{[a}{}_{\rho} \left(\partial_\mu e^{b]}{}_{\sigma}\right) + \omega^{[b}{}_{c\mu} Y^{a]c\mu} = \Gamma^{\nu}{}_{\sigma\mu} Y^{\rho\sigma\mu} e^{[a}{}_{\rho} e^{b]}{}_{\nu} \ . \tag{5.73}$$

Uz $L^{\mu}{}_{\nu\rho} = 0$ imamo

$$\mathring{\Gamma}^{\mu}{}_{\nu\mu} \overset{(2.9)}{=} \mathring{\Gamma}^{\mu}{}_{\mu\nu} \overset{(2.10)}{=} \Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu} - \underbrace{K^{\mu}{}_{\mu\nu}}_{\overset{(2.13)}{=} 0} = \Gamma^{\mu}{}_{\mu\nu} \overset{(2.4)}{=} \Gamma^{\mu}{}_{\nu\mu} - T^{\mu}{}_{\mu\nu} \ . \tag{5.74}$$

Sada korištenjem (5.14), (5.70), (5.71), (5.72), (5.73) i (5.74) za (5.69) dobivamo

$$\begin{aligned} & e^{a}{}_{\mu} e^{b}{}_{\nu} \nabla_\rho Y^{[\mu\nu]\rho} - T^{\rho}{}_{\rho\sigma} Y^{[\mu\nu]\sigma} e^{a}{}_{\mu} e^{b}{}_{\nu} = -\tilde{W}^{ab} = 0 \\ \overset{(4.6)}{\Longrightarrow} \ & \nabla_\rho Y^{[\mu\nu]\rho} - T^{\rho}{}_{\rho\sigma} Y^{[\mu\nu]\sigma} = -\tilde{W}^{\mu\nu} = 0 \ . \end{aligned} \tag{5.75}$$

Dakle, zaključujemo da (5.67) određuje dinamiku tetrade (metrike), a (5.75) određuje dinamiku spinske (afine) koneksije.

5.5.2 MTEGR

Važan specijalni slučaj metričke teleparalelne gravitacije je metrički teleparalelni ekvivalent opće teorije relativnosti - MTEGR. Iz tog razloga promatramo izraz za Riccijev skalar u OTR, uz $R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma} = 0$ i $Q_{\mu\nu\rho} = 0$ te (2.13), (2.20) i (2.28) imamo

$$\mathring{R} = K^{\mu\nu\rho} K_{\rho\nu\mu} - K^{\mu}{}_{\rho\mu} K^{\rho\nu}{}_{\nu} - 2\mathring{\nabla}_\mu K^{\mu\nu}{}_{\nu} \ ,$$

što korištenjem (2.11) postaje

$$\mathring{R} = \underbrace{-\frac{1}{4} T^{\rho\mu\nu} T_{\rho\mu\nu} - \frac{1}{2} T^{\mu\nu\rho} T_{\nu\mu\rho} + T^{\mu} T_{\mu}}_{\overset{(2.34)}{=} -T} - 2\mathring{\nabla}_\mu K^{\mu\nu}{}_{\nu} \implies \mathring{R} = -T - 2\mathring{\nabla}_\mu K^{\mu\nu}{}_{\nu} \ . \tag{5.76}$$

Zamjenom $\mathring{R}$ s izrazom (5.76) u Einstein-Hilbertovoj akciji (3.30) imamo

$$\mathcal{S}_{EH} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\frac{1}{2\kappa} \left(-T - 2\Lambda\right) + \mathcal{L}_M - 2\mathring{\nabla}_\mu K^{\mu\nu}{}_{\nu} \right) \ , \tag{5.77}$$

što uz korištenje (3.8) i Gaussovog teorema postaje

$$\mathcal{S}_{EH} = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2\kappa}(-T - 2\Lambda) + \mathcal{L}_M\right) = \mathcal{S}_{MTEGR} \,. \tag{5.78}$$

Odnosno postoji dinamička ekvivalentnost između OTR i MTEGR.

5.6 Nova opća teorija relativnosti

Iz oblika akcija za GTEGR, STEGR i MTEGR odmah uočavamo da postoji jednostavan način konstruiranja akcija koje više ne daju dinamiku ekvivalentnu s dinamikom OTR. Povijesno [38, 39] prvo je uočeno da se modifikacijom akcije za MTEGR tako da se umjesto izraza za skalar torzije (2.34) u akciji (5.78) uzme

$$T = c_1 T^{\rho\mu\nu} T_{\rho\mu\nu} + c_2 T^{\mu\nu\rho} T_{\nu\mu\rho} + c_3 T^{\mu} T_{\mu} \tag{5.79}$$

dobiva dinamika koja više nije ekvivalentna dinamici OTR. Naravno uz $c_1 = \frac{1}{4}$, $c_2 = \frac{1}{2}$ i $c_3 = -1$ u (5.79) se vraćamo na $\mathcal{S}_{MTEGR}$. Sam izraz nova opća teorija relativnosti (engl. *new general relativity*) dolazi iz članka [39] zbog već navedene neekvivalentnosti s OTR. Na isti način ćemo nazivati i modifikacije dobivene iz akcija za GTEGR i STEGR.

Ako u akciji za GTEGR (5.42) umjesto izraza za skalar G iz (5.40) uzmemo

$$G = c_1 D^{\mu\rho\nu} D_{\rho\nu\mu} + c_2 D^{\mu}{}_{\rho\mu} D^{\rho\nu}{}_{\nu} \tag{5.80}$$

dobivamo neekvivalentnost s OTR. Ekvivalentnost naravno dobivamo ako u (5.80) uzmemo $c_1 = -1$ i $c_2 = 1$.

Nadalje, ako u akciji za STEGR (5.61) umjesto izraza za skalar Q iz (5.59) uzmemo

$$Q = c_1 Q_{\mu\nu\rho} Q^{\mu\nu\rho} + c_2 Q_{\mu\nu\rho} Q^{\nu\mu\rho} + c_3 Q_{\mu} Q^{\mu} + c_4 Q_{\mu} \tilde{Q}^{\mu} + c_5 \tilde{Q}_{\mu} \tilde{Q}^{\mu} \tag{5.81}$$

dobivamo neekvivalentnost s OTR. Ekvivalentnost naravno dobivamo ako u (5.81) uzmemo $c_1 = \frac{1}{4}$ i $c_2 = -\frac{1}{2}$, $c_3 = -\frac{1}{4}$, $c_4 = \frac{1}{2}$ i $c_5 = 0$.

Za više detalja o novo općoj teoriji relativnosti preporučuje se pogledati [16, 38–41].

6 MTEGR kao baždarna teorija

U ovom poglavlju ćemo iskonstruirati transformaciju koja nam dopušta da MTEGR promatramo kao baždarnu teoriju baziranu na Liejevoj grupi translacija. Promotrit ćemo svojstva i posljedice takve transformacije.

6.1 QED kao baždarna teorija

Za početak, promatramo QED (engl. *quantum electrodynamics*) kao baždarnu teoriju baziranu na $U(1)$ Liejevoj grupi. Dva su razloga tome, prvi je taj da nam je to dobra prilika za uvjeriti se da je notacija iz Dodatka D u redu; dok je drugi razlog taj da je baždarna struktura MTEGR slična baždarnoj strukturi QED. Eksperimentalno do sada su samo mjereni električni naboji koji su cjelobrojni višekratnici $\frac{e}{3}$, gdje je e iznos električnog naboja elektrona, taj naboj je po iznosu električni naboj $down$ kvarka. Dakle, postoji dobar razlog zašto smatramo da je električni naboj kvantiziran.

No jedini teorijski argument za kvantizaciju električnog naboja dolazi od P. A. M. Diraca [42]. Taj argument govori da bi egzistencija barem jednog magnetskog monopola (odnosno egzistencija magnetskog naboja), bilo gdje u svemiru, implicirala kvantizaciju električnog naboja. Diracov argument je jedini teorijski razlog zašto se kao baždarna grupa za QED uzima $U(1)$, a ne $\mathbb{R}^1$.

Generatori Liejeve algebre koja odgovara $U(1)$ grupi su $2\pi in$, gdje je $n \in \mathbb{Z}$. Iz toga zaključujemo da za elemente $U(1)$ grupe imamo

$$U(x) = e^{in\epsilon(x)} \ , \tag{6.1}$$

gdje smo 2π uključili u parametre transformacije $\epsilon(x)$, a n nam je cijeli broj koji je jednak omjeru električnog naboja s kojim radimo i najmanjeg električnog naboja po iznosu, odnosno $\frac{e}{3}$. Također, primijetimo da generatori Liejeve algebre koja odgovara $U(1)$ baždarnoj grupi komutiraju, odnosno za strukturne konstante imamo

$$C^{A}{}_{BC} = 0 \ . \tag{6.2}$$

Dakle, za transformaciju polja (D.1) korištenjem (6.1) imamo

$$\psi'(x) = e^{in\epsilon(x)}\psi(x) \ . \tag{6.3}$$

Stoga, za infinitezimalnu transformaciju definiranu u (D.5) imamo

$$\delta_\epsilon \psi(x) = in\epsilon(x)\psi(x) \ . \tag{6.4}$$

Sada uvodimo baždarnu kovarijantnu derivaciju

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu \ , \tag{6.5}$$

za koju zahtijevamo da se transformira na način

$$\delta_\epsilon \left(D_\mu \psi(x)\right) = in\epsilon(x) D_\mu \psi(x) \ . \tag{6.6}$$

Iz (6.3) imamo

$$\partial_\mu \psi'(x) = e^{in\epsilon(x)} \left(\partial_\mu \psi(x) + in\psi(x)\partial_\mu \epsilon(x)\right) \ . \tag{6.7}$$

Stoga, dobivamo

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon(D_\mu \psi(x)) &\stackrel{(6.5)}{=} in\epsilon(x) \left(\partial_\mu \psi(x) + A_\mu \psi(x)\right) + \left(in\partial_\mu \epsilon(x) + \delta_\epsilon A_\mu\right) \psi(x) \\ &= in\epsilon(x) D_\mu \psi(x) + \left(in\partial_\mu \epsilon(x) + \delta_\epsilon A_\mu\right) \psi(x) \end{aligned}$$

te uočavamo da je (6.6) zadovoljeno ako vrijedi

$$\delta_\epsilon A_\mu = -in\partial_\mu \epsilon(x) \ . \tag{6.8}$$

Uočavamo da se (6.8) slaže s (D.13) zbog (6.2). Također, rezultati se slažu sa standardnim rezultatima iz udžbenika fizike elementarnih čestica [43].

6.2 *Baždarenje Liejeve grupe translacija*

Sada možemo prezentirati konstrukciju koja sugerira da bismo u formalizmu MTEGR gravitaciju, barem klasično, mogli promatrati kao baždarnu teoriju [41, 44]. Ideja je da pokušamo baždariti Liejevu grupu translacija, jer promatrajući translacijsku simetriju iz Noetherinog teorema dolazimo do sačuvanja tenzora energije i impulsa (3.11), koji kovarijantizacijom poprima formu (3.12). Kako smo se već uvjerili u tenzoru energije i impulsa imamo informaciju o raspodjeli mase u prostorvremenu pa stoga očekujemo da je taj tenzor izvor gravitacije. Stoga je početna ideja baždariti simetriju, odnosno učiniti parametre te simetrije lokalnima, koja je zaslužna za pojavu tog tenzora.

Nadalje, u Dodatku D smo vidjeli da kod rada s baždarnim strukturama imamo dvije relevantne vrste indeksa. Prvi su grčki, odnosno prostorvremenski, a drugi su u tom dodatku veliki latinski, koje nazivamo internim indeksima. Drugim riječima, proces baždarenja zahtijeva uvođenje tzv. internog prostora, koji je određen parametrima promatrane baždarne simetrije. Kao što smo vidjeli u 6.1 za slučaj QED interni prostor je induciran $U(1)$ baždarnom simetrijom.

Sada se sama po sebi nameće potreba za korištenjem tetradnog formalizma. Naime, kako smo u tom formalizmu također inducirali dvije vrste indeksa, grčke koji su prostorvremenski te male latinske koji odgovaraju tangentnom prostoru, to ćemo pokušati uklopiti u narativ baždarnih teorija. Male latinske indekse ćemo tretirati na jednak način kao velike latinske iz Dodatka D, odnosno tangentni prostor ćemo tretirati kao interni prostor i u njemu ćemo provesti proces baždarenja Liejeve grupe translacija.

Napomenimo još da se u [41,45,46] mogu pronaći rasprave o tome kako postaviti MTEGR u okvire modernog formalizma baždarnih teorija, no ovdje nećemo ulaziti u to.

Kao i u Dodatku D krećemo od infinitezimalne lokalne transformacije, a ovdje specijalno promatramo

$$x'^a = x^a + \epsilon^a(x^\mu) \; , \tag{6.9}$$

gdje su $\epsilon^a(x^\mu)$ infinitezimalni parametri lokalne translacijske transformacije. Također, moramo napomenuti da sva polja koja promatramo ovise i prostorvremenskim i o internim koordinatama, odnosno vrijedi

$$\psi = \psi(x^a, x^\mu) \ , \tag{6.10}$$

no kao i u Dodatku D ćemo to označavati jednostavno s

$$\psi(x^a, x^\mu) = \psi(x) \ . \tag{6.11}$$

U Dodatku C smo rekli da su generatori Liejeve algebre koja odgovara grupi translacija dani s

$$T_a = \partial_a \ . \tag{6.12}$$

Generatori dani sa (6.12) očito komutiraju, odnosno strukturne konstante iščezavaju

$$C^a{}_{bc} = 0 \ . \tag{6.13}$$

Korištenjem (6.12) te (D.1) i (D.2) dolazimo do

$$\psi'(x) = e^{\epsilon^a(x^\mu)\partial_a}\psi(x) \ . \tag{6.14}$$

Iz (6.14) za transformaciju definiranu u (D.5) imamo

$$\delta_\epsilon \psi(x) = \epsilon^a(x^\mu)\partial_a\psi(x) \ . \tag{6.15}$$

Također, primijetimo da iz (6.9) slijedi

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon x^a &= \epsilon^a(x^\mu) \ , \\ \delta_\epsilon \left(\partial_\mu x^a\right) &= \partial_\mu \epsilon^a(x^\mu) \ . \end{aligned} \tag{6.16}$$

Nadalje za infinitezimalnu transformaciju parcijalne derivacije polja imamo

$$\delta_\epsilon \left(\partial_\mu \psi(x)\right) = \epsilon^a(x^\mu)\partial_a\partial_\mu\psi(x) + \left(\partial_\mu\epsilon^a(x^\mu)\right)\partial_a\psi(x) \ . \tag{6.17}$$

Dakle, iz (6.17) vidimo da se parcijalna derivacija ne transformira na jednak način kao polje pri δ_ϵ transformaciji. Stoga, kao i u svakom procesu baždarenja uvodimo baždarnu kovarijantnu derivaciju, koju označavamo s H_μ

$$H_\mu = \partial_\mu + B_\mu \ , \tag{6.18}$$

gdje je B_μ nekakav baždarni potencijal, kojeg ćemo razviti po generatorima Liejeve algebre koja odgovara grupi translacija

$$B_\mu = B^a{}_\mu \partial_a \ . \tag{6.19}$$

Sada ćemo se uvjeriti da se koeficijenti $B^a{}_\mu$ iz (6.19) moraju transformirati na način

$$\delta_\epsilon B^a{}_\mu = -\partial_\mu \epsilon^a(x^\mu) \ , \tag{6.20}$$

da bi se uvedena baždarna kovarijantna derivacija transformirala kako očekujemo.

Dakle, računamo

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon(H_\mu\psi(x)) &\overset{(6.18),(6.19)}{=} \delta_\epsilon(\partial_\mu\psi(x)) + \delta_\epsilon(B^a{}_\mu\partial_a\psi(x)) \\ &\overset{(6.19)}{=} \delta_\epsilon(\partial_\mu\psi(x)) + (\delta_\epsilon B^a{}_\mu)\partial_a\psi(x) + B_\mu\delta_\epsilon\psi(x) \ , \end{aligned}$$

što uz korištenje (6.15), (6.17), (6.19) i (6.20) postaje

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon(H_\mu\psi(x)) &= \epsilon^a(x^\mu)\partial_a\partial_\mu\psi(x) + \epsilon^a(x^\mu)B^b{}_\mu \underbrace{\partial_b\partial_a\psi(x)}_{=\partial_a\partial_b\psi(x)} \\ &= \epsilon^a(x^\mu)\partial_a\left(\partial_\mu\psi(x) + B^b{}_\mu\partial_b\psi(x)\right) \overset{(6.18)}{=} \epsilon^a(x^\mu)\partial_a(H_\mu\psi(x)) \\ &\implies \ \delta_\epsilon(H_\mu\psi(x)) = \epsilon^a(x^\mu)\partial_a(H_\mu\psi(x)) \ . \end{aligned} \tag{6.21}$$

Primijetimo da smo koristili da parcijalne derivacije s latinskim indeksom djeluju samo na polja $\psi(x)$ jer samo ona eksplicitno ovise o koordinatama s latinskim indeksima. Dakle, iz (6.21) vidimo da se zbog (6.20) $H_\mu\psi(x)$ transformira na željeni način, odnosno kao i samo polje $\psi(x)$ pri infinitezimalnoj transformaciji δ_ϵ.

Sada slijedi jedan jako bitan korak. Naime, kako smo pokazali da $H_\mu\psi(x)$ ima željena transformacijska svojstva u odnosu na δ_ϵ transformaciju, stoga u ovom kontekstu ta veličina ima tenzorska svojstva te ćemo stoga iskoristiti (4.13) i napisati

$H_\mu\psi(x)$ kao

$$H_\mu\psi(x) = H^a{}_\mu\partial_a\psi(x) \ , \tag{6.22}$$

gdje je $H^a{}_\mu$ tetrada. Zbog (6.18) za $H^a{}_\mu$ imamo

$$H^a{}_\mu = h^a{}_\mu + B^a{}_\mu \ , \tag{6.23}$$

gdje je $h^a{}_\mu$ trivijalna tetrada, odnosno vrijedi

$$h^a{}_\mu = \delta^a_\mu \ .$$

No kako smo se uvjerili u potpoglavlju 4.5 tetrada

$$h^a{}_\mu = \partial_\mu x^a$$

ima jednaka svojstva kao i $h^a{}_\mu = \delta^a_\mu$, odnosno obje tetrade ne proizvode neinercijalne efekte. Mi ćemo dalje koristiti $h^a{}_\mu = \partial_\mu x^a$ jer nam je s njom lakše raditi potrebne račune. Dakle, imamo

$$H_\mu\psi(x) = H^a{}_\mu\partial_a\psi(x) = \left(h^a{}_\mu + B^a{}_\mu\right)\partial_a\psi(x) = \left(\partial_\mu x^a + B^a{}_\mu\right)\psi(x) \ . \tag{6.24}$$

Vidimo da je tetrada $H^a{}_\mu$ zbog člana $B^a{}_\mu$ netrivijalna. Također, sada ćemo se uvjeriti da je $H^a{}_\mu$ invarijantna na δ_ϵ transformaciju

$$\begin{aligned} \delta_\epsilon H^a{}_\mu &\overset{(6.24)}{=} \delta_\epsilon(\partial_\mu x^a) + \delta_\epsilon B^a{}_\mu \overset{(6.16),(6.20)}{=} \partial_\mu\epsilon^a(x^\mu) - \partial_\mu\epsilon^a(x^\mu) = 0 \\ &\implies \delta_\epsilon H^a{}_\mu = 0 \ . \end{aligned} \tag{6.25}$$

Nadalje, zanima nas što se događa pri lokalnim Lorentzovim transformacijama. Za veličine dobivene nakon lokalne Lorentzove transformacije ćemo ovdje koristiti notaciju $'$, odnosno dosadašnju notaciju koju smo koristili za lokalne translacije ćemo koristiti za lokalne Lorentzove transformacije. Krećemo od

$$
\begin{aligned}
x'^a &= \Lambda^a{}_b(x^\mu)x^b \implies x^a = \Lambda_b{}^a(x^\mu)x'^b \ , \\
\psi'(x) &= U(\Lambda)\psi(x) \implies \psi(x) = U^{-1}(\Lambda)\psi'(x) \ , \\
B'^a{}_\mu &= \Lambda^a{}_b(x^\mu)B^b{}_\mu \implies B^a{}_\mu = \Lambda_b{}^a(x^\mu)B'^b{}_\mu \ .
\end{aligned}
\tag{6.26}
$$

Sada korištenjem (6.26), (4.17) i (4.54) dobivamo

$$
H'^a{}_\mu = \Lambda^a{}_b(x^\mu)H^b{}_\mu = \partial_\mu x'^a + \dot{\omega}^a{}_{b\mu}x'^b + B'^a{}_\mu \ ,
$$

što korištenjem (4.58) postaje

$$
H'^a{}_\mu = \dot{\mathcal{D}}_\mu x'^a + B'^a{}_\mu \ . \tag{6.27}
$$

Nadalje, zahtijevamo da i $H'^a{}_\mu$ ostane invarijantan na δ_ϵ transformaciju, iz čega imamo

$$
\begin{aligned}
0 \overset{!}{=} \delta_\epsilon H'^a{}_\mu = \delta_\epsilon \left(\dot{\mathcal{D}}_\mu x'^a\right) + \delta_\epsilon B'^a{}_\mu &\overset{(4.58),(6.16)}{=} \dot{\mathcal{D}}_\mu \epsilon^a(x^\mu) + \delta_\epsilon B'^a{}_\mu \\
\implies \delta_\epsilon B'^a{}_\mu &= -\dot{\mathcal{D}}_\mu \epsilon^a(x^\mu) \ .
\end{aligned}
\tag{6.28}
$$

Izraz (6.28) je upravo ono što i očekujemo da ćemo dobiti iz (6.20) nakon lokalne Lorentzove transformacije.

Sada ćemo izračunati čemu je jednak tenzor torzije (4.38) za tetradu $H^a{}_\mu$, odnosno za $H'^a{}_\mu$. Krećemo od tenzora torzije za $H^a{}_\mu$, u tom slučaju koeficijenti spinske koneksije, kako smo rekli, iščezavaju pa imamo

$$
\begin{aligned}
T^a{}_{\mu\nu} = \partial_\mu H^a{}_\nu - \partial_\nu H^a{}_\mu &\overset{(6.24)}{=} \partial_\mu\partial_\nu x^a + \partial_\mu B^a{}_\nu - \underbrace{\partial_\nu\partial_\mu x^a}_{=\partial_\mu\partial_\nu x^a} - \partial_\nu B^a{}_\mu \\
\implies T^a{}_{\mu\nu} &= \partial_\mu B^a{}_\nu - \partial_\nu B^a{}_\mu \ .
\end{aligned}
\tag{6.29}
$$

Nadalje, iz (4.49) i $R^a{}_{b\mu\nu} = 0$ imamo

$$
[\dot{\mathcal{D}}_\mu, \dot{\mathcal{D}}_\nu]x'^a = 0 \ . \tag{6.30}
$$

Stoga, za tenzor torzije vezan uz tetradu ${H'^a}_\mu$ korištenjem (6.27) i (6.30) dobivamo

$$\begin{aligned} {T'^a}_{\mu\nu} &= \partial_\mu {H'^a}_\nu - \partial_\nu {H'^a}_\mu + {\dot{\omega}^a}_{b\mu}{H'^b}_\nu - {\dot{\omega}^a}_{b\nu}{H'^b}_\mu \\ &= \partial_\mu {B'^a}_\nu - \partial_\nu {B'^a}_\mu + {\dot{\omega}^a}_{b\mu}{B'^b}_\nu - {\dot{\omega}^a}_{b\nu}{B'^b}_\mu \\ \implies {T'^a}_{\mu\nu} &= \partial_\mu {B'^a}_\nu - \partial_\nu {B'^a}_\mu + {\dot{\omega}^a}_{b\mu}{B'^b}_\nu - {\dot{\omega}^a}_{b\nu}{B'^b}_\mu \ . \end{aligned} \tag{6.31}$$

Iz (6.29) i (6.31) zaključujemo da je u oba slučaja tenzor torzije u potpunosti određen koeficijentima baždarnog potencijala B_μ iz razvoja danog s (6.19).

Sljedeće što računamo su komutatori kovarijantnih derivacija H_μ, odnosno ${H'}_\mu$. Pri tim računima koristimo Schwarzov teorem i za članove oblika $\partial_a\partial_\mu\psi(x)$, odnosno vrijedi

$$\partial_a\partial_\mu\psi(x) = \partial_\mu\partial_a\psi(x) \ . \tag{6.32}$$

Dakle, imamo

$$\begin{aligned} [H_\mu, H_\nu]\psi(x) &\overset{(6.24),(6.32)}{=} \left(\partial_\mu {B^a}_\nu - \partial_\nu {B^a}_\mu\right)\partial_a\psi(x) \overset{(6.29)}{=} {T^a}_{\mu\nu}\partial_a\psi(x) \\ &\implies [H_\mu, H_\nu] = {T^a}_{\mu\nu}\partial_a \ . \end{aligned} \tag{6.33}$$

Primijetimo da se pri lokalnim Lorentzovim transformacijama generatori Liejeve algebre koja odgovara grupi translacija također transformiraju, odnosno imamo

$$\partial'_a = {\Lambda_a}^b(x^\mu)\partial_b \implies \partial_a = {\Lambda^b}_a(x^\mu)\partial'_b \ . \tag{6.34}$$

Trivijalno uočavamo da ovi generatori dani s (6.34) i dalje komutiraju, odnosno da vrijedi

$${C'^a}_{bc} = 0 \ . \tag{6.35}$$

Analognim računom uz korištenje (6.27), (6.32), (6.31) i (6.34) dolazimo do

$$[{H'}_\mu, {H'}_\nu] = {T'^a}_{\mu\nu}\partial'_a \ . \tag{6.36}$$

Možemo definirati tenzor snage polja u MTEGR na način

$$F_{\mu\nu}^{MTEGR} = T^a{}_{\mu\nu}\partial_a \ . \tag{6.37}$$

Iz (6.37) je očito da je zbog položaja latinskih indeksa ovako definiran tenzor snage polja invarijantan na Lorentzove transformacije, odnosno vrijedi

$$F_{\mu\nu}^{MTEGR} = T^a{}_{\mu\nu}\partial_a = T'^a{}_{\mu\nu}\partial'{}_a = F'^{MTEGR}_{\mu\nu} \ . \tag{6.38}$$

Korištenjem (D.22) imamo

$$\delta_\epsilon T^a{}_{\mu\nu} = \epsilon^b(x^\mu)C^a{}_{bc}T^c{}_{\mu\nu} \overset{(6.13)}{=} 0 \implies \delta_\epsilon T^a{}_{\mu\nu} = 0 \tag{6.39}$$

te

$$\delta_\epsilon T'^a{}_{\mu\nu} = \epsilon^b(x^\mu)C'^a{}_{bc}T'^c{}_{\mu\nu} \overset{(6.35)}{=} 0 \implies \delta_\epsilon T'^a{}_{\mu\nu} = 0 \ . \tag{6.40}$$

Iz (6.33) i (6.36) te (6.37) i (6.38) zaključujemo da je snaga polja u MTEGR u potpunosti određena tenzorom torzije, koji je kako smo se uvjerili u (6.29) i (6.31) u potpunosti određen baždarnim potencijalom B_μ. Iz ovoga razloga sada radimo jednu snažnu pretpostavku, koju ćemo potkrijepiti u sljedećem poglavlju korištenjem Newtonovog limesa, a to je da se sve informacije o gravitacijskim efektima nalaze upravo u baždarnom potencijalu B_μ. Zbog toga baždarni potencijal B_μ nazivamo gravitacijskim vektorskim (jer nosi jedan grčki indeks) potencijalom.

Također, iz (6.39) i (6.40) zaključujemo da je tenzor torzije u ovom kontekstu invarijantan na δ_ϵ transformacije. Iz toga razloga možemo kao i u svim ostalim poznatim baždarnim teorijama konstruirati lagranžijan od članova koji su kvadratični u tenzoru snage polja, odnosno u koeficijentima koji dolaze od raspisa tenzora snage polja po generatorima pripadne baždarne algebre. Ovdje su nam ti koeficijenti kako smo vidjeli dani tenzorom torzije $T^a{}_{\mu\nu}$. Korištenjem (4.13) tenzor torzije možemo pretvoriti u oblik sa svim grčkim indeksima i time dolazimo do zaključka da smo kroz ovdje predstavljenu metodu baždarenja u MTEGR uspjeli doći do oblika lagranžijana (5.79), gdje već spomenutim izborom koeficijenata c_1, c_2 i c_3 dobivamo dinamiku ekvivalentnu s OTR. Drugim riječima, MTEGR promatran isključivo kao baždarna teorija bazirana na Liejevoj grupi translacija, neovisno o rezultatima koje smo dobili ranije, opet može reproducirati dinamiku OTR ili poopćavanjem dinamiku nove opće teorije relativnosti.

Nadalje, korištenjem tetradnog postulata (4.30) za afinu koneksiju koja odgovara tetradi $H^a{}_\mu$ dobivamo

$$\Gamma^\rho{}_{\nu\mu} = H_a{}^\rho \partial_\mu H^a{}_\nu \ . \tag{6.41}$$

Dok za afinu koneksiju koja odgovara tetradi $H'^a{}_\mu$ dobivamo

$$\Gamma'^\rho{}_{\nu\mu} = H'_a{}^\rho \dot{\mathcal{D}}_\mu H'^a{}_\nu \ . \tag{6.42}$$

Afina koneksija (6.41), odnosno (6.42) u literaturi [41] je poznata kao Weitzenböckova koneksija. Zbog toga neki autori [39] metričku teleparalelnu geometriju nazivaju Weitzenböckovom geometrijom.

Ono što smo ovdje pokazali je sljedeće, naime gravitacijske efekte postižemo zamjenom trivijalne tetrade $h^a{}_\mu$ netrivijalnom $H^a{}_\mu$ ili $H'^a{}_\mu$. To je ekvivalentno zamjeni Minkowski metrike $\eta_{\mu\nu}$ s nekom novom $g_{\mu\nu}$, to je upravo ono što radimo i u OTR, ali smo ovdje to postigli na potpuno drugačiji način te smo uspjeli gravitaciju uklopiti u formalizam ostalih poznatih baždarnih teorija uvođenjem gravitacijskog vektorskog potencijala B_μ.

Sada smo u prilici iskonstruirati princip minimalnog vezanja za MTEGR. Kao što smo već rekli u potpoglavlju 4.5 i u geometriji Minkowskog i u Riemannovoj geometriji dekompozicija koeficijenata spinske koneksije (4.36) se svodi na

$$\omega^a{}_{b\mu} = \mathring{\omega}^a{}_{b\mu} \ ,$$

što znači da općenito ne možemo razlikovati neinercijalne od gravitacijskih efekata. No u MTEGR situacija je drugačija jer imamo

$$\dot{\omega}^a{}_{b\mu} = \mathring{\omega}^a{}_{b\mu} + K'^a{}_{b\mu} \implies \mathring{\omega}^a{}_{b\mu} = \dot{\omega}^a{}_{b\mu} - K'^a{}_{b\mu} \ , \tag{6.43}$$

a kako je $K'^a{}_{b\mu}$ zbog (2.11) sastavljen od tenzora torzije $T'^a{}_{b\mu}$ koji u ovom kontekstu daje snagu gravitacijskog polja, iz toga razloga (6.43) ima egzaktno razdvojene neinercijalne i gravitacijske efekte. Drugim riječima, neinercijalni efekti se nalaze u $\overset{\bullet}{\omega}{}^a{}_{b\mu}$, a gravitacijski u $K'^a{}_{b\mu}$. Također, iz (6.43) se elegantno može iščitati jedna od glavnih pretpostavki pri formuliranju OTR, odnosno mogućnost kompenzacije gravitacijskih efekata neinercijalnim, jer u tom slučaju vrijedi $\overset{\circ}{\omega}{}^a{}_{b\mu} = 0$, što implicira

$$\overset{\bullet}{\omega}{}^a{}_{b\mu} = K'^a{}_{b\mu} \; .$$

Stoga, princip minimalnog vezanja u MTEGR dobivamo na sljedeći način. Ako promatramo OTR u tetradnom formalizmu, tada koristimo spinsku kovarijantnu derivaciju

$$\overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{2}\overset{\circ}{\omega}_{ab\mu} S^{ab} \; ,$$

a kako smo se uvjerili da je MTEGR dinamički ekvivalentan s OTR, to znači da je zbog (6.43) princip minimalnog vezanja u MTEGR, prema sličnoj notaciji kao u [41], dan na način

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu} \Leftrightarrow h^a{}_\mu \to H'^a{}_\mu \; , \\ \partial_\mu \to \overset{\bullet\bullet}{\mathcal{D}}_\mu = \partial_\mu + \frac{1}{2}\left(\overset{\bullet}{\omega}_{ab\mu} - K'{}_{ab\mu}\right) S^{ab} \; . \end{aligned} \tag{6.44}$$

Uskoro ćemo (6.44) primijeniti na tri najkorištenija polja u fizici, ona spina 0, $\frac{1}{2}$ i 1.

6.3 Newtonov limes

Sada ćemo pokušati konstruirati Newtonov limes, sličnim postupkom kao u 3.1.1 te ćemo vidjeti možemo li ikako povezati gravitacijski vektorski potencijal B_μ s gravitacijskim potencijalom ϕ iz (3.9).

Za početak, kako smo se već uvjerili MTEGR daje dinamiku ekvivalentnu dinamici OTR. Stoga, čestice i dalje prate geodetske putanje (3.6), a ne autoparalelne putanje (2.24). Ova činjenica je i eksplicitno pokazana u [41].

Geodetska jednadžba (3.6) uz dekompoziciju (2.10) u MTEGR daje

$$0 = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^\mu{}_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} = \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \left(\Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} - K^\mu{}_{\alpha\beta}\right)\frac{dx^\alpha}{d\tau}\frac{dx^\beta}{d\tau} \; . \tag{6.45}$$

Član uz $K^{\mu}{}_{\alpha\beta}$ možemo pretvoriti u

$$
\begin{aligned}
K^{\mu}{}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau} &\overset{(2.11)}{=} \frac{1}{2}\left(T_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\beta} + T_{\beta}{}^{\mu}{}_{\alpha} - T^{\mu}{}_{\alpha\beta}\right)\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau} \\
&= \frac{1}{2}T_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\beta}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau} + \frac{1}{2}\underbrace{T_{\beta}{}^{\mu}{}_{\alpha}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau}}_{=T_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\beta}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau}} - \frac{1}{2}\underbrace{T^{\mu}{}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau}}_{=0} ,
\end{aligned}
$$

gdje je zadnji član jednak nuli zbog antisimetrije tenzora torzije (2.6) te simetrije $\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau}$ u indeksima α i β. Stoga, imamo

$$
K^{\mu}{}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau} = T_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\beta}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau} . \tag{6.46}
$$

Ovime za (6.45) dobivamo

$$
\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau} = T_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\beta}\frac{dx^{\alpha}}{d\tau}\frac{dx^{\beta}}{d\tau} . \tag{6.47}
$$

Newtonov limes provodimo pod sljedećim pretpostavkama:

1. Čestice se gibaju nerelativističkim brzinama: $\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dx^0}{d\tau}$, $i = 1, 2, 3$.

2. Gravitacijsko polje je stacionarno i slabo: $\partial_0 B^{a}{}_{\mu}$, $\left|B^{a}{}_{\mu}\right| \ll 1$.

Napomenimo da slično kao i u konstrukciji Newtonovog limesa u 3.1.1 zahtijevamo linearnost u $B^{a}{}_{\mu}$ i pripadnim derivacijama od $B^{a}{}_{\mu}$ te stoga sve nelinearne članove zanemarujemo.

Korištenjem 1. pretpostavke (6.47) postaje

$$
\frac{d^2x^{\mu}}{d\tau^2} + \Gamma^{\mu}{}_{00}\frac{dx^{0}}{d\tau}\frac{dx^{0}}{d\tau} = T_{0}{}^{\mu}{}_{0}\frac{dx^{0}}{d\tau}\frac{dx^{0}}{d\tau} . \tag{6.48}
$$

Tetrada koju koristimo je dana u (6.24) te ćemo uzeti (4.51) radi što jednostavnijeg računa. Dakle, imamo

$$
H^{a}{}_{\mu} = \delta^{a}_{\mu} + B^{a}{}_{\mu} , \tag{6.49}
$$

primijetimo da zbog 2. pretpostavke $B^{a}{}_{\mu}$ igra ulogu malene perturbacije u izrazu

(6.49). Tetrada (6.49) daje afinu koneksiju (6.41), što uz zahtjev linearnosti daje

$$\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} = \partial_\beta B^{\mu}{}_{\alpha} \ . \tag{6.50}$$

Iz (6.50) uz 2. pretpostavku te zahtjev linearnosti dobivamo

$$\Gamma^{\mu}{}_{00} = 0 \ . \tag{6.51}$$

Nadalje, iz (6.29) imamo

$$\begin{aligned}
&T^{a}{}_{\mu\nu} = \eta^{ab} g_{\rho\mu} T_{b}{}^{\rho}{}_{\nu} = \partial_\mu B^{a}{}_{\nu} - \partial_\nu B^{a}{}_{\mu} \Big/ \eta_{ac} g^{\mu\sigma} \\
&\overset{(2.2)}{\Longrightarrow} \ \delta^{b}_{c} \delta^{\sigma}_{\rho} T_{b}{}^{\rho}{}_{\nu} = T_{c}{}^{\sigma}{}_{\nu} = \eta_{ac} g^{\mu\sigma} \left(\partial_\mu B^{a}{}_{\nu} - \partial_\nu B^{a}{}_{\mu} \right) \Big/ H^{c}{}_{\alpha} \\
&\overset{(4.13)}{\Longrightarrow} \ T_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\nu} = H^{c}{}_{\alpha} \eta_{ac} g^{\mu\sigma} \left(\partial_\mu B^{a}{}_{\nu} - \partial_\nu B^{a}{}_{\mu} \right) = H^{c}{}_{\alpha} g^{\mu\sigma} \left(\partial_\mu B_{c\nu} - \partial_\nu B_{c\mu} \right) \\
&\qquad\qquad \approx \delta^{c}_{\alpha} g^{\mu\sigma} \left(\partial_\mu B_{c\nu} - \partial_\nu B_{c\mu} \right) = g^{\mu\sigma} \left(\partial_\mu B_{\alpha\nu} - \partial_\nu B_{\alpha\mu} \right) \\
&\qquad\qquad \approx \eta^{\mu\sigma} \left(\partial_\mu B_{\alpha\nu} - \partial_\nu B_{\alpha\mu} \right) = \partial^{\sigma} B_{\alpha\nu} - \eta^{\mu\sigma} \partial_\nu B_{\alpha\mu} \\
&\qquad\qquad \Longrightarrow \ T_{\alpha}{}^{\sigma}{}_{\nu} = \partial^{\sigma} B_{\alpha\nu} - \eta^{\mu\sigma} \partial_\nu B_{\alpha\mu} \ .
\end{aligned} \tag{6.52}$$

Iz (6.52) uz 2. pretpostavku i zahtjev linearnosti dobivamo

$$T_{0}{}^{\mu}{}_{0} = \partial^{\mu} B_{00} \ . \tag{6.53}$$

Sada za (6.48) uz (6.51) i (6.53) dobivamo

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = \partial^\mu B_{00} \left(\frac{dx^0}{d\tau} \right)^2 \ . \tag{6.54}$$

Uz 2. pretpostavku (6.54) daje

$$\frac{d^2 x^0}{d\tau^2} \equiv \ddot{x}^0 = 0 \implies \dot{x}^0 = \text{konst.} \equiv 1 \ . \tag{6.55}$$

U (6.55) smo bez smanjenja općenitosti za konstantu uzeli da je jednaka 1. Za prostorne indekse iz (6.54) i (6.55) dobivamo

$$\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = \partial^i B_{00} \ , \tag{6.56}$$

ako uzmemo $B_{00} = -\phi$, gdje je ϕ gravitacijski potencijal iz (3.9), onda (6.56) pomnožen s masom daje

$$\underbrace{m\frac{d^2x^i}{d\tau^2}}_{=\vec{F}} = -m \underbrace{\partial^i\phi}_{\substack{\approx\eta^{ij}\partial_j\phi=\partial_i\phi \\ \text{jer je } \eta^{ij}=\text{diag}(1,1,1)}} \approx -m \underbrace{\partial_i\phi}_{=\vec{\nabla}\phi} = -m\vec{\nabla}\phi$$
$$\implies \vec{F} = -m\vec{\nabla}\phi \,. \tag{6.57}$$

Dakle, zaključujemo da smo uspjeli iskonstruirati Newtonov limes te smo uz pretpostavku da vrijedi $B_{00} = -\phi$ uspjeli doći do poznatog izraza za gravitacijsku silu (6.57). Drugim riječima, dali smo jaku potvrdu da je pretpostavka iz potpoglavlja 6.2 točna, odnosno da se u gravitacijskom vektorskom potencijalu B_μ stvarno nalaze informacije o gravitaciji u formalizmu MTEGR kao baždarne teorije.

6.4 Minimalno vezanje

Sada ćemo primijeniti princip minimalnog vezanja (6.44) na redom polja spina 0, $\frac{1}{2}$ i 1 te ćemo vidjeti koje su njegove posljedice.

6.4.1 Klein-Gordonovo (skalarno) polje spina 0

Akcija za polje ψ spina 0 uz Minkowski metriku u Kartezijevim koordinatama glasi [47]

$$\mathcal{S}_{KG} = \int d^4x \frac{1}{2}\left(\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\psi(x))(\partial_\nu\psi(x)) - m^2\psi^2(x)\right) \,. \tag{6.58}$$

Principom minimalnog vezanja (6.44) iz (6.58) dobivamo

$$\mathcal{S}_{KG} = \int d^4x \frac{H'}{2}\left(g^{\mu\nu}(\ddot{\mathcal{D}}_\mu\psi(x))(\ddot{\mathcal{D}}_\nu\psi(x)) - m^2\psi^2(x)\right) \,, \tag{6.59}$$

gdje je H' determinanta tetrade $H'^a{}_\mu$ koja je dana sa (6.27).

Primijetimo da se spinska kovarijantna derivacija iz (6.59) svodi na parcijalnu jer djeluje na polje spina 0 (pogledati Dodatak C), odnosno imamo

$$\mathcal{S}_{KG} = \int d^4x \frac{H'}{2}\left(g^{\mu\nu}(\partial_\mu\psi(x))(\partial_\nu\psi(x)) - m^2\psi^2(x)\right) \,. \tag{6.60}$$

Sada računamo jednadžbe gibanja, odnosno Euler-Lagrangeove jednadžbe iz (6.60)

$$\frac{\partial L_{KG}}{\partial \psi} - \partial_\rho \left(\frac{\partial L_{KG}}{\partial(\partial_\rho \psi(x))} \right) = 0 \implies m^2\psi(x) + \frac{1}{H'}(\partial_\rho H') \underbrace{(g^{\rho\mu}\partial_\mu \psi(x))}_{=\partial^\rho \psi(x)} + \partial_\rho \underbrace{(g^{\rho\mu}\partial_\mu \psi(x))}_{=\partial^\rho \psi(x)} = 0 \ .$$

Za $\partial_\rho H'$ imamo

$$\partial_\rho H' \overset{(4.8)}{=} \partial_\rho \sqrt{-g} = -\frac{1}{2}\frac{\partial_\rho g}{\sqrt{-g}} \overset{(A.2),(3.7)}{=} \sqrt{-g}\mathring{\Gamma}^\alpha{}_{\rho\alpha} \overset{(4.8)}{=} H'\mathring{\Gamma}^\alpha{}_{\rho\alpha} \ ,$$

korištenjem dekompozicije (2.10) uz $L^\mu{}_{\nu\rho} = 0$ dobivamo

$$\partial_\rho H' = H' \left(\Gamma'^\alpha{}_{\rho\alpha} - K'^\alpha{}_{\rho\alpha} \right) \ . \tag{6.61}$$

Stoga, za Euler-Lagrangeove jednadžbe dobivamo

$$\left(\partial_\rho + \Gamma'^\alpha{}_{\rho\alpha} - K'^\alpha{}_{\rho\alpha} \right) \partial^\rho \psi(x) + m^2\psi(x) = 0 \ . \tag{6.62}$$

Primijetimo da $K'^\alpha{}_{\rho\alpha}$ možemo koristeći (2.11) napisati kao

$$K'^\alpha{}_{\rho\alpha} = T'^\alpha{}_{\alpha\rho}$$

pa (6.62) postaje

$$\left(\partial_\rho + \Gamma'^\alpha{}_{\rho\alpha} - T'^\alpha{}_{\alpha\rho} \right) \partial^\rho \psi(x) + m^2\psi(x) = 0 \ . \tag{6.63}$$

Iz (6.63) zaključujemo da se $\partial^\rho \psi(x)$ veže na tenzor torzije u MTEGR.

Još ćemo se radi potpunosti uvjeriti da je Klein-Gordonova jednadžba (6.63) ekvivalentna s Klein-Gordonovom jednadžbom u OTR. Ako u (6.62) opet iskoristimo dekompoziciju (2.10) uz $L^\mu{}_{\nu\rho} = 0$ te (2.9) dobivamo

$$\left(\partial_\rho + \mathring{\Gamma}^\alpha{}_{\alpha\rho} \right) \partial^\rho \psi(x) + m^2\psi(x) = 0 \ .$$

Primijetimo da $\partial^\rho \psi(x)$ možemo zamijeniti s $\mathring{\nabla}^\rho \psi(x)$ jer je $\psi(x)$ skalarno polje te uz (2.3) time dobivamo

$$\mathring{\nabla}_\rho \mathring{\nabla}^\rho \psi(x) + m^2\psi(x) = 0 \ , \tag{6.64}$$

što je upravo Klein-Gordonova jednadžba u OTR jer princip minimalnog vezanja u OTR nalaže zamjenu parcijalne derivacije ∂_μ kovarijantnom oblika $\overset{\circ}{\nabla}_\mu$.

6.4.2 Diracovo (fermionsko) polje spina $\frac{1}{2}$

Akcija za Diracovo polje spina $\frac{1}{2}$ dana je s (4.86), za trivijalnu tetradu ona glasi

$$\mathcal{S}_D = \int d^4x \left(\frac{i}{2} \left(\bar{\psi}(x)\gamma^a h_a{}^\mu \mathcal{D}_\mu \psi(x) - (\mathcal{D}_\mu \bar{\psi}(x))\gamma^a h_a{}^\mu \psi(x) \right) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) \right) \ . \tag{6.65}$$

Principom minimalnog vezanja (6.44) akcija (6.65) postaje

$$\mathcal{S}_D = \int d^4x H' \left(\frac{i}{2} \left(\bar{\psi}(x)\gamma^a H'_a{}^\mu \ddot{\mathcal{D}}_\mu \psi(x) - (\ddot{\mathcal{D}}_\mu \bar{\psi}(x))\gamma^a H'_a{}^\mu \psi(x) \right) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) \right) \ . \tag{6.66}$$

Sada korištenjem (4.23) i (4.82) iz (6.66) dobivamo Diracovu jednadžbu za $\psi(x)$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L_D}{\partial \bar{\psi}(x)} - \ddot{\mathcal{D}}_\rho \left(\frac{\partial L_D}{\partial (\ddot{\mathcal{D}}_\rho \bar{\psi}(x))} \right) = 0 \implies i\gamma^\mu(x) \ddot{\mathcal{D}}_\mu \psi(x) - m\psi(x) = 0 \\ &\overset{(6.44)}{\Longrightarrow} \left(i\gamma^\mu(x) \left(\partial_\mu + \frac{1}{2} \left(\overset{\bullet}{\omega}_{ab\mu} - K'_{ab\mu} \right) S^{ab} \right) - m \right) \psi(x) = 0 \ , \end{aligned} \tag{6.67}$$

gdje je S^{ab} dan u Dodatku C. Analognim postupkom dolazimo do Diracove jednadžbe za $\bar{\psi}(x)$. U (6.67) primjećujemo da postoji vezanje između tenzora torzije (preko $K'_{ab\mu}$) i $\psi(x)$.

Također, primijetimo da korištenjem dekompozicije (4.37) uz $L^\mu{}_{\nu\rho} = 0$ za (6.67) dobivamo

$$i\gamma^\mu(x) \overset{\circ}{\mathcal{D}}_\mu \psi(x) - m\psi(x) = 0 \ , \tag{6.68}$$

što je naravno Diracova jednadžba za $\psi(x)$ u OTR u tetradnom formalizmu.

Jednadžbu (6.67) ćemo napisati u još jednom obliku korištenjem ireducibilne dekompozicije tenzora torzije [41]

$$T'_{abc} = \frac{2}{3}(t'_{abc} - t'_{acb}) + \frac{1}{3}(\eta_{ab} v'_c - \eta_{ac} v'_b) + \epsilon_{abcd} a'^d \ , \tag{6.69}$$

gdje je ϵ_{abcd} totalno antisimetrični Levi-Civitin simbol. Dok je t'_{abc} je tenzorski dio, v'_a je vektorski dio te je a'^c aksijalni dio tenzora torzije. Imena ovih veličina dolaze od njihovih ponašanja na paritetne transformacije (P) te transformacije vremenskog obrata (T). Primijetimo da tenzorski dio tenzora torzije posjeduje simetriju

$$t'_{abc} = t'_{bac} \ . \tag{6.70}$$

Stoga, korištenjem (2.11), (4.13) i (6.69) dobivamo

$$\begin{gathered} K'_{ab\mu} = H'^{c}{}_{\mu} K'_{abc} \\ \implies K'_{ab\mu} = H'^{c}{}_{\mu} \left(\frac{2}{3}(t'_{cab} - t'_{cba}) + \frac{1}{3}(\eta_{ac} v'_{b} - \eta_{bc} v'_{a}) + \frac{1}{2}(\epsilon_{bacd} + \epsilon_{cabd} - \epsilon_{abcd}) a'^{d} \right) \ . \end{gathered} \tag{6.71}$$

Sada se fokusiramo na član

$$-\frac{i}{2}\gamma^{\mu}(x) K'_{ab\mu} S^{ab} \overset{(4.13),(4.23)}{=} -\frac{i}{2}\gamma^{c} K'_{abc} S^{ab}$$

koji korištenjem (6.69) te totalne antisimetrije Levi-Civitinog simbola, simetrije (6.70) i simetrije metričkog tenzora (2.1) postaje jednak

$$-\frac{i}{2}\gamma^{\mu}(x) K'_{ab\mu} S^{ab} = -i \left(\frac{2}{3} t'_{cab} \gamma^{c} S^{ab} + \frac{1}{3} \eta_{ac} v'^{b} \gamma^{c} S^{ab} - \frac{1}{4} \epsilon_{abcd} a'^{d} \gamma^{c} S^{ab} \right) \ . \tag{6.72}$$

Nadalje, korištenjem relacije [48]

$$\gamma^{c} S^{ab} = \frac{1}{4}\gamma^{c}[\gamma^{a}, \gamma^{b}] = \frac{1}{2}\left(\eta^{ac}\gamma^{b} - \eta^{cb}\gamma^{a} - i\epsilon^{dcab}\gamma_{5}\gamma_{d} \right) \ , \tag{6.73}$$

gdje je $\gamma^{5} = i\gamma^{0}\gamma^{1}\gamma^{2}\gamma^{3} = \gamma_{5}$, uz totalnu antisimetriju Levi-Civitinog simbola, simetriju (6.70) te simetriju metričkog tenzora (2.1) dobivamo

$$-\frac{i}{2}\gamma^{\mu}(x) K'_{ab\mu} S^{ab} = -i \left(\frac{1}{3}(t'_{cba} - t'_{cab}) \eta^{bc} \gamma^{a} + \frac{1}{2} v'_{a} \gamma^{a} + \frac{i}{8} \underbrace{\epsilon_{abcd} \underbrace{\epsilon^{ecab}}_{=-\epsilon^{abce}} a'^{d} \gamma_{5} \gamma_{e}}_{=-3!\delta^{e}_{d} a'^{d} \gamma_{5}\gamma_{e} = -6 a'_{a} \gamma^{5} \gamma^{a}} \right) \ . \tag{6.74}$$

Primijetimo da iz (6.69) imamo

$$v'_a = T'^b{}_{ba} \; , \tag{6.75}$$

$$a'^a = \frac{1}{6}\epsilon^{abcd}T'_{bcd} \; , \tag{6.76}$$

$$t'_{abc} = \frac{1}{2}(T'_{abc} + T'_{bac}) + \frac{1}{6}(\eta_{ac}v'_b + \eta_{bc}v'_a) - \frac{1}{3}\eta_{ab}v'_c \; . \tag{6.77}$$

Sada se možemo fokusirati na prvi član s desne strane u (6.74)

$$(t'_{cba} - t'_{cab})\eta^{bc}\gamma^a \overset{(6.77)}{=} \eta^{bc}\gamma^a \left(\frac{1}{2}(T'_{cba} + T'_{bca} - T'_{cab} - T'_{acb}) + \frac{1}{6}(\eta_{ac}v'_b - \eta_{bc}v'_a) - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{3}(\eta_{cb}v'_a - \eta_{ca}v'_b)\right) \; ,$$

što korištenjem (2.1), (2.2), (2.6) i (6.75) rezultira s

$$(t'_{cba} - t'_{cab})\eta^{bc}\gamma^a = 0 \; . \tag{6.78}$$

Stoga, korištenjem (6.78) izraz (6.74) postaje

$$-\frac{i}{2}\gamma^\mu(x)K'_{ab\mu}S^{ab} = -i\left(\frac{1}{2}v'_a\gamma^a - \frac{3i}{4}a'_a\gamma^5\gamma^a\right) \; . \tag{6.79}$$

Nadalje, poznato nam je da γ^5 antikomutira sa svim ostalim gama matricama, odnosno vrijedi

$$\{\gamma^5, \gamma^a\} = 0 \; . \tag{6.80}$$

Korištenjem (6.80) izraz (6.79) postaje

$$-\frac{i}{2}\gamma^\mu(x)K'_{ab\mu}S^{ab} = -i\left(\frac{1}{2}v'_a\gamma^a + \frac{3i}{4}a'_a\gamma^a\gamma^5\right) \; . \tag{6.81}$$

Napokon, korištenjem (4.13), (4.23) i (6.81) Diracova jednadžba za $\psi(x)$ (6.67) postaje

$$\left(i\gamma^\mu(x)\left(\partial_\mu + \frac{1}{2}\overset{\bullet}{\omega}_{ab\mu}S^{ab} - \frac{1}{2}v'_\mu - \frac{3i}{4}a'_\mu\gamma^5\right) - m\right)\psi(x) = 0 \; . \tag{6.82}$$

Iz (6.82) uočavamo da se tenzorski dio tenzora torzije ne veže na polje spina $\frac{1}{2}$.

6.4.3 Elektromagnetsko (vektorsko) polje spina 1

Sada ćemo primijeniti princip minimalnog vezanja (6.44) na elektromagnetsko polje spina 1 u vakuumu. Poznato nam je da cijeli elektromagnetizam, kao $U(1)$ baždarnu teoriju, gradimo na elektromagnetskom vektorskom potencijalu A_μ [41]. Tenzor snage elektromagnetskog polja $F_{\mu\nu}$ uz metriku Minkowskog u Kartezijevim koordinatama dan je s

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{6.83}$$

te zadovoljava tzv. Bianchijev identitet

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\rho F_{\mu\nu} + \partial_\nu F_{\rho\mu} = 0 \; . \tag{6.84}$$

Akcija koja odgovara (6.83) glasi

$$\mathcal{S}_{EM} = -\frac{1}{4}\int d^4x F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{6.85}$$

te iz (6.85) dolazimo do jednadžbi gibanja

$$\frac{\partial L_{EM}}{\partial A_\sigma} - \partial_\rho\left(\frac{\partial L_{EM}}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)}\right) = 0 \implies \partial_\mu F^{\mu\nu} = 0 \; . \tag{6.86}$$

Jednadžbe (6.84) i (6.86), čine Maxwellove vakuumske jednadžbe uz metriku Minkowskog u Kartezijevim koordinatama.

Sada ćemo primijeniti princip minimalnog vezanja (6.44), no na elektromagnetskom vektorskom potencijalu ćemo ostaviti grčki indeks, stoga je jedina razlika u odnosu na (6.44) ta da radimo zamjenu

$$\partial_\mu A_\nu \to \ddot{\nabla}_\mu A_\nu = \partial_\mu A_\nu - \left({\Gamma'^\rho}_{\nu\mu} - {K'^\rho}_{\nu\mu}\right) A_\rho \; . \tag{6.87}$$

Korištenjem principa minimalnog vezanja u MTEGR za (6.83) dobivamo

$$F_{\mu\nu} = \ddot{\nabla}_\mu A_\nu - \ddot{\nabla}_\nu A_\mu \; ,$$

što uz korištenje dekompozicije (2.10) uz $L^{\mu}{}_{\nu\rho} = 0$ i simetrije (2.9) postaje

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \ .$$

Dakle, zaključujemo da izraz (6.83) ostaje nepromijenjen pri minimalnoj supstituciji (6.44). Posljedično i identitet (6.84) ostaje nepromijenjen.

Nadalje, nakon minimalne supstitucije akcija (6.85) postaje jednaka

$$\mathcal{S}_{EM} = -\frac{1}{4}\int d^4x H' F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \overset{(6.83)}{=} -\frac{1}{2}\int d^4x H'(\partial_\mu A_\nu)F^{\mu\nu} \ . \tag{6.88}$$

Iz (6.88) dobivamo jednadžbe gibanja

$$\frac{\partial L_{EM}}{\partial A_\sigma} - \partial_\rho\left(\frac{\partial L_{EM}}{\partial(\partial_\rho A_\sigma)}\right) = 0 \implies \partial_\mu(H'F^{\mu\nu}) = 0 \ . \tag{6.89}$$

Izraz (6.89) možemo zapisati i kao

$$\begin{aligned} 0 = \partial_\mu(H'F^{\mu\nu}) = (\partial_\mu H')F^{\mu\nu} + H'\partial_\mu F^{\mu\nu} &\overset{(2.9),(2.10),(6.61)}{=} H'\left(\partial_\mu F^{\mu\nu} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\rho\mu}F^{\mu\nu}\right) \\ &\implies \partial_\mu F^{\mu\nu} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\rho}{}_{\rho\mu}F^{\mu\nu} = 0 \ . \end{aligned} \tag{6.90}$$

S druge strane računamo

$$\ddot{\nabla}_\mu F^{\mu\nu} \overset{(2.10)}{=} \overset{\circ}{\nabla}_\mu F^{\mu\nu} \overset{(2.3),(2.9)}{=} \partial_\mu F^{\mu\nu} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\mu}{}_{\mu\rho}F^{\rho\nu} + \underbrace{\overset{\circ}{\Gamma}{}^{\nu}{}_{\mu\rho}F^{\mu\rho}}_{=0} \ ,$$

gdje je zadnji član s desne strane jednak nuli jer je Christoffelov simbol prema (2.9) simetričan u donjim indeksima, a $F^{\mu\rho}$ je prema (6.83) očito antisimetričan. Stoga, imamo

$$\overset{\circ}{\nabla}_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\mu F^{\mu\nu} + \overset{\circ}{\Gamma}{}^{\mu}{}_{\mu\rho}F^{\rho\nu} \overset{(6.90)}{=} 0 \implies \overset{\circ}{\nabla}_\mu F^{\mu\nu} = 0 \ . \tag{6.91}$$

Dakle, zaključujemo da zbog očuvanja forme izraza (6.84) te zbog (6.91), što je upravo (6.86) u formalizmu OTR, elektromagnetsko polje u MTEGR i dalje zadovoljava $U(1)$ simetriju te zadovoljava jednake relacije kao u OTR, a oba ta rezultata su očekivana zbog već ranije opisane dinamičke ekvivalentnosti između MTEGR i OTR.

7 Modificirane teorije gravitacije

Iako je OTR, a time kako smo se dosad uvjerili i GTEGR, STEGR te MTEGR, kao formalizam za opis gravitacije jedna od eksperimentalno najpotvrđenijih teorija i dalje postoji teorijska i eksperimentalna potreba za proučavanjem tzv. modificiranih teorija gravitacije. Danas su tamna energija i tamna materija vjerojatno najveće motivacije za izučavanje modificiranih teorija gravitacije, također tu je i problem kvantizacije gravitacije. Za detaljnije eksperimentalne motive za proučavanje modificiranih teorija gravitacije preporučuje se pogledati [45, 49].

Mi ćemo ovdje promatrati $f(\mathring{R})$, $f(G)$, $f(Q)$ i $f(T)$ modificirane teorije gravitacije, odnosno promatrat ćemo teorije koje u svojoj akciji umjesto skalara $\mathring{R}$, G, T ili Q imaju neku glatku funkciju od nekog od tih skalara. Takve teorije su očito poopćenja redom OTR, GTEGR, STEGR i MTEGR te ih razvijamo u jednakim pripadnim geometrijama. Ovdje ćemo još jednom radi preglednosti napisati eksplicitno čemu je jednak svaki od navedenih skalara

$$
\begin{aligned}
\mathring{R} &= g^{\mu\nu}\mathring{R}_{\mu\nu} \ , \\
G &= D^{\mu}{}_{\rho\mu}D^{\rho\nu}{}_{\nu} - D^{\mu\rho\nu}D_{\rho\nu\mu} \ , \\
Q &= \frac{1}{4}Q_{\mu\nu\rho}Q^{\mu\nu\rho} - \frac{1}{2}Q_{\mu\nu\rho}Q^{\nu\mu\rho} - \frac{1}{4}Q_{\mu}Q^{\mu} + \frac{1}{2}Q_{\mu}\tilde{Q}^{\mu} \ , \\
T &= \frac{1}{4}T^{\rho\mu\nu}T_{\rho\mu\nu} + \frac{1}{2}T^{\mu\nu\rho}T_{\nu\mu\rho} - T^{\mu}T_{\mu} \ .
\end{aligned}
$$

Derivacije navedenih funkcija po pripadnom skalaru ćemo skraćeno pisati kao $f'(\mathring{R})$, $f'(G)$, $f'(Q)$ i $f'(T)$.

Sada ćemo izvesti jednadžbe polja sa svaku od navedenih modificiranih teorija gravitacije. Također, lako uočavamo da općenito navedene četiri modificirane teorije nisu dinamički ekvivalentne, iako imamo dinamičku ekvivalentnost između OTR, GTEGR, STEGR i MTEGR.

Radi potpunosti ćemo u ovom poglavlju uzeti da vrijedi $c \neq 1$.

7.1 $f(\mathring{R})$ modificirane teorije gravitacije

Jednadžbe polja za $f(\mathring{R})$ modificirane teorije gravitacije izvodimo iz akcije

$$\mathcal{S}_{f(\mathring{R})} = \int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{1}{2\kappa}f(\mathring{R}) + \mathcal{L}_M\right) , \tag{7.1}$$

dakle iz akcije koja je dobivena zamjenom $\mathring{R}$ s $f(\mathring{R})$ u (3.30) te smo također -2Λ uključili u definiciju same funkcije $f(\mathring{R})$.

Dakle, računamo

$$0 = \delta_g\mathcal{S}_{f(\mathring{R})} = \int d^4x\left(\frac{1}{2\kappa}f(\mathring{R})\delta_g\sqrt{-g} + \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\underbrace{\delta_g f(\mathring{R})}_{=f'(\mathring{R})\delta_g\mathring{R}} + \delta_g\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right)\right) , \tag{7.2}$$

jedina razlika u odnosu na račun kojim smo došli do EJP u 3.1.2 je ta da sada moramo uzeti u obzir cijeli izraz za $\delta_g\mathring{R}$ jer uz njega stoji $f'(\mathring{R})$, što u općenitom slučaju nije jednako jedan i time više ne možemo koristiti Gaussov teorem da se riješimo tog člana. Stoga, krećemo od (3.36) te korištenjem (3.33) dobivamo

$$\begin{aligned}
\delta_g\mathring{R} &= -\mathring{R}^{\alpha\beta}\delta_g g_{\alpha\beta} + g^{\alpha\beta}\left(\mathring{\nabla}^\sigma\mathring{\nabla}_\beta\delta_g g_{\alpha\sigma} - \underbrace{\mathring{\nabla}^\sigma\mathring{\nabla}_\sigma}_{\equiv\mathring{\Box}}\delta_g g_{\alpha\beta}\right)\\
\implies \delta_g\mathring{R} &= \left(-\mathring{R}^{\alpha\beta} - g^{\alpha\beta}\mathring{\Box} + \mathring{\nabla}^\alpha\mathring{\nabla}^\beta\right)\delta_g g_{\alpha\beta} ,
\end{aligned} \tag{7.3}$$

ovdje smo kao pokratu uveli d'Alembertijan $\mathring{\Box} = \mathring{\nabla}^\sigma\mathring{\nabla}_\sigma$.

Sada korištenjem (3.31), (3.37) i (7.3) za (7.2) dobivamo

$$\int d^4x\left(\frac{f(\mathring{R})\sqrt{-g}}{4\kappa}g^{\mu\nu} + \frac{f'(\mathring{R})\sqrt{-g}}{2\kappa}\left(-\mathring{R}^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\mathring{\Box} + \mathring{\nabla}^\mu\mathring{\nabla}^\nu\right) + \frac{\sqrt{-g}}{2}\Theta^{\mu\nu}\right)\delta_g g_{\mu\nu} = 0 .$$

Dvostrukim korištenjem (3.8) i Gaussovog teorema dolazimo do

$$\int d^4x\sqrt{-g}\left(\frac{f(\mathring{R})g^{\mu\nu}}{4\kappa} + \frac{\Theta^{\mu\nu}}{2} + \left(-\mathring{R}^{\mu\nu} - g^{\mu\nu}\mathring{\Box} + \mathring{\nabla}^\mu\mathring{\nabla}^\nu\right)\frac{f'(\mathring{R})}{2\kappa}\right)\delta_g g_{\mu\nu} = 0 ,$$

iz čega, uz korištenje (3.25), dobivamo

$$f'(\mathring{R})\mathring{R}_{\mu\nu} - \mathring{\nabla}_\mu\mathring{\nabla}_\nu f'(\mathring{R}) + \left(\mathring{\Box}f'(\mathring{R}) - \frac{f(\mathring{R})}{2}\right)g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\Theta_{\mu\nu} . \tag{7.4}$$

Primijetimo da se jednadžbe polja (7.4) za $f(\mathring{R})$ modificirane teorije gravitacije uz odabir $f(\mathring{R}) = \mathring{R} - 2\Lambda$ svode na EJP dane s (3.38).

Za više detalja o $f(\mathring{R})$ modificiranim teorijama gravitacije preporučuje se pogledati [50, 51].

7.2 $f(G)$ modificirane teorije gravitacije

Da bismo došli do jednadžbi polja za $f(G)$ modificirane teorije gravitacije krećemo od akcije

$$\mathcal{S}_{f(G)} = \int d^4x\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2\kappa}f(G) + \mathcal{L}_M\right) . \tag{7.5}$$

Dakle, računamo

$$0 = \delta\mathcal{S}_{f(G)} = \int d^4x\left(\frac{-1}{2\kappa}f(G)\delta\sqrt{-g} - \frac{\sqrt{-g}}{2\kappa}\underbrace{\delta f(G)}_{=f'(G)\delta G} + \delta\left(\sqrt{-g}\mathcal{L}_M\right)\right) . \tag{7.6}$$

Sada nam je varijacija δ dana s $\delta = \delta_g + \delta_\Gamma$. U prvom članu s desne strane u (7.6) očito imamo $\delta = \delta_g$, u drugom članu ostaje $\delta = \delta_g + \delta_\Gamma$, također sada nećemo pretpostavljati da tenzor hiperimpulsa iščezava pa time i za treći član imamo $\delta = \delta_g + \delta_\Gamma$. Također, nametnut ćemo jednadžbe gibanja (5.4).

Krećemo s računom varijacije skalara G

$$\delta G = \left(\delta D^\mu{}_{\rho\mu}\right) g^{\alpha\nu} D^\rho{}_{\alpha\nu} + D^\mu{}_{\rho\mu}\delta\left(g^{\alpha\nu} D^\rho{}_{\alpha\nu}\right) - \left(\delta D^\mu{}_{\rho\nu}\right) g^{\alpha\nu} D^\rho{}_{\alpha\mu} - D^\mu{}_{\rho\nu}\delta\left(g^{\alpha\nu} D^\rho{}_{\alpha\mu}\right) . \tag{7.7}$$

Za varijaciju tenzora distorziranosti imamo

$$\begin{aligned} \delta D^\mu{}_{\nu\rho} &\overset{(2.18)}{=} (\delta_g + \delta_\Gamma)(\Gamma^\mu{}_{\nu\rho} - \mathring{\Gamma}^\mu{}_{\nu\rho}) = \delta_\Gamma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} - \delta_g \mathring{\Gamma}^\mu{}_{\nu\rho} \\ \overset{(3.33)}{\Longrightarrow}\ \delta D^\mu{}_{\nu\rho} &= \delta_\Gamma \Gamma^\mu{}_{\nu\rho} - \frac{g^{\mu\sigma}}{2}\left(\mathring{\nabla}_\nu \delta_g g_{\sigma\rho} + \mathring{\nabla}_\rho \delta_g g_{\nu\sigma} - \mathring{\nabla}_\sigma \delta_g g_{\nu\rho}\right) . \end{aligned} \tag{7.8}$$

Sada korištenjem (3.32) i (7.8) za (7.7) dobivamo

$$\begin{aligned}\delta G = &\left(\delta_\Gamma \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho}\right)\delta^{\rho}_{\mu} D^{\nu\sigma}{}_{\sigma} - \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} D^{\rho\nu}{}_{\nu} \mathring{\nabla}_{\rho} \delta_g g_{\mu\sigma} - \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} D^{\rho\nu}{}_{\nu} \mathring{\nabla}_{\mu} \delta_g g_{\rho\sigma} + \frac{1}{2} g^{\mu\sigma} D^{\rho\nu}{}_{\nu} \mathring{\nabla}_{\sigma} \delta_g g_{\mu\rho} - \\ &- D^{\sigma}{}_{\rho\sigma} D^{\rho\mu\nu} \delta_g g_{\mu\nu} + g^{\nu\rho} D^{\sigma}{}_{\mu\sigma} \delta_\Gamma \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} - \frac{1}{2} g^{\alpha\nu} D^{\mu\sigma}{}_{\mu} \mathring{\nabla}_{\alpha} \delta_g g_{\sigma\nu} - \frac{1}{2} g^{\alpha\nu} D^{\mu\sigma}{}_{\mu} \mathring{\nabla}_{\nu} \delta_g g_{\alpha\sigma} + \\ &+ \frac{1}{2} g^{\alpha\nu} D^{\mu\sigma}{}_{\mu} \mathring{\nabla}_{\sigma} \delta_g g_{\alpha\nu} - D^{\nu\rho}{}_{\mu} \delta_\Gamma \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} + \frac{1}{2} D^{\rho\nu\sigma} \mathring{\nabla}_{\rho} \delta_g g_{\nu\sigma} + \frac{1}{2} D^{\rho\nu\sigma} \mathring{\nabla}_{\nu} \delta_g g_{\rho\sigma} - \\ &- \frac{1}{2} D^{\rho\nu\sigma} \mathring{\nabla}_{\sigma} \delta_g g_{\nu\rho} + D^{\sigma}{}_{\rho}{}^{\nu} D^{\rho\mu}{}_{\sigma} \delta_g g_{\mu\nu} - D^{\rho}{}_{\mu}{}^{\nu} \delta_\Gamma \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} + \frac{1}{2} D^{\mu\sigma\alpha} \mathring{\nabla}_{\alpha} \delta_g g_{\mu\sigma} + \\ &+ \frac{1}{2} D^{\mu\sigma\alpha} \mathring{\nabla}_{\mu} \delta_g g_{\alpha\sigma} - \frac{1}{2} D^{\mu\sigma\alpha} \mathring{\nabla}_{\sigma} \delta_g g_{\mu\alpha} \ . \end{aligned} \tag{7.9}$$

Uvodimo sljedeće pokrate

$$U^{\mu\nu} = D^{\rho\sigma(\mu} D_{\sigma}{}^{\nu)}{}_{\rho} - D^{\rho(\mu\nu)} D^{\sigma}{}_{\rho\sigma} \ , \tag{7.10}$$

$$V^{\rho\mu\nu} = D^{\rho(\mu\nu)} - D^{\sigma(\mu}{}_{\sigma} g^{\nu)\rho} - D^{[\rho\sigma]}{}_{\sigma} g^{\mu\nu} \ , \tag{7.11}$$

$$Z_{\mu}{}^{\nu\rho} = D^{\nu\sigma}{}_{\sigma} \delta^{\rho}_{\mu} + D^{\sigma}{}_{\mu\sigma} g^{\nu\rho} - D^{\nu\rho}{}_{\mu} - D^{\rho}{}_{\mu}{}^{\nu} \ . \tag{7.12}$$

Korištenjem (7.10), (7.11) i (7.12) za (7.9) dobivamo

$$\delta G = U^{\mu\nu} \delta_g g_{\mu\nu} + V^{\rho\mu\nu} \mathring{\nabla}_{\rho} \delta_g g_{\mu\nu} + Z_{\mu}{}^{\nu\rho} \delta_\Gamma \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} \ . \tag{7.13}$$

Nadalje, uz (3.31), (3.37), (5.3), (7.13), (3.8) i Gaussov teorem za varijaciju (7.6) imamo

$$\begin{aligned} 0 = \int d^4x \sqrt{-g} \Bigg(& \Bigg(\underbrace{\frac{1}{2\kappa} \left(-f'(G) U^{\mu\nu} - \frac{f(G)}{2} g^{\mu\nu} + \mathring{\nabla}_{\rho} (f(G) V^{\rho\mu\nu}) \right)}_{=-\frac{1}{2} W^{\mu\nu}} + \frac{1}{2} \Theta^{\mu\nu} \Bigg) \delta_g g_{\mu\nu} + \\ & + \Bigg(\underbrace{-\frac{1}{2\kappa} f'(G) Z_{\mu}{}^{\nu\rho}}_{=-Y_{\mu}{}^{\nu\rho}} + H_{\mu}{}^{\nu\rho} \Bigg) \delta_\Gamma \Gamma^{\mu}{}_{\nu\rho} \Bigg) \ . \end{aligned} \tag{7.14}$$

Dakle, iz (7.14) dobivamo

$$W_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu} \implies f'(G) U_{\mu\nu} - \mathring{\nabla}_{\rho} (f'(G) V^{\rho}{}_{\mu\nu}) + \frac{f(G)}{2} g_{\mu\nu} = \kappa \Theta_{\mu\nu} \tag{7.15}$$

te korištenjem (5.39) uz neiščezavajući tenzor hiperimpulsa

$$\nabla_{\rho} Y_{\mu}{}^{\nu\rho} - D^{\omega}{}_{\rho\omega} Y_{\mu}{}^{\nu\rho} = \nabla_{\rho} H_{\mu}{}^{\nu\rho} - D^{\omega}{}_{\rho\omega} H_{\mu}{}^{\nu\rho} \ , \tag{7.16}$$

imamo

$$\nabla_\rho(f'(G)Z_\mu{}^{\nu\rho}) - f'(G)D^\omega{}_{\rho\omega}Z_\mu{}^{\nu\rho} = 2\kappa\left(\nabla_\rho H_\mu{}^{\nu\rho} - D^\omega{}_{\rho\omega}H_\mu{}^{\nu\rho}\right) \ . \tag{7.17}$$

Za početak, jednadžbu (7.15) ćemo zapisati u povoljnijoj formi, za to nam je potreban izraz iz GTEGR [37]

$$U_{\mu\nu} - \mathring{\nabla}_\rho V^\rho{}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}Gg_{\mu\nu} = \mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathring{R}g_{\mu\nu} \ . \tag{7.18}$$

Sada korištenjem (7.18) i (3.25) za (7.15) dolazimo do

$$\begin{aligned} f'(G)\left(\mathring{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\mathring{R}g_{\mu\nu}\right) - D^\rho{}_{(\mu\nu)}\mathring{\nabla}_\rho f'(G) + (\mathring{\nabla}_{(\mu}f'(G))D^\sigma{}_{\nu)\sigma} + D^{[\rho\sigma]}{}_\sigma g_{\mu\nu}\mathring{\nabla}_\rho f'(G) + \\ + \frac{1}{2}(f(G) - Gf'(G))g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\Theta^{\mu\nu} \ , \end{aligned} \tag{7.19}$$

gdje je G s desne strane u (7.19) naravno Newtonova konstanta, a s lijeve ranije uvedeni skalar G.

Također, izraz (7.17) možemo pretvoriti u pogodniju formu

$$f'(G)\left(\nabla_\rho Z_\mu{}^{\nu\rho} - D^\sigma{}_{\rho\sigma}Z_\mu{}^{\nu\rho}\right) + Z_\mu{}^{\nu\rho}\nabla_\rho f'(G) = 2\kappa\left(\nabla_\rho H_\mu{}^{\nu\rho} - D^\sigma{}_{\rho\sigma}H_\mu{}^{\nu\rho}\right) \ .$$

Korištenjem (7.12), (2.21) i teleparalelnog uvjeta $R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = 0$ dobivamo

$$\nabla_\rho Z_\mu{}^{\nu\rho} - D^\sigma{}_{\rho\sigma}Z_\mu{}^{\nu\rho} = 0 \ . \tag{7.20}$$

Stoga, uz (7.20) i (3.25) imamo

$$Z_\mu{}^{\nu\rho}\nabla_\rho f'(G) = 2\kappa\left(\nabla_\rho H_\mu{}^{\nu\rho} - D^\sigma{}_{\rho\sigma}H_\mu{}^{\nu\rho}\right) \ ,$$

što uz (7.12) postaje

$$\begin{aligned} D^{\nu\rho}{}_\rho\nabla_\mu f'(G) + D^\sigma{}_{\mu\sigma}g^{\nu\rho}\nabla_\rho f'(G) - D^{\nu\rho}{}_\mu\nabla_\rho f'(G) - D^\rho{}_\mu{}^\nu\nabla_\rho f'(G) \\ = \frac{16\pi G}{c^4}\left(\nabla_\rho H_\mu{}^{\nu\rho} - D^\omega{}_{\rho\omega}H_\mu{}^{\nu\rho}\right) \ , \end{aligned} \tag{7.21}$$

gdje je G s desne strane naravno Newtonova konstanta, a s lijeve ranije uvedeni skalar G.

Dakle, zaključujemo da (7.19) i (7.21) čine jednadžbe polja $f(G)$ modificirane teorije gravitacije uz pretpostavku neiščezavajućeg tenzora hiperimpulsa $H_\mu{}^{\nu\rho}$ te uz nametnute jednadžbe gibanja $\Psi_i = 0$. Izraz (7.19) određuje dinamiku metrike, a (7.21) dinamiku afine koneksije.

7.3 $f(Q)$ modificirane teorije gravitacije

Sada izvodimo jednadžbe polja za $f(Q)$ modificirane teorije gravitacije iz akcije

$$\mathcal{S}_{f(Q)} = \int d^4x\sqrt{-g}\left(-\frac{1}{2\kappa}f(Q) + \mathcal{L}_M\right) . \tag{7.22}$$

Ovdje također nećemo pretpostaviti da tenzor hiperimpulsa iščezava te ćemo nametnuti jednadžbe gibanja (5.4). Za pokrate (7.10), (7.11) i (7.12) sada imamo

$$U^{\mu\nu} = L^{\rho\sigma(\mu}L_\sigma{}^{\nu)}{}_\rho - L^{\rho(\mu\nu)}L^\sigma{}_{\rho\sigma}$$

$$\overset{(2.12)}{\Longrightarrow} U^{\mu\nu} = \frac{1}{4}Q^{\mu\rho\sigma}Q^\nu{}_{\rho\sigma} + \frac{1}{4}\left(Q^{\rho\mu\nu} - 2Q^{(\mu\nu)\rho}\right)Q_{\rho\sigma}{}^\sigma - Q^{\rho\sigma\mu}Q_{[\rho\sigma]}{}^\nu , \tag{7.23}$$

$$V^{\rho\mu\nu} = L^{\rho(\mu\nu)} - L^{\sigma(\mu}{}_\sigma g^{\nu)\rho} - L^{[\rho\sigma]}{}_\sigma g^{\mu\nu}$$

$$\overset{(2.12)}{\Longrightarrow} V^{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2}Q^{\rho\mu\nu} - Q^{(\mu\nu)\rho} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\left(Q^{\rho\sigma}{}_\sigma - Q_\sigma{}^{\sigma\rho}\right) + \frac{1}{2}g^{\rho(\mu}Q^{\nu)\sigma}{}_\sigma \equiv P^{\rho\mu\nu} , \tag{7.24}$$

$$Z_\mu{}^{\nu\rho} = L^{\nu\sigma}{}_\sigma\delta^\rho_\mu + L^\sigma{}_{\mu\sigma}g^{\nu\rho} - L^{\nu\rho}{}_\mu - L^\rho{}_\mu{}^\nu$$

$$\overset{(2.12)}{\Longrightarrow} Z_\mu{}^{(\nu\rho)} = Q_\mu{}^{\nu\rho} - \frac{1}{2}g^{\nu\rho}Q_{\mu\sigma}{}^\sigma + \frac{1}{2}\delta^{(\nu}_\mu Q^{\rho)\sigma}{}_\sigma - Q_\sigma{}^{\sigma(\nu}\delta^{\rho)}_\mu = -2P^{(\nu\rho)}{}_\mu . \tag{7.25}$$

Također, kako sada radimo s geometrijom u kojoj iščezavaju i tenzor torzije i Riemannov tenzor zakrivljenosti, to znači da komutator kovarijantnih derivacija iščezava, odnosno imamo

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] = 0 . \tag{7.26}$$

Računi kojima dolazimo do jednadžbi koje određuju dinamiku metrike, odnosno afine koneksije za $f(Q)$ modificirane teorije gravitacije su očito analogni onima iz 7.2 za $f(G)$ modificirane teorije gravitacije.

Krenut ćemo od jednadžbe za dinamiku afine koneksije. Iz (7.14) korištenjem

(5.56) imamo

$$\tilde{Y}_\mu{}^{(\nu\rho)} = \frac{1}{2\kappa} f'(Q) \underbrace{\tilde{Z}_\mu{}^{(\nu\rho)}}_{=\sqrt{-g}Z_\mu{}^{(\nu\rho)}} \overset{(7.25)}{=} -\frac{1}{\kappa} f'(Q) \underbrace{\tilde{P}^{(\nu\rho)}{}_\mu}_{=\sqrt{-g}P^{(\nu\rho)}{}_\mu} . \tag{7.27}$$

Sada iz (5.57) uz neiščezavajući tenzor hiperimpulsa korištenjem (7.27) te (3.25) dobivamo

$$-\nabla_\nu \nabla_\rho \left(f'(Q) \tilde{P}^{(\nu\rho)}{}_\mu \right) = \frac{8\pi G}{c^4} \nabla_\nu \nabla_\rho \tilde{H}_\mu{}^{(\nu\rho)} ,$$

što uz (7.26) daje

$$-\nabla_\nu \nabla_\rho \left(f'(Q) \tilde{P}^{\nu\rho}{}_\mu \right) = \frac{8\pi G}{c^4} \nabla_\nu \nabla_\rho \tilde{H}_\mu{}^{\nu\rho} . \tag{7.28}$$

Sada se okrećemo dinamici metrike. Krećemo od izraza (7.15) uz naravno zamjenu $f(G)$ s $f(Q)$ te dobivamo

$$\begin{aligned} & f'(Q) U_{\mu\nu} - \mathring{\nabla}_\rho (f'(Q) V^\rho{}_{\mu\nu}) + \frac{f(Q)}{2} g_{\mu\nu} = \kappa \Theta_{\mu\nu} \\ \implies \; & f'(Q) U^\mu{}_\nu - \mathring{\nabla}_\rho (f'(Q) V^{\rho\mu}{}_\nu) + \frac{f(Q)}{2} \delta^\mu_\nu = \kappa \Theta^\mu{}_\nu . \end{aligned}$$

Korištenjem (A.5) imamo

$$\mathring{\nabla}_\mu \sqrt{-g} = 0 . \tag{7.29}$$

Stoga jednadžbu koja određuje dinamiku metrike zbog (7.29) možemo zapisati kao

$$f'(Q) U^\mu{}_\nu - \frac{1}{\sqrt{-g}} \mathring{\nabla}_\rho (\sqrt{-g} f'(Q) V^{\rho\mu}{}_\nu) + \frac{f(Q)}{2} \delta^\mu_\nu = \kappa \Theta^\mu{}_\nu . \tag{7.30}$$

Sada se fokusiramo na drugi član s desne strane izraza (7.30), koji uz (2.3) i (7.29) postaje

$$\begin{aligned} \mathring{\nabla}_\rho (\sqrt{-g} f'(Q) V^{\rho\mu}{}_\nu) =& \partial_\rho \left(\sqrt{-g} f'(Q) V^{\rho\mu}{}_\nu \right) + \mathring{\Gamma}^\rho{}_{\alpha\rho} V^{\alpha\mu}{}_\nu \sqrt{-g} f'(Q) + \\ & + \mathring{\Gamma}^\mu{}_{\alpha\rho} V^{\rho\alpha}{}_\nu \sqrt{-g} f'(Q) - \mathring{\Gamma}^\alpha{}_{\nu\rho} V^{\rho\mu}{}_\alpha \sqrt{-g} f'(Q) . \end{aligned}$$

Nadalje, korištenjem (2.3), (2.10) uz $K^{\mu}{}_{\nu\rho} = 0$ i (A.4) dobivamo

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\nabla}_{\rho}(\sqrt{-g}f'(Q)V^{\rho\mu}{}_{\nu}) =&\nabla_{\rho}(\sqrt{-g}f'(Q)V^{\rho\mu}{}_{\nu}) + \sqrt{-g}f'(Q)\left(L^{\sigma}{}_{\sigma\rho}V^{\rho\mu}{}_{\nu} - L^{\rho}{}_{\sigma\rho}V^{\sigma\mu}{}_{\nu} -\right.\\ &\left.-L^{\mu}{}_{\sigma\rho}V^{\rho\sigma}{}_{\nu} + L^{\sigma}{}_{\nu\rho}V^{\rho\mu}{}_{\sigma}\right) \ . \end{aligned} \tag{7.31}$$

Korištenjem (7.31) i (7.24) izraz (7.30) postaje

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\sqrt{-g}}\nabla_{\rho}(\sqrt{-g}f'(Q)P^{\rho\mu}{}_{\nu}) + \frac{f(G)}{2}\delta^{\mu}_{\nu} + f'(Q)\left(U^{\mu}{}_{\nu} - L^{\sigma}{}_{\sigma\rho}V^{\rho\mu}{}_{\nu} + L^{\rho}{}_{\sigma\rho}V^{\sigma\mu}{}_{\nu} +\right.\\ \left.+L^{\mu}{}_{\sigma\rho}V^{\rho\sigma}{}_{\nu} - L^{\sigma}{}_{\nu\rho}V^{\rho\mu}{}_{\sigma}\right) = \kappa\Theta^{\mu}{}_{\nu} \ . \end{aligned} \tag{7.32}$$

Sada se fokusiramo na treći član s lijeve strane izraza (7.32). Koji korištenjem (2.12) postaje jednak

$$\begin{aligned}U^{\mu}{}_{\nu} - L^{\sigma}{}_{\sigma\rho}V^{\rho\mu}{}_{\nu} + L^{\rho}{}_{\sigma\rho}V^{\sigma\mu}{}_{\nu} + L^{\mu}{}_{\sigma\rho}V^{\rho\sigma}{}_{\nu} - L^{\sigma}{}_{\nu\rho}V^{\rho\mu}{}_{\sigma} = \frac{1}{2}\left(Q^{\mu[\rho}{}_{\rho}Q_{\nu\sigma}{}^{\sigma]} -\right.\\ \left.-Q_{(\nu}{}^{\mu\rho}Q_{\rho)\sigma}{}^{\sigma} + Q^{\rho\mu\sigma}Q_{\nu\rho\sigma}\right) \overset{(7.25)}{=} -\frac{1}{2}P^{\mu\rho\sigma}Q_{\nu\rho\sigma}\\ \implies U^{\mu}{}_{\nu} - L^{\sigma}{}_{\sigma\rho}V^{\rho\mu}{}_{\nu} + L^{\rho}{}_{\sigma\rho}V^{\sigma\mu}{}_{\nu} + L^{\mu}{}_{\sigma\rho}V^{\rho\sigma}{}_{\nu} - L^{\sigma}{}_{\nu\rho}V^{\rho\mu}{}_{\sigma} = -\frac{1}{2}P^{\mu\rho\sigma}Q_{\nu\rho\sigma} \ . \end{aligned} \tag{7.33}$$

Stoga, korištenjem (3.25) i (7.33) za (7.30) dobivamo

$$-\frac{1}{\sqrt{-g}}\nabla_{\rho}(\sqrt{-g}f'(Q)P^{\rho\mu}{}_{\nu}) - \frac{f'(Q)}{2}P^{\mu\rho\sigma}Q_{\nu\rho\sigma} + \frac{f(Q)}{2}\delta^{\mu}_{\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\Theta^{\mu}{}_{\nu} \ . \tag{7.34}$$

Dakle, zaključujemo da (7.34) određuje dinamiku metrike, a (7.28) dinamiku afine koneksije u $f(Q)$ modificiranim teorijama gravitacije, uz pretpostavku neiščezavajućeg tenzora hiperimplusa i uz nametnute jednadžbe gibanja $\Psi_i = 0$. Za više detalja o $f(Q)$ modificiranim teorijama gravitacije preporučuje se pogledati [52, 53].

7.4 $f(T)$ modificirane teorije gravitacije

Jednadžbe polja za $f(T)$ modificirane teorije gravitacije se u literaturi izvode i pomoću metričkog i pomoću tetradnog formalizma, naravno kako smo se dosad uvjerili oba pristupa su ekvivalentna. Mi ćemo ih ovdje izvesti pomoću metričkog formalizma, koristeći metodu ograničene varijacije. Kao i za ostale teleparalelne modificirane teorije koje smo dosad razmatrali nećemo pretpostavljati iščezavanje tenzora hiperimpulsa te ćemo nametnuti jednadžbe gibanja $\Psi_i = 0$. Prvo moramo izvesti jednadžbe polja za općeniti slučaj metričke teleparalelne geometrije.

Dakle, potrebna nam je varijacija tenzora nemetričnosti

$$\delta Q_{\mu\nu\rho} = (\delta_g + \delta_\Gamma) Q_{\mu\nu\rho} = \nabla_\mu \delta_g g_{\nu\rho} - g_{\sigma\rho}\delta_\Gamma \Gamma^\sigma{}_{\nu\mu} - g_{\nu\sigma}\delta_\Gamma \Gamma^\sigma{}_{\rho\mu} \ ,$$

koja korištenjem uvjeta iščezavanja varijacije Riemannovog tenzora zakrivljenosti (5.44) i uz $Q_{\mu\nu\rho} = 0$ postaje

$$\delta Q_{\mu\nu\rho} = \nabla_\mu \left(\delta_g g_{\nu\rho} - 2x_{(\nu\rho)}\right) \ . \tag{7.35}$$

Dakle, (7.35) iščezava uz uvjet

$$\delta_g g_{\mu\nu} = 2x_{(\mu\nu)} \ . \tag{7.36}$$

Korištenjem (5.2), (5.5) uz nametnute jednadžbe gibanja $\Psi_i = 0$ uz svojstva metričke teleparalelne geometrije te uz (3.8) i Gaussov teorem za ukupnu varijaciju akcije dobivamo

$$\delta \mathcal{S} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(\Theta^{(\mu\nu)} - \nabla_\rho H^{\mu\nu\rho} + H^{\mu\nu\rho} T^\tau{}_{\tau\rho} - W^{(\mu\nu)} + \nabla_\rho Y^{\mu\nu\rho} - Y^{\mu\nu\rho} T^\tau{}_{\tau\rho}\right) x_{\mu\nu} \ ,$$

iz čega uz simetriju tenzora $\Theta^{\mu\nu}$ i $W^{\mu\nu}$ te uz uvjet ekstremizacije akcije slijedi

$$W^{\mu\nu} - \nabla_\rho Y^{\mu\nu\rho} + Y^{\mu\nu\rho} T^\tau{}_{\tau\rho} = \Theta^{\mu\nu} - \nabla_\rho H^{\mu\nu\rho} + H^{\mu\nu\rho} T^\tau{}_{\tau\rho} \ . \tag{7.37}$$

Dakle, u metričkom formalizmu se jednadžbe gibanja u općenitoj metričkoj teleparalelnoj gravitaciji svode na jednu jednadžbu (7.37).

Sada možemo doći do jednadžbi polja za $f(T)$ modificirane teorije gravitacije u metričkom formalizmu. Krećemo od akcije

$$\mathcal{S}_{f(T)} = \int d^4x \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2\kappa} f(T) + \mathcal{L}_M\right) \ . \tag{7.38}$$

Varijacijom akcije (7.38) uz pokrate (7.10), (7.11) i (7.12) za slučaj metričke teleparalelne geometrije dobivamo

$$W^{\mu\nu} - \nabla_\rho Y^{\mu\nu\rho} + Y^{\mu\nu\rho} T^\tau{}_{\tau\rho} = \frac{1}{\kappa}\Bigg(f'(T) U^{\mu\nu} - \overset{\circ}{\nabla}_\rho (f'(T) V^{\rho\mu\nu}) + \frac{f(T)}{2} g^{\mu\nu} - \\ - \frac{1}{2}\nabla_\rho (f'(T) Z^{\mu\nu\rho}) + \frac{f'(T)}{2} Z^{\mu\nu\rho} T^\tau{}_{\tau\rho} \Bigg) \ . \tag{7.39}$$

Računat ćemo dio po dio desne strane izraza (7.39). Za početak, korištenjem (2.21) uz $L^\mu{}_{\nu\rho} = 0$ imamo

$$-\frac{1}{2}\nabla_\rho (f'(T) Z^{\mu\nu\rho}) + \frac{f'(T)}{2} Z^{\mu\nu\rho} T^\tau{}_{\tau\rho} = -\frac{1}{2}\Big(\overset{\circ}{\nabla}_\rho (f'(T) Z^{\mu\nu\rho}) + \\ + f'(T)\left(K^\mu{}_{\alpha\rho} Z^{\alpha\nu\rho} + K^\nu{}_{\alpha\rho} Z^{\mu\alpha\rho}\right)\Big) \ . \tag{7.40}$$

Korištenjem (7.40) izraz (7.39) postaje jednak

$$W^{\mu\nu} - \nabla_\rho Y^{\mu\nu\rho} + Y^{\mu\nu\rho} T^\tau{}_{\tau\rho} = \frac{1}{\kappa}\Bigg(f'(T)\Bigg(U^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(K^\mu{}_{\alpha\rho} Z^{\alpha\nu\rho} + K^\nu{}_{\alpha\rho} Z^{\mu\alpha\rho}\right)\Bigg) - \\ - \overset{\circ}{\nabla}_\rho \Bigg(f'(T)\Bigg(V^{\rho\mu\nu} + \frac{1}{2} Z^{\mu\nu\rho}\Bigg)\Bigg) + \frac{f(T)}{2} g^{\mu\nu}\Bigg) \ . \tag{7.41}$$

Za prvi član s lijeve strane izraza (7.41) korištenjem (7.10) uz $L^\mu{}_{\nu\rho} = 0$ i uz korištenje svojstava tenzora kontorzije dobivamo

$$U^{\mu\nu} - \frac{1}{2}\left(K^\mu{}_{\alpha\rho} Z^{\alpha\nu\rho} + K^\nu{}_{\alpha\rho} Z^{\mu\alpha\rho}\right) = 2K^{\nu\rho[\sigma} K_{\rho\sigma}{}^{\mu]} \overset{(2.17)}{=} S^{\rho\sigma\nu} K_{\rho\sigma}{}^\mu \ . \tag{7.42}$$

Nadalje, za drugi član s desne strane izraza (7.41) uz korištenje pokrata (7.11) i (7.12) za slučaj metričke teleparalelne geometrije i uz svojstva tenzora kontorzije dobivamo

$$V^{\rho\mu\nu} + \frac{1}{2} Z^{\mu\nu\rho} = 2T_\sigma{}^{\sigma[\rho} g^{\nu]\mu} + T^{[\nu\rho]\mu} - \frac{1}{2} T^{\mu\nu\rho} \overset{(2.17)}{=} -S^{\mu\nu\rho} \ . \tag{7.43}$$

Sada napokon vraćanjem (7.42) i (7.43) u (7.41) te zatim usporedbom s izrazom (7.37) dobivamo

$$\overset{\circ}{\nabla}_\rho (f'(T) S^{\mu\nu\rho}) + f'(T) S^{\rho\sigma\nu} K_{\rho\sigma}{}^\mu + \frac{f(T)}{2} g^{\mu\nu} = \kappa\left(\Theta^{\mu\nu} - \nabla_\rho H^{\mu\nu\rho} + H^{\mu\nu\rho} T^\tau{}_{\tau\rho}\right) \ ,$$

što uz (3.25) postaje jednako

$$\overset{\circ}{\nabla}_\rho(f'(T)S^{\mu\nu\rho}) + f'(T)S^{\rho\sigma\nu}K_{\rho\sigma}{}^{\mu} + \frac{f(T)}{2}g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(\Theta^{\mu\nu} - \nabla_\rho H^{\mu\nu\rho} + H^{\mu\nu\rho}T^{\tau}{}_{\tau\rho}\right) \ . \tag{7.44}$$

Zaključujemo da izraz (7.44) čini jednadžbe polja za $f(T)$ modificirane teorije gravitacije u metričkom formalizmu uz pretpostavku neiščezavajućeg tenzora hiperimpulsa te uz nametnute jednadžbe gibanja $\Psi_i = 0$.

Za podrobniju analizu $f(T)$ modificiranih teorija gravitacije preporučuje se pogledati [54].

8 Rasprava i zaključak

Kroz ovaj rad smo promatrali posljedice popuštanja zahtjeva da jedino Riemannov tenzor zakrivljenosti ne iščezava pri formaliziranju gravitacije u okvirima diferencijalne geometrije. Uvjerili smo se da u odnosu na tenzor torzije, tenzor nemetričnosti i Riemannov tenzor zakrivljenosti imamo nekoliko raznih geometrija, koje su dane na Slici 2.2.

Tema kojom smo se ovdje bavili su teleparalelne geometrije koje su sve karakterizirane iščezavanjem Riemannovog tenzora zakrivljenosti. Pokazali smo da postoje dva ekvivalentna formalizma kojima možemo tretirati potrebnu diferencijalnu geometriju za formaliziranje gravitacije. To su, kao što smo vidjeli, metrički formalizam u kojemu metrika i afina koneksija igraju uloge dinamičkih varijabli i tetradni formalizam u kojemu tetrada i spinska koneksija igraju uloge dinamičkih varijabli. Pri izvodu jednadžbi polja za opću, simetričnu i metričku teleparalelnu gravitaciju smo se uvjerili da svaka od njih posjeduje svoj specijalni slučaj, redom GTEGR, STEGR i MTEGR. Svaki od tih specijalnih slučajeva daje jednaku dinamiku kao opća teorija relativnosti, odnosno zadovoljava jednake jednadžbe polja. No pokazali smo da je moguće konstruirati parametarske (s parametrima različitim od onih u GTEGR, STEGR i MTEGR) teorije, koje nose skupni naziv nove opća teorija relativnosti, a daju dinamiku općenito različitu od dinamike OTR.

Također, iskonstruirali smo transformaciju koja nam barem klasično, po uzoru na ostale transformacije poznate iz standardnog modela, omogućuje tretman gravitacije kao baždarne teorije. Specifičnost te transformacije je ta da nemamo kao u ostalim poznatim baždarnim teorijama nekakav interni prostor u kojemu se događaju baždarne transformacije, već ulogu internog prostora igra tangentni prostor kojeg definiramo u odnosu na svaku točku promatrane glatke mnogostrukosti te iz toga razloga ulogu baždarne grupe igra grupa translacija. Iskonstruirali smo i princip minimalnog vezanja, ekvivalentan onom iz OTR, te ga primijenili na tri najvažnija polja u fizici, ona spina 0, $\frac{1}{2}$ i 1. Napomenimo da se u literaturi mogu pronaći i pokušaji postavljanja STEGR u okvire baždarnih teorija [55].

Nadalje, promatrali smo modificirane teorije gravitacije za svaku od četiri kroz rad korištene geometrije, odnosno teleparalelne i Riemannovu geometriju. Uvjerili smo se da iako GTEGR, STEGR, MTEGR i OTR daju ekvivalentnu dinamiku, to nije slučaj za njihove pripadne modificirane teorije. Napomenimo također da se u literaturi istražuju i modificirane teorije gravitacije funkcija koje ovise o više veličina, a ne samo o $\overset{\circ}{R}$, G, Q ili T [13]. Modificirane teorije gravitacije danas su aktivan predmet istraživanja u kontekstu kozmologije, naročito u područjima vezanim uz tamnu energiju i tamnu materiju [56].

Ovdje nismo ulazili u hamiltonijansku analizu teleparalelne gravitacije, koja je svojevrstan prvi korak u pokušajima kvantizacije. U [57] se može pronaći primjer toga za MTEGR slučaj.

Ono što možemo zaključiti iz ovog rada je to da teleparalelne geometrije, odnosno gravitacije, otvaraju potencijalna rješenja za probleme koji se možda ne mogu riješiti u okviru Riemannove geometrije, odnosno u okviru formalizma OTR. Ovdje smo razvili sve potrebne računske alate i došli do najvažnijih rezultata vezanih uz teleparalelne gravitacije. Time, kako je već rečeno u Uvodu, ovaj rad služi kao svojevrstan uvod u formalizam teleparalelne gravitacije.

Dodaci

A Jacobijev identitet

Neka je M kvadratna matrica i neka je $N = \ln(M) \implies M = e^N$. Također, znamo da vrijedi relacija [58]

$$\det\left(e^N\right) = e^{Tr(N)}\ . \tag{A.1}$$

Stoga, korištenjem uvedenih relacija i (A.1) imamo

$$\begin{aligned}\partial_\mu(\det(M)) &= \partial_\mu\left(\det\left(e^N\right)\right) = \partial_\mu\left(e^{Tr(N)}\right) = e^{Tr(N)}\partial_\mu Tr(N) = e^{Tr(N)}Tr(\partial_\mu N)\\ &= \det\left(e^N\right)Tr(\partial_\mu \ln(M)) = \det(M)Tr(M^{-1}\partial_\mu M)\\ &\implies \partial_\mu(\det(M)) = \det(M)Tr(M^{-1}\partial_\mu M)\ .\end{aligned} \tag{A.2}$$

Ovdje također dajemo izraz za kovarijantnu derivaciju korijena od negativne determinante metrike. Za početak kako je $\sqrt{-g}$ skalarna gustoća težine 1, za nju vrijedi (uz bilo koju koneksiju) [59]

$$\nabla_\mu\sqrt{-g} = \partial_\mu\sqrt{-g} - \Gamma^\alpha{}_{\alpha\mu}\sqrt{-g}\ . \tag{A.3}$$

Nadalje, iz (A.2) imamo

$$\begin{aligned}\partial_\mu\sqrt{-g} &= \frac{1}{2}\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\mu g_{\alpha\beta} \overset{(3.7)}{=} \sqrt{-g}\mathring{\Gamma}^\alpha{}_{\alpha\mu} \implies \partial_\mu\sqrt{-g} - \mathring{\Gamma}^\alpha{}_{\alpha\mu}\sqrt{-g} = 0\\ &\overset{(A.3)}{\implies} \mathring{\nabla}_\mu\sqrt{-g} = 0\ .\end{aligned} \tag{A.4}$$

Sada iz (A.3) uz korištenje dekompozicije (2.10) imamo

$$\begin{aligned}\nabla_\mu\sqrt{-g} &= \underbrace{\partial_\mu\sqrt{-g} - \mathring{\Gamma}^\alpha{}_{\alpha\mu}\sqrt{-g}}_{\overset{(A.3)}{=}\mathring{\nabla}_\mu\sqrt{-g}\overset{(A.4)}{=}0} - \underbrace{K^\alpha{}_{\alpha\mu}}_{\overset{(2.13)}{=}0}\sqrt{-g} - \underbrace{L^\alpha{}_{\alpha\mu}}_{\overset{(2.14)}{=}L^\alpha{}_{\mu\alpha}}\sqrt{-g}\\ &\overset{(2.12)}{=} -\frac{1}{2}\left(Q^\alpha{}_{\mu\alpha} - Q_\mu{}^\alpha{}_\alpha - Q_\alpha{}^\alpha{}_\mu\right)\sqrt{-g} \overset{(2.7)}{=} \frac{1}{2}\sqrt{-g}Q_{\mu\alpha}{}^\alpha\\ &\implies \nabla_\mu\sqrt{-g} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}Q_{\mu\alpha}{}^\alpha.\end{aligned} \tag{A.5}$$

B Temeljne varijacije po tetradi

Ovdje dajemo temeljne varijacije po tetradi pomoću kojih računamo sve ostale komplicirane varijacije. Notacija koju koristimo za varijaciju po tetradi je δ_e.

Za početak, imamo

$$\delta_e \eta_{ab} = 0 \ , \tag{B.1}$$

jer je po definiciji $\eta_{ab} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Iz Jacobijevog identiteta (A.2) odmah slijedi izraz za varijaciju determinante tetrade

$$\delta_e e = e e_a{}^\mu \delta_e e^a{}_\mu \ . \tag{B.2}$$

Nadalje, računamo varijaciju inverzne tetrade

$$e^a{}_\mu e_a{}^\nu = \delta^\nu_\mu \implies e_a{}^\nu \delta_e e^a{}_\mu + e^a{}_\mu \delta_e e_a{}^\nu = 0 \overset{(4.6)}{\implies} \delta_e e_b{}^\nu = -e_a{}^\nu e_b{}^\mu \delta_e e^a{}_\mu \ . \tag{B.3}$$

Za varijaciju proizvoljne metrike imamo

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} = e^a{}_\alpha e^b{}_\beta \eta_{ab} &\overset{(B.1)}{\implies} \delta_e g_{ab} = e^b{}_\beta \eta_{ab} \delta_e e^a{}_\alpha + e^b{}_\alpha \underbrace{\eta_{ba}}_{\overset{(2.1)}{=}\eta_{ab}} \delta_e e^a{}_\beta \\ &\implies \delta_e g_{\alpha\beta} = \eta_{ab} \left(e^b{}_\beta \delta_e e^a{}_\alpha + e^b{}_\alpha \delta_e e^a{}_\beta \right) \ . \end{aligned} \tag{B.4}$$

Također, računamo varijaciju inverza proizvoljne metrike

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta^\gamma_\alpha &\implies g^{\beta\gamma} \delta_e g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} \delta_e g^{\beta\gamma} = 0 \\ &\overset{(2.2),(4.7),(B.1)}{\implies} \delta_e g^{\sigma\gamma} = -g^{\beta\gamma} g^{\sigma\alpha} \eta_{ab} e^b{}_\beta \delta_e e^a{}_\alpha - g^{\alpha\gamma} g^{\sigma\beta} \eta_{ab} e^b{}_\beta \delta_e e^a{}_\alpha \\ &\implies \delta_e g^{\sigma\gamma} = -\left(g^{\alpha\sigma} e_a{}^\gamma + g^{\alpha\gamma} e_a{}^\sigma \right) \delta_e e^a{}_\alpha \\ &\implies \delta_e g^{\alpha\beta} = -\left(g^{\mu\beta} e_a{}^\alpha + g^{\mu\alpha} e_a{}^\beta \right) \delta_e e^a{}_\mu \ . \end{aligned} \tag{B.5}$$

C Poincaréova algebra

Poincaréova grupa je deseterodimenzionalna nekompaktna Liejeva grupa izometrija (nakon djelovanja izometrije metrika se ne mijenja) prostorvremena Minkowskog. Poincaréova grupa koja nas najviše zanima u fizici je semidirektni produkt grupe translacija i prave $(\det\Lambda = 1)$ ortokrone $(\Lambda^0{}_0 \geq 1)$ Lorentzove grupe $SO(1,3)^{\uparrow}_{+}$, odnosno $ISO^{\uparrow}_{+}(1,3) = \mathbb{R}^{1,3} \rtimes SO(1,3)^{\uparrow}_{+}$ [32]. Poincaréova algebra je Liejeva algebra koja odgovara Poincaréovoj grupi. Drugim riječima, zbog specifičnog svojstva Liejevih algebri eksponenciranjem generatora Poincaréove algebre dobivamo sve elemente Poincaréove grupe. Poincaréova algebra glasi

$$\begin{aligned}
&[P_a, P_b] = 0 \ , \\
&[S_{ab}, P_c] = \eta_{bc}P_a - \eta_{ac}P_b \ , \\
&[S_{ab}, S_{cd}] = \eta_{bc}S_{ad} + \eta_{ad}S_{bc} - \eta_{ac}S_{bd} - \eta_{bd}S_{ac} \ .
\end{aligned} \tag{C.1}$$

U (C.1) P_a su generatori translacija dani s

$$P_a = \partial_a \ , \tag{C.2}$$

dok su S_{ab} generatori Lorentzove algebre koji su antisimetrični

$$S_{ab} = -S_{ba} \ . \tag{C.3}$$

Generatore S_{ab} klasificiramo prema spinu, ovdje ćemo dati izraze za tri slučaja koja su bitna za ovaj rad, a za ostale spinove preporučuje se pogledati [60]. Dakle, imamo:

- spin 0 (skalarna polja): $S^{ab} = 0$,
- spin $\frac{1}{2}$ (Diracova ili Majorana polja): $S^{ab} = \frac{1}{4}[\gamma^a, \gamma^b]$,
- spin 1 (vektorska polja): $\left(S^{ab}\right)^c{}_d = \eta^{ac}\delta^b_d - \eta^{bc}\delta^a_d$.

Zaključujemo da Poincaréova grupa djeluje na sljedeći način

$$x^b \xrightarrow{(\Lambda,a)} \Lambda^b{}_c x^c + a^b,\ a^b \in \mathbb{R}^{1,3} \ .$$

D Baždarne grupe

U ovom dodatku dajemo najvažnije rezultate vezane uz baždarne grupe i uz sam proces baždarenja. Poznato nam je na je standardni model fizike elementarnih čestica baziran na baždarenju poznatih simetrija, odnosno na procesu gdje parametre simetrije pretvaramo u lokalne parametre, odnosno u parametre ovisne o koordinatama prostorvremena. Tim postupkom dolazimo do čestica poznatih kao baždarni bozoni koje igraju ulogu prijenosnika sila. Također, napomenimo da su baždarne grupe Liejeve grupe te uz njih vežemo pripadne Liejeve algebre. Ovdje ćemo raditi u notaciji koja je slična onoj u [41].

Za početak, polja ψ, koja su dana u nekoj od reprezentacija koje promatrana baždarna grupa dopušta, se pri baždarnim transformacijama transformiraju na način

$$\psi'^i(x) = U^i{}_j(x)\psi^j(x)\ ,\ i, j, ... = 1, 2, ..., \textit{dimenzija reprezentacije}\ , \tag{D.1}$$

gdje je $U^i{}_j(x)$ element baždarne grupe koju promatramo, a kojeg dobivamo eksponenciranjem generatora Liejeve algebre koja odgovara promatranoj baždarnoj grupi, kako je to već rečeno u Dodatku C, odnosno za $U^i{}_j(x)$ imamo

$$U^i{}_j(x) = \left(e^{\epsilon^A(x)T_A}\right)^i{}_j\ ,\ A, B, ... = 1, 2, ..., \textit{dimenzija baždarne grupe}\ , \tag{D.2}$$

gdje su $\epsilon^A(x)$ lokalni parametri koji određuju promatranu baždarnu grupu transformacija, a T_A su generatori Liejeve algebre koja odgovara promatranoj baždarnoj grupi. Dalje više nećemo pisati indekse i, j radi jednostavnije notacije.

Također, generatori pripadne Liejeve algebre zadovoljavaju

$$[T_A, T_B] = C^C{}_{AB}T_C\ , \tag{D.3}$$

gdje su $C^C{}_{AB}$ tzv. strukturne konstante promatrane Liejeve algebre, za koje očito vrijedi antisimetrija

$$C^C{}_{AB} = -C^C{}_{BA}\ . \tag{D.4}$$

Sada promatramo što se događa s poljima i ostalim veličinama pri infinitezimalnoj transformaciji definiranoj na način

$$\delta_\epsilon \psi(x) = \psi'(x) - \psi(x) \ , \ \left|\epsilon^A(x)\right| \ll 1 \ . \tag{D.5}$$

Dakle, imamo

$$\delta_\epsilon \psi(x) = \left(1 + \epsilon^A(x) T_A\right) \psi(x) - \psi(x) \implies \delta_\epsilon \psi(x) = \epsilon^A(x) T_A \psi(x) \ . \tag{D.6}$$

Sada uvodimo tzv. baždarnu kovarijantnu derivaciju

$$D_\mu = \partial_\mu + A_\mu \ , \tag{D.7}$$

gdje je A_μ baždarno polje, koje možemo razviti po generatorima pripadne Liejeve algebre

$$A_\mu = A^A{}_\mu T_A \ . \tag{D.8}$$

Za baždarnu kovarijantnu derivaciju koja djeluje na neko polje zahtijevamo da se transformira na isti način kao i samo to polje pri baždarnoj transformaciji, razlog tome leži u tome da jednadžbe gibanja uglavnom baziramo na ovisnosti o samom polju te njegovoj prvoj derivaciji. Dakle, zbog (D.1) imamo zahtjev

$$D'_\mu \psi'(x) = U(x) D_\mu \psi(x) \ . \tag{D.9}$$

Iz (D.9) uz (D.1) i (D.7) dobivamo

$$A'{}_\mu = U(x) A_\mu U^{-1}(x) - \left(\partial_\mu U(x)\right) U^{-1}(x) \ , \tag{D.10}$$

što uz

$$U(x) U^{-1}(x) = \mathbb{1}_{4\times 4} \implies \left(\partial_\mu U(x)\right) U^{-1}(x) = -U(x) \left(\partial_\mu U^{-1}(x)\right) \ , \tag{D.11}$$

postaje

$$A'{}_\mu = U(x) A_\mu U^{-1}(x) + U(x) \left(\partial_\mu U^{-1}(x)\right) \ . \tag{D.12}$$

Nadalje, zanima nas kako se transformiraju koeficijenti ${A^A}_\mu$ iz (D.8) pri transformaciji definiranoj u (D.5). Stoga, računamo

$$\begin{aligned} {A'}_\mu - A_\mu &\overset{(D.12)}{=} U(x)A_\mu U^{-1}(x) + U(x)\left(\partial_\mu U^{-1}(x)\right) - A_\mu \\ &\overset{(D.2),(D.3)}{=} -\left(\partial_\mu \epsilon^A(x)\right) T_A + \epsilon^C(x) {A^B}_\mu {C^A}_{CB} T_A \ , \end{aligned}$$

što uz korištenje (D.4) i (D.8) daje

$$\delta_\epsilon {A^C}_\mu = {A'^C}_\mu - {A^C}_\mu = -\left(\partial_\mu \epsilon^C(x) + \epsilon^D(x) {A^B}_\mu {C^C}_{BD}\right) \ . \tag{D.13}$$

Sada nam je bitna sljedeća činjenica, naime kada je promatrana transformacija globalna, a ne lokalna, odnosno kada vrijedi $U \neq U(x)$, tada (D.12) postaje

$${A'}_\mu = U A_\mu U^{-1}. \tag{D.14}$$

Drugim riječima, baždarno polje A_μ mora pripadati adjungiranoj reprezentaciji (engl. *adjoint representation*) u odnosu na globalnu grupu transformacija pripadne baždarne grupe [61]. U adjungiranoj reprezentaciji generatori Liejeve algebre su dani samim strukturnim konstantama, odnosno vrijedi

$${(T_B)^A}_C = {C^A}_{BC} \ . \tag{D.15}$$

Sada korištenjem (D.7) i (D.15) za (D.13) dobivamo

$$\delta_\epsilon {A^C}_\mu = -D_\mu \epsilon^C(x) \ . \tag{D.16}$$

Nadalje, uvodimo tzv. tenzor snage polja $F_{\mu\nu}$ koji je dan komutatorom baždarnih kovarijantnih derivacija. Da bismo našli čemu je on jednak, računamo

$$[D_\mu, D_\nu]\psi(x) \overset{(D.7)}{=} \left(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu\right)\psi(x) = F_{\mu\nu}\psi(x) \ .$$

Dakle, zaključujemo

$$F_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu] = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + A_\mu A_\nu - A_\nu A_\mu \ . \tag{D.17}$$

Ovaj tenzor također možemo razviti po generatorima pripadne Liejeve algebre na način

$$F_{\mu\nu} = F^A{}_{\mu\nu} T_A \ , \tag{D.18}$$

što uz korištenje (D.3) i (D.8) postaje

$$F^A{}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^A{}_\nu - \partial_\nu A^A{}_\mu + C^A{}_{BC} A^B{}_\mu A^C{}_\nu \ . \tag{D.19}$$

Zanima nas kako se $F_{\mu\nu}$ transformira pri baždarnim transformacijama. Za početak, iz (D.9) uočavamo da vrijedi

$$D'{}_\mu = U(x) D_\mu U^{-1}(x) \ . \tag{D.20}$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} F'{}_{\mu\nu} = [D'{}_\mu, D'{}_\nu] &\overset{(D.20)}{=} U(x)[D_\mu, D_\nu]U^{-1}(x) \overset{(D.17)}{=} U(x) F_{\mu\nu} U^{-1}(x) \\ &\implies F'{}_{\mu\nu} = U(x) F_{\mu\nu} U^{-1}(x) \ . \end{aligned} \tag{D.21}$$

Nadalje, zanima nas kako se transformiraju koeficijenti $F^A{}_{\mu\nu}$ iz (D.18) pri transformaciji definiranoj u (D.5). Stoga, računamo

$$F'{}_{\mu\nu} - F_{\mu\nu} \overset{(D.21)}{=} U(x) F_{\mu\nu} U^{-1}(x) - F_{\mu\nu} \overset{(D.2),(D.3)}{=} \epsilon^A(x) F^B{}_{\mu\nu} C^C{}_{AB} T_C \ ,$$

što uz (D.18) daje

$$\delta_\epsilon F^A{}_{\mu\nu} = \epsilon^B(x) C^A{}_{BC} F^C{}_{\mu\nu} \ . \tag{D.22}$$

Napomenimo samo da smo ovdje sve ovisnosti pisali o nekom x, no iz konteksta baždarne grupe koju promatramo nam je jasno koje indekse stavljamo na odgovarajuće koordinate x. Drugim riječima, iz konteksta je jasno gdje imamo ovisnost o koordinatama s grčkim indeksima, a gdje o koordinatama s velikim latinskim indeksima.

Literatura

[1] H. Weyl, "Gravitation und Elektrizität," Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften, vol. 465, 1918.

[2] I. Debono and G. Smoot, "General Relativity and Cosmology: Unsolved Questions and Future Directions," Universe, vol. 2, no. 4, 2016.

[3] R. T. Hammond, "Torsion gravity," Reports on Progress in Physics, vol. 65, no. 5, 2002.

[4] H. F. M. Goenner, "On the History of Unified Field Theories," Living Reviews in Relativity, vol. 7, no. 2, 2004.

[5] H. F. M. Goenner, "On the History of Unified Field Theories. Part ii. (ca. 1930–ca. 1965)s," Living Reviews in Relativity, vol. 17, no. 5, 2014.

[6] M. Blagojević, Gravitation and Gauge Symmetries (Series in High Energy Physics, Cosmology and Gravitation). Taylor & Francis, 2001.

[7] A. Unzicker and T. Case, "Translation of Einstein's Attempt of a Unified Field Theory with Teleparallelism," arXiv:0503046 [physics.hist-ph], 2005.

[8] H. S. Burton, "On the Palatini variation and connection theories of gravity," doktorski rad, University of Waterloo, 1998.

[9] I. Smolić, "Diferencijalna geometrija u fizici," skripta, 2022.

[10] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, Volume 1. Interscience Publishers, 1963.

[11] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of Differential Geometry, Volume 2. Interscience Publishers, 1969.

[12] R. M. Wald, General Relativity. University of Chicago Press, 1984.

[13] S. Bahamonde, K. F. Dialektopoulos, C. Escamilla-Rivera, G. Farrugia, V. Gakis, M. Hendry, M. Hohmann, J. L. Said, J. Mifsud, and E. D. Valentino, "Teleparallel Gravity: From Theory to Cosmology," Reports on Progress in Physics, vol. 86, no. 2, 2023.

[14] S. Carroll, Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity. Benjamin Cummings, 2004.

[15] D. Iosifidis, "Exactly Solvable Connections in Metric-Affine Gravity," Classical and Quantum Gravity, vol. 36, no. 8, 2019.

[16] S. Capozziello, V. D. Falco, and C. Ferrara, "Comparing Equivalent Gravities: common features and differences," The European Physical Journal C, vol. 82, no. 10, 2022.

[17] D. Iosifidis, "Riemann Tensor and Gauss-Bonnet density in Metric-Affine Cosmology," Classical and Quantum Gravity, vol. 38, no. 19, 2021.

[18] K. Yano, The Theory of Lie Derivatives and Its Applications. Dover Publications, 2020.

[19] A. J. Kox, M. J. Klein, and R. Schulmann, The Collected Papers of Albert Einstein. Vol. 6: The Berlin Years: Writings, 1914-1917 (English translation of selected texts). Princeton University Press, 1997.

[20] J. M. Lee, Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature. Springer, 1997.

[21] H. Goldstein, Classical Mechanics. Pearson, 2001.

[22] C. Salas, "A derivation of Poisson's equation for gravitational potential," 2009.

[23] S. Weinberg, The Quantum Theory of Fields, Volume 1: Foundations. Cambridge University Press, 2005.

[24] A. DeBenedictis, "Integration in General Relativity," arXiv:9802027 [math-ph], 1998.

[25] C. M. Will, "The Confrontation between General Relativity and Experiment," Living Reviews in Relativity, vol. 17, no. 1, 2014.

[26] A. Shomer, "A pedagogical explanation for the non-renormalizability of gravity," arXiv:0709.3555 [hep-th], 2007.

[27] T. Jacobson, "Thermodynamics of Spacetime: The Einstein Equation of State," Physical Review Letters, vol. 75, no. 7, 1995.

[28] J. Yepez, "Einstein's vierbein field theory of curved space," arXiv:1106.2037 [gr-qc], 2011.

[29] R. L. Bishop and S. I. Goldberg, Tensor Analysis on Manifolds. Dover Publications, 1980.

[30] P. Collas and D. Klein, The Dirac Equation in Curved Spacetime: A Guide for Calculations. Springer, 2019.

[31] S. Capozziello, V. D. Falco, and C. Ferrara, "Comparing equivalent gravities: common features and differences," The European Physical Journal C, vol. 82, no. 10, 2022.

[32] S. Weinberg, Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity. John Wiley & Sons, Inc., 1972.

[33] T. C. Chapman and D. J. Leiter, "On the generally covariant Dirac equation," American Journal of Physics, vol. 44, 1976.

[34] C. L. Lewis, "Explicit gauge covariant Euler–Lagrange equation," American Journal of Physics, vol. 77, no. 9, 2009.

[35] J. Gibbons, "Infrared problem in the Faddeev–Popov sector in Yang–Mills Theory and Perturbative Gravity," doktorski rad, University of York, 2015.

[36] M. Hohmann, "Variational Principles in Teleparallel Gravity Theories," Universe, vol. 7, no. 5, 2021.

[37] M. Hohmann, "Teleparallel gravity," arXiv:2207.06438 [gr-qc], 2022.

[38] Y. M. Cho, "Einstein Lagrangian as the translational Yang-Mills Lagrangian," Phys. Rev. D, vol. 14, 1976.

[39] K. Hayashi and T. Shirafuji, "New general relativity," Phys. Rev. D, vol. 19, 1979.

[40] D. Blixt, M. Hohmann, and C. Pfeifer, "Hamiltonian and primary constraints of new general relativity," Physical Review D, vol. 99, no. 8, 2019.

[41] R. Aldrovandi and J. G. Pereira, Teleparallel Gravity: An Introduction. Springer Dordrecht, 2012.

[42] I. Smolić, “Klasična elektrodinamika,” skripta, 2021.

[43] M. Thomson, Modern Particle Physics. Cambridge University Press, 2013.

[44] M. Krššák, R. J. van den Hoogen, J. G. Pereira, C. G. Böhmer, and A. A. Coley, “Teleparallel theories of gravity: illuminating a fully invariant approach,” Classical and Quantum Gravity, vol. 36, no. 18, 2019.

[45] E. N. Saridakis, R. Lazkoz, V. Salzano, P. V. Moniz, S. Capozziello, J. B. Jiménez, M. D. Laurentis, and G. J. Olmo, Modified Gravity and Cosmology: An Update by the CANTATA Network. Springer Cham, 2022.

[46] J. G. Pereira and Y. N. Obukhov, “Gauge Structure of Teleparallel Gravity,” Universe, vol. 5, no. 6, 2019.

[47] V. C. de Andrade and J. G. Pereira, “Riemannian and Teleparallel Descriptions of the Scalar Field Gravitational Interaction,” General Relativity and Gravitation, vol. 30, no. 2, 1998.

[48] C. M. Zhang and A. Beesham, “Rotation intrinsic spin coupling - the parallelism description,” Modern Physics Letters A, vol. 16, no. 36, 2001.

[49] S. Shankaranarayanan and J. P. Johnson, “Modified theories of gravity: Why, how and what?,” General Relativity and Gravitation, vol. 54, no. 5, 2022.

[50] T. P. Sotiriou and V. Faraoni, “$f(R)$ theories of gravity,” Reviews of Modern Physics, vol. 82, no. 1, 2010.

[51] T. P. Sotiriou and S. Liberati, “Metric-affine $f(R)$ theories of gravity,” Annals of Physics, vol. 322, no. 4, 2007.

[52] J. B. Jiménez, L. Heisenberg, T. Koivisto, and S. Pekar, “Cosmology in $f(Q)$ geometry,” Physical Review D, vol. 101, no. 10, 2020.

[53] W. Khyllep, J. Dutta, E. N. Saridakis, and K. Yesmakhanova, “Cosmology in $f(Q)$ gravity: A unified dynamical systems analysis of the background and perturbations,” Physical Review D, vol. 107, no. 4, 2023.

[54] Y.-F. Cai, S. Capozziello, M. D. Laurentis, and E. N. Saridakis, “$f(T)$ teleparallel gravity and cosmology,” Reports on Progress in Physics, vol. 79, no. 10, 2016.

[55] M. Adak, “Gauge approach to the symmetric teleparallel gravity,” International Journal of Geometric Methods in Modern Physics, vol. 15, no. 12, 2018.

[56] F. Sbisà, “Modified Theories of Gravity,” arXiv:1406.3384 [hep-th], 2014.

[57] R. Ferraro and M. J. Guzmán, “Hamiltonian formulation of teleparallel gravity,” Physical Review D, vol. 94, nov 2016.

[58] I. Smolić, “Matematičke metode fizike,” skripta, 2021.

[59] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler, Gravitation. Princeton University Press, 2017.

[60] P. Ramond, Field Theory : A Modern Primer (Frontiers in Physics Series, Vol 74). Westview Press, 2001.

[61] M. J. D. Hamilton, Mathematical Gauge Theory: With Applications to the Standard Model of Particle Physics. Springer, 2017.