Optimiziranje potrošnje cestovnog vozila

Zaluški, Nikola

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Nikola Zaluški

OPTIMIZIRANJE POTROŠNJE CESTOVNOG VOZILA

Diplomski rad

Zagreb, 2023.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI
STUDIJ FIZIKA I INFORMATIKA; SMJER NASTAVNIČKI

Nikola Zaluški

Diplomski rad

Optimiziranje potrošnje cestovnog vozila

izv. prof. dr. sc. Mario Basletić

Ocjena diplomskog rada: ______________________

Povjerenstvo: 1. ______________________

2. ______________________

3. ______________________

Datum polaganja: ________________

Zagreb, 2023.

Sažetak

U ovom radu ćemo pokušati razviti model vožnje cestovnog vozila kojim bi se minimizirala potrošnja goriva na putu kojem se mijenja nagib ceste. U tu svrhu ćemo pretežito koristiti pojednostavljeni model puta i podatke o potrošnji goriva u ovisnosti o brzini i nagibu za stvarno vozilo. U sklopu rada ćemo razviti i program koji računa optimalne brzine kretanja po tom jednostavnom modelu puta i uštedu na tom putu.

Road vehicle consumption optimization

Abstract

In this thesis, we will try to develop a driving model of a road vehicle that would minimize fuel consumption on a road with a changing slope. For this purpose, we will predominantly use a simplified road model and data on fuel consumption depending on speed and gradient for the actual vehicle. As part of this thesis, we will also develop a program that calculates the optimal speed of movement according to that simple road model and savings on that road.

Sadržaj

1 Uvod **2**

1.1 Opis problema 2

2 Diskretni pristup **3**

2.1 Općeniti model 3

2.2 Potrošnja kao linearna funkcija brzine 5

2.3 Primjer s jednostavnim putom 7

2.4 Izračun postotka uštede 10

2.5 Egzaktno rješenje 13

3 Kontinuirani pristup **15**

3.1 Općeniti model 15

3.2 Linearna aproksimacija 16

4 Zaključak **18**

Dodaci **19**

A Python kod **19**

Literatura **22**

1 Uvod

U energetskoj krizi u kojoj se trenutno nalazimo cijena i dostupnost fosilnih goriva su goruća pitanja. Ideja ovog diplomskog rada je vidjeti može li se, i koliko, uštedjeti na potrošnji goriva prilagođavanjem brzine vožnje nagibu ceste, bez da se žrtvuje ukupno vrijeme putovanja. Jeste li ikad primijetili da automobil (npr. na autoputu) pri konstantnoj brzini troši više ako ide uzbrdo, odnosno manje ako ide nizbrdo? Jeste li se onda pitali bi li se ukupna potrošnja mogla smanjiti usporavanjem (ubrzavanjem) na uzbrdici (nizbrdici)? Cilj ovog diplomskog rada je odrediti kako vozač mora mijenjati brzinu vozila ovisno o uzbrdici/nizbrdici kako bi potrošio što je manje moguće goriva. Dobiveni rezultat bit će dodatno izračunat za realno vozilo i realni put na autocesti.

1.1 Opis problema

Potrošnja goriva nekog cestovnog vozila ovisi o nizu čimbenika; npr. o brzini i masi vozila, ali i o vrsti podloge, nagibu ceste, vremenskim uvjetima, gustoći prometa itd. Uzimanje u obzir svih čimbenika vodi do izrazito kompleksnog matematičkog modela koji je teško primjenjiv i s kojim je teško računati. Mi ćemo u ovom radu promatrati pojednostavljeni model, u kojem ćemo uzeti u razmatranje samo činjenice da potrošnja goriva ovisi o brzini vožnje i o nagibu ceste po kojoj se vozimo. Osim toga, pretpostavit ćemo da je promet takav da vozilo nigdje ne treba mijenjati brzinu kretanja kao posljedicu postojanja drugih sudionika u prometu, odnosno pretpostavit ćemo da nema gužve. To bi onda otprilike odgovaralo prometovanju kamiona ili osobnog vozila po autoputu na kojem nema previše prometa. Dodatno, strmina ceste može biti takva da se vozilo giba velikom brzinom i bez davanja gasa, odnosno bez potrošnje goriva. Ta mogućnost nam znatno komplicira rješavanje problema, pa ćemo pretpostaviti da su strmine blage.

Opisanom problemu ćemo pristupiti na nekoliko načina. Prvi način će biti diskretan, gdje imamo put razlomljen na nekoliko manjih dijelova, od kojih svaki ima stalni nagib. Dobiveno rješenje problema će biti dano u obliku nelinearnog sustava jednadžbi, pa ćemo za primjenu na primjer uzeti realističan slučaj, ali takav u kojem je ovisnost potrošnje o brzini linearizirana i koji se onda može jednostavno riješiti. Drugi način će uglavnom biti sličan prvom, no uz razliku da u njemu put po kojem se vozilo kreće više neće biti diskretiziran, nego ćemo taj put promatrati kontinuirano.

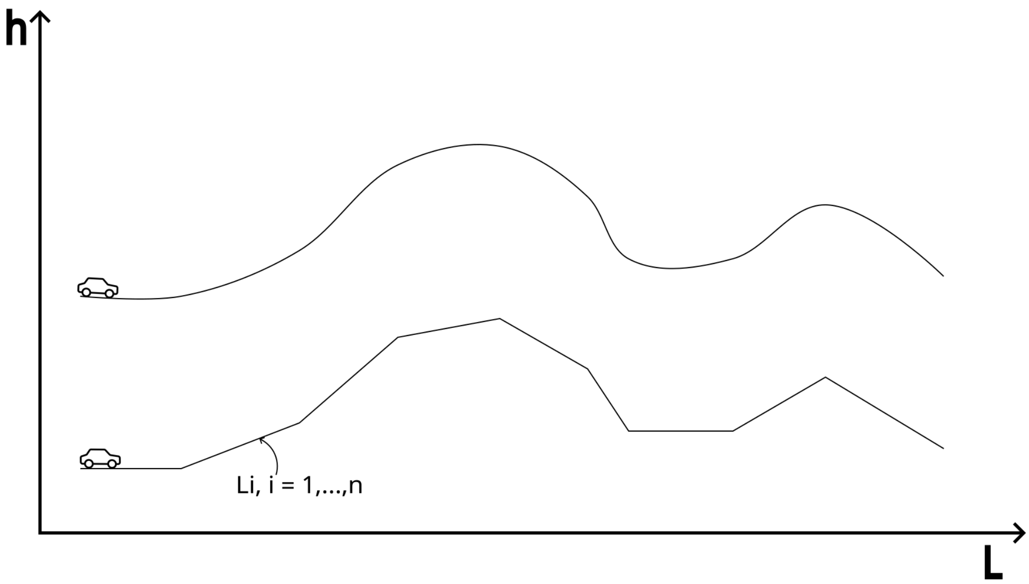
2 Diskretni pristup

2.1 Općeniti model

Kao što je navedeno u uvodnom dijelu, cilj ovog rada je minimizirati ukupnu potrošnju goriva od točke A do točke B. U ovom, diskretnom pristupu, ta potrošnja iznosi:

$$G = \sum_i L_i g_i(v_i), \tag{2.1}$$

gdje je L_i pripadna duljina svakog dijela puta, a g_i pripadna potrošnja na tom istom dijelu puta, dana kao omjer količine potrošenog goriva (izražena u gramima, litrama...) po jedinici duljine puta.



Slika 2.1: Skica profila puta, dana kao kontinuirana krivulja (gore) i kao put razlomljen na diskretne dijelove (dolje)

Očito je potrebno odabrati optimalne brzine v_i na pojedinim dionicama puta L_i, takve da onda funkcija dana u 2.1 ima ekstrem, tj. da bude minimalna. Kao dodatni uvjet na problem, uzet ćemo fiksirano vrijeme puta T, jer bez tog uvjeta bi se rješenje problema svelo na to da se krećemo najmanjom mogućom brzinom, posljedično trošeći najmanje moguće goriva, no ne bismo stigli na odredište u nekom razumnom vremenu. Taj uvjet je oblika:

$$T = \sum_i \frac{L_i}{v_i}, \tag{2.2}$$

gdje je L_i ponovno pripadna duljina na dijelu puta, a v_i pripadna brzina na tom dijelu puta. Ovaj problem je zapravo problem vezanih ekstrema, kojeg ćemo riješiti metodom Lagrangeovih multiplikatora. U tu svrhu uvodimo funkciju $\mathcal{F}$:

$$\mathcal{F}(\{v_i\}, \lambda) = G + \lambda^2 F = \sum_j L_j g_j(v_j) + \lambda^2 \left(\sum_j \frac{L_j}{v_j} - T \right) \tag{2.3}$$

gdje smo Lagrangeov multiplikator zapisali kao λ^2 iz razloga koji će postati jasni kasnije u razradi problema.

Parcijalnim deriviranjem te funkcije po v_i dobivamo:

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial v_i} = L_i \frac{\partial g_i}{\partial v_i} + \lambda^2 \left(-\frac{L_i}{v_i^2} \right) = 0 \tag{2.4}$$

Prema tome je:

$$\frac{\lambda^2}{v_i^2} = \frac{\partial g_i}{\partial v_i}, \tag{2.5}$$

odnosno:

$$v_i = \frac{\lambda}{\sqrt{\partial g_i / \partial v_i}} \tag{2.6}$$

Uvrštavanjem ovog izraza u uvjet, on poprima novi oblik:

$$T = \sum_j L_j \frac{\sqrt{\partial g_j / \partial v_j}}{\lambda}, \tag{2.7}$$

te iz njega dobivamo izraz za λ:

$$\lambda = \frac{1}{T} \sum_j L_j \sqrt{\partial g_j / \partial v_i}, \tag{2.8}$$

što nam omogućuje da ga uvrštavanjem u 2.6 eliminiramo:

$$v_i = \frac{1}{T} \frac{\sum_j L_j \sqrt{\partial g_j / \partial v_j}}{\sqrt{\partial g_i / \partial v_i}}, \qquad i = 1, ..., n \tag{2.9}$$

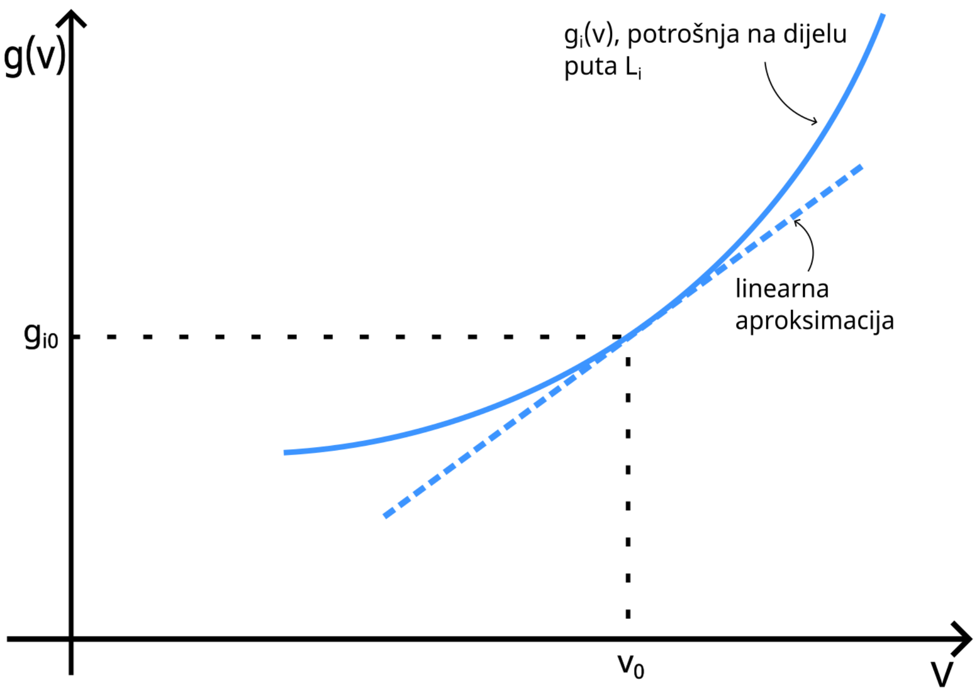
Dobiveni izraz je sustav n jednadžbi, općenito nelinearan, jer su i funkcije $g_i = g_i(v_i)$ nelinearne.

2.2 Potrošnja kao linearna funkcija brzine

S obzirom da se sustav jednadžbi 2.9 u općenitom slučaju ne može riješiti analitički, u ovom poglavlju ćemo se pozabaviti rješavanjem lineariziranog problema, odnosno problema u kojem su ovisnosti $g_i(v_i)$ linearne funkcije brzina. Na slici 2.2 je punom crtom prikazana ovisnost potrošnje $g_i(v_i)$ o brzini na jednom od dijelova puta L_i. Aproksimirat ćemo tu funkciju linearnom funkcijom oko v_0(crtkana linija), gdje smo za v_0 odabrali upravo srednju brzinu puta $v_0 = L/T$:

$$g_i(v_i) = g_{i0} + \alpha_i^2 \left(\frac{v_i}{v_0} - 1 \right) \tag{2.10}$$

Time smo ujedno pretpostavili da se naše rješenje za v_i neće jako razlikovati od te srednje brzine v_0. Primijetimo da je g_{i0} potrošnja goriva pri brzini v_0 na pojedinoj dionici puta L_i i da ta vrijednost ovisi o nagibu dionice, a za nagib pravca znamo da je pozitivan, te smo ga zapisali kao α_i^2.



Slika 2.2: Linearna aproksimacija potrošnje u ovisnosti o brzini, oko v_0

Parcijalnim deriviranjem lineariziranog zapisa potrošnje goriva po brzini dobivamo:

$$\frac{\partial g_i}{\partial v_i} = \frac{\alpha_i^2}{v_0}, \tag{2.11}$$

pa λ možemo zapisati kao:

$$\lambda = \frac{1}{T} \sum_j L_j \frac{\alpha_j}{\sqrt{v_0}} = \frac{1}{\sqrt{v_0} T} \sum_j L_j \alpha_j, \tag{2.12}$$

a pripadnu brzinu kretanja kao:

$$v_i = \frac{1}{T} \frac{\sum_j L_j \alpha_j}{\alpha_i}. \tag{2.13}$$

Time smo tražene brzine uspjeli zapisati u linearnom obliku, što će nam omogućiti da im izračunamo numeričke vrijednosti u konkretnom primjeru.
Ako u gornjem izrazu za brzinu v_i uvedemo pokratu $\beta = \sum_j L_j \alpha_j$, on poprima ljepši oblik:

$$v_i = \frac{1}{T} \frac{\beta}{\alpha_i} \tag{2.14}$$

Sada je potrebno pokazati da je teoretska potrošnja po prijeđenom putu, uz mijenjanje brzine kretanja, manja od one pri stalnoj brzini kretanja. Tu baznu potrošnju goriva pri stalnoj brzini ćemo označiti sa G_0 i pokazati da je $G < G_0$ i kolika je zaista ušteda goriva. Bazna potrošnja goriva iznosi:

$$G_0 = \sum_i L_i g_{i0}, \tag{2.15}$$

Ako našu potrošnju G zapišemo kao:

$$G = \sum_i L_i g_i(v_i) \tag{2.16}$$

i zamijenimo $g_i(v_i)$ s izrazom iz 2.10, slijedi:

$$\begin{aligned} G &= \sum_i L_i \left(g_{i0} + \alpha_i^2 \left(\frac{v_i}{v_0} - 1 \right) \right) \\ &= \sum_i L_i g_{i0} + \sum_i \alpha_i^2 \frac{v_i}{v_0} L_i - \sum_i \alpha_i^2 L_i \end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned} G &= G_0 + \frac{1}{v_0} \sum_i L_i \alpha_i^2 \frac{1}{T} \frac{\beta}{\alpha_i} - \sum_i \alpha_i^2 L_i \\ &= G_0 + \beta \frac{1}{L} \sum_i L_i \alpha_i - \sum_i \alpha_i^2 L_i \end{aligned} \tag{2.18}$$

$$G = G_o + \frac{(\sum_j L_j \alpha_j)(\sum_i L_i \alpha_i) - (\sum_i L_i)(\sum_i \alpha_i^2 L_i)}{L} \tag{2.19}$$

$$G = G_0 + \frac{1}{L}\left[\sum_{i,j} L_i L_j \alpha_i \alpha_j - \sum_{i,j} L_i L_j \alpha_j^2\right] \tag{2.20}$$

$$G = G_0 - \frac{1}{L}\left[\sum_{i,j} L_i L_j \alpha_j^2 - \sum_{i,j} L_i L_j \alpha_i \alpha_j\right] \tag{2.21}$$

$$G = G_0 - \frac{1}{L}\left[\sum_{i=j} L_i^2 \alpha_i^2 + \sum_{i\neq j} L_i L_j \alpha_j^2 - \sum_{i=j} L_i^2 \alpha_i^2 - \sum_{i\neq j} L_i L_j \alpha_i \alpha_j\right] \tag{2.22}$$

$$G = G_0 - \frac{1}{L}\left[\frac{1}{2}\sum_{i\neq j} L_i L_j \alpha_j^2 + \frac{1}{2}\sum_{i\neq j} L_i L_j \alpha_i^2 - \sum_{i\neq j} L_i L_j \alpha_i \alpha_j\right] \tag{2.23}$$

$$G = G_0 - \frac{1}{2L}\left[\sum_{i\neq j} L_i L_j (\alpha_i^2 + \alpha_j^2) - 2\sum_{i\neq j} L_i L_j \alpha_i \alpha_j\right] \tag{2.24}$$

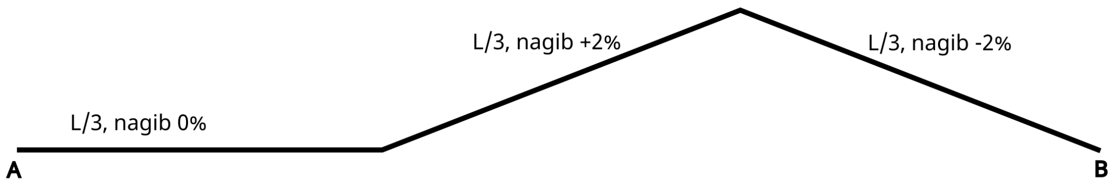
$$G = G_0 - \frac{1}{2L}\sum_{i\neq j} L_i L_j \left(\alpha_i^2 + \alpha_j^2 - 2\alpha_i \alpha_j\right) \tag{2.25}$$

$$G = G_0 - \frac{1}{2L}\sum_{i\neq j} L_i L_j (\alpha_i - \alpha_j)^2 \tag{2.26}$$

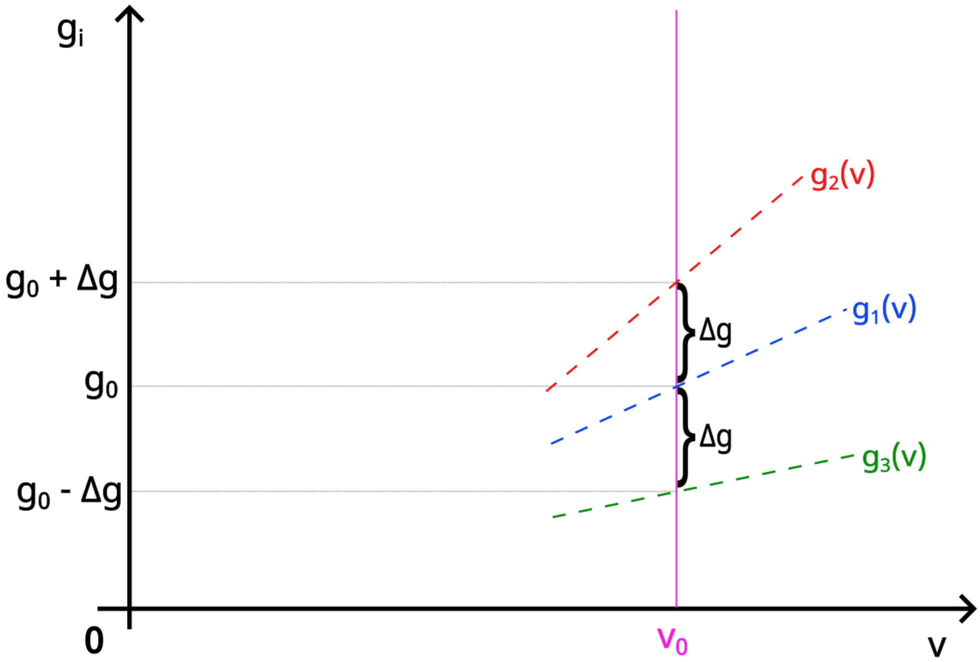
Iz 2.26 se jasno vidi da model vodi na neku uštedu količine potrošenog goriva, preostaje još izračunati kolika je ta ušteda.

2.3 Primjer s jednostavnim putom

Za izračun konkretnog iznosa uštede goriva ćemo koristiti pojednostavljeni model puta, razlomljen na tri dijela, svaki jednake duljine, $L/3$. Ono što će biti različito na tim dijelovima puta je nagib. Prvi dio puta je vodoravan, odnosno bez nagiba i po njemu se krećemo brzinom v_0 i potrošnjom g_0. Drugi dio puta je pod nagibom od 2%, te na njemu intuitivno očekujemo da će brzina kretanja biti manja od v_0, a potrošnja veća od g_0, odnosno oblika $g_0 + \Delta g$. Slično, treći dio puta je pod nagibom od -2%, te na njemu očekujemo kretanje brzinom većom od v_0, a potrošnju $g_0 - \Delta g$.



Slika 2.3: Skica pojednostavljenog modela puta



Slika 2.4: Skica potrošnje po pojedinim dijelovima puta

Uvrštavanjem u 2.10 dobivamo potrošnje na pojedinim dijelovima puta:

$$g_1(v) = g_0 + \alpha^2 \left(\frac{v_1}{v_0} - 1 \right) \tag{2.27}$$

$$g_2(v) = (g_0 + \Delta g) + (\alpha + \Delta\alpha)^2 \left(\frac{v_2}{v_0} - 1 \right) \tag{2.28}$$

$$g_3(v) = (g_0 - \Delta g) + (\alpha - \Delta\alpha)^2 \left(\frac{v_3}{v_0} - 1 \right) \tag{2.29}$$

Iz 2.13 računamo pripadne brzine na pojedinim dijelovima puta:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{1}{T}\frac{(1/3)L\alpha + (1/3)L(\alpha+\Delta\alpha) + (1/3)L(\alpha-\Delta\alpha)}{\alpha} \\
&= \frac{1}{T}\frac{(1/3)L(\alpha+\Delta\alpha-\Delta\alpha+\alpha+\alpha)}{\alpha} \\
&= \frac{1}{T}\frac{(1/3)L3\alpha}{\alpha} \\
&= \frac{L}{T} = v_0
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

$$
v_2 = \frac{1}{T}\frac{L\alpha}{\alpha+\Delta\alpha} = \frac{L}{T}\frac{\alpha}{\alpha+\Delta\alpha} = v_0\frac{\alpha}{\alpha+\Delta\alpha} \tag{2.31}
$$

$$
v_3 = v_0\frac{\alpha}{\alpha-\Delta\alpha} \tag{2.32}
$$

S obzirom na to da je $v_1 = v_0$, imamo:

$$
g_1(v_1) = g_0. \tag{2.33}
$$

Uvrštavanjem preostalih brzina u 2.28 i 2.29 dobivamo:

$$
\begin{aligned}
g_2(v_2) &= (g_0+\Delta g) + (\alpha+\Delta\alpha)^2\left(\frac{v_0(\alpha/(\alpha+\Delta\alpha))}{v_0} - 1\right) \\
&= (g_0+\Delta g) + (\alpha+\Delta\alpha)^2\frac{\alpha}{\alpha+\Delta\alpha} - (\alpha+\Delta\alpha)^2 \\
&= (g_0+\Delta g) + \alpha(\alpha+\Delta\alpha) - (\alpha+\Delta\alpha)^2 \\
&= (g_0+\Delta g) + (\alpha+\Delta\alpha)(\alpha-\alpha-\Delta\alpha) \\
&= g_0 + \Delta g - \Delta\alpha(\alpha+\Delta\alpha) \\
&= g_0 + \Delta g - \alpha\Delta\alpha - \Delta\alpha^2
\end{aligned}
\tag{2.34}
$$

$$
g_3(v_3) = g_0 - \Delta g + \alpha\Delta\alpha - \Delta\alpha^2 \tag{2.35}
$$

Sada vidimo da nam je ukupna potrošnja goriva na prijeđenom putu jednaka:

$$
G = \frac{L}{3}(g_1+g_2+g_3) = Lg_0 - \frac{2}{3}L\Delta\alpha^2 \tag{2.36}
$$

gdje drugi član odgovara uštedi goriva, koji kad podijelimo s prvim članom daje postotak uštede u odnosu na g_0:

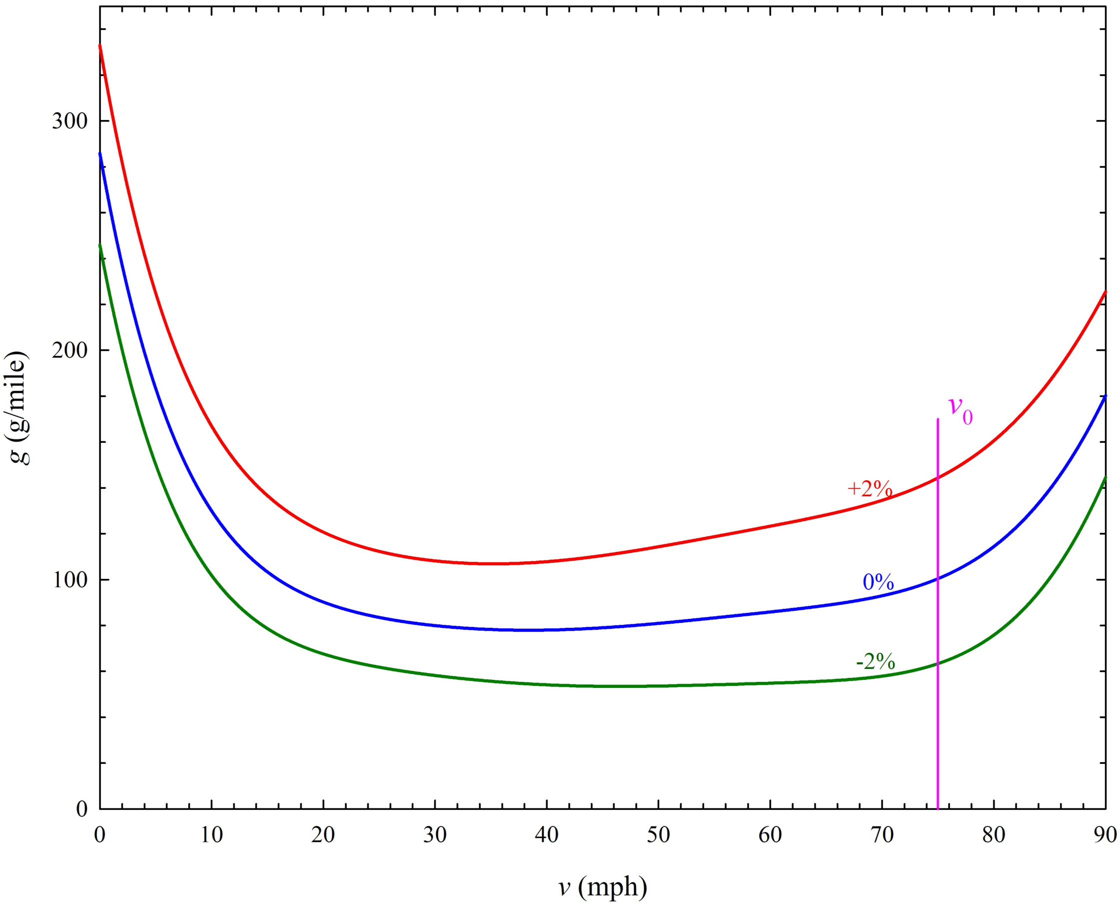
$$\frac{(2/3)L\Delta\alpha^2}{Lg_0} = \frac{(2/3)\Delta\alpha^2}{g_0} \tag{2.37}$$

iz čega se vidi da ušteda ovisi isključivo o $\Delta\alpha^2$, odnosno o tangenti na krivulji potrošnje goriva u ovisnosti o brzini.

2.4 Izračun postotka uštede

Iz jednadžbe 2.37 možemo izračunati konkretni postotak uštede goriva na nekom putu, no za to su nam potrebne još neke informacije. Uzmimo za primjer pojednostavljeni put, kao u prethodnom poglavlju. Da bismo na tom putu izračunali uštedu, trebamo znati karakteristike vozila za koje računamo uštedu. U članku [1], autora Boriboonsomsina-a i Barth-a nalazimo potrebne brojke za provedbu željenog računa. Oni su za vozilo Nissan Altima iz 2007. godine, koje je u rangu učestalih osobnih vozila na našim cestama, izmjerili potrošnju u ovisnosti o brzini i raznim nagibima ceste. To su postigli spajanjem na OBD2 sučelje u automobilu, preko kojeg su dobivali tražene podatke, te su ih grafički prikazali na slici 3 u već spomenutom članku [1]. Dobivene vrijednosti su izražene preko mph, a ne km/h, što je uobičajenije kod nas, pa ćemo i u primjeru računati sa mph, uz pretvorbu u km/h na kraju, radi lakšeg poimanja dobivenih brzina. U ovom primjeru ćemo uzeti da je $v_0 = 75\,\mathrm{mph}$, odnosno približno 120 km/h, te izračunati brzine kretanja na pozitivnom i negativnom nagibu i na kraju njima pripadne potrošnje goriva.

Iz same slike grafa nije jednostavno očitati konkretne tražene vrijednosti, te je taj graf bilo potrebno digitalizirati. To je postignuto korištenjem niza softverskih rješenja: "Engauge digitizer" [5], "MS Excel" te "SigmaPlot". Konačni rezultat je graf s krivuljama samo za vrijednosti od interesa u ovom pojednostavljenom primjeru: za nagibe od 0%, 2% i -2%.

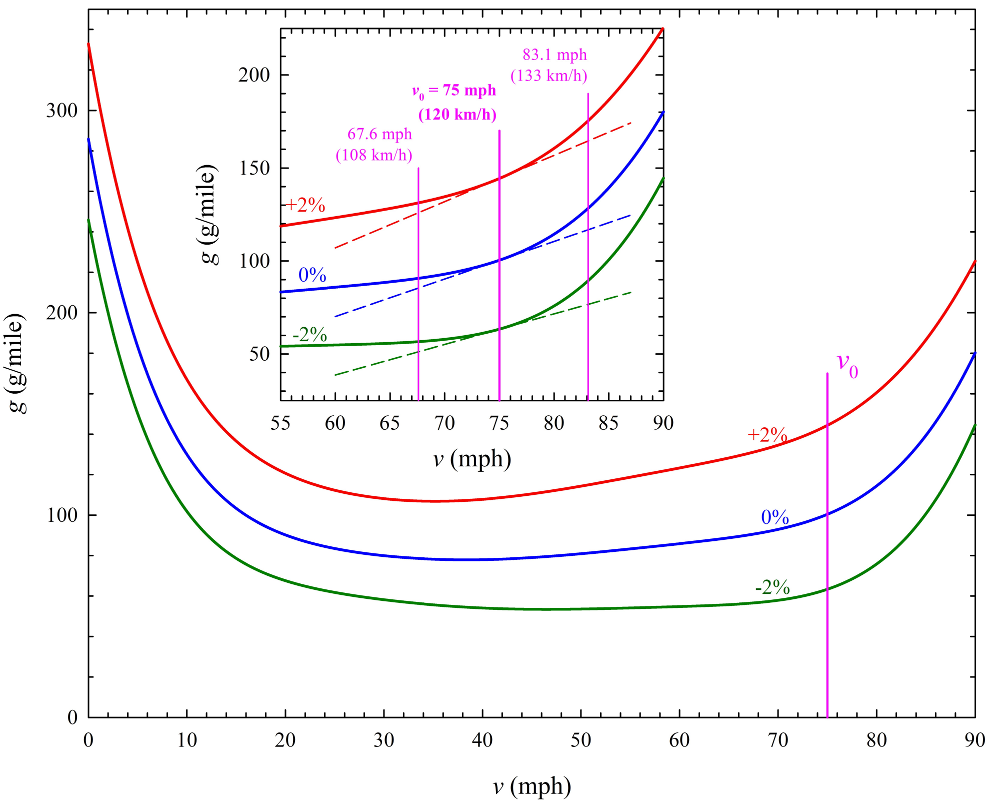


Slika 2.5: Ovisnost potrošnje o brzini i nagibu.

Sad kad imamo i graf iz kojih se mogu očitati potrebni podaci, nastavljamo izračun uštede. Pri već spomenutoj $v_0 = 75\,\text{mph}$ i nagibu od 0% imamo vrijednost potrošnje od $g_0 = 100.4\,\text{g/mi}$, a nagib krivulje u toj točki iznosi $\alpha^2 = 2.019$. Pri istoj brzini, ali nagibu od +2%, potrošnja nam raste na $g_2 = 144.35\,\text{g/mi}$, a nagib tangente je $\alpha_2^2 = 2.49$. Pri nagibu od -2% potrošnja pada na $g_3 = 63.36\,\text{g/mi}$, a nagib tangente iznosi $\alpha_3^2 = 1.64$. Primijetimo da vrijednosti g_2 i g_3 odudaraju od g_0 za sličan apsolutni iznos, jednako kao što vrijednosti α_2^2 i α_3^2 odudaraju od α^2 za otprilike jednak apsolutni iznos. To je bitno napomenuti jer pri izračunu uštede goriva koristimo vrijednost $\Delta\alpha$, te ćemo za nju uzeti srednju vrijednost razlika u nagibu. Pri tome gubimo vrlo malo na točnosti konačnog rezultata, a olakšavamo si izračun.

Sad iz 2.31 i 2.32 računamo brzine v_2 i v_3, te za njihove vrijednosti dobivamo da su $v_2 = 67.6\,\text{mph}$, a $v_3 = 83.1\,\text{mph}$, što preračunato u km/h iznosi $v_2 = 108\,\text{km/h}$ i $v_3 = 133\,\text{km/h}$, te to nisu prevelike razlike u odnosu na v_0, niti van razumnog raspona brzina vožnje po autoputu. Konačno, korištenjem 2.37, računamo postotak uštede goriva prilagođavanjem brzine vožnje, te on iznosi približno 1.08%. To ukazuje na to da ušteda po svakom pojedinačnom vozilu nije drastična, no skaliranjem na flotu većeg broja vozila ušteda iz ekološkog, ali i financijskog gledišta, može biti itekako primjetna.

Dobiveni postotak uštede može biti i veći i manji, ovisno o odabranoj brzini v_0 i profilu puta, odnosno nagibima kojima se krećemo od točke A do točke B. Na primjer pri brzini od 85 mph uštede uopće nema, jer su tangente na krivulji ovisnosti potrošnje o brzini i nagibu približno jednake za sve odabrane nagibe. Ušteda proizlazi iz razlike nagiba tangente u odnosu na gibanje cestom bez nagiba. Brzina od 75 mph, odnosno 120 km/h je odabrana za ovaj primjer jer odgovara razumnoj vožnji po autoputu, na kojem je jednostavno prilagođavati brzinu bez ometanja drugih vozača. Da bi ova metoda postala široko primjenjivom, bilo bi potrebno napraviti nekakvu aplikaciju koja bi imala bazu podataka s krivuljama potrošnje za različite vrste vozila, te bi ovisno o nagibu terena upozoravala vozača da prilagodi brzinu sukladno tome.



Slika 2.6: Ovisnost potrošnje o brzini i nagibu. Umetak: uvećan dio grafa sa svim brzinama i pripadnim tangentama.

2.5 Egzaktno rješenje

U prethodnom poglavlju smo problemu pristupili na način da smo linearizirali funkciju potrošnje goriva, te pokazali da ušteda definitivno postoji. No iz umetka na slici 2.6 vidimo da postoji određeno odudaranje linearizirane potrošnje od prave potrošnje. Iako to odudaranje nije veliko, ono ipak rezultira razlikom u izračunatim potrošnjama i brzinama od onih koje bismo imali u stvarnom svijetu. Da bismo izračunali egzaktnu potrošnju i tražene brzine kretanja, potrebno je numerički riješiti jednadžbu 2.9. Ponovno za primjer uzimamo jednostavni model puta, u kojem imamo 3 dijela jednake duljine: $L_i = L/3$. Kada to ubacimo u jednadžbu 2.9, dobivamo:

$$v_i = \frac{1}{T} \frac{\sum_j L/3 \sqrt{\partial g_j/\partial v_j}}{\sqrt{\partial g_i/\partial v_i}}, \tag{2.38}$$

odnosno:

$$v_i = \frac{L}{T} \frac{1/3 \sum_j \sqrt{\partial g_j/\partial v_j}}{\sqrt{\partial g_i/\partial v_i}}, \tag{2.39}$$

gdje L/T prepoznajemo kao v_0, pa zapisujemo:

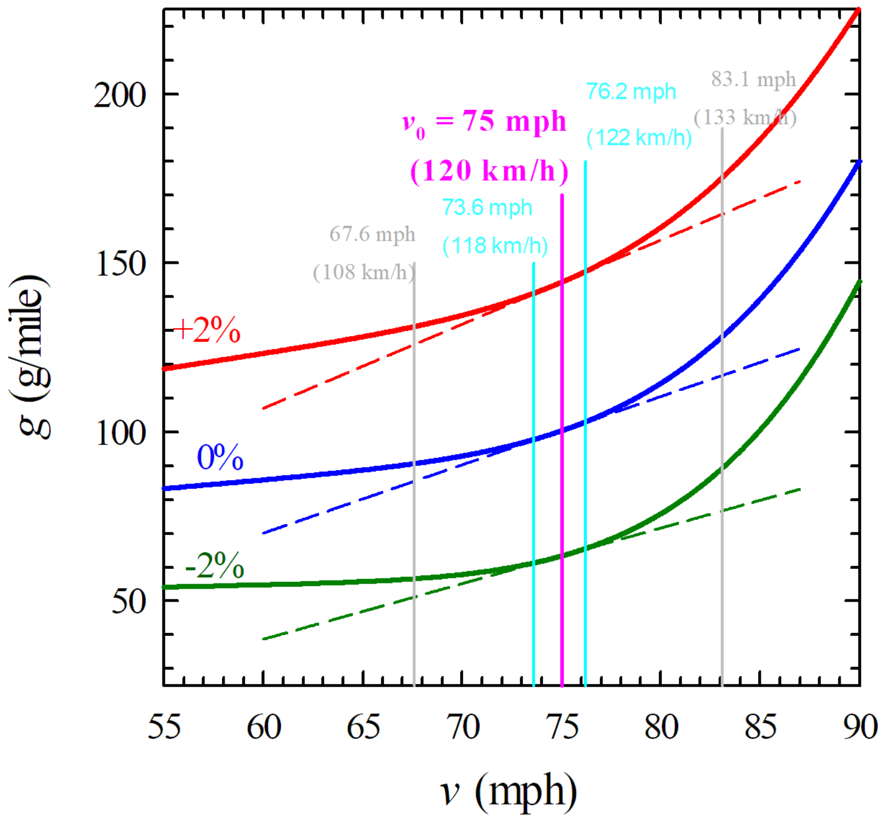
$$v_i = v_0 \frac{1/3 \sum_j \sqrt{\partial g_j/\partial v_j}}{\sqrt{\partial g_i/\partial v_i}} \tag{2.40}$$

Jednadžbu 2.40 je sada potrebno minimizirati kako bismo dobili optimalne brzine kretanja. To postižemo pisanjem jednostavnog Python programa (vidi Dodatak A) koji kao ulaznu varijablu prima srednju brzinu kretanja v_0 te u sebi već ima zadane krivulje potrošnje sa slike 2.5, one od 0%, -2% i +2%. Korištenjem funkcije "minimize" iz knjižnice funkcija za Python "SciPy" dobivamo traženo rješenje. Primjer rada programa dan je na slici 2.7. Program osim rješenja računa i postotak uštede goriva. Tako nam ušteda za srednju brzinu $v_0 = 75\,\mathrm{mph}$ iznosi 0.19%, što je manje od prethodno dobivenog rješenja korištenjem lineariziranog modela potrošnje, koje je bilo 1.08%, no ušteda je i dalje prisutna. Na slici 2.8 su na grafu označene brzine kretanja po uzbrdici i nizbrdici dobivene korištenjem ovog programa. One su nešto bliže srednjoj brzini od brzina dobivenih korištenjem lineariziranog modela. Da bismo vidjeli nešto veću uštedu, potrebno je odabrati nižu srednju brzinu. Tako ukoliko odaberemo srednju brzinu $v_0 = 55\,\mathrm{mph}$, ušteda nam iznosi čak 1.88%, te postepeno opada kako povećavamo srednju brzinu v_0.

```
$ python potrosnjax.py
Unesite srednju brzinu (u mph): 60
Srednja brzina: 60 mph,    Potrošnja: 88.00 g/mi
Optimizirane brzine: 62.8167 mph, 51.3747 mph, 68.4288 mph,
Optimizirana potrošnja: 86.65 g/mi
Ušteda goriva: 1.54%

$ python potrosnjax.py
Unesite srednju brzinu (u mph): 75
Srednja brzina: 75 mph,    Potrošnja: 102.71 g/mi
Optimizirane brzine: 75.1907 mph, 73.6097 mph, 76.2372 mph,
Optimizirana potrošnja: 102.51 g/mi
Ušteda goriva: 0.19%
```

Slika 2.7: Primjer rada programa za izračun brzina i uštede



Slika 2.8: Ponovljeni umetak sa slike 2.6, sa zasivljenim brzinama dobivenim korištenjem linearne aproksimacije, a svijetlo plavo označenim brzinama dobivenim programskim rješenjem

3 Kontinuirani pristup

3.1 Općeniti model

U prethodnom poglavlju smo radili s diskretnim pristupom jer on omogućava pristup rješenju problema kroz pojednostavljeni model puta koji nije jako teško riješiti ručno. No, za primjenu predloženog modela uštede goriva u stvarnom svijetu i implementaciju u vozilo ili smartphone aplikaciju, diskretni pristup nije dovoljno dobar. Za to se moramo prebaciti na kontinuirani pristup problemu. U samom postavu razlike nisu drastične, samo jednadžbe moraju poprimiti prikladne oblike. Ono gdje razlika postaje velika je u samom rješavanju tih jednadžbi, jer je potreban velik broj netrivijalnih izračuna, pa je za takav pristup jednostavnije prepustiti računanje računalu, koje je sposobno primati i obrađivati podatke u stvarnom vremenu. Tako naše jednadžbe iz prethodnog pristupa redom poprimaju oblike:

$$g_i(v_i) \to g(v(x), x) \tag{3.1}$$

$$G = \sum_i L_i g_i(v_i) \to G = \int_0^L g(v(x), x)dx \tag{3.2}$$

$$T = \sum_i \frac{L_i}{v_i} \to T = \int_0^L \frac{dx}{v(x)} \tag{3.3}$$

Primijetimo da su one stvarno vrlo slične, samo smo diskretne sume zamijenili integralima po cijelom putu i brzina nam je postala funkcija položaja umjesto zadane brzine za svaku dionicu puta.

$$F = G + \lambda^2 \left(\int_0^L \frac{dx}{v} - T \right) \tag{3.4}$$

gdje T možemo zapisati kao $T = \int_0^L (dx/v_0)$ pa imamo:

$$F = \int_0^L \left[g(v, x) + \frac{\lambda^2}{v} - \frac{\lambda^2}{v_0} \right] dx. \tag{3.5}$$

U obliku Euler-Lagrangeovih jednadžbi zapisujemo:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v'}\right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v} \tag{3.6}$$

$$0 = \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\lambda^2}{v^2} \Rightarrow v = \frac{\lambda}{\sqrt{\partial g/\partial v}} \tag{3.7}$$

Iz 3.7 nam slijedi:

$$T = \int_0^L dx \frac{\sqrt{\partial g/\partial v}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\int_0^L dx \sqrt{\frac{\partial g}{\partial v}} \tag{3.8}$$

Ako λ zapišemo kao:

$$\lambda = \frac{1}{T}\int_0^L dx \sqrt{\frac{\partial g}{\partial v}} \tag{3.9}$$

onda kombiniranjem 3.7 i 3.9 možemo zapisati:

$$v(x) = \frac{1}{T}\frac{\int_0^L dx(\sqrt{\partial g/\partial v})}{\sqrt{\partial g/\partial v}} \tag{3.10}$$

3.2 Linearna aproksimacija

Radi olakšavanja zapisa i provedbe računa, ponovno se okrećemo linearnoj aproksimaciji funkcije potrošnje goriva. Pri tome moramo malo nadograditi jednadžbe 2.11 i 2.10 i to na način da im dodamo ovisnost o položaju x:

$$\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{1}{v_0}\alpha^2(x) \tag{3.11}$$

$$g(v(x), x) = g_0(x) + \alpha^2(x)\left(\frac{v(x)}{v_0} - 1\right) \tag{3.12}$$

pa onda traženu brzinu u kontinuiranom obliku, na položaju x zapisujemo kao:

$$v(x) = \frac{1}{T}\frac{\int_0^L dx\alpha(x)}{\alpha(x)} \tag{3.13}$$

Možemo uvesti supstituciju $\int_0^L dx\alpha(x) = \beta$ pa zapisujemo:

$$v(x) = \frac{1}{T}\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \tag{3.14}$$

i to je oblik koji ćemo koristiti u daljnjem raspisu problema.

Razvoj ukupne potrošnje je ponovno vrlo sličan onom iz prethodnog poglavlja:

$$G = \int_0^L \left[g_0(x) + \alpha^2 \left(\frac{1}{v_0} \frac{1}{T} \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right) \right] dx \tag{3.15}$$

$$G = \int_0^L g_0(x)dx + \frac{\beta}{v_0 T} \int_0^L \alpha dx - \int_0^L \alpha^2 dx \tag{3.16}$$

$$G = G_0 - \left[\int_0^L \alpha^2 dx - \frac{1}{L} \left(\int_0^L \alpha dx \right)^2 \right] \tag{3.17}$$

$$G = G_0 - L \left[\frac{1}{L} \int_0^L \alpha^2 dx - \left(\frac{\int_0^L \alpha dx}{L} \right)^2 \right] \tag{3.18}$$

$$G = G_0 - L \left(\overline{\alpha^2} - \overline{\alpha}^2 \right) \tag{3.19}$$

Na kraju ponovno vidimo da neka ušteda postoji, jer znamo da je srednja vrijednost kvadrata veća od kvadrata srednje vrijednosti. Potrebno je samo još implementirati rezultat u neku aplikaciju i poslužiti ju s podacima o vozilu i putu.

4 Zaključak

U ovom radu smo pokazali kako je moguće ostvariti uštedu goriva na putu s promjenjivim nagibima prilagođavanjem brzine kretanja, u usporedbi s kretanjem istom brzinom neovisno o nagibu po kojem se krećemo. Za potrebe rada smo se usredotočili na pojednostavljeni model puta, u kojem imamo tri dijela jednakih duljina, a različitih nagiba.

Za početak smo definirali model potrošnje goriva u ovisnosti o brzini kretanja, te dobili nelinearan sustav od n jednadžbi preko kojeg smo tražili rješenje problema. Zatim smo zapisali potrošnju kao linearnu funkciju brzine, kako bismo mogli analitički dobiti rješenje. Tu smo pokazali da model vodi do neke uštede, te je preostalo izračunati kolika je ona. Za konkretni izračun te uštede su bili potrebni i konkretni podaci o potrošnji za neko realno vozilo. U tu svrhu smo iskoristili krivulje ovisnosti potrošnje goriva o brzini i nagibu za vozilo Nissan Altima iz literature, koje smo digitalizirali kako bi iz njih mogli očitati točne vrijednosti. To je dovelo do izračunatog postotka uštede iznosa 1.08%.

Nakon što smo dobili rješenje za brzine i iznos uštede korištenjem linearnog modela, odlučili smo i numerički pristupiti nelinearnom sustavu brzina dobivenom u ranijem dijelu rada. U tu svrhu smo napisali python program koji je ponovno koristio krivulje potrošnje iz već spomenutog članka. To rješenje je ponovno pokazalo da ušteda postoji, ali je ovaj put njen iznos bio nešto manji: 0.19%, pri istoj srednjoj brzini v_0=75 mph, kao kod korištenja linearnog modela. Iznos uštede je veći za niže brzine i manji za više. Sve dobivene vrijednosti su dane na slikama u radu.

Konačno, u zadnjem poglavlju smo zapisali model u kontinuiranom obliku, kako bi ga se moglo prilagoditi za korištenje u nekoj daljnjoj primjeni, npr. aplikaciji koja bi u stvarnom vremenu upozoravala vozača kojom brzinom je potrebno voziti da bi se potrošilo što je manje moguće goriva.

Na kraju možemo zaključiti da je model dobar i ukoliko bi se skalirao na dovoljno velik broj vozila, doveo bi do značajne uštede goriva i smanjenja količine ispušnih plinova.

Dodaci

Dodatak A, Python kod

```
#!/usr/bin/python3

from math import *
from scipy.optimize import minimize

# polinom je oblika: a0 + a1*x + ... + an*x**n,
# a koeficijenti su dani redom: [a0, a1, ... an].
polinomi = {
        "-2%": [245.973, -25.9795, 1.62409, -0.0572024,
                0.00117701, -0.0000138474,
                0.0000000850538, -0.000000000206463],
        "0%": [285.926, -27.5594, 1.67077, -0.0581044,
               0.00120412, -0.0000144434, 0.0000000913864,
               -0.000000000231707],
        "+2%": [332.917, -28.7402, 1.69401, -0.0590016,
                0.00125406, -0.000015595, 0.000000102964,
                -0.000000000274753]
}


class g_curve():
    def __init__(self, coeff=[]):
        self.coeff = coeff
        # računamo koeficijente za derivaciju
        self.dcoeff = []
        i = 0
        for elem in coeff:
            self.dcoeff.append(elem * i)
            i += 1
        self.dcoeff.pop(0)

    def f(self, x):
        # vraćamo vrijednost polinom(x)
        return self._calc_poly(x, self.coeff)

    def df(self, x):
        # vraćamo vrijednost polinom_derivacija(x)
        return self._calc_poly(x, self.dcoeff)

    def _calc_poly(self, x, _coeff):
        # pomoćna funkcija
        # računa vrijednost polinoma u točki 'x', određenom preko _coeff
        p = _coeff[-1]
        # '[::-1]' koristimo za okretanje redoslijeda elemenata u matrici
        for elem in _coeff[0:-1][::-1]:
            p = p*x + elem
        return p


v_0 = int(input("Unesite srednju brzinu (u mph): "))

def squares(v, v_0):
```

```
53     # pomoćna funkcija
54     # preko nje proslijeđujemo jednadžbu koju želimo minimizirati
55     # u obliku u kojem je dana u radu
56     brzine = [0, 0, 0]
57     suma = 0
58     for i in range(3):
59         brzine[i] = sqrt(g[i].df(v[i]))
60         suma += brzine[i]
61
62     brojnik = v_0*(suma/3)
63
64     p = 0
65     for i in range(3):
66         p += (v[i] - brojnik/brzine[i])**2.0
67
68     return p
69
70 # uzimamo potrebne krivulje, unaprijed zadane keoficijentima u rječniku 'polinomi'
71 g = [g_curve(polinomi["0%"]), g_curve(polinomi["+2%"]), g_curve(polinomi["-2%"])]
72
73 # postavljamo početne uvjete
74 # na početku postavljamo brzinu na svim dijelovima jednaku srednjoj brzini
75 v0 = [v_0, v_0, v_0]
76 # koristimo SciPy funkciju 'minimize' za dobivanje rješenja
77 res = minimize(squares, v0, v_0, method='nelder-mead', options={'xatol': 1e-1})
78 # rješenje
79 v1 = res.x
80
81 # upisujemo neoptimiziranu i optimiziranu potrošnju u varijable 'con0' i 'con1'
82 con0 = [g[i].f(v0[i]) for i in range(3)]
83 con1 = [g[i].f(v1[i]) for i in range(3)]
84 # usporedba dvije potrošnje i izračun postotka uštede
85 savings = abs(((sum(con1)/3)/(sum(con0)/3))-1)*100
86 # ispis rješenja u programu
87 print(f"Srednja brzina: {v_0} mph,    Potrošnja: {(sum(con0)/3):.2f} g/mi\n
88 Optimizirane brzine: {v1[0]:.4f} mph, {v1[1]:.4f} mph, {v1[2]:.4f} mph,
89 Optimizirana potrošnja: {sum(con1)/3:.2f} g/mi\n
90 Ušteda goriva: {savings:.2f}%")
```

Ovaj program računa brzine kretanja po uzbrdici, odnosno nizbrdici, potrebne za minimiziranje potrošnje goriva. Za to koristi unaprijed definirane krivulje ovisnosti potrošnje o nagibu puta i brzini kretanja po njemu. Krivulje su definirane kao polinomi n-tog stupnja, dobiveni prilagodbom krivulja potrošnje sa slike dane u [1], zapisane korištenjem strukture podataka *dictionary*. U liniji 21 je definirana klasa `g_curve`, koja služi za računanje iznosa potrošnje $g(v)$ i pripadne derivacije $g'(v)$, za danu brzinu v i za dani nagib. Vrijednosti polinoma se računaju u pomoćnoj funkciji ove klase, `_calc_poly`, i to korištenjem Hornerove sheme [2]. U liniji 52 definiramo pomoćnu funkciju za rješavanje nelinearnog sustava jednadžbi pomoću SciPy-ove funkcije `minimize` (vidi redak 77). U retku 75 zadajemo početne uvjete za numeričku metodu, odnosno na svim dijelovima puta postavljamo brzine jednake srednjoj brzini, te u retku 77 dobivamo rješenje zadanog sustava jednadžbi. U preostalom dijelu koda program računa postotak uštede goriva i ispisuje rezultat u konzolu. Program je zadan tako da računa sve tražene vrijednosti za jednostavni model puta kakav se koristi u radu, no vrlo jednostavno ga se može prilagoditi da prima proizvoljan broj dijelova puta i nagiba te računa optimalne brzine na svakom od njih.

Bibliography

[1] Boriboonsomsin K,; Barth M..; Impacts of Road Grade on Fuel Consumption and Carbon Dioxide Emissions Evidenced by Use of Advanced Navigation Systems. // Transportation Research Record Volume 2139, Issue 1, str. 21-30.

[2] Hornerova shema, `https://en.wikipedia.org/wiki/Horner%27s_method`

[3] SciPy 'minimize' funkcija, `https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/optimize.minimize-neldermead.html`

[4] Murray H. Protter, Charles B. Jr. Morrey; Intermediate Calculus

[5] Engauge Digitizer, `https://github.com/markummitchell/engauge-digitizer`