

# Elektroslabe interakcije u efektivnoj teoriji polja

---

Vujmilović, Ivan

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:052328>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-03-11**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

Ivan Vujmilović

ELEKTROSLABE INTERAKCIJE U EFEKTIVNOJ  
TEORIJI POLJA

Diplomski rad

Zagreb, 2023.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU  
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ  
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

**Ivan Vujmilović**

Diplomski rad

**ELEKTROSLABE INTERAKCIJE U  
EFEKTIVNOJ TEORIJI POLJA**

Voditelj diplomskog rada: dr. sc. Ivan Nišandžić

Ocjena diplomskog rada: \_\_\_\_\_

Povjerenstvo: 1. \_\_\_\_\_

2. \_\_\_\_\_

3. \_\_\_\_\_

Datum polaganja: \_\_\_\_\_

Zagreb, 2023.

Velike zasluge idu mojem mentoru dr. sc. Ivanu Nišandžiću zbog toga što mi je rad pod njegovim vodstvom omogućio dublji uvid i bavljenje s nizom tema koje se dotiču čestične fizike.

Rad posvećujem roditeljima Predragu i Moniki kao znak zahvale na nesuzdržanoj potpori koju imam od njih.

## Sažetak

U procesima međudjelovanja elementarnih čestica u kojima postoji veliki omjer između karakterističnih energijskih skala, poput značajne razlike u masama interagirajućih čestica, moguće je potpun lagranžijan koji opisuje takve procese zapisati kao (u pravilu) beskonačan zbroj jednostavnijih interakcijskih članova koji sadržavaju samo produkte polja laganih čestica (odnosno stupnjeva slobode). Uz svaki takav član pojavljuju se Wilsonov koeficijent kao i odgovarajuće potencije omjera masa (ili impulsa) laganih čestica i masa teških čestica koje potiskuju doprinose viših redova. Sustavno aproksimiranje pune teorije (odnosno lagranžijana) do proizvoljnog reda u omjeru spomenutih energijskih skala naziva se efektivnom teorijom polja. Nama je ovdje cilj pronaći efektivan niskoenergijski opis četverokvarkovske interakcije uzimajući u obzir čitav Standardni model čestične fizike (u nastavku: SM), a ponajprije elektroslabu interakciju i kvantnu kromodinamiku do jedne petlje. Izračunom relevantnih amplituda u okviru Standardnog modela i uspoređujući rezultate s onima u efektivnoj teoriji dobivamo eksplicitne izraze za tražene Wilsonove koeficijente u ovisnosti o elektroslabo i kvantno-kromodinamičkoj konstanti vezanja. Posljednje nam omogućuje rješavanje jednadžbi renormalizacijske grupe iz čega određujemo klizanje Wilsonovih koeficijenata u ovisnosti o energijskoj skali procesa koji promatramo i njihovu vrijednost na skali mase  $b$  (bottom) kvarka. Na koncu dana je približna usporedba teorijski izračunatih vrijednosti Wilsonovih koeficijenata efektivne teorije i eksperimentalnih rezultata dobivenih na temelju različitih modova raspada  $\bar{B}^0$  mezona.

Ključne riječi: Efektivna teorija polja, Elektroslaba interakcija, jednadžba renormalizacijske grupe

# Electroweak interactions in effective field theory

## Abstract

Whenever there is a large gap between physical energy scales present in elementary particle processes, such as masses of interacting particles, it is possible to rewrite the complete lagrangian describing such processes as an (in general) infinite sum of simpler interaction terms which contain only products of light particle fields (i. e. degrees of freedom). With each term in the series there is a Wilson coefficient and a corresponding power of the ratio of relevant light particle mass or momentum and heavy particle mass which suppresses higher order terms. The scheme with which the full theory is approximated as a finite sum of aforementioned interaction terms is called an effective field theory. Our goal in this work was to find an effective low-energy description of four-quark interactions, taking into the account the whole Standard Model of particle physics (abbreviation: SM) and electroweak interaction together with QCD to one-loop level in particular. Through the calculation of relevant four-quark amplitudes in the full theory (the SM), finding its infrared limit and comparing the results to the ones calculated in an effective field theory we obtain the expressions which link the Wilson coefficients with the electroweak and strong coupling constants. Following on this, we use the renormalization group equations to determine the running of coefficients and calculate the values of Wilson coefficients at the relevant energy scale, the mass of the  $b$  quark. At the end we compare the theoretical results with experimental observations of various decay modes of the  $\bar{B}^0$  meson.

Keywords: Effective field theory, Electroweak interaction, renormalization group equation

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Proces <math>b\bar{c} \rightarrow d\bar{u}</math> u okviru Standardnog modela</b>	<b>7</b>
2.1	Granasta razina . . . . .	7
2.2	Razina jedne petlje . . . . .	9
2.3	Renormalizacija elektroslabe interakcije . . . . .	28
<b>3</b>	<b>Proces <math>b\bar{c} \rightarrow d\bar{u}</math> u efektivnoj teoriji polja</b>	<b>33</b>
3.1	Efektivna teorija polja . . . . .	33
3.2	Granasta razina . . . . .	34
3.3	Razina jedne petlje . . . . .	35
3.4	Kontračlanovi u efektivnoj teoriji polja . . . . .	41
3.5	Spajanje amplituda . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Jednadžbe renormalizacijske grupe</b>	<b>44</b>
4.1	Izvod jednadžbi renormalizacijske grupe . . . . .	44
4.2	Dijagonalna baza operatora $\tilde{\mathcal{O}}_1$ i $\tilde{\mathcal{O}}_2$ . . . . .	47
4.3	Wilsonovi koeficijenti $C_1$ i $C_2$ uz izbor skale $\mu^2 = m_b^2$ . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Raspadi <math>\bar{B}^0 \rightarrow D^+ + \pi^-</math> i <math>\bar{B}^0 \rightarrow D^0 + \pi^0</math></b>	<b>52</b>
5.1	Fenomenologija hadronskih raspada $\bar{B}$ bozona i teorijski izračun amplitude procesa $\bar{B}^0 \rightarrow D + \pi$ . . . . .	52
5.2	Eksperimentalne provjere efektivne teorije elektroslabih interakcija . .	56
<b>6</b>	<b>Zaključak</b>	<b>58</b>
	<b>Dodaci</b>	<b>60</b>
<b>A</b>	<b>Elektroslabo međudjelovanje</b>	<b>60</b>
<b>B</b>	<b>Jako međudjelovanje</b>	<b>63</b>
<b>C</b>	<b>Analitička proširenja čestih integrala sa četiri dimenzije na <math>d</math> dimenzija</b>	<b>64</b>
<b>D</b>	<b>Fierzovi identiteti</b>	<b>65</b>



<b>E Faktor reskaliranja fermionskih polja <math>Z_q</math></b>	<b>66</b>
<b>Literatura</b>	<b>69</b>

# 1 Uvod

Osnovna vrsta procesa koju želimo opisati efektivnom teorijom polja uključuje elektroslabu interakciju četiriju kvarkova. Zbog konkretnosti, razmotrit ćemo raspršenje

$$b\bar{c} \rightarrow d\bar{u}, \quad (1.1)$$

prikazanom Feynmanovim dijagramom na slici 1.1.

Uzimamo da je raspršenje s prvog dijagrama u potpunosti dano lagranžijanom Standardnog modela  $\mathcal{L}_{SM}$ . Dijelovi Standardnog modela koji opisuju fundamentalne interakcije, elektroslabo i jako međudjelovanje, izvode se nametanjem zahtjeva invarijantnosti lagranžijana  $\mathcal{L}_{SM}$  na istovremene unitarne transformacije fermionskih polja iz grupa  $U(N)$  ili  $SU(N)$  te transformacije baždarnih polja, tako da transformiran lagranžijan  $\mathcal{L}'_{SM}$  ispunjava svojstvo

$$\mathcal{L}'_{SM} = \mathcal{L}_{SM}. \quad (1.2)$$

Dokaze ključnih rezultata iz teorije grupa koje ovdje samo navodimo mogu se naći u [7]. Može se pokazati da se svaki element proizvoljne  $U(N)$  ili  $SU(N)$  grupe (oznaka:  $U$ ) može prikazati preko linearne kombinacije tzv. generatora grupe  $t^a$

$$U = e^{i\alpha^a t^a}, \quad (1.3)$$

gdje su  $\alpha^a$  realni brojevi (pretpostavlja se suma po objektima s ponovljenim indeksima). U oba slučaja unitarnih i specijalnih unitarnih grupa generatori su hermitske matrice

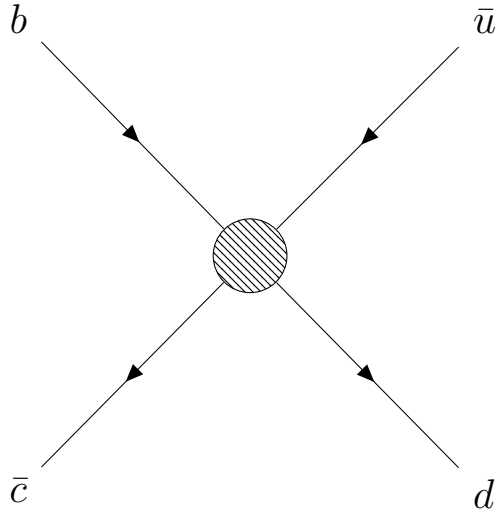
$$t^a = t^{a\dagger}, \quad (1.4)$$

s time da posebno generatori  $SU(N)$  imaju dodatno svojstvo da im trag iščezava

$$\text{Tr } t^a = 0. \quad (1.5)$$

Komutatori generatora opisani su realnim i potpuno antisimetričnim tenzorom  $f^{abc}$

$$[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c \quad (1.6)$$



Slika 1.1: Raspršenje  $b$  i  $\bar{c}$  kvarkova u  $d$  i  $\bar{u}$  kvarkove.

i on ostavlja traga u definiciji tenzora baždarnih bozona kao što će ispod biti pokazano i općenito dovodi do njihove samointerakcije. Broj baždarnih bozona koje je potrebno uvesti u teoriju kako bi lagranžijan zadovoljavao simetriju na određenu grupu jednak je broju generatora grupe. Kod  $U(N)$  taj broj je jednak  $N^2$ , a kod  $SU(N)$  je jednak  $N^2 - 1$ .

Elektroslabi lagranžijan  $\mathcal{L}_{EW}$  se primjenom baždarne simetrije izvodi uvjetovanjem da je  $\mathcal{L}_{SM}$  invarijantan na istovremene lokalne transformacije lijeve i desne komponente fermionskih polja iz grupe  $U(1)$  te samo lijeve komponente fermionskih polja iz grupe  $SU(2)$ . Lijeve i desne komponente fermionskog polja definiraju se uvodeći par projekcijskih operatora pomoću  $\gamma_5$  matrice

$$P_L = \frac{1 - \gamma_5}{2}, \quad P_R = \frac{1 + \gamma_5}{2}, \quad (1.7)$$

gdje je

$$\gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3, \quad (1.8)$$

s Diracovim matricama  $\gamma^\mu$ ,  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Jednostavno se može pokazati koristeći svojstva

$$\gamma_5^2 = 1, \quad \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (1.9)$$

da operatori  $P_L$  i  $P_R$  zadovoljavaju uobičajene relacije za projektore

$$\begin{aligned} P_L^2 &= P_L, & P_R^2 &= P_R, \\ P_L + P_R &= 1, \end{aligned} \quad (1.10)$$

kao i

$$P_L \gamma^\mu = \gamma^\mu P_R, \quad P_R \gamma^\mu = \gamma^\mu P_L. \quad (1.11)$$

Eksplícitan oblik transformiranih polja s prikazom proizvoljnih elemenata  $U_Y(x)$  i  $U_T(x)$  iz grupa unitarnih transformacija  $U(1)$  i  $SU(2)$  tim redosljedom preko odgovarajućih generatora grupa je:

$$\psi'(x) = e^{ig'\alpha_Y(x)Y} \psi(x) \equiv U_Y(x) \psi(x), \quad (1.12)$$

s jedinim generatorom grupe  $U(1)$ , jedinicom ( $1 \in \mathbb{R}$ ), te na kraju

$$\begin{aligned} \psi_L(x) &= \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \psi(x) = P_L \psi(x), \\ \psi'_L(x) &= e^{ig_W \alpha_T^a(x) \frac{\sigma^a}{2}} \psi_L(x) \equiv U_T(x) \psi_L(x), \end{aligned} \quad (1.13)$$

s trima Paulijevim matricama ( $\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ ) kao generatorima grupe  $SU(2)$ . Za svaki prisutan generator grupe simetrija potrebno je uvesti polje baždarnih bozona, kojih u ovom slučaju ima ukupno četiri s oznakama:  $W_\mu^1, W_\mu^2, W_\mu^3$  i  $B_\mu$  te čiji su transformacijski zakoni

$$\begin{aligned} B'_\mu &= B_\mu - \frac{1}{g'} \partial_\mu \alpha_Y, \\ W'_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} &= U_T(x) \left( W_\mu^a \frac{\sigma^a}{2} + \frac{i}{g_W} \partial_\mu \right) U_T^\dagger(x). \end{aligned} \quad (1.14)$$

Ukupan elektroslabi lagranžijan koji posjeduje simetriju  $U(1)_Y \otimes SU(2)_L$  s obzirom na prethodno navedene definicije (1.12), (1.13) i (1.14) sastoji se od baždarnog i fermionskog dijela

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EW} &= \mathcal{L}_{EW,g} + \mathcal{L}_{EW,f} = -\frac{1}{4} F_{W,\mu\nu}^a F_W^{a\mu\nu} - \frac{1}{4} F_{B,\mu\nu} F_B^{\mu\nu} + \\ &+ \sum_{kvar_kovi, leptoni} (i\bar{\psi}_L \gamma^\mu D_\mu \psi_L + i\bar{\psi}_R \gamma^\mu D_\mu \psi_R), \end{aligned} \quad (1.15)$$

uz odgovarajuće definicije tenzora baždarnih bozona,  $W_\mu^a$ :

$$F_{W,\mu\nu}^a = \partial_\mu W_\nu^a - \partial_\nu W_\mu^a + g_W \epsilon^{abc} W_\mu^b W_\nu^c \quad (1.16)$$

i  $B_\mu$ :

$$F_{B,\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu. \quad (1.17)$$

Iako je izrazom (1.15) elektroslabo međudjelovanje u načelu jednoznačno određeno, baždarni bozoni  $W_\mu^1$ ,  $W_\mu^2$ ,  $W_\mu^3$  i  $B_\mu$  ne odgovaraju svojstvenim masenim stanjima koja se opažaju eksperimentalno. Konvencionalne oznake za masena stanja koja ćemo upotrebljavati su:  $W_\mu^+$ ,  $W_\mu^-$ ,  $A_\mu$  i  $Z_\mu$ . Definicije  $W_\mu^\pm$  preko početnih polja iz izraza (1.16) i (1.17) dana su kao

$$W_\mu^\pm = \frac{W_\mu^1 \mp iW_\mu^2}{\sqrt{2}}. \quad (1.18)$$

Veza između ( $W_\mu^3$ ,  $B_\mu$ ) i ( $Z_\mu$ ,  $A_\mu$ ) dana je unitarnom transformacijom parametriziranom preko tzv. Weinbergovog kuta ili slabog kuta miješanja  $\theta_W$ :

$$W_\mu^3 = Z_\mu \cos \theta_W - A_\mu \sin \theta_W, \quad (1.19)$$

$$B_\mu = Z_\mu \sin \theta_W + A_\mu \cos \theta_W.$$

Zajedno s promjenom baze baždarnih bozona navodimo modifikacije kovarijantnih derivacija fermionskih polja koje sad različito djeluju na njihove lijeve i desne komponente kao posljedica njihovih različitih transformacija u izrazima (1.12) i (1.13) s obzirom na koje  $\mathcal{L}_{EW}$  ostaje nepromijenjen:

$$D_\mu \psi_L = \left( \partial_\mu - i \frac{g_W}{\sqrt{2}} (\sigma^+ W_\mu^+ + \sigma^- W_\mu^-) + ie A_\mu - i \frac{g_W}{\cos \theta_W} \left( \frac{\sigma^3}{2} - Q \sin^2 \theta_W \right) Z_\mu \right) \psi_L, \quad (1.20)$$

$$D_\mu \psi_R = \left( \partial_\mu + ie A_\mu + i \frac{g_W}{\cos \theta_W} Q \sin^2 \theta_W Z_\mu \right) \psi_R,$$

s definicijama  $\sigma^\pm$  matrica

$$\sigma^\pm = \frac{\sigma^1 \pm i\sigma^2}{2}. \quad (1.21)$$

Za korekcije višeg reda u procesu (1.1) će nam biti potrebna i teorija jakih interakcija, čija je baždarna grupa simetrija  $SU(3)$ . Ovdje samo navodimo lagranžijan

koji ih opisuje:

$$\mathcal{L}_{QCD} = -\frac{1}{4}F_{g,\mu\nu}^a F_g^{a\mu\nu} + \bar{\psi} (i\cancel{D} + g_S \cancel{G}^a t^a) \psi, \quad (1.22)$$

uz definiciju gluonskog tenzora

$$F_{g,\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_S f^{abc} G_\mu^b G_\nu^c, \quad (1.23)$$

gdje osam matrica  $t^a$  odgovara generatorima grupe  $SU(3)$  zajedno sa strukturnim konstantama  $f^{abc}$ . Izgradnja kromodinamičkog lagranžijana s traženom  $SU(3)$  simetrijom provodi se koracima analogno onima gorenavedenim, više u [4].

Izostavljamo pregled Higgsovog dijela Standardnog modela, budući da je jedina relevantna uloga Higgsovog mehanizma za nas u ovim razmatranjima pridavanje masa baždarnim bosonima elektroslabe interakcije i interagirajućim fermionima. Eksplicitno ručno dodavanje masenih članova za generični baždarni boson  $R_\mu$

$$\frac{m_R^2}{2} R_\mu R^\mu \quad (1.24)$$

narušilo bi simetriju s obzirom na baždarne transformacije kakve smo vidjeli u izrazu (1.14).

Raspravu o Faddeev-Popovljevim duhovima koji se pojavljuju u teorijama s invarijantnošću s obzirom na netrivialne grupe simetrija (u smislu da je tenzor strukturnih konstanti  $f^{abc}$  netrivialan, odnosno neišcezavajuć) preskačemo, budući da se oni ne pojavljuju u dijagramima s kojima ćemo se u nastavku baviti (više detalja o njihovom uvođenju i svojstvima u [6]). Postupkom kvantizacije elektroslabe teorije i jakih interakcija definiranih izrazima (1.15) i (1.22) uobičajenim metodama izvode se standardna Feynmanova pravila potrebna za analizu raspršenja (1.1) računom smetnje i ona su navedena te popisana u dodacima A i B. Zbog jednostavnosti i sažetosti u raspravi se ograničavamo samo na nužne gradivne blokove predstojećih amplituda procesa, a to su interakcijski vrhovi bozona s fermionima; bozonske samointerakcije i vrhovi s Faddeev-Popovljevim duhovima ne razmatramo, više o tome u [3]. Kvantizacijska procedura opisana je u velikom broju udžbenika, tako da se s izvodima pravila iz prvih načela ovdje nećemo baviti, a mogu se pronaći u [1] ili [3], dok se više detalja o teoriji grupa nalazi u [7].

Nakon uvođenja osnovnih pojmova i definicija nastavljamo s razmatranjem pro-

cesa raspršenja  $b\bar{c} \rightarrow d\bar{u}$ , prvo u okviru Standardnog modela u drugom poglavlju i zatim unutar efektivne teorije polja u trećem poglavlju. Vidjet ćemo da se taj proces u Standardnom modelu na granastoj razini (drvastih) Feynmanovih dijagrama realizira posredstvom virtualnog  $W$  bozona, a na to ćemo dodati korekcije koje potječu od kromodinamike na razini jedne petlje razmjennom jednog gluona između svih sudjelujućih kvarkova u procesu. Konstrukcijom efektivnog opisa četverokvarkovskog međudjelovanja iskoristit ćemo renormalizacijsku grupu za sumaciju velikih logaritama u četvrtom poglavlju kako bismo dobili ovisnost efektivnih Wilsonovih koeficijenata o energijskoj skali procesa. Rezultate teorijskih izračuna uspoređujemo s eksperimentalnim rezultatima u petom poglavlju.

## 2 Proces $b\bar{c} \rightarrow d\bar{u}$ u okviru Standardnog modela

### 2.1 Granasta razina

Najniži doprinos procesu  $b\bar{c} \rightarrow d\bar{u}$  s kojim počinjemo razmatranja je granasti dijagram sa slike 2.1 koji prikazuje anihilaciju  $b$  i  $\bar{c}$  kvarkova u  $W^-$  bozon, a nakon toga slijedi nastanak  $d$  i  $\bar{u}$  kvarkovskog para u izlaznom kanalu. Amplitudu ovoga raspršenja  $\mathcal{A}_0$  jednostavno se može izračunati koristeći elektroslaba Feynmanova pravila izložena u dodatku A:

$$i\mathcal{A}_0 = \left[ \bar{c} \frac{ig_W}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) b \right] \left[ \bar{u} \frac{ig_W}{2\sqrt{2}} \gamma^\nu (1 - \gamma_5) d \right] \frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2 - m_W^2} V_{cb} V_{ud}^*, \quad (2.1)$$

gdje smo s  $p$  označili ukupan četveroimpuls početnih, odnosno konačnih parova kvarkova

$$p = p_b + p_{\bar{c}} = p_d + p_{\bar{u}}. \quad (2.2)$$

Nastavno na konvencionalne definicije u (1.13), rabeći svojstva lijevih projektora iz izraza (1.10) i (1.11) imamo

$$\psi_L = P_L \psi, \quad \bar{\psi}_L = \bar{\psi} P_R, \quad (2.3)$$

odakle slijedi:

$$\bar{\psi}_1 \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_2 = 2\bar{\psi}_1 \gamma^\mu \left( \frac{1 - \gamma_5}{2} \right) \psi_2 = 2\bar{\psi}_1 \gamma^\mu P_L \psi_2 = 2\bar{\psi}_{1L} \gamma^\mu \psi_{2L}. \quad (2.4)$$

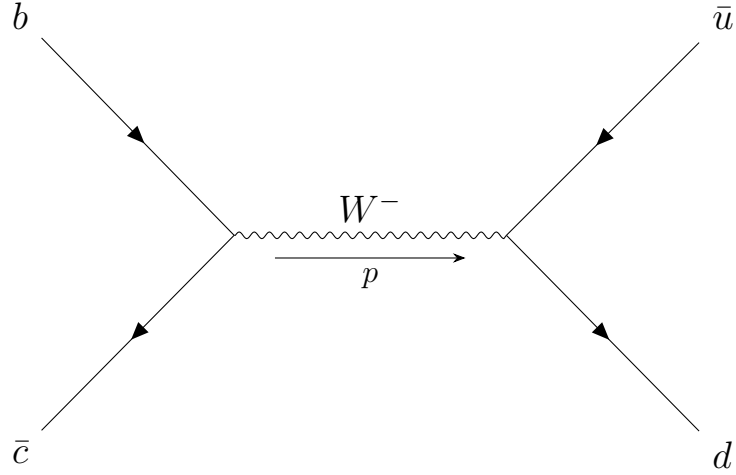
Pomoću posljednjeg rezultata amplitudu (2.1) svodimo na jednostavniji i nama pogodniji oblik

$$i\mathcal{A}_0 = \frac{ig_W^2}{2(p^2 - m_W^2)} (\bar{c}_L \gamma^\mu b_L) (\bar{u}_L \gamma_\mu d_L) V_{cb} V_{ud}^*. \quad (2.5)$$

Nadalje, faktor koji dolazi iz propagatora  $W$  bozona možemo zapisati kao geometrijski red:

$$\frac{1}{p^2 - m_W^2} = -\frac{1}{m_W^2} \frac{1}{1 - \frac{p^2}{m_W^2}} = -\frac{1}{m_W^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{p^2}{m_W^2} \right)^n, \quad p^2 = (p_b + p_{\bar{c}})^2 > 0. \quad (2.6)$$





Slika 2.1: Drvasti dijagram raspršenja  $b$  i  $\bar{c}$  kvarkova u  $d$  i  $\bar{u}$  kvarkove.

Pretpostavimo li da je ukupan četveroimpuls ulaznih kvarkova dovoljno malen, odnosno da vrijedi  $p^2 \ll m_W^2$ , potom geometrijski red (2.6) možemo odsjeći i zadržati se na konačnom broju doprinosa. U našem slučaju uzimamo samo nulti član, tako da u konačnici granasta amplituda  $\mathcal{A}_0$  neće ovisiti o eksternim impulsima

$$i\mathcal{A}_0 \approx -\frac{ig_W^2}{2m_W^2} (\bar{c}_L \gamma^\mu b_L) (\bar{u}_L \gamma_\mu d_L) V_{cb} V_{ud}^*. \quad (2.7)$$

Napominjemo ovdje preciznije da će uvjet  $p^2 \ll m_W^2$  biti ispunjen samo ukoliko su troimpulsi kao i mase svih sudjelujućih kvarkova malene u odnosu na masu  $W$  bozona. To ujedno isključuje  $t$  kvark iz naše analize budući da je njegova masa ( $m_t \approx 172.76$  GeV) znatno veća od mase  $W$  bozona,  $m_W \approx 80.377$  GeV. Usporedbe radi, masa najtežeg kvarka dopuštenog logikom koju ovdje primijenjujemo je masa bottom kvarka,  $m_b \approx 4.18$  GeV.

Kvocijent slabe konstante vezanja  $g_W$  i mase  $W$  bozona  $m_W$  konvencionalno se u literaturi zapisuje preko Fermijeve konstante  $G_F$

$$G_F = \frac{\sqrt{2}}{8} \frac{g_W^2}{m_W^2}. \quad (2.8)$$

Podesnije nam je uvesti modificiranu Fermijevu konstantu  $G$  u čiju su definiciju uključene i numeričke konstante kao i CKM matrični elementi

$$G = \frac{4}{\sqrt{2}} G_F V_{cb} V_{ud}^*. \quad (2.9)$$

Konačan izraz za granastu amplitudu (2.1) s uvrštavanjem modificirane Fermijeve konstante iz (2.9) u niskoenergijskom limesu je

$$\mathcal{A}_0 = -G (\bar{c}_L \gamma^\mu b_L) (\bar{u}_L \gamma_\mu d_L). \quad (2.10)$$

Isti takav rezultat, dobiven u najnižem redu razvoja po malom parametru  $\frac{p^2}{m_W^2}$ , reproducira efektivni hamiltonijan međudjelovanja  $\mathcal{H}_{eff,0}$

$$\mathcal{H}_{eff,0} = G (\bar{c}_L \gamma^\mu b_L) (\bar{u}_L \gamma_\mu d_L), \quad (2.11)$$

što predstavlja standardnu Fermijevu teoriju za koju je danas dobro poznato da predstavlja efektivan opis slabe interakcije sadržane u elektroslabom lagranžijanu (1.15).

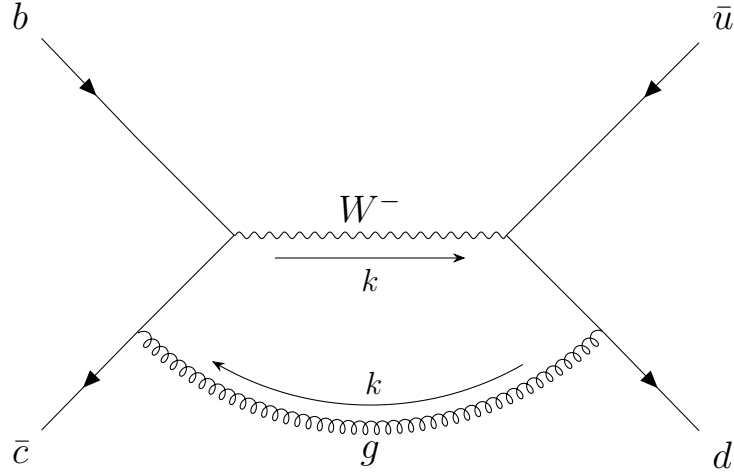
## 2.2 Razina jedne petlje

U sljedećem koraku gledamo učinke višeg reda, dijagrame s jednom petljom. Za to nam je potrebna teorija jake interakcije koja je uvedena izrazom (1.22). Korekcije koje potječu od jake interakcije na razini petlje dominiraju nad elektroslabim efektima višeg reda budući da je jako vezanje znatno moćnije od elektroslaboga, što se također vidi uspoređujući njihove konstante fine strukture

$$\begin{aligned} \alpha_S &= \frac{g_S^2}{4\pi}, & \alpha_W &= \frac{g_W^2}{4\pi}, \\ \alpha_S &\sim 0.1, & \alpha_W &\sim 0.01, \end{aligned} \quad (2.12)$$

odakle se vidi da su jedнопетљени doprinosi od jake interakcije istog reda veličine kao i granasti elektroslab doprinos sa slike 2.1. Međutim, iako je poznata neperturbativnost jake interakcije na niskim energijama, zbog prisutnosti fenomena asimptotske slobode te teorije njezino efektivno vezanje  $\alpha_S$  pada s porastom energijske skale procesa (više na [3] i [11]). Tipične energije koje se pojavljuju u našem problemu su masa  $b$  kvarka,  $m_b$  i masa  $W$  bozona,  $m_W$ , ranije navedene u diskusiji oko Fermijeve teorije, a u tom rasponu jako vezanje  $\alpha_S$  poprima vrijednost reda veličine  $10^{-1}$  i račun smetnje postaje smislen.

Zanimaju nas isključivo korekcije amputirane amplitude za proces  $b\bar{c} \rightarrow d\bar{u}$  na



Slika 2.2: Prvi dijagram raspršenja  $b$  i  $\bar{c}$  kvarkova u  $d$  i  $\bar{u}$  kvarkove s korekcijom od jednog gluona.

razini jedne petlje koje dolaze od jake interakcije. Drugim riječima, ne uzimamo u obzir renormalizaciju vanjskih noga (odnosno kvarkova) u dijagramima kao posljedicu samoenergije fermiona, iako ćemo kasnije razmotriti i taj doprinos pri rješavanju jednadžbe renormalizacijske grupe.

Prvi takav dijagram nalazi se na slici 2.2. Označimo li njegovu amplitudu s  $\mathcal{A}_1$ , ona je dana preko Feynmanovih pravila kao

$$i\mathcal{A}_1 = \int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \left[ \bar{c}_L(-ig_S t^a \gamma^\alpha) \frac{-i\not{k}}{k^2} \frac{ig_W}{\sqrt{2}} \gamma^\mu b_L \right] \left[ \bar{d}_L(-ig_S t^b \gamma^\beta) \frac{i\not{k}}{k^2} \frac{ig_W}{\sqrt{2}} \gamma^\nu u_L \right] \cdot \frac{-ig_{\alpha\beta} \delta_{ab}}{k^2} \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 - m_W^2} V_{cb} V_{ud}^*, \quad (2.13)$$

gdje smo odmah napravili regularizacijski korak prelaskom s integracije petljenog impulsa  $k$  u četiri fizikalne dimenzije na  $d$  dimenzija, uvodeći pritom proizvoljnu energijsku skalu  $\mu$  kojom osiguravamo da je ukupna dimenzija integracijske mjere

$$\frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \quad (2.14)$$

nepromijenjena. Motivacija za uvođenje skale  $\mu$  će postati kasnije jasna kad ćemo rješavati jednadžbe renormalizacijske grupe za efektivnu teoriju. U izrazu (2.13) napravljen je niz pojednostavljenja kojima ćemo si olakšati ovaj i naredne račune. Mase svih kvarkova koji sudjeluju u procesu su zanemarene budući da su znatno manje od mase virtualnog  $W$  bozona. Drugo pojednostavljenje koje je napravljeno jest zanemarivanje četveroimpulsa kvarkova, konzistentno s niskoenergijskim limesom

teorije. Vidjet ćemo da će posljednje dovesti do pojave infracrvenih divergencija u amplitudama. Uz uobičajeno usrednjenje po svih smjerovima četveroimpulsa  $k$  koje glasi

$$k_\alpha k_\beta \rightarrow \frac{k^2}{d} g_{\alpha\beta}, \quad (2.15)$$

dobivamo

$$i\mathcal{A}_1 = -\frac{g_W^2 g_S^2}{2} [\bar{c}_L \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu t^a b_L] [\bar{d}_L \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu t^a u_L] \int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \frac{1}{d} \frac{1}{k^2 k^2 (k^2 - m_W^2)} V_{cb} V_{ud}^*. \quad (2.16)$$

Da bismo mogli nastaviti s računom pomoću formula iskazanih u dodatku C, potrebno je produkt nazivnika propagatora

$$\frac{1}{k^2 k^2 (k^2 - m_W^2)} \quad (2.17)$$

pretvoriti u oblik

$$\frac{1}{(k^2 - \Delta)^n}. \quad (2.18)$$

Posljednje možemo postići iskoristimo li Feynmanovu parametrizaciju (dokaz se može naći npr. u [10]):

$$\frac{1}{a_1 \dots a_n} = \int_0^1 dx_1 \dots dx_n \delta \left( 1 - \sum_{i=1}^n x_i \right) \frac{(n-1)!}{(x_1 a_1 + \dots + x_n a_n)^n}, \quad (2.19)$$

odakle se dobiva

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2 k^2 (k^2 - m_W^2)} &= \int_0^1 dx dy dz \delta(1-x-y-z) \frac{2}{((x+y+z)k^2 - z m_W^2)^3} = \\ &= \int_0^1 dx dy dz \delta(1-x-y-z) \frac{2}{(k^2 - z m_W^2)^3} = \\ &= \int_0^1 dz (1-z) \frac{2}{(k^2 - z m_W^2)^3}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

gdje smo proveli integraciju po Feynmanovim parametrima  $x$  i  $y$  budući da je jedina ovisnost integranda o njima sadržana u Diracovoj delta funkciji. Time amplituda  $\mathcal{A}_1$

poprima oblik

$$i\mathcal{A}_1 = -\frac{g_W^2 g_S^2}{2} [\bar{c}_L \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu t^a b_L] [\bar{d}_L \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu t^a u_L] V_{cb} V_{ud}^* \cdot \int \int_0^1 \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} dz (1-z) \frac{1}{d} \frac{2}{(k^2 - z m_W^2)^3}. \quad (2.21)$$

Ovdje uvodimo pokratu  $I$  za integral koji nam preostaje za izvrjedniti kako ga ne bismo vukli s ostalim faktorima u amplitudi

$$I = \int \int_0^1 \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} dz (1-z) \frac{1}{d} \frac{2}{(k^2 - z m_W^2)^3}, \quad (2.22)$$

a jedan od izraza do kojeg smo u posljednjem koraku došli

$$\int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - z m_W^2)^3}, \quad (2.23)$$

uz identifikaciju

$$z m_W^2 \equiv \Delta, \quad (2.24)$$

upravo odgovara integralu tipa  $I_{03}(\Delta)$  definiranom u dodatku C. Stoga imamo

$$I = \int_0^1 dz (1-z) \frac{2}{d} I_{03}(\Delta = z m_W^2). \quad (2.25)$$

Iz izraza (C.3) možemo očitati vrijednost impulsnog integrala  $I_{03}(\Delta)$  koju uvrštavamo u (2.25)

$$I = \int_0^1 dz (1-z) \frac{2}{d} \frac{-i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(3 - \frac{d}{2})}{\Gamma(3)} \frac{1}{z m_W^2} \left( \frac{\mu^2}{z m_W^2} \right)^{2 - \frac{d}{2}}. \quad (2.26)$$

Povratkom u četiri fizikalne dimenzije vidimo da je iznos  $\Gamma$  funkcije konačan

$$\Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \stackrel{d \rightarrow 4}{=} 1, \quad (2.27)$$

što znači da je ukupna amplituda  $\mathcal{A}_1$  slobodna od ultraljubičastih divergencija. Međutim, ne možemo jednostavno uzeti limes  $d \rightarrow 4$  jer nam je tada problematičan integral po

trećem Feynmanovom parametru  $z$

$$\int_0^1 dz \frac{1-z}{z}, \quad (2.28)$$

koji je divergentan. S time je korisno ovdje uvesti razlikovanje dviju vrsta divergencija dijagrama koje se mogu pojaviti u računima petlji. Jedna ima izvor u tome da je domena integracije po četveroimpulsima virtualnih čestica u petljama neomeđena odozgo i manifestira se u okviru dimenzionalne regularizacije kao pol  $\Gamma$  funkcije kada se uzme fizikalni limes od četiri dimenzije. Druga vrsta divergencija se pojavljuje prilikom integracije po Feynmanovim parametrima i to konkretno u području njihovih malih vrijednosti. Glede na to odgađamo uzimanje fizikalnog  $d \rightarrow 4$  slučaja za sam kraj računa pa stoga imamo

$$I = \frac{-i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{1}{dm_W^2} \Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{\mu^2}{m_W^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} \int_0^1 dz (1-z) z^{\frac{d}{2}-3}. \quad (2.29)$$

Za  $d > 4$  izraz

$$\int_0^1 dz (1-z) z^{\frac{d}{2}-3} = \frac{2}{d-4} - \frac{2}{d-2} \quad (2.30)$$

je dobro definiran i regularan. Definiramo li sada, po pretpostavci malen, parametar  $\epsilon$

$$\epsilon \equiv 4 - d, \quad (2.31)$$

nastavljamo s razvojem svih funkcija koje ovise o dimenziji integracije  $d$  unutar izraza  $I$  za koje je jednostavno pokazati:

$$\frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} = \frac{1}{(4\pi)^2} \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \ln 4\pi\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2), \quad (2.32)$$

$$\left(\frac{\mu^2}{m_W^2}\right)^{2-\frac{d}{2}} = 1 + \frac{\epsilon}{2} \ln \frac{\mu^2}{m_W^2} + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\epsilon}{4}\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2),$$

$$\frac{2}{d-2} = 1 + \frac{\epsilon}{2} + \mathcal{O}(\epsilon^2).$$

Kod  $\Gamma$  funkcije koristimo svojstvo  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$  i razvoj

$$\Gamma(\epsilon) = \frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (2.33)$$

gdje smo s  $\gamma$  označili Euler-Mascheronijevu konstantu ( $\gamma = 0.5772156649\dots$ ) da bismo na kraju dobili

$$\Gamma\left(3 - \frac{d}{2}\right) = \left(2 - \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) = \frac{\epsilon}{2} \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma\right) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (2.34)$$

Uvrštavanjem (2.32) i (2.34) u (2.29) vodi nas na

$$\begin{aligned} I &= \frac{-i}{m_W^2(4\pi)^2} \frac{1}{4} \left(1 + \frac{\epsilon}{4}\right) \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma\right) \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \ln \frac{\mu^2}{m_W^2}\right) \left(-\frac{2}{\epsilon} - 1 - \frac{\epsilon}{2}\right) = \\ &= \frac{i}{64\pi^2 m_W^2} \left(\frac{2}{\epsilon} + \frac{3}{2} + \ln 4\pi - \gamma + \ln \frac{\mu^2}{m_W^2}\right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Uz redefiniciju energijske skale  $\tilde{\mu}^2 \equiv 4\pi e^{-\gamma} \mu^2$  konačno imamo gotov izraz za  $I$

$$I = \frac{i}{32\pi^2 m_W^2} \left(\frac{1}{\epsilon_{IR}} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m_W^2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon_{IR}). \quad (2.36)$$

Napomenimo ovdje da limes  $\epsilon_{IR} \rightarrow 0$  uzimamo odozdo, dakle vrijedi  $\epsilon_{IR} < 0$ , odnosno  $d > 4$  zbog toga što time osiguravamo pozitivnu definitnost integrala (2.30). U krajnjim rezultatima zadržavamo samo divergentne doprinose, ako postoje, kao i doprinose koji ne ovise o dimenziji integracije budući da članovi reda  $\mathcal{O}(\epsilon_{IR})$  iščezavaju pri konačnom uzimanju limesa  $\epsilon \rightarrow 0$ . Ujedno smo, kao podsjetnik, preimenovali  $\epsilon$  u  $\epsilon_{IR}$  jer postupkom renormalizacije teorije s kojim ćemo se kasnije baviti možemo ukloniti samo ultraljubičaste divergencije, ne i infracrvene. Izraz  $I$  će nam se pojavljivati također u identičnom ili sličnom obliku u kasnijim dijagramima u ovome poglavlju, tako da će nam njihovi računi biti znatno skraćeni pozivanjem na formulu (2.36).

Preostaje srediti ostale faktore koji se nalaze u izrazu za amplitudu (2.21), a započinjemo s umnoškom spinora

$$[\bar{c}_L \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu t^a b_L] [\bar{d}_L \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu t^a u_L], \quad (2.37)$$

koji se uporabom prvog Fierzovog identiteta iz dodatka D

$$(\bar{\psi}_{1L}\gamma^\nu\gamma^\alpha\gamma^\mu\psi_{2L})(\bar{\psi}_{3L}\gamma_\nu\gamma_\alpha\gamma_\mu\psi_{4L}) = 16(\bar{\psi}_{1L}\gamma^\mu\psi_{2L})(\bar{\psi}_{3L}\gamma_\mu\psi_{4L}), \quad (2.38)$$

može pojednostaviti u

$$[\bar{c}_L\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu t^a b_L][\bar{d}_L\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu t^a u_L] = 16[\bar{c}_L\gamma^\mu t^a b_L][\bar{d}_L\gamma_\mu t^a u_L]. \quad (2.39)$$

Napominjemo da produkt (2.39) implicitno također sadrži produkt boja četiriju kvarkova kao i dviju matrica  $t^a$  generatora  $SU(3)$  grupe; prisutnost matrica možemo ukloniti identitetom (B.4) iz dodatka B

$$t_{ij}^a t_{kl}^a = \frac{1}{2} \left( \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \right), \quad (2.40)$$

čime konačno uz pomoć drugog Fierzovog identiteta iz dodatka D imamo

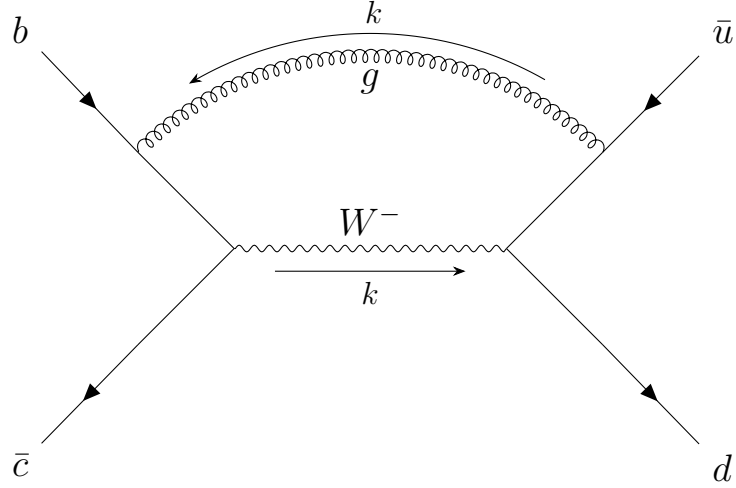
$$\begin{aligned} [\bar{c}_L\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu t^a b_L][\bar{d}_L\gamma_\alpha\gamma_\beta\gamma_\mu t^a u_L] &= 8[\bar{c}_{L,i}\gamma^\mu b_{L,j}][\bar{d}_{L,k}\gamma_\mu u_{L,l}] \left( \delta_{il}\delta_{jk} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{kl} \right) = \\ &= 8 \left[ (\bar{c}_L\gamma^\mu u_L)(\bar{d}_L\gamma_\mu b_L) - \frac{1}{3}(\bar{c}_L\gamma^\mu b_L)(\bar{d}_L\gamma_\mu u_L) \right], \end{aligned} \quad (2.41)$$

i pritom se podrazumijeva suma po bojama između odgovarajućih spinora u svakoj od zagrada. Amplituda  $\mathcal{A}_1$ , izražena preko izraza (2.36) i (2.41), glasi

$$\mathcal{A}_1 = -G \frac{\alpha_S}{\pi} \left( \frac{1}{\epsilon_{IR}} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m_W^2} \right) \left[ (\bar{c}_L\gamma^\mu u_L)(\bar{d}_L\gamma_\mu b_L) - \frac{1}{3}(\bar{c}_L\gamma^\mu b_L)(\bar{d}_L\gamma_\mu u_L) \right]. \quad (2.42)$$

Nastavljamo s računom amplitude drugoga dijagrama  $\mathcal{A}_2$  koji je prikazan na slici 2.3. Osnova procesa je i dalje raspršenje  $b$  i  $\bar{c}$  kvarkova u  $d$  i  $\bar{u}$  kvarkove preko virtualnog  $W$  bozona, s time da sada ulazni  $b$  kvark te izlazni  $\bar{u}$  antikvark razmjenjuju gluon. Dobiva se zrcaljenjem prvoga dijagrama 2.2 oko osi  $W$  bozona, stoga zbog prisutne simetrije u problemu očekujemo da će druga amplituda biti jednaka prvoj. Za amplitudu  $\mathcal{A}_2$  imamo:





Slika 2.3: Drugi dijagram raspršenja  $b$  i  $\bar{c}$  kvarkova u  $d$  i  $\bar{u}$  kvarkove s korekcijom od jednog gluona.

$$i\mathcal{A}_2 = \int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \left[ \bar{c}_L \frac{ig_W}{\sqrt{2}} \gamma^\mu \frac{i\cancel{k}}{k^2} (-ig_S t^a \gamma^\alpha) b_L \right] \left[ \bar{d}_L \frac{ig_W}{\sqrt{2}} \gamma^\nu \frac{-i\cancel{k}}{k^2} (-ig_S t^b \gamma^\beta) u_L \right] \cdot \frac{-ig_{\alpha\beta} \delta_{ab}}{k^2} \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 - m_W^2} V_{cb} V_{ud}^* \quad (2.43)$$

čijim se pojednostavljenjem dobije

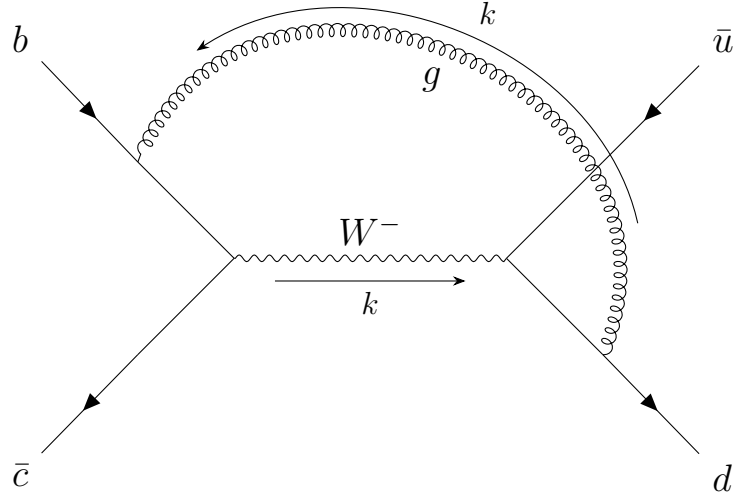
$$i\mathcal{A}_2 = -\frac{g_W^2 g_S^2}{2} V_{cb} V_{ud}^* \left[ \bar{c}_L \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\alpha t^a b_L \right] \left[ \bar{d}_L \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\alpha t^a u_L \right] \int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \frac{1}{d} \frac{1}{k^2 k^2 (k^2 - m_W^2)} \quad (2.44)$$

Uspoređujući izraz (2.44) s izrazom (2.16) vidimo da su amplitude  $\mathcal{A}_1$  i  $\mathcal{A}_2$  identične jedna drugoj. Zbog toga možemo odmah zapisati

$$\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 = -G \frac{\alpha_S}{\pi} \left( \frac{1}{\epsilon_{IR}} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m_W^2} \right) \left[ (\bar{c}_L \gamma^\mu u_L) (\bar{d}_L \gamma_\mu b_L) - \frac{1}{3} (\bar{c}_L \gamma^\mu b_L) (\bar{d}_L \gamma_\mu u_L) \right] \quad (2.45)$$

Treći dijagram raspršenja s jednim gluonom, sada između  $b$  i  $d$  kvarkova, prikazan je na slici 2.4. Amplitudu  $\mathcal{A}_3$  jednostavno je napisati

$$i\mathcal{A}_3 = \int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \left[ \bar{c}_L \frac{ig_W}{\sqrt{2}} \gamma^\mu \frac{i\cancel{k}}{k^2} (-ig_S t^a \gamma^\alpha) b_L \right] \left[ \bar{d}_L (-ig_S t^b \gamma^\beta) \frac{i\cancel{k}}{k^2} \frac{ig_W}{\sqrt{2}} \gamma^\nu u_L \right] \cdot \frac{-ig_{\alpha\beta} \delta_{ab}}{k^2} \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 - m_W^2} V_{cb} V_{ud}^* \quad (2.46)$$



Slika 2.4: Treći dijagram raspršenja  $b$  i  $\bar{c}$  kvarkova u  $d$  i  $\bar{u}$  kvarkove s korekcijom od jednog gluona.

odakle se uz standardno usrednjenje po svim smjerovima četveroimpulsa u petlji kao što je napravljeno i u prethodna dva računa

$$k_\alpha k_\beta \rightarrow \frac{k^2}{d} g_{\alpha\beta}, \quad (2.47)$$

dobiva  $\mathcal{A}_3$

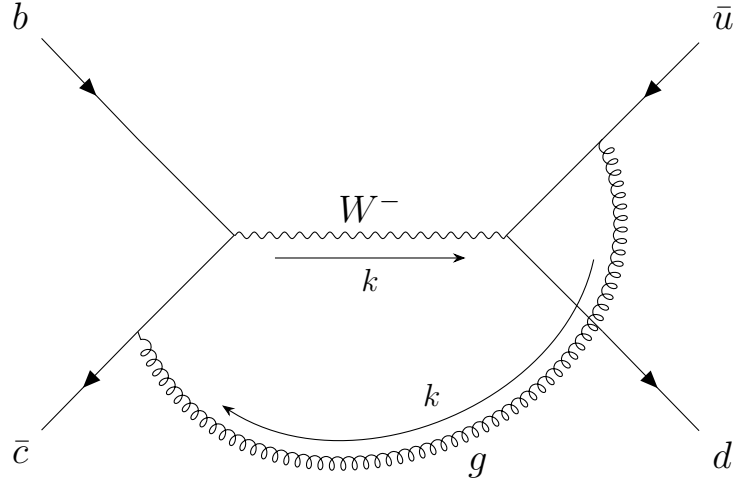
$$i\mathcal{A}_3 = \frac{g_W^2 g_S^2}{2} V_{cb} V_{ud}^* [\bar{c}_L \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\alpha t^a b_L] [\bar{d}_L \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu t^a u_L] \int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \frac{1}{d} \frac{1}{k^2 k^2 (k^2 - m_W^2)}. \quad (2.48)$$

Dobiven rezultat vrlo je sličan prethodnim dvama amplitudama. Integral u (2.49) posve je jednak integralu koji smo označili s  $I$  u definiciji (2.22) i detaljno izračunali tako da samo prepisujemo rezultat iz relacije (2.36)

$$\int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \frac{1}{d} \frac{1}{k^2 k^2 (k^2 - m_W^2)} = \frac{i}{32\pi^2 m_W^2} \left( \frac{1}{\epsilon_{IR}} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m_W^2} \right), \quad (2.49)$$

gdje smo doprinose proporcionalne  $\mathcal{O}(\epsilon_{IR})$  zanemarili. Jedina bitna razlika u ovome slučaju jest ta da je tenzorska struktura produkta spinora i  $\gamma$  matrica

$$[\bar{c}_L \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\alpha t^a b_L] [\bar{d}_L \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu t^a u_L] \quad (2.50)$$



Slika 2.5: Četvrti dijagram raspršenja  $b$  i  $\bar{c}$  kvarkova u  $d$  i  $\bar{u}$  kvarkove s korekcijom od jednog gluona.

različita od prethodne koju smo vidjeli. Treći Fierzov identitet (D.2) nam omogućuje eliminaciju dvaju parova  $\gamma$  matrica

$$[\bar{c}_L \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\alpha t^a b_L] [\bar{d}_L \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu t^a u_L] = 4 [\bar{c}_L \gamma^\mu t^a b_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu t^a u_L], \quad (2.51)$$

odakle dalje slijedi

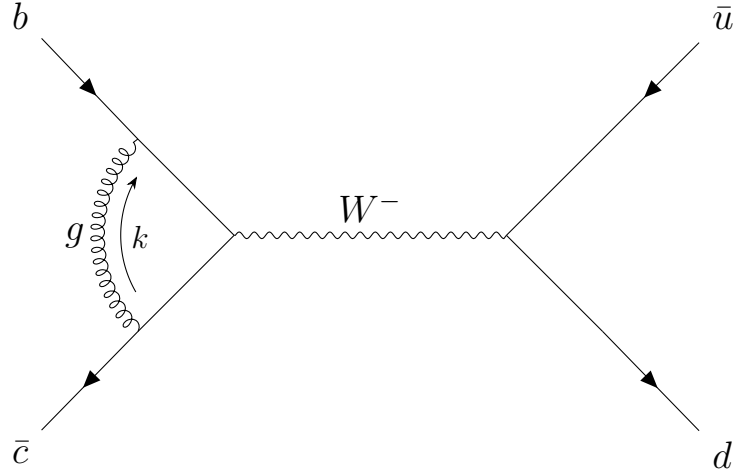
$$\begin{aligned} 4 [\bar{c}_L \gamma^\mu t^a b_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu t^a u_L] &\stackrel{(B.4)}{=} 4 [\bar{c}_{L,i} \gamma^\mu b_{L,j}] [\bar{d}_{L,k} \gamma_\mu u_{L,l}] \frac{1}{2} \left( \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) = \\ &= 2 \left[ (\bar{c}_L \gamma^\mu u_L) (\bar{d}_L \gamma_\mu b_L) - \frac{1}{3} (\bar{c}_L \gamma^\mu b_L) (\bar{d}_L \gamma_\mu u_L) \right]. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Kada uvrstimo (2.49) i (2.52) u izraz (2.48) imamo konačno

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3 &= \frac{g_W^2 g_S^2}{2} 2V_{cb} V_{ud}^* \left[ (\bar{c}_L \gamma^\mu u_L) (\bar{d}_L \gamma_\mu b_L) - \frac{1}{3} (\bar{c}_L \gamma^\mu b_L) (\bar{d}_L \gamma_\mu u_L) \right] \cdot \\ &\quad \cdot \frac{1}{32\pi^2 m_W^2} \left( \frac{1}{\epsilon_{IR}} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m_W^2} \right), \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\mathcal{A}_3 = G \frac{\alpha_S}{4\pi} \left( \frac{1}{\epsilon_{IR}} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m_W^2} \right) \left[ (\bar{c}_L \gamma^\mu u_L) (\bar{d}_L \gamma_\mu b_L) - \frac{1}{3} (\bar{c}_L \gamma^\mu b_L) (\bar{d}_L \gamma_\mu u_L) \right].$$

Amplituda četvrtog dijagrama s gluonskom petljom je



Slika 2.6: Peti dijagram raspršenja  $b$  i  $\bar{c}$  kvarkova u  $d$  i  $\bar{u}$  kvarkove s korekcijom od jednog gluona.

$$\begin{aligned}
i\mathcal{A}_4 &= \int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \left[ \bar{c}_L (-ig_S t^a \gamma^\alpha) \frac{-i\cancel{k}}{k^2} \frac{ig_W}{\sqrt{2}} \gamma^\mu b_L \right] \left[ \bar{d}_L \frac{ig_W}{\sqrt{2}} \gamma^\nu \frac{-i\cancel{k}}{k^2} (-ig_S t^b \gamma^\beta) u_L \right] \cdot \\
&\quad \cdot \frac{-ig_{\alpha\beta} \delta_{ab}}{k^2} \frac{-ig_{\mu\nu}}{k^2 - m_W^2} V_{cb} V_{ud}^* = \\
&= \frac{g_W^2 g_S^2}{2} V_{cb} V_{ud}^* [\bar{c}_L \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu t^a b_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\alpha t^b u_L] \int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \frac{1}{d} \frac{1}{k^2 k^2 (k^2 - m_W^2)},
\end{aligned} \tag{2.54}$$

čime u skladu s očekivanjima potvrđujemo da je jednaka amplitudi trećega dijagrama  $\mathcal{A}_3$ , usporedbom s relacijom (2.48). Stoga vrijedi

$$\mathcal{A}_4 = G \frac{\alpha_S}{4\pi} \left( \frac{1}{\epsilon_{IR}} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m_W^2} \right) \left[ (\bar{c}_L \gamma^\mu u_L) (\bar{d}_L \gamma_\mu b_L) - \frac{1}{3} (\bar{c}_L \gamma^\mu b_L) (\bar{d}_L \gamma_\mu u_L) \right]. \tag{2.55}$$

Posljednja dva dijagrama uključuju razmjenu gluona samo između kvarkova u ulaznom, odnosno izlaznom kanalu. Amplituda dijagrama sa slike 2.6 je

$$\begin{aligned}
i\mathcal{A}_5 &= \int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \left[ \bar{c}_L (-ig_S t^a \gamma^\alpha) \frac{i\cancel{k}}{k^2} \frac{ig_W}{\sqrt{2}} \gamma^\mu \frac{i\cancel{k}}{k^2} (-ig_S t^b \gamma^\beta) b_L \right] \left[ \bar{d}_L \frac{ig_W}{\sqrt{2}} \gamma^\nu u_L \right] \cdot \\
&\quad \cdot \frac{-ig_{\alpha\beta} \delta_{ab}}{k^2} \frac{-ig_{\mu\nu}}{-m_W^2}.
\end{aligned} \tag{2.56}$$

Iz jednakosti (2.56) vidimo da se ovaj dijagram razlikuje od prethodnih po tome da je sada impuls  $W$  bozona jednak nuli i integriramo po nazivnicima od samo dvaju

propagatora. Eksplicitno raspisano imamo

$$i\mathcal{A}_5 = -\frac{g_W^2 g_S^2}{2} V_{cb} V_{ud}^* \frac{1}{m_W^2} [\bar{c}_L \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma_\beta \gamma_\alpha t^a t^a b_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu u_L] \int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \frac{1}{d} \frac{1}{k^2 k^2} \quad (2.57)$$

i s time je jasno da ne možemo iskoristiti raniji rezultat (2.36) za izvrijednjavanje integrala po impulsu  $k$  koji smo ovdje dobili. Štoviše, zbog činjenice da integral (s oznakom  $I'$  koju ubuduće koristimo)

$$I' \equiv \int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 k^2} \quad (2.58)$$

ima dimenziju jednaku nuli očekujemo pojavu logaritamske ultraljubičaste divergencije koja nije prisutna u dosadašnjim računima. Primijetimo također da  $I'$  odgovara prema definiciji (C.1) integralu vrste  $I_{02}$  uz  $\Delta = 0$ , što znači da on nije dobro definiran prema relaciji (C.3). Stoga ćemo, da bismo postigli  $\Delta \neq 0$ , pomnožiti podintegralnu funkciju u (2.58)

$$\frac{1}{k^2 k^2}, \quad (2.59)$$

s jedinicom u sljedećem obliku:

$$1 = \frac{(k+q)^2}{(k+q)^2}, \quad (2.60)$$

gdje je  $q$  proizvoljan četveroimpuls takav da je ispunjen uvjet

$$q^2 < 0, \quad (2.61)$$

motivacija iza zahtjeva (2.61) će postati uskoro jasna. Na dobiven nazivnik možemo sad, kao i prethodno u slučaju integrala  $I$ , primijeniti proceduru Feynmanove parametrizacije

$$\frac{1}{a_1 a_2 a_3} = \int_0^1 dx dy dz \delta(1-x-y-z) \frac{2}{(a_1 x + a_2 y + a_3 z)^3}, \quad (2.62)$$

tako da imamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{k^2 k^2 (k+q)^2} &= 2 \int_0^1 dx dy dz \delta(1-x-y-z) \frac{1}{(xk^2 + yk^2 + z(k+q)^2)^3} = \quad (2.63) \\
&= 2 \int_0^1 dx dy dz \delta(1-x-y-z) \frac{1}{(k^2 + zq^2 + 2zk \cdot q)^3} = \\
&= 2 \int_0^1 dx dy dz \delta(1-x-y-z) \frac{1}{((k+zq)^2 + zq^2 - z^2q^2)^3} = \\
&= 2 \int_0^1 dx dy dz \delta(1-x-y-z) \frac{1}{((k+zq)^2 - z(z-1)q^2)^3}.
\end{aligned}$$

Zajedno s translacijom impulsa po kojem integriramo

$$\begin{aligned}
l &\equiv k + zq, \quad (2.64) \\
d^d k &= d^d l
\end{aligned}$$

i identifikacijom  $\Delta$

$$\Delta(z) \equiv -z(1-z)q^2, \quad (2.65)$$

$I'$  poprima sljedeći oblik:

$$I' = 2 \int_0^1 \int \frac{d^d l \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} dx dy dz \delta(1-x-y-z) \frac{(l + (1-z)q)^2}{(l^2 - \Delta)^3}. \quad (2.66)$$

Brojnik podintegralne funkcije kao i  $\Delta$  ne ovise o parametrima  $x$  i  $y$  zbog čega odmah provodimo integraciju po njima

$$\int_0^1 \int_0^1 dx dy \delta(1-x-y-z) = \int_0^1 dy \theta(1-y-z) \theta(y+z) = 1-z, \quad (2.67)$$

gdje je u (2.67) uvedena tzv. Heavisideova funkcija  $\theta$

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0. \end{cases} \quad (2.68)$$

S time imamo prema (C.3), uz raspisan brojnik u (2.66)

$$\begin{aligned}
I' &= 2 \int_0^1 \int \frac{d^d l \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} dz (1-z) \frac{l^2 + (1-z)^2 q^2}{(l^2 - \Delta)^3} = \\
&= 2 \int_0^1 dz (1-z) (I_{13}(\Delta) + (1-z)^2 q^2 I_{03}(\Delta)) = \\
&= 2 \int_0^1 dz (1-z) \left( \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{2} \left( \frac{\mu^2}{\Delta} \right)^{2 - \frac{d}{2}} + \right. \\
&\quad \left. + q^2 (1-z)^2 \frac{-i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(3 - \frac{d}{2})}{2} \frac{1}{-q^2 z(1-z)} \left( \frac{\mu^2}{\Delta} \right)^{2 - \frac{d}{2}} \right).
\end{aligned} \tag{2.69}$$

Uvodimo pokrate za dva izraza u (2.69):

$$\begin{aligned}
I'_1 &= 2 \int_0^1 dz (1-z) \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{2} \left( \frac{\mu^2}{\Delta} \right)^{2 - \frac{d}{2}}, \\
I'_2 &= 2 \int_0^1 dz (1-z) q^2 (1-z)^2 \frac{-i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(3 - \frac{d}{2})}{2} \frac{1}{-q^2 z(1-z)} \left( \frac{\mu^2}{\Delta} \right)^{2 - \frac{d}{2}}, \\
I' &= I'_1 + I'_2.
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Polazeći opet od definicije, po pretpostavci malenog, parametra  $\epsilon$

$$\epsilon = 4 - d, \tag{2.71}$$

i koristeći razvoje funkcija ovisnih o dimenziji integracije navedene u (2.32) i (2.33) krećemo s računom prvog dijela  $I'$

$$I'_1 = \frac{i}{2(4\pi)^2} \int_0^1 dz (1-z) \left( 1 + \frac{\epsilon}{2} \ln 4\pi \right) (4 - \epsilon) \left( \frac{2}{\epsilon} - \gamma \right) \left( 1 + \frac{\epsilon}{2} \ln \frac{\mu^2}{\Delta} \right) \tag{2.72}$$

te zadržavamo samo divergentne i konstantne doprinose

$$\begin{aligned}
I'_1 &= \frac{i}{32\pi^2} \int_0^1 dz (1-z) \left( \frac{8}{\epsilon} - 4\gamma + 4 \ln 4\pi - 2 + 4 \ln \frac{\mu^2}{\Delta} \right) = \\
&= \frac{i}{32\pi^2} \int_0^1 dz (1-z) \left( \frac{8}{\epsilon} - 4\gamma + 4 \ln 4\pi - 2 + 4 \ln \frac{\mu^2}{-q^2} - 4 \ln(z(1-z)) \right).
\end{aligned} \tag{2.73}$$

Iz posljednjeg retka (2.73) jasno je da smo zahtjevali  $q^2 < 0$  kako bismo osigurali dobro definiran logaritamski član. Integral po trećem Feynmanovom parametru  $z$  je

jednostavan za izvrijedniti i stoga je prva polovica integrala  $I'$  jednaka

$$I'_1 = \frac{i}{32\pi^2} \left( \frac{4}{\epsilon_{UV}} - 2\gamma + 2 \ln 4\pi + 3 - 2 \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \right). \quad (2.74)$$

Budući da divergentan parametar  $\frac{1}{\epsilon}$  ima porijeklo u polu  $\Gamma$  funkcije kada se uzme fizikalan četverodimenzionalni limes

$$\Gamma \left( 2 - \frac{d}{2} \right) \xrightarrow{d \rightarrow 4} \infty \quad (2.75)$$

zbog neomeđene integracije po svim mogućim impulsima virtualnih čestica u petlji, preimenovali smo parametar  $\epsilon$  u  $\epsilon_{UV}$  kako bismo ga razlikovali od infracrvenih divergencija s kojima smo se susreli već u prethodnim računima dijagrama. Međutim, ultraljubičaste divergencije moći ćemo odstraniti postupkom renormalizacije elektroslabe teorije u nastavku.

Preostaje za izvrijedniti drugu polovicu integrala  $I'$  definiranu u (2.70) koja je nakon sređivanja jednaka

$$\begin{aligned} I'_2 &= \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma \left( 3 - \frac{d}{2} \right) \int_0^1 dz \frac{(1-z)^2}{z} \left( \frac{\mu^2}{-z(1-z)q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} = \\ &= \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma \left( 3 - \frac{d}{2} \right) \left( \frac{\mu^2}{-q^2} \right)^{2-\frac{d}{2}} \int_0^1 dz z^{\frac{d}{2}-3} (1-z)^{\frac{d}{2}}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Iako ovdje nemamo problema s polom  $\Gamma$  funkcije kao što smo imali u izračunu  $I'_1$  (dakle  $I'_2$  je slobodan od ultraljubičastih divergencija), u četiri dimenzije integral po Feynmanovom parametru  $z$  glasi

$$\int_0^1 dz \frac{(1-z)^2}{z}, \quad (2.77)$$

koji je divergentan u području integracije  $z \approx 0$ . Zato ćemo ponovno kao u slučaju računa izraza  $I$  (vidi (2.36)) integral  $I'_2$  regularizirati tako da ga analitički proširimo na proizvoljnu kompleksnu dimenziju  $d$  i uzimanje limesa  $d \rightarrow 4$  odgodimo za sam kraj. Izraz (2.77) u  $d$  dimenzija možemo zapisati kao

$$\int_0^1 dz z^{\frac{d}{2}-3} (1-z)^{\frac{d}{2}} = \int_0^1 dz z^{(\frac{d}{2}-2)-1} (1-z)^{(\frac{d}{2}+1)-1}, \quad (2.78)$$



čime smo ga sveli na oblik koji po definiciji odgovara Eulerovoj beta funkciji B:

$$B(x_1, x_2) = \int_0^1 dz z^{x_1-1} (1-z)^{x_2-1}. \quad (2.79)$$

Usporedbom (2.78) i (2.79) dolazimo do zaključka

$$\int_0^1 dz z^{\frac{d}{2}-3} (1-z)^{\frac{d}{2}} = B\left(\frac{d}{2}-2, \frac{d}{2}+1\right) = B\left(-\frac{\epsilon}{2}, 3-\frac{\epsilon}{2}\right), \quad (2.80)$$

rabeći ponovno parametar  $\epsilon$  iz (2.71) po kojem razvijamo sve dimenzijski ovisne funkcije. Praktična korist koju imamo od identifikacije integrala u (2.76) s beta funkcijom je njezina dobro poznata poveznica s  $\Gamma$  funkcijom

$$B(x_1, x_2) = \frac{\Gamma(x_1)\Gamma(x_2)}{\Gamma(x_1+x_2)}, \quad (2.81)$$

iz koje dobivamo primjenom identiteta na (2.80):

$$\int_0^1 dz z^{\frac{d}{2}-3} (1-z)^{\frac{d}{2}} = B\left(-\frac{\epsilon}{2}, 3-\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(-\frac{\epsilon}{2}\right)\Gamma\left(3-\frac{\epsilon}{2}\right)}{\Gamma(3-\epsilon)}. \quad (2.82)$$

Integral (2.82) sad je moguće razviti u red po  $\epsilon$  pomoću identiteta  $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ :

$$\Gamma(-\epsilon) = -\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon), \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned} \Gamma\left(3-\frac{\epsilon}{2}\right) &= \left(2-\frac{\epsilon}{2}\right)\Gamma\left(2-\frac{\epsilon}{2}\right) = \left(2-\frac{\epsilon}{2}\right)\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right) = \\ &= \left(2-\frac{\epsilon}{2}\right)\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)\left(-\frac{\epsilon}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{\epsilon}{2}\right) = \frac{\epsilon}{2}\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)\left(2-\frac{\epsilon}{2}\right)\left(\frac{2}{\epsilon} + \gamma\right), \end{aligned}$$

$$\Gamma(3-\epsilon) = \epsilon(1-\epsilon)(2-\epsilon)\left(\frac{1}{\epsilon} + \gamma\right).$$

Kada sakupimo sve zajedno i uvrstimo (2.83), (2.32) te (2.34) u (2.76) imamo

$$I'_2 = \frac{-i}{16\pi^2} \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \ln 4\pi\right) \left(1 + \frac{\epsilon}{2} \ln \frac{\mu^2}{-q^2}\right) \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma\right) \left(\frac{2}{\epsilon} + \gamma\right) \cdot \frac{\frac{\epsilon}{2} \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) \left(2 - \frac{\epsilon}{2}\right) \left(\frac{2}{\epsilon} + \gamma\right)}{2\epsilon(1-\epsilon)\left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)\left(\frac{1}{\epsilon} + \gamma\right)}. \quad (2.84)$$

$$\begin{aligned}
I'_2 &= -\frac{i}{16\pi^2} \left( 1 + \frac{\epsilon}{2} \ln 4\pi + \frac{\epsilon}{2} \ln \frac{\mu^2}{-q^2} \right) \left( 1 - \frac{\epsilon}{2} \gamma \right) \left( \frac{2}{\epsilon} + \gamma \right) \frac{2 - \frac{\epsilon}{2}}{4} \frac{1 + \frac{\epsilon}{2} \gamma}{(1 - \epsilon) \left( \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2} \gamma \right)} = \\
&= -\frac{i}{32\pi^2} \left( \frac{4}{\epsilon} + 4\gamma - 1 + 2 \ln 4\pi + 2 \ln \frac{\mu^2}{-q^2} - 2\gamma \right) (1 - \epsilon\gamma + \epsilon),
\end{aligned}$$

gdje je u posljednjem retku nazivnik razvijen u geometrijski red:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1 - \epsilon) \left( \frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2} \gamma \right)} &= \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{\epsilon}{2} \gamma - \frac{\epsilon}{2} - 2 \left( \frac{\epsilon}{2} \right)^2 \gamma} = \frac{1}{\frac{1}{2} \left( 1 - \left( -\epsilon\gamma + \epsilon + 4 \left( \frac{\epsilon}{2} \right)^2 \gamma \right) \right)} = \quad (2.85) \\
&= 2(1 - \epsilon\gamma + \epsilon) + \mathcal{O}(\epsilon^2).
\end{aligned}$$

S time možemo konačno, uz standardno zadržavanje divergentnog člana te člana neovisnog o dimenziji integracije, napisati rezultat za  $I'_2$  prema (2.84)

$$I'_2 = -\frac{i}{32\pi^2} \left( \frac{4}{\epsilon} - 2\gamma + 2 \ln 4\pi + 3 - 2 \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \right), \quad (2.86)$$

a uz već običajno preimenovanje  $\epsilon \rightarrow \epsilon_{IR}$  s kojim bilježimo porijekla divergencija u dijagramima ispada

$$I'_2 = -\frac{i}{32\pi^2} \left( \frac{4}{\epsilon_{IR}} - 2\gamma + 2 \ln 4\pi + 3 - 2 \ln \frac{-q^2}{\mu^2} \right). \quad (2.87)$$

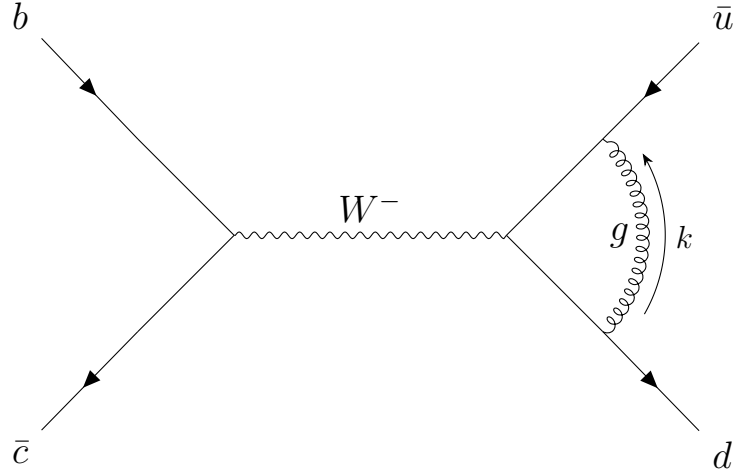
Zbroj izraza (2.74) i (2.87) nam daje traženi  $I'$

$$I' = I'_1 + I'_2 = \frac{i}{8\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon_{UV}} - \frac{1}{\epsilon_{IR}} \right), \quad (2.88)$$

na koji ćemo se također pozivati redovito u daljnjim dijagramatskim računima.

Očekivano, krajnji izraz ne pokazuje nikakvu ovisnost o proizvoljnom impulsu  $q$ , takav da vrijedi  $q^2 < 0$ , koji smo uveli kako bismo dobili dobro definiranu skalu  $\Delta$  i omogućili si izravnu primjenu rješenja iz dodatka C. Zbog odsustva karakteristične energijske skale poput mase  $W$  bozona koju smo prije vidjeli integral  $I'$  sadrži samo dva divergentna doprinosa, bez konačnih dijelova; jedna divergencija je infracrvena (vrijedi  $\epsilon_{IR} < 0$  kako bismo osigurali pozitivnu definitnost izraza (2.78)), dok je druga ultraljubičasta po svojoj prirodi (gdje je  $\epsilon_{UV} > 0$ ).

S rješenjem (2.88) vraćamo se izrazu za amplitudu petog dijagrama sa slike 2.6  $\mathcal{A}_5$  iz jednakosti (2.57). Elektroslabu struju koju tvore  $b$  i  $\bar{c}$  kvarkovi pojednostavljuje se dvostrukom primjenom standardnog identiteta za kontrakciju  $\gamma$  matrica i upora-



Slika 2.7: Šesti dijagram raspršenja  $b$  i  $\bar{c}$  kvarkova u  $d$  i  $\bar{u}$  kvarkove s korekcijom od jednog gluona.

bom identiteta za generatore  $SU(3)$  grupe (B.6)

$$\bar{c}_L \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma_\beta \gamma_\alpha t^a t^a b_L = \frac{16}{3} \bar{c}_L \gamma^\mu b_L. \quad (2.89)$$

To nas dovodi do

$$i\mathcal{A}_5 = -\frac{g_W^2 g_S^2}{2} V_{cb} V_{ud}^* \frac{1}{m_W^2} \frac{16}{3} [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu u_L] \frac{1}{4} \frac{i}{8\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon_{UV}} - \frac{1}{\epsilon_{IR}} \right), \quad (2.90)$$

$$\mathcal{A}_5 = -\frac{2}{3} \frac{\alpha_S}{\pi} G \left( \frac{1}{\epsilon_{UV}} - \frac{1}{\epsilon_{IR}} \right) [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu u_L].$$

Brzom provjerom se lako uvjeriti da je šesti i posljednji dijagram raspršenja  $b\bar{c} \rightarrow d\bar{u}$  sa slike 2.7 identičan petom

$$i\mathcal{A}_6 = \int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \left[ \bar{c}_L \frac{ig_W}{\sqrt{2}} \gamma^\mu b_L \right] \left[ \bar{d}_L (-ig_S t^a \gamma^\alpha) \frac{ik}{k^2} \frac{ig_W}{\sqrt{2}} \gamma^\nu \frac{ik}{k^2} (-ig_S t^b \gamma^\beta) u_L \right] \cdot \frac{-ig_{\alpha\beta} \delta_{ab} - ig_{\mu\nu}}{k^2 - m_W^2}, \quad (2.91)$$

do na činjenicu da su sada kromodinamički vrhovi i kvarkovski propagatori u 'sendviču' između  $d$  i  $\bar{u}$  kvarkova umjesto  $b$  i  $\bar{c}$  kvarkova pa stoga pišemo bez izravnog računanja

$$\mathcal{A}_6 = -\frac{2}{3} \frac{\alpha_S}{\pi} G \left( \frac{1}{\epsilon_{UV}} - \frac{1}{\epsilon_{IR}} \right) [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu u_L]. \quad (2.92)$$

Ukupnu amplitudu  $\mathcal{A}$  procesa  $b\bar{c} \rightarrow d\bar{u}$  u okviru Standardnog modela dobivamo zbrajanjem svih rezultata koje smo dobili dosad, od  $\mathcal{A}_0$  do  $\mathcal{A}_6$  (vidi (2.10), (2.42), (2.45), (2.53), (2.55), (2.90) i (2.92)):

$$\begin{aligned} \mathcal{A} = \sum_{i=0}^6 \mathcal{A}_i = & \left( -G + \frac{G\alpha_S}{2\pi} \left( \frac{11}{3} \frac{1}{\epsilon_{IR}} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m_W^2} \right) \right) [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu u_L] - \quad (2.93) \\ & - \frac{3G\alpha_S}{2\pi} \left( \frac{1}{\epsilon_{IR}} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m_W^2} \right) [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu b_L] - \\ & - \frac{4}{3} \frac{G\alpha_S}{\pi} \frac{1}{\epsilon_{UV}} [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu u_L], \end{aligned}$$

gdje smo u posljednjem retku izraza (2.93) odvojili ultraljubičastu divergenciju petog i šestog dijagrama od ostalih doprinosa zbog njezine podložnosti renormalizacijskom postupku.

Prisutnost infracrvenih divergencija u kontekstu konstrukcije efektivne teorije polja koja opisuje neku interakciju ne predstavlja poteškoću. Vidjet ćemo da će ih dijagrami u efektivnom opisu procesa također sadržavati, budući da potječu od činjenice da smo zanemarili mase kvarkova (osim  $t$  kvarka kojeg ne uključujemo u ovaj opis) u odnosu na masu  $W$  bozona i toga da smo zbog jednostavnosti pretpostavili da su eksterni četveroimpulsi kvarkova jednaki nuli, što je opet konzistentno s osnovnim uvjetom valjanosti efektivne teorije polja

$$p_i^2 \ll m_W^2, \quad (2.94)$$

gdje su s  $p_i$  označeni eksterni impulsi čestica. Stoga efektivan opis raspršenja mora na identičan način reproducirati infracrvene divergencije u dijagramima zbog toga što na eksterne stupnjeve slobode (dakle kvarkove) primijenjujemo iste pretpostavke kao što smo ih primijenjivali u računima u sklopu Standardnog modela, odnosno njihov kinematički opis je isti u oba modela. U radu A. J. Burasa [2] može se vidjeti da, ukoliko se relaksira naša pretpostavka o iščezavanju vanjskih impulsa i uzme jednakost svih kvarkovskih impulsa

$$p_i = p, \quad (2.95)$$

koji su općenito različiti od nule, infracrvene divergencije u našim rezultatima zamijenjene su jednostavno članovima proporcionalnim s

$$\ln \frac{p^2}{\mu^2}. \quad (2.96)$$

### 2.3 Renormalizacija elektroslabe interakcije

Cilj nam je ovdje prikazati, bez dugačke digresije, proceduru kojom se mogu ukloniti ultraljubičaste divergencije prisutne u izrazu za amplitudu (2.93). Lagranžijan međudjelovanja kvarkova i  $W$  bozona definiran je izrazom (1.15), a ovdje ga ponovno navodimo

$$\mathcal{L}_{W,int} = \frac{g_{W,0} V_{ij}}{\sqrt{2}} \sum_{i,j=1,2,3} \bar{u}_{L,i,0} W_0^+ d_{L,j,0} + \frac{g_{W,0} V_{ij}}{\sqrt{2}} \sum_{i,j=1,2,3} \bar{d}_{L,i,0} W_0^- u_{L,j,0} \quad (2.97)$$

kako bismo sada eksplicitno istaknuli da su svi fizikalni parametri poput konstanti vezanja i polja još uvijek nerenormalizirani. Kod renormalizacije ili reskaliranja polja od najveće nam je koristi tzv. Källén–Lehmannova (KL) spektralna reprezentacija dvotočkastih korelacijskih funkcija čiji je iskaz i dokaz dan u [3]. Dvotočkasta korelacijska funkcija fermionskih polja  $G^{(2)}(x, y)$  definirana je, između ostalog, preko vremenski uređenog produkta

$$\begin{aligned} G^{(2)}(x, y)_{\alpha\beta} &= \langle \Omega | T \{ \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \} | \Omega \rangle \\ &\equiv \langle \Omega | \theta(x^0 - y^0) \psi_\alpha(x) \bar{\psi}_\beta(y) \\ &\quad - \theta(y^0 - x^0) \bar{\psi}_\beta(y) \psi_\alpha(x) | \Omega \rangle, \end{aligned} \quad (2.98)$$

gdje je s  $|\Omega\rangle$  označen vakuum, odnosno najniže energijsko stanje u Standardnom modelu. U odsustvu interakcija dobro je poznato da se  $G^{(2)}(x, y)$  svodi na jednostavan propagator slobodne čestice  $\tilde{G}^{(2)}(p)_0$  u impulsnom prostoru

$$\tilde{G}^{(2)}(p)_0 = i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\eta}. \quad (2.99)$$

Međutim, važnost Källén–Lehmannovog rezultata je u tome da on daje oblik korelacijske funkcije u prisustvu gotovo proizvoljne vrste interakcije fermionskog polja (uz

uvjet da je invarijantna na paritet):

$$\tilde{G}^{(2)}(p) = \int \frac{dM}{2\pi} \frac{i(\not{k}\rho_1(M^2) + \rho_2(M^2))}{k^2 - M^2 + i\eta}. \quad (2.100)$$

Spektralne funkcije  $\rho_1$  i  $\rho_2$  su pozitivno definitne funkcije koje sadržavaju informacije o svim slobodnim i vezanim jednočestičnim te višečestičnim stanjima teorije. Tim više, njihov najniži i dominantan jednočestični doprinos je obilježen s polom na fizikalnoj masi fermionskih čestica i dan kao

$$\begin{aligned} \rho_1(M^2) &\approx 2\pi Z_\psi \delta(M^2 - m^2), \\ \rho_2(M^2) &\approx 2\pi m Z_\psi \delta(M^2 - m^2). \end{aligned} \quad (2.101)$$

Kada se (2.101) uvrsti u (2.100), korelacijska funkcija u prisustvu međudjelovanja poprima oblik

$$\tilde{G}^{(2)}(p) = iZ_\psi \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2 + i\eta}. \quad (2.102)$$

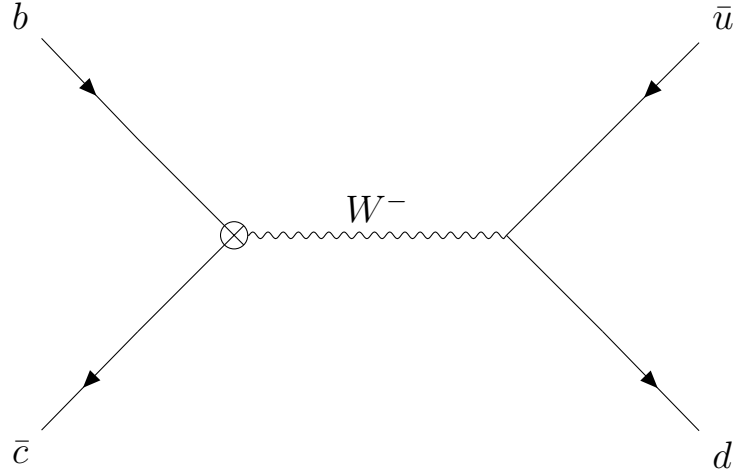
Budući da je dvotočkasta korelacijska funkcija produkt dvaju fermionskih polja, rezultat (2.102) motivira nas da definiramo renormalizirana fermionska i baždarna polja reskaliranjem faktorima  $Z_\psi$  i  $Z_W$  redom

$$\begin{aligned} \psi_r &= \psi = \frac{\psi_0}{\sqrt{Z_\psi}}, \\ W_r^\pm &= W^\pm = \frac{W_0^\pm}{\sqrt{Z_W}}, \end{aligned} \quad (2.103)$$

čime funkcija (2.102) poprima oblik identičan slobodnom propagatoru čestice. Ubacivanjem reskaliranih polja u lagranžijan međudjelovanja daje

$$\mathcal{L}_{W,int} = \frac{g_{W,0} V_{ij}}{\sqrt{2}} Z_\psi \sqrt{Z_W} \sum_{i,j=1,2,3} \bar{u}_{L,i} W^+ d_{L,j} + \frac{g_{W,0} V_{ij}}{\sqrt{2}} Z_\psi \sqrt{Z_W} \sum_{i,j=1,2,3} \bar{d}_{L,i} W^- u_{L,j}, \quad (2.104)$$

odakle u nastavku umnoške nerenormalizirane konstante vezanja  $g_{W,0}$  i bezdimenzionalnih konstanti reskaliranja  $Z_\psi \sqrt{Z_W}$  zapisujemo preko renormalizirane konstante



Slika 2.8: Prvi dijagram s doprinosom kontračlana elektroslabe interakcije.

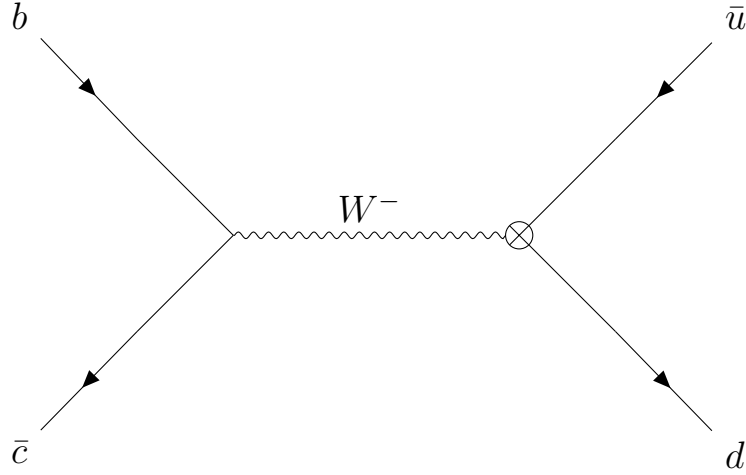
$g_W$  i njezinog pomaka  $\delta_W$

$$g_{W,0} Z_\psi \sqrt{Z_W} = g_W + g_W \delta_W, \quad (2.105)$$

što nam u konačnici daje

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{W,int} &= \frac{g_W V_{ij}}{\sqrt{2}} \sum_{i,j=1,2,3} \bar{u}_{L,i} \mathcal{W}^+ d_{L,j} + \frac{g_W V_{ij}}{\sqrt{2}} \sum_{i,j=1,2,3} \bar{d}_{L,i} \mathcal{W}^- u_{L,j} + \\ &+ \frac{g_W \delta_W V_{ij}}{\sqrt{2}} \sum_{i,j=1,2,3} \bar{u}_{L,i} \mathcal{W}^+ d_{L,j} + \frac{g_W \delta_W V_{ij}}{\sqrt{2}} \sum_{i,j=1,2,3} \bar{d}_{L,i} \mathcal{W}^- u_{L,j} = \\ &\equiv \mathcal{L}_{W,int,r} + \mathcal{L}_{W,int,ct}. \end{aligned} \quad (2.106)$$

U izrazu (2.106) početni lagranžijan međudjelovanja smo u potpunosti izrazili preko renormaliziranih polja i parametara čime se razdvojio na dva dijela: prvi koji je identičan nerenormaliziranom lagranžijanu do na činjenicu da sada radimo s reskaliranim veličinama i drugi dio, označen s  $\mathcal{L}_{W,int,ct}$ , koji se sastoji od tzv. kontračlanova i opisuje pomak renormaliziranih veličina u odnosu na nerenormalizirane. U računima amplituda u poglavlju 2 implicitno smo koristili renormaliziran lagranžijan iz (2.106) prije nego što smo proveli ovaj postupak. Korist ovoga pristupa leži u tome da sada ultraljubičaste divergencije prijašnjih dijagrama možemo apsorbirati u kontračlanove jer druga polovica lagranžijana (2.106) pridonosi novi par interakcijskih vrhova proporcionalnih  $\delta_W$ . Dva dijagrama koja su nam od najveće važnosti ovdje su prikazani na slikama 2.8 i 2.9. Vrhovi proporcionalni s pomakom  $\delta_W$  označeni su s prekrštenim



Slika 2.9: Drugi dijagram s doprinosom kontračlana elektroslabe interakcije.

krugovima. Njihove amplitude su jednake i glase

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{A}_{ct,1,2} &= \bar{c}_L \frac{ig_W \delta_W V_{cb}}{\sqrt{2}} \gamma^\mu b_L \frac{-ig_{\mu\nu}}{-m_W^2} \bar{d}_L \frac{ig_W V_{ud}^*}{\sqrt{2}} \gamma^\nu u_L = \\
 &= -iG\delta_W [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma^\mu u_L],
 \end{aligned} \tag{2.107}$$

slične doprinosu granastog dijagrama sa slike 2.1 u izrazu (2.10). U široj slici koju smo ovdje uveli ukupna amplituda za proces sa slike 1.1 je zbroj svih amplituda, uključujući sada i kontračlanove (2.107):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_{SM} &= \sum_{i=0}^6 \mathcal{A} + \mathcal{A}_{ct,1} + \mathcal{A}_{ct,2} = \\
 &= \left( -G + \frac{G\alpha_S}{2\pi} \left( \frac{11}{3} \frac{1}{\epsilon_{IR}} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m_W^2} \right) \right) [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu u_L] - \\
 &\quad - \frac{3G\alpha_S}{2\pi} \left( \frac{1}{\epsilon_{IR}} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m_W^2} \right) [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu b_L] - \\
 &\quad - \frac{4}{3} \frac{G\alpha_S}{\pi} \frac{1}{\epsilon_{UV}} [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu u_L] - 2G\delta_W [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma^\mu u_L].
 \end{aligned} \tag{2.108}$$

Stavljanjem

$$\delta_W = -\frac{2}{3} \frac{\alpha_S}{\pi} \frac{1}{\epsilon_{UV}} \tag{2.109}$$



kontračlanovi uklanjaju ultraljubičaste divergencije iz (2.108), tako da je konačni rezultat za SM amplitudu

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{SM} = & \left( -G + \frac{G\alpha_S}{2\pi} \left( \frac{11}{3} \frac{1}{\epsilon_{IR}} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m_W^2} \right) \right) [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu u_L] - \\ & - \frac{3G\alpha_S}{2\pi} \left( \frac{1}{\epsilon_{IR}} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m_W^2} \right) [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu b_L]. \end{aligned} \quad (2.110)$$

Napomenimo ovdje usput da imamo slobodu izbora renormalizacijske sheme, odnosno redefinicije kontračlana iz (2.109) dodavanjem proizvoljnih konstantnih članova kao i članova oblika  $\mathcal{O}(\epsilon_{UV})$

$$\delta'_W = \delta_W + konst. + \mathcal{O}(\epsilon_{UV}), \quad (2.111)$$

jer naši fizikalni rezultati rješavanja jednaždbi renormalizacijske grupe neće ovisiti o konačnim dijelovima  $\delta_W$ .

### 3 Proces $b\bar{c} \rightarrow d\bar{u}$ u efektivnoj teoriji polja

#### 3.1 Efektivna teorija polja

Glede na ključan rezultat (2.110) dobiven na kraju zadnjeg poglavlja koji predstavlja amplitudu elektroslabog procesa  $b\bar{c} \rightarrow d\bar{u}$  s kromodinamičkim korekcijama očiti kandidati za operatore  $\mathcal{O}_1$  i  $\mathcal{O}_2$  iz kojih ćemo izgraditi efektivan opis te interakcije su

$$\mathcal{O}_1 = [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu u_L] \quad (3.1)$$

i

$$\mathcal{O}_2 = [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu b_L], \quad (3.2)$$

s odgovarajućim efektivnim konstantama vezanja (Wilsonovim koeficijentima)  $C_1$  i  $C_2$  u lagranžijanu međudjelovanja

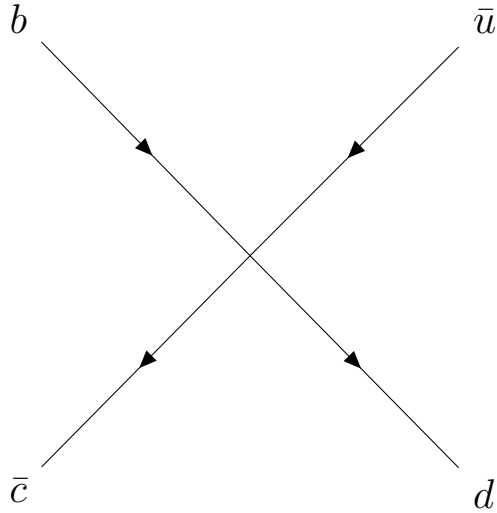
$$\mathcal{L}_{EFT} = -C_1 \mathcal{O}_1 - C_2 \mathcal{O}_2 = -C_1 [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu u_L] - C_2 [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu b_L]. \quad (3.3)$$

Ako pogledamo rezultat (2.110) iz Standardnog modela, vidimo da se tek uzimanjem kromodinamičkih korekcija u obzir inducira netrivialan Wilsonov koeficijent  $C_2$  uz operator  $\mathcal{O}_2$  zbog čega će biti oblika  $\mathcal{O}(\alpha_S)$  dok je operator  $\mathcal{O}_1$  prisutan već na razini drvastog dijagrama viđenog na slici 2.1 u prethodnom poglavlju. Nezanemari- vanje impulsa kvarkova i posljedično viših članova u razvoju po maloj veličini

$$\frac{p_i^2}{m_W^2} \quad (3.4)$$

u izrazima poput (2.6) dovelo bi do nužnosti uvođenja kompliciranijih operatora od navedena dva, sastavljenih od umnožaka polja i derivacija polja. Postupak povezivanja Wilsonovih koeficijenata koji stoje uz operatore u efektivnoj teoriji s konstantama slabog i jakog međudjelovanja je u načelu jednostavan, moramo izvrjedniti granaste dijagrama i dijagrame s jednom petljom u efektivnoj teoriji (čiji ćemo ukupan dopri- nos označiti s  $\mathcal{B}_{EFT}$ ) te izjednačiti efektivnu amplitudu sa SM amplitudom uvjetom

$$\mathcal{A}_{SM} = \mathcal{B}_{EFT}, \quad (3.5)$$



Slika 3.1: Granasti dijagram raspršenja  $b\bar{c} \rightarrow d\bar{u}$  u efektivnoj teoriji polja.

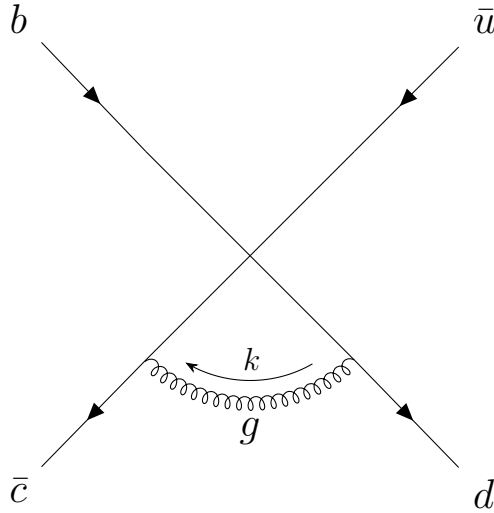
gdje je prva polovica problema, a to je izračun  $\mathcal{A}_{SM}$ , posebno rješena u drugome poglavlju. Četverokvarkovsku amplitudu iz perspektive efektivne teorije polja ćemo također računati do razine jedne petlje u kromodinamici, s izmjenama jednog gluona između svih mogućih parova vanjskih kvarkovskih noga u dijagramima. Napominjemo da gluone i kvarkove tretiramo jednako kao što smo ih tretirali u okviru Standardnog modela uz ista pojednostavljenja kako bi proces spajanja amplituda (3.5) bio konzistentan.

### 3.2 Granasta razina

Uvodimo oznaku  $\mathcal{B}_0$  za prvi dijagram koji analiziramo u okviru efektivne teorije, a prikazan je na slici 3.1. Njegova amplituda se izravno iščitava iz lagranžijana definiranog u (3.3) pa imamo

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{B}_0 &= -iC_1 [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma^\mu u_L] - iC_2 [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] [\bar{d}_L \gamma^\mu b_L], \\
 \mathcal{B}_0 &= -C_1 [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma^\mu u_L] - C_2 [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] [\bar{d}_L \gamma^\mu b_L].
 \end{aligned}
 \tag{3.6}$$

Na kraju ovog potpoglavlja još skrećemo pozornost na to da efektivan lagranžijan (3.3) posjeduje zapravo dva interakcijska vrha, jedan proporcionalan s prvim Wilsonovim koeficijentnom  $C_1$  i drugi proporcionalan s  $C_2$ . Razlikujemo ih unatoč tome



Slika 3.2: Prvi dijagram raspršenja  $b\bar{c} \rightarrow d\bar{u}$  u efektivnoj teoriji polja s korekcijom od jednog gluona.

što se prema drugom Fierzovom identitetu (D.1) čini da operator  $\mathcal{O}_1$

$$\mathcal{O}_1 = [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma^\mu u_L] \quad (3.7)$$

možemo svesti na drugi operator  $\mathcal{O}_2$

$$\mathcal{O}_2 = [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] [\bar{d}_L \gamma^\mu b_L]. \quad (3.8)$$

Uključivanjem kvantne kromodinamike u dosadašnju i daljnju analizu uz svaki spinor se pojavljuje i trokomponentan vektor koji predstavlja boju, odnosno kromodinamički naboj. Stoga je između spinora/operatora unutar uglatih zagrada u operatorima  $\mathcal{O}_1$  i  $\mathcal{O}_2$  implicitno prisutna i kontrakcija indeksa koji se odnose na bojne komponente kvarkova. Time su u operatoru  $\mathcal{O}_1$  vezane boje  $b$  kvarka i  $\bar{c}$  antikvarka te  $d$  kvarka i  $\bar{u}$  antikvarka; u drugom je to slučaj s  $\bar{c}$  i  $\bar{u}$  antikvarkovima te  $b$  i  $d$  kvarkovima. Međutim, kod svih dijagrama koje ćemo razmatrati u okviru efektivne teorije usvajamo konvenciju da zbog sažetosti prikazujemo vrhove od operatora  $\mathcal{O}_1$  i  $\mathcal{O}_2$  istim dijagramima, budući da se razlikuju samo po toku boje između kvarkova.

### 3.3 Razina jedne petlje

Nastavno na dijagrame viđene u drugom poglavlju, jedнопетljene dijagrame u efektivnoj teoriji polja dobivamo na isti način kao i u Standardnom modelu, spajajući

vanjske noge (kvarkove) s gluonima na sve moguće načine. To opet vodi na šest mogućih Feynmanovih dijagrama; jedina je razlika u tome da više nema propagatora  $W$  bozona koji je u SM računima igrao ulogu ultraljubičastog regulatora u četiri od šest amplituda s kojima smo se prethodno bavili, što će dovesti do UV divergencija svih dijagrama efektivne teorije podložnih uklanjanju kontračlanovima interakcije procedurom analognom onoj izloženoj u prethodnom poglavlju.

Prvi takav dijagram  $\mathcal{B}_1$  nalazi se na slici 3.2 i amplituda mu je

$$\begin{aligned}
i\mathcal{B}_1 &= \int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} (-iC_1) \left[ \bar{c}_L(-igst^a \gamma^\alpha) i \frac{\not{k}}{k^2} \gamma^\mu b_L \right] \left[ \bar{d}_L(-igst^b \gamma^\beta) i \frac{\not{k}}{k^2} \gamma_\mu u_L \right] \frac{-ig_{\alpha\beta} \delta_{ab}}{k^2} + \\
&+ \int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} (-iC_2) \left[ \bar{c}_L(-igst^a \gamma^\alpha) i \frac{\not{k}}{k^2} \gamma^\mu u_L \right] \left[ \bar{d}_L(-igst^b \gamma^\beta) i \frac{\not{k}}{k^2} \gamma_\mu b_L \right] \frac{-ig_{\alpha\beta} \delta_{ab}}{k^2} = \\
&= g_S^2 C_1 \int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} [\bar{c}_L \gamma^\alpha \not{k} \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma_\alpha \not{k} \gamma_\mu u_L] \frac{1}{k^2 k^2 k^2} + \\
&+ g_S^2 C_2 \int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} [\bar{c}_L \gamma^\alpha \not{k} \gamma^\mu u_L] [\bar{d}_L \gamma_\alpha \not{k} \gamma_\mu b_L] \frac{1}{k^2 k^2 k^2}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

S usrednjavanjem po smjerovima virtualnog četveroimpulsa koje smo iskoristili prvi put u izrazu (2.15) amplituda poprima pojednostavljen oblik

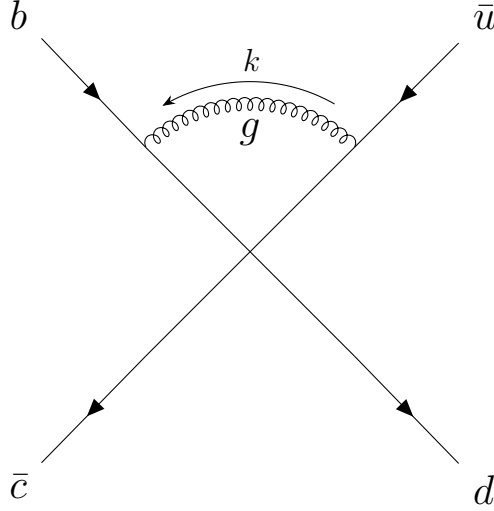
$$\begin{aligned}
i\mathcal{B}_1 &= g_S^2 C_1 [\bar{c}_L \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu u_L] \frac{1}{d} \int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 k^2} + \\
&+ g_S^2 C_2 [\bar{c}_L \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu u_L] [\bar{d}_L \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu b_L] \frac{1}{d} \int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 k^2}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Sa svim dijelovima izraza (3.10) smo već upoznati iz prijašnjih izvoda; na umnoške spinora i kontrakcije  $\gamma$  matrica primijenjujemo prvi Fierzov identitet (D.1) i potom jednakost (B.5)

$$\begin{aligned}
[\bar{c}_L \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu u_L] &= 16 [\bar{c}_L \gamma^\mu t^a b_L] [\bar{d}_L \gamma^\mu t^a u_L] = \\
&= 8 [\bar{c}_L, i \gamma^\mu b_{L,j}] [\bar{d}_L, k \gamma^\mu t^a u_{L,i}] \left( \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right) = \\
&= 8 \left( [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] [\bar{d}_L \gamma^\mu b_L] - \frac{1}{3} [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma^\mu u_L] \right).
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Za integral po petlji također imamo već gotov izraz (2.88) na koji se pozivamo:

$$\int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 k^2} = \frac{i}{8\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon_{UV}} - \frac{1}{\epsilon_{IR}} \right). \tag{3.12}$$



Slika 3.3: Drugi dijagram raspršenja  $b\bar{c} \rightarrow d\bar{u}$  u efektivnoj teoriji polja s korekcijom od jednog gluona.

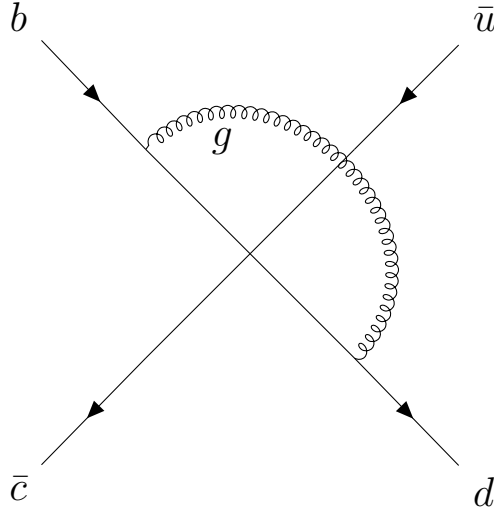
Iz (3.11) i (3.12) sređivanjem imamo  $\mathcal{B}_1$

$$\begin{aligned}
i\mathcal{B}_1 &= 8g_S^2 C_1 \left( [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] [\bar{d}_L \gamma^\mu b_L] - \frac{1}{3} [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma^\mu u_L] \right) \frac{i}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon_{UV}} - \frac{1}{\epsilon_{IR}} \right) + \\
&+ 8g_S^2 C_2 \left( [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma^\mu u_L] - \frac{1}{3} [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] [\bar{d}_L \gamma^\mu b_L] \right) \frac{i}{32\pi^2} \left( \frac{1}{\epsilon_{UV}} - \frac{1}{\epsilon_{IR}} \right), \tag{3.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_1 &= \frac{\alpha_S C_1}{\pi} \left( [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] [\bar{d}_L \gamma^\mu b_L] - \frac{1}{3} [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma^\mu u_L] \right) \left( \frac{1}{\epsilon_{UV}} - \frac{1}{\epsilon_{IR}} \right) + \\
&+ \frac{\alpha_S C_2}{\pi} \left( [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma^\mu u_L] - \frac{1}{3} [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] [\bar{d}_L \gamma^\mu b_L] \right) \left( \frac{1}{\epsilon_{UV}} - \frac{1}{\epsilon_{IR}} \right). \tag{3.14}
\end{aligned}$$

Po već ustaljenom obrascu možemo brзом provjerom ustanoviti da će drugi dijagram sa slike 3.3 imati isti izraz za amplitudu kao i prvi:

$$\begin{aligned}
i\mathcal{B}_2 &= \int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} (-iC_1) \left[ \bar{c}_L \gamma^\mu i \frac{\not{k}}{k^2} (-igst^a \gamma^\alpha) b_L \right] \left[ \bar{d}_L \gamma_\mu i \frac{\not{k}}{k^2} (-igst^b \gamma^\beta) u_L \right] \frac{-ig_{\alpha\beta} \delta_{ab}}{k^2} + \\
&+ \int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} (-iC_2) \left[ \bar{c}_L \gamma^\mu i \frac{\not{k}}{k^2} (-igst^a \gamma^\alpha) u_L \right] \left[ \bar{d}_L \gamma_\mu i \frac{\not{k}}{k^2} (-igst^b \gamma^\beta) b_L \right] \frac{-ig_{\alpha\beta} \delta_{ab}}{k^2}, \tag{3.15}
\end{aligned}$$



Slika 3.4: Treći dijagram raspršenja  $b\bar{c} \rightarrow d\bar{u}$  u efektivnoj teoriji polja s korekcijom od jednog gluona.

odakle vidimo da vrijedi

$$\mathcal{B}_2 = \frac{\alpha_S C_1}{\pi} \left( [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] [\bar{d}_L \gamma^\mu b_L] - \frac{1}{3} [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma^\mu u_L] \right) \left( \frac{1}{\epsilon_{UV}} - \frac{1}{\epsilon_{IR}} \right) + \quad (3.16)$$

$$+ \frac{\alpha_S C_2}{\pi} \left( [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma^\mu u_L] - \frac{1}{3} [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] [\bar{d}_L \gamma^\mu b_L] \right) \left( \frac{1}{\epsilon_{UV}} - \frac{1}{\epsilon_{IR}} \right).$$

Amplituda trećeg mogućeg dijagrama s gluonom spojenim na  $b$  i  $d$  kvarkove je

$$i\mathcal{B}_3 = \int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} (-iC_1) \left[ \bar{c}_L \gamma^\mu i \frac{\not{k}}{k^2} (-ig_s t^a \gamma^\alpha) b_L \right] \left[ \bar{d}_L (-ig_s t^b \gamma^\beta) i \frac{\not{k}}{k^2} \gamma_\mu u_L \right] \frac{-ig_{\alpha\beta} \delta_{ab}}{k^2} + \quad (3.17)$$

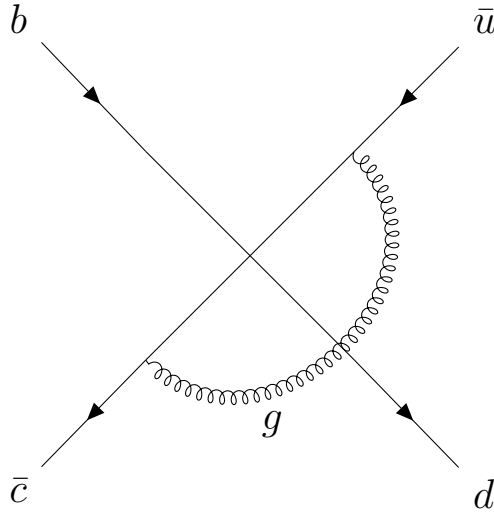
$$+ \int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} (-iC_2) [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] \left[ \bar{d}_L (-ig_s t^a \gamma^\alpha) i \frac{\not{k}}{k^2} \gamma_\mu i \frac{\not{k}}{k^2} (-ig_s t^b \gamma^\beta) b_L \right] \frac{-ig_{\alpha\beta} \delta_{ab}}{k^2},$$

$$i\mathcal{B}_3 = -g_S^2 C_1 [\bar{c}_L \gamma^\mu \gamma^\beta \gamma^\alpha t^a b_L] [\bar{d}_L \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_\mu t^a u_L] \frac{1}{d} \int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 k^2} - \quad (3.18)$$

$$- g_S^2 C_2 [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] [\bar{d}_L \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\alpha t^a t^a b_L] \frac{1}{d} \int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2 k^2}.$$

Drugu  $V - A$  struju u (3.18) pojednostavljujemo uzastopnom dvostrukom primjenom (dimenzijski regulariziranog) identiteta

$$\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_\alpha = (2 - d) \gamma^\beta = -2\gamma^\beta \quad (3.19)$$



Slika 3.5: Četvrti dijagram raspršenja  $b\bar{c} \rightarrow d\bar{u}$  u efektivnoj teoriji polja s korekcijom od jednog gluona.

koji se, kao i svi ostali korišteni identiteti vezani za Diracove  $\gamma$  matrice, izvode iz dvije osnovne relacije

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = d, \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \cdot \mathbb{1}. \quad (3.20)$$

U (3.19) nije potrebno izražavati član  $2-d$  uz  $\gamma^\beta$  matricu preko parametra  $\epsilon$  jer se kod izvrijednjavanja amplitude  $\mathcal{B}_3$  pojavljuje integral  $I'$  koji sadrži isključivo divergentne doprinose pa se stoga dijelovi oblika  $\mathcal{O}(\epsilon)$  dokidaju. Uz (3.18) i jednakost (B.6) izraz za  $\mathcal{B}_3$  se sređuje u

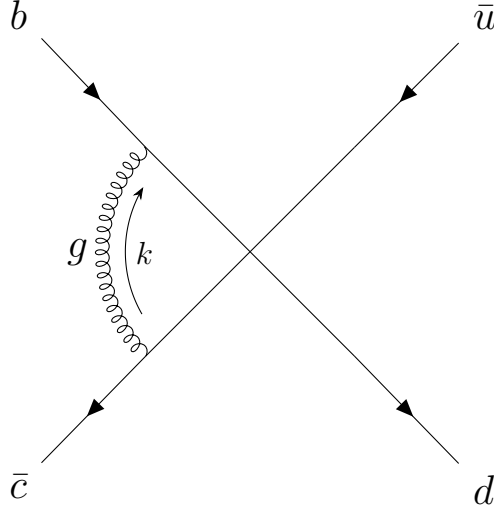
$$\begin{aligned} \mathcal{B}_3 = & -\frac{\alpha_S C_1}{4\pi} \left( [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu b_L] - \frac{1}{3} [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu u_L] \right) \left( \frac{1}{\epsilon_{UV}} - \frac{1}{\epsilon_{IR}} \right) - \\ & -\frac{4}{3} \frac{\alpha_S C_2}{2\pi} [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu b_L] \left( \frac{1}{\epsilon_{UV}} - \frac{1}{\epsilon_{IR}} \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Četvrti dijagram zadržava isti oblik kao i prethodni pa zbog simetrije odmah pišemo

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_4 = & -\frac{\alpha_S C_1}{4\pi} \left( [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu b_L] - \frac{1}{3} [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu u_L] \right) \left( \frac{1}{\epsilon_{UV}} - \frac{1}{\epsilon_{IR}} \right) - \\ & -\frac{4}{3} \frac{\alpha_S C_2}{2\pi} [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu b_L] \left( \frac{1}{\epsilon_{UV}} - \frac{1}{\epsilon_{IR}} \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Na samom kraju imamo dva dijagrama koja su strukturno slična posljednjim dvama iz prethodnog poglavlja s razmjenom gluona između ulaznih, odnosno izlaz-





Slika 3.6: Peti dijagram raspršenja  $b\bar{c} \rightarrow d\bar{u}$  u efektivnoj teoriji polja s korekcijom od jednog gluona.

nih vanjskih noga na slikama 3.6 i 3.7. Oni su opisani amplitudom

$$\begin{aligned}
 i\mathcal{B}_5 = & \int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} (-iC_1) \left[ \bar{c}_L (-ig_s t^a \gamma^\alpha) i \frac{\not{k}}{k^2} \gamma^\mu i \frac{\not{k}}{k^2} (-ig_s t^a \gamma^\beta) b_L \right] [\bar{d}_L \gamma_\mu u_L] \frac{-ig_{\alpha\beta} \delta_{ab}}{k^2} + \\
 & + \int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} (-iC_2) \left[ \bar{c}_L (-ig_s t^a \gamma^\alpha) i \frac{\not{k}}{k^2} \gamma^\mu u_L \right] \left[ \bar{d}_L \gamma_\mu i \frac{\not{k}}{k^2} (-ig_s t^b \gamma^\beta) b_L \right] \frac{-ig_{\alpha\beta} \delta_{ab}}{k^2}
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

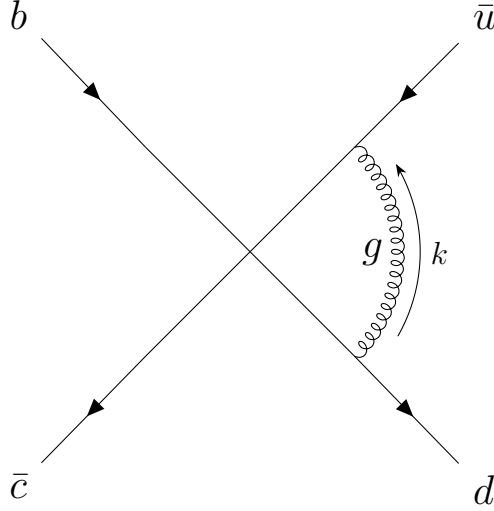
i

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_5 = & -\frac{4}{3} \frac{\alpha_S C_1}{2\pi} [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu u_L] \left( \frac{1}{\epsilon_{UV}} - \frac{1}{\epsilon_{IR}} \right) - \\
 & - \frac{\alpha_S C_2}{4\pi} \left( [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu u_L] - \frac{1}{3} [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu b_L] \right) \left( \frac{1}{\epsilon_{UV}} - \frac{1}{\epsilon_{IR}} \right).
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Isto imamo za posljednji dijagram s razmjenom virtualnog gluona između izlaznih vanjskih noga

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_6 = & -\frac{4}{3} \frac{\alpha_S C_1}{2\pi} [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu u_L] \left( \frac{1}{\bar{\epsilon}_{UV}} - \frac{1}{\bar{\epsilon}_{IR}} \right) - \\
 & - \frac{\alpha_S C_2}{4\pi} \left( [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu u_L] - \frac{1}{3} [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu b_L] \right) \left( \frac{1}{\epsilon_{UV}} - \frac{1}{\epsilon_{IR}} \right).
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

Zbroj svih doprinosa od  $\mathcal{B}_0$  do  $\mathcal{B}_6$  daje nam ukupnu amplitudu za naš proces u



Slika 3.7: Šesti dijagram raspršenja  $b\bar{c} \rightarrow d\bar{u}$  u efektivnoj teoriji polja s korekcijom od jednog gluona.

okvirima efektivne teorije polja:

$$\mathcal{B} = \sum_{i=0}^6 \mathcal{B}_i = \left( -C_1 + \frac{\alpha_S}{2\pi} \left( -\frac{11}{3}C_1 + 3C_2 \right) \left( \frac{1}{\epsilon_{UV}} - \frac{1}{\epsilon_{IR}} \right) \right) [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma^\mu u_L] + \quad (3.26)$$

$$+ \left( -C_2 + \frac{\alpha_S}{2\pi} \left( 3C_1 - \frac{11}{3}C_2 \right) \left( \frac{1}{\epsilon_{UV}} - \frac{1}{\epsilon_{IR}} \right) \right) [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] [\bar{d}_L \gamma^\mu b_L].$$

### 3.4 Kontračlanovi u efektivnoj teoriji polja

Nadovezujući se na argumente dane u podpoglavlju 2.3, polazimo od efektivnog lagranžijana koji je početno izgrađen od nerenormaliziranih polja i vezanja

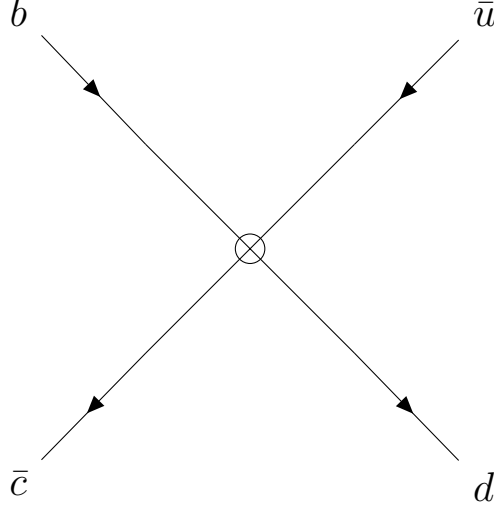
$$\mathcal{L}_{EFT} = -C_{1,0} [\bar{c}_{L,0} \gamma^\mu b_{L,0}] [\bar{d}_{L,0} \gamma^\mu u_{L,0}] - C_{2,0} [\bar{c}_{L,0} \gamma^\mu u_{L,0}] [\bar{d}_{L,0} \gamma^\mu b_{L,0}], \quad (3.27)$$

reskaliramo sva fermionska polja u (3.27)

$$\psi_{i,0} = \sqrt{Z_\psi} \psi_{i,r} \equiv \sqrt{Z_\psi} \psi_i \quad (3.28)$$

i definiramo odgovarajući pomak renormaliziranih Wilsonovih koeficijenata  $C_i$  u odnosu na njihove 'gole' vrijednosti  $C_{i,0}$

$$C_{i,0} Z_\psi^2 = C_i + C_i \delta_i. \quad (3.29)$$



Slika 3.8: Doprinos kontračlana efektivne teorije u izrazu (3.30).

Kada redefinirane veličine u (3.28) i (3.29) uvrstimo u lagranžijan (3.27) on se ponovno razdvaja na dva dijela:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{EFT} = & -C_1 [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu u_L] - C_2 [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu b_L] - \\ & - C_1 \delta_1 [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu u_L] - C_2 \delta_2 [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu b_L] \equiv \mathcal{L}_{EFT,r} + \mathcal{L}_{EFT,ct}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Dijagram sa slike 3.8 trivijalno je opisan amplitudom

$$iB_{EFT,ct} = -iC_1 \delta_1 [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu u_L] - iC_2 \delta_2 [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu b_L], \quad (3.31)$$

odakle je vidljivo da ako su kontračlanovi  $\delta_1$  i  $\delta_2$  fiksirani na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{\alpha_S}{2\pi} \left( -\frac{11}{3} + 3\frac{C_2}{C_1} \right) \frac{1}{\epsilon_{UV}}, \\ \delta_2 &= \frac{\alpha_S}{2\pi} \left( 3\frac{C_1}{C_2} - \frac{11}{3} \right) \frac{1}{\epsilon_{UV}}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

ukupna amplituda efektivne teorije je UV konačna:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{EFT} = \sum_{i=0}^6 \mathcal{B}_i + \mathcal{B}_{EFT,ct} = & \left( -C_1 + \frac{\alpha_S}{2\pi} \left( \frac{11}{3} C_1 - 3C_2 \right) \frac{1}{\epsilon_{IR}} \right) [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu u_L] + \\ & + \left( -C_2 + \frac{\alpha_S}{2\pi} \left( -3C_1 + \frac{11}{3} C_2 \right) \frac{1}{\epsilon_{IR}} \right) [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu b_L]. \end{aligned} \quad (3.33)$$

### 3.5 Spajanje amplituda

Sad kada smo, primijenjujući isti niz pojednostavljenja na vanjske kvarkove u dijagramima u oba poglavlja, proveli račune u efektivnoj teoriji (3.3) te infracrvenom režimu Standardnog modela, možemo spojiti amplitude, odnosno iskoristiti uvjet

$$\mathcal{A}_{SM} = \mathcal{B}_{EFT} \quad (3.34)$$

kako bismo povezali Wilsonove koeficijente  $C_i$  sa Fermijevom konstantom  $G$  i konstantom jake interakcije  $\alpha_S$ . Uspoređujući (2.110), koji ovdje ponovno navodimo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{SM} = & \left( -G + \frac{G\alpha_S}{2\pi} \left( \frac{11}{3} \frac{1}{\epsilon_{IR}} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m_W^2} \right) \right) [\bar{c}_L \gamma^\mu b_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu u_L] - \\ & - \frac{3G\alpha_S}{2\pi} \left( \frac{1}{\epsilon_{IR}} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m_W^2} \right) [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] [\bar{d}_L \gamma_\mu b_L] \end{aligned} \quad (3.35)$$

s (3.33) nalazimo rješenja za  $C_1$  i  $C_2$ :

$$C_1 = G \left( 1 - \frac{\alpha_S}{2\pi} \left( \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m_W^2} + \frac{3}{4} \right) \right), \quad (3.36)$$

$$C_2 = \frac{3\alpha_S G}{2\pi} \left( \frac{1}{2} \ln \frac{\tilde{\mu}^2}{m_W^2} + \frac{3}{4} \right). \quad (3.37)$$

Važnost rezultata (3.36) i (3.37) leži u tome da smo uspješno spojili efektivan niskoenergijski lagranžijan definiran u (3.3) sa teorijom Standardnog modela. Pritom vidimo da su izrazi za Wilsonove koeficijente slobodni od infracrvenih divergencija koje se pojavljuju u objema amplitudama, odnosno da ih naš efektivan opis interakcije reproducira na identičan način kao i Standardni model. To je posve očekivano kao što je zaključeno u digresijama u drugom i trećem poglavlju budući da vanjske noge dijagrama jednako tretiramo u oba modela. Time je ujedno opravdano korištenje aproksimacije bezmasenosti kvarkova i njihovo iščezavanje četveroimpulsa koje su znatno pojednostavile integrale po petljama; u suprotnom bi infracrvene divergencije bile naprosto zamijenjene logaritamskim članovima ovisnim o eksternim impulsima kao što je već prije spominjano. Međutim, članovi ovisni o impulsima interagirajućih čestica, isto kao i infracrvene divergencije, ne smiju biti prisutni u izrazima za Wilsonove koeficijente.

## 4 Jednadžbe renormalizacijske grupe

### 4.1 Izvod jednadžbi renormalizacijske grupe

Iz izraza za Wilsonove koeficijente (3.36) i (3.37) vidi se da oni, osim njihove ovisnosti o fundamentalnim konstantama Standardnog modela, pokazuju ovisnost o energijskoj skali  $\tilde{\mu}$  koju smo *ad hoc* uveli kako bi dimenzije amplituda u  $d$ -dimenzionalnom režimu bile jednake fizikalnim četverodimenzionalnim dijagramima i neovisne o integracijama po petljama. Iako u načelu imamo slobodu izbora vrijednosti  $\tilde{\mu}$ , očito je izbor

$$\tilde{\mu}^2 = m_W^2 \quad (4.1)$$

najsmisleniji budući da time nestaju logaritmi u oba Wilsonova koeficijenta. S druge strane izbor skale

$$\tilde{\mu}^2 = m_b^2 \quad (4.2)$$

je primjereniji u opisu kvarkovskih procesa koji smo uveli u drugom poglavlju, ali potom zbog velikog omjera masenih skala u problemu,  $\frac{m_W^2}{m_b^2}$ , imamo problem sa značajnim iznosima njihovih logaritama koji općenito narušavaju konvergentnost perturbativnog reda razvojem po Feynmanovim dijagramima. Taj problem nesrazmjera skala ćemo riješiti uporabom jednadžbi renormalizacijske grupe (skraćeno JRG) na koeficijente  $C_i$ .

Jednadžbe renormalizacijske grupe imaju osnovu u prirodnoj pretpostavci da goli, odnosno nerenormalizirani Wilsonovi koeficijenti u efektivnom lagranžijanu

$$\mathcal{L}_{EFT} = -C_{1,0} [\bar{c}_{L,0} \gamma^\mu b_{L,0}] [\bar{d}_{L,0} \gamma_\mu u_{L,0}] - C_{2,0} [\bar{c}_{L,0} \gamma^\mu u_{L,0}] [\bar{d}_{L,0} \gamma_\mu b_{L,0}] \quad (4.3)$$

ne ovise o skali  $\tilde{\mu}$  koju ćemo nadalje označavati jednostavno s  $\mu$ . To nas vodi na sljedeće dvije jednadžbe renormalizacijske grupe za  $C_i$

$$\mu \frac{\partial C_{i,0}}{\partial \mu} = 0, \quad i = 1, 2. \quad (4.4)$$

Prema jednakosti (3.29) veza između golih i renormaliziranih Wilsonovih koeficijenata u četiri dimenzije je

$$C_{i,0} = \frac{1 + \delta_i}{Z_\psi^2} C_i = \frac{Z_i}{Z_\psi^2} C_i. \quad (4.5)$$

U  $d$  dimenzija ista relacija se poopćava na

$$C_{i,0} = \frac{Z_i}{Z_\psi^2} C_i \mu^{4-d} = \frac{Z_i}{Z_\psi^2} C_i \mu^\epsilon. \quad (4.6)$$

Generalizacija (4.6) potječe od toga da smo skalu  $\mu^{4-d}$  koja nam se bez iznimke pojavljuje u svim integralima po petljama iz gorenavedenih razloga samo upili u odgovarajući Wilsonov koeficijent, čime automatski osiguravamo ispravnu dimenzionalnost svake amplitude. Kako bismo nastavili, koristimo rezultate za kontračlanove  $\delta_i$  iz (3.32) i faktor reskaliranja fermionskih polja  $Z_\psi$ , eksplicitno izračunat u dodatku E da bismo uspjeli dobiti

$$\frac{Z_i}{Z_\psi^2} = \frac{1 + \frac{\alpha_S}{2\pi\epsilon} \left( 3 \frac{C_{\bar{i}}}{C_i} - \frac{11}{3} \right)}{\left( 1 - \frac{2\alpha_S}{3\pi\epsilon} \right)^2}, \quad (4.7)$$

gdje je  $i = 1, 2$ , a  $\bar{i} = 2, 1$ . Glede na to da svi svi dosadašnji rezultati napravljeni do reda  $\alpha_S$ , isto činimo i za kvocijent faktora u (4.7), označen s  $A_i$

$$A_i \equiv \frac{Z_i}{Z_\psi^2} = 1 + \frac{\alpha_S}{2\pi\epsilon} \left( 3 \frac{C_{\bar{i}}}{C_i} - \frac{11}{3} \right) + \frac{4\alpha_S}{3\pi\epsilon} + \mathcal{O}(\alpha_S^2). \quad (4.8)$$

Jednadžba (4.4) raspisana preko (4.6) i (4.8) glasi

$$\begin{aligned} \mu \partial_\mu (A_i \mu^\epsilon C_i) &= (\partial_\mu C_i) A_i \mu^{\epsilon+1} + \epsilon \mu^\epsilon C_i A_i + C_i \mu^{\epsilon+1} (\partial_\mu A_i) = \\ &= \mu^\epsilon C_i A_i \left( \frac{\mu}{C_i} \frac{\partial C_i}{\partial \mu} + \epsilon + \frac{\mu}{A_i} \frac{\partial A_i}{\partial \mu} \right) = 0, \end{aligned} \quad (4.9)$$

odakle za član u oblim zagradama slijedi

$$\frac{\mu}{C_i} \frac{\partial C_i}{\partial \mu} + \frac{\mu}{A_i} \frac{\partial A_i}{\partial \mu} + \epsilon = 0. \quad (4.10)$$

Dobivenu JRG (4.10) rješavamo iterativno, zanemarujući u prvom koraku drugi član  $\frac{\mu}{A_i} \frac{\partial A_i}{\partial \mu}$  budući da je reda  $\mathcal{O}(\alpha_S^2)$  zbog čega je potisnut, pa stoga imamo

$$\mu \partial_\mu C_i = -\epsilon C_i. \quad (4.11)$$

Potom nastavljamo s računom člana zanemarenog u prvom koraku

$$\frac{\mu}{A_i} \frac{\partial A_i}{\partial \mu} = \mu \left[ \frac{1}{2\pi\epsilon} \frac{\partial \alpha_S}{\partial \mu} \left( 3 \frac{C_i}{C_i} - \frac{11}{3} \right) + \frac{4}{3\pi\epsilon} \frac{\partial \alpha_S}{\partial \mu} + \frac{\alpha_S}{2\pi\epsilon} \left( \frac{3}{C_i} \frac{\partial C_i}{\partial \mu} - 3 \frac{C_i}{C_i^2} \frac{\partial C_i}{\partial \mu} \right) \right]. \quad (4.12)$$

Uporabom jednakosti (4.11) pokazuje se da dio izraza (4.12) koji se nalazi u drugom paru obliha zagrada iščezava

$$\mu \frac{3}{C_i} \frac{\partial C_i}{\partial \mu} - 3\mu \frac{C_i}{C_i^2} \frac{\partial C_i}{\partial \mu} = -\frac{3}{C_i} \epsilon C_i + 3 \frac{C_i}{C_i} \epsilon = 0. \quad (4.13)$$

Iz (4.11) se ujedno vidi zašto imamo slobodu odabira renormalizacijske sheme na način uveden relacijom (2.111) u drugom poglavlju: učinak dodavanja konstanti ili funkcija reda  $\mathcal{O}(\epsilon)$  u redefinirane kontračlanove poništen je njihovim množenjem s parametrom  $\epsilon$  u (4.11) i uzimanjem konačnog limesa  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Kako bismo mogli nastaviti s drugim iterativnim korakom rješavanja JRG (4.10) potrebna nam je kromodinamička beta funkcija, određena definicijskom relacijom

$$\beta_S(\alpha_S) = \mu \frac{\partial \alpha_S}{\partial \mu}. \quad (4.14)$$

Beta funkciju  $\beta_S$  ovdje samo navodimo bez izvoda iz [3] zbog toga što je njezin račun izvan okvira naših trenutnih razmatranja:

$$\beta_S(\alpha_S) = -\epsilon \alpha_S - \frac{\alpha_S^2}{2\pi} \left( 11 - \frac{2}{3} n_f \right), \quad (4.15)$$

u kojoj s  $n_f$  označavamo broj fermiona vezanih s gluonskim poljem, odnosno broj okusa kvarkova. Kod uvrštavanja (4.15) u (4.12) dovoljno je uzeti u obzir samo član beta funkcije proporcionalan s  $\epsilon$ . Provedbom tog koraka i uzimanjem konačnog limesa  $\epsilon \rightarrow 0$  u (4.10) slijede nam dvije jednadžbe renormalizacijske grupe za Wilso-

nove koeficijente

$$\begin{aligned}\mu \frac{\partial C_i}{\partial \mu} &= \frac{\alpha_S}{2\pi} \left( 3C_i - \frac{11}{3}C_i \right) + \frac{4\alpha_S}{3\pi}C_i = \\ &= \frac{\alpha_S}{2\pi} (3C_i - C_i),\end{aligned}\tag{4.16}$$

ili ekvivalentno

$$\mu \frac{\partial C}{\partial \mu} = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{\alpha_S}{2\pi} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \equiv \frac{\alpha_S}{2\pi} AC.\tag{4.17}$$

## 4.2 Dijagonalna baza operatora $\tilde{O}_1$ i $\tilde{O}_2$

Uz svojstvene vektore matrice  $A$

$$v_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\tag{4.18}$$

koji zadovoljavaju

$$Av_1 = 2v_1, \quad Av_2 = -4v_2.\tag{4.19}$$

Razvojem Wilsonovih koeficijenata po gorenavedenoj bazi

$$C = a_1v_1 + a_2v_2,\tag{4.20}$$

vezani sustav diferencijalnih jednadžbi (4.17) se dijagonalizira:

$$\mu \partial_\mu a_1 = \frac{\alpha_S}{\pi} a_1,\tag{4.21}$$

$$\mu \partial_\mu a_2 = -\frac{2\alpha_S}{\pi} a_2.\tag{4.22}$$

Do rješenja poopćene inačice diferencijalnih jednadžbi (4.21) i (4.22) generičnog oblika

$$\mu \partial_\mu a_i = k\alpha_S a_i\tag{4.23}$$



se dolazi jednostavnom integracijom:

$$\begin{aligned}\frac{da_i}{a_i} &= \frac{d\mu}{\mu} k\alpha_S, \\ \ln\left(\frac{a_i(\mu_2^2)}{a_i(\mu_1^2)}\right) &= k \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{\alpha_S}{\mu'} d\mu',\end{aligned}\tag{4.24}$$

čime prelaskom s integracijske varijable  $\mu$  na  $\alpha_S$  i korištenjem definicije kromodinamičke beta funkcije (4.14) konačno imamo

$$a_i(\mu_2^2) = a_i(\mu_1^2) \exp\left[k \int_{\alpha_S(\mu_1^2)}^{\alpha_S(\mu_2^2)} \frac{\alpha'_S}{\beta_S} d\alpha'_S\right].\tag{4.25}$$

Rješenja sustava (4.21) i (4.22) na proizvoljnoj skali  $\mu$  dobivamo očitavanjem odgovarajućeg realnog broja  $k$  iz diferencijalnih jednadžbi i odabirom mase  $W$  bozona za donju granicu integracije u (4.25),  $\mu_1^2 = m_W^2$ :

$$a_1(\mu^2) = a_1(m_W^2) \exp\left[\frac{1}{\pi} \int_{\alpha_S(m_W^2)}^{\alpha_S(\mu^2)} \frac{\alpha'_S}{\beta_S} d\alpha'_S\right],\tag{4.26}$$

$$a_2(\mu^2) = a_2(m_W^2) \exp\left[-\frac{2}{\pi} \int_{\alpha_S(m_W^2)}^{\alpha_S(\mu^2)} \frac{\alpha'_S}{\beta_S} d\alpha'_S\right].\tag{4.27}$$

Ranije u ovom poglavlju skrenuli smo pozornost na to da kromodinamička beta funkcija pokazuje ovisnost o broju kvarkovskih okusa. U ovom slučaju njihov broj odgovara broju aktivnih kvarkova na energijskim skalama s kojima radimo, a to su ponajprije  $m_W$  i  $m_b$ . Radi takvog odabira energijskih skala postojanje i bilo kakav možebitan učinak  $t$  kvarka je, zbog njegove velike mase reda veličine 100 GeV, nevidljiv iz perspektive efektivne teorije. Stoga vrijedi  $n_f = 5$  i kada se izraz za beta funkciju

$$\beta_S(\alpha_S) = -\epsilon\alpha_S - \frac{\alpha_S^2}{2\pi} \left(11 - \frac{2}{3}n_f\right) = -\frac{23}{6\pi}\alpha_S^2\tag{4.28}$$

uvrsti u (4.26) i (4.27) dobivamo konačno sređene izraze za dijagonalne koeficijente  $a_i$

$$a_1(\mu^2) = a_1(m_W^2) \exp \left[ \frac{6}{23} \int_{\alpha_S(\mu^2)}^{\alpha_S(m_W^2)} \frac{d\alpha_S}{\alpha_S} \right] = a_1(m_W^2) \left( \frac{\alpha_S(m_W^2)}{\alpha_S(\mu^2)} \right)^{\frac{6}{23}}, \quad (4.29)$$

$$a_2(\mu^2) = a_2(m_W^2) \exp \left[ -\frac{12}{23} \int_{\alpha_S(\mu^2)}^{\alpha_S(m_W^2)} \frac{d\alpha_S}{\alpha_S} \right] = a_2(m_W^2) \left( \frac{\alpha_S(m_W^2)}{\alpha_S(\mu^2)} \right)^{-\frac{12}{23}}. \quad (4.30)$$

Jednadžbe renormalizacijske grupe, postavljene u izrazu (4.4), rješili smo u novoj bazi operatora s kojom nam se je početan sustav diferencijalnih jednadžbi (4.17) dijagonalizirao. Nova baza operatora s oznakama  $\tilde{\mathcal{O}}_1$  i  $\tilde{\mathcal{O}}_2$  povezana je sa osnovnom bazom definiranom u trećem poglavlju izrazima (3.1) i (3.2) narednim transformacijama

$$\tilde{\mathcal{O}}_1 = \frac{\mathcal{O}_1 + \mathcal{O}_2}{2}, \quad \tilde{\mathcal{O}}_2 = \frac{\mathcal{O}_1 - \mathcal{O}_2}{2}, \quad (4.31)$$

odakle slijedi da se izvorni Wilsonovi koeficijenti koji stoje uz operatore  $\mathcal{O}_i$  u efektivnom lagranžijanu mogu izračunati iz (4.31)

$$C_1(\mu^2) = \frac{a_1(\mu^2) + a_2(\mu^2)}{2}, \quad C_2(\mu^2) = \frac{a_1(\mu^2) - a_2(\mu^2)}{2}. \quad (4.32)$$

Sada poznavajući iznos konstante fine strukture jake interakcije  $\alpha_S$  na skali  $m_W$  možemo izračunati iznose Wilsonovih koeficijenata  $C_i(\mu^2 = m_W^2)$ , pritom poništiti logaritme koji se pojavljuju u formulama (3.36) i (3.37) da bismo zatim dobili njihove vrijednosti na primjerenoj fizikalnoj skali  $m_b$  koja je relevantna za procese kvarkovskih raspršenja pomoću (4.32).

Procedura rješavanja jednadžbi renormalizacijske grupe koju smo sproveli u prethodnim koracima ekvivalentna je resumaciji velikih logaritama i njihovoj apsorpciji u efektivne Wilsonove koeficijente  $C_i(\mu^2)$  u izrazu (4.32) koji bi inače narušili prije raspravljaju konvergentnost perturbativnog reda.

### 4.3 Wilsonovi koeficijenti $C_1$ i $C_2$ uz izbor skale $\mu^2 = m_b^2$

Polazište u računu nam je vrijednost konstante fine strukture jake interakcije na skali mase  $Z$  bozona,  $\mu^2 = m_Z^2$ , [13]:

$$\alpha_S(\mu^2 = m_Z^2) = 0.1179 \pm 0.0009, \quad (4.33)$$

kojoj uz pomoć kromodinamičke beta funkcije u (4.15) i njezinog rješenja za  $\alpha_S(\mu^2)$

$$\alpha_S(\mu^2) = \frac{\alpha_S(m_Z^2)}{1 + \frac{23}{12\pi}\alpha_S(m_Z^2)\ln\frac{\mu^2}{m_Z^2}} \quad (4.34)$$

možemo zbog klizanja odrediti vrijednost na skalama  $m_W$  i  $m_b$ :

$$\alpha_S(m_W^2) = 0.1201 \pm 0.0009, \quad (4.35)$$

$$\alpha_S(m_b^2) = 0.212 \pm 0.003.$$

Mase  $W$  bozona i  $b$  kvarka koje pritom koristimo su prema [17] jednake:

$$m_W = (80.377 \pm 0.012) \text{ GeV}, \quad (4.36)$$

$$m_b = (4.18 \pm 0.03) \text{ GeV}.$$

Iz rezultata spajanja pune teorije Standardnog modela i efektivne teorije (3.36), (3.37) Wilsonovi koeficijenti su, uz  $\tilde{\mu}^2 = m_W^2$ :

$$C_1(\tilde{\mu}^2 = m_W^2) = (0.9857 \pm 0.0001)G, \quad (4.37)$$

$$C_2(\tilde{\mu}^2 = m_W^2) = (0.0430 \pm 0.0003)G.$$

U sljedećem koraku dobivamo dijagonalne koeficijente  $a_i$  korištenjem (4.32)

$$a_1(m_W^2) = C_1(m_W^2) + C_2(m_W^2) = (1.0287 \pm 0.0003)G, \quad (4.38)$$

$$a_2(m_W^2) = C_1(m_W^2) - C_2(m_W^2) = (0.9427 \pm 0.0003)G.$$

Posljednje nas zbog (4.29) i (4.30) vodi na

$$\begin{aligned}
 a_1(m_b^2) &= a_1(m_W^2) \left( \frac{\alpha_S(m_W^2)}{\alpha_S(m_b^2)} \right)^{\frac{6}{23}} = (0.887 \pm 0.004)G, \\
 a_2(m_b^2) &= a_2(m_W^2) \left( \frac{\alpha_S(m_W^2)}{\alpha_S(m_b^2)} \right)^{-\frac{12}{23}} = (1.267 \pm 0.003)G.
 \end{aligned}
 \tag{4.39}$$

Time konačno dobivamo povratkom na izvornu bazu operatora  $\mathcal{O}_1$  i  $\mathcal{O}_2$  Wilsonove koeficijente na energiji  $m_b$

$$\begin{aligned}
 C_1(m_b^2) &= (1.077 \pm 0.003)G, \\
 C_2(m_b^2) &= -(0.190 \pm 0.003)G.
 \end{aligned}
 \tag{4.40}$$

Usporedbom (4.40) sa (4.37) vidi se da su korekcije Wilsonovih koeficijenata dobivene primjenom jednadžbi renormalizacijske grupe na efektivnu teoriju polja u odnosu na početan rezultat značajne. Numeričke vrijednosti koeficijenata u posljednjoj formuli predstavljaju glavno teorijsko predviđanje efektivnog modela elektroslabih interakcija i moći ćemo ih usporediti s eksperimentalno dobivenim rezultatima u sljedećem poglavlju.

## 5 Raspadi $\bar{B}^0 \rightarrow D^+ + \pi^-$ i $\bar{B}^0 \rightarrow D^0 + \pi^0$

### 5.1 Fenomenologija hadronskih raspada $\bar{B}$ bozona i teorijski izračun amplitude procesa $\bar{B}^0 \rightarrow D + \pi$

Efektivna teorija elektroslabih interakcija izložena u prethodnim dvama poglavljima omogućuje nam precizan opis kvarkovskih procesa raspada i raspršenja koji se odvijaju medijacijom virtualnog  $W$  bozona. Raspon energija u kojem je ta teorija valjana aproksimacija seže od karakterističnog praga  $\Lambda_{QCD} \approx 300$  MeV perturbativnosti kvantne kromodinamike do energija znatno manjih od mase  $W$  bozona  $m_W \approx 80$  GeV. Budući da niti jedan kvark osim  $t$  kvarka ne opažamo kao česticu u izolaciji, a on je zbog svoje velike mase isključen iz ovih razmatranja, najprikladniji procesi podložni gornjem opisu su raspadi mezona s jednim  $b$  ili  $c$  kvarkom. Masa  $b$  ili  $c$  kvarka, reda veličine 1 GeV, u takvim mezonima automatski ih smješta u gorenaveden raspon energija.

Za nas je ovdje od posebnog interesa  $\bar{B}^0$  mezon s kvarkovskim sastavom

$$|\bar{B}^0\rangle = |b\bar{d}\rangle. \quad (5.1)$$

Dvije vrste od velikog broja mogućih raspada  $\bar{B}^0$  mezona uključuju čiste hadronske raspade u  $D^+$  mezon i pion  $\pi^-$

$$\bar{B}^0 \rightarrow D^+ + \pi^-, \quad (5.2)$$

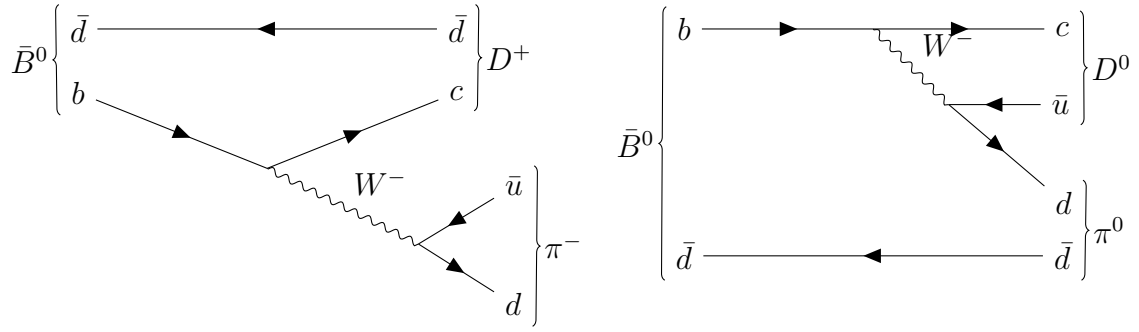
gdje su valentni kvarkovski sastavi proizvoda raspada (5.2) dani u sljedećoj notaciji

$$|D^+\rangle = |c\bar{d}\rangle, \quad (5.3)$$

$$|\pi^-\rangle = |d\bar{u}\rangle,$$

te raspad

$$\bar{B}^0 \rightarrow D^0 + \pi^0, \quad (5.4)$$



Slika 5.1: Raspadi  $\bar{B}^0 \rightarrow D^+ + \pi^-$  i  $\bar{B}^0 \rightarrow D^0 + \pi^0$  u Standardnom modelu.

sa sastavom valentnih kvarkova

$$|D^0\rangle = |c\bar{u}\rangle, \quad (5.5)$$

$$|\pi^0\rangle = |d\bar{d}\rangle.$$

Opsežan pregled ostalih mogućih leptonskih, poluleptonskih i hadronskih raspada  $B$  mezona nalazi se u [14]. Iako su procesi raspada (5.2) i (5.4) iznimno složeni zbog kombiniranog doprinosa razmjene mekanih, odnosno niskoenergijskih gluona između svih sudjelujućih kvarkova i razmjene tvrdih, visokoenergijskih gluona kao i elektroslabih medijatora,  $W$  bozona, elektroslabi dio procesa smo zajedno s doprinosima tvrdih gluona razriješili u prvom i drugom poglavlju; međutim, problem mekanih gluona nije moguće raspjetljati primjenom računa smetnje što je izvor najveće pogreške u teorijskim računima širina raspada hadronskih raspada općenito.

Vodeće moguće realizacije procesa (5.2) i (5.4) u okviru Standardnog modela prikazane su na slici 5.1. Amplitude tih dvaju procesa dane su matričnim elementima preko interakcijskog dijela efektivnog hamiltonijana

$$\mathcal{H}_{EFT,i} = -\mathcal{L}_{EFT,i}, \quad (5.6)$$

pa stoga imamo

$$\mathcal{A}_1 = \langle D^+ \pi^- | \mathcal{H}_{EFT,i} | \bar{B}^0 \rangle, \quad (5.7)$$

$$\mathcal{A}_2 = \langle D^0 \pi^0 | \mathcal{H}_{EFT,i} | \bar{B}^0 \rangle.$$

Izračun hadronskih matričnih elemenata (5.7) otežan je činjenicom da je kvarkovski sastav sudjelujućih mezona znatno složeniji od onih koje smo dali u jednakostima

(5.3) i (5.5) zbog utjecaja spomenutih mekih gluona. Zato amplitude (5.7) ne možemo jednostavno svesti na proces raspada valentnog  $b$  kvarka

$$\mathcal{A}_k \approx \langle c\bar{u}d | \mathcal{H}_{EFT,i} | b \rangle, \quad (5.8)$$

koji se odvija u pozadini, odakle bi nam gotovo trivijalno slijedio rezultat za  $\mathcal{A}_k$ . Međutim, uvođenjem niza fenomenoloških pretpostavki teorijski predviđene amplitude  $\mathcal{A}_k$  mogu se povezati s empirijski dobro poznatim veličinama poput konstanti raspada  $\pi$  i  $D$  mezona. Prvi izraz iz (5.7), eksplicitno raspisan pomoću definicije (3.3) i korištenjem identiteta (B.4), poprima sljedeći oblik

$$\mathcal{A}_1 = \left( C_1 + \frac{C_2}{3} \right) \langle D^+ \pi^- | [\bar{d}_L \gamma^\mu u_L] [\bar{c}_L \gamma_\mu b_L] | \bar{B}^0 \rangle + 2C_2 \langle D^+ \pi^- | [\bar{d}_L t^a \gamma^\mu u_L] [\bar{c}_L t^a \gamma_\mu b_L] | \bar{B}^0 \rangle. \quad (5.9)$$

Fenomenološki argumenti iz [15], [18] za pojednostavljenje formule (5.9) polaze od činjenice da je  $\bar{B}^0$  mezon radi prisutnosti  $b$  kvarka znatno masivniji od produkata raspada:  $D$  mezona i piona. Zbog konkretnosti razmotrit ćemo prvi raspad

$$\bar{B}^0 \rightarrow D^+ + \pi^- \quad (5.10)$$

sa slike 5.1. U sustavu centra mase  $\bar{B}^0$  mezona se, uz pretpostavku mirujućeg valentnog  $b$  kvarka, dva produkta kvarkovskog raspada

$$b \rightarrow c + (\bar{u}d)^- \quad (5.11)$$

gibaju kolinearno u suprotnim smjerovima s velikim iznosima impulsa naslijeđenim od mase  $b$  kvarka. Za kvarkovski par  $\bar{u}$  i  $d$  je potrebno relativno dugo vremensko razoblje (dovoljno da se udalje nekoliko femtometara od ostatka sustava) prije nego što hadroniziraju i nastane pion, upravo kao posljedica njihovog brzog gibanja i relativističke dilatacije vremena. Budući da se za to vrijeme prije hadronizacije par  $\bar{u}$  i  $d$  kvarkova, nastao posredstvom (lokalne) slabe interakcije kao singlet s obzirom na boju, ponaša kao maleni bojni dipol te po pretpostavci interagira zanemarivo slabo s ostatkom sustava, možemo zanemariti doprinos operatora u drugom skalarnom

produktu u (5.9)

$$[\bar{d}_L t^a \gamma^\mu u_L][\bar{c}_L t^a \gamma_\mu b_L], \quad (5.12)$$

spram prvoga jer je proporcionalan amplitudi jakog međudjelovanja podsustava  $(\bar{u}d)^-$  s ostalim kvarkovima. Posljednji zaključak potkrijepljen je dodatno činjenicom da je energija u sustavu centra mase reda veličine nekoliko GeV-a i s time veća od praga perturbativnosti kromodinamike  $\Lambda_{QCD}$  iznad koje dolazi do izražaja svojstvo asimp-totske slobode teorije.

Daljnja posljedica singletnosti kvarkova u vezanim strujama je da prvi skalarni produkt stanja

$$\langle D^+ \pi^- | [\bar{d}_L \gamma^\mu u_L][\bar{c}_L \gamma_\mu b_L] | \bar{B}^0 \rangle \quad (5.13)$$

možemo, kao razumnu aproksimaciju, faktorizirati u dva dijela

$$\langle D^+ \pi^- | [\bar{d}_L \gamma^\mu u_L][\bar{c}_L \gamma_\mu b_L] | \bar{B}^0 \rangle \approx \langle \pi^- | [\bar{d}_L \gamma^\mu u_L] | 0 \rangle \langle D^+ | [\bar{c}_L \gamma_\mu b_L] | \bar{B}^0 \rangle, \quad (5.14)$$

čime se prva amplituda svodi na

$$\mathcal{A}_1 \approx \left( C_1 + \frac{C_2}{3} \right) \langle \pi^- | [\bar{d}_L \gamma^\mu u_L] | 0 \rangle \langle D^+ | [\bar{c}_L \gamma_\mu b_L] | \bar{B}^0 \rangle, \quad (5.15)$$

dok se za drugu dobiva analognim postupkom

$$\mathcal{A}_2 \approx \left( C_2 + \frac{C_1}{3} \right) \langle D^0 | [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] | 0 \rangle \langle \pi^0 | [\bar{d}_L \gamma_\mu b_L] | \bar{B}^0 \rangle. \quad (5.16)$$

Konačan potez koji će nas dovesti do sređenih izraza je taj da ćemo se pozvati na rezultat (4.40) iz prethodnog poglavlja o rješavanju jednaždbi renormalizacijske grupe za Wilsonove koeficijente odakle vidimo da drugi koeficijent  $C_2$  mora po iznosu biti znatno manji od prvoga, a također je potisnut faktorom  $\frac{1}{3}$  koji potječe od broja boja u kromodinamici. Zato ćemo drugi član u (5.9) zanemariti i opravdanje za taj



Vrsta raspada	$n_1$	$\frac{n_2}{n_1}$
$\bar{B} \rightarrow D^{(*)}\pi$	$1.08 \pm 0.06$	$0.21 \pm 0.07$
$\bar{B} \rightarrow D^{(*)}\rho$	$1.07 \pm 0.07$	$0.23 \pm 0.14$
$\bar{B} \rightarrow \psi^{(\prime)}K^{(*)}$	-	$ n_2  = 0.21 \pm 0.04$
$\bar{B} \rightarrow D^{(*)}\bar{D}_s^{(*)}$	$1.10 \pm 0.18$	-

Tablica 5.1: Rezultati eksperimentalnih provjera valjanosti izraza (5.17) iz [15].

korak ćemo naći naknadno u narednom potpoglavlju, odakle slijedi:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_1 &= C_1 \langle \pi^- | [\bar{d}_L \gamma^\mu u_L] | 0 \rangle \langle D^+ | [\bar{c}_L \gamma_\mu b_L] | \bar{B}^0 \rangle = \\
&\equiv n_1 \langle \pi^- | [\bar{d}_L \gamma^\mu u_L] | 0 \rangle \langle D^+ | [\bar{c}_L \gamma_\mu b_L] | \bar{B}^0 \rangle, \\
\mathcal{A}_2 &= (C_2 + \zeta C_1) \langle D^0 | [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] | 0 \rangle \langle \pi^0 | [\bar{d}_L \gamma_\mu b_L] | \bar{B}^0 \rangle = \\
&\equiv n_2 \langle D^0 | [\bar{c}_L \gamma^\mu u_L] | 0 \rangle \langle \pi^0 | [\bar{d}_L \gamma_\mu b_L] | \bar{B}^0 \rangle,
\end{aligned} \tag{5.17}$$

gdje je parametar  $\zeta$  u izrazu za  $\mathcal{A}_2$  bezdimenzionalna veličina neovisna o vrsti procesa hadronskog raspada uvedena kao poopćenje faktora boje  $\frac{1}{3}$  koji je viđen prethodno. Utjecaj perturbativnog dijela procesa, a to su elektroslabi raspad  $b$  kvarka i razmjene tvrdih gluona između kvarkova, je time pospremljen u predfaktore amplituda, dok su neperturbativni hadronski matrični elementi sadržani u faktoriziranim skalarnim produktima. Korist izraza (5.17) je da su skalarni produkti u njima relativno jednostavno eksperimentalno mjerljive veličine poznate preko konstanti raspada piona i  $D$  mezona kao i form faktora u raspadima  $\bar{B} \rightarrow D$  i  $\bar{B} \rightarrow \pi$  pa je stoga moguće, zbog neovisnosti Wilsonovih koeficijenata o eksternim stanjima, eksperimentalno odrediti veličine  $n_i$  i  $\zeta$  za široku klasu hadronskih raspada  $\bar{B}$  mezona.

## 5.2 Eksperimentalne provjere efektivne teorije elektroslabih interakcija

Ispravnost formula u (5.17), a time i pretpostavki koje smo uvrstili u početne izraze (5.7) da bismo došli do konačnog rezultata, ispitana je u nizu provjera različitih modova raspada  $\bar{B}$  mezona. Rezultati eksperimenata iz [15] navedeni su u tablici 5.1. Uspoređujući eksperimentalno dobivene numeričke vrijednosti za parametar  $n_1$  (u jedinicama modificirane Fermijeve konstante  $G$ ) vidimo da se jako dobro slažu s

teorijski izračunatim Wilsonovim koeficijentom  $C_1$  na skali mase  $b$  kvarka

$$C_1(m_b^2) = (1.077 \pm 0.003)G. \quad (5.18)$$

Nadovezujući se na posljednje, sva provedena mjerenja konzistentna su s jedinstvenom vrijednošću hadronskog parametra  $\zeta$

$$\zeta = 0.45 \pm 0.05, \quad (5.19)$$

odakle slijedi da je drugi Wilsonov koeficijent jednak

$$C_{2,exp} = -(0.27 \pm 0.07)G, \quad (5.20)$$

što je u malo slabijem slaganju s teorijski izračunatom vrijednošću

$$C_2(m_b^2) = -(0.190 \pm 0.003)G. \quad (5.21)$$

U konačnici, s primjenom jednostavnih i intuitivnih fenomenoloških argumenata u hadronskim raspadima  $\bar{B}^0$  bozona uspjeli smo svesti teorijsku amplitudu procesa od interesa na faktoriziran oblik s jasno odvojenim doprinosima perturbativnog dijela Standardnog modela s jedne strane i doprinosa neperturbativnih hadronskih matičnih elemenata koje smo povezali s eksperimentalno dostupnim veličinama s druge strane. Pokazali smo da se efektivna teorija polja konstruirana u drugom poglavlju jako dobro slaže s rezultatima pokusa izvedenih na raspadima  $\bar{B}^0$  bozona, što smo i očekivali. Zadnjih tridesetak godina postoje pokušaji s kojima se je željelo analitički izračunati hadronske doprinose amplitudama, od kojih je među najuspješnijima bila tzv. efektivna teorija jakih interakcija s teškim kvarkom (eng. HQET), više u [15] i [16].

## 6 Zaključak

Glavni cilj ovoga rada bio je pronalazak efektivne teorije polja elektroslabih interakcija. Osnovan proces čije smo si proučavanje zadali u tu svrhu bilo je raspršenje dvaju kvarkova na ulazu u dva kvarka na izlazu medijacijom jednog virtualnog  $W$  bozona. Uzimanje kvarkova u ulaznom i izlaznom kanalu raspršenja omogućilo nam je da odredimo i proučimo najniže perturbativne doprinose kvantne kromodinamike u takvim procesima.

U drugom poglavlju izvrijednili smo sve relevantne amplitude u okviru punog Standardnog modela što nas je dovelo do prirodnog *ansatza* za oblik lagranžijana efektivne teorije. Spajanjem amplitude efektivnog modela i SM rezultata u niskoenergijskom (infracrvenom) limesu prikazali smo Wilsonove koeficijente, koji predstavljaju konstante vezanja u efektivnoj teoriji, kao funkcije Fermijeve konstante i konstante fine strukture za jaku interakciju.

U četvrtom poglavlju smo iskoristili glavnu prednost pristupa analizi raspršenja kvarkova preko efektivnog opisa, a to je jednostavnost primjene jednadžbi renormalizacijske grupe na Wilsonove koeficijente čijim smo rješavanjem apsorbirali utjecaj velikih logaritama u njihovoj definiciji u efektivne Wilsonove koeficijente koji su time poprimili ovisnost o relevantnoj energijskoj skali procesa koji promatramo.

Nakon što smo završili s izgradnjom samog efektivnog opisa procesa koji uključuju četiri kvarka bavili smo se s mogućim teorijskim implikacijama koje naš model sadrži. Na temelju raspona energija unutar kojeg teorija vrijedi zaključili smo da očekujemo najbolja teorijska slaganja s eksperimentalnim podacima kod raspada  $\bar{B}^0$  mezona. Međutim, glede na to da hadronski raspad  $\bar{B}^0$  nije izravno svodiv na raspad sastavnog  $b$  kvarka zbog neperturbativnih korekcija mekanih gluona u jako vezanom mezonskom sustavu uveli smo nekoliko fenomenoloških pretpostavki kojima smo argumentirano pojednostavili komplicirane hadronske matrične elemente i koji igraju ključnu ulogu u amplitudama raspada od interesa. Time smo izraze za amplitude doveli u faktoriziranu formu s jasno odvojenim doprinosima perturbativnog dijela Standardnog modela, a to je efektivna teorija polja, i neperturbativnim hadronskim dijelovima koje je, iako predstavljaju značajnu prepreku s teorijskog aspekta analize, moguće povezati s dobro poznatim i dostupnim eksperimentalno mjerenim veličinama. Zbog toga što su amplitude u njihovoj faktoriziranoj formi neovisne o

vanjskim (eksternim) stanjima procesa raspršenja moguće je bilo usporediti teorijski izračun Wilsonovih koeficijenata s eksperimentalnim mjerenjima za četiri široke klase raspada  $\bar{B}$  bozona.

Slaganje prvog Wilsonovog koeficijenta  $C_1$  s eksperimentalno mjerenom konstantom  $n_1$  se pokazuje kao odlično, dok drugi koeficijent  $C_2$  pokazuje nešto slabije slaganje s parametrima  $n_2$  i  $\zeta$ , iako to neslaganje nije pretjerano budući da teorijska vrijednost leži tik izvan intervala omeđenog pogreškama mjerenja. Time smo pokazali da naša efektivna teorija elektroslabih interakcija u kombinaciji s osnovnim fenomenološkim pretpostavkama o strukturi hadrona daje jako dobro slaganje s rezultatima eksperimentalnih ispitivanja. Ujedno smo pokazali da kromodinamičke korekcije koje potječu od razmjene tvrdih gluona između kvarkova igraju presudnu ulogu kod elektroslabih raspada hadrona bez čijeg uračunavanja ne bismo imali niti približno dobra slaganja teorijskog opisa i eksperimenta kao što smo ih ovdje dobili.

# Dodaci

## Dodatak A Elektroslabo međudjelovanje

Zbog sažetosti ovdje ne izvodimo Feynmanova pravila teorija s kojima radimo iz prvih načela, već samo navodimo najvažnije vrhove kojima doprinose, zajedno s propagatorima svih čestica. Samointerakcije baždarnih bozona, kao i interakcije Higgsovog bozona s ostalim česticama zanemarujemo budući da se nigdje ne pojavljuju u našim dijagramatskim računima.

Započinjemo s propagatorima čestica koji su po definiciji Greenove funkcije jednadžbi gibanja kinetičkih dijelova lagranžijana. Za fermione to dovodi do relacije

$$(i\not{\partial} - m)G_f(x, y) = i\delta^{(4)}(x - y). \quad (\text{A.1})$$

U praksi se češće upotrebljava inačica Feynmanovih pravila u impulsnom prostoru, zato u tu svrhu u jednakost (A.1) ubacujemo Fourierov transformat propagatora

$$G_f(x, y) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \tilde{G}_f(k) e^{-ik(x-y)}, \quad (\text{A.2})$$

odakle odmah slijedi

$$(\not{k} - m)\tilde{G}_f(k) = i \quad (\text{A.3})$$

i

$$\tilde{G}_f(k) = i \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2}, \quad (\text{A.4})$$

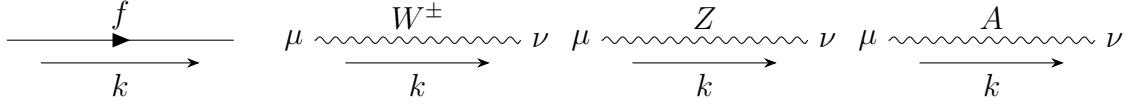
gdje posljednje predstavlja fermionski propagator, prikazan na slici A.1.

Propagatori masivnih baždarnih bozona  $W^\pm$  i  $Z$  dobivaju se na sličan način iz lagranžijana (1.10) uz dodatak masivnog člana zbog Higgsovog mehanizma

$$\partial_\alpha \partial^\alpha D^\mu_\nu + m_\eta^2 D^\mu_\nu = i\delta^{(4)}(x - y)\delta^\mu_\nu, \quad (\text{A.5})$$

gdje je  $\eta = W, Z$ . Rješenje jednakosti (A.5) u impulsnom prostoru je

$$\tilde{D}_{\mu\nu}(k^2) = -\frac{ig_{\mu\nu}}{k^2 - m_\eta^2}, \quad (\text{A.6})$$



Slika A.1: Fermionski te  $W^\pm$ ,  $Z$  i fotonski propagatori.

prikazano zajedno s fermionskim propagatorom na slici A.1. Fotonski propagator nešto je teže za izvesti zbog činjenice da njegova bezmasenost više ne jamči da je ispunjen Lorenzov baždarni uvjet. Naime, iz slobodne jednadžbe gibanja za masene bozone  $\eta = W, Z$  koristeći antisimetričnost tenzora  $F_{\eta,\mu\nu}^a$  pokazuje se da ujedno vrijedi jednakost

$$m_\eta^2 \partial_\mu \eta^\mu = 0, \quad (\text{A.7})$$

odnosno

$$\partial_\mu \eta^\mu = 0, \quad (\text{A.8})$$

što više nije automatski ispunjeno za bezmasene bozone poput fotona. To ujedno doводи do toga da fotonski propagator nije dobro definiran i rješava se tako da se elektroslabi lagranžijan modificira dodatnim članom koji eksplicitno narušava baždarnu simetriju

$$\mathcal{L}'_{EW} = \mathcal{L}_{EW} - \frac{1}{2\epsilon} (\partial_\mu A^\mu)^2, \quad (\text{A.9})$$

odakle slijedi jednakost

$$\partial_\alpha \partial^\alpha H_\nu^\mu + \left( \frac{1}{\epsilon} - 1 \right) \partial^\mu \partial_\alpha H_\nu^\alpha = i \delta^{(4)}(x-y) \delta_\nu^\mu. \quad (\text{A.10})$$

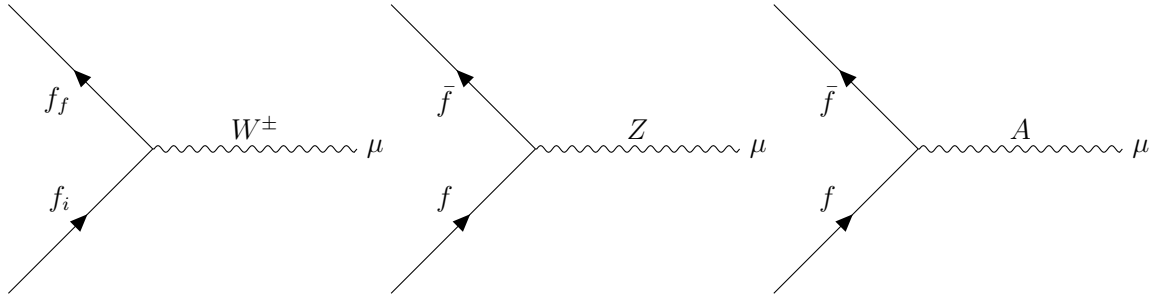
Rješenje za fotonski propagator u impulsnom prostoru stoga jest

$$\tilde{H}_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2} \left( g_{\mu\nu} - (1-\epsilon) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right), \quad (\text{A.11})$$

iz čega se odmah uočava problem kada se pokuša odabrati limes  $\epsilon \rightarrow \infty$ . U skladu s većinom literature koristimo tzv. Feynman- $\epsilon$  Hooftovo baždarenje u kojem je  $\epsilon = 1$ , odnosno konačni fotonski propagator oblikom odgovara propagatorima masivnih čestica

$$\tilde{H}_{\mu\nu}(k) = -\frac{i g_{\mu\nu}}{k^2}. \quad (\text{A.12})$$

Postoje tri interakcijska vrha između fermiona i elektroslabih bozona. Prvi i najvažniji u nizu je međudjelovanje fermion- $W^\pm$ -fermion koji je u biti jedini rele-



Slika A.2: Fermion-bozon-fermion međudjelovanja u elektroslaboj teoriji prema izrazima (A.13), (A.18) i (A.19).

vantan za nas te se može odrediti iz interakcijskog dijela izraza (1.13) kao

$$i \frac{g_W}{2\sqrt{2}} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) V_{fi}, \quad (\text{A.13})$$

gdje je s  $V_{fi}$  označen odgovarajući element unitarne CKM matrice koja povezuje elektroslaba svojstvena stanja i masena stanja kvarkova. Odavde je jednostavno vidjeti da se  $W$ -struja, definirana kao

$$j_W^\mu = \bar{\psi}_f \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \psi_i = \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_i - \bar{\psi}_f \gamma^\mu \gamma_5 \psi_i = j_V^\mu - j_A^\mu \quad (\text{A.14})$$

može zapisati kao razlika vektorske i aksijalne struje koje se transformiraju na različite načine s obzirom na paritet

$$\begin{aligned} j_V^\mu &\xrightarrow{\mathcal{P}} (j_V^0, -\vec{j}_V), \\ j_A^\mu &\xrightarrow{\mathcal{P}} (-j_A^0, \vec{j}_A). \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Budući da je amplituda međudjelovanja fermiona  $W$  bozonom proporcionalna produktu  $W$ -struja

$$\mathcal{M} \propto j_{W1} \cdot j_{W2} = j_{V1} \cdot j_{V2} + j_{A1} \cdot j_{A2} - j_{V1} \cdot j_{A2} - j_{A1} \cdot j_{V2}, \quad (\text{A.16})$$

ukupna amplituda nije invarijantna na paritet prema relacijama (A.15) i (A.16)

$$\mathcal{M} \xrightarrow{\mathcal{P}} \mathcal{M}' \propto j_{V1} \cdot j_{V2} + j_{A1} \cdot j_{A2} + j_{V1} \cdot j_{A2} + j_{A1} \cdot j_{V2} \neq \mathcal{M}. \quad (\text{A.17})$$

Druga vrsta vrha koja uključuje fermion- $Z$ -fermion međudjelovanje sadrži nejednake

$$\mu, a \xrightarrow[k]{g} \nu, b$$

Slika B.1: Gluonski propagator.

primjese vektorske i aksijalne struje te čije je Feynmanovo pravilo

$$i \frac{g_W}{2 \cos \theta_W} \gamma^\mu (g_V^f - g_A^f \gamma_5), \quad (\text{A.18})$$

$$g_V^f = T_3^f - 2Q^f \sin^2 \theta_W, g_A^f = T_3^f,$$

gdje je  $T_3^f$  slabi izospin fermiona, a  $Q^f$  naboj (izražen u jedinicama elementarnog električnog naboja  $e$ ). Treći vrh je standardan elektrodinamički i sadrži fermion-foton-fermion međudjelovanje, a po strukturi je čistog vektorskog tipa:

$$-ieQ^f \gamma^\mu. \quad (\text{A.19})$$

Konvencionalni prikazi svih triju vrhova u Feynmanovim dijagramima u kojima fermioni interagiraju s elektroslabim bozonima prikazani su na slici A.2. Više o izvodu navedenih i ostalih Feynmanovih pravila može se vidjeti u [1] i [3].

## Dodatak B Jako međudjelovanje

Jedini novi propagator koji ovdje razmatramo povrhu onih uvedenih u prethodnom dodatku je propagator  $SU(3)$  baždarnog bozona, gluona. Gluoni su bezmasene čestice opisane lagranžijanom (1.20), stoga je propagator gotovo identičan foton-skom

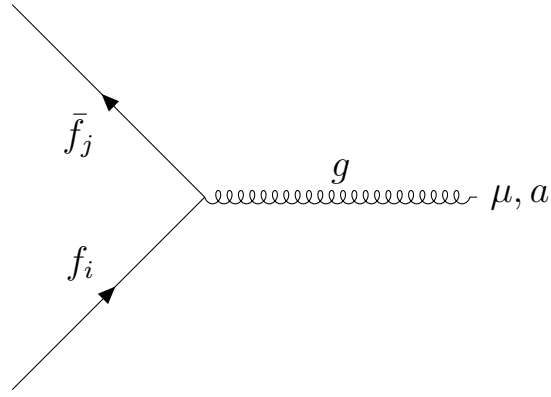
$$\tilde{C}_{\mu\nu}^{ab}(k) = -\frac{i}{k^2} \left( g_{\mu\nu} - (1 - \epsilon) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \delta^{ab}, \quad (\text{B.1})$$

uz dodatna dva indeksa  $a$  i  $b$  koji se pojavljuju zbog prisutnosti  $SU(3)$  naboja, tzv. boje. Kao i u slučaju fotona, ovdje ćemo se služiti isključivo Feynman-'t Hooft baždarenjem odakle imamo

$$\tilde{C}_{\mu\nu}^{ab}(k) = -\frac{i g_{\mu\nu}}{k^2} \delta^{ab}. \quad (\text{B.2})$$

Iako gluoni samointeragiraju u trogluonskim i četvergluonskim vrhovima, zane-marujemo ih budući da su nevažni u ovome kontekstu. Uzimajući to u obzir, vrh koji





Slika B.2: Fermion-gluon-fermion međudjelovanje.

daje doprinose u našim dijagramima je fermion-gluon-fermion međudjelovanje dano pravilom

$$ig_S \gamma^\mu t^a, \quad (\text{B.3})$$

sa slike B.2. Primijetimo također da su zbog strukture kromodinamičkog vrha (B.3), koja je čistog vektorskog tipa, matricni elementi u QCD-u invarijantni s obzirom na parnost, dakle u kromodinamici vrijedi očuvanje pariteta.

Identitet vezan za  $SU(3)$  generatore  $t^a$  s kojim pojednostavljujemo produkte spinora u računima glasi (vidjeti [1])

$$t_{ij}^a t_{kl}^a = \frac{1}{2} \left( \delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right), \quad (\text{B.4})$$

odakle kao specijalan slučaj izvlačimo sljedeći koristan rezultat

$$t_{ij}^a t_{jk}^a = \frac{1}{2} \left( \delta_{ik} \delta_{jj} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{jk} \right) = \frac{4}{3} \delta_{ik}, \quad (\text{B.5})$$

odnosno

$$t^a t^a = \frac{4}{3} \cdot \mathbb{1}. \quad (\text{B.6})$$

## Dodatak C Analitička proširenja čestih integrala sa četiri dimenzije na $d$ dimenzija

Glede na to da petlje u dijagramima općenito dovode do divergencija u njihovim računima, za regularizaciju integrala petlji rabimo proceduru dimenzionalne regula-

rizacije koju su prvi upotrijebili 't Hooft i Veltman [5]. Zbog toga, po uzoru na [10], uvodimo notaciju za klasu integrala koji se najčešće pojavljuju:

$$I_{mn} = \int \frac{\mu^{4-d} d^d l}{(2\pi)^d} \frac{(l^2)^m}{(l^2 - \Delta)^n}, \quad (\text{C.1})$$

gdje je  $\mu$  proizvoljna energijska skala uvedena kako bi osiguravala da ukupna integralna mjera ima dimenziju četiri, bez obzira na dimenziju  $d$  u kojoj se integrira. Integral se može izvrijedniti eksplicitno za proizvoljne  $m$  i  $n$  (vidi [3])

$$I_{mn} = \frac{i(-1)^{n-m} \Gamma(m + \frac{d}{2}) \Gamma(n - m - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-m-2} \left(\frac{\mu^2}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}}, \quad (\text{C.2})$$

te posebno za najčešće  $m = 0, 1$  slučajeve vrijedi

$$I_{0n} = \frac{i(-1)^n \Gamma(n - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-2} \left(\frac{\mu^2}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}}, \quad (\text{C.3})$$

$$I_{1n} = \frac{i(-1)^{n-1} d \Gamma(n - 1 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}} 2 \Gamma(n)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-3} \left(\frac{\mu^2}{\Delta}\right)^{2-\frac{d}{2}}.$$

## Dodatak D Fierzovi identiteti

Kod sređivanja produkata lijevih komponenti spinora i  $\gamma$  matrica te njihovih kontrakcija primijenjujemo Fierzove identitete iz [1]:

$$(\bar{\psi}_{1L} \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\mu \psi_{2L}) (\bar{\psi}_{3L} \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\mu \psi_{4L}) = 16 (\bar{\psi}_{1L} \gamma^\mu \psi_{2L}) (\bar{\psi}_{3L} \gamma_\mu \psi_{4L}), \quad (\text{D.1})$$

$$(\bar{\psi}_{1L} \gamma^\mu \psi_{2L}) (\bar{\psi}_{3L} \gamma_\mu \psi_{4L}) = (\bar{\psi}_{1L} \gamma^\mu \psi_{4L}) (\bar{\psi}_{3L} \gamma_\mu \psi_{2L})$$

i

$$(\bar{\psi}_{1L} \gamma^\nu \gamma^\alpha \gamma^\mu \psi_{2L}) (\bar{\psi}_{3L} \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \psi_{4L}) = 4 (\bar{\psi}_{1L} \gamma^\mu \psi_{2L}) (\bar{\psi}_{3L} \gamma_\mu \psi_{4L}). \quad (\text{D.2})$$

Napominjemo da relacije (D.1) i (D.2) drže kada su polja  $\psi_{iL}$  i  $\bar{\psi}_{iL}$  operatori. U slučaju kada to ne vrijedi (dakle razmatramo klasična polja) u drugom i trećem Fierzovom identitetu se pojavljuje dodatan negativan predznak.

## Dodatak E Faktor reskaliranja fermionskih polja $Z_\psi$

Kod primjene jednadžbi renormalizacijske grupe na Wilsonove koeficijente potreban nam je faktor reskaliranja fermionskih polja koji smo u drugom i trećem poglavlju označili sa  $Z_\psi$ . On dolazi od tzv. samoenergijskih dijagrama u kojima fermion emitira i reapsorbira virtualne baždarne bozone poput gluona,  $Z$  bozona i fotona (pokazuje se da dijagram koji uključuje emisiju i apsorpciju  $W$  bozona iščezava). Od tri navedene vrste dijagrama za nas je relevantan gluonski samoenergijski dijagram. Njegov najniži netrivialan doprinos je dijagram prikazan na slici E.1. Ista takva dva dijagrama mogu se konstruirati zamjenom gluona sa slike E.1 sa  $Z$  bozonom ili fotonom; međutim, konstanta jakog međudjelovanja je za red veličine veća od konstante fine strukture pa stoga više elektroslabe učinke zanemarujemo, konzistentno s ranijim rezultatima koje smo dobili. Regularizirana amputirana amplituda dijagrama  $\Sigma_2$  potom je jednaka (za bezmasen kvark):

$$\begin{aligned} -i\Sigma_2(\not{p}) &= \int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} (-ig_s t^a \gamma^\alpha) i \frac{\not{p} + \not{k}}{(p+k)^2} (-ig_s t^b \gamma^\beta) \frac{-ig_{\alpha\beta} \delta_{ab}}{k^2} = \\ &= -g_s^2 t^a t^a \int \frac{d^d k \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \gamma^\alpha (\not{p} + \not{k}) \gamma_\alpha \frac{1}{(p+k)^2 k^2}. \end{aligned} \quad (\text{E.1})$$

Feynmanovom parametrizacijom spajamo impulse propagatora u petlji

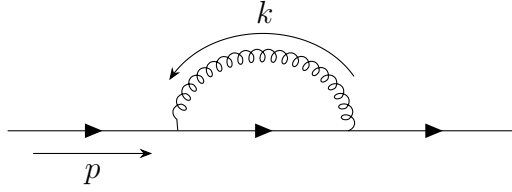
$$\begin{aligned} \frac{1}{(p+k)^2 k^2} &= \int_0^1 dx dy \delta(1-x-y) \frac{1}{(x(p+k)^2 + yk^2)^2} = \\ &= \int_0^1 dx dy \delta(1-x-y) \frac{1}{((k+xp)^2 - xp^2 - x^2 p^2)^2} = \\ &= \int_0^1 dx dy \delta(1-x-y) \frac{1}{((k+xp)^2 - (-x(1-x)p^2))^2}. \end{aligned} \quad (\text{E.2})$$

Uz translaciju impulsa po kojem integriramo

$$l \equiv k + xp, \quad (\text{E.3})$$

definiciju  $\Delta(x)$

$$\Delta(x) \equiv -x(1-x)p^2, \quad (\text{E.4})$$



Slika E.1: Samoenergija fermiona do reda jedne petlje u kromodinamici.

imamo

$$-i\Sigma_2(\not{p}) = -g_S^2 t^a t^a \int_0^1 dx \int \frac{d^d l \mu^{4-d}}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\alpha (\not{l} + (1-x)\not{p}) \gamma_\alpha}{(l^2 - \Delta(x))^2}. \quad (\text{E.5})$$

Prvi član u (E.5), proporcionalan sa  $\not{l}$  propada zbog neparnosti. S drugim članom nastavljamo pomoću identiteta

$$\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma_\alpha = (2-d)\gamma^\mu, \quad (\text{E.6})$$

odakle slijedi

$$\begin{aligned} -i\Sigma_2(\not{p}) &= -g_S^2 t^a t^a \int_0^1 (1-x) dx (2-d) \not{p} I_{02}(\Delta) = \\ &= -g_S^2 t^a t^a \int_0^1 (1-x) dx (2-d) \not{p} \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \left(\frac{\mu^2}{\Delta}\right)^{2 - \frac{d}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{E.7})$$

Uz razvoje (2.32) i redefiniciju  $\tilde{\mu}^2 \equiv 4\pi e^{-\gamma} \mu^2$ ,  $\Sigma_2$  poprima oblik

$$\begin{aligned} -i\Sigma_2(\not{p}) &= -g_S^2 t^a t^a \int_0^1 dx (1-x) \frac{i}{8\pi^2} \left(1 - \frac{2}{\epsilon} + \ln \frac{\Delta(x)}{\tilde{\mu}^2}\right) \not{p} = \\ &= \frac{ig_S^2}{12\pi^2} \left(\frac{2}{\epsilon} + 1 - \ln \frac{-p^2}{\tilde{\mu}^2}\right) \not{p}. \end{aligned} \quad (\text{E.8})$$

Kako bismo iz (E.8) mogli izvući  $Z_\psi$  moramo UV divergentan dijagram sa slike E.1 povezati sa odgovarajućim kontračlanom koji dolazi iz bezmasenog kinetičkog dijela lagranžijana za fermione

$$\mathcal{L}_k = i\bar{\psi}_0 \not{\partial} \psi_0. \quad (\text{E.9})$$

Reskaliranjem dvaju polja

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \sqrt{Z_\psi}\psi, \\ Z_\psi &= 1 + \delta_\psi,\end{aligned}\tag{E.10}$$

razdvajamo  $\mathcal{L}_k$  na dva dijela

$$\mathcal{L}_k = i\bar{\psi}\not{\partial}\psi + i\delta_\psi\bar{\psi}\not{\partial}\psi,\tag{E.11}$$

gdje drugi član u (E.11) tretiramo kao interakciju dvaju fermionskih polja s Feynmanovim pravilom

$$i\delta_\psi\not{\partial}.\tag{E.12}$$

Definicijom

$$\delta_\psi = -\frac{2\alpha_S}{3\pi\epsilon}\tag{E.13}$$

zbroj amputirane amplitude  $\Sigma_2$  i kontračlana (E.12) postaje slobodan od UV divergencija.

## Literatura

- [1] Schwartz, M. D. Quantum Field Theory and the Standard Model. 1st ed. Cambridge University Press, 2013.
- [2] Buras, A. J. Weak Hamiltonian, CP Violation and Rare Decays. 1998., <https://arxiv.org/abs/hep-ph/9806471>, ožujak 2023.
- [3] Peskin, M. E.; Schroeder D. V. An Introduction to Quantum Field Theory. Addison-Wesley Pub. Co, 1995.
- [4] Thomson, M. Modern Particle Physics. Cambridge University Press, 2013.
- [5] Hooft, G. 't; Veltman, M. Regularization and renormalization of gauge fields. Nuclear Physics B, 44 (1): 189–213, 1972.
- [6] Faddeev, L. D.; Popov, V. Feynman diagrams for the Yang-Mills field. Phys. Lett. B. 25 (1): 29. 1967.
- [7] Jones, H. F. Groups, Representations and Physics. 2nd ed. IOP Publishing, 1998.
- [8] Cohen, T. As Scales Become Separated: Lectures on Effective Field Theory. 2020., <https://arxiv.org/abs/1903.03622>, ožujak 2023.
- [9] Romao, J. C. Advanced Quantum Field Theory, Appendix D. 2015., <https://porthos.tecnico.ulisboa.pt/CTQFT/files/SM-FeynmanRules.pdf>, travanj 2023.
- [10] Ilakovac, A. Skripta za kolegije Teorija polja 1 i Teorija polja 2. Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, 2022./2023.
- [11] Gross, D. J.; Wilczek F. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. Physical Review Letters. 30 (26): 1343–1346, 1973.
- [12] Politzer, H. D. Reliable perturbative results for strong interactions. Physical Review Letters. 30 (26): 1346–1349, 1973.
- [13] Particle Data Group, Review of Particle Physics, Chapter 9. Quantum Chromodynamics. 2022., <https://pdg.lbl.gov/2021/reviews/rpp2021-rev-qcd.pdf>, ožujak 2023.

- [14] Artuso, M.; Barberio, E.; Stone, S. B meson decays. 2009., <https://arxiv.org/abs/0902.3743v4>, ožujak 2023.
- [15] Neubert, M. Heavy-Quark Effective Theory and Weak Matrix Elements. 1997., <https://arxiv.org/abs/hep-ph/9801269>, ožujak 2023.
- [16] Wise, M. B. Heavy Quark Physics. 1998., <https://arxiv.org/abs/hep-ph/9805468v1>, ožujak 2023.
- [17] R.L. Workman et al. (Particle Data Group), Prog. Theor. Exp. Phys. 2022, 083C01, 2022., <https://pdg.lbl.gov/>, ožujak 2023.
- [18] Bjorken, J. D. Topics in B-Physics. 1988., <https://inspirehep.net/files/79119cab35b57d0f646677a7ff07e9c>, svibanj 2023.