Realizacija parametarske familije politopa matricama s alternirajućim predznakom uvjetovanih permutacijskim uzorkom

Mimica, Ana

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Mimica

Realizacija parametarske familije politopa matricama s alternirajućim predznakom uvjetovanih permutacijskim uzorkom

DOKTORSKI RAD

Zagreb, 2023.

Sveučilište u Zagrebu

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Mimica

Realizacija parametarske familije politopa matricama s alternirajućim predznakom uvjetovanih permutacijskim uzorkom

DOKTORSKI RAD

Mentor:

izv.prof.dr.sc. Ivica Martinjak

Zagreb, 2023.

University of Zagreb

FACULTY OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Ana Mimica

Realization of the parametric family of polytopes by means of alternating sign matrices with permutation pattern

DOCTORAL DISSERTATION

Supervisor:

izv.prof.dr.sc. Ivica Martinjak

Zagreb, 2023.

Sažetak

Matrice s alternirajućim predznakom na prirodan način se pojavljuju evaluacijom determinante kondenzacijskom metodom. Slutnja o enumeraciji ovih matrica (engl. The Alternating Sign Matrix Conjecture) riješena je na više načina i potaknula nova područja u istraživanju. Matrice s alternirajućim predznakom su matrice s elementima -1, 0 i 1 čiji nenul elementi alterniraju u predznaku po recima i stupcima, pri čemu je suma svakog retka i svakog stupca jednaka 1. Promatramo matrice s alternirajućim predznakom koje izbjegavaju permutacijski uzorak i zadovoljavaju svojstva temeljena na unutarnjim simetrijama. Uvodimo nove familije takvih matrica i dokazujemo njihova istaknuta kombinatorna i geometrijska svojstva, uključujući njihovu rekurzivnu prirodu. Prikazujemo profinjene enumeracije obzirom na broj specijalnih elemenata u matrici i obzirom na poziciju jedinice u prvom retku. Dokazujemo da su $\mathscr{C}$-matrice s alternirajućim predznakom reda n u $1:1$ korespondenciji s izbjegavajućim permutacijama duljine $n-1$. Uspostavljena je bijekcija $\mathscr{C}$-matrica i Dyckovih putova. Stasheffov politop definiran je svojom incidencijskom strukturom što otvara pitanje realizacije ovog politopa u euklidskom prostoru. Pronašli smo realizacije asociedra i drugih konveksnih politopa, u punoj općenitosti, putem familija matrica s alternirajućim predznakom.

Extended summary

The alternating sign matrices appear naturally by evaluating the determinant using the condensation method. The conjecture about the enumeration of these matrices, known as The Alternating Sign Matrix Conjecture, was solved in several ways and initiated new areas of research. The alternating sign matrices are matrices with elements -1, 0, and 1 whose non-zero elements alternate in sign by rows and columns, where the sum of each row and each column is equal to 1.

We consider alternating sign matrices that avoid the permutation pattern and satisfy properties based on internal symmetries. We introduce new families of such matrices and prove their salient combinatorial and geometric properties, including their recursive nature. Vertically symmetric alternating sign matrices have the property that each rightmost 1 is located to the right of each leftmost 1. This property, applied only to adjacent rows, gives a family of $\mathscr{C}$-matrices that possess promient regularities. We show refined enumerations with respect to the number of special elements in the matrix and with respect to the position of the 1s in the first row.

In particular, we emphasize just some of these refined enumerations. The number $E_{n,k}$ of the alternating sign matrices of the family $\mathscr{C}$ of the order n whose 1 in the first row is in the k-th column is

$$E_{n,k} = \frac{1}{k(n-k)}\binom{2(k-1)}{k-1}\binom{2(n-k-1)}{n-k-1}.$$

The above statement is proved using the recursive property of the family $\mathscr{C}$.

Furthmore, the number $E^{-}_{n,k}$ of the $\mathscr{C}$-matrices of the order n which have k special elements is

$$E^{-}_{n,k} = N(n-1,k+1)$$

where

$$N(n,k) = \frac{1}{k}\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k-1}.$$

is Narayana number. This statement is proved by showing that the numbers $E^{-}_{n,k}$ follow the same recurrence as Narayana numbers.

We prove that $\mathscr{C}$-matrices of order n are in $1:1$ correspondence with avoiding permutations of the length $n-1$. The bijection of $\mathscr{C}$-matrices and Dyck paths is established. Stasheff polytope is defined by its incidence structure, which raises the question of the realization of this polytope in Euclidean space. We have found realizations of the associahedron and other convex polytopes, in full generality, using families of alternating sign matrices.

SADRŽAJ

Uvod

Matrice s alternirajućim predznakom na prirodan način se pojavljuju evaluacijom determinante kondenzacijskom metodom. Riječ je o matricama s elementima -1, 0 i 1, pri čemu neneul elementi alterniraju u predznaku u svakom retku i stupcu, te je suma svakog retka i stupca jednaka 1. Pokazuje se da iz ove njihove karakterizacije proizlaze bogate unutarnje simetrije, što potiče mnoga enumerativna i druga pitanja o ovim matricama. Vrijedi spomenuti da se matrice s alternirajućim predznakom pojavljuju u kontekstu objekata kao što su model 6 vrhova u statističkoj fizici, ravninske particije i astečki dijamanti. Znamentita slutnja o enumeraciji ovih matrica (engl. The Alternating Sign Matrix Conjecture) riješena je na više načina i otvorila nova područja u istraživanju. Slutnju su postavili Mills, Robbins i Rumsey, a prvi ju je potvrdio D. Zeilberger 1996. godine dokazom koji je temeljen na teoriji particija i simetričnim funkcijama. Dosegnuti su i mnogi drugi rezultati o ovim matricma, često temeljeni na modelu 6 vrhova.

U ovom radu proučavamo familije matrica s alternirajućim predznakom koje izbjegavaju permutacijski uzorak i zadovoljavaju druga algebarska i kombinatorna svojstva. Konkretno, bavimo se permutacijskim uzorkom duljine 3. Uvodimo nove familije takvih matrica i dokazujemo njihova istaknuta kombinatorna i geometrijska svojstva, uključujući njihovu rekurzivnu strukturu. Prikazujemo također i profinjene enumeracije i to obzirom na broj specijalnih elemenata u matrici danog reda i obzirom na poziciju 1ce u prvom retku. U tim dokazima pojavljuju se istaknuti nizovi brojeva kao i istaknute matrice, uključujući Catalanove brojeve, Schröderove i Narayanove brojeve.

Stasheffov politop definiran je svojom incidencijskom strukturom što otvara pitanje njegove realizacije u euklidskom prostoru. Prikazujemo realizaciju asociedra i drugih konveksnih politopa, u punoj općenitosti, putem matrica s alternirajućim predznakom.

U Poglavlju 1 definirane su matrice s alternirajućim predznakom i dana su njihova istaknuta svojstva. Prikazan je kratki uvid u istraživanja matrica s alternirajućim predznakom počevši od njihovog uvođenja kondenzacijskom metodom za računanje determinante. U Odjeljku 1.2 nalazi se povijesni tijek rješavanja poznate slutnje o enumeraciji matrica s alternirajućim predznakom. Konstruirane su vertikalno simetrične matrice s alternirajućim predznakom. U nastavku prvog poglavlja pokazane su i korespondencije s nekim algebarskim i kombinatornim strukturama. Pokazana je korespondencija parova matrica s alternirajućim predznakom i astečkih dijamanata pomoću funkcije visine.

U Poglavlju 2 su proučavane familije matrica s alternirajućim predznakom koje izbjegavaju uzorak permutacije $(2,1,3)$ i njihove podfamilije. Osim izbjegavanja permutacijskog uzorka, familije posjeduju i dodatna svojstva. Svaka od njih posjeduje jedno ili dva od sljedeća tri svojstva:

(i) određen relativni položaj 1ca u susjedim retcima,

(ii) simetrija obzirom na glavnu dijagonalu i

(iii) određen položaj -1ca u matrici.

Pronađena je rekurzivna struktura i enumeracija svake familije. Za neke familije su pronađene i profinjene enumeracije, enumeracija obzirom na položaj 1ce u prvom retku i enumeracija obzirom na broj specijalnih elemenata u matrici.

Za familiju matrica s alternirajućim predznakom definiranu u Poglavlju 2, u Poglavlju 3 pronađene su korespondencija s permutacijama koje izbjegavaju permutacijski uzorak $(2,1,3)$ (Odjeljak 3.1) i korespondencija s Dyckovim putovima (Odjeljak 3.2).

U Poglavlju 4 pridružene su točke euklidskog prostora matricama s alternirajućim predznakom. Dana je incidencijska struktura $\mathscr{C}$-matrica s alternirajućim predznakom. U Odjeljku 4.2 je pokazano podudaranje incidencijske strukture $\mathscr{C}$-matrica reda 5 i realizacije trodimenzionalnog politopa čiji su vrhovi točke euklidskog prostora pridružene tim matricama. Pokazana je realizacija Stasheffovog i drugih konveksnih politopa viših redova čiji su vrhovi točke pridružene matricama s alternirajućim predznakom.

1. Matrice s alternirajućim predznakom

Matrice s alternirajućim predznakom (engl. Alternating Sign Matrices, ASM) proizišle su iz postupka za određivanje determinante matrice kojeg je uveo Dogson. Ta metoda sugerira poopćenje permutacijskih matrica. Članovi koji na kraju postupka predstavljaju determinantu izražavaju sumu po permutacijama, a članovi koji se krate predstavljaju matrice koje dopuštaju i elemente -1, 0 i 1. Više o ovom načinu određivanja determinante dano je u Odjeljku 1.1.

Pokazuje se kako se radi o matricama s istaknutim pravilnostima i simetrijama. Jedan od najpoznatijih povijesnih problema vezan za ove matrice je slutnja o enumeracijskoj formuli (engl. the Alternating Sign Matrix Conjecture). Slutnja je pozitivno riješena na više različitih načina o čemu je više dano je u Odjeljku 1.2.

Matrice s alternirajućim predznakom su kvadratne matrice koje su poopćenje permutacijskih matrica.

Definicija 1.0.1. Matrica s alternirajućim predznakom $M = [m_{ij}]$ reda n je kvadratna matrica čiji su elementi iz skupa $\{-1, 0, 1\}$ i pri tom vrijedi

(i) suma elemenata u svakom retku i svakom stupcu jednaka je 1 i

(ii) elementi različiti od nule u svakom retku i u svakom stupcu alterniraju u predznaku.

Skup matrica reda n s alternirajućim predznakom označava se s $\mathscr{A}_n$.

Matrica

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & - & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & - & 1 & - & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & - & 1 & - & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & - & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

primjer je matrice s alternirajućim predznakom, pri čemu su elementi jednaki -1 označeni s $-$. Svaka permutacijska matrica ujedno je i matrica s alternirajućim predznakom. Iz Definicije 1.0.1 slijedi

Propozicija 1.0.2. Matrica s alternirajućim predznakom u prvom i zadnjem retku ima točno jedan element jednak 1, dok su preostali elementi jednaki nuli. Isto vrijedi i za stupce.

Dokaz. Po Definiciji 1.0.1 suma svakog retka matrice jednaka je 1. Stoga je broj jedinica u svakom retku za 1 veći od broja -1ca. Budući da elementi različiti od nule alterniraju u predznaku, prvi i zadnji nenul element u svakom retku jednak je 1. Posljedično, ni prvi niti zadnji stupac ne mogu sadržavati broj -1. Kako suma po stupcima također mora biti jednaka 1, preostaje da prvi i zadnji stupac sadrže točno jednu 1cu.

Analogno vrijedi i za stupce. ∎

Tvrdnja Propozicije 1.0.2 može se pronaći u [7].

Korolar 1.0.3. Neka je M matrica s alternirajućim predznakom reda n. Neka je s $N^+(M)$ i $N^-(M)$ označen broj elemenata jednakih 1 i -1 u matrici M, redom. Tada je broj 1ca u matrici M za n veći od broja -1ca,

$$N^+(M) = N^-(M) + n.$$

Dokaz. Izravno slijedi iz činjenice da je u svakom retku broj elemenata jednakih 1 za 1 veći od broja elementa jednakih -1. ∎

Definicija 1.0.4. Neka su M i M' kvadratne matrice reda n. Neka su elementi matrica M i M' na poziciji (i, j) označeni s $m_{i,j}$ i $m'_{i,j}$, redom. Ako za svaki $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vrijedi da je

(i) $m'_{i,j} = m_{i,n-j+1}$ kaže se da je matrica M' *vertikalno simetrična* matrici M,

(ii) $m'_{i,j} = m_{n-i+1,j}$ kaže se da je matrica M' *horizontalno simetrična* matrici M,

(iii) $m'_{i,j} = m_{j,i}$ kaže se da je matrica M' *dijagonalno simetrična* matrici M,

(iv) $m'_{i,j} = m_{n-j+1,n-i+1}$ kaže se da je matrica M' *simetrična* matrici M *obzirom na sporednu dijagonalu* i

(v) $m'_{i,j} = m_{n-i+1,n-j+1}$ kaže se da je matrica M' *centralno simetrična* matrici M.

Vrijedi propozicija:

Propozicija 1.0.5. Neka je M matrica s alternirajućim predznakom reda n, $M \in \mathscr{A}_n$ i neka za matricu M' vrijedi neko od sljedećih svojstava:

(i) vertikalno je simetrična matrici M,

(ii) horizontalno je simetrična matrici M,

(iii) dijagonalno je simetrična matrici M,

(iv) simetrična je matrici M obzirom na sporednu dijagonalu

(v) centralno simetrična je matrici M.

Tada matrica M' također pripada skupu $\mathscr{A}_n$.

Dokaz. Ova svojstva slijede iz Definicije 1. Dokažimo tvrdnju *(i)*. Ako je $a_{i1}, \ldots, a_{in}$ i-ti redak matrice M onda je $a_{in}, \ldots, a_{i1}$ i-ti redak matrice M'. Prema tome, redak matrice M' ispunjava uvjet alternirajućeg predznaka i suma njegovih elemenata ostaje jednaka 1. Na ovaj način su dobiveni svi reci matrice M', pa suma elemenata svakog njenog stupca ostaje jednaka 1.

Na isti način se vidi da vrijede tvrdnje *(ii)-(v)*. ■

Vrijedi primijetiti da matrica $M' \in \mathscr{A}_n$ može imati i više od jednog svojstva iz Propozicije 1.0.5. Na primjer, moguće je da bude istodobno vertikalno simetrična i simetrična obzirom na sporednu dijagonalu matrici M.

Slika 1.1 prikazuje sve matrice familije $\mathscr{A}_3$. Mogu se vidjeti primjeri parova matrica koje su međusobno simetrične za svaku od navedenih simetrija. Na primjer, 1. i 7. matrica su međusobno vertikalno i horizontalno simetrične; 5. i 6. matrica međusobno su dijagonalno simetrične; 2. i 3. su međusobno simetrične obzirom na sporednu dijagonalu itd.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & - & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Slika 1.1: Skup $\mathscr{A}_3$ matrica s alternirajućim predznakom.

Zbog svojstava matrica s alternirajućim predznakom, ako postoji element $m_{i,j} = -1$ unutar ASM matrice M, moraju postojati elementi jednaki 1 koji se nalaze na pozicijama (i, j_1), (i, j_2), (i_1, j) i (i_2, j) gdje su $i_1 < i < i_2$ i $j_1 < j < j_2$. Ako pri tom za svaki element $m_{i,j'} = 1$, $j' < j$, vrijedi da je i $j' < j_1$ reći ćemo da je m_{i,j_1} 1ca *slijeva pripadajuća* -1ci $m_{i,j}$. Na analogan način uvode se nazivi: *pripadajuća* 1ca *zdesna*, *iznad* i *ispod* -1ce $m_{i,j}$, za 1ce u i-tom retku ili j-tom stupcu koje su najbliže -1ci $m_{i,j}$ s odgovarajuće strane.

U matrici $M \in \mathscr{A}_n$ vrijedi da je u k-tom retku najveći mogući broj elemenata jednakih -1 jednak $\min\{k-1, n-k\}$. Isto vrijedi i za stupce. Naime, budući da u prvom retku postoji jedan element jednak 1 i ostali su nule, u drugom retku moguće je smjestiti -1cu jedino u stupac 1ce iz prvog retka, jer bi u suprotnom jedan od stupaca imao drugu parcijalnu sumu jednaku -1. Analogno, u trećem retku možemo imati najviše dva elementa različita od nule jednaka -1 itd. S druge strane, u n-tom retku također vrijedi da je jedan element jednak 1 i ostali su nule, pa je u $n-1$-i redak moguće smjestiti najviše jedan element jednak -1, i to u stupac 1ce iz retka n. Istom logikom nastavljamo dok ne dođemo do retka $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Poslije tog retka smanjuje se maksimalni mogući broj elemenata jednakih -1 u retku. Dakle, ako je $k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ maksimalan broj elemenata jednakih -1 bit će jednak $k-1$, a u suprotnom $n-k$.

1.1. METODA KONDENZACIJE

Matrice s alternirajućim predznakom proizašle su iz računanja determinate metodom nazvanom kondenzacijska metoda. Metodu je osmislio i dokazao Charles Lutwidge Dodgson, poznatiji pod pseudonimom Lewis Carroll, 1866. godine [14]. Pregled i analizu postupka računanja determinante ovom metodom A. Rice i E. Torrence dali su 2006. godine [5]. Zbog permutacijske prirode determinante, Laplaceov razvoj uvelike produžuje vrijeme računanja determinante s povećanjem njenog reda. Stoga je od interesa uvođenje drugih, učinkovitijih metoda. Dodgson je primjenjujući kondenzacijsku metodu također dao postupak za rješavanje sustava linearnih jednadžbi koja skraćuje do tada poznate metode rješavanja. Dokaz ove metode Dodgson je proveo koristeći identitet poznat pod nazivom Desnanot-Jacobijev identitet, a koji glasi:

Da bi se odredila determinanta dane matrice M reda n kondenzacijskom metodom potrebno je odrediti dva niza matrica,

$$M_1, M_2, M_3, \ldots M_{n-2} \tag{1.1}$$

i

$$M_2', M_3' \ldots M_{n-2}'. \tag{1.2}$$

Matrice M_k' nazivaju se *kondenzirane* matrice. Način na koji se dobiju nizovi matrica (1.1) i (1.2) opisan je u nastavku. Neka je $M := M_0$ i neka su za svaki $i, j \in \{1, 2, \ldots, n-k\}$ elementi matrica M_k i M_k' na poziciji (i, j) označeni s $m_{i,j}^k$ i $m'^k_{i,j}$, redom. Za svaki $k \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$ matrica M_k dobije se iz matrice M_{k-1} tako da je element $m_{i,j}^k$ jednak determinanti

$$\begin{vmatrix} m_{i,j}^{k-1} & m_{i,j+1}^{k-1} \\ m_{i+1,j}^{k-1} & m_{i+1,j+1}^{k-1} \end{vmatrix} = m_{i,j}^{k-1} m_{i+1,j+1}^{k-1} - m_{i+1,j}^{k-1} m_{i,j+1}^{k-1}.$$

Matrica M_k' dobije se iz matrica M_k i M_{k-2} tako da je element $m'^k_{i,j}$ jednak

$$\frac{m_{i,j}^k}{m_{i+1,j+1}^{k-2}}.$$

Konačno, determinanta polazne matrice M jednaka je

$$\frac{\det M_{n-2}'}{m_{2,2}^{n-3}}.$$

Iz postupka se vidi da je red matrica M_k i M_k' jednak je $n-k$.

Ilustrirajmo metodu kondenzacije na primjeru matrice M reda 4 ,

$$M = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{pmatrix}$$

U prvom koraku potrebno je odrediti devet deterninanti podmatrica reda 2. Time je dobivena matrica M_1,

$$M_1 = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ f & g \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} c & d \\ g & h \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} e & f \\ i & j \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} f & g \\ j & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} g & h \\ k & l \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} i & j \\ m & n \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} j & k \\ n & o \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} k & l \\ o & p \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

U sljedećem koraku potrebno je od elemenata matrice M_1 formirati četiri podmatrice. Time se dobiva matrica M_2,

$$M_2 = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ f & g \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} e & f \\ i & j \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} f & g \\ j & k \end{vmatrix} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} b & c \\ f & g \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} c & d \\ g & h \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} f & g \\ j & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} g & h \\ k & l \end{vmatrix} \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ i & j \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} f & g \\ j & k \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} i & j \\ m & n \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} j & k \\ n & o \end{vmatrix} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \begin{vmatrix} f & g \\ j & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} g & h \\ k & l \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} j & k \\ n & o \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} k & l \\ o & p \end{vmatrix} \end{vmatrix} \end{pmatrix}.$$

Na kraju, koristeći kondenziranu matricu M_2',

$$M_2' = \begin{pmatrix} \dfrac{\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b & c \\ f & g \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} e & f \\ i & j \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} f & g \\ j & k \end{vmatrix} \end{vmatrix}}{f} & \dfrac{\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} b & c \\ f & g \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} c & d \\ g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} f & g \\ j & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} g & h \\ k & l \end{vmatrix} \end{vmatrix}}{g} \\ \dfrac{\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ i & j \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} f & g \\ j & k \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} i & j \\ m & n \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} j & k \\ n & o \end{vmatrix} \end{vmatrix}}{j} & \dfrac{\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} f & g \\ j & k \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} g & h \\ k & l \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} j & k \\ n & o \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} k & l \\ o & p \end{vmatrix} \end{vmatrix}}{k} \end{pmatrix}$$

formulom

$$\det M = \frac{\det M_2'}{\begin{vmatrix} f & g \\ j & k \end{vmatrix}}, \tag{1.3}$$

izračunamo traženu determinantu.

Monomi u determinanti (1.3) pokazuju istaknutu pravilnost. Svaki monom se može interpretirati kao matrica na način da eksponent, -1 ili 1, svakog faktora smjestimo na početnu poziciju danog faktora u matrici M. Primjer 1 pokazuje kako ovako dobivene članove u razvoju determinante možemo interpretirati kao matrice s alternirajućim predznakom.

Primjer 1. Kod računanja determinante matrice $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ kondenzacijskom metodom dobije se

$$M_1 = \begin{pmatrix} ae - bc & bf - ce \\ dh - ge & ei - fh \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \Big((ae^2i - aefh - bdei + bdfh) - (bdfh - befg - cdeh + ce^2g) \Big).$$

Monomima dobivenima iz

$$\det M = \frac{\det M_2}{e}$$

pridruže se matrice na sljedeći način

$$aei \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$afh \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$bdi \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$bde^{-1}fh \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & - & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$bfg \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$cdh \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ i}$$

$$ceg \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.2. Slutnja o matricama s alternirajućim predznakom

Ranih 80.-ih godina 20.-og stoljeća William Mills, David Robbins i Howard Rumsey proučavali su matrice s alternirajućim predznakom s ciljem pronalaska eksplicitne formule za broj takvih matrica proizvoljnog reda n. Primijetili su da niz brojeva koji enumeriraju matrice raste puno brže od broja permutacija. Neka je s A_n označen broj matrica s alternirajućim predznakom reda n,

$$A_n := |\mathscr{A}_n|.$$

U tablici 1.1 je prikazan rast broja n-članih permutacija i broja ASM matrica reda n.

Tablica 1.1: Usporedba broja permutacija i ASM matrica.

n	$n!$	A_n
1	1	1
2	2	2
3	6	7
4	24	42
5	120	429
6	720	7436
7	5040	218348
8	40320	10850216
9	362880	911835460
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Elementi niza $(A_n)_{n\geq 1}$ imaju male proste djelitelje:

$$
\begin{aligned}
1 &= 1\\
2 &= 2\\
7 &= 7\\
42 &= 2\cdot 3\cdot 7\\
429 &= 3\cdot 11\cdot 13\\
7436 &= 2^2\cdot 11\cdot 13^2\\
&\vdots\\
911835460 &= 2^2\cdot 5\cdot 17^2\cdot 19^3\cdot 23\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Izostanak velikih prostih dijelitelja upućuje na postojanje faktorijelne formule za enumeriranje niza $(A_n)_{n\geq 1}$. Pokušavajući riješiti problem broja matrica s alternirajućim predznakom, Mills, Robbins i Rumsey [46] nakon što su odredili A_n za prvih nekoliko prirodnih brojeva n, napravili su i finiju enumeraciju. Dobili su trokutastu matricu brojeva $A_{n,k}$ matrica s alternirajućim predznakom reda n s 1com u prvom retku i k-tom stupcu:

$$
\begin{pmatrix}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 2 & & 3 & & 2 & & & \\
 & & 7 & & 14 & & 14 & & 7 & & \\
 & 42 & & 105 & & 135 & & 105 & & 42 & \\
429 & & 1287 & & 2002 & & 2002 & & 1287 & & 429\\
 & & & & & \cdots & & & & &
\end{pmatrix}
$$

Za $n=1$ postoji samo jedna matrica s alternirajućim predznakom, za $n=2$ dvije su matrice, prva ima 1cu u prvom stupcu, a druga u drugom stupcu. Nadalje, za $n=3$ postoji 7 matrica od kojih su dvije s 1com u prvom stupcu, tri s 1com u drugom i opet dvije s 1om u trećem stupcu. Slika 1.1 prikazuje matrice s alternirajućim predznakom raspoređene po rednom broju stupca u kojem se nalazi 1ca u prvom retku.

Može se uočiti da je trokutasta matrica brojeva $A_{n,k}$ simetrična, to jest da vrijedi

$$A_{n,k} = A_{n,n+1-k}.$$

Također, može se vidjeti da su elementi na rubu jednaki ukupnom broju matrica prethodnog reda,

$$A_{n,1} = A_{n,n} = A_{n-1}. \tag{1.4}$$

Relacija 1.4 slijedi iz činjenice da matricu skupa $\mathscr{A}_n$ koja ima 1cu na poziciji $(1,1)$ možemo dobiti točno jednom iz svake matrice skupa $\mathscr{A}_{n-1}$ dodavanjem retka

$$1 \quad 0 \quad \dots \quad 0$$

i stupca

$$\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}$$

na početku. Analogno vrijedi za matrice s 1com na poziciji $(1,n)$ s tim da dodajemo redak $(0,\dots,0,1)$ na početku i odgovarajući stupac na kraju.

Izvjesna pravilnost se uočava promatranjem matrice omjera susjednih elemenata prethodne trokutaste matrice.

$$\begin{pmatrix}
 & & & & 2/2 & & & & \\
 & & & 2/3 & & 3/2 & & & \\
 & & 2/4 & & 5/5 & & 4/2 & & \\
 & 2/5 & & 7/9 & & 9/7 & & 5/2 & \\
2/6 & & 9/14 & & 16/16 & & 14/9 & & 6/2 \\
 & & & & \dots & & & &
\end{pmatrix}$$

Može se naslutiti da su omjeri na rubu trokuta jednaki

$$\frac{2}{n+1}, \frac{n+1}{2}$$

za lijevi i desni rub, redom. Ostali omjeri dobiju se tako da se brojnik dobije zbrajanjem brojnika dvaju susjednih omjera iz prethodnog retka, a nazivnik zbrajanjem njihovih nazivnika. Točnije,

$$\frac{A_{n,k}}{A_{n,k+1}} = \frac{A_{n-1,k-1} + A_{n-1,k}}{A_{n-1,k} + A_{n-1,k+1}} \tag{1.5}$$

za $1 \leq k < n$. Primjerice, $A_{5,2}/A_{5,3} = 105/135 = 7/9$ može se odrediti po relaciji (1.5),

$$\frac{A_{5,2}}{A_{5,3}} = \frac{2+5}{4+5} = \frac{7}{9}.$$

Na osnovu ovog opažanja Mills, Robbins i Ramsey postavljaju slutnju

$$\frac{A_{n,k}}{A_{n,k+1}} = \frac{\binom{n-2}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}}{\binom{n-2}{n-k-1} + \binom{n-1}{n-k-1}}$$

gdje je $1 \leq k < n$. Po tome se nadalje dobiva

$$\begin{aligned} \frac{A_{n,k}}{A_{n,k+1}} &= \frac{(n-2)!(2n-k-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \cdot \frac{(n-k-1)!k!}{(n-2)!(n+k-1)!} \\ &= \frac{k(2n-k-1)}{(n-k)(n+k-1)}. \end{aligned}$$

Ako je poznat $A_{n,1}$, uzastopnom primjenom omjera $A_{n,k}/A_{n,k+1}$ može se dobiti vrijednost

$$\begin{aligned} A_{n,k} &= \frac{(n-1)n}{1(2n-2)} \cdot \frac{(n-2)(n+1)}{2(2n-3)} \cdots \frac{(n-k+1)(n+k-2)}{(k-1)(2n-k)} A_{n,1} \\ &= \frac{(n+k-2)!(2n-k-1)!}{(n-k)!(k-1)!(2n-2)!} A_{n,1}. \end{aligned}$$

Sada se mogu zbrojiti vrijednosti $A_{n,k}$ da se dobije $A_n = A_{n+1,1}$:

$$A_n = A_{n+1,1} = A_{n,1} \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+k-2)!(2n-k-1)!}{(n-k)!(k-1)!(2n-2)!}.$$

Suma

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(n+k-2)!(2n-k-1)!}{(n-k)!(k-1)!(2n-2)!}$$

se može zapisati kao

$$\frac{(n-1)!(n-1)!}{(2n-2)!} \sum_{k=1}^{n} \binom{n+k-2}{n-1} \binom{2n-k-1}{n-1}. \tag{1.6}$$

Slijedi

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{(n-1)!(n-1)!}{(2n-2)!} \binom{3n-2}{2n-1} A_{n-1} \\ &= \frac{(n-1)!(3n-2)!}{(2n-2)!(2n-1)!} A_{n-1}. \end{aligned}$$

Budući da je $A_1 = 1$ vrijedi

$$A_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)!(3k-2)!}{(2k-2)!(2k-1)!},$$

a iz toga slijedi formula

$$A_n = \prod_{j=0}^{n-1} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!} \tag{1.7}$$

poznata kao *slutnja o matricama s alternirajućim predznakom* (engl. Alternating Sign Matrix Conjecture). Sada iz

$$A_{n,k} = \frac{(n+k-2)!(2n-k-1)!}{(n-k)!(k-1)!(2n-2)!} \prod_{j=0}^{n-2} \frac{(3j+1)!}{(n+j-1)!}$$

slijedi formula

$$A_{n,k} = \binom{n+k-2}{k-1} \frac{(2n-k-1)!}{(n-k)!} \prod_{j=0}^{n-2} \frac{(3j+1)!}{(n+j)!} \tag{1.8}$$

koja je još poznata pod nazivom *profinjenje slutnje o matricama s alternirajućim predznakom* (engl. Refined Alternating Sign Matrix Conjecture).

Mills, Robbins i Rumsey postavili su ove slutnje ali ih nisu uspjeli dokazati. Pokušali su matrice s alternirajućim predznakom dovesti u vezu s *ravninskim particijama prirodnog broja* n te njihovim podfamilijama o kojima se više može pronaći u Odjeljku 1.3. Svoju slutnju (1.7) poslali su Richardu Stanleyu koji ih je uputio na Georgea E. Andrewsa [4]. Naime, Andrews je enumerirao jednu od podfamilija, *padajuće ravninske particije*. Pripadni niz za broj padajućih ravninskih particija jednak je nizu zadanom formulom (1.7) koji enumerira matrice s alternirajućim predznakom.

Koristeći nove spoznaje, pokušali su pronaći bijekciju između matrica s alternirajućim predznakom i padajućih ravninskih particija te time dokazati svoju slutnju. Nisu uspjeli, ali su uspjeli dokazati Macdonaldovu slutnju o funkciji izvodnici za broj jedne druge podfamilije, *ciklički simetričnih ravninskih particija* prirodnog broja. Niz koji enumerira ovakve ravninske particije je $1,0,0,1,0,0,2,1,0,2,1,0,4,3,0,5,4,0,8,8,0,10,11\ldots$

U prosincu 1992. godine Doron Zeilberger objavio je dokaz slutnje (1.7), a u jesen 1995. i dokaz profinjenja (1.8). Postupak kojim je dokazao slutnju je detaljnije objašnjen u Odjeljku 1.3. Malo kasnije iste godine, slutnju (1.7) je dokazao i G. Kuperberg [25] pomoću Young-Baxterove jednadžbe. D. Bressoud i J. Propp 1999. godine su dali pregled ovih postignuća. [12]

Tijekom kasnijeg razdoblja proučavano je i više istaknutih podfamilija matrica s alternirajućim predznakom. Jedna od takvih familija je i familija ASM matrica koje su simetrične obzirom na glavnu dijagonalu.

1.2.1. Dijagonalno simetrične matrice s alternirajućim predznakom

Dijagonalno simetrične matrice s alternirajućim predznakom (skraćeno DSASM), su matrice iz skupa $\mathscr{A}_n$ koje su same sebi dijagonalno simetrične. Točnije, Matrica $M = [m_{i,j}]$, reda n, $M \in \mathscr{A}_n$ je dijagonalno simetrična ako je $m_{i,j} = m_{j,i}$ za svaki $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Neka je skup DSASM matrica reda n označen s $\mathscr{A}_{\mathscr{D}n}$. Primjerice, matrice u skupu $\mathscr{A}_{\mathscr{D}4}$ jesu

$$
\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & - & 1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} & 1 & & \\ 1 & - & 1 & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} & 1 & & \\ 1 & - & 1 & \\ & 1 & - & 1 \\ & & 1 & \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} & 1 & & \\ 1 & - & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \\ & & & 1 \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & - & 1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} & & 1 & \\ & 1 & - & 1 \\ 1 & - & 1 & \\ & 1 & & \end{pmatrix},
\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & \end{pmatrix}
\; i \;
\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}
$$

Neka je s A_{D_n} označen broj dijagonalno simetričnih matrica s alternirajućim predznakom reda n,

$$A_{D_n} = |\mathscr{A}_{\mathscr{D}n}|.$$

Istaknuti otvoreni problem u kontekstu matrica s alternirajućim predznakom je enumeracija takvih dijagonalno simetričnih matrica. Niz brojeva koji enumeriraju DSASM za prvih nekoliko redova počinje s

$$1, 2, 5, 16, 67, 368, 2630, 24376, 293770, 4610624, 94080653, 2492747656, \ldots \tag{1.9}$$

Brojevi ovog niza nemaju male proste faktore.

Vodeći se idejom da se broj A_{D_n} odredi pomoću enumeracije broja DSASM koje u prvom retku imaju 1cu u k-tom stupcu može se doći do određenih zaključaka, $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. Neka je s $A_{D_{n,k}}$ označen broj dijagonalno simetričnih matrica s alternirajućim predznakom koje u prvom retku imaju 1cu u k-tom stupcu. U slučaju kada je $k = 1$ matrice imaju oblik

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & \boxed{\quad M_1 \quad} \end{pmatrix}$$

gdje je M_1 DSASM matrica reda $n-1$. Slijedi da je $A_{D_{n,1}} = A_{D_{n-1}}$. Za $k = n$ matrice imaju oblik

$$\begin{pmatrix} & 1 \\ \boxed{\quad M_n \quad} & \\ 1 & \end{pmatrix}$$

gdje je M_n DSASM reda $n-2$. Dakle, $A_{D_{n,n}} = A_{D_{n-2}}$. Za $2 \leq k \leq n-1$ matrice su oblika

$$\begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \boxed{\quad M_k \quad} \end{pmatrix}$$

pri čemu je M_k simetrična matrica reda $n-1$ s elementima -1, 0 i 1 i zadovoljava sljedeća svojstva:

(i) nenul elementi alterniraju u predznaku

(ii) sve parcijalne sume $k-1$-og retka jednake su -1 ili 0

(iii) sve parcijalne sume ostalih redaka jednake su 0 ili 1.

Dakle, jedino što razlikuje matricu M_k od dijagonalno simetrične matrice s alternirajućim predznakom reda $n-1$ jest svojstvo da $(k-1)$-i redak ili nema nenul elemente ili je prvi nenul element jednak -1. Analogno svojstvo zbog simetričnosti vrijedi za $(k-1)$-i stupac. Problem pronalaska broja $A_{D_{n,k}}$ može se svesti na problem pronalaska broja matrica s gornjim svojstvima.

Trokutasta matrica brojeva $A_{D_{n,k}}$ dijagonalno simetričnih matrica s alternirajućim predznakom koje u prvom retku imaju 1cu u k-tom stupcu započinje

$$\begin{pmatrix} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 2 & & 2 & & 1 & & & \\ & & 5 & & 5 & & 4 & & 2 & & \\ & 16 & & 16 & & 17 & & 13 & & 5 & \\ 67 & & 67 & & 86 & & 82 & & 50 & & 16 \\ & & & & & \dots & & & & & \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

Na osnovu trokutaste matrice (1.10) nameće se slutnja za broj $A_{D_{n,k}}$ kada je $k = 2$ $A_{D_{n,2}} = A_{D_{n-1}}$ i za $k = 3$ $A_{D_{n,3}} = A_{D_{n-1,2}} + 2\sum_{j=3}^{n-1} A_{D_{n-1,j}}$.

Iako problem enumeracije DSASM matrica nije u potpunosti riješen, poznate su enumeracijske formule s određenim dodatnim svojstvima. Broj matrica iz skupa $\mathscr{A}_n$ koje su istovremeno simetrične obzirom na glavnu i sporednu dijagonalu neparnog reda $n = 2k+1$ jednak je

$$\prod_{i=0}^{k} \frac{(3i)!}{(k+i)!}$$

što je dokazano u radu [38].

Također, 2020. godine A. Ayer, R. E. Behrend i I. Fischer u svom radu [2] bavili su se matricama s alternirajućim predznakom koje su također simetrične obzirom na obje dijagonale i koje imaju dodatno svojstvo; zadan broj elemenata na dijagonali koji su jednaki nekoj od vrijednosti -1, 0 ili 1.

1.2.2. Vertikalno simetrične matrice s alternirajućim predznakom

Vertikalno simetrična matrica s alternirajućim predznakom, VSASM (engl. Vertically symmetric alternating sign matrix) je matrica $M = [m_{i,j}] \in \mathscr{A}_n$ kojoj je k-ti stupac jednak $(n-k+1)$-om stupcu za svaki $1 \leq k \leq n$. U slučaju da je n paran slijedi da su susjedni stupci rednih brojeva $\frac{n}{2}$ i $\frac{n}{2}+1$ jednaki. Međutim, tada bi se 1ce u tim stupcima nalazile uzastopno u istom retku to bi narušilo svojstvo matrica s alternirajućim predznakom da nenul elementi u retku alterniraju u predznaku. Iz toga slijedi da su VSASM nužno neparnog reda. Matrica

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & - & 0 & 1 & 0 \\ 1 & - & 0 & 1 & 0 & - & 1 \\ 0 & 0 & 1 & - & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & - & 1 & - & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & - & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

primjer je vertikalno simetrične matrice s alternirajućim predznakom.

Matrice VSASM imaju centralnu jedinicu u prvom i zadnjem retku. Jasno je po Definiciji 1.0.1 da ove matrice moraju imati dvije 1ce u drugom i $n-1$-om retku, i prva 1ca određuje poziciju druge u tim retcima. Posljedično, srednji stupac nema niti jedan element jednak 0, tj, sastoji se od niza $1,-1,1,\dots,-1,1$. G. Kuperberg u radu [26] pronalazi izraz za broj $A_{V(2n+1)}$ takvih matrica reda $2n+1$,

$$A_{V(2n+1)} = (-3)^{n^2} \prod_{\substack{i,j \le 2n+1 \\ 2|j}} \frac{3(j-i)+1}{j-i+2n+1}.$$

Godine 2009. I. Fisher postavlja slutnju za broj $A_{V(n,k)}$ VSASM matrica kojima je 1ca u prvom retku smještena u stupac k:

$$A_{V(n,k)} = \frac{(2n+k-2)!(4n-k-1)!}{2^{n-1}(4n-2)!(k-1)!(2n-k)!} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(6i-2)!(2i-1)!}{(4i-1)!(4i-2)!}$$

koju dokazuju I. Fisher i M. P. Saika 2020. godine. [19]

Sljedeća propozicija daje dva dodatna svojstva VSASM matrica.

Propozicija 1.2.1. Neka je $M=[m_{i,j}]$ vertikalno simetrična matrica s alternirajućim predznakom neparnog reda n. Tada vrijedi

(i) prva 1ca slijeva u retku $i+1$ nalazi se slijeva prvoj 1ci zdesna u retku i i

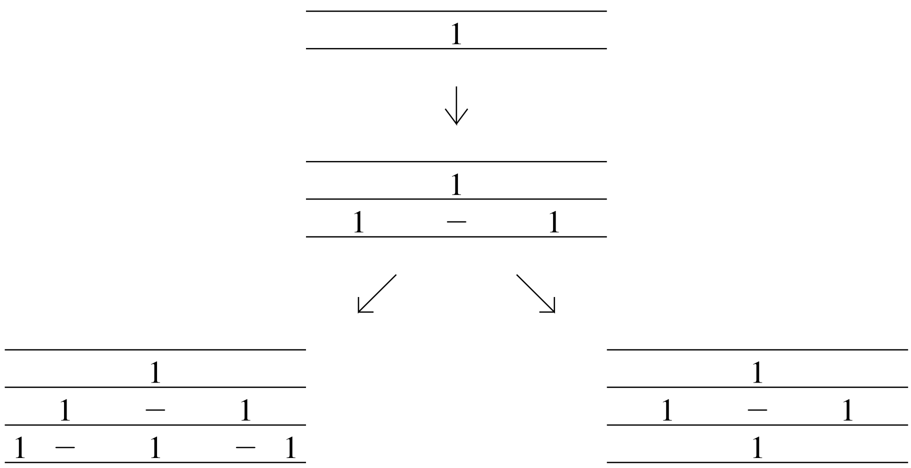
(ii) prva 1ca zdesna u retku $i+1$ nalazi se zdesna prvoj 1ci slijeva u retku i

za svaki $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$.

Dokaz. Prva 1ca slijeva u danom retku i VSASM matrice nalazi se u nekom od stupaca $1,2,\dots,\frac{n+1}{2}$, $i \in \{1,2,\dots,n\}$. Prva 1ca zdesna u danom retku i nalazi u nekom od stupaca $\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}+$

$1,\ldots,n-1,n$, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$. Očito se za proizvoljno odabrane retke $i_1, i_2 \in \{1,2,\ldots,n\}$ prva 1ca slijeva u retku i_1 nalazi slijeva ili u istom stupcu kao prva 1ca zdesna u retku i_2. Budući da u dva uzastopna retka ne mogu biti 1ce u istom stupcu, slijede svojstva *i)* i *ii)* propozicije. ■

Na Slici 1.2 prikazana je konstrukcija prva tri retka VSASM matrice gdje je raspored nenul elemenata u retku prikazan u odnosu na položaj nenul elementa u ostalim retcima. Kao što je već navedeno ranije, u prvom retku postoji točno jedna 1ca i mora biti u srednjem, to jest u $\frac{n+1}{2}$-om stupcu. U drugom retku sigurno postoji -1ca jer bi u suprotnom ponovno imali jedinstvenu 1cu koja bi zbog simetričnosti također bila u $\frac{n+1}{2}$-om stupcu. Dakle, jedina mogućnost za drugi redak je -1ca u $\frac{n+1}{2}$-om stupcu i slijeva i zdesna po jedna 1ca. Ako se 1ca slijeva smjesti u stupac $j \in \{1,2,\ldots,\frac{n-1}{2}\}$ položaj 1ce zdesna jedinstveno je određen i nalazi se u $n-j+1$-om stupcu.



Slika 1.2: Konstrukcija prva tri retka VSASM matrice.

Za treći redak postoje dva slučaja; prvi slučaj je prikazan na lijevoj strani Slike 1.2. To je slučaj kada u trećem retku potoje tri 1ce i dvije -1ce. Položaji prve i druge -1ce te druge 1ce slijeva jedinstveno su određeni položajem nenul elemenata u prvom i drugom retku. Nalaze se redom u j-tom, $n-j+1$-om i $\frac{n+1}{2}$-tom stupcu. Prva 1ca slijeva može se nalaziti u nekom od stupaca $j_1 \in \{1,2,\ldots,j-1\}$ i zbog simetričnosti tim položajem jedinstveno je određen položaj prve 1ce zdesna koja se nalazi u $n-j_1+1$-om stupcu. Drugi slučaj za treći redak nalazi se na istoj slici zdesne strane. U ovom slučaju u trećem retku matrice nalazi se jedinstvena 1ca i nužno je smještena u stupac $\frac{n+1}{2}$.

Preostali retci matrice mogu se dodati na dva načina; povećanjem broja nenul elemenata u odnosu na prethodni redak ili njegovim smanjivanjem, analogno načinu opisanom za dodavanje trećeg retka. Povećavanje je moguće u slučaju da red matrice dopušta.

Primjer 2 (konstrukcija VSASM reda 5)**.** Ovdje se vidi kako se konstrukcijom opisanom iznad dobiju jedinstvene tri VSASM matrice reda 5:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 0\ 0\ 1\ 0\ 0 & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
1\ 0\ -\ 0\ 1 & & & 0\ 1\ -\ 1\ 0 & \\
\downarrow & & \swarrow & & \searrow \\
\begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & - & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} & & \begin{matrix} 1 & - & 1 & - & 1 \\ 0 & 1 & - & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} & & \begin{matrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & - & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix}
\end{array}.
$$

Time su dobivene matrice

$$
\begin{pmatrix} & & 1 & & \\ 1 & & - & & 1 \\ & & 1 & & \\ & 1 & - & 1 & \\ & & 1 & & \end{pmatrix}, \quad
\begin{pmatrix} & & 1 & & \\ & 1 & - & 1 & \\ 1 & - & 1 & - & 1 \\ & 1 & - & 1 & \\ & & 1 & & \end{pmatrix} \ i \
\begin{pmatrix} & & 1 & & \\ & 1 & - & 1 & \\ & & 1 & & \\ 1 & & - & & 1 \\ & & 1 & & \end{pmatrix}.
$$

1.2.3. Vertikalno i horizontalno simetrične matrice s alternirajućim predznakom

Istaknuta je i familija matrica koje su uz simetriju obzirom na vertikalnu os simetrične i obzirom na horizontalnu os, VHSASM (engl. Vertically and horizontally symmetric ASM). Za matricu $M = [m_{i,j}]$ reda $n = 2k+1$ za koju vrijedi da je $m_{i,j} = m_{i,n-j+1}$ i $m_{i,j} = m_{n-i+1,j}$ za sve $i, j \in \{1,\dots,n\}$ kaže se da je vertikalno i horizontalno simetrična . Kao i kod vertikalno simetričnih matrica, srednji stupac jedank je nizu $1,-1,1,\dots,-1,1$, i drugi redak je određen položajem prve 1ce u tom retku. Ovdje još vrijedi i da je središni redak jednak nizu $1,-1,1,\dots,-1,1$, i matrica je jedinstveno određena podmatricom reda $(n-3)/2$ u lijevom gornjem kutu. Matrica

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & - & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{0} & \mathbf{1} & - & \mathbf{1} & - & 1 & - & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & - & \mathbf{1} & - & 1 & - & 1 & - & 1 & 0 \\ 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 \\ 0 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & - & 1 & - & 1 & - & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & - & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1.11}$$

primjer je VHSASM matrice dok je matrica M' reda 4 podmatrica kojom je matrica (1.11) jedinstveno određena

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & - & 1 \\ 1 & - & 1 & - \end{pmatrix}$$

Podmatrica reda $(n-3)/2$ kojom je jedinstveno određena VHSASM reda n zadovoljava sljedeća svojstva:

(i) elemanti su jednaki $-1, 0$ ili 1,

(ii) elementi različiti od nule alterniraju u predzanku u svakom retku i stupcu,

(iii) gornji element različit od 0 u svakom stupcu jednak je 1,

(iv) prvi element različit od 0 u svakom retku jednak je 1.

Broj VHSASM matrica reda n jednak je broju matrica reda $(n-3)/2$ koje zadovoljavaju gornja svojstva. I. Fisher i P. Saika u svom radu koriste ova svojstva za pronalazak formula koje opisuju broj VHSASM matrica s određenom pozicijom 1ce u drugom retku.

1.3. GELFAND-TSETLINOVI UZORCI

Matrice s alternirajućim predznakom dopuštaju više interpretacija i veza s kombinatornim i drugim strukturama. Ovdje ćemo prikazati najznačajnije takve objekte, uključujući one koji su za dani red jednakobrojni matricama s alternirajućim predznakom. Jedna od takvih struktura je Gelfand-Tsetlinov uzorak.

Definicija 1.3.1. Gelfand-Tsetlinov uzorak (GT) je matrica $[a_{i,j}]$ nenegativnih cijelih brojeva takva da vrijedi

$$a_{i,j} \geq a_{i+1,j} \geq a_{i,j+1}.$$

Dakle, u Gelfand-Tsetlinov uzorku brojevi monotono padaju po dijagonali odozgo prema dolje i monotono rastu po dijagonali odozgo prema lijevo dolje. Posljedično, brojevi monotono padaju po retcima.

$$T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & & a_{1,2} & & & & \cdots & & & & & & a_{1,n} \\ & a_{2,1} & & & & & \cdots & & & & & a_{2,n-1} & \\ & & \ddots & & & & & & & & \iddots & & \\ & & & a_{n-2,1} & & & a_{n-2,2} & & & a_{n-2,3} & & & \\ & & & & & a_{n-1,1} & & a_{n-1,2} & & & & & \\ & & & & & & a_{n,1} & & & & & & \end{pmatrix}$$

Gelfand-Tsetlinov uzorak zadan je početnim vektorom $(a_{1,1}, a_{1,2}, \cdots, a_{1,n})$. Na primjer, za $(2,1,0)$ postoji 8 GT matrica,

$$\begin{matrix} 2 & & 1 & & 0 \\ & 2 & & 1 & \\ & & 2 & & \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 2 & & 1 & & 0 \\ & 2 & & 1 & \\ & & 1 & & \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 2 & & 1 & & 0 \\ & 2 & & 0 & \\ & & 2 & & \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 2 & & 1 & & 0 \\ & 2 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} 2 & & 1 & & 0 \\ & 2 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 2 & & 1 & & 0 \\ & 1 & & 1 & \\ & & 1 & & \end{matrix}, \quad \begin{matrix} 2 & & 1 & & 0 \\ & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \end{matrix} \text{ i } \begin{matrix} 2 & & 1 & & 0 \\ & 1 & & 0 & \\ & & 0 & & \end{matrix}.$$

1.3.1. Striktni Gelfand-Tsetlinovi uzorci

Promatra li se podskup Gelfand-Tsetlinovih uzoraka koji imaju svojstvo strogog pada po retcima, dobije se struktura jednakobrojna matricama s alternirajućim predznakom.

Definicija 1.3.2. Striktni Gelfand-Tsetlinov uzorak reda n je matrica pozitivnih cijelih brojeva takva da za početni vektor $(a_{1,1}, a_{1,2}, \cdots, a_{1,n})$ vrijedi $a_{1,k} = n - k + 1$ te su

(i) brojevi u recima strogo rastući i

(ii) po dijagonalama slijeva na desno rastući.

Striktni Gelfand-Tsetlinovi uzorci nazivaju se još i *monotonim trokutima*.

Primjer 3. Striktni Gelfand-Tsetlinov uzorak reda 1 je

$$1,$$

dva su striktna Gelfand-Tsetlinova uzorka reda 2

$$\begin{array}{ccc} 2 & & 1 \\ & 2 & \end{array}, \qquad \begin{array}{ccc} 2 & & 1 \\ & 1 & \end{array},$$

i sedam je striktnih Gelfand-Tsetlinovih uzoraka reda 3:

$$\begin{array}{ccccc} 3 & & 2 & & 1 \\ & 3 & & 2 & \\ & & 3 & & \end{array}, \qquad \begin{array}{ccccc} 3 & & 2 & & 1 \\ & 3 & & 2 & \\ & & 2 & & \end{array},$$

$$\begin{array}{ccccc} 3 & & 2 & & 1 \\ & 3 & & 1 & \\ & & 3 & & \end{array}, \qquad \begin{array}{ccccc} 3 & & 2 & & 1 \\ & 3 & & 1 & \\ & & 2 & & \end{array}, \qquad \begin{array}{ccccc} 3 & & 2 & & 1 \\ & 3 & & 1 & \\ & & 1 & & \end{array},$$

$$\begin{array}{ccccc} 3 & & 2 & & 1 \\ & 2 & & 1 & \\ & & 2 & & \end{array} \quad i \quad \begin{array}{ccccc} 3 & & 2 & & 1 \\ & 2 & & 1 & \\ & & 1 & & \end{array}.$$

Da bi se mogla definirati bijekcija između matrica s alternirajućim predznakom i striktnih Gelfand-Tsetlinovih uzoraka uvodi se pojam *matrice parcijalnih suma* koja je pridružena matrici s alternirajućim predznakom. Za proizvoljno odabranu ASM matricu M reda n njoj pripadajuća matrica parcijalnih suma jest matrica reda n koja na na poziciji (i, j) ima element jednak $\sum_{k=1}^{i} m_{k,j}$, to jest jednak je i-toj parcijalnij sumi j-tog stupca.

U nastavku je opisano pridruživanje Gelfand-Tsetlinovog uzorka matrici parcijalnih suma. Iz definicije matrice parcijalnih suma slijedi da u i-tom retku ima točno i 1ca dok su preostali elementi jednaki nuli. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_i$ redni brojevi stupaca koji u i-tom retku imaju 1cu i neka je $a_1 > a_2 > \ldots > a_i$. Tada je $n-i+1$-i redak Gelfand-Tsetlinovog uzorka jednak vektoru $(a_1, a_2, \ldots, a_i)$.

U drugom smjeru, u i-ti redak matrice upisujemo 1cu u stupce čiji se broj nalazi u $n-i+1$-om retku Gelfand-Tsetlinovog uzorka, a zatim, iz matrice parcijalnih suma rekonstruiramo matricu M tako da u svaki redak upisujemo elemente $m_{i,j} \in \{-1, 0, 1\}$ na način da parcijalna suma stupaca u tom retku bude odgovara vrijednosti na odgovarajućoj poziciji matrice parcijalnih suma.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & - & 1 \\ 1 & - & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{ccccccccc} 5 & & 4 & & 3 & & 2 & & 1 \\ & 5 & & 4 & & 3 & & 1 & \\ & & 5 & & 4 & & 1 & & \\ & & & 5 & & 2 & & & \\ & & & & 4 & & & & \end{array}$$

Slika 1.3: Preslikavanje matrice s alternirajućim predznakom u Gelfand-Tsetlinov uzorak.

1.4. Ravninske particije

Ravninska particija broja n (engl. *Plane partition, PP*) je dvodimenzionalno polje prirodnih brojeva

$$\begin{array}{cccc} n_{1,1} & n_{1,2} & \dots & n_{1,c_1} \\ n_{2,1} & n_{2,2} & \dots & n_{1,c_2} \\ \vdots & \vdots & & \\ n_{r,1} & n_{r,2} & \dots & n_{1,c_r} \end{array}$$

padajuće po retcima i stupcima za koje vrijedi $n = \sum_{i,j} n_{i,j}$ i $c_1 \geq c_2 \geq \dots c_r$. Ravninsku particiju broja n označit ćemo s P. Ravninska particija je poopćenje particije prirodnog broja.

Primjer 4. Ravninske particije za prva tri prirodna broja su:

za $n = 1$

$$1$$

za $n = 2$

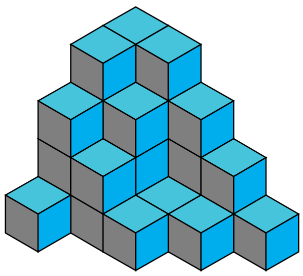
$$2\ ,\quad \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array}\ ,\quad 1\ \ 1$$

i za $n = 3$

$$3\ ,\quad \begin{array}{c} 2 \\ 1 \end{array}\ ,\quad 2\ \ 1\ ,\quad \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & \end{array}\ ,\quad \begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \end{array}\quad i\quad 1\ \ 1\ \ 1\ .$$

Neka je s $pp(n)$ označen broj ravninskih particija broja n. Iz Primjera 4 vidim se da je $pp(1) = 1$, $pp(2) = 3$ i $pp(3) = 6$. Svaka particija se može prikazati slaganjem $n_{i,j}$ jediničnih kocki iznad točke (i, j) u ravnini. Ovaj 3-dimenzionalni prikaz dane ravninske particije P označen je s $F(P)$. Takav prikaz jedne particije broja $n = 30$ daje trodimenzionalno tijelo prikazano na Slici 1.4:

$$\begin{array}{ccccc} 4 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & \\ 3 & 2 & 1 & & \\ 1 & & & & \end{array} \quad \rightarrow$$



Slika 1.4: Trodimenzionalni prikaz jedne ravninske particije broja 30.

Ravninsku particiju P čiji je 3-dimenzionalni prikaz simetričan obzirom na svih 6 permutacija koordinatnih osi x, y i z nazivamo *potpuno simetričnom* ravninskom particijom. Ako još za svaku točku $(i,j,k) \in F(P)$ vrijedi da $(n+1-i, n+1-j, n+1-k) \notin F(P)$, takvu ravninsku particiju nazivamo *samokomplementarna potpuno simetrična* ravninska particija (engl. *totally symmetric self-complementary plane partition, TSSCPP*). Za neparne brojeve $2n+1$ ne postoji TSSCPP s $2n+1$-im retkom, a za skup svih TSSCPP s parnim brojem redaka, $2n$, koristimo oznaku SP_n.

Primjer 5. Postoji jedna ravninska particija SP_1

$$\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 1 & \end{array},$$

SP_2 sadrži dvije particije

$$\begin{array}{cccc} 4 & 4 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & & \\ 2 & 2 & & \end{array} \quad i \quad \begin{array}{cccc} 4 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & \\ 2 & 1 & & \end{array},$$

dok SP_3 ima 7 ravninskih particija

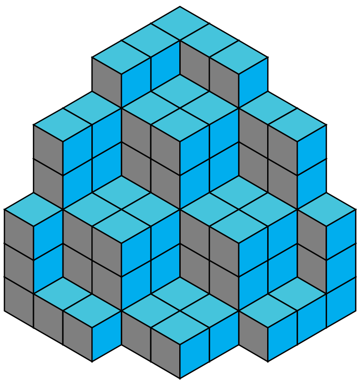
$$\begin{array}{cccccc} 6&6&6&3&3&3\\ 6&6&6&3&3&3\\ 6&6&6&3&3&3\\ 3&3&3&&&\\ 3&3&3&&&\\ 3&3&3&&& \end{array}, \quad \begin{array}{cccccc} 6&6&6&4&3&3\\ 6&6&6&3&3&3\\ 6&6&5&3&3&2\\ 4&3&3&1&&\\ 3&3&3&&&\\ 3&3&2&&& \end{array}, \quad \begin{array}{cccccc} 6&6&6&4&3&3\\ 6&6&6&4&3&3\\ 6&6&4&3&2&2\\ 4&4&3&2&&\\ 3&3&2&&&\\ 3&3&2&&& \end{array},$$

$$\begin{array}{cccccc} 6&6&6&5&4&3\\ 6&6&5&3&3&2\\ 6&5&5&3&3&1\\ 5&3&3&1&1&\\ 4&3&3&1&&\\ 3&2&1&&& \end{array}, \quad \begin{array}{cccccc} 6&6&6&5&4&3\\ 6&6&5&4&3&2\\ 6&5&4&3&2&1\\ 5&4&3&2&1&\\ 4&3&2&1&&\\ 3&2&1&&& \end{array}, \quad \begin{array}{cccccc} 6&6&6&5&5&3\\ 6&5&5&3&3&1\\ 6&5&5&3&3&1\\ 5&3&3&1&1&\\ 5&3&3&1&1&\\ 3&1&1&&& \end{array}$$

$$i \quad \begin{array}{cccccc} 6&6&6&5&5&3\\ 6&5&5&4&3&1\\ 6&5&4&3&2&1\\ 5&4&3&2&1&\\ 5&3&2&1&1&\\ 3&1&1&&& \end{array}.$$

Na Slici 1.5 je dan trodimenzionalni prikaz samokomplementarne potpuno simetrične ravninske particije.

$$\begin{array}{cccccc} 6&6&6&5&5&3\\ 6&5&5&3&3&1\\ 6&5&5&3&3&1\\ 5&3&3&1&1&\\ 5&3&3&1&1&\\ 3&1&1&&& \end{array} \quad \rightarrow$$



Slika 1.5: Jedna od 7 TSSCPP reda 6

Bijekciju između matrica s alternirajućim predznakom (ASM) i totalno simetričnih ravninskih particija (TSSCPP) Zailberger [49] je usapostavio vezom između GT uzoraka i takozvanih *magog trokuta*.

Definicija 1.4.1. Magog trokut reda n je trokutasta matrica s n brojeva na sve tri stranice čiji su elementi manji ili jednaki n, takvi da su

(i) neopadajući duž redova i stupaca i

(ii) u j-tom stupcu ne postoji element veći od j.

Primjerice,

$$\begin{array}{lll} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{lll} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{lll} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 1 & 1 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{lll} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 1 & 2 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} 1 & & \\ 1 & 1 & \\ 1 & 2 & 3 \end{array} \quad \begin{array}{lll} 1 & & \\ 1 & 2 & \\ 1 & 2 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{lll} 1 & & \\ 1 & 2 & \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

su svi magog trokuti reda 3. Bijekcija između GT uzoraka i matrica s alternirajućim predznakom već je prikazana u Odjeljku 1.3.1. Bijekcija između magog trokuta i TSSCPP ranije su dokazali Mills, Robbins i Rumsey [46], a Zeilberger pronalazi bijekciju između GT uzoraka i magog trokuta.

G.E. Andrews proučava i padajuće ravninske particije (engl. descending plane partitions, DPP) [4]. Padajuća ravninska particija reda n je trokutasta matrica cijelih brojeva koji su manji ili jednaki n tako da, promatrajući slijeva, brojevi u retcima padaju, u stupcima strogo padaju i broj elemenata u svakom retku je strogo manji od najvećeg elementa u tom retku.

$$\begin{array}{cccccc} 7 & 7 & 6 & 5 & 3 & 1 \\ & 6 & 5 & 4 & 2 & \\ & & 3 & 3 & & \\ & & & 2 & & \end{array}$$

je primjer takve particije. Za $n = 1$ imamo samo 1 padajuću ravninsku particiju:

$$\emptyset.$$

Dvije su ravninske particije za $n = 2$:

$$2 \qquad \emptyset\ .$$

Za $n = 3$ 7 je ravninskih particija i to su

$$2 \qquad 3 \qquad 3\ \ 1 \qquad 3\ \ 2 \qquad 3\ \ 3 \qquad \begin{matrix} 3 & 3 \\ & 2 \end{matrix} \qquad \emptyset\,.$$

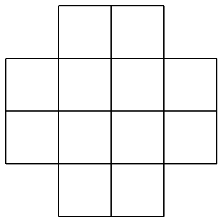
Broj padajućih ravninskih particija dan je formulom

$$\prod_{1 \leq i \leq j \leq r} \frac{r+i+j-1}{2i+j-1} \tag{1.12}$$

i podudara se s brojem matrica s alternirajućim predznakom. Još uvijek je otvoren problem pronalaska bijekcije između ovih dviju struktura.

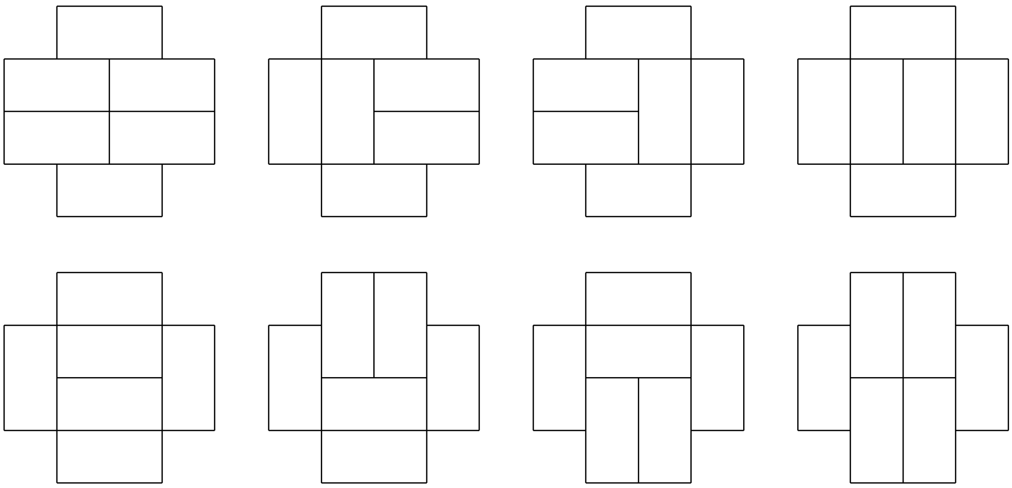
1.5. Funkcija visine i astečki dijamanti

Sljedeća struktura koja je u vezi s ASM jesu astečki dijamanti (engl. *Aztec diamond*). *Astečki dijamant reda n* je unija kvadrata $[a,a+1]\times[b,b+1]\subset\mathbb{R}^2$, $a,b\in\mathbb{Z}$ smještena u potpunosti unutar kvadrata $\{(x,y):|x|+|y|\leq n+1\}$ u cijelobrojnoj mreži.



Slika 1.6: Astečki dijamant reda 2.

Domino pločica je zatvoreni 1×2 ili 2×1 pravokutnik u $\mathbb{R}^2$ s vrhovima u $\mathbb{Z}^2$. *Popločanje T* područja R je skup domino pločica čiji su interiori disjunktni, a unija daje R. Na Slici 1.7 vidimo sva popločanja astečkog dijamanta reda 2:



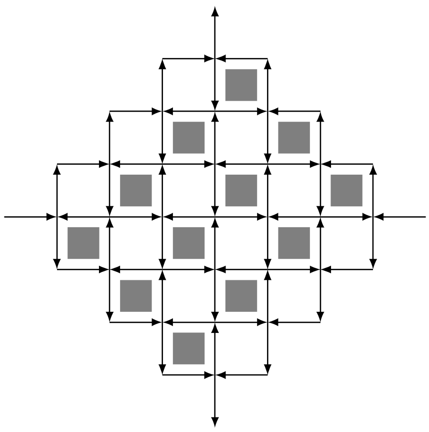
Slika 1.7: Sva moguća popločanja astečkog dijamanta reda 2.

N.D. Elkies, G.Kuperberg, M. Larsen i J. Propp 1992. godine [31] dokazali su da je broj popločanja astečkog dijamanta reda n jednak $2^{n(n+1)/2}$. U svom radu su prikazali korespodenciju popločanja astečkog dijamanta s parovima (A,B) matrica $A\in\mathscr{A}_n$ i $B\in\mathscr{A}_{n+1}$ koje zadovoljavaju određene uvjete. Za potrebe definiranja tih uvjeta i bijekcije između para (A,B) matrica i popločanja astečkog dijamanta najprije se definira funkcija visine H_T za dano popločanje T. Popločanje T se proširi na cijelu ravninu $\mathbb{R}^2$ na način da je komplement astečkog dijamanta popločan isključivo horizontalnim domino pločicama. Prošireno popločanje označeno je s T^+.

Definicija 1.5.1. *Graf G* je uređena trojka (V,E,h) gdje je $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ skup vrhova, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ skup bridova i $h : E \to \mathscr{P}(V)$ funkcija iz skupa svih bridova u skup dvočlanih podskupova skupa vrhova. Ako je $h(e) = \{v_1, v_2\}$ tada kažemo da su v_1 i v_2 *krajnje* točke brida e i da je e *incidentan* točkama v_1 i v_2.

Usmjereni graf je uređena trojka (V,E,u) gdje je $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ skup vrhova, $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ skup bridova i $u : E \to V_u$ funkcija iz skupa svih bridova u skup V_u uređenih parova elemenata skupa V. Ako je $u(e) = (v_1, v_2)$ koristimo zapis $e = v_1v_2$ i kažemo da je v_1 *početna* i v_2 *krajnja* točka brida e.

Usmjereni graf G astečkog dijamanta reda n je graf s vrhovima $\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : |a| + |b| \leq n + 1\}$ i bridovima između svakih dvaju vrhova (a,b) i (a',b') za koje vrijedi $|a-a'| + |b-b'| = 1$. Cjelobrojna mreža u $\mathbb{Z}^2$ oboji se kao šahovska ploča, crno-bijelo, tako da pravac $y = n+1-x$ prolazi samo bijelim kvadratima. Ovakvo bojenje naziva se *standardno* ili *parno* bojenje. G je usmjereni graf i svaki brid je usmjeren tako da mu je crno polje slijeva. Ovakva orijentacija se također naziva *standardna*. Strelice kruže u smjeru kazaljke na satu oko bijelih polja, a u suprotnom smjeru oko crnih polja kao što se može vidjeti na Slici 1.8. Zapisuje se $u \to v$ ako je uv brid usmjerenog grafa G čija je standardna orijentacija od u prema v.



Slika 1.8: Parno bojenje i standardna orijentacija astečkog dijamanta reda 3.

Za vrh $v = (a,b)$ kaže se da je *rubni* vrh ako je $|a| + |b| \in \{n, n+1\}$, a *rubni ciklus* je unija svih bridova koji povezuju rubne vrhove. Za vrh $v = (a,b)$ kaže se da je *paran* ako je smješten u gornjem lijevom kutu bijelog polja, u suprotnom se kaže da je vrh v neparan.

Obilazeći bridove proizvoljno odabrane domino pločice u astečkom dijamantu u smjeru kazaljke na satu (analogno u smjeru suprotnom kazaljki na satu), nužno će se smjer podudarati sa smjerom triju bridova grafa G, a tri će imati suprotan smjer. Također, svaki vrh v grafa G leži na rubu barem jedne domino pločice u T^+.

Funkcija H_T definira se na sljedeći način: vrhu $(-n-1,0)$ grafa G funkcija visine H_T pridružuje vrijednost 0. Nadalje, ako vrijedi da brid uv pripada rubu domino pločice popločanja T^+ pri čemu je usmjerenje brida $u \to v$ i ako je vrijednost funkcije H_T u vrhu u jednaka $H_T(u)$, tada je $H_T(v) = H_T(u)+1$. Funkcija H_T zadovoljava sljedeća svojstva

- Vrijednost funkcije H_T u vrhovima

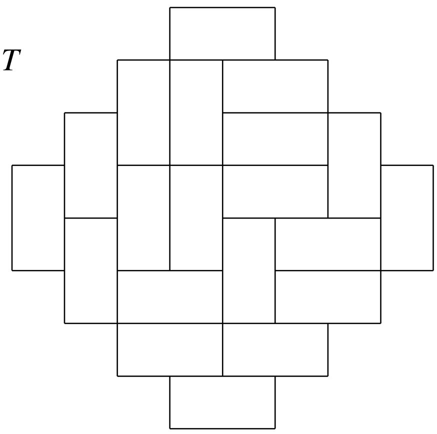
  $$(-n-1,0),(-n,0),(-n,1),\ldots,(0,n+1),\ldots,(n+1,0),\ldots,(0,-n-1),\ldots,(-n-1,0)$$

  duž rubnog ciklusa poprima uzastopne vrijednosti

  $$0,1,2,\ldots,2n+2,\ldots,0,\ldots,2n+2,\ldots,0$$

  redom i
- ako je $u \to v$, tada je $H_T(v)$ jednako ili $H_T(u)+1$ ili $H_T(u)+3$.

T



$\rightarrow$ H_T

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
&&&&&&&&&&10&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&\mid&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&8&-&9&-&8&&&&&&&& \\
&&&&&&&&\mid&&&&\mid&&&&&&&& \\
&&&&&&6&-&7&-&6&-&7&-&6&&&&&& \\
&&&&&&\mid&&\mid&&\mid&&&&\mid&&&&&& \\
&&&&4&-&5&&8&&5&-&4&-&5&-&4&&&& \\
&&&&\mid&&\mid&&\mid&&\mid&&&&\mid&&\mid&&&& \\
&&2&-&3&&6&-&7&-&6&-&7&-&6&&3&-&2&& \\
&&\mid&&\mid&&\mid&&\mid&&\mid&&&&\mid&&\mid&&\mid&& \\
0&-&1&&4&-&5&&8&&5&-&4&-&5&-&4&&1&-&0 \\
&&\mid&&\mid&&\mid&&\mid&&\mid&&\mid&&&&\mid&&\mid&& \\
&&2&-&3&&6&-&7&-&6&&3&-&2&-&3&-&2&& \\
&&&&\mid&&\mid&&&&\mid&&\mid&&&&\mid&&&& \\
&&&&4&-&5&-&4&-&5&-&4&-&5&-&4&&&& \\
&&&&&&\mid&&&&\mid&&&&\mid&&&&&& \\
&&&&&&6&-&7&-&6&-&7&-&6&&&&&& \\
&&&&&&&&\mid&&&&\mid&&&&&&&& \\
&&&&&&&&8&-&9&-&8&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&\mid&&&&&&&&&& \\
&&&&&&&&&&10&&&&&&&&&&
\end{array}$$

Slika 1.9: Popločanje T i pripadajuća funkcija visine H_T

Sljedeći korak jest iz popločanja astečkog dijamanta T pomoću funkcije H_T dobiti par matrica s alternirajući predznakom $A \in \mathscr{A}_n$ i $B \in \mathscr{A}_{n+1}$. Za svaki $i,j \in \{0,1,\ldots,n\}$ definiramo

$$a'_{i,j} = H_T(-n+i+j,-i+j)$$

i za svaki $i,j \in \{0,1,\ldots,n+1\}$

$$b'_{i,j} = H_T(-n-1+i+j,-i+j).$$

Time se dobiju matrice $A' = [a'_{i,j}]$ i $B' = [b'_{i,j}]$. Popločanje sa Slike 1.9 daje matrice

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 3 & 5 & 7 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 5 & 7 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 5 & 3 \\ 9 & 7 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \;\; i \;\; B' = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 6 & 8 \\ 4 & 6 & 8 & 6 & 4 & 6 \\ 6 & 4 & 6 & 4 & 6 & 4 \\ 8 & 6 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ 10 & 8 & 6 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrice $A^* = [a^*_{i,j}]$ i $B^* = [b^*_{i,j}]$ dobivene iz A' i B' redom formulama

$$a^*_{i,j} = \frac{a'_{i,j} - 1}{2} \;\; i \;\; b^*_{i,j} = \frac{b'_{i,j}}{2}$$

nazivaju se *ukošene sumacije* matrica s alternirajućim predznakom A i B, gdje elemente matrice A dobijemo iz

$$a_{i,j} = \frac{a^*_{i-1,j} + a^*_{i,j-1} - a^*_{i-1,j-1} - a^*_{i,j}}{2}$$

i vrijedi analogna formula za elemente matrice B. Par matrica $A \in \mathscr{A}_n$ i $B \in \mathscr{A}_{n+1}$ pridruženih popločanju T na Slici 1.9 su matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & - & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad i \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & - & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Uvjeti kompatibilnosti koje mora zadovoljavati par matrica (A,B) pridruženih popločanju T astečkog dijamanta za svaku matricu $B \in \mathscr{A}_{n+1}$ dopuštaju točno $2^{N_-(B)}$ matrica $A \in \mathscr{A}_n$, gdje je $N_-(B)$ broj elemenata jednakih -1 unutar matrice B. Mills, Robbins i Rumsey [45] dokazali su da je

$$\sum_{M \in \mathscr{A}_n} 2^{N_-(M)} = 2^{n(n+1)/2}.$$

2. Matrice s alternirajućim predznakom uvjetovane permutacijskim uzorkom

U ovom poglavlju uvedene su familije matrica s alternirajućim predznakom koje posjeduju dodatna algebarska i kombinatorna svojstva. Od interesa je promatrati matrice s alternirajućim predznakom koje su uvjetovane permutacijskim uzorkom duljine 3. Uvodi se familija matrica koje izbjegavaju permutaciju $\sigma = (213)$ i te matrice nazivamo $\mathscr{S}$-matrice. Matrice koje izbjegavaju permutaciju σ i zadovoljavaju uvjet nagiba među susjednim recima nazivamo $\mathscr{C}$-matrice. Kako je u Poglavlju 1navedeno, istaknuti otvoreni problem je razumijevanje strukture i enumeracije dijagonalno simetričnih ASM matrica. Ovdje odgovaramo na takva pitanja uvođenjem familije matrica koje su dijagonalno simetrične i izbjegavaju permutaciju σ. Nazivamo ih $\mathscr{D}$-matrice.

Promatra se više podfamilija i poopćenja ovih familija matrica s alternirajućim predznakom. Dokazuje se invarijantnost familija na pojedine simetrije. Uočena je i dokazana rekurzivna struktura, na osnovu koje se dokazuje eksplicitna formula za broj matrica danog reda. Prikazane su profinjene enumeracije, obzirom na mjesto 1ce u prvom retku te obzirom na broj specijalnih elemenata u matrici.

Definicija 2.0.1. Neka je S konačan skup. Bijekcija $\sigma : S \mapsto S$ naziva se permutacija skupa S.

Skup svih permutacija skupa S čini grupu obzirom na standardno komponiranje funkcija. Ta se grupa naziva simetrična grupa. Svaka se grupa, do na izomorfizam, može reprezentirati nekom grupom permutacija [10].

Uvodi se oznaka $[n]$ za skup prvih n prirodnih brojeva, $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$. Ako je S n-člani skup, onda se pripadna grupa simetrija označava sa $S(n)$. Koristi se i oznaka S_n. Pojedina permutacija iz tog skupa može se reprezentirati na više načina. Za zapis $\sigma \in S(n)$,

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

koristi se skraćena oznaka

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Permutacija $\sigma \in S_n$ može se prikazati kao permutacijska matrica $M_\sigma = [m_{i,j}]$ standardnih vektora baze, to jest, $m_{i,j} = 1$ ako i samo ako je $\sigma(i) = j$. Reći ćemo da permutacija $\sigma \in S_n$ sadrži permutacijski uzorak $\tau \in S_m$, $m < n$, ako je M_τ podmatrica od M_σ (može iz matrice M_σ dobiti izostavljanjem odgovarajućih $n - m$ redaka i stupaca). U suprotnom, kaže se da permutacija σ izbjegava uzorak τ. Na primjer, permutacija $\sigma = (2143)$ sadrži permutacijski uzorak $\tau = (213)$,

$$M_\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

jer se izostavljanjem trećeg retka i četvrtog stupca iz matrice M_σ dobije matrica M_τ. Također sadrži i permutacijski uzorak (132) ali izbjegava (321), budući da ne postoje 1ce u takvom relativnom položaju u permutacijskoj matrici M_σ.

Imajući u vidu da su matrice s alternirajućim predznakom poopćene permutacijske matrice, pojam permutacijskog uzorka proširujemo na ASM matrice.

Definicija 2.0.2. Neka je M matrica s alternirajućim predznakom. Matrica M *sadrži* permutaciju σ ako postoji njena podmatrica $M' = [m'_{ij}]$ u kojoj je $m'_{ij} = 1$ ako $\sigma(i) = j$. U suprotnom matrica M *izbjegava* permutaciju σ.

Drugim riječima, matrica M sadrži permutaciju σ ako postoje elementi 1 u M takvi da im relativne pozicije odgovaraju pozicijama 1ca u permutacijskoj matrici permutacije σ. Izravno iz Definicije 2.0.2 slijedi

Propozicija 2.0.3. Neka je $n \geq 3$ prirodan broj. Matrica s alternirajućim predznakom $M = [m_{i,j}]$ reda n sadrži permutaciju (213) ako i samo ako postoje $i, i', i'', j, j', j'' \in [n]$ takvi da je

$$i < i' < i'', \;\; j < j' < j''$$

i

$$m_{i,j'} = m_{i',j} = m_{i'',j''} = 1.$$

Podrazumijeva se da svaka matrica reda n izbjegava sve permutacije duljine $m > n$.

2.1. Matrice s alternirajućim predznakom familije $\mathscr{S}$

U ovom odjeljku promatramo matrice s alternirajućim predznakom koje izbjegavaju permutaciju $\sigma = (213)$. U Teoremu 2.1.5 je dana eksplicitna formula za broj matrica s alternirajućim predznakom reda n koje izbjegavaju permutaciju σ. Također je dokazana i profinjena enumeracija; obzirom na položaj 1ce u prvom retku, (Propozicija 2.1.6).

Definicija 2.1.1. Neka je n prirodan broj. Matrice s alternirajućim predznakom reda n koje izbjegavaju permutaciju (213) nazivaju se $\mathscr{S}$- matrice reda n. Skup svih $\mathscr{S}$- matrica reda n označen je sa $\mathscr{S}_n$.

Skup svih $\mathscr{S}$-matrica označen je sa $\mathscr{S}$,

$$\mathscr{S} := \{M \in \mathscr{S}_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Budući da retci i stupci matrica s alternirajućim predznakom zadovoljavaju ista svojstva, familija $\mathscr{A}_n$ je invarijantna na transponiranje.

Propozicija 2.1.2. Neka je n prirodan broj. Skup $\mathscr{S}_n$ invarijantan je na transponiranje.

Dokaz. Neka je $M = [m_{i,j}] \in \mathscr{S}_n$ $\mathscr{S}$-matrica reda n. Po definiciji, M izbjegava permutaciju (213) što znači da ne postoje elementi

$$m_{i,j'} = m_{i',j} = m_{i'',j''} = 1$$

takvi da je

$$i < i' < i'' \text{ i } j < j' < j''.$$

Transponiranjem matrice M retci i stupci zamijene mijesta, pa u M^T ne postoje elementi $m_{j,i'} = m_{j',i} = m_{j'',i''} = 1$ pri čemu je $j < j' < j''$ i $i < i' < i''$. Dakle, M^T također izbjegava permutaciju σ. ■

Zbog svojstava matrica s alternirajućim predznakom, ako postoji element $m_{i,j} = -1$ unutar ASM matrice $M = [m_{i,j}]$, moraju postojati elementi jednaki 1 koji se nalaze na pozicijama

$$(i, j_1), (i, j_2), (i_1, j) \text{ i } (i_2, j)$$

gdje su

$$i_1 < i < i_2 \text{ i } j_1 < j < j_2.$$

Za te 1ce kaže se da su *pripadajuće* 1ce *slijeva*, *zdesna*, *iznad* i *ispod* -1ce $m_{i,j}$, redom.

Matrice s alternirajućim predznakom mogu imati više specijalnih elemenata u pojedinom retku ili stupcu. Međutim, kod $\mathscr{S}$- matrica to nije slučaj i o tome govori Propozicija 2.1.3.

Propozicija 2.1.3. Neka je M matrica s alternirajućim predznakom koja izbjegava permutaciju (213). U svakom retku i u svakom stupcu matrice M može biti najviše jedan element -1.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, neka postoji redak $i < n$ u kojem su dva elementa jednaka -1, $m_{i,j_1} = m_{i,j_2} = -1$. Bez gubitka općenitosti može se pretpostaviti da je $j_1 < j_2$. Tada bi pripadajuće 1ce iznad i slijeva -1ce m_{i,j_1} zajedno s 1com ispod -1ce m_{i,j_2} činile relativne pozicije permutacije (213). Na Slici 2.1 se može vidjeti relativni položaj pripadajućih 1ca. Na sličan način se tvrdnja dokazuje za stupce. ∎

$$\begin{array}{cc} \begin{matrix} & \phantom{\mathbf{1}} & j_1 & j_2 & \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} \ddots & & & & \\ & & \mathbf{1} & & \\ & \mathbf{1} & - & - & \\ & & & \mathbf{1} & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix} \end{array}$$

Slika 2.1: Položaj 1ca unutar matrice koja ima dvije -1ce u retku.

Izravna posljedica Propozicije 2.1.3 je svojstvo da u svakom retku i svakom stupcu matrice $M \in \mathscr{S}_n$ mogu postojati najviše dva elementa jedanka 1.

2.1.1. Rekurzivna struktura matrica familije $\mathscr{S}$

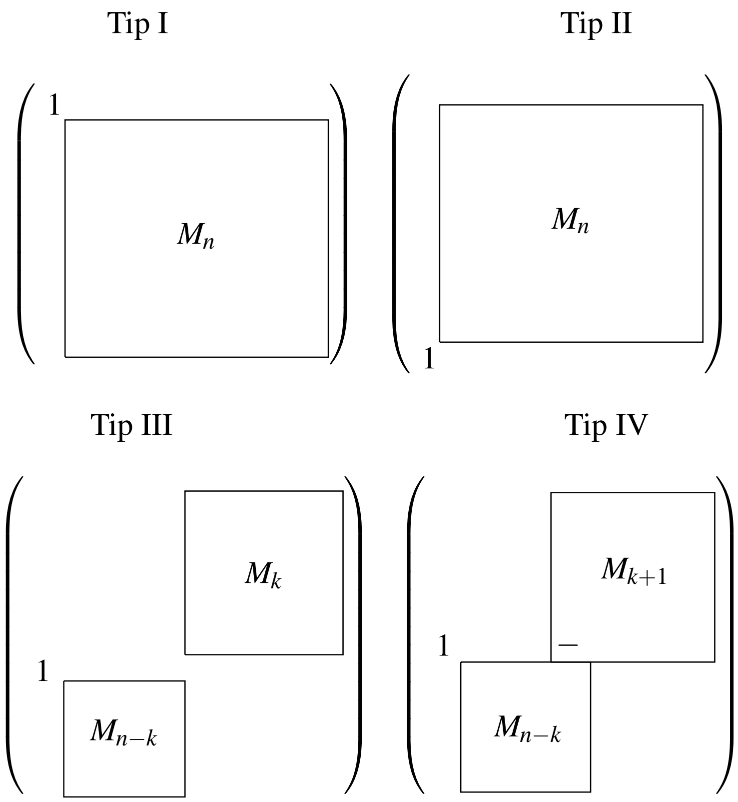
U nastavku se dokazuje da $\mathscr{S}$-matrice imaju rekurzivnu strukturu. Za matrice reda $n = 1$ jedini član familije je jedinična matrica dok za više redove matrica razlikujemo četiri moguća tipa matrica kao što je prikazano za sukup $\mathscr{S}_{n+1}$ na Slici 2.2. Tipu I pripadaju sve matrice $M = [m_{i,j}] \in \mathscr{S}_{n+1}$ koje imaju 1cu u prvom retku i prvom stupcu, $m_{1,1} = 1$, a ostali retci i stupci matrice čine podmatricu $M_n \in \mathscr{S}_n$ reda n.

Kod tipa II, $\mathscr{S}$-matrica M ima 1cu u $(n+1)$-om retku i prvom stupcu, to jest $m_{n+1,1} = 1$, a ostali retci i stupci matrice M također čine podmatricu $M_n \in \mathscr{S}_n$ nižeg reda.

Tipu III pripadaju sve $\mathscr{S}$-matrice kojima se 1ca u prvom stupcu nalazi u $(k+1)$-om retku, pri čemu je $k \in \{1,\dots,n-1\}$. Također, u $(k+1)$-om retku ostali elementi su jednaki nuli. U matrici M dvije su podmatrice $M_k \in \mathscr{S}_k$ i $M_{n-k} \in \mathscr{S}_{n-k}$ smještene iznad, odnosno ispod, $(k+1)$-og retka kao na slici. Ostatak matrice M čine elementi jednaki nuli.

Matrica tipa IV također ima 1cu u prvom stupcu i $(k+1)$-om retku, $m_{k+1,1} = 1$, te -1cu u istom retku i $(n-k+1)$-om stupcu, $m_{k+1,n-k+1} = -1$. Matrica M u ovom slučaju sadrži dvije podmatrice M_{k+1} i M_{n-k} familije $\mathscr{S}$ pri čemu matrica M_{k+1} na poziciji $(k+1,1)$ ima nulu. Ostatak matrice M čine elementi jednaki nuli. Ova četiri tipa matrica čuvaju svojstvo izbjegavanja permutacije $\sigma = (213)$ i na ovaj način se dobiju sve matrice s alternirajućim predznakom koje pripadaju familiji $\mathscr{S}$. O tome govori Teorem 2.1.4.

Teorem 2.1.4. Neka su n i k prirodni brojevi, $k < n$. Matrica M je matrica s alternirajućim predznakom reda $n+1$ koja izbjegava permutaciju (213) ako i samo ako je dobivena rekurzijom: za red 1 jedinična matrica i za $n > 1$ vrijedi da joj oblik odgovara jednom od tipova I, II, II ili IV.



Slika 2.2: Četiri tipa $\mathscr{S}$-matrica.

Dokaz. Neka je $M = [m_{i,j}]$ matrica dobivena rekurzijom jednog od tipova prikazanih na Slici 2.2. Iz strukture svakog od tipova slijedi da je M matrica s alternirajućim predznakom. Budući da je svaka od podmatrica M_n, M_k, M_{k+1} i M_{n-k} $\mathscr{S}$-matrica, 1ce koje se nalaze unutar pojedine podmatrice ne čine realtivne pozicije permutacije $\sigma = (213)$. Za tip I i II je jasno da 1ca na poziciji $(1,1)$, odnosno $(n+1,1)$, ne može zajedno s 1cama podmatrice M_n činiti relativne pozicije permutacije σ. Slijedi da je matrica M dobivena tipom I ili II $\mathscr{S}$-matrica. Ako je M dobivena tipom III, budući da su sve 1ce podmatrice M_k zdesna svim 1cama podmatrice M_{n-k} ne postoje 1ce koje se nalaze u relativnim pozicijama permutacije σ i da je pri tom jedna od njih u podmatrici M_k i jedna u podmatrici M_{n-k}. Dakle, M izbjegava permutaciju σ i ako je dobivena tipom III. Isti argument dokazuje da matrica dobivena tipom IV također izbjegava permutaciju σ.

S druge strane, neka je M $\mathscr{S}$-matrica. Dokaz dijelimo na tri slučaja, ovisno o retku $k+1$ u kojem se nalazi 1ca u prvom stupcu.

- $k+1 = 1$

  Izostavljanjem prvog retka i prvog stupca matrice M ostaje matrica s alternirajućim predznakom koja izbjegava permutaciju σ. Dakle, M je dobivena rekurzijom tipa I.

- $k+1=n+1$

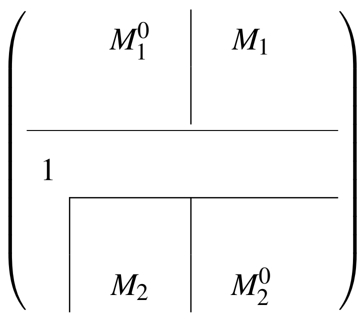
  Kao i u prethodnom slučaju, matrica dobivena iz M izostavljanjem $(n+1)$-og retka i prvog stupca je matrica s alternirajućim predznakom koja izbjegava permutaciju σ. Dakle, M je dobivena rekurzijom tipa II.

- $1<k+1<n+1$

  Pretpostavimo da u $(k+1)$-om retku ne postoji -1ca. Zbog izbjegavanja permutacije σ sve 1ce koje se nalaze u retcima iznad $(k+1)$-tog retka nalaze se zdesna svim 1cama koje se nalaze u retcima ispod $(k+1)$-tog jer bi u suprotnom, zajedno s 1com $m_{k+1,1}$ činile relativne pozicije permutacije σ. Budući da u pravokutnim podmatricama

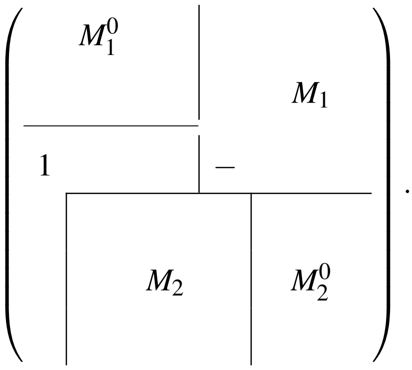
$$M_1^0=\begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,j} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{k,1} & \dots & m_{k,j} \end{pmatrix} \quad i \quad M_2^0=\begin{pmatrix} m_{k+2,j+1} & \dots & m_{k+2,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n+1,j+1} & \dots & m_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$$

  ne postoje elementi jednaki 1, nije moguće da postoje elementi jednaki -1 jer bi tada parcijalna suma, odnosno suma, nekog od redaka ili stupaca bile jednake -1. Dakle, podmatrice M_1^0 i M_2^0 sa Slike 2.3 su nul-matrice. Iz toga slijedi, budući da u svakom retku i stupcu suma elemenata mora biti jednaka 1, da su podmatrice M_1 i M_2 matrice s alternirajućim predznakom reda k i $n-k$, redom. Slijedi da je $j=n-k+1$. Također, iz činjenice da M izbjegava permutaciju σ slijedi da M_1 i M_2 izbjegavaju σ. Dakle, matrica M je matrica tipa III.



Slika 2.3: Konstrukcija $\mathscr{S}$-matrice tipa III.

Ako u $(k+1)$-om retku postoji -1ca, M ima strukturu kao i na Slici 2.4,



Slika 2.4: Konstrukcija $\mathscr{S}$-matrice tipa IV.

U ovom slučaju, podmatrice M_1^0 i M_2^0 jednake su

$$M_1^0 = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,j-1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{k,1} & \dots & m_{k,j-1} \end{pmatrix} \ i \ M_2^0 = \begin{pmatrix} m_{k+2,j+1} & \dots & m_{k+2,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n+1,j+1} & \dots & m_{n+1,n+1} \end{pmatrix}.$$

Na analogan način kao i u slučaju da ne postoji -1ca u $(k+1)$-tom retku, dokaže se da su podmatrice M_1^0 i M_2^0 nul-matrice, $j = n-k+1$ i M_1 i M_2 matrice s alternirajućim predznakom reda $k+1$ i $n-k$, redom. Također, M_1 i M_2 izbjegavaju permutaciju σ, pri čemu matrica M_1 na poziciji $(k+1,1)$ ima nulu. Dakle, M je matrica tipa IV.

■

Primjer 6. Budući da postoje jedinstvena matrica familije $\mathscr{S}$ reda 1, $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$ i dvije takve matrice reda 2,

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$$

rekurzija prikazana u Teoremu 2.1.4 daje 6 matrica familije $\mathscr{S}_3$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 1 & \\ \mathbf{1} & - & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ \mathbf{1} & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & 1 \\ \mathbf{1} & & \\ & 1 & \end{pmatrix} i \begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ \mathbf{1} & & \end{pmatrix}.$$

Dvije su matrice tipa I, dvije su tipa II i po jedna je matrica tipa III i IV.

Poznata je rekurzija velikih Schröderovih brojeva S_n,

$$S_n = S_{n-1} + \sum_{k=0}^{n-1} S_k S_{n-k-1},$$

pri čemu je $S_0 = 1$ i $S_1 = 2$. Niz velikih Schröderovih brojeva započinje

$$1, 2, 6, 22, 90, 394, 1806, 8558, 41586, 206098\ldots$$

i to je niz A006318 u OEIS bazi.

Neka je s B_n označen broj $\mathscr{S}$-matrica reda n, $B_n := |\mathscr{S}_n|$.

Teorem 2.1.5. Neka je n nenegativan cijeli broj. Broj B_{n+1} matrica familije $\mathscr{S}_{n+1}$ jednak je n-om Schröderovom broju S_n,

$$B_{n+1} = S_n.$$

Dokaz. Dokaz se provodi indukcijom. Po Teoremu 2.1.4 vrijedi $B_1 = S_0$. Pretpostavimo da je broj B_m $\mathscr{S}$-matrica reda m jednak S_{m-1} za svaki $m \leq n$. Neka je s B_n^j označen broj $\mathscr{S}$-matrica reda n dobivenih rekurzijom tipa j, $j \in \{I, II, III, IV\}$, iz Teorema 2.1.4. Broj B_{n+1} je suma brojeva B_{n+1}^I, B_{n+1}^{II}, B_{n+1}^{III} i B_{n+1}^{IV}. Broj B_{n+1}^I matrica reda $n+1$ tipa I jednak je broju B_n svih $\mathscr{S}$-matrica reda n. Po pretpostavci indukcije je $B_n = S_{n-1}$. Isto vrijedi i za matrice tipa II, takvih matrica također ima S_{n-1}. Broj B_{n+1}^{III} matrica tipa III dobije se tako da se pomnoži broj svih $\mathscr{S}$-matrica reda k, s brojem svih $\mathscr{S}$-matrica reda $n-k$ i zbroji po svim $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Dakle, taj broj je jednak

$$\sum_{k=1}^{n-1} B_k B_{n-k}.$$

Po pretpostavci indukcije slijedi da je broj $\mathscr{S}$-matrica reda $n+1$ tipa III

$$B_{n+1}^{III} = \sum_{k=1}^{n-1} S_{k-1} S_{n-1-k}.$$

Budući da $\mathscr{S}$-matrice reda $(k+1)$ koje na poziciji $(k+1, 1)$ imaju nulu mogu biti bilo kojeg tipa osim tipa II, onda je broj takvih matrica jednak $B_{k+1} - B_k$. Iz toga slijedi da je broj B_{n+1}^{IV} matrica tipa IV jednak

$$\sum_{k=1}^{n-1} (B_{k+1} - B_k) B_{n-k},$$

pa po pretpostavci indukcije slijedi da je

$$B_{n+1}^{IV} = \sum_{k=1}^{n-1} (S_k - S_{k-1}) S_{n-1-k}.$$

Prema tome, za broj B_{n+1} $\mathscr{S}$-matrica reda $n+1$ dobiva se

$$\begin{aligned}
B_{n+1} &= 2S_{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1} S_{k-1}S_{n-1-k}+\sum_{k=1}^{n-1}(S_k-S_{k-1})S_{n-1-k} \\
&= 2S_{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1} S_kS_{n-1-k} \\
&= S_{n-1}+S_0S_{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1} S_kS_{n-1-k} \\
&= S_{n-1}+\sum_{k=0}^{n-1} S_kS_{n-1-k} \\
&= S_n.
\end{aligned}$$

■

2.1.2. Profinjene enumeracije

Statistika po poziciji 1ce u prvom retku

Iz rekurzije opisane u Teoremu 2.1.4 može se vidjeti da se u $\mathscr{S}$-matrici reda n 1ca u prvom stupcu može nalaziti u svakom od n redaka. Isto tako, budući da je familija $\mathscr{S}_n$ invarijantna na transponiranje, 1ca u prvom retku može se nalaziti u bilo kojem stupcu. Neka je s $B_{n,k}$ označen broj $\mathscr{S}$-matrica reda n kojima se 1ca u prvom retku nalazi u k-tom stupcu, $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. Određivanjem vrijednosti $B_{n,k}$ za prvih sedam redova dobije se trokutasta matrica

$$\begin{pmatrix}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 2 & & 2 & & 2 & & & & \\
 & & & 6 & & 4 & & 6 & & 6 & & & \\
 & & 22 & & 12 & & 12 & & 22 & & 22 & & \\
 & 90 & & 44 & & 36 & & 44 & & 90 & & 90 & \\
394 & & 180 & & 132 & & 132 & & 180 & & 394 & & 394 \\
 & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{pmatrix}.$$

Korolar 2.1.6. Neka su n i k prirodni brojevi, $1 \le k \le n$. Tada vrijedi

$$B_{n,k} = \begin{cases} S_{k-1}S_{n-k-1}, & k<n \\ S_{n-2}, & k=n \end{cases}$$

gdje je S_n n-ti Schröderov broj.

Dokaz. Budući da je familija $\mathscr{S}_n$ invarijantna na transponiranje, enumeracija obzirom na redni broj $k \in \{1,2,\ldots,n\}$ stupca u kojem se nalazi 1ca u prvom retku, jednaka je enumeraciji obzirom na redni broj retka u kojem se nalazi 1ca u prvom stupcu. Stoga se za potrebe ovog dokaza koristi ista oznaka $B_{n,k}$ i za broj matrica koje u prvom stupcu imaju 1cu u k-tom retku. Iz Teorema 2.1.4 slijedi da je svaka $\mathscr{S}$-matrica reda n čija se 1ca u prvom stupcu nalazi u prvom retku nužno matrica dobivena rekurzijom tipa I, pa vrijedi

$$\begin{aligned} B_{n,1} &= B_n^I \\ &= S_0 S_{n-2}. \end{aligned}$$

Ako se 1ca u prvom stupcu nalazi u k-tom retku pri čemu je $1 < k < n$, redi se o matrici tipa III ili tipa IV. Iz dokaza Teorema 2.1.5 slijedi da je kupan broj matrica $M = [m_{i,j}]$ reda n tipa III za koje vrijedi da je $m_{k,1} = 1$ jednak $S_{k-2}S_{n-k-1}$, a tipa IV jednak $(S_{k-1} - S_{k-2})S_{n-k-1}$. Dakle,

$$\begin{aligned} B_{n,k} &= S_{k-2}S_{n-k-1} + (S_{k-1} - S_{k-2})S_{n-k-1} \\ &= S_{k-1}S_{n-k-1} \end{aligned}$$

za $k \in \{1,2,\ldots,n-1\}$.

Matrice koje u prvom stupcu imaju 1cu u n-tom retku su sve $\mathscr{S}$-matrice tipa II pa za slučaj kada je $k = n$ vrijedi da je $B_{n,n} = B_n^{II} = S_{n-2}$.

Budući je enumeracija analogna i za broj matrica koje u prvom retku imaju 1cu u k-tom stupcu, tvrdnja je dokazana. ∎

2.2. Matrice s alternirajućim predznakom familije $\mathscr{C}$

Familije koje proučavamo u ovom poglavlju osim svojstva da izbjegavaju permutaciju imaju i dodatno svojstvo, zadani odnos 1ca u susjednim retcima. Za potrebe definiranja te familije uvode se pojmovi lijeve i desne 1ce. Neka je n prirodan broj i $M = [m_{i,j}] \in \mathscr{S}_n$ matrica reda n. Za element $m_{i,j} = 1$ kaže se da je

- *lijeva* 1ca u retku i ako vrijedi da je $m_{i,j'} = 0$ za svaki $j' < j$ i
- *desna* 1ca u retku i ako vrijedi da je $m_{i,j'} = 0$ za svaki $j' > j$.

Ako se i-ti redak sastoji od jednog elementa 1 i preostalih nula, tada je ta 1ca istovremeno i lijeva i desna u i-tom retku,$1 \leq i \leq n$.

Vertikalno simetrične matrice s alternirajućim predznakom, definirane u Poglavlju 1, imaju svojstvo da je svaka desna 1ca smještena zdesna svakoj lijevoj 1ci ili je u istom stupcu kao i ona. Ovo svojstvo primjenjeno samo na susjedne retke uz uvjet izbjegavanja permutacije daje novu familiju matrica s alternirajućim predznakom koji posjeduje istaknute pravilnosti.

Definicija 2.2.1. Neka je n prirodan broj. Matrice s alternirajućim predznakom reda n koje zadovoljavaju svojstva

(i) izbjegavaju permutaciju (213) i

(ii) desna 1ca u retku $i+1 \geq 2$ nalazi se zdesna lijevoj 1ci u i-tom retku, $i < n$,

nazivaju se $\mathscr{C}$- matrice reda n. Skup svih $\mathscr{C}$- matrica reda n označen je sa $\mathscr{C}_n$.

Sa $\mathscr{C}$ je označen skup svih ovako definiranih matrica,

$$\mathscr{C} := \{M \in \mathscr{C}_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Možemo se uvjeriti da je matrica

$$\begin{pmatrix}
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & - & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & - & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & - & . & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & 1 & - & . & 1 & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & - & . & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
1 & . & . & . & - & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & - & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{pmatrix}.$$

$\mathscr{C}$-matrica reda 15.

U Odijeljku 2.1 pokazano je da je familija matrica s alternirajućim predznakom koje nazivamo $\mathscr{S}$-matrice invarijantna na transponiranje. Isto svojstvo ima i skup $\mathscr{C}_n$ te su u nastavku definirani potrebni pojmovi i pokazane tvrdnje koje se koriste pri dokazivanju invarijantnosti na transponiranje.

Na analogan način kao što su definirane lijeva i desna 1ca u pojedinom retku, definiraju se i gornja i donja 1ca u pojedinom stupcu. Neka je n prirodan broj i $M = [m_{i,j}] \in \mathscr{C}_n$. Za element $m_{i,j} = 1$ kaže se da je

- *gornja* 1ca u stupcu j ako vrijedi da je $m_{i',j} = 0$ za svaki $i' < i$ i
- *donja* 1ca u stupcu j ako vrijedi da je $m_{i',j} = 0$ za svaki $i' > i$.

U stupcima koji imaju samo jedan element $m_{i,j}$ jednak 1, $m_{i,j}$ je istovremeno i gornja i donja 1ca.

Lema 2.2.2. Neka je n prirodan broj i neka je M $\mathscr{C}$-matrica reda n. Tada se lijeva 1ca u matrici M, koja nije ujedno i gornja, nalazi u n-tom retku.

Dokaz. Dokaz se provodi kontradikcijom. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $i < n$ pri čemu je $m_{i,j}$ lijeva 1ca u i-tom retku i nije gornja u j-tom stupcu $\mathscr{C}$-matrice $M = [m_{i,j}]$ reda n. Budući da $m_{i,j}$ nije gornja 1ca, tada postoje elementi $m_{i_1,j} = 1$, $m_{i_2,j} = -1$, $i_1 < i_2 < i$. Zbog svojstava matrica s alternirajućim predznakom -1ca $m_{i_2,j}$ ima 1cu slijeva, $m_{i_2,j_1} = 1$, $j_1 < j$. Budući da je $i < n$ i $m_{i,j}$ lijeva jedinica, zbog svojstva (ii) iz Definicije 2.2.1 u retku $i+1$ mora postojati desna 1ca, $m_{i+1,j_2} = 1$, koja se nalazi zdesna 1ce $m_{i,j}$, to jest $j_2 > j$. Tada 1ce $m_{i_1,j}$, m_{i_2,j_1} i m_{i+1,j_2} čine relativne pozicije permutacije (213).

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{ccccc} & j_1 & j & j_2 & \end{array} & \\
\left(\begin{array}{ccccc} \ddots & & & & \\ & & \mathbf{1} & & \\ & \mathbf{1} & - & & \\ & & 1 & & \\ & & & \mathbf{1} & \\ & & & & \ddots \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ i_1 \\ i_2 \\ i \\ i+1 \\ \\ \end{array}
\end{array}$$

Slika 2.5: Relativni položaj nenul elemenata matrice M.

Prema tome, $i = n$. Na Slici 2.5 prikazan je opisani položaj 1ca unutar matrice čija je 1ca na mjestu (i, j) lijeva i nije gornja pri čemu je $i \neq n$. ■

Lema 2.2.3. Neka je n prirodan broj i M $\mathscr{C}$-matrica reda n. Ako je element matrice M na mjestu (n, j) gornja 1ca, onda je $j = n$ i M je jedinična matrica.

Dokaz. Budući da je $m_{n,j}$ gornja 1ca u j-tom stupcu, $(n-1)$-i redak može sadržavati samo jednu 1cu, m_{n-1,j_1}, jer bi u suprotnom -1ca bila smještena u j-ti stupac. Jedinstvena 1ca u $(n-1)$-om retku ujedno je i lijeva, pa po Lemi 2.2.2 slijedi da je i gornja u svom stupcu. Zbog uvjeta (ii) iz Definicije 2.2.1, 1ca m_{n-1,j_1} nalazi se slijeva 1ci $m_{n,j}$. U retku $n-2$ također može biti točno jedna 1ca. Naime, kada bi bile dvije 1ce u tom retku, -1ca između njih bila bi u jednom od dvaju stupaca koji sadrže 1ce zadnjih dvaju redaka. To nije moguće, jer su te dvije 1ce gornje, svaka u svom stupcu. Ponavlja se slučaj jedinstvene 1ce u retku, pa koristeći iste argumente kao i u prethodnim slučajevima zaključuje se da je i ova 1ca gornja u svom stupcu i nalazi se slijeva 1ce m_{n-1,j_1}.

Nastavljajući postupak uzastopno prema gore u matrici, zahvaljujući istim argumentima dobije se da niti jedan redak nema -1cu i da je 1ca u svakom retku slijeva 1ci u retku ispod. Budući da svaki redak i stupac moraju imati element jednak 1 jedini mogući slučaj je da je $j = n$ i da je M jedinična matrica. ■

Lema 2.2.4. Neka je n prirodan broj. U $\mathscr{C}$-matrici M reda n vrijedi ako je 1ca na mjestu (i, j) gornja u j-tom stupcu i nije lijeva u i-tom retku onda je nužno $j = n$.

Dokaz. U svakom retku matrice $M = [m_{i,j}] \in \mathscr{C}_n$ postoje najviše dvije 1ce pa svaka 1ca koja nije lijeva u svom retku, nužno je desna. Neka je $m_{i,j} = 1$ proizvoljno odabrana 1ca matrice M koja je gornja u svom stupcu i nije lijeva u svom retku. Pretpostavimo suprotno, to jest neka je $j < n$. Budući da $m_{i,j}$ nije lijeva, postoji -1ca m_{i,j^-} u istom retku. Za dokazati propoziciju koristit će se tri pomoćne tvrdnje, PT1, PT2 i PT3.

PT1: Ako je $i' > i$ i $j' > j^-$ onda je $m_{i',j'} = 0$.

Neka je $i' > i$ i $j' > j^-$. Pretpostavimo da je $m_{i',j'} = 1$. U ovom slučaju 1ce slijeva i iznad -1ce m_{i,j^-} zajedno s $m_{i',j'}$ čine relativne pozicije permutacije $\sigma = (213)$.

Ako je $m_{i',j'} = -1$ tada bi postojale pripadajuće 1ce ispod i zdesna, pa bi bilo koja od njih također uzrokovala postojanje relativnih pozicija permutacije σ. Dakle, $m_{i',j'} = 0$.

Na Slici 2.6 mogu se vidjeti 1ce u relativnom položaju permutacije σ u slučaju $m_{i',j'} \neq 0$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} \phantom{\mathbf{1}} & j^- & j & j' \end{array} \\ \begin{array}{c} \\ \\ i \\ i' \end{array} & \left(\begin{array}{cccc} & \mathbf{1} & & \\ & & & \\ \mathbf{1} & - & 1 & \\ & & & \mathbf{1} \end{array}\right) \end{array}$$

Slika 2.6: 1ce u relativnom položaju permutacije σ.

PT2: U stupcu rednog broja $j+1$ donja 1ca je istovremeno i lijeva i nalazi se u retku s rednim brojem $i-k$, pri čemu je $k > 0$.

Budući da je $j < n$ postoji stupac čiji je redni broj $j+1$. U svakom stupcu mora postojati donja 1ca, pa neka je $m_{i-k,j+1} = 1$ donja 1ca u $(j+1)$-om stupcu. Iz pomoćne tvrdnje PT1 slijedi da je $k \geq 0$. Budući da je $m_{i,j}$ desna 1ca u i-tom retku, mora vrijediti i da je $k \neq 0$. Dakle, donja 1ca u stupcu $j+1$ nalazi se u retku $i-k$ pri čemu je $k > 0$. Preostaje pokazati da je $m_{i-k,j+1}$ lijeva 1ca u svom retku. Ako $m_{i-k,j+1}$ nije lijeva, u $(i-k)$-tom retku postoji -1ca koja se mora nalaziti slijeva 1ci $m_{i-k,j+1}$. Budući da je $m_{i,j}$ gornja u svom stupcu, ta -1ca nalazi se slijeva stupcu j. U tom slučaju njoj pripadajuće 1ce slijeva i gore zajedno s $m_{i,j}$ čine relativne pozicije permutacije σ. Na Slici 2.7 prikazan je relativni položaj permutacije σ kojeg čine navedene 1ce. Time je dokazana pomoćna tvrdnja PT2.

$$\begin{array}{r@{\;}c} & \begin{array}{cccc} \phantom{\mathbf{1}} & & j & j+1 \end{array} \\ \begin{array}{r} \\ i-k \\ i \end{array} & \left(\begin{array}{cccc} & \mathbf{1} & & \\ \mathbf{1} & - & & 1 \\ & & \mathbf{1} & \end{array}\right) \end{array}$$

Slika 2.7: Prikaz kontradikcije za PT2.

PT3 Postoji barem jedan redak $i' \in \{i-k+1, \ldots, i-1\}$ u kojem postoji -1ca.

Ako bi svi retci $i-k+1, \ldots, i-1$ imali jednu 1cu i ostale elemente jednake nuli svaka od tih 1ca bi istivremeno bila i desna i lijeva u svom retku. Zbog svojstva (ii) iz Definicije 2.2.1 slijedi da se svaka 1ca u retcima $i-k+2, \ldots, i-1$ nalazi zdesna 1ce retka iznad. Budući da je $m_{i,j}$ desna 1ca u i-tom retku, slijedi da se nalazi zdesna 1ci u $(i-1)$-om retku. Također, budući da je $m_{i-k,j+1}$ lijeva 1ca u $(i-k)$-tom retku, ona se nalazi slijeva 1ci u $(i-k+1)$-om retku. To bi značilo da se 1ca $m_{i,j}$ nalazi zdesna 1ci $m_{i-k,j+1}$. Očito to nije moguće pa mora postojati redak $i' \in \{i-k+1, \ldots, i-1\}$ u kojemu postoji element jednak -1. Time je dokazana pomoćna tvrdnja PT3.

Neka je $i_m = \max\{i-k+1, \ldots, i-1 : \text{ u } i\text{-tom retku postoji } -1\text{ca } \}$ i $m_{i_m,j_m} = -1$. Budući da je $m_{i,j}$ gornja 1ca u j-tom stupcu vrijedi $j_m \neq j$. Također, $j_m \neq j+1$ jer je $m_{i-k,j+1}$ donja 1ca u $(j+1)$-om stupcu. Dakle, moguća su dva slučaja, $j_m < j$ ili $j_m > j+1$.

Pretpostavimo da je $j_m < j$. U ovom slučaju 1ce koje su pripadajuće -1ci m_{i_m,j_m} gore i slijeva zajedno s $m_{i,j}$ čine relativne pozicije permutacije σ pa je dobivena kontradikcija sa svojstvom (i) iz Definicije 2.2.1.

Pretpostavimo da je $j_m > j+1$. Iz pomoćne tvrdnje PT1 slijedi da njoj pripadajuća 1ca ispod ne može biti niti u jednom od redaka $i+1,\dots,n$. S druge strane, ako je ta 1ca u nekom od redaka $i_m+1,\dots,i-1$, zbog definicije i_m ona je jedinstvena pa tako i lijeva u svom retku. Zbog istih argumenata kao u dokazu PT3 postoji redak $i' \in \{i_m+1,\dots,i-1\}$ u kojem postoji -1ca. To je u kontradikciji s definicijom i_m.

Time je dobivena kontradikcija s pomoćnom tvrdnjom PT3, pa tako i s pretpostavkom da je $j < n$. Dakle, $j = n$.

■

Teorem 2.2.5. Neka je n prirodan broj. Skup $\mathscr{C}$-matrica reda n invarijantan je na transponiranje.

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$ i $M = [m_{i,j}] \in \mathscr{C}_n$ proizvoljno odabrana matrica. Neka je $M^T = [m_{j,i}]$ transponirana matrica matrice M. Budući da je u Propoziciji 2.1.2 pokazano da je svojstvo izbjegavanja permutacije σ invarijantno na transponiranje, još treba pokazati da M^T zadovoljava svojstvo (ii) iz Definicije 2.2.1. Pretpostavimo suprotno, neka je $i_1 < i$ i neka postoje 1ce $m_{j,i} = 1$ i $m_{j+1,i_1} = 1$ u matrici M^T takve da je $m_{j,i}$ lijeva 1ca u j-tom retku i m_{j+1,i_1} desna 1ca u $(j+1)$-om retku. Na Slici 2.8 prikazana su dva retka matrice M^T u kojima se vidi da je desna 1ca u $(j+1)$-om retku slijeva lijevoj 1ci u j-tom retku.

$$\begin{array}{cc}
\begin{matrix} & & i_1 & & & i & & \end{matrix} & \\
\begin{pmatrix}
 & \ddots & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
 & & & & & & & \\
0 & & \cdots & & 0 & 1 & & \\
 & & 1 & 0 & & \cdots & & 0 \\
 & & & & & & & \\
 & & & & & & \ddots &
\end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ \\ j \\ j+1 \\ \\ \\ \end{matrix}
\end{array}$$

Slika 2.8: Položaj 1ca unutar matrice M^T.

Sada te elemente promotrimo unutar matrice M. U M dvije su 1ce, $m_{i,j}$ i $m_{i_1,j+1}$, koje su gornja i donja redom, svaka u svom stupcu. Razlikuju se dva slučaja. Prvi je slučaj kada je $i = n$. Tada je unutar matrice M 1ca u zadnjem retku ujedno i gornja u svom stupcu pa po Lemi 2.2.3, ta 1ca mora biti smještena i u zadnjem stupcu, dakle $j = n$. Međutim, to je u suprotnosti s pretpostavkom da postoji stupac $j+1$.

$$\begin{array}{cc}
\begin{matrix} & & & j & j+1 & j_1 & \end{matrix} & \\
\begin{pmatrix}
 & & & 0 & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & & \vdots & 1 & & \\
 & & & & 0 & & \\
 & & & 0 & & & \\
0 & \cdots & 0 & 1 & & & \\
 & & & & \vdots & 1 & \\
 & & & & & & \ddots \\
 & & & & 0 & &
\end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i_1 \\ \\ \\ i \\ i+1 \\ \\ \\ \end{matrix}
\end{array}$$

Slika 2.9: Položaj 1ca unutar $\mathscr{C}$-matrice M.

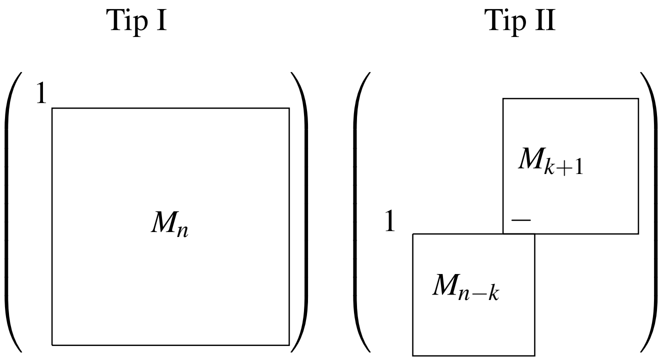
Neka je $i < n$. Iz činjenice da je da je 1ca na poziciji (i, j) u matrici M gornja u svom stupcu pri čemu je $j < n$, po Lemi 2.2.4, slijedi da je $m_{i,j}$ istodobno i lijeva u svom retku. Po svojstvu (ii) Definicije 2.2.1, desna 1ca u retku $i+1$ mora se nalaziti zdesna 1ci $m_{i,j}$, to jest, nalazi se na poziciji $(i+1, j_1)$, gdje je $j+1 \leq j_1$. Budući da je 1ca $m_{i_1,j+1}$ donja u $(j+1)$-om stupcu, nejednakost mora biti stroga, $j+1 < j_1$. Slijedi da 1ce na pozicijama $(i_1, j+1)$, (i,j) i $(i+1, j_1)$ čine relativne pozicije permutacije $\sigma = (213)$. To je u suprotnosti s činjenicom da M izbjegava permutaciju σ. Dakle, skup $\mathscr{C}_n$ invarijantan je na transponiranje. Na Slici 2.9 prikazan je relativni položaj 1ca $m_{i,j}$, $m_{i_1,j+1}$ i m_{i+1,j_1}. ■

Korolar 2.2.6. Neka je n prirodan broj. $\mathscr{C}$-matrica M reda n zadovoljava svojstvo da se donja 1ca u stupcu čiji je redni broj $j+1$ nalazi ispod gornje 1ce u stupcu čiji je redni broj j za svaki $j < n$.

2.2.1. Rekurzivna struktura matrica familije $\mathscr{C}$

U Odjeljku 2.1 pokazana je rekurzivna struktura familije $\mathscr{S}$. Matrice familije $\mathscr{C}$ također imaju rekurzivnu strukturu. Za $n = 1$ jedina $\mathscr{C}$-matrica je jedinična matrica. Za matricu $M = [m_{i,j}]$ reda $n+1$, $n \in \mathbb{N}$, razlikuju se dva slučaja ovisno o rednom broju $k+1$, $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, retka u kojem se nalazi 1ca u prvom stupcu matrice. Na Slici 2.10 prikazana su dva tipa, I i II, koja odgovaraju dvama slučajevima; prvi slučaj se odnosi na $k = 0$, to jest ako je $m_{1,1} = 1$, a drugi slučaj je kada je $m_{k+1,1} = 1$ za $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Kod tipa I, matrica M_n je $\mathscr{C}$-matrica reda n, a kod tipa II, M u $(k+1)$-om retku ima -1cu, $m_{k+1,n-k+1} = -1$, i dvije podmatrice, $M_{k+1} \in \mathscr{C}_{k+1}$ i $M_{n-k} \in \mathscr{C}_{n-k}$, dok su preostali elementi matrice jednaki 0. Ovaj postupak čuva oba svojstva Definicije 2.2.1 i na ovaj način se dobiju sve matrice s alternirajućim predznakom koje pripadaju familiji $\mathscr{C}$. O tome govori Teorem 2.2.7.

Teorem 2.2.7. Neka su n i k prirodni brojevi, $k < n$. Matrica s alternirajućim predznakom M reda $n+1$ je $\mathscr{C}$-matrica ako i samo ako je nastala rekurzijom: za red 1 jedina matrica je jedinična matrica, a za matrice višeg reda vrijedi da im oblik odgovara jednom od tipova I ili II.



Slika 2.10: Dva tipa $\mathscr{C}$-matrica.

Dokaz. Neka je matrica s alternirajućim predznakom M reda $n+1$ dobivena rekurzijom jednim od tipova I ili II, pri čemu su podmatrice M_n, M_{k+1} i M_{n-k} $\mathscr{C}$-matrice čiji je red n, $k+1$ i $n-k$, redom. Budući da je svaka $\mathscr{C}$-matrica istovremeno i $\mathscr{S}$-matrica, iz Teorema 2.1.4 slijedi da su matrice dobivene rekurzijom tipa I i II prikazanih na Slici 2.10 sigurno matrice s alternirajućim predznakom koje izbjegavaju permutaciju (213). Treba još pokazati da matrica M zadovoljava svojstvo *(ii)* Definicije 2.2.1. Za matricu tipa I svojstvo vrijedi budući da vrijedi i u podmatrici M_n. Ako je M matrica tipa II, budući da su podmatrice M_{k+1} i M_{n-k} $\mathscr{C}$-matrice, svi parovi susjednih redaka čiji su redni brojevi elementi jednog od skupova $\{1,\dots,k+1\}$ i $\{k+2,\dots,n+1\}$ zadovoljavaju svojstvo *(ii)* Definicije 2.2.1. Jedino se u paru redaka rednih brojeva $k+1$ i $k+2$ svojstvo *(ii)* ne nasljeđuje iz podmatrica M_{k+1} i M_{n-k}. Međutim, budući da se lijeva 1ca u $(k+1)$-om retku nalazi u prvom stupcu, sigurno joj se desna 1ca u $(k+2)$-om retku nalazi zdesna. Time je pokazano da je svaka matrica tipa I ili II $\mathscr{C}$-matrica reda $n+1$.

Pretpostavimo da je matrica $M \in \mathscr{C}_{n+1}$ proizvoljno odabrana. Treba pokazati da ima oblik jednog od tipova I ili II sa Slike 2.10. Budući da je M $\mathscr{S}$-matrica, iz Teorema 2.1.4 slijedi da M mora biti jednog od tipova I, II, III ili IV sa Slike 2.2. Dokaz se dijeli na dva slučaja ovisno o rednom broju $k+1$ retka u kojem se nalazi 1ca u prvom stupcu.

- $k+1=1$

  M je $\mathscr{S}$-matrica tipa I sa Slike 2.2 koja zadovoljava i svojstvo *(ii)* Definicije 2.2.1. Dakle, podmatrica M_n je $\mathscr{C}$-matrica reda n. Slijedi da je M matrica tipa I sa Slike 2.10.

- $1 < k+1 < n+1$

  M je $\mathscr{S}$-matrica jednog od tipova II, III ili IV sa Slike 2.2. Za matricu tipa II ili III svojstvo *(ii)* Definicije 2.2.1 nije zadovoljeno u paru redaka rednog broja n i $n+1$, odnosno k i

$k+1$. Za matricu tipa IV vrijedi da je svojstvo *(ii)* zadovoljeno ukoliko je zadovoljeno kod podmatrica M_{k+1} i M_{n-k}. Dakle, matrica M je matrica tipa II sa Slike 2.10.

Time je pokazano da je svaka $\mathscr{C}$-matrica reda $n+1$ dobivena rekurzijom jednim od tipova I ili II. ■

Primjer 7. Postoje jedinstvene matrice familije $\mathscr{C}$ reda 1,

$$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

i reda 2,

$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

Dvije su $\mathscr{C}$-matrice reda 3

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & - & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}.$$

Znajući da su to sve $\mathscr{C}$-matrice redova 1, 2 i 3 rekurzija (Teorem 2.2.7) daje sljedeće matrice reda 4,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & - & 1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & 1 & \\ \mathbf{1} & & - & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ \mathbf{1} & - & & 1 \\ & 1 & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & 1 & - & 1 \\ \mathbf{1} & - & 1 & \\ & 1 & & \end{pmatrix}.$$

Prve dvije dobivene matrice reda 4 su matrice tipa I, a ostale su tipa II. Treća matrica dobivena je iz jedinstvene $\mathscr{C}$-matrice reda 2. Postoje dvije mogućnosti za popuniti gornji desni dio matrice dvjema $\mathscr{C}$-matrica reda 3.

Korolar 2.2.8. Neka je M $\mathscr{C}$-matrica. Svi specijalni elementi u matrici M nalaze se ili na sporednoj dijagonali ili ispod nje.

Dokaz. Za matrice tipa I očito je da ako vrijedi za matrice nižeg reda, mora vrijediti i za matricu višeg reda. Također, ako promotrimo strukturu matrica nastalih rekurzijom tipa II lako se vidi da se svojstvo nasljeđuje s matrica nižeg reda. ■

Neka je s E_n označen broj matrica familije $\mathscr{C}_n$, $E_n = |\mathscr{C}_n|$. Proučavajući rekurziju kojom se dobivaju matrice, može se dobiti enumerativna formula za broj $\mathscr{C}$-matrica danog reda. To je poznata konvolucija predstavljena u sljedećem korolaru,

Korolar 2.2.9. Neka je n nenegativan cijeli broj. Broj E_{n+1} $\mathscr{C}$-matrica reda $n+1$ jednak je n-tom Catalanovom broju C_n,

$$E_{n+1} = C_n.$$

Dokaz. Broj matrica reda $n+1$ u skupu $\mathscr{C}$ tipa I jednak je broju svih $\mathscr{C}$-matrica reda n, E_n. Broj matrica reda $n+1$ koje su tipa II jednak je $\sum_{k=1}^{n-1} E_k E_{n-k+1}$ po produktnom pravilu. Budući da je $E_1 = 1$ vrijedi

$$E_{n+1} = E_n + \sum_{k=1}^{n-1} E_k E_{n-k+1} = \sum_{k=1}^{n} E_k E_{n-k+1}.$$

Formula za računanje broja $\mathscr{C}$-matrica reda $n+1$ jednaka je fundamentalnoj rekurziji za definiciju Catalanovih brojeva

$$C_n = \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k}. \tag{2.1}$$

Vrijedi i da je $E_1 = C_0$. Slijedi

$$E_{n+1} = C_n.$$

■

2.2.2. Profinjene enumeracije

Statistika po poziciji 1ce u prvom retku

Iz rekurzivne strukture $\mathscr{C}$-matrica vidljivo je da 1ca u prvom retku matrice može biti u svakom stupcu osim zadnjeg. Neka je n prirodan broj. Promotrimo koliko je $\mathscr{C}$-matrica koje u prvom retku imaju 1cu u k-tom stupcu, $1 \leq k < n$. Neka je broj $\mathscr{C}$-matrica reda n koje u prvom retku imaju 1cu u k-tom stupcu označen s $E_{n,k}$. Iz Primjera 7 se vidi da je $E_{2,1} = 1$, $E_{3,1} = 1$, $E_{3,2} = 1$ te $E_{4,1} = 2$, $E_{4,2} = 1$ i $E_{4,3} = 2$. Štoviše, uvidom u matrice familija $\mathscr{C}_n$ za $n \in \{1, 2, \ldots, 7\}$ dođe se do trokutaste matrice brojeva $E_{n,k}$,

$$\begin{pmatrix}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 2 & & 1 & & 2 & & & & \\
 & & & 5 & & 2 & & 2 & & 5 & & & \\
 & & 14 & & 5 & & 4 & & 5 & & 14 & & \\
 & 42 & & 14 & & 10 & & 10 & & 14 & & 42 & \\
132 & & 42 & & 28 & & 25 & & 28 & & 42 & & 132 \\
 & & & & & & \vdots & & & & & &
\end{pmatrix}.$$

Teorem 2.2 daje eksplicitnu formulu za $E_{n,k}$. U dokazu se koristi eksplicitna formula

$$C_k = \frac{1}{k+1}\binom{2k}{k}$$

za računanje Catalanovih brojeva.

Teorem 2.2.10. Neka su n i k prirodni brojevi, $k < n$. Tada je broj $E_{n,k}$ $\mathscr{C}$-matrica reda n koje u prvom retku imaju 1cu u k-tom stupcu jednak

$$E_{n,k} = \frac{1}{k(n-k)}\binom{2(k-1)}{k-1}\binom{2(n-k-1)}{n-k-1}. \tag{2.2}$$

Dokaz. U slučaju $k = 1$ relacija (2.2) enumerira $\mathscr{C}$-matrice tipa I. Broj $\mathscr{C}$-matrice tipa I reda n jednak je broju svih $\mathscr{C}$-matrica reda $n-1$. Iz Korolara 2.2.9 slijedi da je taj broj jednak $(n-2)$-om Catalanovom broju C_{n-2},

$$\begin{aligned} E_{n,1} &= C_0 C_{n-2} \\ &= \frac{1}{n-1}\binom{2n-4}{n-2}. \end{aligned}$$

Neka je $1 < k < n$. Budući da je familija $\mathscr{C}$ invarijantna na transponiranje, broj $E_{n,k}$ $\mathscr{C}$-matrica koje u prvom retku imaju 1cu u k-tom stupcu jednak je broju $\mathscr{C}$-matrica koje u prvom stupcu imaju 1cu u k-tom retku. Iz strukture matrica tipa II slijedi da je broj $E_{n,k}$ jednak umnošku broja E_k svih $\mathscr{C}$-matrica reda k s brojem E_{n-k} svih $\mathscr{C}$-matrica reda $n-k$,

$$\begin{aligned} E_{n,k} &= C_{k-1} C_{n-k-1} \\ &= \frac{1}{k(n-k)}\binom{2(k-1)}{k-1}\binom{2(n-k-1)}{n-k-1}. \end{aligned}$$

■

Statistika po broju specijalnih elemenata

U Primjeru 7 može se vidjeti da se specijalni element prvi put pojavljuje u jednoj od $\mathscr{C}$-matrica reda 3. Kod $\mathscr{C}$-matrica reda 4 jedna matrica nema niti jednu -1cu, tri matrice imaju po jednu i jedna matrica ima dvije -1ce. Neka je n prirodan broj, $n > 1$ i $0 \leq k < n-1$. Neka je s $E^{-}_{n,k}$ označen broj $\mathscr{C}$-matrica reda n koje imaju k specijalnih elemenata. Ispitujući broj $\mathscr{C}$-matrica reda n koje imaju k specijalnih elemenata za $n \in \{2, 3, \ldots, 7\}$ dobije se trokutasta matrica brojeva

$E^-_{n,k}$,

$$\begin{pmatrix} & & & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 3 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 6 & & 6 & & 1 & & \\ & 1 & & 10 & & 20 & & 10 & & 1 & \\ 1 & & 15 & & 50 & & 50 & & 15 & & 1 \\ & & & & & \vdots & & & & & \end{pmatrix}.$$

Poznato je da Narayanovi brojevi $N(n,k)$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1,\dots,n\}$ formiraju trokutastu matricu prirodnih brojeva čiji se početak podudara s početkom gornje trokutaste matrice. Narayanovi brojevi se pojavljuju u mnogim problemima prebrojavanja. Eksplicitna formula Narayanovih brojeva je

$$N(n,k) = \frac{1}{k}\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k-1}.$$

Teorem 2.2.11. Broj $E^-_{n,k}$ matrica familije $\mathscr{C}_n$ koje imaju k elemenata jednakih -1 jednak je Narayanovom broju $N(n-1,k+1)$, gdje je $n \geq 2$ i $k = 0,1,\dots,n-2$,

$$E^-_{n,k} = N(n-1,k+1).$$

Dokaz. Poznata je rekurzija za Narayanove brojeve

$$N(n,k) = N(n-1,k) + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{k-1} N(i,j)N(n-i-1,k-j) \tag{2.3}$$

za $n > 0$, $1 \leq k \leq n$, s početnim vrijednostima $N(n,k) = 0$ za $k > n$, $n \neq 0$ i $N(0,1) = N(n,1) = N(n,n) = 1$ (M. Zabrocki, 2004, see OEIS). Dakle, može se vidjeti da se element $N(0,1)$ u trokutu Narayanovih brojeva podudara s brojem $E^-_{1,0}$ matrica reda 1 kojima niti jedan element nije jednak -1, $N(0,1) = E^-_{1,0} = 1$. Kao što smo već ustanovili, početak trokuta brojeva $E_{n,k}$ podudara se s početkom trokuta Narayanovih brojeva. Sada ćemo pokazati da brojevi $E^-_{n,k}$ slijede istu rekurziju kao i Narayanovi brojevi, tj. relaciju (2.3). Iz Teorema 2.2.7 izravno slijedi da broj elemenata jednakih -1 unutar $\mathscr{C}$-matrice reda n može biti najviše $n-2$, tj. $0 \leq k < n-1$. Za matricu reda n dobivenu rekurzijom tipa I, broj elemenata jednakih -1 jednak je broju takvih elemenata u podmatrici reda $n-1$ koja se nalazi u donjem desnom kutu, $E^-_{n-1,k}$. Za matricu M tipa II vrijedi da je broj specijalnih elemenata za jedan veći od ukupnog broja specijalnih elemenata dviju podmatrica iz kojih je M rekurzivno dobivena. Slijedi da je broj $E^-_{n,k}$ matrica reda n s k specijalnih elemenata dobiven zbrajanjem

- broja svih matrica reda $n-1$ s k elemenata jednakih -1, i
- sume produkata broja svih matrica reda i s j specijalnih elemenata s brojem svih matrica reda $n-i$ s $k-1-j$ specijalnih elemenata, $i=2,\dots,n-1,\ j=0,\dots,k-1$, to jest
$$\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1} E^-_{i,j}E^-_{n-i,k-1-j}.$$

Dakle, slijedi

$$E^-_{n,k} \quad = \quad E^-_{n-1,k} + \sum_{i=2}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1} E^-_{i,j}E^-_{n-i,k-1-j}.$$

Budući da iz (2.3) slijedi

$$N(n-1,k+1) = N(n-2,k+1) + \sum_{i=2}^{n-1}\sum_{j=0}^{k-1} N(i-1,j+1)N(n-i-1,k-j),$$

tada vrijedi

$$E^-_{n,k} = N(n-1,k+1),$$

gdje je $n \geq 2$, $0 \leq k < n-1$, a time je tvrdnja dokazana. ■

Vrijedi

$$E_n = \sum_{k=0}^{n-2} E^-_{n,k},$$

gdje je

$$E^-_{n,k} = \frac{1}{n-1}\binom{n-1}{k}\binom{n-1}{k-1}.$$

2.2.3. Dijagonalno simetrične $\mathscr{C}$-matrice

U ovom odijeljku promatramo matrice podskupa familije $\mathscr{C}$ koje zadovoljavaju dodatno svojstvo, simetrične su obzirom na glavnu dijagonalu.

Definicija 2.2.12. Neka je n prirodan broj. Matrice s alternirajućim predznakom reda n koje zadovoljavaju svojstva da

(i) izbjegavaju permutaciju (213),

(ii) desna 1ca u $(i+1)$-om retku matrice nalazi se zdesna lijeve 1ce u i-tom retku, $i \in \{1,\dots,n\}$ i

(iii) simetrična je obzirom na glavnu dijagonalu nazivaju se $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}$-matrice reda n. Skup svih $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}$-matrica reda n označen je s $\mathscr{C}_{\mathscr{D}n}$.

Sa $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}$ je označen skup svih $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}$-matrica,

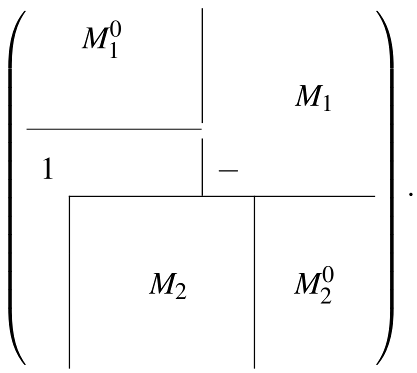
$$\mathscr{C}_{\mathscr{D}} := \{M \in \mathscr{C}_{Dn} : n \in \mathbb{N}\}.$$

Rekurzivna struktura

Budući da je $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}$ podskup familije $\mathscr{C}$, rekurzija kojom se izgrađuju $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}$-matrice bit će podijeljena na dva slučaja; prvi slučaj odnosi se na $\mathscr{C}$-matrice tipa I i drugi na $\mathscr{C}$-matrice tipa II.

Neka je n prirodan broj i M dijagonalno simetrična $\mathscr{C}$-matrica reda $n+1$ tipa I. Izostavljanjem prvog retka i stupca dobije se dijagonalno simetrična $\mathscr{C}$-matrica reda n. Za dijagonalno simetričnu $\mathscr{C}$-matricu tipa I reći ćemo da je $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}$-matrica tipa I. Na Slici 2.12 slijeve strane nalazi se $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}$-matrica reda $n+1$ tipa I, pri čemu je $M_n \in \mathscr{C}_{\mathscr{D}n}$.

U drugom slučaju M je dijagonalno simetrična $\mathscr{C}$-matrica reda $n+1$ tipa II. Struktura matrice M prikazana je na Slici 2.11 pri čemu su podmatrice M_1 i M_2 $\mathscr{C}$-matrice.

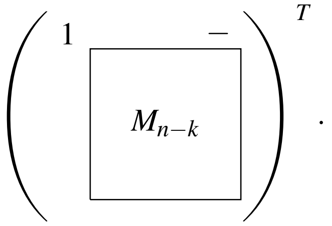


Slika 2.11: Struktura matrice M.

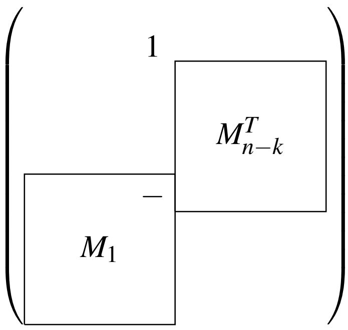
Budući da su podmatrice M_1^0 i M_2^0 nul-matrice i M je simetrična, mora vrijediti da se 1ca u prvom stupcu ne nalazi u nekom od redaka $1,2,\ldots,\lceil\frac{n+2}{2}\rceil-1$, to jest, za red $k+1$ matrice M_1 na Slici 2.11 vrijedi

$$k+1 \in \left\{\left\lceil\frac{n+2}{2}\right\rceil,\ldots,n\right\}. \tag{2.4}$$

Podmatrica M_{n-k} sa Slike 2.10 je reda $n-k$, pa zbog (2.4) slijedi da je red podmatrice M_{k+1} za barem 1 veći od reda matrice M_{n-k}. Iz toga slijedi da M_{n-k} ne prelazi iznad glavne dijagonale, pa na njenom mjestu može biti proizvoljno odabrana matrica familije $\mathscr{C}_{n-k}$. Zbog simetričnosti, matrica M_{k+1} uvjetovana je matricom M_{n-k} pa u gornjem desnom kutu ima podmatricu

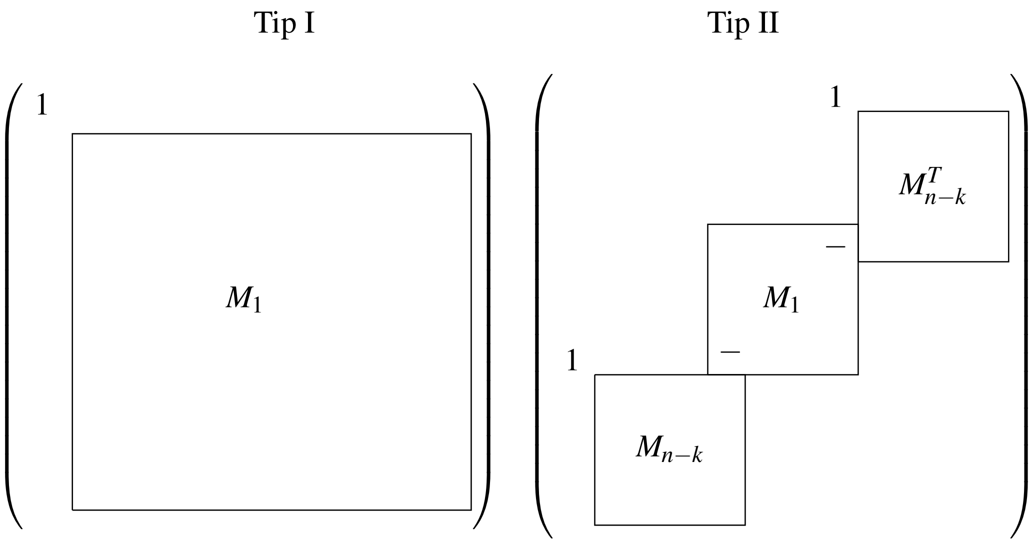


Dakle, M_{k+1} ima oblik



pri čemu je M_1 $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}$-matrica reda $2k-n+1$. Slijedi da M ima oblik tipa II sa Slike 2.12.

Na Slici 2.12 su prikazana dva tipa matrica familije $\mathscr{C}_{\mathscr{D}_{n+1}}$ pri čemu je matrica $M_1 \in \mathscr{C}_{\mathscr{D}}$ proizvoljno odabrana matrica čiji je red kod tipa I jednak n i kod tipa II $2k-n+1$. Matrica $M_{n-k} \in \mathscr{C}_{n-k}$ je također proizvoljno odabrana.



Slika 2.12: Dva tipa $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}$-matrica reda $n+1$.

Eksplicitna formula

Neka je n prirodan broj i neka je s E_{D_n} označen broj $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}$-matrica reda n.

Teorem 2.2.13. Neka je n prirodan broj. Broj $E_{D_{n+1}}$ $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}$-matrica reda $n+1$ jednak je

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Dokaz. Dokaz se provodi indukcijom po redu matrice n. Iz Primjera 7 vidi se da tvrdnja vrijedi za $n \in \{1,2,3,4\}$. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za svaki m, $m \leq n$, to jest da je broj $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}$-matrica reda m

$$E_{Dm} = \binom{m-1}{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor}.$$

Broj $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}$-matrica reda $n+1$ tipa I jednak broju svih $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}$-matrica reda n, E_{D_n}. Dakle, po pretpostavci indukcije jednak je $\binom{n-1}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$.

U matrici tipa II na poziciju podmatrice M_{n-k} može doći svaka matrica familije $\mathscr{C}_{n-k}$, a takvih je po Teoremu 2.2.9 ukupno C_{n-k-1}. Za svaku od njih, na poziciju M_1 može doći svaka matrica familije $\mathscr{C}_{\mathscr{D}_{2k-n+1}}$. Po pretpostavci indukcije, ukupan broj takvih matrica je $\binom{2k-n}{\lfloor \frac{2k-n}{2} \rfloor}$. Iz toga slijedi da je ukupan broj $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}$-matrica tipa II reda $n+1$ jednak

$$\sum_{k=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n-1} \frac{1}{n-k} \binom{2(n-k-1)}{n-k-1} \binom{2k-n}{\lfloor \frac{2k-n}{2} \rfloor}$$

pa je

$$E_{D_{n+1}} = \binom{n-1}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} + \sum_{k=\lceil \frac{n}{2} \rceil}^{n-1} \frac{1}{n-k} \binom{2(n-k-1)}{n-k-1} \binom{2k-n}{\lfloor \frac{2k-n}{2} \rfloor}.$$

Pretpostavimo da je $n+1$ neparan. Tada je

$$\begin{aligned} E_{Dn+1} = & \binom{n-1}{\frac{n-2}{2}} + \sum_{k=\frac{n}{2}}^{n-1} \frac{1}{n-k} \binom{2(n-k-1)}{n-k-1} \binom{2k-n}{\frac{2k-n}{2}} \\ = & \binom{n-1}{\frac{n}{2}-1} + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2(\frac{n}{2}-1-k)}{\frac{n}{2}-1-k} \end{aligned} \tag{2.5}$$

N. Batir, H.Küçük i S.Sorgan su u [30] 2021. dokazali identitet

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2(n-k)}{n-k} = \frac{1}{2} \binom{2(n+1)}{n+1}, \tag{2.6}$$

i kada se 2.6 primjeni na jednakost 2.5 dobije se

$$\begin{aligned} E_{Dn+1} &= \binom{n-1}{\frac{n}{2}-1} + \frac{1}{2}\binom{n}{\frac{n}{2}} \\ &= 2\binom{n-1}{\frac{n}{2}-1} \\ &= \binom{n}{\frac{n}{2}} \end{aligned}$$

Dakle, tvrdnja vrijedi kada je $n+1$ neparan broj.

Neka je $n+1$ paran broj. Tada je

$$\begin{aligned} E_{Dn+1} = & \binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} + \sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n-1} \frac{1}{n-k} \binom{2(n-k-1)}{n-k-1} \binom{2k-n}{\frac{2k-n-1}{2}} \\ = & \binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} + \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{2(\frac{n-1}{2}-1-k)+1}{\frac{n-1}{2}-1-k}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Budući da za binomne koeficijente vrijedi

$$\binom{2n+1}{n} = \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n} + \left(\binom{2n}{n} - \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \right) \tag{2.8}$$

uvrštavanjem 2.8 u jednakost 2.7 dobije se

$$\begin{aligned} E_{Dn+1} = & \binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} + \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1} \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \left(\binom{2(\frac{n-1}{2}-1-k)}{\frac{n-1}{2}-1-k} + \binom{2(\frac{n-1}{2}-1-k)}{\frac{n-1}{2}-1-k} \right. \\ & \left. - \frac{1}{\frac{n-1}{2}-k} \binom{2(\frac{n-1}{2}-1-k)}{\frac{n-1}{2}-1-k} \right). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Budući da za Catalanove brojeve C_n vrijedi

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}, \tag{2.10}$$

ako se na jednakost 2.9 primjene identiteti 2.10 i 2.6, dobije se

$$\begin{aligned} E_{Dn+1} = & \binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} + \frac{1}{2}\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} + \frac{1}{2}\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} \\ & - \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1} \frac{1}{(k+1)(\frac{n-1}{2}-1-k+1)} \binom{2k}{k} \binom{2(\frac{n-1}{2}-1-k)}{\frac{n-1}{2}-1-k} \\ = & \binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} + \binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} - \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1} C_k C_{\frac{n-1}{2}-1-k} \\ = & 2\binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} - C_{\frac{n-1}{2}} \\ = & \binom{n-1}{\frac{n-1}{2}} + \binom{n-1}{\frac{n-1}{2}-1} \\ = & \binom{n}{\frac{n-1}{2}}. \end{aligned}$$

Dakle, tvrdnja teorema vrijedi i za slučaj kada je $n+1$ paran. ■

Profinjene enumeracije

Neka je n prirodan broj i $k \in \{1,2,\ldots,n\}$. Neka je s $E_{D_{n,k}}$ označen broj $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}$-matrica reda n čija se 1ca u prvom retku nalazi u k-tom stupcu. Promotrajući matrice familije $\mathscr{C}_{\mathscr{D}_n}$ za prvih nekoliko redova

- Za $n = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$$

- za $n = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- za $n = 3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & - & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- za $n = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & - & 1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & 1 & - & 1 \\ 1 & - & 1 & \\ & 1 & & \end{pmatrix}$$

- za $n = 5$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & & 1 & \\ & & 1 & - & 1 \\ & & & 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & & & 1 & \\ & & 1 & - & 1 \\ & 1 & - & 1 & \\ & & 1 & & \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 1 & & - & & 1 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & & 1 & \\ & 1 & & - & 1 \\ & & 1 & & \\ 1 & - & & 1 & \\ & 1 & & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & & 1 & \\ & & 1 & - & 1 \\ & 1 & - & 1 & \\ 1 & - & 1 & & \\ & 1 & & & \end{pmatrix},$$

može se vidjeti da trokutasta matrica brojeva $E_{D_{n,k}}$ započinje s

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 2 & & 0 & & 1 & \\ 3 & & 0 & & 1 & & 2 \\ & & & \vdots & & & \end{array} .$$

Iz rekurzivne strukture slijedi da je broj $E_{D_{n,1}}$ jednak broju $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}$-matrica tipa I, $E_{D_{n-1}}$. U slučaju kada je $k > 1$ zbog (2.4) vrijedi da je broj $E_{D_{n,k}} = 0$ za

$$k \in \left\{2, 3, \ldots, \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil - 1\right\}.$$

Neka je

$$\left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil \leq k \leq n. \tag{2.11}$$

Vrijedi da je 1ca u prvom retku matrice M 1ca čiji položaj nužno određuje red podmatrice M_{n-k}^T matrice tipa II na Slici 2.12. Budući da Slika 2.12 prikazuje matrice reda $n+1$ dok se ovdje promatraju matrice reda n očito je da ako se 1ca u prvom retku nalazi u k-tom stupcu, podmatrica označena s M_1 nužno je reda $2k-n$ i na tu poziciju može doći proizvoljno odabrana $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}$-matrica. Na poziciju matrice M_{n-k}^T može doći proizvoljno odabrana matrica familije $\mathscr{C}_{n-k}$. Iz toga slijedi da je ukupan broj matrica familije $\mathscr{C}_{\mathscr{D}_n}$ koje u prvom retku imaju 1cu u k-tom stupcu jednak $E_{n-k}E_{D_{2k-n}}$, to jest

$$E_{D_{n,k}} = \frac{1}{n-k}\binom{2(n-k-1)}{n-k-1}\binom{2k-n-1}{\left\lfloor \frac{2k-n-1}{2} \right\rfloor}$$

pri čemu vrijedi (2.11).

Time je dokazan Teorem 2.2.14.

Teorem 2.2.14. Neka su n i k prirodni brojevi, $k < n$. Broj $E_{D_{n,k}}$ matrica familije $\mathscr{C}_{\mathscr{D}_n}$ kojima se 1ca u prvom retku nalazi u k-tom stupcu jednak je

$$E_{D_{n,k}} = \begin{cases} \dbinom{n-2}{\left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor}, & k = 1, \\ 0, & k \in \left\{2, 3, \ldots, \left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil - 1\right\}, \\ \dfrac{1}{n-k}\dbinom{2(n-k-1)}{n-k-1}\dbinom{2k-n-1}{\left\lfloor \frac{2k-n-1}{2} \right\rfloor}, & k \in \left\{\left\lceil \frac{n+2}{2} \right\rceil, \ldots, n-1\right\}. \end{cases}$$

2.2.4. Međusobno simetrične familije

Budući da su matrice s alternirajućim predznakom invarijantne na zrcalnu simetriju, definirat ćemo novu podfamiliju sa svojstvima simetričnim svojstvima familije $\mathscr{C}_n$.

Definicija 2.2.15. Neka je n prirodan broj. Matrice s alternirajućim predznakom reda n koje zadovoljavaju svojstva da

(i) izbjegavaju permutaciju (231) i

(ii) lijeva 1ca u retku $i+1 \geq 2$ nalazi se slijeva desnoj 1ci u i-tom retku, $i < n$,

nazivaju se $\mathscr{C}^2$- matrice reda n. Skup svih $\mathscr{C}^2$- matrica reda n označen je sa $\mathscr{C}^2_n$.

Sa $\mathscr{C}^2$ je označen skup $\mathscr{C}^2$-matrica bilo kojeg reda,

$$\mathscr{C}^2 := \{M \in \mathscr{C}^2_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Na isti način definiraju se i sljedeće dvije familije, $\mathscr{C}^3$ i $\mathscr{C}^4$. Matrica s alternirajućim predznakom M reda n pripada familiji $\mathscr{C}^3_n$ ako izbjegava permutaciju $\sigma = (312)$ i zadovoljava svojstvo *(ii)* Definicije 2.2.15. Matrica s alternirajućim predznakom M reda n pripada familiji $\mathscr{C}^4_n$ ako izbjegava permutaciju $\sigma = (132)$ i zadovoljava svojstvo *(ii)* Definicije 2.2.1.

$$\begin{array}{c:c}
\begin{pmatrix} & & & 1 & \\ 1 & & & - & 1 \\ & & 1 & & \\ & 1 & - & 1 & \\ & & 1 & & \end{pmatrix} &
\begin{pmatrix} & 1 & & & \\ 1 & - & & & 1 \\ & & 1 & & \\ & 1 & - & 1 & \\ & & 1 & & \end{pmatrix} \\
\hdashline
\begin{pmatrix} & & 1 & & \\ & 1 & - & 1 & \\ & & 1 & & \\ 1 & & & - & 1 \\ & & & 1 & \end{pmatrix} &
\begin{pmatrix} & & 1 & & \\ & 1 & - & 1 & \\ & & 1 & & \\ 1 & - & & & 1 \\ & 1 & & & \end{pmatrix}
\end{array}$$

Slika 2.13: Osne i centralna simetrija među $\mathscr{C}$-familijama matrica.

Slika 2.13 prikazuje četiri matrice koje pripadaju familijama $\mathscr{C}_5$ i $\mathscr{C}_5^k$, $k \in \{2,3,4\}$ i nalaze se u drugom, prvom, trećem i četvrtom kvadrantu, redom. Na ovom primjeru se vidi vertkalna i horizontalna, te centralna simetrija između odgovarajućih matrica. Svojstva matrica sa slike vrijede i općenito:

Propozicija 2.2.16. Neka je n prirodan broj. Matrica M' koja je vertikalno simetrična matrici $M \in \mathscr{C}_n$ pripada familiji $\mathscr{C}_n^2$. Matrica M'' koja je horizontalno simetrična matrici M pripada familiji $\mathscr{C}_n^3$ i na posliijetku, matrica M''' koja je centralno simetrična matrici M pripada familiji $\mathscr{C}_n^4$.

Dokaz. Tvrdnja se dokazuje kontradikcijom. Iz Propozicije 1.0.5 slijedi da su matrice M', M'' i M''' također matrice s alternirajućim predznakom. Ako matrica M' sadrži permutaciju $\sigma = (231)$ po onda postoje

$$m_{i,j'} = m_{i',j''} = m_{i'',j} = 1$$

gdje je

$$i < i' < i'', \text{ i } \quad j < j' < j''$$

pa u matrici M postoje elementi takvi da vrijedi

$$m_{i,n-j'+1} = m_{i',n-j''+1} = m_{i'',n-j+1} = 1$$

gdje je

$$n - j'' + 1 < n - j' + 1 < n - j + 1, \text{ i } \quad i < i' < i''.$$

Po Propoziciji 2.0.3 slijedi da matrica M sadrži permutaciju $\sigma = (213)$. To je u kontradikciji s činjenicom da je M $\mathscr{C}$-matrica. Dakle, M' izbjegava permutaciju $\sigma = (231)$.

Na sličan način se dokaže da matrice M'' i M''' izbjegavaju permutacije $\sigma = (312)$ i $\sigma = (132)$, redom.

Pretpostavimo da matrica M' ne zadovoljava svojstvo (ii) Definicije 2.2.15, to jest da u matrici M' postoji $i \in \{1,\dots,n-1\}$ takav da je m'_{i+1,j_1} lijeva 1-ica u retku i da je m'_{i,j_2} desna 1-ica u retku, pri čemu je $j_1 > j_2$. Tada u matrici M vrjedi da je $m_{i+1,n-j_1+1}$ desna 1-ica u retku i $m_{i,n-j_2+1}$ lijeva 1-ica u retku. Budući da je $j_1 > j_2$ slijedi da matrica M ne zadovoljava uvjet (ii) Definicije 2.2.1 što je u suprotnosti s pretpostavkom da je $M \in \mathscr{C}_n$. Na analogan način može se pokazati da matrica M'' zadovoljava svojstvo (ii) Definicije 2.2.15 i matrica M''' zadovoljava svojstvo (ii) Definicije 2.2.1. ■

Korolar 2.2.17. Matrice familije $\mathscr{C}_n^2$ centralno su simetrične matricama familije $\mathscr{C}_n^3$ i horizontalno simetrične matricama familije $\mathscr{C}_n^4$. Matrice familija $\mathscr{C}_n^3$ i $\mathscr{C}_n^4$ međusobno su vertikalno simetrične.

Dakle, na temelju matrica samo jedne od četiri familije, mogu se generirati matrice ostalih familija koristeći vertikalnu, horizontalnu i centralnu simetriju.

2.3. DIJAGONALNO SIMETRIČNE $\mathscr{S}$-MATRICE

U ovom odjeljku promatrat ćemo podskup matrica s alternirajućim predznakom koje izbjegavaju permutaciju $\sigma = (213)$ imaju i dodatno svojstvo, simetrične su obzirom na glavnu dijagonalu.

Definicija 2.3.1. Neka je n prirodan broj. Matrice s alternirajućim predznakom reda n koje zadovoljavaju svojstva da

(i) izbjegavaju permutaciju (213) i

(ii) simetrične su obzirom na glavnu dijagonalu

nazivaju se $\mathscr{D}$- matrice reda n. Skup svih $\mathscr{D}$- matrica reda n označen je sa $\mathscr{D}_n$.

Skup svih $\mathscr{D}$-matrica označen je s $\mathscr{D}$,

$$\mathscr{D} := \{M \in \mathscr{D}_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

2.3.1. Rekurzivna struktura matrica familije $\mathscr{D}$

$\mathscr{D}$-matrice imaju rekurzivnu strukturu. Slika 2.14 prikazuje četiri tipa matrica skupa $\mathscr{D}$ i u nastavku je dan opis za svaki od tipova.

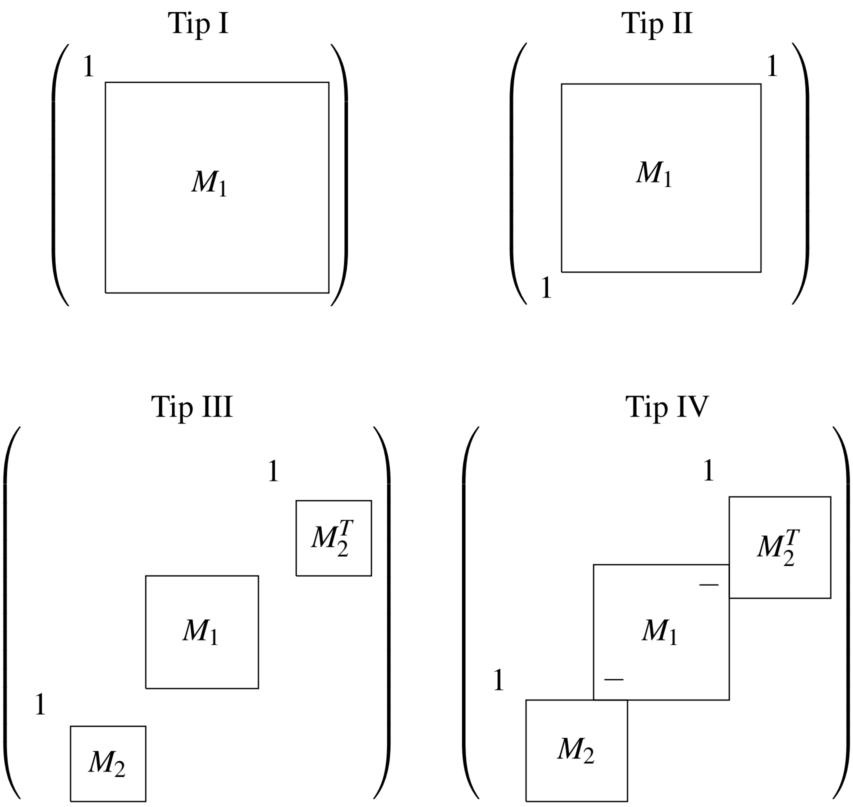
Za matricu $M = [m_{i,j}]$ reda $n+1$ tipa I vrijedi da je $m_{1,1} = 1$ i podmatrica M_1 je $\mathscr{D}$-matrica reda n.

Ako je M matrica tipa II, onda je $m_{n+1,1} = m_{1,n+1} = 1$ i podmatrica M_1 je $\mathscr{D}$-matrica reda $n-1$.

Kod tipa III vrijedi da je $m_{k+1,1} = m_{1,k+1} = 1$, $k \in \{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil, \dots, n-1\}$, i da su svi preostali elementi u $(k+1)$-om retku i $(k+1)$-om stupcu jednaki nuli. Podmatrica M_1 je $\mathscr{D}$-matrica reda $2k-n-1$ i M_2 je $\mathscr{S}$-matrica reda $n-k$. Ostali elementi matrice M u ovom slučaju jednaki su nuli.

Za matrice tipa IV vrijedi da je $m_{k+1,1} = m_{1,k+1} = 1$, $k \in \{\lceil \frac{n}{2} \rceil, \dots, n-1\}$, i $m_{k+1,n-k+1} = m_{n-k+1,k+1} = -1$. Podmatrica M_1 je $\mathscr{D}$-matrica reda $2k-n+1$ koja na pozicijama $(2k-n+1,1)$ i $(1,2k-n+1)$ ima nulu, to jest M_1 je $\mathscr{D}$-matrica jednog od tipova I, III ili IV. Podmatrica M_2 je $\mathscr{S}$-matrica reda $n-k$ i ostali elementi matrice M jednaki su nuli.

$\mathscr{D}$-matrica reda 1 je jedinična matrica, a $\mathscr{D}$- matrice višeg reda imaju oblik jednog od četiri tipa sa Slike 2.14. U nastavku se dokazuje rekurzivna struktura $\mathscr{D}$-matrica.



Slika 2.14: Četiri tipa $\mathscr{D}$-matrica reda $n+1$.

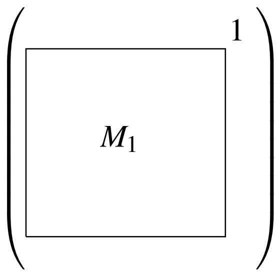
Teorem 2.3.2. Neka n prirodan broj. Matrica M je dijagonalno simetrična matrica s alternirajućim predznakom reda $n+1$ koja izbjegava permutaciju $\sigma = (213)$ ako i samo ako je dobivena rekurzijom: za red $n+1=1$ jedinična matrica i za $n+1>1$ vrijedi da joj oblik odgovara jednom od tipova I, II, III ili IV.

Dokaz. Neka je M_1 $\mathscr{D}$-matrica i M_2 $\mathscr{S}$-matrica takve da za svaki od tipova I, II, III i IV na Slici 2.14 zadovoljavaju svojstva navedena u opisu za Sliku 2.14. Tada je svaka matrica dobivena jednim od četiri navedena tipa simetrična matrica s alternirajućim predznakom. Zbog položaja podmatrica M_1, M_2 i M_2^T kod svakog od tipova I, II, III i IV, te činjenice da svaka od njih izbjegava permutaciju σ, matrice dobivene na ovaj način također izbjegavaju permutaciju σ. Dakle, svaka matrica reda $n+1$, $n \in \mathbb{N}$, dobivena rekurzijom jednim od četiri tipa sa Slike 2.14 je $\mathscr{D}$-matrica reda $n+1$.

Neka je $M = [m_{i,j}]$ $\mathscr{D}$-matrica reda $n+1$. Svaka $\mathscr{D}$-matrica ujedno je i $\mathscr{S}$-matrica pa M mora imati oblik jednog od četiri tipa prikazana na Slici 2.2.

Ako je matrica M $\mathscr{S}$-matrica tipa I onda je simetrična ako i samo ako je podmatrica koja je na Slici 2.2 označena s M_n $\mathscr{D}$-matrica reda n. Tada je matrica M $\mathscr{D}$-matrica tipa I prikazanog na Slici 2.14.

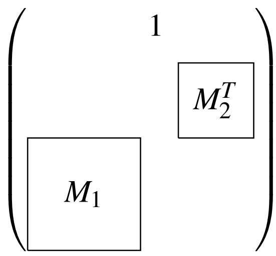
Za matricu M koja je $\mathscr{S}$-matrica tipa II, vrijedi da je simetrična ako i samo ako podmatrica koja je na Slici 2.2 označena s M_n, ima oblik



,

pri čemu je podmatrica M_1 $\mathscr{D}$-matrica reda $n-1$. Tada je matrica M tipa II prikazanog na Slici 2.14.

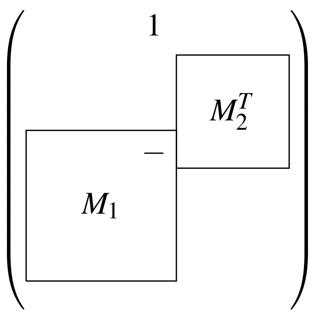
Neka je M $\mathscr{S}$-matrica tipa III. M je simetrična ako i samo ako podmatrica M_k sa Slike 2.2 ima oblik



,

pri čemu M_2 odgovara podmatrici M_{n-k} i M_1 je $\mathscr{D}$-matrica reda $2k-n-1$. Matrica M je tipa III sa Slike 2.14.

U slučaju da je M $\mathscr{S}$-matrica tipa IV, M je simetrična ako i samo ako vrijedi da podmatrica koja je na Slici 2.2 označena s M_{k+1} ima oblik



,

pri čemu je matrica M_2 jednaka podmatrici M_{n-k}. Podmatrica M_1 je $\mathscr{D}$-matrica reda $2k-n+1$ koja na pozicijama $(2k-n+1,1)$ i $(1,2k-n+1)$ nema 1cu. Dakle, M_1 ne može biti $\mathscr{D}$-matrica tipa II. U tom je slučaju M tipa IV sa Slike 2.14. Time je dokazana tvrdnja. ■

Primjer 8. Jedina $\mathscr{D}$-matrica reda 1 je jedinična matrica $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$. Rekurzijom se dobiju dvije $\mathscr{D}$-matrice reda 2, redom,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \\ & 1 \end{pmatrix} \; i \; \begin{pmatrix} & 1 \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix},$$

prva je matrica tipa I i druga je matrica tipa II. Nadalje, iz dviju matrica reda 2 rekurzijom se dobiju dvije matrice tipa I reda 3,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix},$$

iz jedinične matrice jedna $\mathscr{D}$-matrica tipa III i jedna tipa IV,

$$\begin{pmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ \mathbf{1} & & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} & 1 & \\ \mathbf{1} & - & 1 \\ & 1 & \end{pmatrix}.$$

Analognim postupkom dobiju se četiri $\mathscr{D}$-matrice tipa I reda 4, dvije $\mathscr{D}$-matrice tipa II i po jedna matrica tipa III i IV,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & - & 1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ \mathbf{1} & & & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ \mathbf{1} & & & \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ \mathbf{1} & & & \\ & 1 & & \end{pmatrix} \; i \; \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & 1 & - & 1 \\ \mathbf{1} & - & 1 & \\ & 1 & & \end{pmatrix}.$$

Neka je n prirodan broj i neka je s D_n označen broj dijagonalno simetričnih matrica s alternirajućim predznakom koje izbjegavaju permutaciju (213), $D_n := |\mathscr{D}_n|$.

Teorem 2.3.3. Neka je n prirodan broj. Za broj D_{n+1} dijagonalno simetričnih matrica s alternirajućim predznakom koje izbjegavaju permutaciju (213) vrijedi rekurzivna formula

$$D_{n+1} = D_n + D_{n-1} + \sum_{k=0}^{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil - 2} D_{2k+i} S_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil - 2 - k} \tag{2.12}$$

pri čemu je $n > 1$, S_n n-ti Schröderov broj i

$$i = \begin{cases} 1, & \text{za } n \text{ paran} \\ 2, & \text{za } n \text{ neparan.} \end{cases}$$

Dokaz. Dokaz se provodi indukcijom. Broj D_1 $\mathscr{D}$-matrica reda 1 jednak je 1, a za red 2 postoje dvije matrice, $D_2 = 2$. Vrijedi

$$D_3 = D_2 + D_1 + D_1 S_0 = 2 + 1 + 1 \cdot 1 = 4.$$

Neka je n proizvoljno odabran prirodan broj. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za svaki prirodan broj manji od n, to jest

$$D_{m+1} = D_m + D_{m-1} + \sum_{k=0}^{\lceil \frac{m+1}{2} \rceil - 2} D_{2k+i} S_{\lceil \frac{m+1}{2} \rceil - 2 - k}$$

za svaki prirodan broj $m < n$. Broj dijagonalno simetričnih matrica s alternirajućim predznakom reda $n+1$ koje izbjegavaju permutaciju (213) jednak je zbroju brojeva matrica tipa I, II, III i IV sa Slike 2.14.

Broj matrica tipa I jednak je broju svih $\mathscr{D}$-matrica reda n, D_n. Broj matrica tipa II jednak je broju svih $\mathscr{D}$-matrica reda $n-1$, D_{n-1}.

Za matrice tipa III i IV enumeraciju dijelimo na dva slučaja, obzirom na parnost broja $n+1$.

- $n+1$ je paran broj

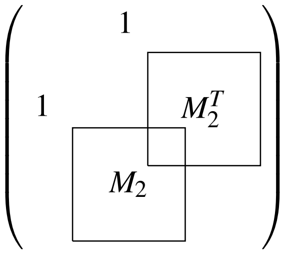
  Broj $\mathscr{D}$-matrica tipa III dobije se množenjem ukupnog broja $\mathscr{D}$-matrica M_1 reda $2k-n-1$, D_{2k-n-1}, s ukupnim brojem $\mathscr{S}$-matrica M_2 reda $n-k$, S_{n-k-1} i sumiranjem umnožaka za svaki k. U ovom slučaju mora vrijediti da je $k \in \{\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}+1, \ldots, n-1\}$. U suprotnom bi red podmatrice M_1 bio jednak

  $$2k - n - 1 < 2 \cdot \frac{n+1}{2} - n - 1 = 0$$

  a to nije moguće. Dakle, ukupan broj $\mathscr{D}$-matrica tipa III reda $n+1$ jednak je

  $$\sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n-1} D_{2k-n-1} S_{n-k-1} = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1} D_{2k} S_{\frac{n-1}{2}-1-k}.$$

Za slučaj kada je matrica M tipa IV parnog reda $n+1$ vrijedi da je podmatrica M_1 parnog reda $2k-n+1 \geq 2$. Naime, ako bi bilo da je red matrice M_1 jednak nuli, tada bi matrica M imala strukturu



a to nije moguće jer ovakva matrica nije matrica s alternirajućim predznakom. Broj $\mathscr{D}$-matrica tipa IV dobije se tako da se pomnoži broj svih $\mathscr{D}$-matrica M_1 reda $2k-n+1$ koje na pozicijama $(2k-n+1,1)$ i $(1,2k-n+1)$ nemaju 1cu, $D_{2k-n+1}-D_{2k-n-1}$, s ukupnim brojem svih $\mathscr{S}$-matrica M_2 reda $n-k$, S_{n-k-1}, te umnoške sumiramo za svaki k. Iz strukture matrica tipa IV također slijedi da je $k \in \{\frac{n+1}{2}, \frac{n+1}{2}+1, \ldots, n-1\}$. Naime, ako bi vrijedilo da je $k < \frac{n+1}{2}$ tada bi red podmatrice M_1 bio

$$2k-n+1 < 2 \cdot \frac{n+1}{2} - n + 1 = 2,$$

a to nije moguće. Dakle, ukupan broj $\mathscr{D}$-matrica tipa IV reda $n+1$ kada je $n+1$ paran broj jednak je

$$\sum_{k=\frac{n+1}{2}}^{n-1} (D_{2k-n+1} - D_{2k-n-1}) S_{n-k-1} = \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1} (D_{2k} - D_{2k-2}) S_{\frac{n-1}{2}-1-k}.$$

Slijedi da je ukupan broj $\mathscr{D}$-matrica reda $n+1$ jednak

$$\begin{aligned} D_{n+1} &= D_n + D_{n-1} + \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1} D_{2k} S_{\frac{n-1}{2}-1-k} + \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1} (D_{2k+2} - D_{2k}) S_{\frac{n-1}{2}-1-k} \\ &= D_n + D_{n-1} + \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}-1} D_{2k+2} S_{\frac{n-1}{2}-1-k} \\ &= D_n + D_{n-1} + \sum_{k=0}^{\frac{n+1}{2}-2} D_{2k+2} S_{\frac{n+1}{2}-2-k}. \end{aligned}$$

Time je tvrdnja dokazana za slučaj kada je $n+1$ paran broj.

- $n+1$ je neparan broj

Kada je $n+1$ neparan, broj $\mathscr{D}$-matrica tipa III dobije se na analogan način kao i u slučaju za $n+1$ paran, s razlikom da je $k \in \{\frac{n+2}{2}, \frac{n+2}{2}+1, \ldots, n-1\}$, dok je red $2k-n-1$ matrice M_1 ovog puta neparan broj veći ili jednak 1. Dakle, ukupan broj $\mathscr{D}$-matrica reda $n+1$ tipa III jednak je

$$\sum_{k=\frac{n+2}{2}}^{n-1} D_{2k-n-1} S_{n-k-1} = \sum_{k=1}^{\frac{n-2}{2}} D_{2k-1} S_{\frac{n-2}{2}-k}.$$

Neka je $D_n = 0$ za svaki $n \leq 0$. Tada se može pisati da je broj $\mathscr{D}$-matrica neparnog reda $n+1$ tipa III jednak

$$\sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} D_{2k-1} S_{\frac{n-2}{2}-k}.$$

Broj $\mathscr{D}$-matrica tipa IV također se dobije na analogan način kao i u parnom slučaju,

$$\sum_{k=\frac{n}{2}}^{n-1} (D_{2k-n+1} - D_{2k-n-1}) S_{n-k-1} = \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} (D_{2k+1} - D_{2k-1}) S_{\frac{n-2}{2}-k}.$$

Dakle, ukupan broj $\mathscr{D}$-matrica neparnog reda $n+1$ jednak je

$$\begin{aligned}
D_{n+1} &= D_n + D_{n-1} + \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} D_{2k-1} S_{\frac{n-2}{2}-k} + \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} (D_{2k+1} - D_{2k-1}) S_{\frac{n-2}{2}-k} \\
&= D_n + D_{n-1} + \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} D_{2k+1} S_{\frac{n-2}{2}-k} \\
&= D_n + D_{n-1} + \sum_{k=0}^{\frac{n+2}{2}-2} D_{2k+1} S_{\frac{n+2}{2}-2-k}.
\end{aligned}$$

Time je tvrdnja dokazana za slučaj kada je $n+1$ neparan broj.

■

2.4. Familija Fuss - Catalanovih matrica s alternirajućim predznakom

U ovom odjeljku proučavamo familiju matrica s alternirajućim predznakom reda $n = 2r + 1$, $r \in \mathbb{N}_0$, koja nasljeđuje definicijske uvjete familije $\mathscr{C}_n$ i ima dodatni uvjet; da se svi specijalni elementi koji se pojavljuju nužno nalaze u stupcima čiji je redni broj neparan.

Definicija 2.4.1. Neka je n prirodan broj i $M = [m_{i,j}]$ $\mathscr{C}$-matrica reda n. Element $m_{i,j} = 1$ matrice M naziva se *jugoistočna* $1ca$, (JI 1ca), matrice M ako je desna i nije lijeva u i-tom retku ili ako je $i = n$.

Primjerice, u matrici

$$\begin{pmatrix} & & & & & 1 & \\ & & & & 1 & - & \mathbf{1} \\ 1 & & & & - & \mathbf{1} & \\ & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & 1 & - & & \mathbf{1} & & \\ & & \mathbf{1} & & & & \end{pmatrix}$$

istaknute 1ce su JI 1ce.

Definicija 2.4.2. Neka je r nenegativan cijeli broj i neka je $n = 2r + 1$. Matrice s alternirajućim predznakom reda n koje zadovoljavaju svojstva da

(i) izbjegavaju permutaciju (213),

(ii) desna 1ca u retku $i + 1 \geq 2$ nalazi se zdesna lijevoj 1ci u i-tom retku, $i < n$ i

(iii) za svaku jugoistočnu 1cu $m_{i,j} = 1$ vrijedi da je $1 \equiv (j \mod 2)$

nazivaju se $\mathscr{F}$- matrice reda n. Skup svih $\mathscr{F}$- matrica reda n označen je sa $\mathscr{F}_n$.

Sa $\mathscr{F}$ je označen skup svih $\mathscr{F}$-matrica

$$\mathscr{F} := \{M \in \mathscr{F}_{2r+1} : r \in \mathbb{N}\}.$$

Propozicija 2.4.3. Neka je r nenegativan cijeli broj i neka je $n = 2r + 1$. $\mathscr{C}$- matrica M reda n zadovoljava svojstvo (iii) Definicije 2.4.2 ako i samo ako se svaka -1ca u M nalazi u stupcu čiji je redni broj neparan.

Dokaz. Neka je $M = [m_{i,j}]$ proizvoljno odabrana $\mathscr{C}$-matrica reda n koja zadovoljava svojstvo (iii) Definicije 2.4.2. Neka je $m_{i,j} = -1$ proizvoljno odabrana -1ca matrice M. Elementu $m_{i,j}$ pripadajuća 1ca $m_{i_1,j}$ ispod, nužno je JI 1ca. Naime, ako je $m_{i_1,j}$ lijeva u svom retku, budući da nije gornja u j-tom stupcu, po Propoziciji 2.2.2 slijedi da je $i_1 = n$, to jest, $m_{i_1,j}$ je JI 1ca. S druge strane, ako nije lijeva, nužno je desna, pa je tada po definiciji JI 1ca. Dakle, svaka -1ca nalazi se u stupcu jugoistočne 1ce, dakle u stupcu čiji je redni broj neparan.

Neka se svaka -1ca $\mathscr{C}$-matrice M reda $n = 2r + 1$ nalazi u stupcu čiji je redni broj neparan. Svaka jugoistočna 1ca nalazi se ispod -1ce ili u n-tom stupcu. Naime, ako se JI 1ca $m_{i,j}$ ne nalazi ispod -1ce, ona je gornja u svom stupcu. Ako je $i = n$, po Lemi 2.2.3 M je jedinična matrica i jedina JI 1ca jest $m_{n,n}$. Dakle, JI 1ca se nalazi u n-tom stupcu. Ako je $i < n$, po definiciji slijedi da $m_{i,j}$ nije lijeva. Po Lemi 2.2.4 slijedi da je $j = n$, to jest, JI 1ca se nalazi n-tom stupcu. Dakle, JI 1ca nalazi se ispod -1ce ili u n-tom stupcu. Budući da je n neparan i da se svaka -1ca nalazi u stupcu neparnog rednog broja slijedi da M zadovoljava svojstvo (iii) Definicije 2.4.2. ■

Primjer 9. Može se lako vidjeti da familija $\mathscr{F}$ nije invarijantna na transponiranje. Naime, matrica M^T transponirana $\mathscr{F}$-matrici M

$$M = \begin{pmatrix}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & - & \cdot & 1 \\
\mathbf{1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & - & \cdot & 1 & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & - & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \mathbf{1} & \cdot & \cdot & - & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{pmatrix}.$$

ne pripada familiji $\mathscr{F}$ jer je u 9. retku jugoistočna 1ca u stupcu 8 i $1 \not\equiv (8 \mod 2)$.

2.4.1. Rekurzivna struktura

Slika 2.15 prikazuje oblik matrica dobivenih rekurzijom na četiri različita načina, tipom I, II, III i IV. Neka je r nenegativan cijeli broj i $n = 2r+1$. Matrica $M = [m_{i,j}]$ reda $n+2$ dobivena rekurzijom tipom I ima 1ce $m_{1,1} = m_{2,2} = 1$ i $\mathscr{F}$-matricu M_n reda n u donjem desnom kutu.

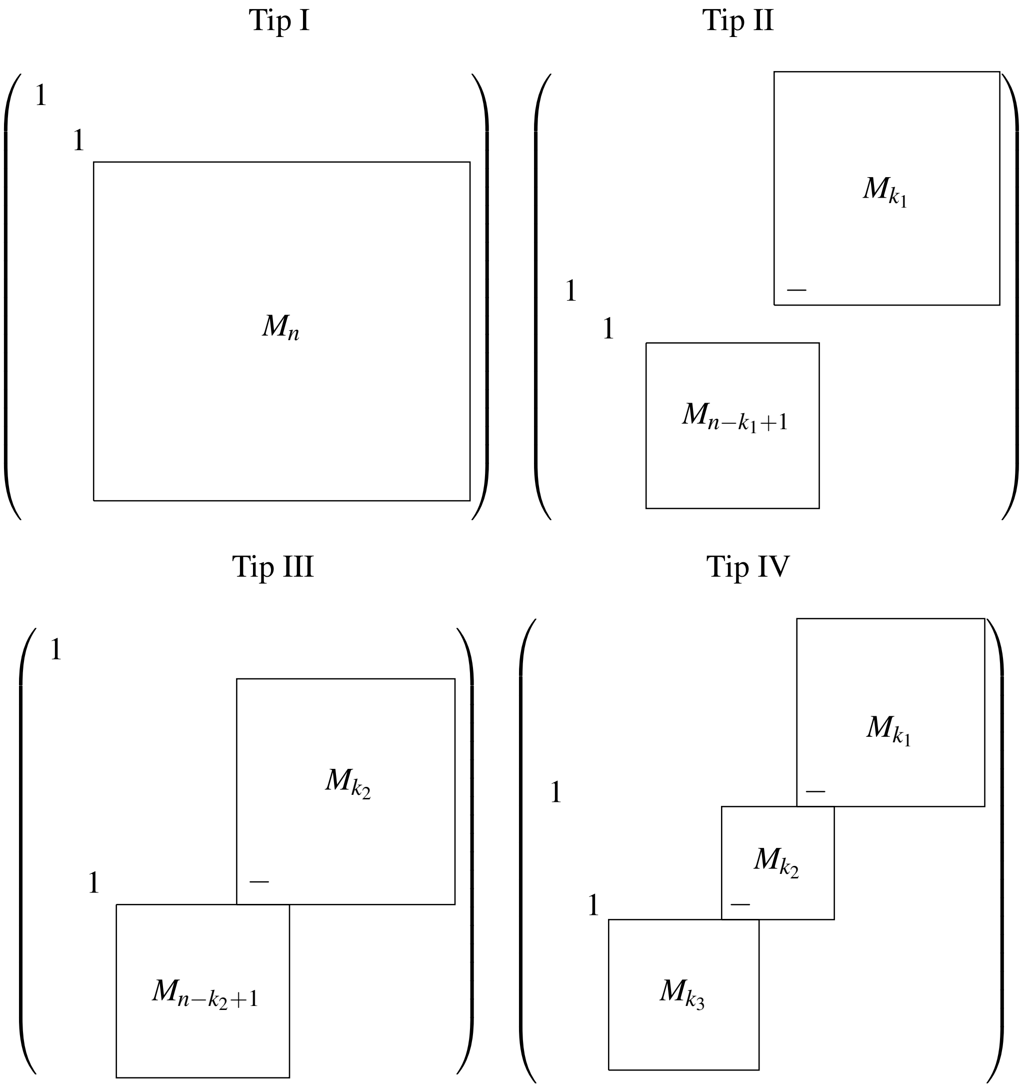
Matrica tipa II ima 1ce $m_{k_1,1} = m_{k_1+1,2} = 1$, $k_1 \in \{3,5,\dots,n\}$, i dvije označene podmatrice, $\mathscr{F}$-matricu M_{k_1} reda k_1 i $\mathscr{F}$-matricu M_{n-k_1+1} reda $n-k_1+1$.

Matrica koja ima oblik tipa III ima 1ce $m_{1,1} = m_{k_2,2} = 1$, $k_2 \in \{3,5,\dots,n\}$, i dvije označene podmatrice, $\mathscr{F}$-matricu M_{k_2} reda k_2 i $\mathscr{F}$-matricu M_{n-k_2+1} reda $n-k_2+1$.

Kod tipa IV, matrica ima 1ce $m_{k_1,1} = m_{k_1+k_2,2} = 1$, $k_1 \in \{3,5,\dots,n-2\}$, $k_2 \in \{3,5,\dots,n+1-k_1\}$, i tri podmatrice, $\mathscr{F}$-matrice M_{k_1}, M_{k_2} i M_{k_3} reda k_1, k_2 i k_3, redom. Vrijedi da je $k_3 = n+2-k_1-k_2$.

Svaka $\mathscr{F}$-matrica dobivena je nekim od navedenih tipova i svaka matrica dobivena nekim od ova četiri tipa je nužno $\mathscr{F}$-matrica. O tome govori sljedeći teorem.

Teorem 2.4.4. Neka je $n \geq -1$ naparan broj. Matrica s alternirajućim predznakom M reda $n+2$ zadovoljava uvjete (i), (ii) i (iii) Definicije 2.4.2 ako i samo ako je nastala rekurzijom: za red 1 jedina matrica je jedinična matrica, a za više redova M ima jedan od oblika I, II, III ili IV.



Slika 2.15: Četiri tipa matrica $\mathscr{F}_{n+2}$.

Dokaz. Neka je $M = [m_{i,j}]$ matrica s alterniarjućim predznakom reda $n+2$ koja ima oblik jednog od tipova I, II, III ili IV sa Slike 2.15. Budući da je svaka od označenih podmatrica M_n, M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_3}, M_{n-k_1+1}, M_{n-k_2+1} $\mathscr{F}$-matrica, nužno je i $\mathscr{C}$-matrica. Tip I i III sa Slike 2.15 ujedno si i tip I familije $\mathscr{C}$. Također, Tip II i IV sa Slike 2.15 ujedno su i tip II familije $\mathscr{C}$. Slijedi da je M $\mathscr{C}$-matrica. Preostalo je dokazati da M zadovoljava svojstvo (iii) Definicije 2.4.2. Vrijedi da je svaka od istaknutih podmatrica M_n, M_{k_1}, M_{k_2}, M_{k_3}, M_{n-k_1+1}, M_{n-k_2+1} neparnog reda i da je pomaknuta za paran broj stupaca u desno u odnosu na stupce matrice M. Slijedi da za svaki stupac, osim prvog, u matrici M vrijedi da mu je redni broj neparan ako i samo ako je naparan i u nekoj od podmatrica. Budući da podmatrice zadovoljavaju svojstvo (iii) Definicije 2.4.2, matrica M zadovoljava isto svojstvo.

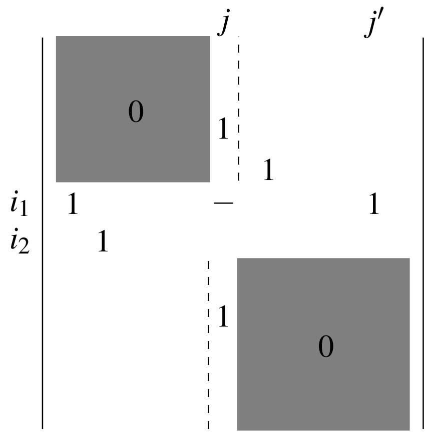
Neka je $M = [m_{i,j}] \in \mathscr{F}_{2r+1}$. Zbog svojstva (iii) Definicije 2.4.2, ne postoji -1ca u drugom stupcu. Neka su $m_{i_1,1} = 1$ i $m_{i_2,2} = 1$ 1ce u prva dva stupca matrice M. Budući da je $M \in \mathscr{C}$, po Korolaru 2.2.6 mora biti $i_1 < i_2$. Ovisno o i_1 i i_2 razlikujemo četiri slučaja:

- $i_1 = 1$ i $i_2 = 2$

  Izostavljanjem prva dva retka i prva dva stupca dobije se matrica reda n koja zadovoljava sva tri svojstva Definicije 2.4.2. Dakle, M je matrica tipa I.

- $i_1 > 1$ i $i_2 = i_1 + 1$

  Niti jedan element jednak 1 u retcima $1, 2, \dots, i_1 - 1, i_1$ ne smije se nalaziti slijeva niti jednom elementu jednakom 1 u retcima $i_1 + 1, i_1 + 2, \dots, n + 1, n + 2$, jer bi u suprotnom zajedno s jednom 1com iz jednog od prva dva stupca činile relativne pozicije permutacije $\sigma = (213)$. Očito je $m_{i_1,1}$ 1ca koja se nalazi slijeva lijevoj 1ci u retku $i_1 - 1$ pa u retku i_1 mora postojati element $m_{i_1,j} = -1$ i desna 1ca $m_{i_1,j'}$, koja se nalazi zdesna lijevoj 1ci u retku $i - 1$. Nužno je da u j-tom stupcu postoje elementi $m_{i,j} = 1$ i $m_{i',j} = 1$ koji se nalaze iznad, odnosno ispod i_1-tog retka. Iz toga slijedi da su svi elementi koji se istovremeno nalaze iznad i_1-tog retka i slijeva j-tom stupcu jednaki nuli. Također, svi elementi koji su istovremeno ispod i_1-tog retka i zdesna j-tom stupcu su jednaki nuli i relativni položaj tih elemenata prikazan je na Slici 2.16.



Slika 2.16: Konstrukcija $\mathscr{F}$-matrice tipa II.

Budući da svaki redak $1, 2, \dots, n+2$ ima sumu elemenata jednaku 1, slijedi da je $n + 2 - j + 1 \geq i_1$, to jest da je $j \leq n + 3 - i_1$. S druge strane, kako i retci ispod i_1-tog retka imaju sumu jednaku 1, mora biti $j - 2 \geq n + 2 - (i_1 + 1)$, tj. $j \geq n + 3 - i_1$. Dakle, $j = n + 3 - i_1$.

Dvije podmatrice, prva u gornjem desnom kutu i druga ispod $_1$-tog retka, svojstva (i), (ii) i (iii) Definicije 2.4.2 naslijeđuju iz matrice M.

- $i_1 = 1$ i $i_2 > 2$

  U ovom slučaju, izostavljanjem prvog retka i prvog stupca dobije se matrica M' reda $n+1$ koja zadovoljava svojstva (i), (ii) Definicije 2.4.2, to jest Definicije 2.2.1. 1ca u prvom stupcu matrice M' nalazi se u njenom (i_2-1)-tom retku pri čemu je $i_2-1>1$. Po Teoremu 2.2.7, matrica M' je matrica tipa II familije $\mathscr{C}$. Podmatrice od kojih je izgrađena po istom Teoremu zadovoljavaju svojstva (i), (ii) Definicije 2.4.2. Svaki stupac neparnog rednog broja podmatrice označene s M_{n-k_2+1} na Slici 2.15 nužno je i neparnog rednog broja u matrici M, pa podmatrica M_{n-k_2+1} zadovoljava i svojstvo (iii) Definicije 2.4.2, to jest M_{n-k_2+1} je $\mathscr{F}$-matrica. Također, -1ca u k_2-tom retku nalazi se u istom stupcu u kojem je smješten prvi stupac podmatrice M_{k_2}, pa slijedi da je svaki stupac neparnog rednog broja u matrici M također neparnog rednog broja i u matrici M_{k_2}. Dakle, i M_{k_2} zadovoljava i svojstvo (iii) Definicije 2.4.2, to jest M_{k_2} je $\mathscr{F}$-matrica.

- $i_1 > 1$ i $i_2 > i_1+1$

  Na sličan način kao u drugom slučaju vrijedi da niti jedan element 1 u retcima $1,2,\ldots,i_1$ ne smije biti slijeva niti jednom elementu jednakom 1 u retcima $i_1+1,\ldots,i_2$, dok oni ne smiju biti slijeva niti jednom elementu 1 u preostalim retcima $i_2+1,\ldots,n+2$. Analogno vrijedi i da elementi $m_{i_1,1}$ i $m_{i_2,2}$ ne mogu biti desne 1ce u svojim retcima, pa moraju postojati $m_{i_1,j_1}=-1$ i $m_{i_2,j_2}=-1$ čije su pripadajuće gornja i donja 1ca u jednom od redaka $1,2,\ldots,i_1$ i $i_1+1,\ldots,i_2$, redom, odnosno $i_1+1,\ldots,i_2$ i $i_2+1,\ldots,n+2$, redom.

  Zbog svojstva da svaki redak mora imati sumu elemenata jednaku 1, mora biti $j_1 = n+2-i_1+1$ i $j_2 = n+2-i_1-i_2+2$. Budući da tri podmatrice od kojih je M izgrađena na ovaj način svojstva (i), (ii) i (iii) Definicije 2.4.2 naslijeđuju iz matrice M, M ima strukturu tipa IV.

Time je dokazan teorem. ■

Primjer 10. Jedine matrice familije $\mathscr{F}$ reda 1 i 3 jesu jedinične matrice $\begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$ i

$$\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix},$$

dok koristeći rekurziju opisanu u Teoremu 2.4.4 dobiju se tri matrice reda 5:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & & & & \\ & \mathbf{1} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ \mathbf{1} & & - & & 1 \\ & \mathbf{1} & & & \\ & & 1 & & \end{pmatrix} \quad i \quad \begin{pmatrix} \mathbf{1} & & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & \mathbf{1} & - & & 1 \\ & & 1 & & \end{pmatrix}.$$

Na osnovu matrica konstruiranih u Primjeru 10, Teoram 2.4.4 daje svih 12 $\mathscr{F}$-matrica reda 7, kako slijedi.

$$
\begin{pmatrix}
\mathbf{1} & & & & & & \\
 & \mathbf{1} & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & 1 & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\mathbf{1} & & & & & & \\
 & \mathbf{1} & & & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & 1 & \\
 & & 1 & & - & & 1 \\
 & & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & &
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\mathbf{1} & & & & & & \\
 & \mathbf{1} & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & 1 & \\
 & & & 1 & - & & 1 \\
 & & & & 1 & &
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & 1 & \\
\mathbf{1} & & & & - & & 1 \\
 & \mathbf{1} & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & &
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & 1 & \\
\mathbf{1} & & - & & & & 1 \\
 & \mathbf{1} & & & & & \\
 & & 1 & & & &
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & 1 & \\
 & & 1 & & - & & 1 \\
 & & & 1 & & & \\
\mathbf{1} & & - & & 1 & & \\
 & \mathbf{1} & & & & & \\
 & & 1 & & & &
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
 & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & 1 & \\
 & & & 1 & - & & 1 \\
\mathbf{1} & & - & & 1 & & \\
 & \mathbf{1} & & & & & \\
 & & 1 & & & &
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\mathbf{1} & & & & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & 1 & \\
 & \mathbf{1} & & & - & & 1 \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & &
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\mathbf{1} & & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & 1 & \\
 & \mathbf{1} & - & & & & 1 \\
 & & 1 & & & &
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{pmatrix}
\mathbf{1} & & & & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & 1 & \\
 & & 1 & & - & & 1 \\
 & & & 1 & & & \\
 & \mathbf{1} & - & & 1 & & \\
 & & 1 & & & &
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\mathbf{1} & & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & 1 & \\
 & & & 1 & - & & 1 \\
 & \mathbf{1} & - & & 1 & & \\
 & & 1 & & & &
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & 1 & \\
\mathbf{1} & & & & - & & 1 \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & & \\
 & \mathbf{1} & - & & 1 & & \\
 & & 1 & & & &
\end{pmatrix}.
$$

Ovdje su tri matrice tipa I, četiri matrice tipa II, četiri matrice tipa III i jedna matrica tipa IV.

Za pozitivne cijele brojeve n i k s $C_{n,k}$ označen je broj podjela konveksnog $(kn+2)$-kuta na regije koje su $(k+2)$-kuti. Brojevi $C_{n,k}$ nazivaju se Fuss-Catalanovi brojevi i njihova eksplicitna formula je

$$C_{n,k} = \frac{1}{kn+1}\binom{(k+1)n}{n}. \tag{2.13}$$

Posebno, kada je $k=1$ relacija (2.13) generira niz Catalanovih brojeva. Za $k=2$ formula

$$C_{n,2} = \frac{1}{2n+1}\binom{3n}{n}$$

daje niz čiji je početak $1, 1, 3, 12, 55, 273, 1428, 7752, 43263\ldots$ Poznata je rekurzija Fuss-Catalanovih brojeva $C_{n,2}$,

$$C_{n+1,2} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n-i} C_{i,2}C_{j,2}C_{n-i-j,2} \tag{2.14}$$

(D.Callan, [9]).

Neka je n neparan prirodan broj. Neka je s F_n označen kardinalni broj skupa $\mathscr{F}_n$, $F_n := |\mathscr{F}_n|$. Iz Primjera 10 može se vidjeti da da je $F_1 = 1$, $F_3 = 1$ i $F_5 = 3$. Sljedeći teorem daje eksplicitnu formulu za računanje broja F_{2r+1} $\mathscr{F}$-matrica reda $n = 2r+1$.

Teorem 2.4.5. Neka je r nenegativan prirodan broj. Broj F_{2r+1} matrica familije $\mathscr{F}_{2r+1}$ jednak je r-tom Fuss-Catalanovom broju, $C_{r,2}$.

Dokaz. Budući da red matrice $M \in \mathscr{F}_{n+2}$ i redovi podmatrica od kojih je M sastavljena, kao što se može vidjeti na Slici 2.15, jesu neparni brojevi, može se pisati

$$\begin{aligned} n+2 &= 2(r+1)+1 \\ k_1 &= 2r_1+1 \\ k_2 &= 2r_2+1 \\ k_3 &= 2r_3+1, \end{aligned}$$

gdje su $r_1, r_2 \in \{1,\ldots,r\}$ i $r_3 = 2(r-r_1-r_2)+1$. Kardinalni broj F_{n+2} skupa $\mathscr{F}_{n+2}$ dobije se zbrajanjem broja svih matrica reda $n+2$ tipa I, II, III i IV, a oni su jednaki

$$F_n,$$

$$\sum_{k_1} F_{k_1}F_{n+1-k_1},$$

$$\sum_{k_2} F_{k_2} F_{n+1-k_2}$$

i

$$\sum_{k_1} \sum_{k_2<n+1-k_1} F_{k_1} F_{k_2} F_{n+2-k_1-k_2}$$

redom. Ako se ove jednakosti izraze varijablama r, r_1 i r_2 umjesto n, k_1 and k_2 dobije se

$$\begin{aligned} F_{2(r+1)+1} &= F_{2r+1} + \sum_{r_1=1}^{r} F_{2r_1+1} F_{2(r-r_1)+1} + \sum_{r_2=1}^{r} F_{2r_2+1} F_{2(r-r_2)+1} \\ &+ \sum_{r_1=1}^{r-1} \sum_{r_2=1}^{r-r_1} F_{2r_1+1} F_{2r_2+1} F_{2(r-r_1-r_2)+1}. \end{aligned}$$

Zbog jednakosti $F_1 = 1$ slijedi da je

$$F_{2(r+1)+1} = \sum_{r_1=0}^{r} \sum_{r_2=0}^{r-r_1} F_{2r_1+1} F_{2r_2+1} F_{2(r-r_1-r_2)+1}. \tag{2.15}$$

Budući da je $F_1 = C_{0,2}$, tada iz (2.15) i (2.14) slijedi $F_{n+2} = C_{r+1,2}$ čime je tvrdnja dokazana.

■

3. Bijekcije

U ovom poglavlju prikazujemo dvije bijekcije između matrica s alternirajućim predznakom i drugih objekata. Dokazujemo da su $\mathscr{C}$-matrice s alternirajućim predznakom reda n u 1:1 korespondenciji s *izbjegavajućim* permutacijama duljine $(n-1)$. Nakon pomoćnih lema, koje govore o specifičnim položajima elemenata u matrici, ovaj rezultat je dokazan u Teoremu 3.1.13.

Nakon prethodno prikazanih enumeracijskih rezultata, postavila se slutnja o postojanju izravne bijekcije između $\mathscr{C}$-matrica i Dyckovih puteva. Zaista je takva 1:1 korespondencija uspostavljena. Definira se preslikavanje iz skupa Dyckovih puteva duljine $2n-2$ u skup $\mathscr{C}$-matrica reda n, dok χ danoj $\mathscr{C}$-matrici pridružuje Dyckov put. U Teoremu 3.2.6 je dokazano da su ta preslikavanja inverzna jedna drugome.

3.1. Permutacije koje izbjegavaju uzorak duljine 3

Definicija 3.1.1. Neka je n prirodan broj. Permutaciju $\tau \in S_n$ za koju vrijedi da izbjegava permutacijski uzorak $\sigma = (2,1,3)$ nazivamo 213-*izbjegavajuća permutacija*. Skup svih 213-izbjegavajućih permutacija duljine n označen je s $S_n(213)$.

Neka je τ 213-izbjegavajuća permutacija. Njoj pripadajuća permutacijska matrica M^τ, specijalan je slučaj matrice s alternirajućim predznakom koja izbjegava permutaciju $\sigma = (2,1,3)$.

Poznato je da permutacije koje izbjegavaju uzorak duljine 3 enumeriraju Catalanovi brojevi pa je $|S_n(213)| = C_n$.

3.1.1. Korespondencija između matrica s alternirajućim predznakom i izbjegavajućih permutacija

Definicija 3.1.2. Neka je n prirodan broj i M $\mathscr{C}$-matrica reda n. Element 1 na mjestu (i,j) matrice M naziva se *sjeverozapadna* 1ca, (SZ 1ca), ako je lijeva u svom retku i ako je $i<n$.

Neka je s NW označen skup svih pozicija (i,j) u matrici M na kojima se nalaze sjeverozapadne 1ce,

$$NW(M)=\left\{(i,j): m_{i,j}=1 \text{ je SZ 1ca u matrici } M=[m_{i,j}]\in\mathscr{C}\right\}. \tag{3.1}$$

Primjer 11. Primjerice, u matrici M,

$$M=\begin{pmatrix}
 & & & & & & & \mathbf{1} & \\
 & & \mathbf{1} & & & & & - & 1\\
 & & & \mathbf{1} & & & & & \\
 & & & & \mathbf{1} & & & & \\
 & & & & & & \mathbf{1} & & \\
 & & & & & \mathbf{1} & - & 1 & \\
\mathbf{1} & & - & & & & 1 & & \\
 & \mathbf{1} & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & &
\end{pmatrix}$$

istaknute 1ce su sjeverozapadne i skup svih pozicija SZ 1ca za ovu matricu je

$$NW(M)=\{(1,8),(2,3),(3,4),(4,5),(5,7),(6,6),(7,1),(8,2)\}.$$

Iz Definicija 3.1.2 i 2.4.1 slijedi da su skupovi SZ 1ca i JI 1ca disjunktni i u uniji daju skup svih 1ca matrice M.

Propozicija 3.1.3. Neka je n prirodan broj i M $\mathscr{C}$-matrica reda n. Broj sjeverozapadnih 1ca u matrici M jednak je $n-1$.

Dokaz. Po Korolaru 1.0.3 vrijedi da je ukupan broj 1ca $N^+(M)$, za n veći od ukupnog broja -1ca, $N^-(M)$, u matrici M. Jugoistočne 1ce su sve 1ce koje su desne i nisu lijeve i 1ca u n-tom retku. Broj 1ca koje su desne i nisu lijeve u matrici M jednak je broju -1ca u M, $N^-(M)$. Dakle, broj JI 1ca jednak je $N^-(M)+1$. Budući da su skupovi SZ 1ca i JI 1ca disjunktni i u uniji daju skup svih 1ca matrice M, broj SZ 1ca jednak je

$$N^+(M)-(N^-(M)+1)=n-1,$$

čime je tvrdnja dokazana. ■

Propozicija 3.1.4. Neka je n prirodan broj i M $\mathscr{C}$-matrica reda n. Tada 1ca u n-tom stupcu nije sjeverozapadna.

Dokaz. Dokaz se provodi kontradikcijom. Neka je $M = [m_{i,j}] \in \mathscr{C}_n$ i $m_{i,n} = 1$ SZ 1ca u n-tom stupcu matrice M. Iz Definicije 3.1.2 slijedi da je $m_{i,n}$ lijeva 1ca i da je $i < n$. Desna 1ca u $(i+1)$-om retku mora se nalaziti zdesna 1ce $m_{i,n}$, a to nije moguće. Time je tvrdnja dokazana. ■

Propozicija 3.1.5. Neka je n prirodan broj i M $\mathscr{C}$-matrica reda n. Neka je redak $i < n$ proizvoljno odabran. Vrijedi da i-ti redak matrice M sadrži najviše jednu sjeverozapadnu 1cu. Analogno, u j-tom stupcu ne mogu biti dvije ili više SZ 1ce, za $j < n$.

Dokaz. Neka je $M = [m_{i,j}] \in \mathscr{C}_n$ i i-ti redak sadrži dvije SZ 1ce, m_{i,j_1} i m_{i,j_2}, $j_1 < j_2$. Tada između njih mora biti smještena -1ca. Dakle, 1ca m_{i,j_2} je desna i nije lijeva, to jest m_{i,j_2} je JI 1ca. Dobivena je kontradikcija, pa je tvrdnja za retke dokazana. Budući da je skup $\mathscr{C}_n$ invarijantan na transponiranje, tvrdnja mora vrijediti i za stupce. ■

Neka je n prirodan broj. Neka je s μ označeno preslikavanje iz skupa $\mathscr{C}_n$ u skup $S_{n-1}(213)$,

$$\mu : \mathscr{C}_n \to S_{n-1}(213) \tag{3.2}$$

koje svakoj $\mathscr{C}$-matrici M reda n pridruži permutaciju τ, $\mu(M) = \tau$, za koju vrijedi da je $\tau(i) = j$ ako i samo ako je $(i, j) \in NW(M)$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Iz Propozicija 3.1.3, 3.1.4 i 3.1.5 slijedi da za proizvoljno odabranu $\mathscr{C}$-matricu reda n vrijedi da je točno $n-1$ sjeverozapadna 1ca smještena u prvih $n-1$ redaka i stupaca, pri čemu u niti jednom retku ili stupcu ne može biti više od jedne SZ 1ce. Dakle, SZ 1ce su smještene tako da je točno jedna 1ca u svakom od $n-1$ redaka i u svakom od $n-1$ stupaca. Preslikavanje $i \mapsto j$ ako i samo ako je $(i, j) \in NW(M)$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, je bijekcija. Iz ovoga slijedi da je $\mu(M) = \tau$ permutacija duljine $n-1$. Za permutacijsku matricu $M_\tau = [m^\tau_{i,j}]$ permutacije τ vrijedi da je $m^\tau_{i,j} = 1$ ako i samo ako je $\tau(i) = j$, to jest ako i samo ako je $(i, j) \in NW(M)$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. Budući da matrica M izbjegava permutaciju $\sigma = (2, 1, 3)$ i M_τ ju također izbjegava. Slijedi da je preslikavanje μ dobro definirano.

Primjer 12. Matrici M iz Primjera 11 preslikavanje μ pridružuje permutaciju

$$\tau = \mu(M) = (8, 3, 4, 5, 7, 6, 1, 2),$$

čija je permutacijska matrica

$$M_\tau = \begin{pmatrix} & & & & & & & 1 \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & 1 & & \\ 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \end{pmatrix}.$$

Definicija 3.1.6. Neka je $\tau = (\tau(1), \tau(2), \dots, \tau(n))$ permutacija duljine n. Za par elemenata $(\tau(k), \tau(l))$ kaže se da je *inverzija* u permutaciji τ ako je

$$k < l \text{ i } \tau(k) > \tau(i).$$

Za inverziju $(\tau(k), \tau(l))$ kaže se da je *susjedna* u permutaciji τ ako je l sljdbenik broja k.

Za svaku permutaciju $\tau \in S_n$ neka je $N(\tau)$,

$$N(\tau) := \{l : \tau(l) < \tau(l-1)\}, \tag{3.3}$$

svih pozicija permutacije τ na kojima se nalazi element koji sa svojim prethodnikom čini susjednu inverziju. Ovako definirani skup $N(\tau)$ sadrži i redne brojeve i redaka permutacijske matrice M^τ u kojima se element jednak 1 nalazi slijeva 1ci u $(i-1)$-om retku, $1 < i \leq n$.

Neka je s ν označeno preslikavanje iz skupa $S_{n-1}(213)$ u skup $\mathscr{C}_n$,

$$\nu : S_{n-1}(213) \to \mathscr{C}_n \tag{3.4}$$

koje svakoj 213-izbjegavajućoj permutaciji $\tau = (\tau(1), \tau(2), \dots, \tau(n))$ pridruži $\mathscr{C}$-matricu $M = [m_{i,j}]$ reda n postupkom u četiri koraka korespodencije u nastavku.

1. korak

   Za svaki $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ $m_{i,j} = 1$ ako i samo ako je $\tau(i) = j$.

2. korak

U drugom koraku definiraju se pozicije svih -1ca matrice M. Element $m_{i,j} = -1$ ako i samo ako je

$$i \in N(\tau)$$

i

$$j = \min\left\{ j' : j' > \tau(i),\ \sum_{k=1}^{i} m_{k,j'} = 1 \right\}, \tag{3.5}$$

to jest j je redni broj stupca koji se nalazi zdesna $\tau(i)$-tog stupca i kojemu je parcijalna suma u i-tom retku jednaka 1, takav da se svi ostali stupci s istim svojstvom nalaze njemu zdesna. Za svaki $i \in N(\tau)$ vrijedi da je barem $\tau(i-1) \in \left\{ j' : j' > \tau(i),\ \sum_{k=1}^{i} m_{k,j'} = 1 \right\}$. Dakle, za svaki $i \in N(\tau)$ postoji j takav da je $m_{i,j} = -1$.

3. korak

   Neka je $|N(\tau)| = m$ i $(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots (i_m, j_m)$ skup pozicija -1ca definiranih u 2. koraku. Tada $m_{i_k, j_{k-1}} = 1$ za svaki $k \in \{1, 2, \ldots, m+1\}$, pri čemu je $i_{m+1} = j_0 = n$.

4. korak

   Preostali elementi matrice M jednaki su nuli.

Primjerice, (213)-izbjegavajuća permutacija $\tau = (1243)$,

$$M_\tau = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

prema definiciji preslikavanja ν daje ove strukture na kraju opisanih koraka

$$\underset{\text{1. korak}}{\begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . \\ . & . & 1 & . & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}} \quad \underset{\text{2. korak}}{\begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . \\ . & . & 1 & - & . \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}} \quad \underset{\text{3. korak}}{\begin{pmatrix} 1 & . & . & . & . \\ . & 1 & . & . & . \\ . & . & . & 1 & . \\ . & . & 1 & - & 1 \\ . & . & . & 1 & . \end{pmatrix}} \quad \underset{\text{4. korak}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & - & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

U ovom slučaju $N(\tau) = \{4\}$, $\tau(4) = 3$ pa je u skupu u kojem se traži minimum samo broj 4, $j = 4$. To prema 2. koraku znači da ovdje postoji samo jedan specijalni element i taj se nalazi na mjestu $(i, j) = (4, 4)$, gdje je $i \in N(\tau)$. Po trećem koraku $(i_1, j_0) = (4, 5)$ i $(i_2, j_1) = (5, 4)$ i to su mjesta 1ca. Preostali elementi jednaki su nuli.

Lema 3.1.7. Neka je n prirodan broj i τ 213-izbjegavajuća permutacija duljine $n-1$. Neka je $M=[m_{i,j}]$ matrica dobivena iz τ pridruživanjem ν opisanim iznad. Ako su $(i_1,j_1),(i_2,j_2),\dots(i_m,j_m)$ pozicije -1ca smještenih u M u 2. koraku i ako je $i_1<i_2<\cdots<i_m$, onda vrijedi da je $j_m<j_{m-1}<\cdots<i_1$.

Dokaz. Dokaz se provodi kontradikcijom. Neka postoje $k,k'\in\{1,2,\dots,m\}$, $k<k'$, takvi da je $j_k<j_{k'}$. Budući da je $i_k<i_{k'}$ i $i_k,i_{k'}\in N(\tau)$, u permutacijskoj matrici M_τ permutacije τ postoje 1ce $m_{i_{k-1},j^{k-1}}$ i $m_{i_{k'-1},j^{k'-1}}$ u retcima i_{k-1} i $i_{k'-1}$ i nalaze se zdesna 1cama m_{i_k,j^k} i $m_{i_{k'},j^{k'}}$ u retcima i_k i $i_{k'}$, redom.

Mora vrijediti da se 1ca $m_{i_{k-1},j^{k-1}}$ u i_{k-1}-om retku nalazi zdesna 1ci $m_{i_{k'},j^{k'}}$ u $i_{k'}$-om retku. U suprotnom bi 1ce $m_{i_{k-1},j^{k-1}}$, m_{i_k,j^k} i $m_{i_{k'},j^{k'}}$ činile relativne pozicije permutacije σ.

U retcima iznad i_k-tog retka ne postoji 1ca čiji je redni broj stupca j takav da je $j^k<j<j^{k'-1}$ jer bi ta 1ca zajedno s 1cama m_{i_k,j^k} i $m_{i_{k'},j^{k'}}$ činila relativne pozicije permutacije σ.

Dakle, zdesna stupca j^k, stupac s najmanjim rednim brojem j_k kojemu je parcijalna suma do i_k-tog retka jednaka 1, nalazi se zdesna stupcu s rednim brojem $j^{k'-1}$, $j_k>j^{k'-1}$. Budući da je $j^{k'-1}\in\left\{j' : j'>j_{k'},\ \sum_{l=1}^{i_{k'}} m_{l,j'}=1\right\}$ slijedi da je$j_{k'}<j^{k'-1}$. Dakle, vrijedi da je $j_{k'}<j_k$. Time je dobivena kontradikcija. Na Slici 3.1 prikazan je relativni položaj -1ca m_{i_k,j_k} i $m_{i_{k'},j_{k'}}$.

$$
\begin{array}{c}
 \\ \\ i_{k-1} \\ i_k \\ \\ i_{k'-1} \\ i_{k'} \\ \\
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} j^k & j^{k'} & j_{k'} & j^{k'-1} & j_k & j^{k-1} \end{array} \\
\begin{pmatrix}
 & & & & & \\
 & & & & & 1 \\
1 & & & & - & \\
 & & & & & \\
 & & & 1 & & \\
 & 1 & - & & & \\
 & & & & &
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Slika 3.1: Relativni položaj 1ca i -1ca u matrici $M=\nu(\tau)$.

■

Lema 3.1.8. Neka je n prirodan broj i τ 213-izbjegavajuća permutacija duljine $n-1$. Neka je $M=[m_{i,j}]$ matrica dobivena iz permutacije τ pridruživanjem ν opisanim iznad. Matrica M je matrica s alternirajućim predznakom reda n.

Dokaz. Neka je $\tau \in S_{n-1}(213)$ proizvoljno odabrana permutacija. Elementi matrice M dobivene na iznad opisani način elementi su skupa $\{-1,0,1\}$. Budući da je τ permutacija duljine $n-1$, M ima $n-1$ 1cu smještenu u 1. koraku tako da je svaka od njih smještena u točno jedan od prvih $n-1$ redaka i u točno jedan od $n-1$ prvih stupaca. Iz 2. koraka slijedi da svaka -1ca m_{i_k,j_k} ima pripadajuće 1ce slijeva i iznad, a iz 3. koraka da ima pripadajuće 1 zdesna i ispod. Također, 3. korak osigurava postojanje 1ca u n-tom retku i n-tom stupcu. Slijedi da je M matrica s alternirajućim predznakom reda n. ■

Lema 3.1.9. Neka je n prirodan broj i τ 213-izbjegavajuća permutacija duljine $n-1$. Neka je $M=[m_{i,j}]$ matrica dobivena iz permutacije τ pridruživanjem ν opisanim iznad. Matrica M izbjegava permutaciju $\sigma=(2,1,3)$, to jest M je $\mathscr{S}$-matrica.

Dokaz. Neka je $\tau \in S_{n-1}(213)$ proizvoljno odabrana permutacija. Budući da je τ permutacija duljine $n-1$ koja izbjegava uzorak $\sigma=(2,1,3)$, za 1ce smještene u 1. koraku vrijedi da njihove relativne pozicije ne čine permutaciju σ. Dakle, ako postoje $m_{i',j}=m_{i,j'}=m_{i'',j''}=1$ takve da je

$$i < i' < i'' \text{ i } j < j' < j'', \tag{3.6}$$

barem jedna od 1ca $m_{i',j}$, $m_{i,j'}$ i $m_{i'',j''}$ mora biti 1ca dodana u 3. koraku. Budući da je 1ca $m_{i'',j''}$ ispod i zdesna objema 1cama, $m_{i',j}$ i $m_{i,j'}$, po Lemi 3.1.7 slijedi da sigurno 1ce $m_{i',j}$ i $m_{i'',j''}$ ne mogu istovremeno biti 1ce iz 3. koraka. Analogno, za 1ce $m_{i,j'}$ i $m_{i'',j''}$ slijedi da istovremeno ne mogu biti 1ce iz 3. koraka. Dakle, preostaju slučajevi da je

- 1ca $m_{i'',j''}$ dodana u 1. koraku i barem jedna od 1ca $m_{i',j}$ i $m_{i,j'}$ dodana u 3. koraku i
- 1ce $m_{i',j}$ i $m_{i,j'}$ su dodane u 1. koraku i $m_{i'',j''}$ je dodana u 3. koraku.

Neka je 1ca $m_{i'',j''}$ dodana u 1. koraku. Ako je $m_{i',j}$ dodana u 3. koraku, postoji -1ca m_{i',j^-} koja se nalazi u i'-tom retku slijeva 1ce $m_{i',j}$. Budući da je $j^- < j''$ i $i' < i''$, dvije 1ce koje se nalaze slijeva i iznad -1ce m_{i',j^-}, zajedno s 1com $m_{i'',j''}$ čine relativne pozicije permutacije σ, a sve su dodane u 1. koraku. To nije moguće, pa slijedi da 1ca $m_{i',j}$ nije dodana u 3. koraku. Na Slici 3.2 prikazan je relativni položaj permutacije σ kojeg čine 1ce dodane u 1. koraku za ovaj slučaj.

$$
\begin{array}{c}
\\
i \\
\\
i' \\
i''
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc}
\phantom{\mathbf{1}} & j^- & j & j' & j''
\end{array} \\
\begin{pmatrix}
 & & & 1 & \\
 & \mathbf{1} & & & \\
\mathbf{1} & - & 1 & & \\
 & & & & \mathbf{1}
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

Slika 3.2: Relativni položaj 1ca i -1ca u matrici $M = \nu(\tau)$.

Na analogan način se pokaže da ako je $m_{i'',j''}$ dodana u 1. koraku, 1ca $m_{i,j'}$ ne može biti dodana u 3. koraku.

Pretpostavimo da je su 1ce $m_{i',j}$ i $m_{i,j'}$ dodane u 1. koraku i $m_{i'',j''}$ 1ca dodana u 3. koraku. Budući da je $\tau(i') = j$ i $\tau(i) = j'$ pri čemu je $i < i'$ i $j < j'$, mora postojati barem jedna susjedna inverzija između i-te i $(i'+1)$-e pozicije u permutaciji τ. Dakle, postoji $i^- \in \{i, i+1, \ldots, i'-1, i'\}$ takav da u i^--tom retku matrice M postoji -1ca. Neka je redni broj stupca te 1ce označen s j^-. -1ca u 2. koraku smiješta se u stupac koji osim što zadovoljava svojstvo da mu je parcijalna suma jednaka 1, još mora biti takav s najmanjim rednim brojem. U ovom slučaju vrijedi da je parcijalna suma j'-tog stupca jednaka 1 u i^--tom retku, slijedi da je j^- manji ili jednak j',

$$j^- \leq j'. \tag{3.7}$$

Nadalje, $m_{i'',j''}$ je 1ca dodana u 3. koraku pa postoji -1ca u i''-tom retku i neka je s j'^- označen redni broj stupca u koji je smještena. Vrijedi da je $j'^- < j''$. Štoviše, po Lemi 3.1.7 mora biti $j'^- < j^-$. Po 3. koraku i Lemi 3.1.7 slijedi da svaka 1ca dodana u 3. koraku mora biti slijeva ili u istom stupcu kao -1ca koja se nalazi u nekom od redaka iznad. Iz toga slijedi da je $j^- \geq j''$, a to je u kontradikciji s 3.6 i 3.7. Na Slici 3.3 prikazan je relativni položaj 1ca $m_{i',j}$, $m_{i,j'}$ i $m_{i'',j''}$, -1ca m_{i^-,j^-} i m_{i'',j'^-}.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} j & j'^{-} & j^{-} & j' & j'' \end{array} \\ \begin{array}{c} i \\ i^{-} \\ i' \\ i'' \end{array} & \begin{pmatrix} & & & 1 & \\ & & - & & \\ 1 & & & & \\ & - & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Slika 3.3: Relativni položaj 1ca i -1ca u matrici $M = \nu(\tau)$.

Slijedi da ne postoje 1ce u matrici M koje čine relativne pozicije permutacije σ. Dakle, M je $\mathscr{S}$-matrica. ■

Lema 3.1.10. Neka je n prirodan broj i τ 213-izbjegavajuća permutacija duljine $n-1$. Neka je $M = [m_{i,j}]$ matrica dobivena iz permutacije τ pridruživanjem ν opisanim iznad. Matrica M zadovoljava svojstvo (ii) iz Definicije 2.2.1, to jest desna 1ca u retku $i+1 \geq 2$ nalazi se zdesna lijevoj 1ci u i-tom retku, $i < n$.

Dokaz. Dokaz se provodi kontradikcijom. Neka je $m_{i,j} = 1$ desna 1ca u i-tom retku i $m_{i-1,j'} = 1$ lijeva 1ca u $(i-1)$-om retku pri čemu je $j < j'$. Sve 1ce, osim 1ce u n-tom retku, koje su dodane u 3. koraku, su desne i nisu lijeve. Budući da je $i-1 < n$, 1ca $m_{i-1,j'}$ je dodana u 1. koraku. Slijedi da je $j' \leq n-1$.

Ako je i $m_{i,j}$ dodana u 1. koraku, vrijedi da je (j, j') susjedna inverzija u τ, to jest $i \in N(\tau)$ pa je u 2. koraku smještena -1ca u i-ti redak zdesna 1ci $m_{i,j}$. Dakle, $m_{i,j}$ nije desna 1ca.

Ako je 1ca $m_{i,j}$ dodana u 3. koraku. Tada postoji -1ca m_{i,j^-} slijeva 1ce $m_{i,j}$ i njoj pripadajuće 1ce $m_{i,j''}$ slijeva i m_{i'',j^-} iznad koje su smještene u matricu M u 1. koraku. U j-tom stupcu, ispod i-tog retka, ne postoji 1ca dodana u 1. koraku. Naime, ako bi postojala, zajedno s 1cama $m_{i,j''}$ i m_{i'',j^-} iz 1. koraka bi činila relativne pozicije permutacije σ. Također, element $m_{i-1,j}$ jednak je nuli jer je 1ca $m_{i-1,j'}$ lijeva u svom retku. Nadalje, u j-tom stupcu, iznad $(i-1)$-og retka moraju biti svi elementi jednaki 0. U suprotnom bi postojala -1ca $m_{i',j}$ čije bi pripadajuće 1ce slijeva i iznad bile jedinice dodane u 1. koraku i zajedno s 1com $m_{i-1,j'}$ bi činile relativne pozicije permutacije σ. Dakle, u j-tom stupcu ne postoji 1ca dodana u 1. koraku. Budući da je $j < j' \leq n-1$, dobivena je kontradikcija. ■

Korolar 3.1.11. Neka je n prirodan broj. Preslikavanje $\nu : S_{n-1}(213) \to \mathscr{C}_n$ (3.4) koje svakoj permutaciji koja izbjegava permutacijski uzorak $\sigma = (2,1,3)$ pridruži $\mathscr{C}$-matricu dobro je definirano.

Dokaz. Iz Lema 3.1.8, 3.1.9 i 3.1.10 slijedi da je svaka matrica $M = \nu(\tau)$ matrica s alternirajućim predznakom koja zadovoljava svojstva (i) i (ii) iz Definicije 2.2.1. Dakle, M je $\mathscr{C}$-matrica. ∎

Korolar 3.1.12. Neka je n prirodan broj i τ 213-izbjegavajuća permutacija duljine $n-1$. Neka je $M = [m_{i,j}] = \nu(\tau)$ $\mathscr{C}$-matrica. Tada su 1ce u matrici M dobivene u 1. koraku preslikavanja ν ako i samo ako su sjeverozapadne. Analogno, 1ce u matrici M su dobivene u 3. koraku preslikavanja ν ako i samo ako su jugoistočne.

Dokaz. Sve -1ce dodane u 2. koraku smještene 1cama dodanim u 1. koraku zdesna. Dakle, svaka 1ca dodana u 1. koraku je lijeva i ne nalazi se u n-tom retku. Slijedi da je svaka 1ca dodana u 1. koraku sjeverozapadna 1ca. S druge strane, neka je $m_{i,j} = 1$ sjeverozapadna 1ca matrice M. Ako je $m_{i,j}$ smještena u matricu M u 3. koraku, sigurno joj se slijeva nalazi -1ca ili je $i = n$. Dakle, $m_{i,j}$ je jugoistočna 1ca. Time je dobivena kontradikcija. Slijedi da je $m_{i,j}$ smještena u matricu M u 1. koraku.

Iz ovoga slijedi i drugi dio tvrdnje korolara, da je svaka 1ca smještena u matricu M u 3. koraku jugoistočna i da je svaka jugoistočna 1ca matrice M smještena 3. korakom. ∎

Teorem 3.1.13. Neka je n prirodan broj i neka su μ i ν preslikavanja definirana na početku ovog odjeljka, $\mu : \mathscr{C}_n \to S_{n-1}(213)$ i $\nu : S_{n-1}(213) \to \mathscr{C}_n$. Preslikavanje ν je bijekcija i vrijedi da je $\nu^{-1} = \mu$.

Dokaz. Neka su τ_1 i τ_2 dvije različite 213-izbjegavajuće permutacije i $M_1 = \nu(\tau_1)$ i $M_2 = \nu(\tau_2)$ dvije $\mathscr{C}$-matrice. Ako vrijedi da je $M_1 = M_2$ onda je $NW(M_1) = NW(M_2)$. Iz toga slijedi da je $\tau_1(i) = \tau_2(i)$ za svaki $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$. Time je dobivena kontradikacija s činjenicom da je $\tau_1 \neq \tau_2$. Iz toga slijedi da je ν injekcija. Budući da vrijedi da je $|S_{n-1}(213)| = C_{n-1} = E_n$, ν je bijekcija.

Neka je τ proizvoljno odabrana 213-izbjegavajuća permutacija. Budući da preslikavanje μ $\mathscr{C}$-matrici pridruži permutaciju τ za koju vrijedi da je $\tau(i) = j$ ako i samo ako je $m_{i,j}$ sjeverozapadna 1ca matrice M i s druge strane, ν permutaciji τ pridruži matricu M takvu da je $m_{i,j}$ njena sjeverozapadna 1ca ako i samo ako vrijedi da je $\tau(i) = j$, slijedi da je

$$\mu(\nu(\tau)) = \tau.$$

Dakle, $\nu^{-1} = \mu$. ■

Time je dobivena bijekcija između skupova $S_{n-1}(213)$ i $\mathscr{C}_n$.

Primjer 13. Svakoj permutacijskoj matrici M_τ 213-izbjegavajuća permutacije τ duljine 4 pridružena je $\mathscr{C}$-matrica reda 5:

$$\nu\left(\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \nu\left(\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & & 1 & \\ & & 1 & - & \mathbf{1} \\ & & & \mathbf{1} & \end{pmatrix}$$

$$\nu\left(\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ & 1 & & \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & 1 & - & & \mathbf{1} \\ & & \mathbf{1} & & \end{pmatrix}, \quad \nu\left(\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & & & 1 & \\ & 1 & & - & \mathbf{1} \\ & & 1 & & \\ & & & \mathbf{1} & \end{pmatrix}$$

$$\nu\left(\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & & & 1 & \\ & & 1 & - & \mathbf{1} \\ & 1 & - & \mathbf{1} & \\ & & \mathbf{1} & & \end{pmatrix}, \quad \nu\left(\begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 1 & - & & & \mathbf{1} \\ & \mathbf{1} & & & \end{pmatrix}$$

$$\nu\left(\begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & & 1 \\ & & 1 & \\ 1 & & & \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} & 1 & & & \\ & & & 1 & \\ & & 1 & - & \mathbf{1} \\ 1 & - & & \mathbf{1} & \\ & \mathbf{1} & & & \end{pmatrix}, \quad \nu\left(\begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & 1 & - & & \mathbf{1} \\ 1 & - & \mathbf{1} & & \\ & \mathbf{1} & & & \end{pmatrix}$$

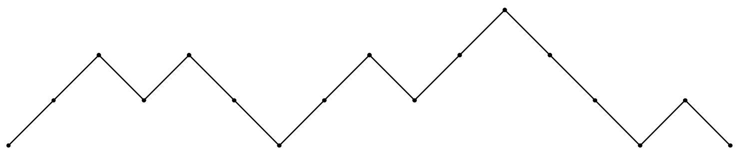
$$
\nu\left(\begin{pmatrix} & & & 1 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} & & & 1 & \\ 1 & & & - & \mathbf{1} \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \mathbf{1} & \end{pmatrix}, \quad \nu\left(\begin{pmatrix} & & & 1 \\ 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} & & & 1 & \\ 1 & & & - & \mathbf{1} \\ & & 1 & & \\ & 1 & - & \mathbf{1} & \\ & & \mathbf{1} & & \end{pmatrix}
$$

$$
\nu\left(\begin{pmatrix} & & 1 & \\ & & & 1 \\ 1 & & & \\ & 1 & & \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ 1 & & - & & \mathbf{1} \\ & 1 & & & \\ & & \mathbf{1} & & \end{pmatrix}, \quad \nu\left(\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ 1 & & & \\ & 1 & & \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} & & & 1 & \\ & & 1 & - & \mathbf{1} \\ 1 & & - & \mathbf{1} & \\ & 1 & & & \\ & & \mathbf{1} & & \end{pmatrix}
$$

$$
\nu\left(\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & & & \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} & & & 1 & \\ & 1 & & - & \mathbf{1} \\ & & 1 & & \\ 1 & - & & \mathbf{1} & \\ & \mathbf{1} & & & \end{pmatrix}, \quad \nu\left(\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} & & & 1 & \\ & & 1 & - & \mathbf{1} \\ & 1 & - & \mathbf{1} & \\ 1 & - & \mathbf{1} & & \\ & \mathbf{1} & & & \end{pmatrix}.
$$

3.2. DYCKOVI PUTOVI

Neka je n prirodan broj. Standardni Dyckov put $\mathscr{P}$ duljine $2n$ je put u rešetki $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ koji koracima $(1,1)$ i $(1,-1)$ poveže početnu točku $(0,0)$ s krajem $(2n,0)$ pri čemu ne prelazi ispod apscise. Broj standardnih Dyckovih putova duljine $2n$ jednak je n-tom Catalanovom broju. Točke u kojima se smjer Dyckovog puta mijenja iz koraka $(1,1)$ u korak $(1,-1)$ nazivaju se *vrhovima*, a točke u kojima se smjer mijenja iz koraka $(1,-1)$ u $(1,1)$ nazivaju se *dolinama*. Na Slici 3.4 prikazan je Dyckov put duljine 16.



Slika 3.4: Dyckov put duljine 16.

Jednostavnom bijekcijom

$$(x,y)\to\left(\frac{x+y}{2},\frac{x-y}{2}\right)$$

Dyckove putove može se preslikati u putove u cjelobrojnoj mreži koji početnu točku $(0,0)$ povežu s krajnjom točkom (n,n) koracima $(1,0)$ i $(0,1)$ i pri tom ne prelaze iznad pravca $y=x$. Ponekad se i ove putove naziva Dyckovima, te će se u ovom poglavlju koristiti ta indetifikacija. U ovakvom obliku, vrhovi su točke u kojima se iz koraka $(1,0)$ prelazi u korak $(0,1)$, a obrnutom promjenom koraka dobiju se doline. Neka je s P_n označen skup svih Dyckovih putova duljine $2n$.

Zbog jednostavnosti u nastavku će se Dyckov put poistovjetiti sa skupom svih cjelobrojnih točaka rešetke kojima prolazi. Neka je n prirodan broj i $\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_{2n+1},y_{2n+1})\}\subset\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ skup svih cjelobrojnih točaka Dyckovog puta $\mathscr{P}\in P_n$. Pišemo

$$\mathscr{P}=\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\dots,(x_{2n+1},y_{2n+1})\}.$$

Vrijedi da je $(x_1,y_1)=(0,0)$ i $(x_{2n+1},y_{2n+1})=(n,n)$.

Propozicija 3.2.1. Neka su (x_{v_k},y_{v_k}) i $(x_{v_{k+1}},y_{v_{k+1}})$ dva susjedna vrha Dyckovog puta $\mathscr{P}$ takvi da vrijedi $x_{v_k}<x_{v_{k+1}}$. Tada je $y_{v_k}<y_{v_{k+1}}$ i vrijedi da su uređeni parovi prirodnih brojeva $(x_{v_k},y_{v_k}+1),\dots,(x_{v_k},y_{v_{k+1}}),(x_{v_k}+1,y_{v_{k+1}}),\dots,(x_{v_{k+1}}-1,y_{v_{k+1}})$ točke Dyckovog puta.

Dokaz. Budući da je (x_{v_k}, y_{v_k}) vrh Dyckovog puta, u toj točki iz koraka $(1,0)$ prelazi se u korak $(0,1)$ pa je sljedeća točka koju put $\mathscr{P}$ sadrži $(x_{v_k}, y_{v_k}) + (0,1) = (x_{v_k}, y_{v_k}+1)$. Put se nastavlja istim korakom $(0,1)$ sve dok ne dođe do doline (x_{v_k}, y). U dolini se mjenja korak u $(1,0)$ i istim korakom prolazi sve do sljedećeg vrha $(x_{v_{k+1}}, y_{v_{k+1}})$ Dyckovog puta. Iz toga slijedi da je druga koordinata doline (x_{v_k}, y) jednaka drugoj koordinati sljedećeg vrha, $y = y_{v_{k+1}}$. Dakle, točke $(x_{v_k}, y_{v_k}+1), \ldots, (x_{v_k}, y_{v_{k+1}})$ su sadržane u Dyckovom putu $\mathscr{P}$ od vrha (x_{v_k}, y_{v_k}) do doline $(x_{v_k}, y_{v_{k+1}})$. Uzastopnim dodavanjem koraka $(1,0)$ počevši od doline $(x_{v_k}, y_{v_{k+1}})$ do sljedećeg vrha, dobiju se točke $(x_{v_k}+1, y_{v_{k+1}}), \ldots, (x_{v_{k+1}}-1, y_{v_{k+1}})$. ■

Propozicija 3.2.2. Neka je n prirodan broj i $\mathscr{P} = \{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_{2n+1},y_{2n+1})\}$, $(x_1,y_1) = (0,0)$ i $(x_{2n+1},y_{2n+1}) = (n,n)$. $\mathscr{P}$ je Dyckov put duljine $2n$ ako i samo ako za svaka dva susjedna uređena para $(x_k,y_k),(x_{k+1},y_{k+1}) \in \mathscr{P}$ vrijede sljedeća svojstva:

(i) $y_k \leq x_k$,

(ii) $x_k + y_k = x_{k+1} + y_{k+1} - 1$ i

(iii) $x_k \leq x_{k+1}$ i $y_k \leq y_{k+1}$,

$k \in \{1,2,\ldots,2n\}$.

Dokaz. Neka je $\mathscr{P} = \{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_{2n+1},y_{2n+1})\}$ Dyckov put. Budući da $\mathscr{P}$ ne prelazi iznad pravca $y = x$, slijedi svojstvo (i). Za svake dvije susjedne cjelobrojne točke (x_k,y_k) i (x_{k+1},y_{k+1}) Dyckovog puta vrijedi da je $(x_{k+1},y_{k+1}) = (x_k,y_k) + (1,0)$ ili $(x_{k+1},y_{k+1}) = (x_k,y_k) + (0,1)$ pa iz toga slijede sljedeća dva svojstva, (ii) i (iii).

S druge strane, neka za skup točaka $\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_{2n+1},y_{2n+1})\}$ cjelobrojne mreže vrijede navedena tri svojstva, (i), (ii) i (iii). Iz svojstva (i) slijedi da točke ne prelaze iznad pravca $y = x$. Budući da su svi x_k i y_k cijeli brojevi, iz svojstava (ii) i(iii) slijedi da se susjedne točke razlikuju za uređeni par $(1,0)$ ili $(0,1)$. Dakle, $\mathscr{P}$ je Dyckov put. ■

3.2.1. Korespondencija između matrica s alternirajućim predznakom i Dykovih puteva

Neka je n prirodan broj i $M = [m_{i,j}]$ proizvoljno odabrana $\mathscr{C}$-matrica reda n koja ima $m-1$ specijalnih elemenata, $m \leq n-1$. Neka je $\{m_{i_k,j_k} : k \in \{1,2,\ldots,m\}\}$ skup jugoistočnih 1ca i $\{m_{i_k,j_{k+1}} : k \in \{1,2,\ldots,m-1\}\}$ skup svih -1ca matrice M. Bez smanjenja općenitosti može se pretpostaviti da je $i_k < i_{k-1}$ za svaki $k \in \{2,3,\ldots,m\}$. Iz 3. koraka pridruživanja $\mathscr{C}$-matrice 213-permutaciji i po Korolaru 3.1.12 slijedi da je $j_1 < j_2 < \cdots < j_{m-1} < j_m$ i $i_1 = j_m = n$. Dodatno, neka je $i_{m+1} = j_0 = 1$.

Neka je s χ označeno preslikavanje iz skupa $\mathscr{C}_n$ u skup P_{n-1},

$$\chi : \mathscr{C}_n \to P_{n-1}$$

tako da svakoj $\mathscr{C}$-matrici $M = [m_{i,j}]$ reda n pridružen Dyckov put $\mathscr{P}$ duljine $2n-2$, $\chi(M) = \mathscr{P}$, za koji vrijedi da su točke (x,y) cjelobrojne mreže elementi puta $\mathscr{P}$ ako je $m_{n-y,x+1}$ element matrice M za koji vrijedi jedno od četiri slučaja:

(i) $m_{n-y,x+1}$ je jugoistočna 1ca,

(ii) $m_{n-y,x+1}$ je specijalni element,

(iii) $m_{n-y,x+1}$ je nula u stupcu j_k i retku i za koji vrijedi da je $i_k < i < i_{k+1}$, $k \in \{1,2,\ldots,m\}\}$,

(iv) $m_{n-y,x+1}$ je nula u retku i_k i stupcu j za koji vrijedi da je $j_{k-1} < j < j_k$, $k \in \{1,2\ldots,m\}\}$.

Dakle, svakoj matrici pridružen je put na sljedeći način: poziciji $(n,1)$ u matrici pridružena je točka $(0,0)$ cjelobrojne mreže, a poziciji $(1,n)$ točka (n,n). Budući da element jednak 1 u zadnjem retku matrice M zbog svojstva (ii) Definicije 2.2.1 sigurno nije u prvom stupcu, put počinje korakom $(1,0)$ i nastavlja istim dok ne dođe do prve jugoistočne 1ce m_{i_1,j_1}. U svakoj JI 1-ici mijenja korak iz $(1,0)$ u $(0,1)$ i u svakoj -1-ici obratno, iz $(0,1)$ u $(1,0)$. U nulama, put ne mijenja smjer kretanja. Budući da, po Korolaru 2.2.8, za svaku $\mathscr{C}$-matricu vrijedi da su svi elementi jednaki -1 ispod ili na sporednoj dijagonali, iz činjenice da je svaka jugoistočna 1ca zdesna ili ispod -1ce, slijedi da put dobiven preslikavanjem χ iz matrice M ne prelazi iznad pravca $y = x$. Dakle, put $\mathscr{P} = \chi(M)$ je Dyckov put pa je preslikavanje χ dobro definirano.

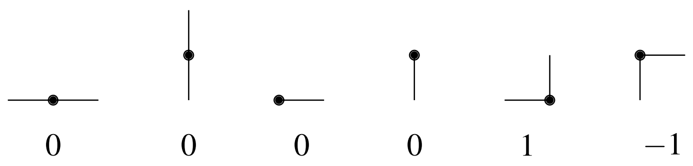
Neka je s o označeno preslikavanje iz skupa P_{n-1} u skup $\mathscr{C}_n$,

$$\mathrm{o} : P_{n-1} \to \mathscr{C}_n$$

tako da je svakom Dyckovom putu $\mathscr{P} = \{(x_1,y_1),\ldots,(x_{2n-1},y_{2n-1})\} \in P_{n-1}$ duljine $2n-2$ pridružena $\mathscr{C}$-matrica $M = [m_{i,j}]$ reda n postupkom u četiri koraka korespodencije u nastavku.

1. korak

   Element $m_{i,j}$ matrice M jednak je jednom od elemenata skupa $\{-1,0,1\}$ ovisno koji korak Dyckovog puta $\mathscr{P}$ prethodi i koji slijedi iza točke $(j-1,n-i)$ cjelobrojne mreže. Na Slici 3.5 prikazano je pravilo pridruživanja u ovom koraku.



Slika 3.5: Pridruživanje elemenata matrice M točkama Dyckovog puta.

2. korak

Neka je m jednak broju 1ca smještenih u matricu M 1. korakom. Neka je

$$SE := \{(i_1, j_1), (i_2, j_2), \ldots (i_m, j_m)\}$$

skup svih pozicija 1ca smještenih u 1. koraku, pri čemu su koordinate i_k indeksirane tako da je $i_k > i_{k+1}$ za svaki $k \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$. Zbog svojstava Dyckovog puta i činjenice da je točki $(j-1, n-i)$ pridružen element $m_{i,j}$ matrice M, slijedi da je $j_k > j_{k-1}$ za svaki $k \in \{2, 3, \ldots, m\}$.

3. korak

Za svaki $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ definira se skup

$$NW_k = \{(i_{k_1}, j_{k_1}), (i_{k_2}, j_{k_2}), \ldots, (i_{k_{j_k - j_{k-1}}}, j_{k_{j_k - j_{k-1}}})\}$$

pozicija matrice M takav da je $j_0 = 1$ i $j_{k_l} = j_k - l$, te $i_{k_l} = \max\{I_k \backslash \{\, i_{k_{l'}} : l' < l\}\}$ gdje je

$$I_k \;=\; \left\{ i_k - 1, i_k - 2, \ldots, i_k - \sum_{k'=k+1}^{m} |I_{k'}| - (j_k - j_{k-1}) \right\} \backslash \bigcup_{k'=k+1}^{m} I_{k'}.$$

skup svih rednih brojeva redaka pozicija skupa NW_k. Neka je

$$J_k = \{j_k - 1, j_k - 2, \ldots, j_k - (j_k - j_{k-1})\}$$

skup svih rednih brojeva stupaca pozicija skupa NW_k.

4. korak

U matricu M na pozicije iz skupa NW_k, za svaki $k \in \{1, \ldots, m\}$, smjeste se 1ce a na preostale pozicije matrice M smjeste se nule.

Iz korespodencije može se vidjeti da je (i_k, j_k) pozicija k-te po redu od ukupno m 1-ica dobivenih iz Dyckovog puta u 2. koraku, polazeći od pozicije $(n,1)$ u matrici. Prva 1-ica nalazi se u retku n i posljednja se nalazi u stupcu n, to jest vrijedi

$$i_1 = j_m = n.$$

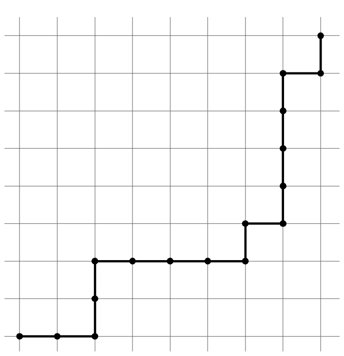
Iz definicije za i_{k_l} i j_{k_l} u 3. koraku, $l \in \{1,\ldots,|I_k|\}$, slijedi da je

$$i_k > i_{k_1} > i_{k_2} > \ldots > i_{k_{|I_k|}} \;\; i \;\; j_k > j_{k_1} > j_{k_2} > \ldots > j_{k_{|I_k|}}. \tag{3.8}$$

Drugim riječima, počevši od posljednje 1ce smještene u 2. koraku, m_{i_m,j_m} , svakoj 1-ici m_{i_k,j_k} dijagonalno gore-lijevo se smiještaju 1ce $m_{i_{k_1},j_{k_1}},\ldots,m_{i_{k_{|I_k|}},j_{k_{|I_k|}}}$ počevši od najbližeg stupca slijeva sve do (uključivo) stupca u kojem se nalazi najbliža -1-ica slijeva, pri čemu se preskoče retci u kojima se već nalazi lijeva 1-ica. Time je završeno popunjavanje matrice M nenul-elementima i svi preostali elementi matrice jednaki su nuli.

Slika 3.6 prikazuje 1. korak pridruživanja matrice M Dyckovom putu $\mathscr{P}$ u kojem su dobivene četiri 1-ice čije su pozicije

$$SE = \{(9,3),(7,7),(6,8),(2,9)\}.$$



$$\to \begin{pmatrix} & & & & & & & & 0 \\ & & & & & & & - & 1 \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & - & 1 & \\ & & - & 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ & & 0 & & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & & & & & & \end{pmatrix}$$

Slika 3.6: 1-ice pridružene vrhovima i -1-ice pridružene dolinama Dyckovog puta.

Slika 3.7 prikazuje dodavanje 1-ica čiji su skupovi pozicija

$$
\begin{aligned}
NW_1 &= \{(8,2),(7,1)\},\\
NW_2 &= \{(6,6),(4,5),(3,4),(2,3)\},\\
NW_3 &= \{(5,7)\},\\
NW_4 &= \{(1,8)\}.
\end{aligned}
$$

na koje su smještene 1-ice u 4. koraku.

$$
\begin{pmatrix}
 & & & & & & & & 0\\
 & & & & & & & - & \mathbf{1}\\
 & & & & & & & 0 & \\
 & & & & & & & 0 & \\
 & & & & & & & 0 & \\
 & & & & & & - & \mathbf{1} & \\
 & & - & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & & \\
 & & 0 & & & & & & \\
0 & 0 & \mathbf{1} & & & & & &
\end{pmatrix}
\to
\begin{pmatrix}
 & & & & & & & 1 & \\
 & & 1 & & & & & - & \mathbf{1}\\
 & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & 1 & - & \mathbf{1} & \\
1 & & - & & & & \mathbf{1} & & \\
 & 1 & & & & & & & \\
 & & \mathbf{1} & & & & & &
\end{pmatrix}
$$

Slika 3.7: 1-ice dobivene u drugom koraku.

Propozicija 3.2.3. Neka je n prirodan broj i $\mathscr{P}$ Dyckov put reda $2n-2$. Neka je M matrica reda n dobivena pridruživanjem o, $\text{o}(d) = M$. Neka su I_k i J_k, $k \in \{1,\ldots,m\}$, skupovi rednih brojeva redaka i stupaca matrice M definirani u 3. koraku korespodencije. Vrijede sljedeće tvrdnje:

(i) $|I_k| = |J_k|$ za svaki $k \in \{1,\ldots,m\}$

(ii) Skupovi $\{I_1, I_2, \ldots, I_m\}$ i $\{J_1, J_2, \ldots, J_m\}$ su dvije particije skupa $\{1,\ldots,n-1\}$.

(iii) Ako su $k, k' \in \{1,\ldots,m\}$, takvi da je $k < k'$ onda su ispunjene sljedeće tvrdnje

- $i_{k_l} < i_{k'_{l'}}$ ako i samo ako je $i_{k_l} < i_{k'_{|I'_k|}}$,
- $i_{k_l} > i_{k'_{l'}}$ ako i samo ako je $i_{k_l} \geq i_{k'}$ i

· $j_{k_l} < j_{k'_{l'}}$

za svaki $l \in \{1,\ldots,|I_k|\}$ i $l' \in \{1,\ldots,|I_{k'}|\}$.

S druge strane, ako postoje $l \in \{1,\ldots,|I_k|\}$ i $l' \in \{1,\ldots,|I_{k'}|\}$ takvi da je $j_{k_l} < j_{k'_{l'}}$ onda je $k < k'$.

Dokaz. (i) Iz 3. koraka korespodencije lako se vidi da je $|J_k| = j_k - j_{k-1}$. Također, jasno je i da je $|I_m| = j_m - j_{m-1}$. Dakle, za $k = m$ tvrdnja vrijedi. Lako se vidi da je $I_k \cap I_{k'} = \emptyset$ za svaki $k \neq k'$. Iz te činjenice i činjenice da je

$$\bigcup_{k'=k+1}^{m} I_{k'} \subset \left\{ i_k - 1, i_k - 2, \ldots, i_k - \sum_{k'=k+1}^{m} |I_{k'}| - (j_k - j_{k-1}) \right\}$$

slijedi

$$\begin{aligned} |I_k| &= \left| \left\{ i_k - 1, i_k - 2, \ldots, i_k - \sum_{k'=k+1}^{m} |I_{k'}| - (j_k - j_{k-1}) \right\} \right| - \left| \bigcup_{k'=k+1}^{m} I_{k'} \right| \\ &= \sum_{k'=k+1}^{m} |I_{k'}| + (j_k - j_{k-1}) - \sum_{k'=k+1}^{m} |I_{k'}| \\ &= j_k - j_{k-1}. \end{aligned}$$

(ii) Po definiciji za J_k, $k \in \{1,2,\ldots,m\}$, lako se vidi da je

$$\bigcup_{k=1}^{m} J_k = \{1,\ldots,n-1\}$$

i $J_k \cap J_{k'} = \emptyset$ za svaki $k \neq k'$, $k,k' \in \{1,2,\ldots,m\}$.

Budući da je $I_k \cap I_{k'} = \emptyset$ i za svaki I_k vrijedi da je $|I_k| = j_k - j_{k-1}$ vrijedi da je

$$\begin{aligned} \left| \bigcup_{k=1}^{m} I_k \right| &= \sum_{k=1}^{m} |I_k| \\ &= \sum_{k=1}^{m} (j_k - j_{k-1}) = j_m - j_0 = n - 1 \end{aligned}$$

Također, za svaki $k \in \{1,2,\ldots,m\}$ $I_k \subset \{1,\ldots,n-1\}$, pa slijedi tvrdnja.

(iii) Neka su $k,k' \in \{1,\ldots,m\}$ takvi da je $k < k'$. Vrijedi da je $i_k > i_{k'}$. Neka su $l \in \{1,\ldots,|I_k|\}$ i $l' \in \{1,\ldots,|I_{k'}|\}$ proizvoljno odabrani takvi da je $i_{k_l} < i_{k'_{l'}}$. Iz definicije skupova I_k i $I_{k'}$ slijedi da je i_{k_l} ili manji ili veći od svih elemenata skupa $I_{k'}$. Budući da je manji od $i_{k'_{l'}}$, nužno je manji i od $i_{k'_{|I'_k|}}$. Zbog istih argumenata vrijedi i drugi smjer tvrdnje.

Ako je $i_{k_l} > i_{k'_{l'}}$, tada je i_{k_l} veći od svih elemenata skupa $I_{k'}$. Budući da je $i_{k'} - 1 = \max I_{k'}$, vrijedi da je $i_{k_l} \geq i_{k'}$. S druge strane, ako je $i_{k_l} \geq i_{k'}$, onda je i_{k_l} veći od svih elemenata skupa $I_{k'}$ jer je $i_{k'} > \max I_{k'}$.

Iz definicije skupova J_k lako se vidi da je $k < k'$ ako i samo ako je $j_{k_l} < j_{k'_{l'}}$.

■

Zbog svojstva (ii) Propozicije 3.2.3 slijedi da se u svaki redak i stupac matrice u drugom koraku nužno upiše točno jedna 1. U svojstvu (iii) Propozicije 3.2.3 stoji da su svi stupci pozicija skupa J_k slijeva svih stupaca pozicija u skupu J'_k kad je $k < k'$, dok za retke vrijedi da dio redaka pozicija I_k mora biti ispod svih redaka pozicija skupa I'_k, a dio može biti iznad svih redaka pozicija I'_k.

Vrijedi sljedeća propozicija:

Propozicija 3.2.4. Neka je n prirodan broj i $\mathscr{P}$ Dyckov put reda $2n-2$. Neka je M matrica reda n dobivena pridruživanjem o, $\text{o}(d) = M$. Matrica M je $\mathscr{C}$-matrica.

Dokaz. Neka je matrica M dobivena iz Dyckovog puta duljine $2n-2$ korespodencijom. Potrebno je pokazati da je M matrica s alternirajućim predznakom koja zadovoljava svojstva (i) i (ii) Definicije 2.2.1. Očito je da su svi elementi matrice M jednaki 1, -1 ili 0. Oblik Dyckovog puta i način na koji se smiještaju elementi u matricu u 1. koraku osigurava da se ispod i zdesna svake -1-ice sigurno nalazi točno jedna 1-ica. Po Propoziciji 3.2.3 slijedi da retci s rednim brojevima $1, 2, \ldots, n-1$ imaju točno jednu 1cu i to tako da su 1ce u retcima rednih brojeva $i_2, i_3, \ldots, i_m$ slijeva -1cama dodanim u 1. koraku korespodencije. Također, 1ce u stupcima rednih brojeva $j_1, j_2, \ldots, j_{m-1}$ smještene su iznad -1ca dodanih u 1. koraku korespodencije. Iz toga slijedi da nenul elementi matrice M alterniraju u predznaku i da je suma svakog retka i svakog stupca jednaka 1. Dakle, M je matrica s alternirajućim predznakom.

Ako matrica M sadrži permutaciju (213) tada postoje $i^1, i^2, i^3, j^1, j^2, j^3 \in \{1, 2, \ldots, n\}$ takvi da je

$$i^1 < i^2 < i^3, \quad j^2 < j^1 < j^3 \quad \text{i} \quad m_{i^1,j^1} = m_{i^2,j^2} = m_{i^3,j^3} = 1. \tag{3.9}$$

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{ccccc} \quad & j^2 & j^1 & j^3 & \quad \end{array} & \\ \left(\begin{array}{ccccc} \ddots & & & & \\ & & \mathbf{1} & & \\ & \mathbf{1} & & & \\ & & & \mathbf{1} & \\ & & & & \ddots \end{array}\right) & \begin{array}{c} \\ i^1 \\ i^2 \\ i^3 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Elementi smješteni jugoistočno od 1-ica dobivenih u 1. koraku korespodencije su jednaki nuli. Prema tome, vrijedi da su m_{i^1,j^1} i m_{i^2,j^2} nužno 1-ice smještene u 4. koraku. 1ca m_{i^3,j^3} može biti smještena u matricu M i u 1. i 4. koraku korespodencije. Pozicija svake od 1ca smještenih u 4. koraku pripada jednom od skupova NW_k, $k \in \{1,2,\dots,m\}$. Neka je skup pozicija matrice M kojem pripada pozicija 1ce m_{i^1,j^1} označen s $NW_{k'}$ i skup kojem pripada pozicija 1ce m_{i^2,j^2} s $NW_{k''}$. Ako je 1ca m_{i^3,j^3} smještena u 4. koraku, neka je skup pozicija kojima pripada njena pozicija označen s $NW_{k'''}$. Ako je m_{i^3,j^3} smještena u 1. koraku, neka je njena nova oznaka $m_{i''',j'''}$.Budući da je $i^1 < i^2$ i $j^2 < j^1$ iz (3.8) slijedi da je $k' \neq k''$, štoviše, zbog svojstva (iii) Propozicije 3.2.3 vrijedi i da je $k'' < k'$. Nejednakost (3.9) osigurava $k' \leq k'''$ and $k'' \leq k'''$. Slijedi da je $k'' < k' \leq k'''$. Također, budući da su $i_{k'}$, $i_{k''}$, $i_{k'''}$ retci 1ca smještenih u 1. koraku, nužno je

$$i_{k'''} \leq i_{k'} < i_{k''}. \tag{3.10}$$

Zbog svojstva $iii)$ Propozicije 3.2.3, činjenica da je $i^1 < i^2$ i nejednakost (3.10) impliciraju $i^2 > i_{k'}$. S druge strane $i^2 < i^3$ i $k'' < k'''$ pa je $i^2 < i^3 \leq i_{k'''}$. Dakle, vrijedi $i_{k'} < i^2 < i_{k'''}$ što je u kontradikciji s (3.10). Slijedi da matrica M izbjegava permutaciju $\sigma = (213)$.

Preostalo je pokazati svojstvo $ii)$ Definicije 2.2.1. Kao i u prethodnom slučaju, tvrdnja se dokazuje kontradikcijom. Neka je 1ca na poziciji $(i+1, j_1)$ desna 1-ica u $i+1$-om retku i takva da se nalazi slijeva lijeve jedinice 1ce u retku iznad, preciznije, na poziciji (i, j), pri čemu je $j_1 < j$.

$$\begin{array}{ccc} & & (i,j) \\ & & 1 \\ & 1 & \\ (i+1,j_1) & & \end{array}$$

Budući da svaka 1ca matrice M smještena 1. korakom u svom retku nužno ima -1cu i 1cu slijeva, 1ca na poziciji (i,j) mora biti smještena u matricu M u 4. koraku. Iz toga slijedi da postoji 1ca na poziciji $(i_1, j+1)$ pri čemu je $i_1 > i$. Ako je $i_1 = i+1$, tada 1ca na poziciji $(i+1, j_1)$ nije desna u $(i+1)$-om retku, a to je u suprotnosti s pretpostavkom. Ako je $i_1 \geq i+2$ tada matrica M sadrži permutaciju $\sigma = (213)$, a to nije moguće. Dakle, M zadovoljava svojstvo (ii) Definicije 2.2.1.

Time je dokazano da je M $\mathscr{C}$-matrica. ■

Iz Propozicije 3.2.4 slijedi korolar,

Korolar 3.2.5. Neka je n prirodan broj. Tada je preslikavanje $\text{o} : P_{n-1} \to \mathscr{C}_n$, opisano korespodencijom, dobro definirano.

Elementi matrice M jednaki 1 dobiveni u 1. koraku korespodencije su jugoistočne 1ce matrice M, a 1ce smještene u 4. koraku su sjeverozapadne 1ce.

Teorem 3.2.6. Neka je n prirodan broj. Preslikavanje $\text{o} : P_{n-1} \to \mathscr{C}_n$ je bijekcija skupova svih Dyckovih putova duljine $2n-2$ i svih $\mathscr{C}$-matrica reda n. Vrijedi da je $\text{o}^{-1} = \chi$.

Dokaz. Budući da se za dva različita Dyckova puta $\mathscr{P}_1$ i $\mathscr{P}_2$ nužno dobiju dvije različite $\mathscr{C}$-matrice M_1 i M_2 slijedi da je o injekcija. Vrijedi i $|P_{n-1}| = C_{n-1} = E_n$. Dakle, o je bijekcija.

Budući da se u 1. koraku korespodencije točkama $(j-1, n-i)$ Dyckovog puta pridruže jugoistočne 1ce i -1ce $m_{i,j}$ $\mathscr{C}$-matrice, a preslikavanje χ jugoistočnim 1cama i -1cama $m_{i,j}$ pridruži točke Dyckovog puta $(j-1, n-i)$ slijedi da je

$$\text{o}^{-1} = \chi.$$

■

Iz ove bijekcije može se vidjeti da doline Dyckovog puta $\mathscr{P}$ odgovaraju elementima jednakim -1 u pridruženoj matrici $M = \text{o}(d)$. Kako je dokazano u Odjeljku 2.2.2, broj matrica $M \in \mathscr{C}_n$ s k elemenata jednakih -1 enumeriraju Narayanovi brojevi $N(n-1, k+1)$, a poznato je da isti brojevi enumeriraju broj Dyckovih putova duljine $2n-2$ s k dolina. Iz ovoga slijedi da bijekcija o čuva svojstva strukture $\mathscr{C}$-matrica i Dyckovih putova.

4. REALIZACIJE KONVEKSNIH POLITOPA

Vektorski prostor svih uređenih n-torki $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ realnih brojeva, za dani prirodni broj n nazivamo realan vektorski prostor i označavamo s $\mathbb{R}^n$. Elemente tog prostora interpretiramo geometrijski kao točke u n-dimenzionalnom euklidskom prostoru.

Za prirodni broj n, $T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ je točka euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ s i-tom koordinatom x_i, $T[i] = x_i$.

Za prirodni broj k neka je $S = \{T_1, T_2, \dots, T_k\}$ skup točaka u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$. *Konveksna ljuska* skupa S, u oznaci $[S]$ je skup svih točaka euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ koje su linearna kombinacija točaka skupa S sa sumom koeficijenata jednakom 1,

$$[S] = \left\{ \alpha_1 T_1 + \alpha_2 T_2 + \dots + \alpha_k T_k : \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = 1, \alpha_i > 0 \right\}.$$

Konveksna ljuska konačno mnogo točaka u euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$ naziva se *V-politop*.

i $\alpha_i \geq 0$ za svaki $i \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Hiperravnina H u prostoru $\mathbb{R}^n$ je skup točaka u prostoru definiran na način

$$H = \left\{ (x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} \kappa_i x_i = \lambda \right\}.$$

gdje su λ i κ_i realni brojevi, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, pri čemu je barem jedan κ_i različit od nule. Poluprostor euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ je dio prostora omeđen hiperravninom H, tj. skup svih točaka $T = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ kojima je suma koordinata veća ili jednaka λ, $x_1 + x_2 + \dots + x_n \geq \lambda$.

4.1. EUKLIDSKI PROSTOR $\mathbb{R}^{n-1}$ I MATRICE FAMILIJE $\mathscr{C}_n$

Neka je n prirodan broj. Svakoj familiji $\mathscr{C}_n$ pridružuje se politop koji ima $E_n = |\mathscr{C}_n|$ vrhova na način da se svakoj $\mathscr{C}$-matrici M pridruži točka $T(M) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Neka je n prirodan broj i $M = [m_{i,j}]$ $\mathscr{C}$-matrica reda n. Neka je s j_i označen redni broj stupca u kojem se nalazi lijeva 1ca u i-tom retku, $i \in \{1,\dots,n-1\}$. Dakle, j_i je redni broj stupca u kojem se nalazi sjeverozapadna 1ca i-tog retka. U Poglavlju 3 je pokazano da u svakom od prvih $n-1$ redaka $\mathscr{C}$-matrice postoji jedinstvena sjeverozapadna 1ca. Neka je s W_i označen skup svih rednih brojeva redaka čija se sjeverozapadna 1ca nalazi slijeva sjeverozapadnoj 1ci u i-tom retku matrice M,

$$W_i \quad = \quad \{i' \in \mathbb{N} : m_{i',j} = 1 \text{ je SZ 1ca }, j < j_i\}.$$

Neka su s U_i i V_i označeni skupovi

$$\begin{aligned} U_i &= \{i' \in W_i : i' < i\} \cup \{0\}, \\ V_i &= \{i' \in W_i : i < i'\} \cup \{n\}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Skup U_i sadrži sve redne brojeve redaka skupa W_i koji su manji od i, a V_i sve redne brojeve redaka koji su veći od i.

Definicija 4.1.1. Neka je n prirodan broj i $i \in \{1,\dots,n-1\}$. Neka je $M = [m_{i,j}]$ $\mathscr{C}$-matrica reda n i U_i i V_i skupovi definirani s relacijom 4.1. Reći ćemo da je $\max U_i$ *gornji rub* i $\min V_i$ *donji rub* za i-ti redak. Koriste se oznake $\imath_{U_i} := \max U_i$ i $\imath_{V_i} := \min V_i$.

Budući da je $0 \in U_i$ i $n \in V_i$, vrijedi da je $U_i \neq \emptyset$ i $V_i \neq \emptyset$ za svaki $i \in \{1,\dots,n-1\}$. Dakle, prirodni brojevi $\imath_{U_i}$ i $\imath_{V_i}$ su dobro definirani i elementi su skupa $\{0,1,\dots,n\}$.

Matrici M pridružuje se točka $T \in \mathbb{R}^{n-1}$ čija je i-ta koordinata jednaka

$$T[i] = (i - \imath_{U_i})(\imath_{V_i} - i).$$

Posljedično, koordinate točke T pridružene matrici M su prirodni brojevi.

Dana je $\mathscr{C}$-matrica M,

$$M = \begin{pmatrix} & & & 1 & \\ 1 & & & - & 1 \\ & & 1 & & \\ & 1 & - & 1 & \\ & & 1 & & \end{pmatrix}.$$

Skupovi U_i i V_i, i vrijednosti ι_{U_i} i ι_{V_i}, $i \in \{1,2,3,4\}$, matrice M su

$$\begin{aligned} U_1 = \{0\}, V_1 = \{2,3,4,5\},\ \ \iota_{U_1} = 0,\ \ \iota_{V_1} = 2, \\ U_2 = \{0\}, V_2 = \{5\},\ \ \iota_{U_2} = 0,\ \ \iota_{V_2} = 5, \\ U_3 = \{0,2\}, V_3 = \{4,5\},\ \ \iota_{U_3} = 2,\ \ \iota_{V_3} = 4, \\ U_4 = \{0,2\}, V_4 = \{5\},\ \ \iota_{U_4} = 2,\ \ \iota_{V_4} = 5. \end{aligned}$$

Točka $T(M) \in \mathbb{R}^{n-1}$ pridružuje se matrici M na sljedeći način

$$\begin{aligned} T[1] &= (1-0)(2-1) = 1, \\ T[2] &= (2-0)(5-2) = 6, \\ T[3] &= (3-2)(4-3) = 1, \\ T[4] &= (4-2)(5-4) = 2. \end{aligned}$$

$T(M) = (1,6,1,2)$.

Primjer 14. Za 5 $\mathscr{C}$-matrica reda 4 sljedeće točke su dobivene gore opisanim pridruživanjem,

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & - & 1 \\ & & 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & 1 & \\ 1 & & - & 1 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & 1 & \\ 1 & - & & 1 \\ & 1 & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & 1 & \\ & 1 & - & 1 \\ 1 & - & 1 & \\ & 1 & & \end{pmatrix}.$$

$$(3,2,1) \qquad (3,1,2) \qquad (1,4,1) \qquad (2,1,3) \qquad (1,2,3)$$

U nastavku se dokazuje da točke pridružene $\mathscr{C}$-matricama na gore opisani način pripadaju određenim hiperravninama. Neka je s H_n označena hiperravnina u prostoru $\mathbb{R}^n$, definirana na način

$$H_n := \left\{ (x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n(n+1)}{2} \right\}.$$

Teorem 4.1.2. Neka je n prirodan broj, M $\mathscr{C}$-matrica reda n i $T(M) = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ točka prostora $\mathbb{R}^{n-1}$ pridružena matrici M. Točka $T(M)$ pripada hiperravnini H_{n-1}.

Dokaz. Dokaz se provodi indukcijom po redu n matrice $M = [m_{i,j}] \in \mathscr{C}_n$. Za potrebu dokaza propozicije najprije se dokazuje pomoćna tvrdnja PT,

PT: Ako je matrica M $\mathscr{C}$-matrica reda n tipa I onda je j-ta koordinata njoj pridružene točke $T(M)$

$$T(M)[j] = \begin{cases} n-1, & \text{za } j = 1 \\ T(M_{n-1})[j-1], & \text{za } j > 1 \end{cases}.$$

gdje je M_{n-1} podmatrica reda $n-1$ u donjem desnom kutu, iz koje je M nastala rekurzijom.

Ako je M $\mathscr{C}$-matrica reda n tipa II onda je j-ta koordinata njoj pridružene točke $T(M)$

$$T(M)[j] = \begin{cases} T(M_k)[j], & \text{za } j < k \\ j(n-j), & \text{za } j = k \\ T(M_{n-k})[j-k], & \text{za } j > k \end{cases}.$$

gdje su M_k i M_{n-k} podmatrice reda k i $n-k$, redom, iz kojih je M nastala rekurzijom.

Dokaz (PT): U prvom slučaju, budući da je 1-ica $m_{1,1} = 1$ u prvom retku matrice sjeverozapadna 1ca koja se nalazi u prvom stupcu, ne postoji redak ni iznad ni ispod prvog retka takav da je mu je sjeverozapadna 1ca slijeva 1ci $m_{1,1}$. Slijedi da je $\iota_{U_1} = 0$ i $\iota_{V_1} = n$. Dakle, $T(M)[1] = (1-0)(n-1) = n-1$.

Za $(j-1)$-u koordinatu $T(M_{n-1})[j-1]$, $j \in \{2,3,\ldots,n\}$, točke $T(M_{n-1})$ pridružene podmatrici M_{n-1} vrijedi

$$T(M_{n-1})[j-1] = (j-1-\iota_{U_{j-1}})(\iota_{V_{j-1}} - (j-1)).$$

Budući da je redni broj svakog retka matrice M_{n-1} za 1 manji od tog istog retka unutar matrice M i da je 1ca $m_{1,1}$ SZ 1ca koja se nalazi slijeva svim ostalim SZ 1cama matrice M, vrijedi da je

$$T(M)[j] = (j-(\iota_{U_{j-1}}+1))((\iota_{V_{j-1}}+1)-j) = T(M_{n-1})[j-1].$$

U drugom slučaju SZ 1ca u prvom stupcu nalazi se u k-tom retku, $m_{k,1} = 1$, $k \in \{2,3,\ldots,n-1\}$. Dakle, ne postoji SZ 1ca u matrici M koja se nalazi slijeva 1ci $m_{k,1} = 1$. Slijedi da je $\iota_{U_k} = 0$ i $\iota_{V_k} = n$, dakle,

$$T(M)[k] = (k-0)(n-k) = k(n-k).$$

Za SZ 1-icu matrice M koja se nalazi u retku $j \in \{1,\ldots,k-1\}$ vrijedi da je i SZ 1ca podmatrice M_k u j-tom retku. Vrijednost ι_{U_j} jednaka je unutar obiju matrica, M i M_k. Isto vrijedi i za vrijednost ι_{V_j} jer podmatrica M_k završava s k-tim retkom, a matrica M u k-tom retku ima SZ 1cu $m_{k,1}$ koja se nalazi slijeva svim ostalim SZ 1cama.

Neka je $m_{j,1}$ SZ 1ca matrice M u j-tom retku, $j \in \{k+1,\dots,n-1\}$. Vrijedi da je $m_{j,1}$ SZ 1ca podmatrice M_{n-k} u $(j-k)$-tom retku. Neka je $\iota_{U_j} = \max U_j$ i $\iota_{V_j} = \max V_j$ za j-ti redak matrice M. Budući da je redni broj svakog retka u matrici M_{n-k} za k manji od rednog broja istog retka u matrici M, vrijedi

$$\begin{aligned} T(M)[j] &= (j-\iota_{U_{j-1}})(\iota_{V_{j-1}}-j) \\ &= ((j-k)-(\iota_{U_{j-1}}-k))((\iota_{V_{j-1}}-k)-(j-k)) \\ &= T(M_{n-k})[j-k]. \end{aligned}$$

Time je dokazana pomoćna tvrdnja PT.

Za $n=2$ tvrdnja očigledno vrijedi. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za svaki $m \le n$, tj. za proizvoljnu matricu $M \in \mathscr{C}_m$ pridružena točka $T = (x_1,\dots,x_{m-1}) \in \mathbb{R}^{m-1}$ pripada hiperravnini H_{m-1},

$$\sum_{i=1}^{m-1} x_i = \frac{(m-1)m}{2}.$$

Neka je matrica M proizvoljna $\mathscr{C}$-matrica reda $n+1$. Matrica M može biti tipa I ili II. Ako je M tipa I onda po Teoremu 2.2.7 sadrži podmatricu $M' \in \mathscr{C}_n$ u donjem desnom kutu. Po pomoćnoj tvrdnji PT za točku $T = (x_1,\dots,x_n)$ pridruženu matrici M vrijedi da je $T = (n, x'_1,\dots,x'_{n-1})$, gdje je $x'_j = T'[j]$ j-ta koordinata točke T' pridružene matrici M'. Vrijedi da je

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = n + \sum_{i=1}^{n-1} x'_i = n + \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Druga jednakost slijedi po pretpostavci indukcije.

Ako je M tipa II tada po Teoremu 2.2.7 sadrži dvije podmatrice M' i M'' familija $\mathscr{C}_{k+1}$ i $\mathscr{C}_{n-k}$, redom. Po pomoćnoj tvrdnji PT slijedi da je

$$T = (x_1,\dots,x_n) = (x'_1,\dots,x'_k, k(n-k), x''_1,\dots,x''_{n-k-1}),$$

gdje je x'_j j-ta koordinata točke T' pridružene podmatrici M', $j \in \{1,\dots,k\}$, i x''_j j-ta koordinata točke T'' pridružene podmatrici M'', $j \in \{1,\dots,n-k-1\}$. Vrijedi

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{k} x'_i + (k+1)(n-k) + \sum_{i=1}^{n-k-1} x''_i \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)(n-k) + \frac{(n-k-1)(n-k)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Druga jednakost slijedi po pretpostavci indukcije.

Time je dokazana tvrdnja. ■

Zbog rekurzivne strukture matrice M svaka sjeverozapadna 1ca dodana je u jednom od koraka rekurzije iz koje je M nastala. Primjerice, SZ 1ca u $(n-1)$-om stupcu nastala je u prvom koraku rekurzije kada je od $\mathscr{C}$-matrice $\begin{pmatrix}1\end{pmatrix}$ reda 1 nastala $\mathscr{C}$-matrica

$$\begin{pmatrix}1 & \\ & 1\end{pmatrix}$$

reda 2; SZ 1ca u $(n-2)$-om stupcu nastala je u drugom koraku kada je iz $\mathscr{C}$-matrice reda 2 nastala jedna od dvije $\mathscr{C}$-matrice reda 3 itd.

Propozicija 4.1.3. Neka je n prirodan broj, $M = [m_{i,j}]$ $\mathscr{C}$-matrica reda n i $T(M) = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ točka prostora $\mathbb{R}^{n-1}$ pridružena matrici M. Neka je $k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ proizvoljno odabran i neka je s i_k označen redak u kojemu se nalazi sjeverozapana 1ca u k-tom stupcu. Tada vrijedi da je

$$\sum_{j=\iota_{U_{i_k}}+1}^{\iota_{V_{i_k}}-1} x_j = \frac{(\iota_{V_{i_k}} - \iota_{U_{i_k}} - 1)(\iota_{V_{i_k}} - \iota_{U_{i_k}})}{2}.$$

Dokaz. Neka je n prirodan broj i $k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ proizvoljno odabran. Neka je $m_{i_k,k}$ sjeverozapadna 1ca matrice M. Vrijedi da je $m_{i_k,k}$ dodana u jednom od koraka rekurzije pri čemu spaja dvije podmatrice zdesna i $m_{i_k,k}$ se nalazi u prvom stupcu podmatrice nastale tim korakom. Neka je tako nastala podmatrica označena s M_k. Budući da se sve 1ce iz M_k nalaze zdesna 1ci $m_{i_k,k}$, jedna od podmatrica koje čine M_k, nalazi se ispod i_k-tog retka i završava u $\iota_{V_{i_k}}$-tom retku, a druga počinje u $\iota_{U_{i_k}}+1$-om retku i završava u i_k-tom. Dakle, podmatrica M_k počinje u $\iota_{U_{i_k}}+1$-om retku i završava u $\iota_{V_{i_k}}$-tom retku, te počinje u k-tom stupcu i završava u $(k + (\iota_{V_{i_k}} - \iota_{U_{i_k}}) - 1)$-om stupcu matrice M. Vrijedi primjetiti, ako je podmatrica M_k tipa I, postoji samo spomenuta podmatrica ispod i_k-tog retka, a $\iota_{U_{i_k}}+1$-i redak se poklapa s i_k-tim.

Matrica M_k je $\mathscr{C}$-matrica. Neka je točka prostora $\mathbb{R}^{\iota_{V_{i_k}}-\iota_{U_{i_k}}-1}$ pridružena matrici M_k označena s $T_k := T(M_k)$. Zbog pomoćne tvrdnje PT u dokazu Teorema 4.1.2 točka $T(M)$ nasljeđuje svih $\iota_{V_{i_k}} - \iota_{U_{i_k}} - 1$ koordinata točke T_k, to jest $T(M)[j] = T_k[j - \iota_{U_{i_k}}]$ za svaki $j \in \{\iota_{U_{i_k}}+1, \iota_{U_{i_k}}+2, \ldots, \iota_{V_{i_k}}-1\}$.

S druge strane, budući da je M_k $\mathscr{C}$-matrica reda $\iota_{V_{i_k}} - \iota_{U_{i_k}}$, po Teoremu 4.1.2 točka T_k pripada hiperravnini $H_{\iota_{V_{i_k}}-\iota_{U_{i_k}}-1}$, to jest, za koordinate $T_k[j - \iota_{U_{i_k}}]$, $j \in \{\iota_{U_{i_k}}+1, \iota_{U_{i_k}}+2, \ldots, \iota_{V_{i_k}}-1\}$

točke T_k vrijedi

$$\sum_{j=\iota_{U_{i_k}}+1}^{\iota_{V_{i_k}}-1} T_k[j-\iota_{U_{i_k}}] = \frac{(\iota_{V_{i_k}}-\iota_{U_{i_k}}-1)(\iota_{V_{i_k}}-\iota_{U_{i_k}})}{2}$$

Budući da je $x_j = T(M)[j] = T_k[j-\iota_{U_{i_k}}]$, slijedi tvrdnja.

$\blacksquare$

Primjer 15. Točka pridružana matrici

$$M = \begin{pmatrix}
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & - & 1 \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & - & 1 & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & - & 1 & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & - & . & 1 & . & . & . \\
1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & - & 1 & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . \\
. & 1. & . & . & . & . & . & . & . & . & - & 1 & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & \mathbf{1} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & \mathbf{1} & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & . & \mathbf{1} & - & \mathbf{1}. & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & . & . & \mathbf{1} & - & \mathbf{1} & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & \mathbf{1} & - & . & \mathbf{1} & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & 1 & . & . & - & \mathbf{1} & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
. & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & .
\end{pmatrix},$$

je $T(M) = (1,2,9,1,2,12,77,1,18,4,1,2,3,5,18,2,1)$. Promotrimo podmatricu M_k matrice M nastalu korakom rekurzije u kojem je dodana SZ 1ca koja se u matrici M nalazi u stupcu rednog broja $k=6$,

$$M_k = \begin{pmatrix} . & 1 & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 1 & . \\ . & . & . & 1 & - & 1 \\ . & . & 1 & - & 1 & . \\ 1 & - & . & 1 & . & . \\ . & 1 & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

Za $k=6$ u matrici M vrijedi da je $i_6 = 14$. Nadalje, vrijednosti $\iota_{U_{i_6}}$ i $\iota_{V_{i_6}}$ jednake su 9 i 15, redom. Red podmatrice M_6 jednak je $\iota_{V_{i_6}} - \iota_{U_{i_6}} = 15-9=6$. Točka pridružena matrici M_6 nalazi se u prostoru $\mathbb{R}^5$ i jednaka je $T_6 = (4,1,2,3,5)$. Vidi se da je $T(M)[j] = T_6[j-\iota_{U_{i_6}}]$ za svaki $j \in \{\iota_{U_{i_6}}+1, \iota_{U_{i_6}}+2, \dots, \iota_{V_{i_6}}-1\}$.

Može se provjeriti kako se koordinate točke $T(M)$ nasljeđuju iz koordinata točke T_k, pridružene podmatrici M_k, za svaki $k \in \{2,3,\dots,17\}$.

Za skup $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$, $\Omega \subset \mathbb{N}$, takav da je $\omega_i = \omega_1 + (i-1)$ kaže se da je *interval* prirodnih brojeva. Neka je s H_Ω označena hiperravanina u prostoru $\mathbb{R}^n$,

$$H_\Omega = \left\{ (x_1,\dots,x_n) : \sum_{i=\omega_1}^{\omega_k} x_i = \frac{k(k+1)}{2} \right\},$$

pri čemu je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\} \subset \{1,2,\dots,n\}$ interval prirodnih brojeva.

Neka je $M = [m_{i,j}]$ $\mathscr{C}$-matrica reda n i za svaki redak rednog broja i neka je s Ω_i označen interval prirodnih brojeva, $\Omega_i = \{\iota_{U_i}+1, \dots, \iota_{V_i}-1\}$, pri čemu je ι_{U_i} gornji rub i ι_{V_i} donji rub za i-ti redak. Iz Propozicije 4.1.3 slijedi da točka $T(M)$, pridružena $\mathscr{C}$-matrici M, pripada svakoj hiperravnini H_{Ω_i}, $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$.

Korolar 4.1.4. Neka je n prirodan broj i M proizvoljno odabrana $\mathscr{C}$-matrica reda n. Neka je za svaki stupac $j \in \{2,3,\dots,n-1\}$ sa i_j označen redak u kojem se nalazi sjeverozapadna 1ca u j-tom stupcu. Točka $T(M) \in \mathbb{R}^{n-1}$ pridružena matrici M nalazi se u presjeku

$$H_{n-1} \cap H_{\Omega_{i_2}} \cap H_{\Omega_{i_3}} \cap \cdots \cap H_{\Omega_{i_{n-1}}},$$

pri čemu je $\Omega_{i_j} = \{\iota_{U_{i_j}}+1 \dots, \iota_{V_{i_j}-1}\}$ te $\iota_{U_{i_j}}$ i $\iota_{V_{i_j}}$ gornji, odnosno donji rub za i_j-ti redak.

Propozicija 4.1.5. Neka je n prirodan broj, $M = [m_{i,j}]$ $\mathscr{C}$-matrica reda n i $T(M) = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ točka prostora $\mathbb{R}^{n-1}$ pridružena matrici M. Neka je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}$ interval prirodnih brojeva, $\Omega \subset \{1,2,\dots,n-1\}$. Tada vrijedi

$$\sum_{j=1}^{k} x_{\omega_j} \geq \frac{k(k+1)}{2}.$$

Dokaz. Ako postoji redak s rednim brojem i za kojeg vrijedi da je $\omega_1 = \iota_{U_i} + 1$ i $\omega_k = \iota_{V_i} - 1$, po Propoziciji 4.1.3 slijedi jednakost,

$$\sum_{j=1}^{k} x_{\omega_j} = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Neka za svaki $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ vrijedi da je zadovoljena barem jedna od sljedećih dviju nejednakosti,

(i) $\omega_1 \neq \iota_{U_i} + 1$ ili

(ii) $\omega_k \neq \iota_{V_i} - 1$.

U ovom slučaju vrijedi da je

$$\sum_{j=1}^{k} x_{\omega_j} > \frac{k(k+1)}{2}. \tag{4.2}$$

Tvrdnja 4.2 se dokazuje indukcijom po k, $k = |\Omega|$.

Neka je $k = 1$. Po definiciji točke $T(M)$ pridružene matrici M slijedi da je

$$x_{\omega_1} = (\omega_1 - \iota_{U_{i_{\omega_1}}})(\iota_{V_{i_{\omega_1}}} - \omega_1).$$

Budući da je $\iota_{U_{i_{\omega_1}}} < \omega_1$, $\iota_{V_{i_{\omega_1}}} > \omega_1$ i vrijedi barem jedna od nejednakosti *(i)* i *(ii)*, slijedi da je

$$x_{\omega_1} > 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}.$$

Pretpostavimo da za svaki $m \leq k$ tvrdnja vrijedi,

$$\sum_{j=1}^{m} x_{\omega_j} > \frac{m(m+1)}{2}.$$

Neka je $m = k+1$ i $i \in \Omega$ redni broj retka matrice M čija se SZ 1ca nalazi slijeva svim SZ 1cama u retcima čiji su redni brojevi u skupu $\Omega \setminus \{i\}$. Vrijedi da je $x_i = (i - \iota_{U_i})(\iota_{V_i} - i)$ pri čemu je

$$\iota_{U_i} < \omega_1 \text{ i } \iota_{V_i} > \omega_{k+1}. \tag{4.3}$$

Po pretpostavci indukcije vrijedi da je

$$\sum_{j=\omega_1}^{i-1} x_j > \frac{(i-\omega_1)(i-\omega_1+1)}{2} \tag{4.4}$$

i

$$\sum_{j=i+1}^{\omega_{k+1}} x_j > \frac{(\omega_{k+1}-i)(\omega_{k+1}-i+1)}{2}. \tag{4.5}$$

Vrijedi

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k+1} x_{\omega_j} &= \sum_{j=\omega_1}^{\omega_{k+1}} x_j > \frac{(i-\omega_1)(i-\omega_1+1)}{2} + x_i + \frac{(\omega_{k+1}-i)(\omega_{k+1}-i+1)}{2} \\
&= \frac{(i-\omega_1)(i-\omega_1+1)}{2} + (i-\iota_{U_i})(\iota_{V_i}-i) + \frac{(\omega_{k+1}-i)(\omega_{k+1}-i+1)}{2}
\end{aligned}$$

Zbog relacije 4.3 vrijedi da je $(i-\iota_{U_i})(\iota_{V_i}-i) \geq (i-(\omega_1-1))((\omega_{k+1}+1)-1)$. Slijedi

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k+1} x_{\omega_j} &> \frac{(i-\omega_1)(i-\omega_1+1)}{2} + (i-(\omega_1-1))((\omega_{k+1}+1)-i) + \frac{(\omega_{k+1}-i)(\omega_{k+1}-i+1)}{2} \\
&= \frac{(i-\omega_1)^2+(i-\omega_1)+(\omega_{k+1}-i)^2+(\omega_{k+1}-i)}{2} + (i-\omega_1+1)(\omega_{k+1}-i+1) \\
&= \frac{(i-\omega_1)^2+(i-\omega_1)+(\omega_{k+1}-i)^2+(\omega_{k+1}-i)}{2} + (i-\omega_1)(\omega_{k+1}-i)+(\omega_{k+1}-i)+(i-\omega_1)+1 \\
&= \frac{(i-\omega_1)^2+(i-\omega_1)+(\omega_{k+1}-i)^2+(\omega_{k+1}-i)+2(i-\omega_1)(\omega_{k+1}-i)}{2} + \omega_{k+1}-\omega_1+1 \\
&= \frac{(i-\omega_1+\omega_{k+1}-i)^2+i-\omega_1+\omega_{k+1}-i}{2} + \omega_{k+1}-\omega_1+1 \\
&= \frac{k^2+k}{2} + k+1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2}
\end{aligned}$$

Time je dokazana tvrdnja.

■

Korolar 4.1.6. Neka je n prirodan broj i $\{T_1, T_2, \ldots, T_{C_{n-1}}\} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ skup točaka pridruženih matricma familije $\mathscr{C}_n$. Niti jedna točka T_i ne može se prikazati kao konveksna kombinacija preostalih točaka,$T_1, \ldots T_{i-1}, T_{i+1} \ldots, T_{C_{n-1}}$.

4.2. Realizacija 3-dimenzionalnog politopa

U ovom odjeljku proučit ćemo svojstva politopa čiji su vrhovi točke pridružene $\mathscr{C}$-matricama reda 5. Budući da je takvih matrica 14, politop ima 14 vrhova. Bridovi politopa povezuju točke čije su pripadajuće matrice povezane u incidencijskoj strukturi definiranoj u Odjeljku 4.4.

Definicija 4.2.1. Neka je n prirodan broj i $a_1, a_2, \ldots, a_n$ konačan niz duljine n. Neka je $n-2$ para zagrada smješteno između elemenata niza $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tako da svaki par zagrada zatvara dva elementa, pri čemu se dva elementa unutar para zagrada također smatra jednim elementom. Niz elemenata a_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sa zagradama smještenima na opisani način naziva se *grupiranje* duljine n.

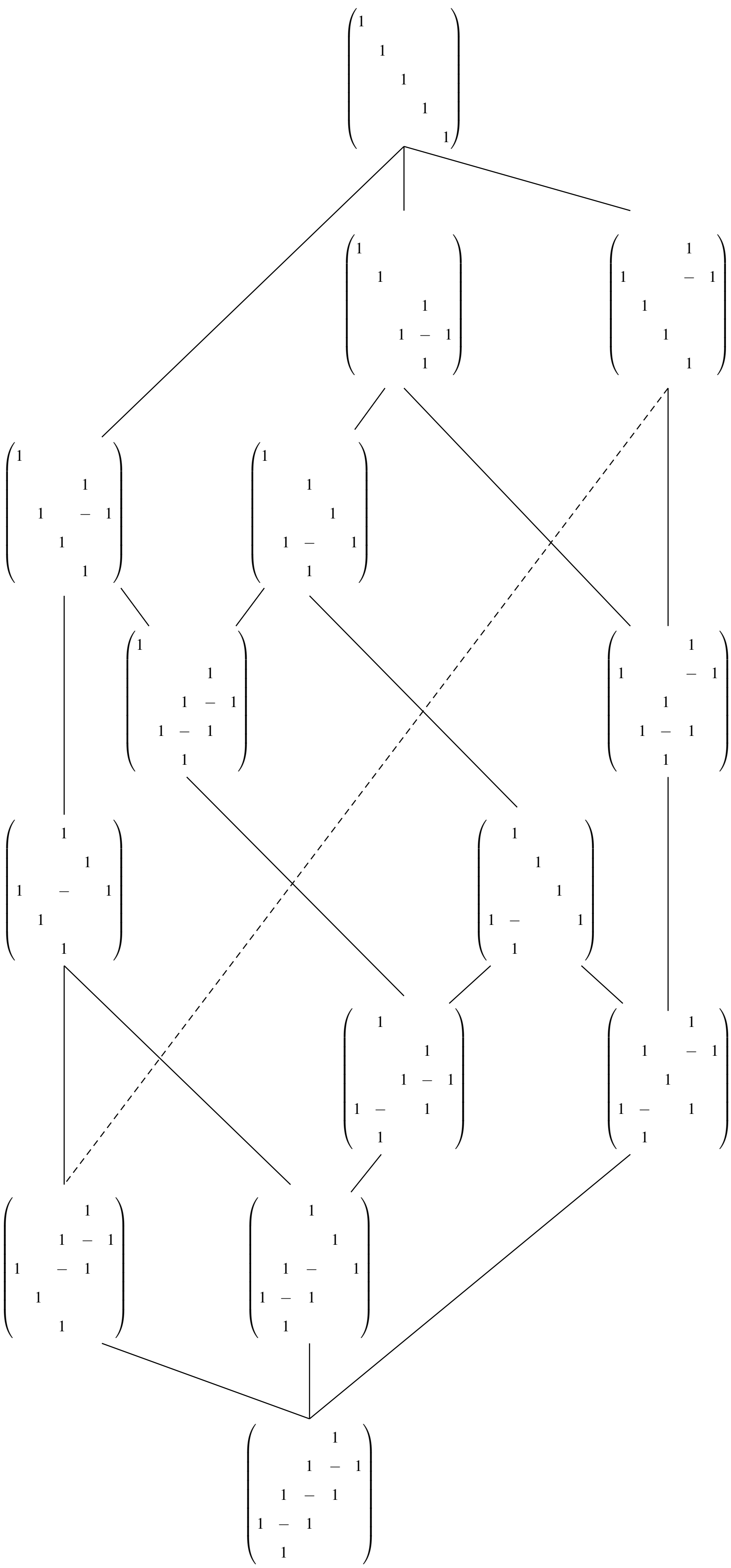
Za prirodan broj n, *asociedar* (*Stasheffov politop*) K^{n-2} je $(n-2)$-dimenzionalni konveksni politop čijim su vrhovima pridružena grupiranja duljine n.

Definicija 4.2.2. Neka je n prirodan broj. *Tamarijeva rešetka* reda $n-1$ je parcijalno uređen skup čiji su elementi sva grupiranja duljine n pri čemu je $B < A$ ako se B može iz A dobiti pomicanjem jednog ili više parova zagrada za jedan element u lijevo. Ako je B maksimalan element s tim svojstvom, reći ćemo da su grupiranja A i B *incidentna*.

Očito su dva grupiranja A i B incidentna ako se B iz A može dobiti pomicanjem para zagrada za jedno mjesto u lijevo ili u desno. U prvom slučaju, vrijedi $B < A$, a u drugom $A < B$.

Za asociedar vrijedi da su dva vrha povezana bridom ako i samo ako su njima pridružena grupiranja incidentna u Tamarijevoj rešetci.

U Odijeljku 4.4 je pokazana bijekcija između $\mathscr{C}$-matrica reda n i grupiranja duljine n i parcijalni uređaj na skupu $\mathscr{C}_n$. Na Slici 4.1 prikazana je Tamarijeva rešetka za $\mathscr{C}$-matrice reda 5 koja odgovara bijekciji iz Teorema 4.4.4.



Slika 4.1: Tamarijeva rešetka reda 4 sa $\mathscr{C}$-matricama.

Po Teoremu 4.1.2 sve točke pridružene $\mathscr{C}$-matricima reda 5 pripadaju hiperravnini

$$H_4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10\}$$

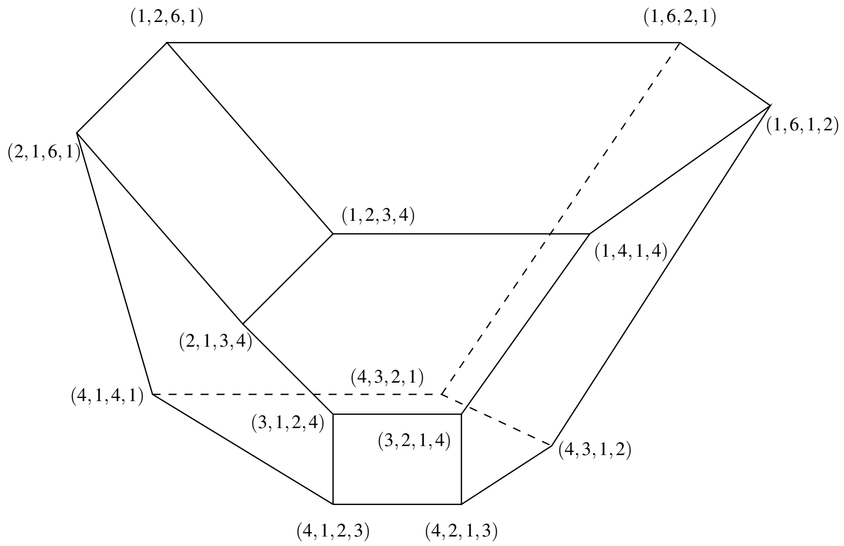
u prostoru $\mathbb{R}^4$. Štoviše, po Korolaru 4.1.4, svaka točka je presjek ravnine H_4 s trima hiperravninama H_{Ω_1}, H_{Ω_2} i H_{Ω_3}, koje su određene intervalima prirodnih brojeva Ω_1, Ω_2 i Ω_3, za svaku pojedinu matricu. U tablici 4.1 se mogu vidjeti sve točke pridružene $\mathscr{C}$-matricama reda 5. Poredak točaka u tablici odgovara poretku matrica na Slici 4.1 od gore prema dolje i slijeva na desno. U svakom retku tablice smješteni su pripadajući intervali prirodnih brojeva Ω_i, $i \in \{1,2,3\}$ takvi da je točka u istom retku presjek njima odgovarajućih hiperravnina H_{Ω_i} s hiperravninom H_4.

Tablica 4.1: Vrhovi politopa i pripadajući intervali.

$T(M)$	Ω_1	Ω_2	Ω_3
$(4,3,2,1)$	$\{2,3,4\}$	$\{3,4\}$	$\{4\}$
$(4,3,1,2)$	$\{2,3,4\}$	$\{3\}$	$\{3,4\}$
$(1,6,2,1)$	$\{1\}$	$\{3,4\}$	$\{4\}$
$(4,1,4,1)$	$\{2\}$	$\{2,3,4\}$	$\{4\}$
$(4,2,1,3)$	$\{2,3\}$	$\{3\}$	$\{2,3,4\}$
$(4,1,2,3)$	$\{2\}$	$\{2,3\}$	$\{2,3,4\}$
$(1,6,1,2)$	$\{1\}$	$\{3\}$	$\{3,4\}$
$(2,1,6,1)$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{4\}$
$(3,2,1,4)$	$\{1,2,3\}$	$\{2,3\}$	$\{3\}$
$(3,1,2,4)$	$\{1,2,3\}$	$\{2\}$	$\{2,3\}$
$(1,4,1,4)$	$\{1\}$	$\{1,2,3\}$	$\{3\}$
$(1,2,6,1)$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{4\}$
$(2,1,3,4)$	$\{1,2\}$	$\{2\}$	$\{1,2,3\}$
$(1,2,3,4)$	$\{1\}$	$\{1,2\}$	$\{1,2,3\}$

Iz tablice 4.1 i Slike 4.1 lako se vidi da dvije točke $T(M_1)$ i $T(M_2)$ imaju točno dva zajednička intervala ako i samo ako su njima odgovarajuće $\mathscr{C}$-matrice incidentne u Tamarijevoj rešetci. To znači da su svake dvije točke krajevi istog brida u politopu ako i samo ako su njima odgovarajuće $\mathscr{C}$-matrice incidentne u Tamarijevoj rešetci. Slijedi da je politop čiji su vrhovi pridruženi $\mathscr{C}$-matricama reda 5 asociedar. Lako se može provjeriti da isto vrijedi i za $\mathscr{C}$-matrice reda 2, 3 i 4.

Slika 4.2 prikazuje politop čiji su vrhovi točke pridružene $\mathscr{C}$-matricama reda 5.



Slika 4.2: Asociedar K^3.

4.3. Parovi paralelnih strana

Neka je n prirodan broj i $S = \{T_1, T_2, \ldots, T_{C_{n-1}}\} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ skup svih točaka pridruženih matricma familije $\mathscr{C}_n$. Po Propoziciji 4.1.5 sve točke pripadaju istim zatvorenim poluprostorima određenima hiperravninama

$$H_\Omega = \left\{ (x_1, \ldots, x_{n-1}) : \sum_{i=\omega_1}^{\omega_k} x_i = \frac{k(k+1)}{2} \right\},$$

za intervale prirodnih brojeva $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$. Štoviše, po Propoziciji 4.3.1 slijedi da za svaki interval prirodnih brojeva Ω postoji točka skupa S koja pripada hiperravnini H_Ω.

Propozicija 4.3.1. Neka je n prirodan broj i $S = \{T_1, T_2, \ldots, T_{C_{n-1}}\} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ skup svih točaka pridruženih matricma familije $\mathscr{C}_n$. Za svaki interval prirodnih brojeva $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ postoji točka $T \in S$ takva da je $T \in H_\Omega$.

Dokaz. Neka je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\} \subset \{1, 2, \ldots, n-1\}$ proizvoljno odabran interval prirodnih brojeva i H_Ω hiperravnina određena intervalom Ω.

Neka je $\omega_1 > 1$ i $\omega_k < n-1$. Budući da po Korolaru 3.1.12 slijedi da sjeverozapadne 1ce čine 213-izbjegavajuću permutacijsku matricu reda $n-1$ postoji barem jedna $\mathscr{C}$-matrica $M = [m_{i,j}]$ reda n takva da je $m_{\omega_1-1,1} = m_{\omega_k+1,2} = 1$. Očito su sve SZ 1ce u retcima $i \in \Omega$ zdesna 1cama $m_{\omega_1-1,1}$ i $m_{\omega_k+1,2}$. Dakle, za SZ 1cu čiji je redni broj stupca najmanji a nalazi se u jednom od redaka čiji je redni broj $i \in \Omega$, vrijedi da su pripadajući gornji i donji rub jednaki ω_1 i ω_k, redom. Po Propoziciji 4.1.3 slijedi da točka $T(M)$ pripada hiperravnini H_Ω. Dakle, postoji barem jedna točka pridružena $\mathscr{C}$-matricama, koja pripada hiperravnini H_Ω.

Neka je $\omega_1 = 1$. Postoji $\mathscr{C}$-matrica M za koju vrijedi da je sjeverozapadna 1ca u prvom stupcu ujedno i u (ω_k+1)-om retku. Štoviše, po Teoremu 2.2.10 postoji točno $C_k C_{n-k-2}$ takvih matrica. U svim retcima rednog broja iz skupa Ω, SZ 1ce nalaze se zdesna 1ci $m_{\omega_k+1,1}$. Neka je u i-tom retku SZ 1ca čiji je redni broj stupca najmanji od svih SZ 1ca iz preostalih redaka čiji su redni brojevi iz skupa Ω. Tada vrijedi da su 0 i ω_k gornji, odnosno donji rub za redak i. Dakle, $T(M)$ pripada hiperravnini H_Ω. Na anlogan način se odredi matrica u slučaju da je $\omega_k = n-1$.

Ako je $\omega_1 = 1$ i $\omega_k = n-1$, tada je $H_\Omega = H_{n-1}$, i ovoj hiperravnini pripadaju sve točke pridružene $\mathscr{C}$-matricama reda n. ■

Propozicija 4.3.2. Neka je n prirodan broj i $k \in \{1,2,\dots,n-1\}$. Neka su $\Omega_1 = \{1,\dots,k\}$ i $\Omega_2 = \{k+1,\dots,n\}$ intervali prirodnih brojeva. Ravnine $H_{\Omega_1} \cap H_n$ i $H_{\Omega_2} \cap H_n$ su paralelne u hiperravnini H_n.

Dokaz. Ako postoji točka $T = (x_1,\dots,x_n)$ u presjeku ravnina $H_{\Omega_1} \cap H_n$ i $H_{\Omega_2} \cap H_n$, $T \in H_{\Omega_1} \cap H_{\Omega_2} \cap H_n$, tada vrijedi da je

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = \frac{k(k+1)}{2},$$

$$\sum_{i=k+1}^{n} x_i = \frac{(n-k)(n-k+1)}{2}$$

i

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{(n)(n+1)}{2}.$$

Budući da je

$$\frac{k(k+1)}{2} + \frac{(n-k)(n-k+1)}{2} = \frac{n^2+n-2nk+2k^2}{2} \tag{4.6}$$

i za svaki $k \in \{1,2,\dots,n-1\}$ vrijedi da je

$$\frac{n^2+n-2nk+2k^2}{2} \neq \frac{n(n+1)}{2} \tag{4.7}$$

slijedi da ravnine $H_{\Omega_1} \cap H_n$ i $H_{\Omega_2} \cap H_n$ nemaju zajedničku točku u hiperravnini H_n. Budući da se te ravnine nalaze u hiperravnini H_n, i dimenzija im je za 1 manja, $H_{\Omega_1} \cap H_n$ i $H_{\Omega_2} \cap H_n$ su hiperravnine koje nemaju zajedničkih točaka, dakle paralelne su u potprostoru H_n. ■

Korolar 4.3.3. Neka je n prirodan broj i H_n potprostor prostora $\mathbb{R}^n$. Postoji $n-1$ par paralelnih hiperravnina H_Ω i $H_{\Omega'}$ u H_n koje su određene intervalima prirodnih brojeva $\Omega = \{1,\dots,k\}$ i $\Omega = \{k+1,\dots,n\}$, za svaki $k \in \{1,2,\dots,n-1\}$.

Propozicija 4.3.4. Politop čiji su vrhovi točke pridružene $\mathscr{C}$-matricama reda 5 ima tri para paralelnih strana.

Dokaz. Budući da sve točke pridružene $\mathscr{C}$-matricama reda 5 pripadaju potprostoru H_4, po Korolaru 4.3.3 postoje 3 para paralelnih hiperravnina, određenih intervalima Ω i Ω' definiranima u Korolaru 4.3.3, u H_4. To su parovi $H_{\{1\}}$ i $H_{\{2,3,4\}}$, $H_{\{1,2\}}$ i $H_{\{3,4\}}$ i treći par je $H_{\{1,2,3\}}$ i $H_{\{4\}}$. Iz tablice 4.1 vidi se da su $\mathscr{C}$-matricama

$$\begin{pmatrix} & & & 1 & \\ 1 & & & - & 1 \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & & 1 & \\ 1 & & & - & 1 \\ & & 1 & & \\ & 1 & - & 1 & \\ & & 1 & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & & 1 & \\ & & 1 & - & 1 \\ 1 & & - & 1 & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} & & & 1 & \\ & 1 & & - & 1 \\ & & 1 & & \\ 1 & - & & 1 & \\ & 1 & & & \end{pmatrix} \text{ i } \begin{pmatrix} & & & 1 & \\ & & 1 & - & 1 \\ & 1 & - & 1 & \\ 1 & - & 1 & & \\ & 1 & & & \end{pmatrix}$$

pridružene točke $(1,6,2,1)$, $(1,6,1,2)$, $(1,2,6,1)$, $(1,4,1,4)$ i $(1,2,3,4)$ koje pripadaju ravnini $H_{\{1\}} \cap H_4$. $\mathscr{C}$-matricama

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \mathbf{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & & 1 & \\ & & 1 & - & 1 \\ & & & 1 & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \\ & 1 & - & & 1 \\ & & 1 & & \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & & & 1 & \\ & 1 & & - & 1 \\ & & 1 & & \\ & & & 1 & \end{pmatrix} \text{ i } \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & & & 1 & \\ & & 1 & - & 1 \\ & 1 & - & 1 & \\ & & 1 & & \end{pmatrix}$$

pridružene su točke $(4,3,2,1)$, $(4,3,1,2)$, $(4,2,1,3)$, $(4,1,4,1)$ i $(4,1,2,3)$ koje pripadaju ravnini $H_{\{2,3,4\}} \cap H_4$. Dakle, dvije strane politopa leže u paralelnim ravininama $H_{\{1\}} \cap H_4$ i $H_{\{2,3,4\}} \cap H_4$.

Analogno, strana politopa čiji su vrhovi točke $(2,1,6,1)$, $(1,2,6,1)$, $(2,1,3,4)$ i $(1,2,3,4)$ pripada ravnini $H_{\{1,2\}} \cap H_4$ i strana čiji su vrhovi točke $(4,3,2,1)$, $(4,3,1,2)$, $(1,6,2,1)$ i $(1,6,1,2)$ pripada ravnini $H_{\{3,4\}} \cap H_4$ koja je njoj paralelna.

Treći par paralelnih strana leže u ravninama $H_{\{1,2,3\}} \cap H_4$ i $H_{\{4\}} \cap H_4$. Točke $(3,2,1,4)$, $(3,1,2,4)$, $(1,4,1,4)$, $(2,1,3,4)$ i $(1,2,3,4)$ pripadaju ravnini $H_{\{1,2,3\}} \cap H_4$, a točke $(4,3,2,1)$, $(4,1,4,1)$, $(1,6,2,1)$, $(2,1,6,1)$ i $(1,2,6,1)$ ravnini $H_{\{4\}} \cap H_4$. ■

4.4. Bijekcija između $\mathscr{C}$-matrica i grupiranja.

Neka je n prirodan broj i A grupiranje duljine n. Za pojedinačni element a_i grupiranja A kažemo da je *osnovni element*, $i \in \{1,2,\ldots,n\}$.

Neka je s G_n označen skup svih grupiranja duljine n,

$$G_n := \{A : A \text{ je grupiranje duljine } n\}.$$

Broj različitih grupiranja duljine n jednak je $(n-1)$-om Catalanovom broju, C_{n-1}. Svako grupiranje jedinstveno je određeno položajem zatvorenih zagrada. Reći ćemo da se zatvorena zagrada nalazi *iza* k-tog osnovnog elementa ako se nalazi između k-tog i $(k+1)$-og osnovnog elementa. Analogno, otvorena zagrada nalazi se *ispred* k-tog osnovnog elementa ako se nalazi između $(k-1)$-og i k-tog osnovnog elementa. Prva zatvorena zagrada može se nalaziti iza drugog osnovnog elementa ili bilo kojeg s većim rednim brojem, uključujući i iza n-tog. U slučaju da se prva zatvorena zagrada nalazi iza n-tog osnovnog elementa govorimo o *desnom grupiranju*. Analogno, $(n-2)$-ga otvorena zagrada može se nalaziti ispred $(n-1)$-og osnovnog elementa a_{n-1}, ili bilo kojeg prethodnog, uključujući i prvi. Grupiranje u kojem je $(n-2)$-a otvorena zagrada smještena ispred prvog osnovnog elementa, naziva se *lijevo grupiranje*. Primjerice,

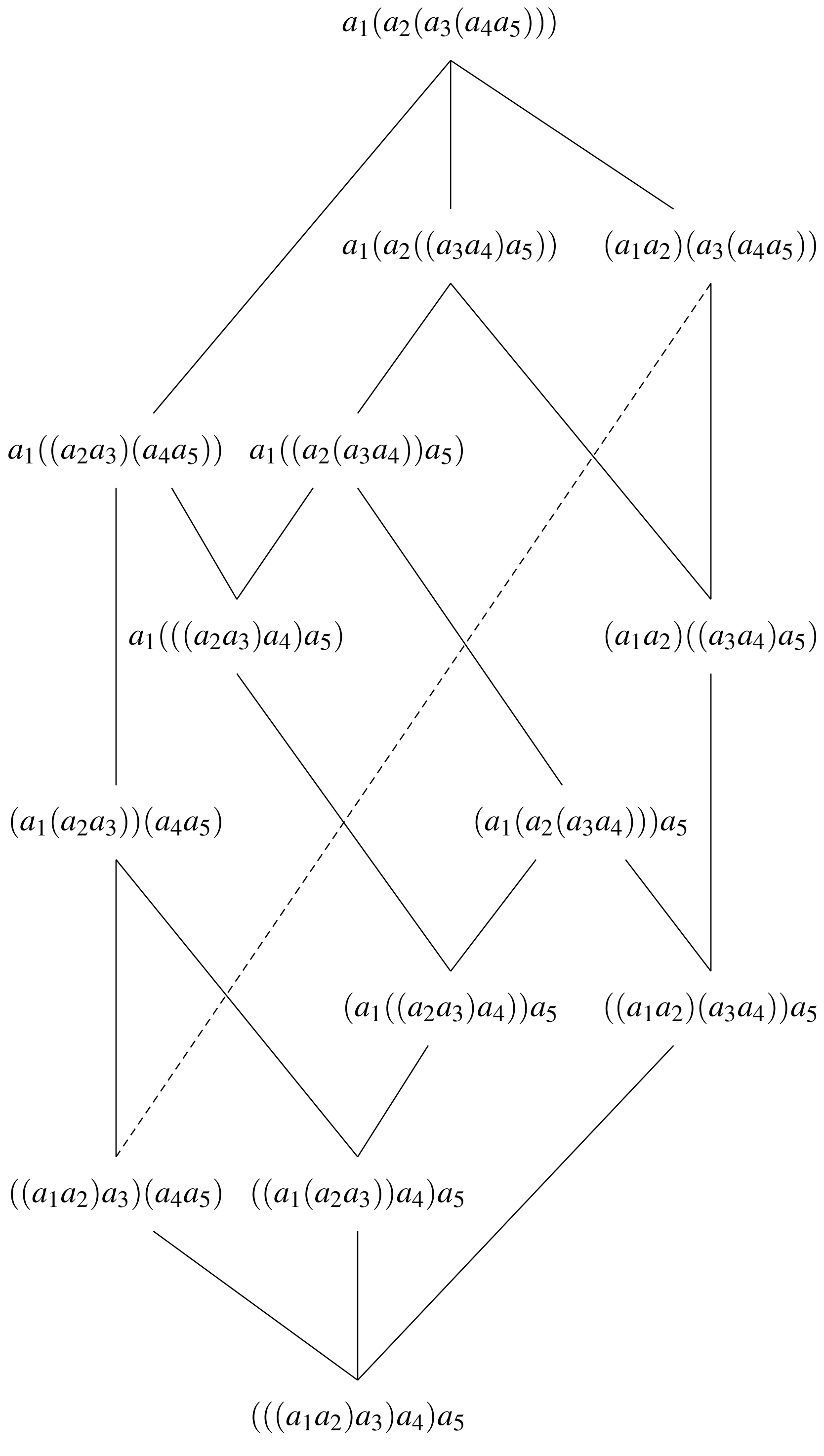
$$(((a_1a_2)a_3)a_4)a_5$$

je lijevo, i

$$a_1(a_2(a_3(a_4a_5)))$$

je desno grupiranje za $n=5$.

Lijevo grupiranje je minimum Tamarijeve rešetke, i desno grupiranje je maksimum. Slika 4.3 prikazuje Tamarijevu rešetku grupiranja, reda 4.



Slika 4.3: Tamarijeva rešetka reda 4.

Neka je n prirodan broj i $M = [m_{i,j}]$ $\mathscr{C}$-matrica reda n. Neka je $SP(M) = \{(i,j) : m_{i,j} = -1\}$ skup pozicija specijalnih elemenata matrice M. Budući da iz korespodencije $\mathscr{C}$-matrica s 213-izbjegavajućim permutacijama slijedi da su mjestima specijalnih elemenata jedinstveno određena mjesta jugoistočnih 1ca, a iz korespodencije s Dyckovim putovima slijedi da su mjesta sjeverozapadnih 1ca jedinstveno određena mjestima JI 1ca, vrijedi Korolar 4.4.1.

Korolar 4.4.1. Neka je n prirodan broj i M $\mathscr{C}$-matrica reda n. Matrica M jedinstveno je određena položajima specijalnih elemenata.

Propozicija 4.4.2. Neka je n prirodan broj. Neka $SP = \{(i,j) : 2 \leq i \leq n-1, 2 \leq i \leq n-1\}$ skup koji ima $m \leq n-2$ elemenata. Ako za svaki uređeni par $(i,j) \in SP$ vrijedi da je

$$i + j \geq n+1 \tag{4.8}$$

i za svaka dva uređena para (i_1, j_1) i (i_2, j_2) vrijedi $i_1 \neq i_2$, $j_1 \neq j_2$ i

$$i_1 < i_2 \iff j_1 > j_2,$$

onda postoji jedinstvena $\mathscr{C}$-matrica M takva da je SP skup mijesta specijalnih elemenata matrice M.

Dokaz. $\mathscr{C}$-matrica reda n može imati najviše $n-2$ specijalna elementa. Budući da je $|SP| \leq n-2$, to je zadovoljeno. Također, budući da su $i, j \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$ sigurno se -1ce neće nalaziti u prvom ili n-tom retku ili stupcu. Nadalje, niti jedan redak ili stupac ne mogu imati više od jedne -1ce zbog činjenice da za svaka dva uređena para (i_1, j_1) i (i_2, j_2) vrijedi $i_1 \neq i_2$, $j_1 \neq j_2$. Svojstvo da je $i_1 < i_2 \iff j_1 > j_2$, osigurava da vrijedi nužan poredak -1ca dokazan u Lemi 3.1.7. Nejednakost 4.8 osigurava de se svi specijalni elementi nalazei na sporednoj dijagonali ili ispod nje. Dakle, skup SP zadovoljava sva svojstva koja mora zadovoljavati skup pozicija specijalnih elemenata $\mathscr{C}$-matrice reda n. Budući da je pa Korolaru 4.4.1 $\mathscr{C}$-matrica jedinstveno određena pozicijama svojih specijalnih elemenata, tvrdnja je dokazana. ∎

Neka je n prirodan broj i A grupiranje duljine n. Neka je skup svih uređenih parova (k,l), $2 \leq k \leq n$, $1 \leq l \leq n-2$, takvih da se l-ta po redu zatvorena zagrada nalazi iza k-tog osnovnog elementa a_k u grupiranju A, označen sa $Z(A)$,

$$Z(A) = \{(k,l) : l\text{-ta zatvorena zagrada nalazi se iza } a_k \text{ u grupiranju } A\ \}. \tag{4.9}$$

Očito vrijedi da je $2 \leq k \leq n$, $1 \leq l \leq n-2$ i $|Z(A)| = n-2$.

Neka je za svaki redni broj

$$i \in \{k : (k,l) \in Z(A), 2 \leq k < n\}, \tag{4.10}$$

osnovnog elementa a_i iza kojeg se nalazi zatvorena zagrada u grupiranju A, s j_i označen redni broj zadnje zatvorene zagrade koja se nalazi iza a_i,

$$j_i = \max\{l : (i,l) \in Z(A)\}. \tag{4.11}$$

Propozicija 4.4.3. Neka je n prirodan broj i A grupiranje duljine n. Neka je $N := \{k : (k,l) \in Z(A), 2 \leq k < n\}$ i za svaki $i \in N$ neka je $N_i := \{l : (i,l) \in Z(A)\}$. Tada za skup $\{(i, n-j_i) : i \in N, j_i = \max N_i\}$ vrijedi da postoji jedinstvena $\mathscr{C}$-matrica reda n čiji su specijalni elementi smješteni na pozicije $(i, n-j_i)$.

Dokaz. Neka je skup $\{(i,n-j_i) : i \in N, j_i = \max N_i\}$ označen s SP, $SP := \{(i,n-j_i) : i \in N, j_i = \max N_i\}$. Potrebno je dokazati da skup SP zadovoljava svojstva Propozicije 4.4.2.

Budući da je $|N| \leq n-2$ i za svaki $i \in N$ postoji jedinstveni $j_i \in N_i$, vrijedi da je $|SP| \leq n-2$. Nadalje, očito je $i \in \{2,3,\dots,n-1\}$ i kako je redni broj zatvorene zagrade $j_i \in N_i$ element skupa $\{1,2,\dots,n-2\}$ vrijedi da je $n-j_i \in \{2,3,\dots,n-1\}$.

Za grupiranje A vrijedi da iza i-tog osnovnog elementa a_i mogu biti smještene zatvorene zagrade s rednim brojem $l \in \{1,2,\dots,i-1\}$, pa je broj $n-j_i$ element skupa $\{n-i+1, n-i+2,\dots,n-1\}$. Slijedi da je $i+(n-j_i) \leq i+(n-i+1) = n+1$. Time je dokazan izraz 4.8.

Neka su $i_1, i_2 \in N$, $j_{i_1} = \max N_{i_1}$ i $j_{i_2} = \max N_{i_2}$. Zbog svojstava grupiranja vrijedi da je

$$i_1 < i_2 \iff j_{i_1} < j_{i_2}.$$

Iz toga slijedi da je

$$i_1 < i_2 \iff n - j_{i_1} > n - j_{i_2}.$$

Također, iz definicije skupa N i elementa j_i za $i \in N$, slijedi da za svaka dva uređena para $(i_1, n-j_1)$ i $(i_2, n-j_2)$ skupa SP vrijedi $i_1 \neq i_2$ i $n-j_1 \neq n-j_2$.

Time je pokazana tvrdnja. ∎

Teorem 4.4.4. Neka je n prirodan broj. Preslikavanje $\psi : G_n \to \mathscr{C}_n$ koje svakom grupiranju $A \in G_n$ pridruži $\mathscr{C}$-matricu M tako da je skup $SP := \{(i,n-j_i) : i \in N, j_i = \max N_i\}$, gdje je $N := \{k : (k,l) \in Z(A), 2 \leq k < n\}$ i $N_i := \{l : (i,l) \in Z(A)\}$ za svaki $i \in N$, skup pozicija specijalnih elemenata matrice M, je bijekcija.

Dokaz. Budući da je $|G_n| = C_{n-1} = |\mathscr{C}_n|$, i po Propoziciji 4.4.3 slijedi da za svako grupiranje A postoji jedinstvena $\mathscr{C}$-matrica M takva da je skup SP skup pozicija specijalnih elemenata matrice M, slijedi tvrdnja. ∎

Definicija 4.4.5. Neka je n priodan broj. Neka je $<$ parcijalni uređaj na skupu $\mathscr{C}_n$ takav da je $M_B < M_A$ ako je $\psi(A) = M_A$ i $\psi(B) = M_B$ i $B < A$, pri čemu su A i B grupiranja duljine n.

Očito su matrice M_A i M_B incidentne ako su grupiranja A i B incidentna.

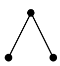
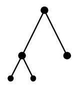
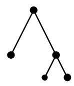
4.5. REALIZACIJE POLITOPA VIŠIH DIMENZIJA

Za potrebe opisa svojstava politopa pridruženih familijama $\mathscr{C}$-matrica viših redova potrebni su pojmovi definirani u nastavku.

Neka je $G = (V, E, h)$ graf. *Stupanj* vrha v u grafu G je broj bridova koji su incidentni v. Za graf G kažemo da je *nepovezan* ako skup V možemo podijeliti u dva disjunktna skupa V_1 i V_2 takva da ne postoji brid kojemu je jedna krajnja točka u skupu V_1 i druga u V_2. U suprotnom, graf je *povezan*. *Ciklus* je niz vrhova $v_1, v_2, \ldots, v_n$ i bridova $e_1, e_2, \ldots, e_n$, $n \geq 3$, takav da su krajnje točke brida e_i vrhovi v_i i v_{i+1} za svaki $i = 1, 2, \ldots, n-1$ i $h(e_n) = \{v_n, v_1\}$. *Stablo* je graf bez ciklusa. Vrhovi stabla mogu biti *unutarnji vrhovi* ili *listovi*. List je vrh stupnja 1. *Ravninsko stablo* je stablo u kojem je svakom vrhu zadan poredak bridova koji izlaze iz tog vrha.

Ravninsko binarno stablo je ravninsko stablo u kojemu je stupanj jednog unutarnjeg vrha v jednak 2 i stupanj svih ostalih unutarnjih vrhova jednak 3. U ovom slučaju vrh v nazivamo *korijenom* stabla. Broj ravninskih binarnih stabala s n unutarnjih vrhova jednak je n-tom Catalanovim broju C_n.

Neka je s Y_n označen skup svih ravninskih binarnih stabala s n unutarnjih vrhova. Primjerice,

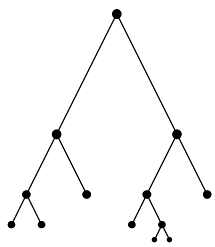
$Y_0 = \{ \bullet \}$, $\quad Y_1 = \{$  $\}$ *i* $\quad Y_2 = \{$  ,  $\}$

su prva tri skupa Y_n.

J.L. Loday je u svom radu [27] 2002. godine pridružio koordinate asociedra ravninskim binarnim stablima.

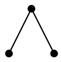
Neka je n prirodan broj i Y_n skup svih binarnih ravninskih stabala s n unutarnjih vrhova. Neka je $t \in Y_n$ i neka je s $i-1$ označen i-ti po redu list stabla t počevši slijeva na desno, $i \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$. Nadalje, neka je s i označen unutarnji vrh koji se nalazi između listova označenih s $(i-1)$ i i. Točka $T(t) \in \mathbb{R}^n$ pridružena stablu t ima i-tu koordinatu jednaku $a_i b_i$ pri čemu je a_i jednak broju listova slijeve strane i-tog unutarnjeg vrha, a b_i broju listova zdesne strane i-tog unutarnjeg vrha.

Primjer 16. Stablu

$t =$ 

pridružena je točka $(1,2,12,2,1,3) \in \mathbb{R}^6$.

Neka je n prirodan broj i neka je $\{T(M) : M \in \mathscr{C}_n\}$ skup svih točaka $T(M)$ pridruženih $\mathscr{C}$-matricama reda n i $\{T(t) : t \in Y_{n-1}\}$ skup svih točaka $T(t)$ pridruženih ravninskim binarnim stablima s n listova. Stablu

$t =$ 

i matrici

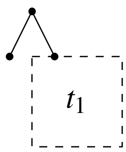
$$\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

pridružena je točka $1 \in \mathbb{R}$. To jest

$$\{T(M) : M \in \mathscr{C}_2\} = \{T(t) : t \in Y_1\} = \{1\}.$$

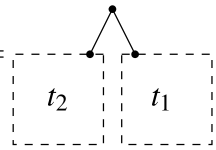
Pretpostavimo da za svaki $m \leq n$ vrijedi da je $\{T(M) : M \in \mathscr{C}_m\} = \{T(t) : t \in Y_{m-1}\}$ i neka je $T \in \{T(M) : M \in \mathscr{C}_{n+1}\}$ proizvoljno odabrana točka. Postoji $\mathscr{C}$-matrica M reda $n+1$ takva da je $T = T(M)$.

Ako je matrica M $\mathscr{C}$-matrica tipa I onda vrijedi da je $T = (n, x_1, \ldots, x_{n-1})$ pri čemu je točka $T(M_1) = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ pridružena podmatrici M_1 reda n matrice M, koja se nalazi u donjem desnom kutu. Po pretpostavci za sve $m \leq n$, vrijedi da je $T(M_1) \in \{T(t) : t \in Y_{n-1}\}$. Dakle, postoji stablo $t_1 \in Y_{n-1}$ takvo da je $T(t_1) = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Slijedi da je točka $T(t)$ pridružena stablu t koji je nastao tako da je korjen stabla t_1 smješten u desni list jedinog stabla skupa Y_1,

$t =$ 

jednaka $(n, x_1, \ldots, x_{n-1})$, to jest, jednaka je T.

Ako je $\mathscr{C}$-matrica M tipa II i neka se 1ca u prvom stupcu matrice nalazi u k-tom retku. Pretpostavimo da su M_1 i M_2 podmatrice od kojih je M nastala rekurzijom opisanom u Odjeljku 2.2.1, pri čemu je M_1 gornja i red joj je jednak k, a M_2 donja i reda je $n+1.k$. Iz dokaza Teorema 4.1.2 slijedi da je točka $T(M) = (x_1^1, \ldots, x_{k-1}^1, k(n+1-k), x_1^2, \ldots, x_{n-k}^2)$, pri čemu je $T(M_1) = (x_1^1, \ldots, x_{k-1}^1)$ i $T(M_2) = (x_1^2, \ldots, x_{n-k}^2)$. Po pretpostavci indukcije postoje stabla $t_1 \in \{Y_{k-1}\}$ i $t_2 \in \{Y_{n-k}\}$ takva da je $T(t_1) = T(M_1)$ i $T(t_2) = T(M_2)$. Tada je točka pridružena stablu t koje je nastalo tako da se jedinom stablu skupa Y_1 na lijevi list smjesti korjen stabla t_1 i na desni list korjen stabla t_2,

$t =$ 

jednaka $T(t) = (x_1^1, \ldots, x_{k-1}^1, k(n+1-k), x_1^2, \ldots, x_{n-k}^2)$.

Dakle, za proizvoljno odabranu točku skupa $\{T(M) : M \in \mathscr{C}_n\}$ dokazano je da pripada i skupu $\{T(t) : t \in Y_{n-1}\}$. Budući da oba skupa imaju jednak broj elemenata, slijedi da je

$$\{T(M) : M \in \mathscr{C}_n\} = \{T(t) : t \in Y_{n-1}\}$$

za svaki prirodan broj n.

Time je dokazano da konveksna ljuska točaka pridruženih $\mathscr{C}$-matricama reda n čini asociedar za svaku $n \in \mathbb{N}$.

Korolar 4.5.1. Neka je n prirodan broj. Konveksna ljuska točaka $T(M_k)$ pridruženih $\mathscr{C}_{\mathscr{D}}$-matricama M_k, $k \in \left\{1, 2, \ldots, \binom{n-1}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}\right\}$, reda n čini politop s

$$\binom{n-1}{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}$$

vrhova u prostoru $\mathbb{R}^{n-1}$.

Korolar 4.5.2. Neka je r prirodan broj. Konveksna ljuska točaka $T(M_k)$ pridruženih $\mathscr{F}$-matricama M_k, $k \in \left\{1, 2, \ldots, \frac{1}{2r+1}\binom{3r}{r}\right\}$, reda $2r+1$ čini politop s

$$\frac{1}{2r+1}\binom{3r}{r}$$

vrhova u prostoru $\mathbb{R}^{2r}$.

ZAKLJUČAK

U radu smo se bavili proučavanjem svojstava i enumeracijom matrica s alternirajućim predznakom koje posjeduju određena kombinatorna i algebarska svojstva, uspostavljenjem korespodencije s nekim algebarskim i kombinatornim strukturama i realizacijom konveksnih politopa u euklidskom prostoru.

Proučavali smo familije matrica koje izbjegavaju uzorak permutacije $(2,1,3)$. Pokazali smo rekurzivnu strukturu i enumeraciju ove familije. Budući da matrice s alternirajućim predznakom u prvom retku imaju samo jedan nenul element 1 i ostalo su nule, promatrali smo i pokazali profinjenu enumeraciju obzirom na položaj 1ce u prvom retku.

Također, proučavali smo podfamilije koje osim izbjegavanja permutacijskog uzorka posjeduju dodatna svojstva. Time smo dobili familije matrica koje imaju određen relativni položaj 1ca u susjednim retcima, zatim familije čije matrice su simetrične obzirom na glavnu dijagonalu i matrice u kojima je određen položaj specijalnih elemenata. Za svaku od podfamilija je pronađena rekurzivna struktura, enumeracija i profinjena enumeracija obzirom na položaj 1ce u prvom retku ili obzirom na broj specijalnih elemenata u matrici.

Pronađene su bijekcije između podfamilija matrica s alternirajućim predznakom i 213-izbjegavajućih permutacija, te Dyckovih putova.

Pridruživanjem točaka euklidskog prostora matricama s alternirajućim predznakom, realizirani su politopi s posebnim svojstvima.

KLJUČNE RIJEČI

Matrice s alternirajućim predznakom

Permutacijski uzorak

Bijekcija

Simetrične matrice

Catalanovi brojevi

Schröderovi brojevi

Politop

Konveksni politop

Asociedar

Stahseffov politop

KEY WORDS

Alternating sign matrices

Permutation pattern

Bijection

Symmetric matrix

Catalan numbers

Schröder numbers

Polytope

Convex polytope

Associahedron

Stahseff polytope

Bibliografija

[1] A. Ayyer, R. Cori, D. Gouyou Beauchamps: *Monotone Triangles and 312 Pattern Avoidance*. The Electronic Journal of Combinatorics, 18, 2011.

[2] A. Ayyer, R. E. Behrend, I. Fischer: *Extreme diagonally and antidiagonally symmetric alternating sign matrices of odd order*. Advances in Mathematics, 367, 2020. ↑ 18.

[3] A. V. Razumov, Y. G. Stroganov: *The cyclic sieving phenomenon*. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 108, 2004.

[4] Andrews, G.E.: *Plane Partitions (III): The Weak Macdonald Conjecture*. Inventiones mathematicae, 53, 1979. ↑ 15, 29.

[5] A.Rice, E.Torrence: *Lewis Carroll's Condensation Method for Evaluating Determinants*. Math Horizons, 14(2), 2006. ↑ 7.

[6] Arnold, V. I.: *Experimental Mathematics*. American Mathematical Society, 2015.

[7] Bressoud, David M.: *Proofs and Confirmations, The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*. Cambridge University Press, 1999. ↑ 4.

[8] C. Ceballos, F. Santos, G. M. Ziegler: *Many non-equivalent realizations of the associahedron*. Combinatorica, 35, 2015.

[9] Callan, David: *OEIS: A001764*. 2011. `https://oeis.org/A001764`. ↑ 84.

[10] Cayley, Arthur: *On the theory of groups as depending on the symbolic equation* $\phi^n = 1$. Philosophical Magazine, 7(42), 1854. ↑ 35.

[11] D. Bailey, J. M. Borwein, P. B. Borwein S. Plouffe: *The quest for pi*. The Mathematical Intelligencer, 1, 1997.

[12] D. Bressoud, J. Propp: *How the Alternating Sign Matrix Conjecture Was Solved*. Notices Of The American Mathematical Society, 46(6), 1999. ↑ 15.

[13] D.D. Frey, J.A. Sellers: *Jacobsthal Numbers and Alternating Sign Matrices*. Journal of Integer Sequences [electronic only], 3(2), 2000.

[14] Dodgson, C. L.: *Condensation of Determinants, Being a New and Brief Method for Computing their Arithmetical Values*. Proceedings of the Royal Society of London, 15, 1866. ↑ 7.

[15] D.P . Robbins, H. C. Rumsey Jr: *Determinants and Alternating Sign Matrices*. Advances in Mathematics, 62, 1986.

[16] E. Charpentier, N. Nikolski: *Leçons de mathématiques d'aujourd'hui*. Cassini, 2007.

[17] E. T. Gowers, J. Barrow-Green, I. Leader: *The Princeton Companion to Mathematics*. Princeton University Press, 2008.

[18] F. Hurtado, M.Noy: *Ears of triangulations and Catalan numbers*. Discrete Mathematics, 149(1-3), 1996.

[19] I. Fischer, M. P. Saikia: *Refined Enumeration of Symmetry Classes of Alternating Sign Matrices*. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 178, 2021. ↑ 19.

[20] I.M. Gelfand, M.L. Tsetlin: *Finite dimensional representations of the group of unimodular matrices*. Doklady Akademii Nauk, 71, 1950.

[21] J. Striker, S. Solhjem: *Sign matrix polytopes from Young tableaux*. Linear Algebra and its Applications, 574, 2019.

[22] J.D.Stasheff: *From operands to 'physically' inspired theories*. Operads: Proceedings of Renaissance Conferences (Hartford, CT/Luminy, 1995), Contep. Math. 202, Amer. Math. Soc. Providence, 1997.

[23] Jr., B. W. Back: *Infinite Series and Sequences*. Cambridge University Press, 2018.

[24] Kitaev, S.: *Patterns in Permutations and Words*. Springer, 2007.

[25] Kuperberg, G.: *Another proof of the alternating sign matrix conjecture*. International Mathematics Research Notices, 3, 1996. ↑ 15.

[26] Kuperberg, G.: *Symmetry classes of alternating-sign matrices under one roof*. Annals of Mathematics, 156(3), 2002. ↑ 19.

[27] Loday, J.L.: *Realization of the Stasheff polytope*. Archiv der Mathematik, 83, 2004. ↑ 129.

[28] M. Aigner, G. Ziegler: *Proofs from the book*. Springer, 2018.

[29] MacMahon, P.A.: *Memoir on the Theory of the Partitions of Numbers. VI: Partitions in Two-Dimensional Space, to which is Added an Adumbration of the Theory of Partitions in Three-Dimensional Space*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A, 211, 1912.

[30] N. Batir, H. Küçük, S. Sorgun: *Convolution identities involving the central binomial coefficients and Catalan numbers*. Transactions on Combinatorics, 315, 2017. ↑ 62.

[31] N. D. Elkies, G. Kuperberg, M. Larsen J. Propp: *Alternating-sign matrices and domino tilings*. Journal of Algebraic Combinatorics, 1(2), 1992. ↑ 31.

[32] Pak, I.: *Lectures on Discrete and Polyhedral Geometry*. University of California, Los Angeles, 2010. https://www.math.ucla.edu/~pak/geompol8.pdf.

[33] Postnikov, A.: *Permutohedra, associahedra, and beyond*. International Mathematics Research Notices, 6, 2009.

[34] Propp, J.: *The Many Faces of Alternating-Sign Matrices*. Discrete Models: Combinatorics, Computation, and Geometry (special issue of Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science), 2001.

[35] R. A. Brualdi, H. K. Kim: *Symmetric alternating sign matrices*. Australian Journal of Combinatorics, 60, 2014.

[36] R. A. Brualdi, K. P. Kiernan, S. A. Mayer: *Patterns of alternating sign matrices*. Linear Algebra and its Aplications, 438, 2013.

[37] R. Behrend, V. Knight: *Higher Spin Alternating Sign Matrices*. Electronic Journal of Combinatorics, 14(1), 2008.

[38] R. E. Behrend, I. Fischer, M. Konvalinka: *Diagonally and antidiagonally symmetric alternating sign matrices of odd order*. Advances in Mathematics, 10(4), 2021. ↑ 18.

[39] R. E. Behrend, P. Di Francesco, P. Zinn Justin: *On the weighted enumeration of alternating sign matrices and descending plane partitions*. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 119(2), 2012.

[40] R. E. Behrend, P. Di Francesco, P. Zinn Justin: *A doubly-refined enumeration of alternating sign matrices and descending plane partitions*. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 120(2), 2013.

[41] R. Johansson, S. Linusson: *Pattern avoidance in alternating sign matrices*. Annals of Combinatorics, 11, 2007.

[42] R. L. Graham, D. E. Knuth, O. Patashnik: *Concrete Mathematics*. Addison - Wesley,, 1989.

[43] Stanley, R.: *Catalan numbers*. Cambridge University Press, 2015.

[44] V. Reiner, D. Stanton, D.White: *Enumeration of quarter-turn symmetric alternating-sign matrices of odd-order*. Theoretical and Mathematical Physics, 149(3), 2006.

[45] W. H. Mills, D.P . Robbins, H. C. Rumsey Jr.: *Alternating sign matrices and descending plane partition*. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 34, 1983. ↑ 34.

[46] W. H. Mills, D.P . Robbins, H. C. Rumsey Jr: *Self-complementary totally symmetric plane partitions,*. Journal of Combinatorial Theory, Series A, 42(2), 1986. ↑ 12, 29.

[47] W.H. Mills, D.P. Robbins, H.Rumsey Jr.: *Proof of the Macdonald conjecture*. Inventiones mathematicae, 66, 1982.

[48] Y. An, T. Edgar: *Sum Visual Rearrangements of the Alternating Harmonic Series*. The College Mathematics Journal, 50(4), 2019.

[49] Zeilberger, D.: *Proof of the alternating sign matrix conjecture*. Electronic Journal of Combinatorics, 3, 1996. ↑ 29.

Informacije o mentoru

Ivica Martinjak je znanstvenik u području matematike i autor znanstveno-popularne uspješnice Susreti konačnog i beskonačnog. Rođen je u Svetom Ivanu Zelini gdje je odrastao i završio osnovnu školu Dragutina Domjanića. Po završetku studija na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu živi i djeluje u Zagrebu. Doktorirao je 2010. godine na istom sveučilištu, a nakon toga se usavršavao na matematičkim institutima Sveučilišta u Cambridgeu i Sorbone.

Na poslijediplomskom studiju matematike u Zagrebu predaje kolegije iz diskretnog dijela matematike. Na Sveučilištu u Osijeku uveo je novi sveučilišni kolegij. Trenutno je voditelj za disertaciju dvijema doktorandicama, a do sada je bio mentor za osmero diplomskih studenata. Na konferencijama i institucijama u Hrvatskoj i desetak drugih zemalja održao je preko 60 predavanja, pretežito s originalnim znanstvenim prilogom. Od prošle godine je u zvanju višeg znanstvenog suradnika iz područja prirodnih znanosti, polje matematika.

Njegova postignuća uključuju produbljivanje razumijevanja djelovanja automorfizama kod konačnih geometrija, dokaze više familija identiteta za particijsku funkciju, eksplicitne formule za determinante. Radove objavljuje u američkim, francuskim i drugim znanstvenim časopisima. Recenzent je za petnaestak znanstvenih časopisa. Urednik je dvaju zbornika radova

ŽIVOTOPIS

Ana Mimica rođena je u Metkoviću 1988. godine. Na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, Sveučilište u Splitu, 2011. godine završila je preddiplomski studij matematike. Godine 2013. završila je diplomski studij matematike, računarski smjer, te stekla zvanje magistra matematike, mag.math. Na Filozofskom fakultetu u Osijeku završila je 'Program pedagoško – psihološko – didaktičko – metodičke izobrazbe' 2017. godine.

Radila je kao asistent, vanjski suradnik, na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Splitu od 2013.-2015. godine. Držala je vježbe iz kolegija Linearna algebra i Elementarna geometrija. Od 2015.-2017. godine radi kao nastavnica matematike u Gimnaziji Metković i Srednjoj školi Metković. Od 2017. godine do danas radi kao asistent iz matematike na Odjelu za ekonomiju i poslovnu ekonomiju i na Odjelu za elektrotehniku i računarstvo Sveučilišta u Dubrovniku.

Na matematičkim odjelima u Zagrebu, Splitu i Osijeku održala je 6 seminara.

Pohađala je proljetnu školu na matematičkom institutu "Isaac Newton" Sveučilišta u Cambridgeu 2019. godine.

Izdanja:

- A. Golemac, A. Mimica, T. Vučičić, Od koenigsberških mostova do kineskog poštara, e-math, broj 21, 2012
- I. Martinjak, A. Mimica, A Visual Proof of an Infinite Alternating Sign Series; The College Mathematics Journal, 2021.

Izlaganja na konferencijama

– A Visual Proof for an Infinite Alternating Sign Series, poster, Sedmi hrvatski matematički kongres, Split, 2022.

– Realisations of the Stasheff Polytope by Means of Alternating Sign Matrices, Croatian Conference on Geometry and Graphics 2022, Dubrovnik, 2022.