

Supravodljivost u nanostrukturama od zlata s mrežom tankog filma niobija

Fluksek, Alen

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:217:501148>

Rights / Prava: [In copyright](#)/Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2024-12-18**



Repository / Repozitorij:

[Repository of the Faculty of Science - University of Zagreb](#)



SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

Alen Fluksek

SUPRAVODLJIVOST U NANOSTRUKTURAMA
OD ZLATA S MREŽOM TANKOG FILMA NIOBIJA

Diplomski rad

Zagreb, 2023.

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
FIZIČKI ODSJEK

INTEGRIRANI PREDDIPLOMSKI I DIPLOMSKI SVEUČILIŠNI STUDIJ
FIZIKA; SMJER ISTRAŽIVAČKI

Alen Fluksek

Diplomski rad

**Supravodljivost u nanostrukturama
od zlata s mrežom tankog filma
niobija**

Voditelj diplomskog rada: izv. prof. dr. sc. Emil Tafra

Ocjena diplomskog rada: _____

Povjerenstvo: 1. _____

2. _____

3. _____

Datum polaganja: _____

Zagreb, 2023.

Sažetak

Proučavamo supravodič-metal prijelaz (SMP) u nanostrukturama od zlata s mrežom tankog filma niobija. Uzorke karakterizira parametar perkolacije p . Mjerenje i analiza provedeni su na šest uzoraka. Za sve uzorke smo izmjerili ovisnost otpora o temperaturi s i bez primjene magnetskog polja kao i njihove IV karakteristike. Analizom $R(T)$ grafova odredili smo vrijednosti otpora u normalnom stanju te temperature supravodljivih prijelaza. Osim toga smo primijetili i zanimljivu anomaliju za koju smo pretpostavili da je potpis *proximity* efekta. Gornje kritično magnetsko polje dobiveno je ekstrapolacijom WHH i Gorter-Casimir jednadžbi. Provedena je i analiza skaliranja, varijacijom magnetskog polja, iz koje smo dobili vrijednosti produkata kritičnih eksponenata. Na temelju tih vrijednosti odredili smo klase univerzalnosti uzoraka.

Ključne riječi: supravodljivost, niobij, perkolacija, *proximity* efekt, gornje kritično magnetsko polje, analiza skaliranja

Superconductivity in gold nanostructures with a thin film niobium network

Abstract

We study the superconductor-metal transition (SMT) in gold nanostructures with a niobium thin film network. Samples are characterized by the percolation parameter p . The measurement and analysis were carried out on six samples. For all samples, we measured resistance dependence on temperature with and without magnetic field application as well as their I-V characteristics. By analyzing the $R(T)$ graphs, we determined the resistance values in the normal state and the temperature of superconductive transitions. We also noticed an interesting anomaly that we assumed was a proximity effect signature. The upper critical magnetic field was obtained by extrapolation of WHH and Gorter-Casimir equations. A scaling analysis was carried out, by variation of magnetic field, from which we obtained the values of products of critical exponents. Based on these values, we've determined the universality classes of the samples.

Keywords: superconductivity, niobium, percolation, proximity effect, upper critical magnetic field, scaling analysis

Sadržaj

1	Uvod	1
1.1	Otkriće supravodljivosti	1
1.2	Karakteristike supravodiča	2
2	Teorija supravodljivosti	6
2.1	Cooperovi parovi	8
2.2	Bardeen–Cooper–Schrieffer (BCS) teorija	13
2.2.1	Funkcija energijskog procijepa	21
2.3	Ginzburg-Landau (GL) teorija	23
3	Eksperiment	32
3.1	Izrada pločice s uzorkom	32
3.2	Uređaj za spajanje uzorka	34
3.3	Uređaji za postizanje niskih temperatura	35
3.3.1	Ukapljivači	36
3.3.2	Spremnici za pohranu	38
3.3.3	Kriostat	39
3.4	Postupci i metode mjerenja	41
4	Eksperimentalni rezultati	45
4.1	Ovisnost otpora o temperaturi	46
4.2	IV karakteristika	48
5	Diskusija rezultata	51
5.1	Gornja kritična vrijednost magnetskog polja	51
5.2	Proximity efekt	55
5.3	Ovisnost otpora o magnetskom polju	58
5.4	Analiza skaliranja	59
6	Zaključak	63
	Dodaci	65
A	Ovisnost otpora o magnetskog polju	65

B Analiza skaliranja	67
Literatura	68

1 Uvod

1.1 Otkriće supravodljivosti

Fenomen supravodljivosti otkrio je nizozemski fizičar Kamerlingh Onnes ¹ 1911. godine [1]. Uz otkriće supravodljivosti došlo je i do otkrića drugih njoj srodnih stanja među kojima je i suprafluidnost. Sva ta stanja nazivamo kvantnim tekućinama zbog toga što kod njih kvantne fenomene možemo direktno vidjeti na makroskopskoj skali. Otkriće supravodljivosti dovelo je do otvaranja jednog posve novog poglavlja u području fizike kondenzirane materije (tj. fizike čvrstog stanja). Supravodiči su naime materijali s izvanrednim električnim i magnetskim svojstvima. Svojstva koja imaju supravodiči su sljedeća: imaju savršenu električnu vodljivost (upravo ovo svojstvo je otkrio Onnes) te se ponašaju kao savršeni dijamagneti. Što znači savršena električna vodljivost? To znači da je električni otpor jednak nuli. Posljedica postojanja električnog otpora u vodičima je disipacija (rasipanje) energije koja se tim vodičem prenosi. Ako nema disipacije energije znači da je otpor jednak nuli. To ujedno znači i da će u zatvorenoj petlji od supravodiča beskonačno teći stalna struja. Upravo na ovakav način je i potvrđeno da je otpor supravodiča egzaktno nula a ne neka vrijednost blizu nule. Kako je električni otpor vodiča u supravodljivom stanju jednak nuli u tom vodiču nema apsolutno nikakvog gubitka energije. I upravo je to glavni razlog zbog čega su supravodiči privukli veliki interes fizičara i elektrotehničara u istraživanju mogućnosti njihove primjene u ostvarivanju mogućnosti generiranja, prijenosa i korištenja električne energije bez gubitaka. Ovo predstavlja jedan od svetih gralova fizike čvrstog stanja a otkriće supravodljivosti taj je san naizgled učinilo mogućim. No, kao što će u daljnjem tekstu biti objašnjeno, i ovaj san o potpunoj eliminaciji gubitaka električne energije će u velikoj mjeri ostati samo san jer fizikalna ograničenja koja postoje dovode do toga da ta izvanredna svojstva nisu praktično tako lako (odnosno bez utroška energije!) dostupna. Supravodiči za razliku od savršenih vodiča imaju još jednu dodatnu karakteristiku a to je savršeni dijamagnetizam. To znači da će ako ih stavimo u vanjsko magnetsko polje oni to polje nastojati u potpunosti "izbaciti" iz sebe zbog čega će doći do jakog odbijanja. U praktičnom smislu to znači da pomoću njih možemo generirati vrlo jake sile (odbojne) koje mogu nadvladati čak i iznos gravitacijske sile koju neko tijelo osjeća.

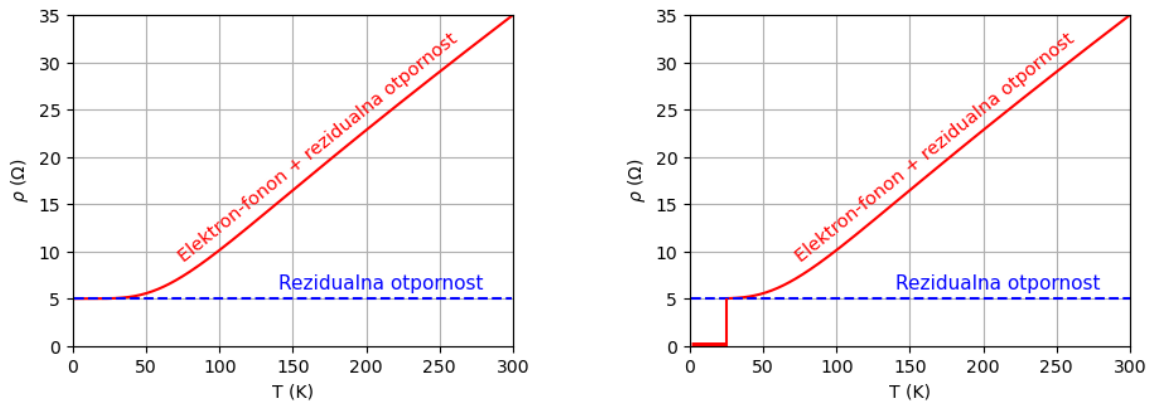
¹Heike Kamerlingh Onnes: 21. rujna 1853. - 21. veljače 1926.

Odnosno uz pomoć supravodiča (tipa II) možemo postići da tijelo stabilno levitira (lebdi). To svojstvo se danas već koristi u praktične svrhe i to kod superbrzih vlakova (tzv. maglev vlakova) koji voze vrlo velikim brzinama upravo zbog toga što nemaju nikakav kontakt s podlogom. Oni naime lebde iznad zemlje čime je uklonjen glavni uzrok otpora kod velikih brzina a to je trenje. Sada vidimo zašto smo svojstva supravodiča nazvali iznimnim i zbog čega su privukli toliku pažnju istraživača. No kao što je već rečeno problem se javlja u praktičnoj primjeni. Onnes je naime supravodljivost u materijalu otkrio tek kada je materijal ohladio na vrlo nisku temperaturu, konkretnije na temperaturu tekućeg helija koja iznosi svega 4.2 K. Dakle svega 4.2 °C iznad apsolutne nule! Upravo je ovo razlog zašto naš san o eliminaciji gubitaka pri prijenosu električne energije nije moguć. Da bi materijal doveli u supravodljivo stanje potrebno ga je ohladiti na vrlo niske temperature za što nam je pak potrebno mnogo energije. To znači da ćemo manje energije gubiti prilikom korištenja standardnih vodiča nego li nam je potrebno energije da materijale učinimo supravodljivima. Ono čemu istraživači danas teže je otkriću spoja kod kojeg bi se supravodljivi prijelaz dešavao u uvjetima koji su slični onima koji su nama prirodni (u blizini atmosferskog tlaka i sobne temperature). Tada bi energija koju moramo uložiti da materijal dovedemo u supravodljivo stanje bila znatno manja. Sve dok ne riješimo problem potrebe hlađenja do vrlo niskih temperatura i/ili stvaranja vrlo visokih tlakova koji nam "krađu" energiju uštedenu zbog savršene električne vodljivosti supravodljivi će uređaji biti neisplativi za komercijalnu upotrebu.

1.2 Karakteristike supravodiča

Sada ćemo detaljnije raspravljati o karakterističnim svojstvima supravodiča i njihovom porijeklu na temelju termodinamičkih i kvantno-mehaničkih teorija. Krenut ćemo od fenomena savršene električne vodljivosti ili nultog električnog otpora. Za početak ćemo opisati kako izgleda temperaturna ovisnost otpornosti kod normalnih metala. Pod terminom "normalni" ubrajamo sve metale kod kojih ne dolazi do supravodljivog prijelaza. Ovisnost otpornosti o temperaturi kod normalnih metala prikazana je na slici 1.1 (a) crvenom linijom. Ona se općenito ponaša na sljedeći način; na dovoljno visokim temperaturama električna otpornost raste linearno s povećanjem temperature. Dobro poznati primjer takvog ponašanja je platina zbog

čega se upravo taj element i upotrebljava pri izradi termometara. Kako se spuštamo



(a) Ovisnost otpornosti o temperaturi kod normalnih metala.

(b) Ovisnost otpornosti o temperaturi kod supravodljivih metala.

Slika 1.1: Ovisnost otpornosti o temperaturi kod normalnih i supravodljivih metala.

prema nižim temperaturama, odnosno kako hladimo metal, doći ćemo do područja u kojem njegova otpornost više neće biti linearna već će se ponašati sukladno tzv. Bloch-Grüneisenovom zakonu tj. ovisnost otpornosti o temperaturi će biti proporcionalna s T^5 . Ubrzo nakon toga pad se zaustavlja i otpornost poprima konstantnu vrijednost različitu od nule. Ta neiščezavajuća otpornost na $T = 0$ K posljedica je defekata i nečistoća u kristalnoj rešetci i nju nazivamo rezidualna otpornost. Na višim temperaturama osim rezidualne otpornosti ukupnoj otpornosti doprinose i raspršenja s fononima (odnosno interakcija elektrona s vibracijama kristalne rešetke) te elektronska međuinterakcija. Samim time ukupnu otpornost materijala možemo matematički zapisati kao:

$$\rho = \rho_0 + \rho(T), \quad (1.1)$$

gdje je ρ_0 rezidualna otpornost koja je neovisna o temperaturi dok je $\rho(T)$ otpornost koja dolazi od raspršenja s fononima i elektronske međuinterakcije i ona je ovisna o temperaturi. U slučaju supravodiča ovakvo ponašanje se modificira na način koji je prikazan na slici 1.1 (b). U slučaju supravodiča otpornost metala se u većem dijelu ponaša na identičan način kao i kod normalnih metala osim na vrlo niskim temperaturama kod kojih dolazi do naglog pada otpornosti na nulu. Upravo ovakvo ponašanje je uočio Onnes. Taj nagli pad otpornosti događa se na temperaturi T_c koju nazivamo kritičnom odnosno temperaturom supravodljivog prijelaza. Materijali kod kojih dolazi do supravodljivog prijelaza nazivaju se supravodiči. Prijelaz iz

stanja normalnog materijala u stanje supravodljivog materijala je fazni prijelaz pri kojem ne dolazi do promjene strukture. Da je to doista tako možemo provjeriti npr. metodom difrakcije X-zraka u normalnom i supravodljivom stanju. Temperature na kojima kemijski elementi prelaze u supravodljivo stanje prikazane su na slici 1.2. Ni-

Periodic table of superconductivity

H																	He
Li 0.0004	Be 0.026											B 11	C	N	O 0.6	F	Ne
Na	Mg											Al 1.18	Si 8.2	P 13	S 17.3	Cl	Ar
K	Ca 29	Sc 19.6	Ti 0.5	V 5.4	Cr	Mn	Fe 2.1	Co	Ni	Cu	Zn 0.87	Ga 1.1	Ge 5.35	As 2.4	Se 8	Br 1.4	Kr
Rb	Sr 7	Y 19.5	Zr 0.85	Nb 9.25	Mo 0.92	Tc 8.2	Ru 0.5	Rh 0.0003	Pd	Ag	Cd 0.5	In 3.4	Sn 3.7	Sb 3.9	Te 7.5	I 1.2	Xe
Cs 1.3	Ba 5		Hf 0.38	Ta 4.5	W 0.01	Re 1.7	Os 0.7	Ir 0.1	Pt	Au	Hg 4.15	Tl 2.4	Pb 7.2	Bi 8.5	Po	At	Rn
Fr	Ra		Rf	Db	Sg	Bh	Hs	Mt	Ds	Rg	Cn	Nh	Fl	Mc	Lv	Ts	Og
Lanthanides		La 6	Ce 1.7	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu 2.7	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu 0.1	
Actinides		Ac	Th 1.4	Pa 1.4	U 1.3	Np	Pu	Am 1.0	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr	

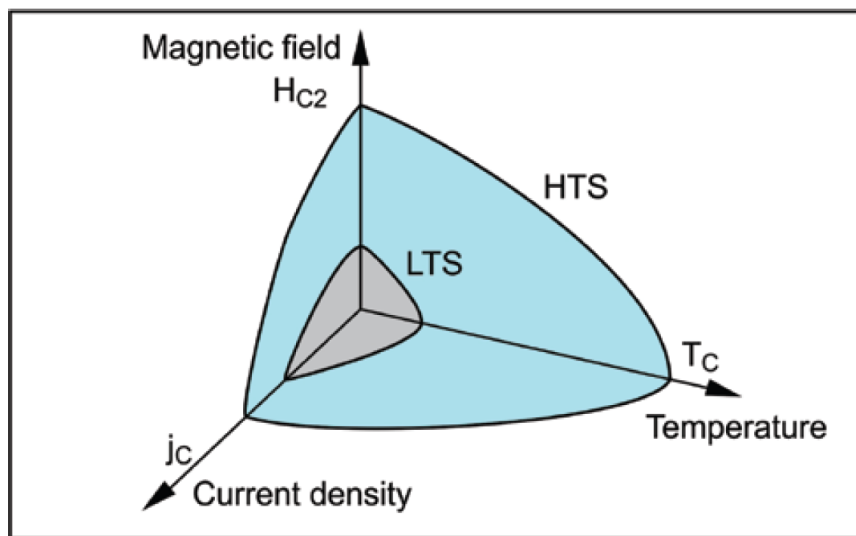
Slika 1.2: Periodni sustav elemenata s označenim supravodljivim elementima i njihovim kritičnim temperaturama. Slika preuzeta iz [2].

objij je element koji ima najvišu kritičnu temperaturu (pri atmosferskom tlaku) i ona iznosi 9.25 K. Element koji je također zanimljiv je olovo koje postaje supravodljivo na prilično "visokim" temperaturama (pod "visokim" se misli s obzirom na kritične temperature ostalih elemenata koje su gotovo jednake apsolutnoj nuli). Razlog zbog kojeg nam je olovo posebno zanimljivo je taj što je olovo u normalnom stanju vrlo loš vodič zbog čega se i koristi kao materijal u izradi žica za rastalne osigurače. Olovo dakle ima veliku otpornost pri sobnoj temperaturi no ipak prelazi u supravodljivo stanje. I ne samo da prelazi u supravodljivo stanje već je temperatura tog prijelaza prilično visoka. Taj "paradoks", odnosno ta antikorelacija, vidljiva je i na primjeru metala koji su vrlo dobri vodiči struje u normalnom stanju kao što su zlato, srebro te nadasve bakar. Oni naime uopće ne mogu prijeći u supravodljivo stanje. Razlog postojanja te antikorelacije između dobrih vodiča i supravodiča bit će objašnjena kasnije unutar BCS teorije. Osim kritične temperature postoje i dodatni parametri koji karakteriziraju supravodljivost. Jedan od tih parametara je i kritično magnetsko polje. Kritično magnetsko polje $H_c(0)$ predstavlja maksimalnu vrijednost polja u kojem se supravodič na $T = 0$ K smije nalaziti prije nego li iz supravodljivog prijeđu u normalno stanje. Materijal je moguće izbaciti iz supravodljivog stanja i kombiniranim doprinosom temperature i magnetskog polja. Empirijska relacija koja opisuje

ovisnost magnetskog polja potrebnog za uništenje supravodljivosti, kod supravodiča tipa I, o temperaturi je:

$$H_c(T) = H_c(0) \left[1 - \left(\frac{T}{T_c} \right)^2 \right], \quad (1.2)$$

gdje je $H_c(0)$ kritična vrijednost magnetskog polja na 0 K. Treća kritična veličina, koja je dijelom povezana s kritičnim magnetskim poljem, jest kritična gustoća struje j_c . Ta tri parametra su neophodna za karakterizaciju supravodiča prilikom bilo kakve tehničke primjene. Pomoću svake od tih triju veličina ili pak njihovom kombiniranom



Slika 1.3: Shematski prikaz grafa međuovisnosti kritičnih vrijednosti parametara za prijelaz iz supravodljivog u normalno stanje kod niskotemperaturnih (LTS) te visokotemperaturnih supravodiča. Slika preuzeta iz [3].

upotrebom možemo sustav izbaciti iz supravodljivog stanja. Prikaz karakterističnih ploha za niskotemperaturne (LTS) odnosno visokotemperaturne (HTS) supravodiče koje nam govore u kojem omjeru trebamo primijeniti te tri kritične veličine kako bi poništili supravodljivost u materijalu dan je na slici 1.3.

2 Teorija supravodljivosti

Kao što je već rečeno supravodiče karakteriziraju dva temeljna svojstva: savršena vodljivost i savršeni dijamagnetizam. Sada nas zanima kako ta dva svojstva utječu na ostale karakteristike supravodiča. Prvi koji su proveli ovakvu analizu bili su braća London² [5]. Način na koji su oni izveli svoje jednačbe je da su počeli od slične pretpostavke kakvu je koristio i Drude prilikom izvođenja jednačbi za opis otpora kod normalnih vodiča. Braća London su problem promatrali na semiklasičan način gdje "supravodljive elektrone" zamišljamo kao kuglice koje se nalaze u statičkom vanjskom električnom polju pa sukladno drugom Newtonovom zakonu vrijedi:

$$m\ddot{\vec{r}} = -\tilde{e}\vec{E}. \quad (2.1)$$

Ovdje smo uključili svojstvo supravodiča da ima nulti otpor i to na način da smo uzeli da vrijeme relaksacije (koje se javlja u Drudeovoj jednačbi) teži u beskonačno ($\tau \rightarrow \infty$) zbog čega nemamo trećeg člana koji je opisivao interakciju elektrona s kristalnom rešetkom. Gustoća struje "supravodljivih elektrona" koji se gibaju pod utjecajem električnog polja je:

$$\vec{J} = -\tilde{e}n_s\dot{\vec{r}}, \quad (2.2)$$

gdje je n_s gustoća "supravodljivih elektrona". Deriviramo li jednačbu 2.2 po vremenu te dobiveni izraz za $\dot{\vec{r}}$ uvrstimo u izraz 2.1 dobivamo da je:

$$\dot{\vec{J}} = \frac{\tilde{e}^2 n_s}{m} \vec{E}. \quad (2.3)$$

Za razliku od normalnih vodiča kod kojih je gustoća struje proporcionalna električnom polju kod supravodiča je prva derivacija gustoće struje po vremenu proporcionalna električnom polju. Daljnju analizu svojstava nastavljamo koristeći Maxwellove jednačbe. Uvrstimo li izraz 2.3 u treću Maxwellovu jednačbu (tj. Faradayev zakon):

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.4)$$

dobivamo sljedeći izraz:

$$\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = -\frac{n_s \tilde{e}^2}{mc} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (2.5)$$

²Fritz i Heinz London

Kako bi prethodnu jednadžbu zapisali na način da ovisi samo o magnetskom polju koristimo četvrtu Maxwellovu jednadžbu koja glasi:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \quad (2.6)$$

Izraz koji tada dobivamo je:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{4\pi n_s \tilde{e}^2}{mc^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (2.7)$$

Upotrebom identiteta za rotaciju rotacije:

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{C} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{C}) - \nabla^2 \vec{C}, \quad (2.8)$$

te druge Maxwellove jednadžbe ($\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$) jednadžba 2.7 poprima oblik:

$$\nabla^2 \left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = \frac{4\pi n_s \tilde{e}^2}{mc^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \equiv \lambda^{-2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (2.9)$$

gdje je $\lambda \equiv \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi n_s \tilde{e}^2}}$ dubina prodiranja (penetracije). Jednadžbu 2.9 možemo djelomično i riješiti; naime tu istu jednadžbu možemo zapisati i u sljedećem obliku:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla^2 \vec{B} - \lambda^{-2} \vec{B} \right) = 0. \quad (2.10)$$

Općenito rješenje ovakve jednadžbe je:

$$\nabla^2 \vec{B} - \lambda^{-2} \vec{B} = C(\vec{r}), \quad (2.11)$$

gdje je $C(\vec{r})$ funkcija koja ne ovisi o vremenu. Sada uvrštavamo drugo svojstvo supravodiča a to je savršeni dijamagnetizam, odnosno sposobnost supravodiča da iz sebe "izbaci" magnetsko polje. Kako znamo da magnetsko polje unutar supravodiča mora težiti k nuli slijedi da $C(\vec{r})$ mora biti jednako nuli. To znači da u jednadžbi 2.10 ne samo da derivacija po vremenu mora biti jednaka nuli već i da izraz u zagradi mora biti jednak nuli. Jednadžba koja uključuje oba svojstva supravodiča stoga glasi:

$$\nabla^2 \vec{B} = \lambda^{-2} \vec{B}. \quad (2.12)$$

Daljnijim kombiniranjem ovog izraz s Maxwellovim jednađbama možemo dobiti i druge relacije koje opisuju svojstva supravodiča. Jednu od tih jednađbi možemo dobiti djelujemo li rotacijom na četvrtu Maxwellovu jednađbu uz korištenje izraza 2.8 s drugom Maxwellovom jednađbom. Izraz koji se time dobiva je:

$$\vec{\nabla} \times \vec{J} = -\frac{n_s \tilde{e}^2}{mc} \vec{B}. \quad (2.13)$$

Ako uvedemo vektorski potencijal \vec{A} na način da je $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, uz korištenje Coulombovog bađarenja, jednađba 2.13 postaje jednaka:

$$\vec{J} = -\frac{n_s \tilde{e}^2}{mc} \vec{A}. \quad (2.14)$$

Dobivena jednađba nazive se Londonova jednađba.

2.1 Cooperovi parovi

Već smo pri proučavanju Londonovih jednađbi govorili o tome kako kod supravodiča postoje posebni elektroni koji vode struju uz otpor koji je jednak nuli te smo ih tamo zvali "supravodljivi elektroni". U ovom potpoglavlju želimo objasniti što su ti "supravodljivi elektroni" te kako oni nastaju. Sam princip nastanka "supravodljivih elektrona" moguće je opisati već unutar jednostavnog kvantno-mehaničkog modela s dva elektrona [5]. Dakle rješavamo statičku Schrödingerovu jednađbu koja glasi:

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla_{\vec{r}_1}^2}{2m} - \frac{\hbar^2 \nabla_{\vec{r}_2}^2}{2m} + V(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \right] \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = E \Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2), \quad (2.15)$$

gdje je $\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ ukupna valna funkcija sustava s dva elektrona, E ukupna energija sustava a $V(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ potencijal u kojem se ti elektroni nalaze. Način na koji ćemo rješavati ovu Schrödingerovu jednađbu jest sljedeći; prvo ćemo varijable \vec{r}_1 i \vec{r}_2 supstituirati s varijablama \vec{R} i \vec{r} tako da vrijedi:

$$\begin{aligned} \vec{r} &\equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \\ \vec{R} &\equiv \frac{1}{2}(\vec{r}_1 + \vec{r}_2). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Dakle varijable položaja elektrona zamjenjujemo s varijablama relativnog položaja \vec{r} i položaja centra impulsa \vec{R} . Nakon što izvršimo navedenu supstituciju Schrödingerova

jednadžba postaje:

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla_{\vec{R}}^2}{2m^*} - \frac{\hbar^2 \nabla_{\vec{r}}^2}{2\mu} + V(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}, \vec{R}) = E \Psi(\vec{r}, \vec{R}). \quad (2.17)$$

$m^* \equiv 2m$ je ukupna masa a $\mu \equiv \frac{m}{2}$ reducirana masa sustava. Kako potencijal ne ovisi o položaju centra impulsa već samo o relativnom položaju dvaju elektrona za ansatz valne funkcije uzimamo da je jednak:

$$\Psi(\vec{r}, \vec{R}) = \psi(\vec{r}) e^{i\vec{K} \cdot \vec{R}}. \quad (2.18)$$

Uvrštavanjem tog ansatza u jednadžbu 2.17 dobivamo:

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla_{\vec{r}}^2}{2\mu} + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = \left[E - \frac{\hbar^2 K^2}{2m^*} \right] \psi(\vec{r}). \quad (2.19)$$

Kako nas zanima stanje s najnižom energijom (kako bi čestice pri niskim temperaturama bile dominantno u tom stanju) biramo da je $\vec{K} = 0$, odnosno biramo sustav centra impulsa za koji vrijedi:

$$\vec{k}_1 = -\vec{k}_2 \equiv \vec{k}. \quad (2.20)$$

Ovakvim izborom vrijednosti \vec{K} jednadžba 2.19 se reducira na oblik:

$$\left[-\frac{\hbar^2 \nabla_{\vec{r}}^2}{2\mu} + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}). \quad (2.21)$$

Kako je $\psi(\vec{r})$ valna funkcija dva elektrona (tj. dva identična fermiona) ona mora biti antisimetrična na operator zamjene čestica, odnosno mora biti ili simetrična u prostornom te antisimetrična u spinskom dijelu ili pak antisimetrična u prostornom te simetrična u spinskom dijelu Hilbertovog prostora. Stanje u kojem će se elektroni nalaziti lakše je promatrati u impulsnom nego u koordinatnom prostoru zbog čega vršimo transformaciju jednadžbe 2.21 u impulsni prostor na način da je:

$$\psi(\vec{k}) = \int d^3r \psi(\vec{r}) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}}. \quad (2.22)$$

Da bi prešli u impulsni prostor moramo izračunati ovakav Fourierov transformat za cijelu jednadžbu 2.21:

$$\int d^3r \left(-\frac{\hbar^2 \nabla_{\vec{r}}^2}{2\mu} \psi(\vec{r}) \right) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \int d^3r V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} = E \int d^3r \psi(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}. \quad (2.23)$$

Treći integral u gornjoj jednadžbi predstavlja transformiranu valnu funkciju sukladno izrazu 2.22 dok za prvi integral dobivamo da je jednak:

$$\begin{aligned} I &\equiv \int d^3r \left(-\frac{\hbar^2 \nabla_{\vec{r}}^2}{2\mu} \psi(\vec{r}) \right) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ &= \int d^3r \left(-\frac{\hbar^2 \nabla_{\vec{r}}^2}{2\mu} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \psi(\vec{k}') e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}} \right) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ &= \int d^3r \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \psi(\vec{k}') (i\vec{k}')^2 e^{i\vec{k}'\cdot\vec{r}} \right) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \\ &= \frac{\hbar^2}{2\mu} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} k'^2 \psi(\vec{k}') \int d^3r e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}} \\ &= \frac{\hbar^2}{2\mu} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} k'^2 \psi(\vec{k}') (2\pi)^3 \delta(\vec{k}-\vec{k}') \\ &= \frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \psi(\vec{k}). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Sada je Schrödingerova jednadžba 2.23 jednaka:

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2\mu} \psi(\vec{k}) + \int d^3r V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} = E \psi(\vec{k}). \quad (2.25)$$

No kako bi cijela jednadžba bila u impulsnom prostoru potrebno je izračunati i preostali integral. To ćemo učiniti na sličan način kao i kod prvog integrala. Preostali integral je dakle jednak:

$$\begin{aligned} \int d^3r V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} &= \int d^3r \left(\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V(\vec{q}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} \right) e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \psi(\vec{r}) \\ &= \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V(\vec{q}) \int d^3r \psi(\vec{r}) e^{-i(\vec{k}-\vec{q})\cdot\vec{r}} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3q}{(2\pi)^3} V(\vec{q}) \psi(\vec{k}-\vec{q}) \\ &= \left\{ \vec{k}' \equiv \vec{k} - \vec{q} \rightarrow d\vec{k}' = -d\vec{q} \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} V(\vec{k}-\vec{k}') \psi(\vec{k}'). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Izgled jednadžbe 2.21 nakon provedene cjelokupne transformacije u impulsni prostor je:

$$\int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} V(\vec{k} - \vec{k}') \psi(\vec{k}') = (E - 2\varepsilon_k) \psi(\vec{k}), \quad (2.27)$$

gdje je $\varepsilon_k \equiv \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ energija slobodnog elektrona. Kao što možemo vidjeti vezano stanje ćemo dobiti ako je $E < 2\varepsilon_k$. Sada redefiniramo valnu funkciju na način da je:

$$\Phi(\vec{k}) \equiv (E - 2\varepsilon_k) \psi(\vec{k}), \quad (2.28)$$

pa jednadžba 2.27 poprima izraz koji glasi:

$$\Phi(\vec{k}) = - \int \frac{d^3 k'}{(2\pi)^3} V(\vec{k} - \vec{k}') \frac{\Phi(\vec{k}')}{2\varepsilon_{k'} - E}. \quad (2.29)$$

Do sada smo Schrödingerovu jednadžbu mogli rješavati u općenitom obliku no ako ju sada želimo nastaviti dalje rješavati moramo definirati izgled potencijala u kojem se elektroni nalaze. Potencijal koji ćemo uzeti je potencijal koji odgovara elektron-elektron interakciji uz prisustvo fononskog doprinosa (odnosno fononski posredovana elektron-elektron interakcija). Za taj ćemo potencijal pretpostaviti da je jednak:

$$V(\vec{k} - \vec{k}') = -V_0 \quad (2.30)$$

u rasponu energija, odnosno valnih vektora, gdje je $\varepsilon_{k'}, \varepsilon_k < \hbar\omega_D$ dok je iznad te vrijednosti potencijal jednak nuli. ω_D je Debyejeva frekvencija a produkt nje i reducirane Planckove konstante \hbar odgovara maksimalnoj energiji titranja kristalne rešetke. Kako je jednadžba 2.29 zadana u implicitnom obliku moramo pretpostaviti i izgled redefinirane valne funkcije $\Phi(\vec{k})$. Budući da nam potencijal ne ovisi o valnom vektoru (tj. konstantan je) isto to ćemo pretpostaviti i za redefiniranu valnu funkciju. Dakle uzimamo da je $\Phi(\vec{k}) = \Phi$. Uzimajući u obzir sve ove pretpostavke sada konačno možemo riješiti jednadžbu 2.29. Za početak ćemo promijeniti varijablu integracije

kako bi lakše mogli provesti samu integraciju:

$$\begin{aligned}
d^3k' &= dk'_x dk'_y dk'_z = 4\pi |\vec{k}'|^2 d|\vec{k}'| \\
&= \left\{ \varepsilon_{k'} = \frac{\hbar^2 |\vec{k}'|^2}{2m} \rightarrow d|\vec{k}'| = \frac{m}{\hbar^2 |\vec{k}'|} d\varepsilon_{k'} \right\} \\
&= \frac{4\pi m}{\hbar^2} |\vec{k}'| d\varepsilon_{k'} \\
&= \frac{4\pi m}{\hbar^2} \cdot \frac{\sqrt{2m\varepsilon_{k'}}}{\hbar} d\varepsilon_{k'} = \frac{2^{5/2}\pi m^{3/2}}{\hbar^3} \sqrt{\varepsilon_{k'}} d\varepsilon_{k'}.
\end{aligned} \tag{2.31}$$

Rješenje jednadžbe 2.29 stoga glasi:

$$\begin{aligned}
\Phi &= - \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{2^{5/2}\pi m^{3/2}}{2^3\pi^3\hbar^3} (-V_0) \Phi \sqrt{\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{2\varepsilon - E} \\
1 &= \frac{V_0 m^{3/2}}{\sqrt{2}\hbar^3\pi^2} \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2\varepsilon - E} d\varepsilon \\
&= \frac{V_0 m^{3/2}}{\sqrt{2}\hbar^3\pi^2} \left[\sqrt{\hbar\omega_D} - \sqrt{\frac{-E}{2}} \arctan \left(\sqrt{\frac{2\hbar\omega_D}{-E}} \right) \right].
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Ono što prvo možemo primijetiti kod rješenja ove jednadžbe jest da postoji restrikcija na iznos ukupne energije koja mora biti manja od nule. Kako postoji restrikcija na energiju možemo se pitati i koja je minimalna jakost interakcije (s fononima) potrebna da bi sustav bio u vezanom stanju. Tu vrijednost dobivamo promatrajući izraz 2.32 u limesu u kojem $E \rightarrow 0^-$ i ona je jednaka:

$$V_{0,min} = \frac{\sqrt{2}\hbar^3\pi^2}{m^{3/2}\sqrt{\hbar\omega_D}}. \tag{2.33}$$

No u stvarnim sustavima mi nemamo samo dva elektrona već njih jako puno (približno 10^{23} cm^{-3}). Promotrimo li taj sustav na temperaturi $T \simeq 0 \text{ K}$ na kojoj se elektroni većinom nalaze u osnovnom stanju čineći tako Fermijevu sferu, možemo ponovno primijeniti gornji postupak jer će samo elektroni blizu Fermijevog nivoa biti u mogućnosti interagirati privlačnom silom uzrokovanom vibracijom kristalne rešetke. Dakle jedina promjena koja se dogodi s obzirom na sustav u kojem imamo samo dva elektrona je ta da sada integraciju u izrazu 2.32 ne provodimo od 0 do $\hbar\omega_D$ već od $\varepsilon_F \equiv \hbar\omega_F$ do $\varepsilon_F + \hbar\omega_D$.

$$1 = \frac{V_0 m^{3/2}}{\sqrt{2}\hbar^3\pi^2} \int_{\varepsilon_F}^{\varepsilon_F + \hbar\omega_D} \frac{\sqrt{\varepsilon} d\varepsilon}{2\varepsilon - E} = V_0 \int_{\varepsilon_F}^{\varepsilon_F + \hbar\omega_D} \rho(\varepsilon) \frac{d\varepsilon}{2\varepsilon - E}. \tag{2.34}$$

Kako je $\hbar\omega_D \ll \varepsilon_F$ možemo uvesti aproksimaciju u kojoj je gustoća stanja $\rho(\varepsilon)$ konstantna unutar granica integracije i iznosi $\rho(\varepsilon) \approx \rho(\varepsilon_F)$ te je tada izraz 2.34 jednak:

$$\begin{aligned} 1 &\approx V_0\rho(\varepsilon_F) \int_{\varepsilon_F}^{\varepsilon_F+\hbar\omega_D} \frac{d\varepsilon}{2\varepsilon - E} \\ &= \frac{V_0\rho(\varepsilon_F)}{2} \ln\left(\frac{2\varepsilon_F - E + 2\hbar\omega_D}{2\varepsilon_F - E}\right) \\ \frac{2}{V_0\rho(\varepsilon_F)} &= \ln\left(\frac{2\varepsilon_F - E + 2\hbar\omega_D}{2\varepsilon_F - E}\right). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Promotrimo li sada izraz za energiju vezanja, $E_b \equiv 2\varepsilon_F - E$, u limesu u kojem je $V_0\rho(\varepsilon_F) \ll 1$ dobivamo da je on jednak:

$$E_b = 2\hbar\omega_D e^{-\frac{2}{V_0\rho(\varepsilon_F)}}. \quad (2.36)$$

Ovaj izraz nam govori da će se vezano stanje formirati bez obzira koliko slaba privlačna interakcija bila što nije bio slučaj kad smo imali samo dva elektrona.

2.2 Bardeen–Cooper–Schrieffer (BCS) teorija

U prethodnom potpoglavlju vidjeli smo na koji način dolazi do stvaranja novog vezanog stanja elektrona na niskim temperaturama pod utjecajem vibracija kristalne rešetke odnosno pod utjecajem fonona. Sada želimo taj mehanizam proširiti na veliki broj Cooperovih parova što ćemo učiniti u okviru tzv. BCS (Bardeen–Cooper–Schrieffer) teorije [4] s aproksimacijom srednjeg polja [5]. Ta mikroskopska teorija se temelji na tzv. drugoj kvantizaciji u kojoj efektivni hamiltonijan supravodljivog sustava ima sljedeći oblik:

$$H = \sum_{\vec{k}\sigma} \xi_{\vec{k}} c_{\vec{k}\sigma}^\dagger c_{\vec{k}\sigma} + \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}\vec{k}'} V_{\vec{k}\vec{k}'} c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger c_{-\vec{k}'\downarrow} c_{\vec{k}'\uparrow}, \quad (2.37)$$

gdje je $c_{\vec{k}\sigma}^\dagger$ operator stvaranja elektrona valnog broja \vec{k} i spina $\sigma = \uparrow, \downarrow$, a $c_{\vec{k}\sigma}$ operator poništenja istog tog elektrona. $\xi_{\vec{k}} \equiv \varepsilon_{\vec{k}} - \mu$ je energija slobodnih elektrona u odnosu na kemijski potencijal. Prvi član dakle opisuje energiju slobodnih elektrona u odnosu na energiju koju bi imali ti elektroni na kemijskom potencijalu. Drugi član opisuje mehanizam uništavanja jednog Cooperovog para i stvaranja drugog. Kako bi mogli dijagonalizirati ovaj hamiltonijan moramo pojednostaviti drugi član što činimo metodom srednjeg polja na način da vrijednost produkta ova četiri operatora aprok-

simiramo s:

$$c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger c_{-\vec{k}'\downarrow} c_{\vec{k}'\uparrow} \approx \langle c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \rangle c_{-\vec{k}'\downarrow} c_{\vec{k}'\uparrow} + c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \langle c_{-\vec{k}'\downarrow} c_{\vec{k}'\uparrow} \rangle - \langle c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \rangle \langle c_{-\vec{k}'\downarrow} c_{\vec{k}'\uparrow} \rangle. \quad (2.38)$$

Kako kod supravodiča dolazi do stvaranja Cooperovih parova očekivana vrijednost operatora stvaranja Cooperovih parova bit će različita od nule. Sada imamo hamiltonijan koji sadrži samo parove od po dva operatora no da bi mogli odrediti svojstvena stanja i svojstvene vrijednosti ovog operatora moramo ga dijagonalizirati. Kako bi si olakšali daljnji izvod uvodimo veličinu koju ćemo nazvati "funkcija energijskog procijepa" a koja je definirana na sljedeći način:

$$\Delta_{\vec{k}} = -\frac{1}{N} \sum_{\vec{k}'} V_{\vec{k}\vec{k}'} \langle c_{-\vec{k}'\downarrow} c_{\vec{k}'\uparrow} \rangle. \quad (2.39)$$

Zašto smo ovako definiranu pokratu nazvali funkcijom energijskog procijepa bit će jasno nakon što provedemo dijagonalizaciju hamiltonijana. Koristeći aproksimaciju srednjeg polja i gore navedenu pokratu hamiltonijan 2.37 poprima oblik:

$$H \approx \sum_{\vec{k},\sigma} \xi_{\vec{k}} c_{\vec{k},\sigma}^\dagger c_{\vec{k},\sigma} - \sum_{\vec{k}} \left(\Delta_{\vec{k}} c_{\vec{k},\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger + \Delta_{\vec{k}}^* c_{-\vec{k},\downarrow} c_{\vec{k},\uparrow} \right) + \sum_{\vec{k}} \Delta_{\vec{k}} \langle c_{\vec{k},\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger \rangle, \quad (2.40)$$

gdje je:

$$\begin{aligned} \Delta_{\vec{k}}^* &= -\frac{1}{N} \sum_{\vec{k}'} V_{\vec{k},\vec{k}'}^* \langle (c_{-\vec{k}'\downarrow} c_{\vec{k}'\uparrow})^\dagger \rangle = \{V_{\vec{k},\vec{k}'} \in \mathbb{R}\} \\ &= -\frac{1}{N} \sum_{\vec{k}'} V_{\vec{k},\vec{k}'} \langle c_{\vec{k}'\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}'\downarrow}^\dagger \rangle. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Dijagonalizaciju ovakvog hamiltonijana provodimo pomoću tzv. Bogoljubovljevih³ transformacija za fermionske operatore koje glase:

$$\begin{aligned} c_{\vec{k},\uparrow} &= u_{\vec{k}}^* \gamma_{\vec{k}\uparrow} + v_{\vec{k}} \gamma_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger, \\ c_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger &= u_{\vec{k}} \gamma_{-\vec{k},\downarrow}^\dagger - v_{\vec{k}}^* \gamma_{\vec{k}\uparrow}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

$u_{\vec{k}}, u_{\vec{k}}^*, v_{\vec{k}}$ i $v_{\vec{k}}^*$ su slobodni parametri koje ćemo odrediti (točnije odredit ćemo samo njihove produkte $|u_{\vec{k}}|^2$ i $|v_{\vec{k}}|^2$) upravo tako što ćemo zahtijevati da nakon što uvrstimo transformacije 2.42 u hamiltonijan 2.40 taj hamiltonijan bude dijagonalan.

³Nikolay Nikolayevich Bogolyubov: 21. kolovoza 1909. - 13. veljače 1992.

Uz to uvjet koji ti parametri moraju zadovoljavati, a koji proizlazi iz toga što ovako definirani Bogoljubovljevi operatori moraju zadovoljavati fermionske komutacijske relacije, je:

$$|u_{\vec{k}}|^2 + |v_{\vec{k}}|^2 = 1. \quad (2.43)$$

Zbog jednostavnosti, izraze dobivene uvrštavanjem Bogoljubovljevih transformacija ćemo prikazati član po član u hamiltonijanu. Za prvi član se dobiva:

$$\begin{aligned} & \sum_{\vec{k}\sigma} \xi_{\vec{k}} c_{\vec{k},\sigma}^\dagger c_{\vec{k},\sigma} = \\ & = \sum_{\vec{k}} \xi_{\vec{k}} \left[c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{\vec{k}\uparrow} + c_{\vec{k}\downarrow}^\dagger c_{\vec{k}\downarrow} \right] \\ & = \sum_{\vec{k}} \xi_{\vec{k}} \left[(|u_{\vec{k}}|^2 - |v_{\vec{k}}|^2) \left(\gamma_{\vec{k}\uparrow}^\dagger \gamma_{\vec{k}\uparrow} + \gamma_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \gamma_{-\vec{k}\downarrow} \right) + 2|v_{\vec{k}}|^2 + 2u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} \gamma_{\vec{k}\uparrow}^\dagger \gamma_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger + 2u_{\vec{k}}^* v_{\vec{k}}^* \gamma_{-\vec{k}\downarrow} \gamma_{\vec{k}\uparrow} \right]. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Za drugi član pak dobivamo:

$$\begin{aligned} - \sum_{\vec{k}} \left(\Delta_{\vec{k}} c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger + \Delta_{\vec{k}}^* c_{-\vec{k}\downarrow} c_{\vec{k}\uparrow} \right) & = \sum_{\vec{k}} \left[\left(\Delta_{\vec{k}} u_{\vec{k}} v_{\vec{k}}^* + \Delta_{\vec{k}}^* u_{\vec{k}}^* v_{\vec{k}} \right) \left(\gamma_{\vec{k}\uparrow}^\dagger \gamma_{\vec{k}\uparrow} + \gamma_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \gamma_{-\vec{k}\downarrow} \right) \right] \\ & - \sum_{\vec{k}} \left[\left(\Delta_{\vec{k}} u_{\vec{k}} v_{\vec{k}}^* + \Delta_{\vec{k}}^* u_{\vec{k}}^* v_{\vec{k}} \right) + \left(\Delta_{\vec{k}} u_{\vec{k}}^2 - \Delta_{\vec{k}}^* v_{\vec{k}}^2 \right) \gamma_{\vec{k}\uparrow}^\dagger \gamma_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \right] \\ & - \sum_{\vec{k}} \left[\left(\Delta_{\vec{k}}^* (u_{\vec{k}}^*)^2 - \Delta_{\vec{k}} (v_{\vec{k}})^2 \right) \gamma_{-\vec{k}\downarrow} \gamma_{\vec{k}\uparrow} \right]. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Treći član ne sadrži operatore (osim jediničnog operatora) pa se na njega ne primjenjuju transformacije. Transformirani hamiltonijan sada možemo podijeliti u tri dijela:

$$H = H_0 + H_1 + H_2, \quad (2.46)$$

gdje su članovi jednaki:

$$\begin{aligned} H_0 & = \sum_{\vec{k}} \left[2\xi_{\vec{k}} |v_{\vec{k}}|^2 - \Delta_{\vec{k}} u_{\vec{k}} v_{\vec{k}}^* - \Delta_{\vec{k}}^* u_{\vec{k}}^* v_{\vec{k}} + \Delta_{\vec{k}} \langle c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \rangle \right], \\ H_1 & = \sum_{\vec{k}} \left[\xi_{\vec{k}} (|u_{\vec{k}}|^2 - |v_{\vec{k}}|^2) + \Delta_{\vec{k}} u_{\vec{k}} v_{\vec{k}}^* + \Delta_{\vec{k}}^* u_{\vec{k}}^* v_{\vec{k}} \right] \left(\gamma_{\vec{k}\uparrow}^\dagger \gamma_{\vec{k}\uparrow} + \gamma_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \gamma_{-\vec{k}\downarrow} \right) \\ H_2 & = \sum_{\vec{k}} \left[2\xi_{\vec{k}} u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} - \Delta_{\vec{k}} u_{\vec{k}}^2 + \Delta_{\vec{k}}^* v_{\vec{k}}^2 \right] \left(\gamma_{\vec{k}\uparrow}^\dagger \gamma_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \right) + \text{h.c.} \end{aligned} \quad (2.47)$$

h.c. označava hermitski konjugat. Način na koji smo grupirali članove u pribrojнике H_0 , H_1 i H_2 je da smo s H_0 obuhvatili sve članove koji ne sadrže operatore (odnosno sadrže samo jedinični operator), s H_1 sve članove koji dolaze s produktom operatora stvaranja i poništavanja dok smo s H_2 obuhvatili sve operatore koji dolaze s produktom po dva operatora stvaranja odnosno poništavanja. Da bi dijagonalizirali hamiltonijan zahtijevamo da treći član, H_2 , bude jednak nuli. Razlog tome je što on mijenja vektor stanja nakon djelovanja. Prvi član koji sadrži samo jedinični operator trivijalno ne čini ništa vektoru stanja; drugi član djeluje na način da prvo spusti broj čestica u određenom stanju (definiranom s \vec{k} i σ) te ga nakon toga podigne što u konačnici vraća vektor stanja u izvorno stanje. Djelovanjem takvog produkta na vektor stanja kao rezultat dobivamo broj čestica u tom stanju te nepromijenjeni vektor stanja (tj. produkt ta dva operatora odgovara operatoru broja čestica u tom stanju). Kako treći član ne dolazi u takvoj formi da je u stanju vratiti vektor u izvorno stanje za njega zahtijevamo da bude jednak nuli što ujedno predstavlja drugu jednadžbu koju moraju zadovoljiti slobodni parametri iz Bogoljubovljevih transformacija. Ona glasi:

$$2\xi_{\vec{k}}u_{\vec{k}}v_{\vec{k}} - \Delta_{\vec{k}}u_{\vec{k}}^2 + \Delta_{\vec{k}}^*v_{\vec{k}}^2 = 0. \quad (2.48)$$

Kako iz jednadžbe 2.43 znamo da je zbroj kvadrata modula koeficijenata jednak jedinici za kvadrat modula jednog koeficijenta možemo pisati:

$$|u_{\vec{k}}|^2 = \frac{|u_{\vec{k}}|^2}{|u_{\vec{k}}|^2 + |v_{\vec{k}}|^2} = \frac{1}{1 + \left|\frac{v_{\vec{k}}}{u_{\vec{k}}}\right|^2}. \quad (2.49)$$

Da bi odredili iznos kvadrata modula koeficijenta trebamo samo iz jednadžbe 2.48 odrediti relaciju za omjer $\frac{v_{\vec{k}}}{u_{\vec{k}}}$ što se svodi na jednostavno rješavanje kvadratne jednadžbe. Rješenje koje pri tome biramo je ono s "+" predznakom jer želimo da energija osnovnog stanja bude minimalna a ne maksimalna. Izrazi koji se dobivaju za kvadrate modula slobodnih parametara su:

$$\begin{aligned} |u_{\vec{k}}|^2 &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_{\vec{k}}}{\sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + |\Delta_{\vec{k}}|^2}} \right), \\ |v_{\vec{k}}|^2 &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\xi_{\vec{k}}}{\sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + |\Delta_{\vec{k}}|^2}} \right). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Sada kada znamo vrijednosti koeficijenata možemo zapisati izraz za transformiran hamiltonijan. Njegovi članovi su jednaki:

$$\begin{aligned}
 H_0 &= \sum_{\vec{k}} \left(\xi_{\vec{k}} - \sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + |\Delta_{\vec{k}}|^2} + \Delta_{\vec{k}} \langle c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \rangle \right), \\
 H_1 &= \sum_{\vec{k}\sigma} \sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + |\Delta_{\vec{k}}|^2} \gamma_{\vec{k}\sigma}^\dagger \gamma_{\vec{k}\sigma}.
 \end{aligned} \tag{2.51}$$

Sada možemo prepoznati i značenje nekih izraza te za njih uvesti pokrate kako bi konačni hamiltonijan izgledao čišće. Tako prepoznamo $E_{\vec{k}} \equiv \sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + |\Delta_{\vec{k}}|^2}$ kao ekscitacijsku energiju te $E_0 \equiv H_0$ kao energiju osnovnog stanja. Uz navedene pokrate dijagonaliziran hamiltonijan glasi:

$$H = \sum_{\vec{k}\sigma} E_{\vec{k}} \gamma_{\vec{k}\sigma}^\dagger \gamma_{\vec{k}\sigma} + E_0. \tag{2.52}$$

Iz relacije $E_{\vec{k}} = \sqrt{\xi_{\vec{k}}^2 + |\Delta_{\vec{k}}|^2}$ sada možemo vidjeti zašto smo $\Delta_{\vec{k}}$ nazvali funkcijom energijskog procijepa. Promotrimo li naime što se događa na samom Fermijevoj nivou (Fermijevoj energiji) gdje je $\xi_{\vec{k}} = 0$ vidjet ćemo da u energijskom spektru postoji energijski procijep (skok) od $|\Delta_{\vec{k}}|$. Dakle da bi stvorili Cooperov par s česticama (elektronima) koje se nalaze na Fermijevoj nivou (tj. imaju valni vektor k_F) moramo sustavu dati $2|\Delta_{\vec{k}}|$ energije ($|\Delta_{\vec{k}}|$ za svaki elektron). Kvant pobuđenja supravodljivog sustava predstavlja kvazi-čestica koju nazivamo bogoljubon a opisana je s operatorom $\gamma_{\vec{k}\sigma}^\dagger$. Glavna veličina u opisu supravodljivog sustava je funkcija energijskog procijepa. Ona naime definira iznos svih parametara važnih za opis supravodljivog sustava: $|u_{\vec{k}}|^2$ i $|v_{\vec{k}}|^2$, energiju osnovnog stanja, ekscitacijsku energiju te operatore stvaranja i poništenja bogoljubona $\gamma_{\vec{k}\sigma}^\dagger$ i $\gamma_{\vec{k}\sigma}$. Da bi mogli opisati supravodljivi sustav moramo znati kako izgleda funkcija energijskog procijepa. Funkciju energijskog procijepa možemo također promatrati i kao parametar uređenja odnosno kao veličinu koja je u supravodljivom stanju različita od nule dok je u normalnom stanju nula. Da sustav postane "normalan" kada je $\Delta_{\vec{k}} = 0$ možemo se vrlo lako uvjeriti pogledamo li čemu su u tom slučaju jednake veličine koje opisuju supravodljivi sustav. O samom obliku funkcije energijskog procijepa bit će riječi nešto kasnije. Iz jednadžbe 2.52 možemo iščitati svojstvene vrijednosti (energijska stanja) no nas zanimaju i svojstvena stanja, odnosno konkretnije osnovno stanje koje odgovara vakuumu u bogoljubonima. Kako

je riječ o vakuumu znamo da će djelovanje operatora spuštanja na to stanje dati nulu:

$$\gamma_{\vec{k}\sigma}|\Psi_{BCS}\rangle = 0. \quad (2.53)$$

Nas zanima kako taj vektor stanja izgleda u elektronskoj reprezentaciji zbog čega $\gamma_{\vec{k}\sigma}$ raspisujemo sukladno relaciji 2.42. Iz toga dobivamo sljedeću jednakost:

$$u_{\vec{k}}c_{\vec{k}\uparrow}|\Psi_{BCS}\rangle = v_{\vec{k}}c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger|\Psi_{BCS}\rangle. \quad (2.54)$$

Osnovno stanje ćemo pretpostaviti u sljedećem obliku; neka je $|0\rangle$ originalno vakuumsko stanje elektrona odnosno stanje koje bi elektroni imali da nema supravodljivosti ($\Delta_{\vec{k}} = 0$). Općenito BCS stanje dobit ćemo djelovanjem svih operatora kojima su generatori operatori stvaranja Cooperovog para ($c_{\vec{q}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{q}\downarrow}^\dagger$). BCS vektor stanja je stoga jednak:

$$|\Psi_{BCS}\rangle = N \prod_{\vec{q}} e^{\alpha_{\vec{q}} c_{\vec{q}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{q}\downarrow}^\dagger} |0\rangle, \quad (2.55)$$

gdje je N konstanta normalizacije a $\alpha_{\vec{q}}$ funkcija koju trebamo odrediti tako da bude zadovoljena jednačba 2.54. U pronalaženje te funkcije krećemo promatrajući prvo lijevu stranu jednačbe. Operator $c_{\vec{k}\uparrow}$ će moći preskočiti sve operatore $e^{\alpha_{\vec{q}} c_{\vec{q}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{q}\downarrow}^\dagger}$ (tj. komutira s njima) osim operatora $e^{\alpha_{\vec{k}} c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger}$ zbog čega moramo odrediti samo čemu će taj član biti jednak. Kako bi si skratili zapis uvodimo sljedeću pokratu:

$$\theta_{\vec{k}} \equiv \alpha_{\vec{k}} c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger. \quad (2.56)$$

Kako je $c_{\vec{k}\uparrow}|0\rangle$ po definiciji jednako nuli izraz koji moramo izračunati je:

$$c_{\vec{k}\uparrow} e^{\theta_{\vec{k}}} |0\rangle = c_{\vec{k}\uparrow} \sum_{n \geq 0} \frac{\theta_{\vec{k}}^n}{n!} |0\rangle = c_{\vec{k}\uparrow} \sum_{n \geq 1} \frac{\theta_{\vec{k}}^n}{n!} |0\rangle. \quad (2.57)$$

Za to će nam biti potrebna komutacijska relacija između $c_{\vec{k}\uparrow}$ i $\theta_{\vec{k}}$ koja je jednaka:

$$\begin{aligned} [c_{\vec{k}\uparrow}, \theta_{\vec{k}}] &= [c_{\vec{k}\uparrow}, \alpha_{\vec{k}} c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger] \\ &= \alpha_{\vec{k}} [c_{\vec{k}\uparrow}, c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger] \\ &= \alpha_{\vec{k}} \left([c_{\vec{k}\uparrow}, c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger] c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger + c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger [c_{\vec{k}\uparrow}, c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger] \right) \\ &= \alpha_{\vec{k}} c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Koristeći ovu relaciju za članove Taylorovog reda dobivamo:

$$\begin{aligned}
c_{\vec{k}\uparrow} \theta_{\vec{k}} |0\rangle &= \alpha_{\vec{k}} c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger |0\rangle + \theta_{\vec{k}} c_{\vec{k}\uparrow} |0\rangle \\
&= \alpha_{\vec{k}} c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger |0\rangle \\
c_{\vec{k}\uparrow} \theta_{\vec{k}}^2 |0\rangle &= \left([c_{\vec{k}\uparrow} \theta_{\vec{k}}, \theta_{\vec{k}}] + \theta_{\vec{k}} c_{\vec{k}\uparrow} \theta_{\vec{k}} \right) |0\rangle \\
&= \left(c_{\vec{k}\uparrow} [\theta_{\vec{k}}, \theta_{\vec{k}}] + [c_{\vec{k}\uparrow}, \theta_{\vec{k}}] \theta_{\vec{k}} + \theta_{\vec{k}} c_{\vec{k}\uparrow} \theta_{\vec{k}} \right) |0\rangle \\
&= \left([c_{\vec{k}\uparrow}, \theta_{\vec{k}}] \theta_{\vec{k}} + \theta_{\vec{k}} c_{\vec{k}\uparrow} \theta_{\vec{k}} \right) |0\rangle \\
&= \left(\alpha_{\vec{k}} c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \theta_{\vec{k}} + \theta_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle \\
&= 2\alpha_{\vec{k}} c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \theta_{\vec{k}} |0\rangle \\
&\vdots
\end{aligned} \tag{2.59}$$

Općeniti izraz koji vrijedi za $n \geq 1$ je:

$$c_{\vec{k}\uparrow} \theta_{\vec{k}}^n |0\rangle = n \alpha_{\vec{k}} c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \theta_{\vec{k}}^{n-1} |0\rangle. \tag{2.60}$$

Izraz koji želimo izračunati je tada jednak:

$$\begin{aligned}
c_{\vec{k}\uparrow} e^{\theta_{\vec{k}}} |0\rangle &= \sum_{n \geq 1} \frac{c_{\vec{k}\uparrow} \theta_{\vec{k}}^n}{n!} |0\rangle \\
&= \sum_{n \geq 1} \frac{n \alpha_{\vec{k}} c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \theta_{\vec{k}}^{n-1}}{n!} |0\rangle \\
&= \alpha_{\vec{k}} c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \sum_{n \geq 1} \frac{\theta_{\vec{k}}^{n-1}}{(n-1)!} |0\rangle \\
&= \alpha_{\vec{k}} c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \sum_{n \geq 0} \frac{\theta_{\vec{k}}^n}{n!} |0\rangle = \alpha_{\vec{k}} c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger |\Psi_{BCS}\rangle.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

Izjednačavajući lijevu i desnu stranu jednakosti 2.54 dobivamo da je $\alpha_{\vec{k}}$ jednako:

$$\begin{aligned}
u_{\vec{k}} c_{\vec{k}\uparrow} |\Psi_{BCS}\rangle &= u_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger |\Psi_{BCS}\rangle = v_{\vec{k}} c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger |\Psi_{BCS}\rangle \\
\alpha_{\vec{k}} &= \frac{v_{\vec{k}}}{u_{\vec{k}}}.
\end{aligned} \tag{2.62}$$

Vektor stanja je tada jednak:

$$\begin{aligned}
|\Psi_{BCS}\rangle &= N \prod_{\vec{k}} e^{\frac{v_{\vec{k}}}{u_{\vec{k}}} c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger} |0\rangle \\
&= N \prod_{\vec{k}} \left(1 + \frac{v_{\vec{k}}}{u_{\vec{k}}} c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle.
\end{aligned} \tag{2.63}$$

Ovdje smo odbacili sve članove s $n \geq 2$ zbog toga što su oni generatori $n \geq 2$ fermiona koji se nalaze u istom kvantno-mehaničkom stanju a takvo što je zabranjeno Paulijevim principom. Da bi dobili konačni izraz za vektor osnovnog stanja ostaje nam još samo odrediti konstantu normiranja. Nju dobivamo iz uvjeta da je:

$$\begin{aligned}
\langle \Psi_{BCS} | \Psi_{BCS} \rangle &\equiv 1 \\
&= N \prod_{\vec{q}} \langle 0 | \left(1 + \frac{v_{\vec{q}}^*}{u_{\vec{q}}^*} c_{-\vec{q}\downarrow} c_{\vec{q}\uparrow} \right) \cdot N \prod_{\vec{k}} \left(1 + \frac{v_{\vec{k}}}{u_{\vec{k}}} c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle \\
&= N^2 \prod_{\vec{k}} \langle 0 | \left(1 + \frac{v_{\vec{k}}^*}{u_{\vec{k}}^*} c_{-\vec{k}\downarrow} c_{\vec{k}\uparrow} \right) \left(1 + \frac{v_{\vec{k}}}{u_{\vec{k}}} c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle.
\end{aligned} \tag{2.64}$$

Vrijednost skalarnog produkta je:

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \left(1 + \frac{v_{\vec{k}}^*}{u_{\vec{k}}^*} c_{-\vec{k}\downarrow} c_{\vec{k}\uparrow} \right) \left(1 + \frac{v_{\vec{k}}}{u_{\vec{k}}} c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle &= \\
= \langle 0 | \left(1 + \frac{v_{\vec{k}}}{u_{\vec{k}}} c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger + \frac{v_{\vec{k}}^*}{u_{\vec{k}}^*} c_{-\vec{k}\downarrow} c_{\vec{k}\uparrow} + \frac{|v_{\vec{k}}|^2}{|u_{\vec{k}}|^2} c_{-\vec{k}\downarrow} c_{\vec{k}\uparrow} c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle &= \\
= \langle 0 | \left(1 + \frac{|v_{\vec{k}}|^2}{|u_{\vec{k}}|^2} c_{-\vec{k}\downarrow} c_{\vec{k}\uparrow} c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle &= \\
= \langle 0 | \left[1 + \frac{|v_{\vec{k}}|^2}{|u_{\vec{k}}|^2} (1 - N_{\vec{k}\uparrow}) (1 - N_{-\vec{k}\downarrow}) \right] |0\rangle &= \\
= 1 + \frac{|v_{\vec{k}}|^2}{|u_{\vec{k}}|^2}. &
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Konstanta normalizacije je tada jednaka:

$$N^2 = \frac{1}{\prod_{\vec{k}} \left(1 + \frac{|v_{\vec{k}}|^2}{|u_{\vec{k}}|^2} \right)} = \prod_{\vec{k}} \frac{|u_{\vec{k}}|^2}{|u_{\vec{k}}|^2 + |v_{\vec{k}}|^2} = \prod_{\vec{k}} |u_{\vec{k}}|^2 \rightarrow N = \prod_{\vec{k}} |u_{\vec{k}}|. \tag{2.66}$$

Konačni izraz za vektor osnovnog stanja je stoga:

$$|\Psi_{BCS}\rangle = \prod_{\vec{k}} \left(u_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} c_{\vec{k}\uparrow}^\dagger c_{-\vec{k}\downarrow}^\dagger \right) |0\rangle. \tag{2.67}$$

2.2.1 Funkcija energijskog procijepa

Kao što smo već rekli ono što dominantno određuje svojstva supravodiča je funkcija energijskog procijepa $\Delta_{\vec{k}}$. Sada želimo odrediti eksplicitni izgled te funkcije. Kako bi to odredili krećemo od definicije funkcije energijskog procijepa (jednadžba 2.39) koju nadalje raspisujemo koristeći Bogoljubovljeve transformacije:

$$\begin{aligned}
\Delta_{\vec{k}} &= -\frac{1}{N} \sum_{\vec{k}'} V_{\vec{k}\vec{k}'} \langle c_{-\vec{k}'\downarrow} c_{\vec{k}'\uparrow} \rangle \\
&= -\frac{1}{N} \sum_{\vec{k}'} V_{\vec{k}\vec{k}'} \langle (u_{\vec{k}'}^* \gamma_{-\vec{k}'\downarrow} - v_{\vec{k}'} \gamma_{\vec{k}'\uparrow}^\dagger) (u_{\vec{k}'}^* \gamma_{\vec{k}'\uparrow} + v_{\vec{k}'} \gamma_{-\vec{k}'\downarrow}^\dagger) \rangle \\
&= -\frac{1}{N} \sum_{\vec{k}'} V_{\vec{k}\vec{k}'} \langle (u_{\vec{k}'}^*)^2 \gamma_{-\vec{k}'\downarrow} \gamma_{\vec{k}'\uparrow} + u_{\vec{k}'}^* v_{\vec{k}'} \gamma_{-\vec{k}'\downarrow} \gamma_{-\vec{k}'\downarrow}^\dagger - v_{\vec{k}'} u_{\vec{k}'}^* \gamma_{\vec{k}'\uparrow}^\dagger \gamma_{\vec{k}'\uparrow} - v_{\vec{k}'}^2 \gamma_{\vec{k}'\uparrow}^\dagger \gamma_{-\vec{k}'\downarrow}^\dagger \rangle \\
&= -\frac{1}{N} \sum_{\vec{k}'} V_{\vec{k}\vec{k}'} u_{\vec{k}'}^* v_{\vec{k}'} \left(\langle \gamma_{-\vec{k}'\downarrow} \gamma_{-\vec{k}'\downarrow}^\dagger \rangle - \langle \gamma_{\vec{k}'\uparrow}^\dagger \gamma_{\vec{k}'\uparrow} \rangle \right).
\end{aligned} \tag{2.68}$$

Kako su bogoljuboni fermioni oni slijede Fermi-Diracovu raspodjelu a koja je pak, budući da je riječ o fermionima, jednaka očekivanom broju čestica u određenom stanju. To znači da je:

$$\langle \gamma_{\vec{k}'\uparrow}^\dagger \gamma_{\vec{k}'\uparrow} \rangle = \langle \gamma_{-\vec{k}'\downarrow}^\dagger \gamma_{-\vec{k}'\downarrow} \rangle = \frac{1}{e^{\beta E_{\vec{k}'}} + 1}, \tag{2.69}$$

gdje je $E_{\vec{k}'}$ energija koju imaju bogoljuboni valnog vektora \vec{k}' . Razlika očekivanih vrijednosti u izrazu 2.68 je stoga jednaka:

$$\begin{aligned}
\langle \gamma_{-\vec{k}'\downarrow} \gamma_{-\vec{k}'\downarrow}^\dagger \rangle - \langle \gamma_{\vec{k}'\uparrow}^\dagger \gamma_{\vec{k}'\uparrow} \rangle &= 1 - \left(\langle \gamma_{-\vec{k}'\downarrow}^\dagger \gamma_{-\vec{k}'\downarrow} \rangle + \langle \gamma_{\vec{k}'\uparrow}^\dagger \gamma_{\vec{k}'\uparrow} \rangle \right) \\
&= 1 - \frac{2}{e^{\beta E_{\vec{k}'}} + 1} \\
&= \frac{e^{\beta E_{\vec{k}'}} - 1}{e^{\beta E_{\vec{k}'}} + 1} = \tanh \left(\frac{E_{\vec{k}'}}{2k_B T} \right).
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Iako nismo egzaktno odredili $u_{\vec{k}}^*$ i $v_{\vec{k}}$ njihov produkt možemo izračunati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
u_{\vec{k}'}^* v_{\vec{k}'} &= u_{\vec{k}'}^* v_{\vec{k}'} \frac{u_{\vec{k}'}^*}{u_{\vec{k}'}^*} = |u_{\vec{k}'}^*|^2 \frac{v_{\vec{k}'}}{u_{\vec{k}'}} \\
&= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\xi_{\vec{k}'}}{\sqrt{\xi_{\vec{k}'}}^2 + |\Delta_{\vec{k}'}|^2} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{\xi_{\vec{k}'}}^2 + |\Delta_{\vec{k}'}|^2 - \xi_{\vec{k}'}}{\Delta_{\vec{k}'}} \right) \\
&= \frac{\Delta_{\vec{k}'}}{2\sqrt{\xi_{\vec{k}'}}^2 + |\Delta_{\vec{k}'}|^2}.
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Funkcija energijskog procijepa je stoga jednaka:

$$\Delta_{\vec{k}} = -\frac{1}{N} \sum_{\vec{k}'} \frac{V_{\vec{k}\vec{k}'} \Delta_{\vec{k}'}}{2E_{\vec{k}'}} \tanh \left(\frac{E_{\vec{k}'}}{2k_B T} \right). \tag{2.72}$$

Da bi dobili konačan izraz za funkciju energijskog procijepa moramo još definirati izgled potencijala $V_{\vec{k}\vec{k}'}$. Vodeći se rezultatima koje smo dobili promatrajući stanja u koja se vežu dva elektrona iz Fermijeveg mora uz posredovanje fononske interakcije, za $V_{\vec{k}\vec{k}'}$ biramo privlačni potencijal koji je različit od nule i jednak $V_{\vec{k}\vec{k}'} = -V_0$ u intervalu $|\epsilon_{\vec{k}}| < \hbar\omega_D$. Dakle taj potencijal je neiščezavajući samo za elektrone u tankom sloju u blizini Fermijeve energije. Kako nam potencijal ne ovisi o \vec{k} za $\Delta_{\vec{k}}$ ćemo također pretpostaviti da ne ovisi o \vec{k} te da je realan, $\Delta_{\vec{k}} = \Delta$. Ovakav tip funkcije procijepa nazivamo s-val procijepom. Uvrstimo li navedene pretpostavke u jednadžbu 2.72 dobivamo:

$$1 = \frac{V_0}{N} \sum_{\vec{k} < k_D} \frac{1}{2E_{\vec{k}}} \tanh \left(\frac{E_{\vec{k}}}{2k_B T} \right). \tag{2.73}$$

Kako bi izračunali ovu sumu pretvaramo ju u integral gdje je $\rho(\epsilon)$ gustoća stanja po spinu:

$$1 = V_0 \int_{-\hbar\omega_D}^{\hbar\omega_D} \frac{\rho(\epsilon) d\epsilon}{2\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}} \tanh \left(\frac{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}}{2k_B T} \right). \tag{2.74}$$

Kako je taj sloj jako tanak tj. $\hbar\omega_D \ll \mu$, možemo uvesti aproksimaciju u kojoj je gustoća stanja konstantna i jednaka onoj na Fermijevom nivou:

$$1 \approx V_0 \rho(\epsilon_F) \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}} \tanh \left(\frac{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2}}{2k_B T} \right). \tag{2.75}$$

Ono što smo dobili je implicitno zadana relacija. Nas prvenstveno zanima što se događa na temperaturi $T = 0$ K. Na toj temperaturi $\tanh\left(\frac{E_F}{k_B T}\right) \rightarrow 1$ pa izraz 2.75 postaje puno jednostavniji i glasi:

$$1 = V_0 \rho(\epsilon_F) \int_0^{\hbar\omega_D} \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^2 + \Delta_0^2}}, \quad (2.76)$$

gdje je $\Delta_0 \equiv \Delta(T = 0)$. Riješimo li preostali integral dobivamo da je:

$$\frac{1}{V_0 \rho(\epsilon_F)} = \operatorname{arsinh}\left(\frac{\hbar\omega_D}{\Delta_0}\right). \quad (2.77)$$

U većini slučajeva energija fonona je puno veća od energijskog procijepa zbog čega gornji izraz možemo aproksimirati na način da je:

$$\frac{1}{V_0 \rho(\epsilon_F)} \approx \ln\left(\frac{2\hbar\omega_D}{\Delta_0}\right). \quad (2.78)$$

Iz toga dobivamo relaciju energijskog procijepa koja glasi:

$$\Delta_0 \approx 2\hbar\omega_D e^{-\frac{1}{V_0 \rho(\epsilon_F)}}. \quad (2.79)$$

2.3 Ginzburg-Landau (GL) teorija

Sada ćemo proučiti teoriju koja drugačije pristupa opisu supravodljivosti. Originalno je taj model osmišljen kao fenomenološki opis problema supravodljivosti (kao što će biti vidljivo u nastavku) ali njega je moguće izvesti i iz BCS teorije što je Gor'kov i učinio. Središnju ulogu u ovoj teoriji ima veličina koju nazivamo parametar uređenja. Tu veličinu karakteriziraju sljedeća svojstva: ona je nula iznad neke kritične temperature T_c (dakle u normalnom stanju) te je različita od nule ispod te kritične temperature (dakle u supravodljivom stanju). Kao što vidimo postoji više mogućih izbora za parametar uređenja no mi ćemo za taj parametar uzeti gustoću supravodljivih čestica (tj. Cooperovih parova) n_s . Iz kvantne mehanike znamo da je $n_s(\vec{r}) \propto |\Psi(\vec{r})|^2$ gdje je $\Psi(\vec{r})$ supravodljiva valna funkcija. Način na koji analiziramo karakteristike tog sustava u ovom modelu je termodinamičke prirode odnosno promatramo kako se ponaša razlika gustoća slobodnih energija supravodljivog i normalnog sustava $\mathcal{F}[n_s(\vec{r})]$. Ono što znamo je da se svaki termodinamički sustav ponaša tako da teži biti u stanju najmanje energije. Zbog toga zahtijevamo da parametar uređenja bude takav da integral

$F = \int d\vec{r} \mathcal{F} [n_s(\vec{r})]$ ima najmanju moguću vrijednost. Taj problem se rješava variacijskim postupkom koji nam kaže da će taj uvjet biti zadovoljen ukoliko \mathcal{F} poštuje Euler-Lagrangeove jednadžbe. Ono što i bez računanja Euler-Lagrangeovih jednadžbi možemo zaključiti jest kako ravnotežna vrijednost od \mathcal{F} mora biti pozitivna iznad kritične temperature T_c zbog toga što je tada gustoća slobodne energije supravodljivog sustava veća od gustoće slobodne energije normalnog stanja (sustav teži biti u stanju s najmanjom energijom!) dok za temperature ispod T_c vrijednost od \mathcal{F} mora biti negativna jer tada nižu vrijednost mora imati gustoća slobodne energije supravodljivog stanja. Na samoj kritičnoj temperaturi \mathcal{F} mora biti jednako nuli. Zbog toga u blizini kritične temperature T_c možemo razliku gustoća slobodnih energija razviti u Taylorov red po parametru uređenja te se zadržati na prvih nekoliko članova. Za početak ćemo promotriti slučaj u kojem n_s ne ovisi o \vec{r} . U tom je slučaju [5]:

$$\mathcal{F}(\Psi, \Psi^*) = \alpha |\Psi|^2 + \frac{\beta}{2} |\Psi|^4. \quad (2.80)$$

Kao što vidimo \mathcal{F} ima dvije funkcije po kojima možemo provesti varijaciju no kako za obje dobivamo identične jednadžbe mi ćemo u nastavku provoditi samo po jednoj (Ψ^*). Da bi ovakav \mathcal{F} imao gore navedena svojstva koeficijent β mora biti pozitivan. Informacije o koeficijentu α dobit ćemo rješavajući Euler-Lagrangeovu jednadžbu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Psi^*} &= \alpha \Psi + \beta \Psi |\Psi|^2 = 0 \\ \Psi (\alpha + \beta |\Psi|^2) &= 0. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Ono što vidimo iz jednadžbe 2.81 je da postoje dva moguća rješenja: $|\Psi| = 0$ i $|\Psi| = \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}$; pri čemu prvo rješenje odgovara normalnom stanju a drugo supravodljivom. Razlika gustoća slobodnih energija u tim stanjima je $\mathcal{F} = 0$ i $\mathcal{F} = -\frac{\alpha^2}{2\beta}$. Kako β mora biti veći od nule slijedi da α mora biti manji od nule kako bi $|\Psi| = \sqrt{-\frac{\alpha}{\beta}}$ bio realan. Parametar α tada možemo iskoristiti za opis valne funkcije u oba stanja na način da kažemo da je:

$$\alpha = a(T - T_c). \quad (2.82)$$

U općenitom slučaju n_s može ovisiti o \vec{r} . Tada se u izrazu za \mathcal{F} javlja i član $|\vec{\nabla}\Psi|^2$. Simetričnost i analitičnost zahtijevaju da $|\vec{\nabla}\Psi|^2$ bude jedini mogući član koji se pojavljuje. Nalazi li se pritom sustav i u vanjskom magnetskom polju na Cooperove

parove (koji su nabijeni) djelovat će magnetsko polje čiji doprinos opisujemo metodom minimalne supstitucije na način da se izraz za impuls $\vec{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}$ prošiti s $\frac{2e}{c}\vec{A}$, gdje je \vec{A} magnetski vektorski potencijal ($2e$ zato što je naboj Cooperovog para $-2e$). Također kako se sustav nalazi u vanjskom magnetskom polju dodajemo i član koji opisuje gustoću energije magnetskog polja koji glasi $\frac{B^2}{8\pi}$. Ukupni izraz za \mathcal{F} je tada:

$$\mathcal{F}(\Psi(\vec{r}), \Psi^*(\vec{r}), \vec{A}) = \alpha|\Psi(\vec{r})|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi(\vec{r})|^4 + \frac{1}{4m} \left| \left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + \frac{2e}{c}\vec{A} \right) \Psi(\vec{r}) \right|^2 + \frac{B^2}{8\pi}. \quad (2.83)$$

Ovakav razvoj za \mathcal{F} nazivamo Ginzburg-Landau razvoj slobodne energije i on se može izvesti iz mikroskopske BCS teorije. Kako bi lakše vidjeli utjecaj članova iz relacije 2.83 na svojstva supravodiča sada ćemo provesti analizu uključujući jedan po jedan doprinos. Za početak ćemo promotriti sustav u kojem valna funkcija nije konstantna u prostoru te koji se ne nalazi u magnetskom polju. Zbog jednostavnosti sustav ćemo promatrati u jednoj dimenziji. Unutar ovakvog sustava relacija 2.83 se pojednostavljuje i glasi:

$$\mathcal{F}(\Psi(x), \Psi^*(x)) = \alpha|\Psi(x)|^2 + \frac{\beta}{2}|\Psi(x)|^4 + \frac{\hbar^2}{4m} \left| \frac{d\Psi}{dx} \right|^2. \quad (2.84)$$

Ovaj sustav je sličan onome kojeg smo prvo proučavali, sustav u kojem valna funkcija ne ovisi o koordinati prostora, tj. taj sustav je samo specijalni slučaj ovakvog sustava. Za valnu funkciju koju smo dobili kao rješenje u tom sustavu uvest ćemo pokratu koja glasi:

$$|\Psi_\infty|^2 \equiv \frac{|\alpha|}{\beta} = \frac{-\alpha}{\beta}. \quad (2.85)$$

Kako očekujemo da ćemo dovoljno duboko u supravodiču imati ravnotežno stanje za valnu funkciju poopćenog slučaja je tada logično pretpostaviti sljedeći oblik:

$$\Psi(x) = \Psi_\infty \psi(x). \quad (2.86)$$

Provedemo li varijaciju po Ψ^* dobivamo:

$$-\frac{\hbar^2}{4m} \frac{d^2\Psi}{dx^2} + \alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi = 0. \quad (2.87)$$

Uvrstimo li sada izraz 2.86 u gornju jednadžbu ona postaje jednaka:

$$-\frac{\hbar^2}{4m\alpha} \frac{d^2\psi}{dx^2} + \psi - |\psi|^2\psi = 0. \quad (2.88)$$

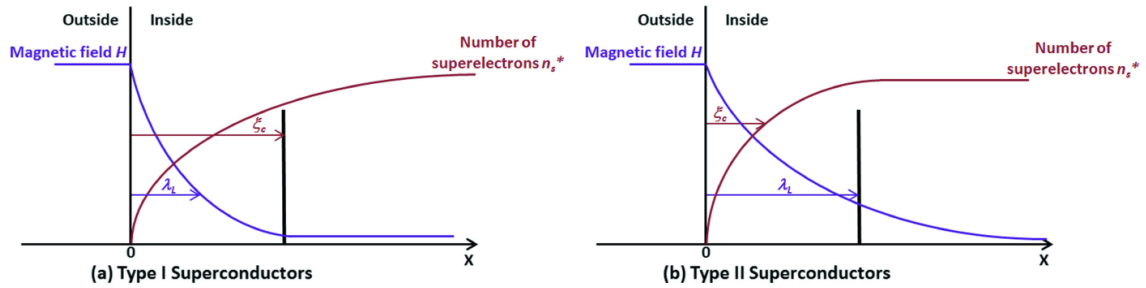
Za izraz ispred prvog člana uvodimo pokratu koja glasi:

$$\xi_{GL}^2 \equiv -\frac{\hbar^2}{4m\alpha} \quad (2.89)$$

gdje je ξ_{GL} Ginzburg-Landau (GL) duljina koherencije. Rješenje jednadžbe 2.88 je tada jednako:

$$\psi = \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}\xi_{GL}}\right). \quad (2.90)$$

Drugo rješenje odbacujemo jer divergira. Ovdje smo dobili i drugu karakterističnu skalu za opis supravodiča. GL duljina koherencije predstavlja udaljenost između Cooperovih parova (taj zaključak slijedi iz BCS teorije), odnosno prosječnu udaljenost između čestice koje su u koherenciji. Njezin utjecaj na izgled valne funkcije prikazan je na slici 2.1. Kao što sa slike možemo vidjeti, što je GL duljina koherencije



Slika 2.1: Utjecaj GL duljine koherencije i Londonove dubine penetracije na izgled valne funkcije odnosno magnetskog polja unutar supravodiča tipa I i tipa II. Slika preuzeta iz [6].

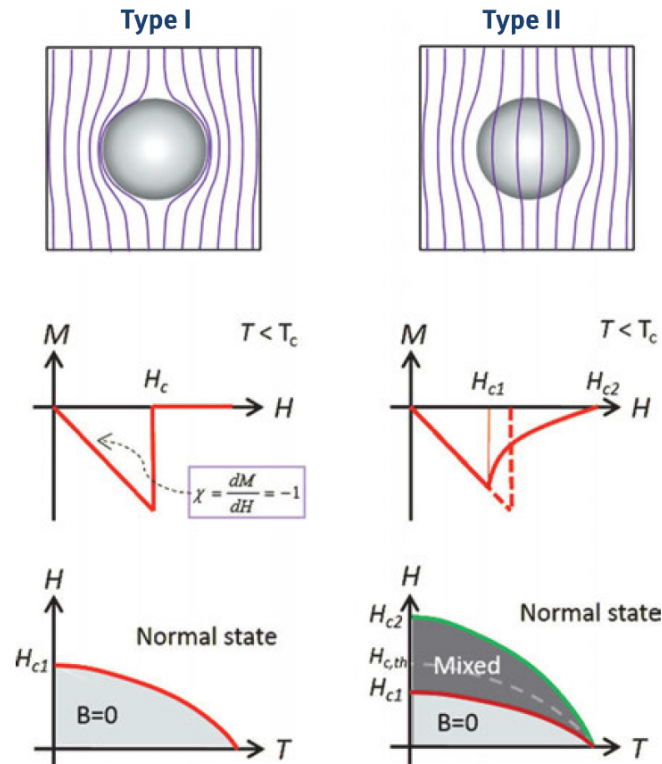
veća to je veća i udaljenost između Cooperovih parova te se smanjuje njihov ukupni broj (odnosno gustoća $n_s = |\Psi|^2$). Sada kada znamo da postoje dvije karakteristične skale:

1. Londonova dubina penetracije (prodiranja) Λ_L
2. GL duljina koherencije ξ_{GL}

želimo vidjeti kakvog one imaju utjecaja na svojstva supravodiča. Povećanje Londonove dubine penetracije uzrokuje povećanje ukupne slobodne energije sustava dok povećanje duljine koherencije smanjuje iznos slobodne energije zbog čega je konačno stanje sustava definirano omjerom ta dva parametra. Taj omjer definiramo na sljedeći način:

$$\kappa \equiv \frac{\Lambda_L}{\xi_{GL}} \quad (2.91)$$

i nazivamo Ginzburg-Landau (GL) parametar. Vrijednost tog parametra određuje tip supravodiča. Ako je $\kappa < \frac{1}{\sqrt{2}}$ tada je riječ o supravodiču tipa I dok je za $\kappa > \frac{1}{\sqrt{2}}$ riječ o supravodiču tipa II. Razlika između supravodiča tipa I i tipa II ogleda se u reprezentaciji njihove savršene dijamagnetičnosti kao što je prikazano na slici 2.2. Kod



Slika 2.2: Ponašanje supravodiča tipa I i tipa II. Slika preuzeta iz [7].

supravodiča tipa I iznos magnetizacije raste linearno s povećanjem magnetskog polja, izbacujući pritom ukupno magnetskog polje iz supravodiča, sve do vrijednosti magnetskog polja koju nazivamo kritično magnetsko polje a označavamo s H_c . Kada se supravodič nalazi u polju većem od kritičnog on prestaje biti supravodič i magnetsko polje kroz njega prolazi kao i kod normalnih metala. Kod supravodiča tipa II stvari su nešto drugačije. Kod njih iznos magnetizacije također raste linearno s povećanjem vanjskog magnetskog polja do neke vrijednosti koju nazivamo donje kritično magnetsko polje, H_{c1} . No za razliku od supravodiča tipa I gdje nakon tog polja iznos magnetizacije padne na nulu i gdje polje počinje kroz supravodič prolaziti kao kod normalnih metala, kod supravodiča tipa II pad iznosa magnetizacije nije trenutačan već magnetizacija pada eksponencijalno s daljnjim povećanjem magnetskog polja. Taj se pad događa sve dok iznos magnetizacije ne padne na nulu. Magnetsko polje pri kojem se to događa nazivamo gornjim kritičnim magnetskim poljem i označavamo

s H_{c_2} . Stanje između polja H_{c_1} i H_{c_2} nazivamo miješano stanje jer tada sustav više nije savršeni dijamagnet već postoje područja u supravodiču kroz koja silnice magnetskog polja prolaze kao da je riječ o normalnom metalu. Miješano stanje je dakle kombinacija normalnog i supravodljivog stanja. Iako sustav u miješanom stanju više nije savršeni dijamagnet on je i dalje savršeni vodič. Zbog toga su nam supravodiči tipa II jako korisni kod izrade supravodljivih magneta za postizanje vrlo jakih magnetskih polja. Sada želimo detaljnije proučiti ponašanje supravodljivog sustava kada se nalazi u magnetskom polju pa u analizu uključujemo i magnetske članove. Kako bi ta analiza bila moguća, odnosno kako bi rješenje koje dobivamo bilo analitičko, u izrazu za razvoj slobodne energije ići ćemo samo do $|\Psi|^2$ (tj. zanemarujemo član $|\Psi|^4$). Variranjem po Ψ^* dobivamo jednadžbu koja se naziva linearna GL jednadžba i glasi:

$$\frac{\left(-i\hbar\vec{\nabla} - q\vec{A}\right)^2}{4m}\Psi + \alpha\Psi = 0. \quad (2.92)$$

Bez smanjenja općenitosti možemo uzeti da je smjer magnetskog polja u smjeru osi z , $\vec{B} = B\vec{e}_z$, pa je vektorski magnetski potencijal $\vec{A} = (0, Bx, 0)$. Linearna GL jednadžba je tada jednaka:

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{4m}\vec{\nabla}^2\Psi + \frac{i\hbar q}{2m}\left(\vec{A} \cdot \vec{\nabla}\right)\Psi + \frac{q^2 A^2}{4m}\Psi + \alpha\Psi &= 0 \\ -\frac{\hbar^2}{4m}\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right) + \frac{i\hbar q}{2m}Bx\frac{\partial\Psi}{\partial y} + \frac{q^2 B^2 x^2}{4m}\Psi + \alpha\Psi &= 0. \end{aligned} \quad (2.93)$$

Ansatz koji koristimo kako bi riješili ovu jednadžbu je:

$$\Psi(x, y, z) = \Psi'(x)e^{ik_y y} e^{ik_z z}. \quad (2.94)$$

Uvrštavanjem tog ansatza u gornju jednadžbu ona se svodi na:

$$-\frac{\hbar^2}{4m}\frac{\partial^2\Psi'}{\partial x^2} + \frac{1}{2}2m\omega^2(x - x_0)^2\Psi' = \left(\alpha - \frac{\hbar^2 k_z^2}{4m}\right)\Psi' \equiv \epsilon\Psi', \quad (2.95)$$

gdje je $\omega \equiv \frac{qB}{2m}$ i $x_0 \equiv \frac{\hbar k_y}{qB}$. Relacija koju smo dobili je jednadžba 1D harmonijskog oscilatora čija rješenja su nam poznata:

$$\epsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\frac{qB}{2m} = \alpha - \frac{\hbar^2 k_z^2}{4m}. \quad (2.96)$$

Parametre k_y i k_z uvijek možemo odabrati tako da je $k_y = k_z = 0$ odnosno uvijek možemo prijeći u sustav u kojem su oni nula. Oni ne utječu na kvantizaciju energije već samo određuju iznos nulte vrijednosti energije. Promotrimo li kako izgleda izraz za B u sustavu $k_z = 0$ dobivamo da je:

$$B = \frac{4m\alpha}{(2n+1)\hbar q}. \quad (2.97)$$

Iz ove relacije možemo iščitati kolika je kritična, odnosno kod supravodiča tipa II gornja kritična, vrijednost magnetskog polja. Nju dobivamo za $n = 0$ i ona je jednaka:

$$B_{c_2} = \frac{4m\alpha}{\hbar q}. \quad (2.98)$$

Kvant magnetskog toka je jednak $\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{q}$ pa izraz za gornje kritično magnetsko polje možemo još zapisati na način:

$$B_{c_2} = \frac{\Phi_0}{2\pi\xi_{GL}^2}. \quad (2.99)$$

I iz ovog izraza možemo vidjeti koliko je parametar ξ_{GL} važan za definiranje svojstava supravodiča. Za kraj promotrimo još kakve jednadžbe dobivamo analizirajući puni izraz 2.83. Ovdje sada imamo tri funkcije po kojima možemo provesti varijaciju: Ψ , Ψ^* i \vec{A} . Mi ćemo varijaciju provesti po dvije s istim razlogom kao i prije. No da bi to mogli prije toga moramo raspisati treći i četvrti član u oblik koji je prikladniji za analizu. Za treći član tako dobivamo da je jednak:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4m} \left| \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \frac{2e}{c} \vec{A} \right) \Psi \right|^2 = \\ & = \frac{1}{4m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \Psi + \frac{2e}{c} \vec{A} \Psi \right) \cdot \left(-\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \Psi^* + \frac{2e}{c} \vec{A} \Psi^* \right) \\ & = \frac{1}{4m} \left[\hbar^2 (\vec{\nabla} \Psi) \cdot (\vec{\nabla} \Psi^*) + \frac{2e\hbar}{ic} (\vec{\nabla} \Psi) \cdot \vec{A} \Psi^* - \frac{2e\hbar}{ic} (\vec{\nabla} \Psi^*) \cdot \vec{A} \Psi + \frac{4e^2}{c^2} \vec{A}^2 |\Psi|^2 \right] \quad (2.100) \\ & = \frac{\hbar^2}{4m} (\vec{\nabla} \Psi) \cdot (\vec{\nabla} \Psi^*) - i \frac{e\hbar}{2mc} \left[\Psi^* (\vec{\nabla} \Psi) - \Psi (\vec{\nabla} \Psi^*) \right] \cdot \vec{A} + \frac{e^2 \vec{A}^2}{mc^2} |\Psi|^2 \\ & = \frac{\hbar^2}{4m} \partial_i \Psi \partial^i \Psi^* - i \frac{e\hbar}{2mc} (\Psi^* \partial_i \Psi - \Psi \partial_i \Psi^*) A^i + \frac{e^2 A_i A^i}{mc^2} |\Psi|^2, \end{aligned}$$

gdje smo u posljednjem retku iskoristili Einsteinovu konvenciju. Za četvrti član pak dobivamo:

$$\frac{B^2}{8\pi} = \frac{|\vec{\nabla} \times \vec{A}|^2}{8\pi} = \frac{1}{8\pi} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lm}^i \partial^j A^k \partial^l A^m, \quad (2.101)$$

gdje je ϵ_{ijk} Levi-Civita simbol. Prva Euler-Lagrangeova jednadžba je stoga jednaka:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \Psi^*} - \partial_j \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\partial_j \Psi^*)} &= 0 \\ \alpha \Psi + \beta \Psi |\Psi|^2 + \frac{e^2 A^2}{mc^2} \Psi - \frac{i\hbar e}{2mc} (\partial_i \Psi) A^i - \partial_i \left[\frac{\hbar^2}{4m} \partial^i \Psi + \frac{i\hbar e}{2mc} \Psi A^i \right] &= 0 \\ \alpha \Psi + \beta \Psi |\Psi|^2 + \frac{e^2 A^2}{mc^2} \Psi - \frac{i\hbar e}{2mc} (\vec{\nabla} \Psi) \cdot \vec{A} - \frac{\hbar^2}{4m} \vec{\nabla}^2 \Psi - \frac{i\hbar e}{2mc} \Psi (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) &= 0 \\ \alpha \Psi + \beta \Psi |\Psi|^2 + \frac{1}{4m} \left(\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} + \frac{2e}{c} \vec{A} \right)^2 \Psi &= 0. \end{aligned} \quad (2.102)$$

Dok je druga Euler-Lagrangeova jednadžba jednaka:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial A_p} - \partial_q \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial (\partial_q A_p)} &= 0 \\ -\frac{i\hbar e}{2mc} (\Psi^* \partial_p \Psi - \Psi \partial_p \Psi^*) + \frac{2e^2 A_p}{mc^2} |\Psi|^2 &= \frac{1}{4\pi} \epsilon_{iqp} \epsilon_{lm}^i \partial^q \partial^l A^m \\ -\frac{i\hbar e}{2mc} (\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^*) + \frac{2e^2 \vec{A}}{mc^2} |\Psi|^2 &= -\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}). \end{aligned} \quad (2.103)$$

Iskoristimo li četvrtu Maxwellovu jednadžbu, $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}$, taj izraz možemo zapisati i na način da je:

$$\vec{J} = -\frac{e\hbar}{2mi} (\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^*) - \frac{2e^2 \vec{A}}{mc} |\Psi|^2, \quad (2.104)$$

gdje je \vec{J} supravodljiva (gustoća) struje. U početku ove analize rekli smo kako je $|\Psi(\vec{r})|^2 \propto n_s(\vec{r})$. Egzaktna relacija između njih je $|\Psi(\vec{r})|^2 = \frac{1}{2} n_s(\vec{r})$. Faktor $\frac{1}{2}$ se javlja zbog toga što je naboj Cooperovih parova $-2e$. Riješimo li sad "jednadžbu" $|\Psi(\vec{r})|^2 = \frac{1}{2} n_s(\vec{r})$ za oblik valne funkcije u najopćenitijem obliku dobivamo da je jednak:

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{n_s(\vec{r})} e^{i\theta(\vec{r})}, \quad (2.105)$$

gdje je $\theta(\vec{r})$ faza supravodiča. U slučaju u kojem gustoća supravodljivih naboja ne ovisi o \vec{r} izraz za gustoću supravodljive struje 2.104 postaje jednak:

$$\vec{J} = -\left(\frac{e\hbar n_s}{2m} \right) \vec{\nabla} \theta - \left(\frac{n_s e^2}{mc} \right) \vec{A}. \quad (2.106)$$

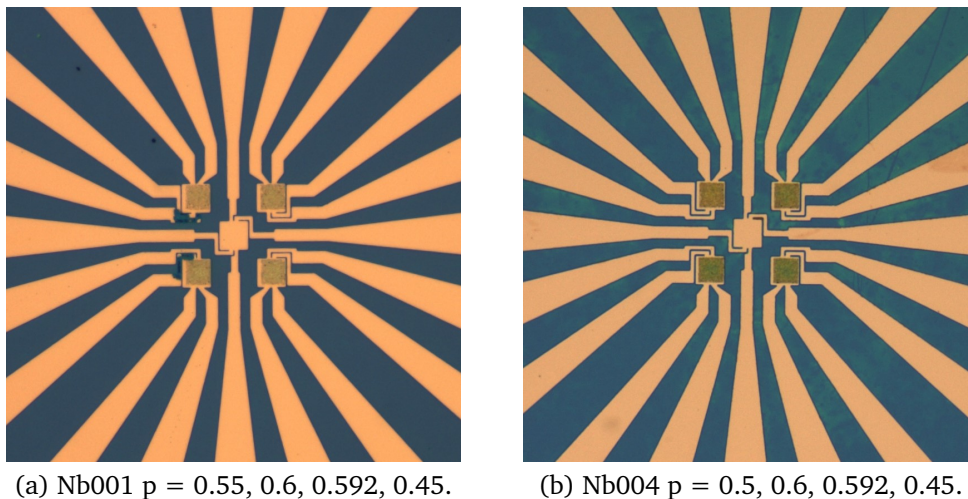
Ako je i faza uniformna unutar cijelog supravodljivog sustava izraz za gustoću struje je ekvivalentan onome kojeg smo dobili iz Londonovih jednadžbi (izraz 2.14). No ovdje postoji i drugi zanimljivi slučaj. To je onaj u kojem nema vanjskog magnetskog polja (tj. $\vec{A} = 0$) ali postoji razlika u fazi unutar supravodiča. Kao što iz izraza 2.106 možemo vidjeti i tada će kroz supravodič teći struja. Takav sustav u kojem faza nije uniformna duž cijelog supravodiča možemo ostvariti stavimo li između dva supravodiča tanki sloj izolatora. Efekt da struja "tunnelira" između dva supravodiča između kojih se nalazi tanki sloj izolatora naziva se Josephsonov efekt.

3 Eksperiment

3.1 Izrada pločice s uzorkom

Litografija je zajednički naziv za sve procese pomoću kojih stvaramo tanke filmove određenog oblika (uzorka) na nekoj podlozi a sam zapis uzorka vršimo pomoću organskog medija osjetljivog na sredstvo s kojim vršimo pisanje. Postoje dvije metode koje se pri tome koriste: *electron beam (e-beam)* litografija te fotolitografija. *E-beam* litografija (EBL) se bazira na korištenju elektrona dok se fotolitografija temelji na korištenju svjetlosti kao sredstva za ispis. Obje metode su shematski vrlo slične te rade na sljedeći način. Na očišćenu podlogu nanosimo organski materijal kojeg nazivamo rezistom a koji je osjetljiv na sredstvo s kojim vršimo pisanje. Ravnomjerno nanošenje rezista duž cijele podloge postižemo rotiranjem podloge oko njezina središta odnosno centrifugiranjem. Dok je kod EBL-a rezist osjetljiv na upadni tok elektrona kod fotolitografskog postupka se koristi rezist osjetljiv na svjetlost. Nakon što smo nanijeli tanak sloj odgovarajućeg rezista na podlogu u fotolitografiji se iznad podloge s rezistom stavlja maska (tj. rešetka s uzorkom kojeg želimo razviti na podlozi) te ju se izlaže svjetlosti. Svjetlost koja se koristi je najčešće iz UV dijela spektra no ako je to potrebno (tj. ako nam je potrebna bolja razlučivost) mogu se koristiti i izvori svjetlosti više frekvencije kao što su npr. X-zrake. Na svim mjestima gdje je maska transparentna, tj. gdje god postoje područja kroz koja svjetlost može doći do rezista, dolazi do kemijske reakcije kod koje se velike molekule rezista razbijaju (razgrađuju) na male molekule. Sljedeći korak koji provodimo naziva se razvijanje odnosno *developing*. Naime, s područja koje je bilo izloženo svjetlosti i u kojem su se velike molekule rezista razgradile uklanjamo "oslabljeni" rezist. Uklanjanje vršimo pomoću organskog otapala. Cijelu pločicu uranjamo u organsko utapalo no ono će moći otopiti odnosno ukloniti samo dijelove rezista koji su bili izloženi svjetlosti ostavljajući pritom dijelove rezista koji sada imaju izgled identičan izgledu maske. Ono što nam sad još preostaje jest nanijeti željeni materijal na podlogu. Ovaj korak također možemo izvesti koristeći dvije različite metode. Prva metoda je metoda jetkanja u kojoj se kemijski uklanja dio supstrata u područjima koja nisu prekrivena rezistom. Druga metoda je tzv. *lift-off* metoda u kojoj se željeni metal nanosi u sloju određene debljine preko cijele pločice. Zatim se uklanja rezist preostao nakon prvog uklanjanja pri čemu sa sobom uklanja i na njega naneseni metal. Metal

sada ostaje samo na mjestima gdje je rezist uklonjen u prvom koraku (tj. tijekom razvijanja). Kod *e-beam* litografije, za razliku od fotolitografije, nisu potrebne maske na kojima se nalaze željeni uzorci već se kod nje zapis na rezist ostvaruje pomoću fokusiranih snopova elektrona. Fokusirane snopove elektrona moguće je usmjeriti na željeno područje te tako ispisati željeni uzorak na rezistu. Uzorak se kod EBL-a crta doslovno točku po točku odnosno liniju po liniju. Iako ova metoda zahtjeva puno više vremena od fotolitografije ona je puno fleksibilnija i ne zahtijeva skupe maske što je posebno važno ako uzorke koje želimo proizvesti proizvodimo u malom broju. EBL nam također omogućuje stvaranje uzoraka puno veće razlučivosti odnosno detalji na uzorku mogu biti puno manji nego što nam to omogućuje fotolitografija. Zbog svega navedenog EBL se najčešće koristi za izradu male serije prototipa pri čemu se u procesu izrade prototipa može koristiti zajedno s fotolitografskom metodom. Pločice



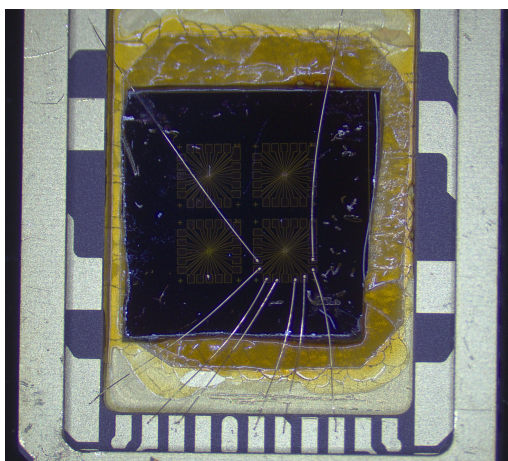
Slika 3.3: Uzorci niobija korišteni u ovom istraživanju. Uzorci na pločici su navedeni redom krećući od uzorka koji se nalazi gore desno pa u smjeru kazaljke na satu.

korištene u ovom istraživanju proizvedene su u timu prof. dr. sc. Nine Marković s Goucher College, Baltimore, Maryland, SAD u čistim sobama na Singh Center for Nanotechnology, University of Pennsylvania, Philadelphia, Pennsylvania, SAD i to na sljedeći način. Silicijska podloga je najprije očišćena u acetonu te metanolu. Nakon toga je pomoću uređaja za UV fotolitografiju (**Karl Suss MA-6 mask aligner**) s gore opisanim postupkom fotolitografije nanosen tanak sloj zlata s pripadajućim kontaktima za spajanje. Zlato je na supstrat nanoseno tehnikom termalne evaporacije. Nakon što su napravljene zlatne podloge s pripadajućim kontaktima za spajanje na zlatni sloj nanosimo željeni uzorak niobija. Dimenzije zlatnih podloga su $20 \times 20 \mu\text{m}$.

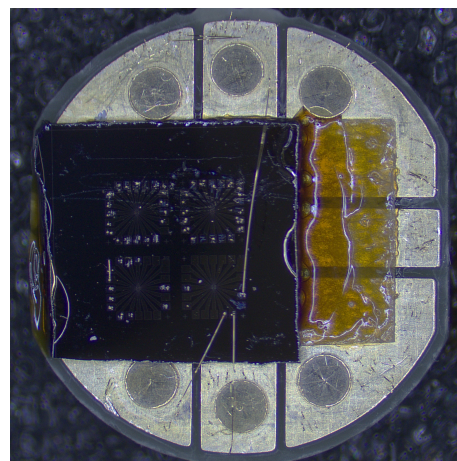
Računalni kod koji na temelju određenog parametra definira izgled perkolacijskog uzorka napisan je u **Matlab**-u. Kodovi su napisani upravo u svrhu ovog istraživanja. Kako format datoteke stvorene u Matlab-u nije kompatibilan s formatom koji razumije uređaj koji taj kod treba realizirati, na način da uzorak ispiše na pločici, moramo izvršiti konverziju u format koji je njemu razumljiv. Program pomoću kojeg vršimo tu konverziju je **KLayout** a format u koji vršimo konverziju je gds. *E-beam* litografski uređaj koji je korišten za ispis je **Elionix e-beam writer**. Metoda koju koristimo za skidanje viška niobija je *lift-off* metoda a samo taloženje niobija ostvaruje se pomoću DC raspršivanja (*DC sputtering*). Uzorci korišteni u ovom istraživanju prikazani su na slici 3.3.

3.2 Uređaj za spajanje uzorka

Pločica s uzorcima se nadalje zalijepi na adaptivnu pločicu. Vrsta adaptivne pločice koju koristimo ovisi o nosaču koji se upotrebljava kod određenog kriostata. Lijepjenje se vrši pomoću posebne smole koja ima svojstvo da može podnijeti vrlo niske temperature (temperature blizu apsolutne nule!). Izgled uzorka⁴ zalijepljenog na adaptivnu pločicu za 18 T i 7 T supravodljivi magnet (kriostat) prikazan je na slici 3.4. Oba supravodljiva magnetna nalaze se na Fizičkom odsjeku PMF-a. Adaptivna



(a) Adaptivna pločica za 18 T supravodljivi magnet s uzorkom.



(b) Adaptivna pločica za 7 T supravodljivi magnet s uzorkom.

Slika 3.4: Adaptivne pločice sa zalijepljenim uzorcima te bondanim kontaktima.

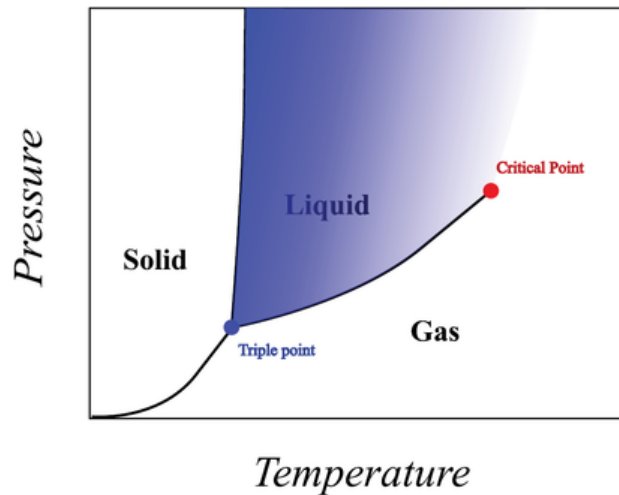
pločica se zatim utiskuje u ležište (*socket*) koje se nalazi na nosaču uzorka kojeg stavljamo u kriostat. Izvodi iz tog ležišta su spojeni s izvodima od ulaza (*port-a*) koji se

⁴Ovdje se pod terminom "uzorak" misli na određenu pločicu s perkolacijskim uzorcima niobija.

nalazi na vrhu nosača a na kojeg se spaja sabirnica iz adaptivne kutije. Adaptivna kutija te "mikro" utičnice zamjenjuje s banana utičnicama koje nam omogućavaju lakše (i slobodnije) spajanje instrumenata na izvode uzorka. No da bi oni imali kontakt sa samim uzorkom potrebno je prije toga sam uzorak spojiti s adaptivnom pločicom. Na slici 3.4 možemo vidjeti kako taj spoj izgleda. To spajanje činimo pomoću uređaja za ultrazvučno spajanje. Uređaj koji smo mi konkretno koristili je **HB05 Wire Bonder**. Prednost kod ovakvog načina spajanja je da ne dolazi do taljenja metala (tj. temperatura na kojoj se vrši spajanje je daleko ispod temperature taljenja) što je vrlo važno kod spajanja tankih slojeva metala. Važno je i zbog toga što na taj način spriječavamo da se jave bilo kakva neželjena svojstva a koja bi se mogla javiti uslijed izlaganja metala visokoj temperaturi. Ultrazvučno (*US*) spajanje je postupak pri kojem se spajanje vrši pomoću visokofrekventnih ultrazvučnih akustičkih vibracija koje se pod pritiskom lokalno primjenjuju na dijelove koje želimo spojiti. Rezultat tog postupka je spoj materijala u čvrstom stanju. Ovakav način spajanja primjenjuje se za spajanje plastika i metala, a posebno je koristan kod spajanja različitih vrsta materijala. Glavni parametri koji pri tome određuju kvalitetu spoja su ultrazvučna snaga, sila i vrijeme. Kod spajanja sa zlatnom žicom važnu ulogu ima i četvrti parametar a to je temperatura. Sam postupak u kojem dolazi do spajanja dva materijala naziva se difuzija.

3.3 Uređaji za postizanje niskih temperatura

Kako se efekt supravodljivosti javlja na izuzetno niskim temperaturama (kod nekih materijala gotovo i na apsolutnoj nuli) potreban nam je uređaj pomoću kojeg ćemo postići tako niske temperature. Način na koji postizemo tako ekstremno niske temperature jest ukapljivanjem plinova kao što su dušik (N_2) i helij (H_2). Ti plinovi, kao i ostali termodinamički sustavi, imaju karakterističan $p - T$ (odnosno $V - T$, $p - V$ ili $p - V - T$) dijagram iz kojeg možemo vidjeti pod kojim će termodinamičkim uvjetima (temperaturi i tlaku) doći do faznog prijelaza. Primjer jednog takvog dijagrama prikazan je na slici 3.5. Karakteristične točke u tom dijagramu su kritična i trojna (trostruka) točka. Trojna točka predstavlja točku (vrijednost temperature i tlaka) u kojoj koegzistiraju sve tri faze (tj. minimalnom promjenom vrijednosti tlaka ili temperature možemo prijeći u svaku od tri faze). Kritična pak točka predstavlja kritične



Slika 3.5: $p - T$ dijagram s označenim kritičnim točkama. Slika preuzeta iz [8].

vrijednosti tlaka i temperature do kojih možemo razlikovati plinovitu i tekuću fazu. Nakon što prijeđemo vrijednosti zadane kritičnom točkom plinovita i tekuća faza postaju ekvivalentne. Ovakav graf predstavlja temeljnu ideju rada ukapljivača (odnosno općenito hladnjaka). Odgovarajućim protokolima vršimo rad na plinu (bilo na onom kojeg želimo ohladiti ili na radnom plinu) pri čemu se dio te energije (jer postoje i gubici) koristi za odvođenje topline iz sustava kojeg želimo ohladiti. Neke od metoda kojima možemo postići ukapljivanje plinova su: kaskadna metoda, izentalpska metoda, izentropska metoda te inverzni Stirlingov proces.

3.3.1 Ukapljivači

Sve gore nabrojane metode (osim kaskadne koja je spomenuta zbog svoje povijesne važnosti) temelji su za opisivanje rada uređaja za ukapljivanje plinova tj. ukapljivača. S obzirom na vrstu plina koja se ukapljuje razlikujemo ukapljivače i principe na kojima oni rade. Tako se za ukapljivanje dušika koriste ukapljivači koji se temelje na metodi inverznog Stirlingovog procesa. Na efikasnost samog procesa ukapljivanja najveći utjecaj imaju gubici topline zbog neadekvatnog odnosno lošeg regeneratora. Za ilustraciju koliko je taj utjecaj velik dovoljno je reći da je uz samo 1 % gubitka topline u regeneratoru, te uz temperature hladnijeg odnosno toplijeg dijela cilindra od $T_{hladno} = 75 \text{ K}$ i $T_{toplo} = 300 \text{ K}$, pad snage hlađenja oko 20 %. Zbog toga je vrlo važno imati regeneratore od dobrog materijala i dobre kvalitete izrade. Što se pak tiče ukapljivača helija on je prvi put uspješno pokrenut 1908. godine (s tim je ukapljivačem radio Kammerling Onnes te je pomoću njega i došao do otkrića supravodljivosti) a

bazirao se na Joule-Thompsonovom efektu. Kako je efikasnost tog ukapljivača bila mala, s vremenom su se razvijali sve sofisticiraniji ukapljivači koji su predstavljali modificirane verzije tog ukapljivača. Jedna od tih modifikacija bila je i upotreba ekspanzionog stroja u kojem se dio ulaznog plina, vršeći rad ekspanzijom, hladio te je kao takav služio za prethlađivanje preostalog dijela ulaznog plina. Prvi poboljšani ukapljivač koji je uz J-T ventile koristio i ekspanzioni uređaj za prethlađivanje ulaznog plina bio je Kapitsinov ukapljivač. Ono u čemu je još njegova važnost je da je uspio riješiti problem trenja odnosno osmislio je način na koji podmazivati klipni ekspanzioni stroj. No problem koji je postojao kod njegovog stroja je taj da su se svi dijelovi stroja morali nalaziti u prostoru s vrlo visokim vakuumom (radi termičke izolacije) zbog čega je postojala vrlo velika razlika tlakova između dijelova koji su odvajali prostore koji su bili pod visokim vakuumom i pod visokim tlakom. Poseban problem pri tome su bili varovi zbog čega ti ukapljivači nisu bili pogodni za komercijalnu upotrebu. Međutim on je poslužio kao prototip za izradu sljedeće generacije ukapljivača koja je riješila taj problem. Novu verziju ukapljivača predložio je Collins. On je problem Kapitsinovog ukapljivača riješio tako da je sve radne dijelove stroja smjestio unutar velikog spremnika koji je bio termički izoliran od okoline i u kojem se nalazio helijev plin na tlaku od 1 atm. Taj plin je dolazio od vaporizacije ukapljenog helija i on je između ostalog služio i za prethlađivanje ulaznog plina što je doprinosilo povećanju efikasnosti samog stroja te brzini ukapljivanja. Također vrlo važna promjena koju je uveo jest da je koristio dva ekspanziona stroja pri čemu je prvi služio kao zamjena za prethlađivanje s tekućim dušikom. Pored Collinsovog ukapljivača postoje i druge izvedbe kao što je npr. Meissnerov ukapljivač koji je brži (već nakon 45 minuta postiže brzinu ukapljivanja od 4 L/h što Collinsov ukapljivač postiže tek nakon 4 sata), ali mu je za rad nužan tekući dušik radi prethlađivanja. Najnovija generacija ukapljivača kakve danas koristimo umjesto klipova ima turbine. Kako je helij poprilično skup nastojimo ga što bolje reciklirati na način da helijev plin koji isparava iz ukapljenog helija sakupimo i ponovno iskoristimo za ukapljivanje. Pri tome je taj isti helij potrebno profiltrirati (pročistiti) jer je čistoća izvornog plinovitog helija koji se ukapljuje oko 99.996 %. Onečišćenja koja se javljaju kod helija kojeg recikliramo su uglavnom podrijetlom od uljnih para iz kompresora i/ili vakuumskih pumpi ali i drugi plinova. Ako onečišćenje nije preveliko željenu čistoću moguće je postići pomoću ugljenih stupica. Iako se one mogu koristiti i na sobnoj

temperaturi bolje ih je koristiti na niskim temperaturama zbog toga što uljne pare mogu permanentno onečistiti te pročišćivače. Kada te pročišćivače koristimo na niskim temperaturama (kao što je temperatura ukapljenog dušika koja iznosi oko 77 K) tog problema nema zbog toga što se na tim temperaturama nečistoće kondenziraju. Efikasnost pročišćivača je to veća što je veći tlak plina koji prolazi kroz pročišćivač.

3.3.2 Spremnici za pohranu

Kriogene tekućine dobivene ukapljivanjem plinova moramo negdje moći spremiti. U tu svrhu koristimo posebne spremnike za pohranu kriogenih tekućina. Razlog zbog kojeg ti spremnici moraju biti "posebni" je taj što uz vrlo nisku temperaturu imaju i jako malu latentnu toplinu odnosno dovoljna je mala količina energije da ih se iz tekućeg opet vrati u plinovito stanje. Vrijednosti latentnih toplina za dva najčešće korištena kriogena plina N_2 i H_2 su 159 J/cm^3 i 31.1 J/cm^3 . Kao što se može vidjeti razlika između latentnih toplina dušika i helija je prilično velika zbog čega su spremnici za pohranu dušika manje "posebni". Dapače, dušik se može držati te transportirati (kraće vrijeme) i u otvorenoj posudi od stiropora. To za helij nije moguće jer bi gotovo trenutačno došlo do njegove vaporizacije. Spremnici u kojima držimo kriogene tekućine nazivaju se Dewarove posude (tj. dewari). One su u svojoj biti velike termosice⁵. Dakle riječ je o spremnicima s dvostrukim stijenkama između kojih se nalazi visoki vakuum. Svrha vakuuma je minimizirati količinu topline koja se iz okoline prenosi do kriogenih tekućina unutar dewara. Iako i dalje postoje načini prijenosa topline koji uzrokuju vaporiziranje kriogene tekućine kao što su kondukcija, mehaničke vibracije, zračenje ali i konvekcija kroz rezidualni plin koji ostaje između stijenki dewara taj je prijenos puno manji i spada u prihvatljive granice. Izvedbe dewara su se kroz povijest mijenjale, no danas se uglavnom koriste dewari s dvije stijenke pri čemu je unutrašnja strana obložena s nekoliko slojeva tzv. superizolacije (to je tanki sloj aluminijske folije visoke reflektivnosti s mylar mrežicom). Tlak u vakuumu je otprilike $10^{-2} - 10^{-3} \text{ mmHg}$ ⁶ što je tlak koji se može postići rotacijskim pumpama. Viši vakuum nije potrebno stvarati zbog toga što će kriogena tekućina ohladiti preostali rezidualni plin te tako uzrokovati daljnji pad tlaka na otprilike 10^{-7} mmHg i time još više poboljšati termičku izolaciju. Dodatni problem koji

⁵Same termosice izumio je čovjek po kojem su spremnici za pohranu kriogenih tekućina dobili i ime, Jamesu Dewaru.

⁶ $1 \text{ atm} = 101325 \text{ Pa} = 760 \text{ mmHg}$



(a) Spremnik za tekući dušik.



(b) Spremnik za tekući helij.

Slika 3.6: Primjeri dewara za spremanje i transport kriogenih tekućina.

se javlja kod helijevih dewara je taj što helij difundira i kroz staklo i kroz metal pa će nakon nekog vremena onečistiti vakuum te smanjiti toplinsku izolaciju (što je za helij posebno loše jer ima jako malu latentnu toplinu). No, sposobnost difundiranja helija kroz materijale pada sa snižavanjem temperature pa je spremanje helija i dalje moguće uz povremeno ispumpavanje difundiranog helija. Oblici dewara ovise o vrsti kriogene tekućine te njihovoj namjeni a najčešće su volumena od 50, 100 i 250 litara. Primjeri dewara za spremanje i transport dušika i helija dani su na slici 3.6.

3.3.3 Kriostat

Metalni eksperimentalni kriostati za magnetotransportna mjerenja, kakav jedan smo i mi koristili, u svojoj se osnovi sastoje iz dva dewara smještenih jedan u drugome. U vanjskom dewaru nalazi se tekući dušik dok se u unutrašnjem nalazi tekući helij. Kriostat kojeg smo mi koristili prikazan je na slici 3.7. Preostale glavne dijelove kriostata čine VTI (*variable temperature insert*) te supravodljivi magnet. VTI je ustvari još jedan poseban kriostat u kojem se prilikom ispitivanja nalazi uzorak i u kojem se može podešavati temperatura kontroliranim uvođenjem tekućeg helija ili helijevog plina. Kako je helijev plin prilično skup eksperimentalni kriostat se najčešće spaja na povratnu vezu koja skuplja ispareni helij koji se nakon toga ponovno ukapljuje. Osim



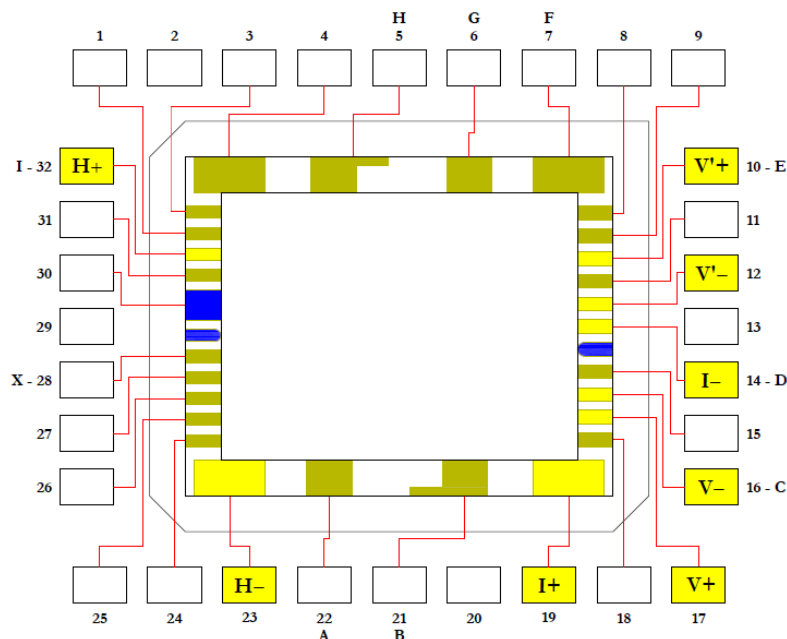
Slika 3.7: 18 T supravodljivi magnet s varijabilnim temperaturnim umetkom.

toga na VTI se spaja vakuumska pumpa koja ispumpava ispareni helij što omogućuje snižavanje njegove temperature do oko 1.5 K. Supravodljivi magnet je magnet napravljen od supravodljivih materijala zbog čega kroz njega (kroz njegove namotaje) može prolaziti vrlo jaka struja odnosno on može postizati vrlo jaka magnetska polja. Osim toga kada se jednom uspostavi magnetsko polje više nije potrebno vanjsko napajanje da bi se to magnetsko polje održavalo zbog toga što je otpor zavojnice jednak nuli pa nema disipacije energije i struja može beskonačno teći. Kriogene tekućine koje se nalaze u kriostatu se troše tj. isparavaju zbog čega ih je svako toliko potrebno nadopunjavati. Postupak kojim transferiramo kriogenu tekućinu ovisi o vrsti tekućine. Transferiranje tekućeg dušika iz dewara u kojem se nalazi izvodimo pomoću obične cijevi za transferiranje dušika. Ona se sastoji od dva otvora s cijevima pri čemu je jedna duža a jedna jako kratka. Na ulaz kraće cijevi spaja se dotok komprimiranog zraka dok se ulaz duže cijevi pomoću silikonskog crijeva spaja s ulazom za nadopunjavanje dušika na kriostatu. Sama cijev za transport dušika postavlja se na dewar s tekućim dušikom i hermetički učvršćuje. Kraća cijev pritom ostaje izvan kriogene tekućine dok je duža u nju uronjena. Pomoću komprimiranog zraka u dewaru stvaramo nadtlak koji istiskuje ukapljeni plin kroz dužu cijev te zatim ulazi u eksperimentalni kriostat. Za transfer helija potrebna je termički izolirana cijev zbog toga što helij ima jako malu latentnu toplinu. Toplinski izolirana cijev sastoji se od

dviju cijevi koje nisu međusobno u kontaktu. Prostor između njih je vakuumiran što omogućuje termalnu izolaciju unutrašnje cijevi. Prilikom prolaska tekućeg helija kroz cijev dolazi do hlađenja rezidualnog plina koji se nalazi u međuprostoru što dodatno reducira tlak poboljšavajući time termalnu izolaciju. U slučaju da se prilikom transporta cijev s vanjske strane počne jako orošavati ili lediti došlo je do onečišćenja vakuuma u međuprostoru. Ispumpavanjem plina iz međuprostora popravljamo vakuum i cijev je ponovno pogodna za korištenje. Sam postupak transfera helija je vrlo sličan transferu dušika samo što ovdje kao potisni plin koristimo komprimirani plin helija a ne više zrak.

3.4 Postupci i metode mjerenja

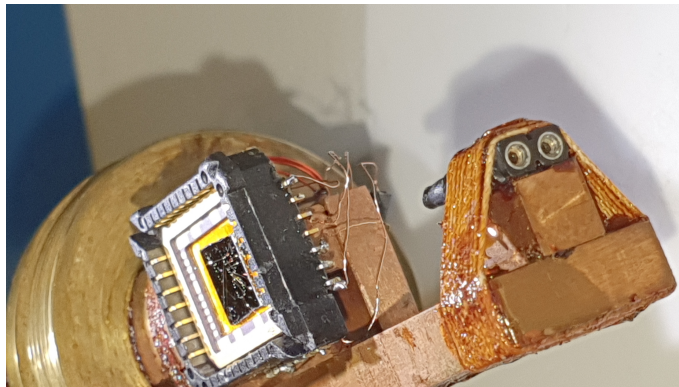
Pomoću bondera **tpt HB05** zlatne kontakte uzorka zalijepljenih na adaptivnu pločicu spajamo s kontaktima na adaptivnoj pločici. Adaptivna pločica sadrži veliki broj kontakata no mi upotrebljavamo samo one koji su kompatibilni s nosačem uzorka kojeg koristimo. Prikaz svih kontakata na adaptivnoj pločici dan je na slici 3.8 gdje su svjetlijom nijansom označeni kontakti koje mi koristimo odnosno koji su kompatibilni s našim nosačem. Osim što spajanje moramo odraditi s točno određenim kontaktima



Slika 3.8: Shematski prikaz adaptivne pločice s istaknutim kontaktima na koje spajamo uzorak.

na adaptivnoj pločici moramo povoljno odabrati i način na koji ćemo povezati uzorak s tim kontaktima uzimajući u obzir dva cilja. Prvi cilj je da ne dođe do preklapanja

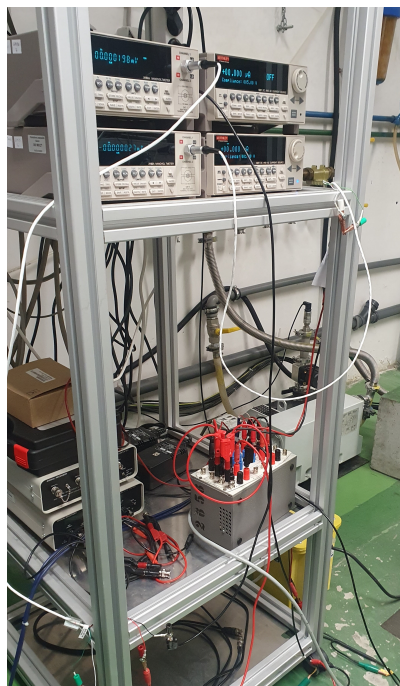
žica pomoću kojih spajamo uzorak i adaptivnu pločicu (tj. da te žice nisu nigdje u kratkom spoju) a drugi je da strujne odnosno naponske kontakte s pojedinog uzorka spojimo s predefiniranim parovima⁷ na adaptivnoj pločici (npr. $H+$ i $H-$, $I+$ i $I-$, itd.). Iako se instrumenti na uzorak spajaju preko adaptivne kutije koja omogućuje da zasebno spajamo svaki kontakt (spajanje se vrši preko banana utikača) spajanjem pločice na ovaj način ostvarujemo lakšu preglednost prilikom spajanja uređaja. Nakon što smo sve kontakte povezali (moguće je povezati ukupno osam kontakata odnosno moguće je istovremeno mjeriti dva uzorka) adaptivnu pločicu potrebno je utisnuti u ležište na nosaču uzorka. Izgled adaptivne pločice postavljene na nosač uzorka prikazan je na slici 3.9. Tijekom čitavog postupka, a naročito nakon što je uzo-



Slika 3.9: Uzorak spojen s adaptivnom pločicom i postavljen na nosač uzorka.

rak spojen s adaptivnom pločicom, potrebno je paziti kako statičkim elektricitetom ne bi uništili uzorak. Iz tog razloga tijekom rada s uzorkom potrebno je biti električki neutralan što se ostvaruje nošenjem elektrostatske narukvice, kute i papuča. Osim toga prije nego utisnemo pločicu s uzorkom na nosač potrebno je da svi instrumenti (isključeni) budu povezani s nosačem uzorka (preko već prije spomenute adaptivne kutije) te budu kratko spojeni strujni i naponski kontakti na svakom uzorku. Nakon toga međusobno spajamo strujne i naponske kontakte na svakom od uzoraka, zatim uzorke međusobno i onda sve zajedno na uzemljenje. Na taj način smo se (koliko je to moguće) osigurali da uzorak ne strada od statičkog elektriciteta prilikom utiskivanja na nosač uzorka ali isto tako i prilikom povezivanja mjernih uređaja. Redosljed uklanjanja kratkih spojeva nakon što je uzorak utisnut na nosač je obrnut od onog kojim su kratki spojevi stavljeni. Nakon što je uzorak utisnut na nosač možemo

⁷Žice koje prolaze kroz nosač i povezuju ležište s *port*-om za priključivanje adaptivne kutije upletene su kao parice da bi se smanjio utjecaj inducirano napona u žicama prilikom promjene magnetskog polja.



(a) Dva izvora struje, dva nanovoltmetar i adaptivna kutija.



(b) Uređaj za kontrolu temperature uzorka, indikator količine kriogenih tekućina u kriostatu, uređaj za kontrolu VTI-a, pomoćni uređaj za kontrolu VTI-a te napajanje supravodljivog magneta.

Slika 3.10: Uređaji za mjerenje i kontrolu mjerenja nabrojani od gore prema dolje.

ga po želji rotirati na nosaču te na taj način odrediti orijentaciju koju će imati u magnetskom polju. Mi smo ga postavili u položaj u kojem je okomit na magnetsko polje. Uzorak na nosaču se zatim zatvara s cilindričnim poklopcem na kojem je namotana zavojnica grijača koja služi na fino ugađanje temperature na kojoj se uzorak nalazi. Prije nego li stavimo uzorak u kriostat provodimo inicijalno testiranje uzoraka te zavojnice grijača na nosaču. Ako je sve u redu nosač uzorka stavljamo u kriostat. Instrumenti koje spajamo direktno na uzorak su izvor istosmjerne struje⁸ (mi smo koristili struju reda veličine mikroampera) te nanovoltmetar. Ako istovremeno mjerimo dva uzorka za svakog od njih nam je potreban po jedan od navedenih instrumenata. Osim tih instrumenata, za kontrolu uvjeta u kriostatu u kojima se uzorci nalaze potrebni su nam još i: uređaj za kontrolu rada zavojnice na nosaču, indikator količine kriogenih tekućina u kriostatu, uređaj za kontrolu VTI-a, indikator tlaka te uređaj za kontrolu magnetskog polja (tj. upravljanjem supravodljivom zavojnicom). Izgled tih uređaja dan je na slici 3.10. Svi ti uređaji spojeni su s računalom preko kojeg vršimo

⁸Uređaj kojeg smo koristili može generirati istosmjernu ali i izmjeničnu struju i to u vrlo širokom rasponu jakosti struja.

cjelokupno upravljanje. Programi za upravljanje napisani su u **LabVIEW**-u. Samo mjerenje izvodimo koristeći metodu četiri kontakta. Postupak mjerenja započinjemo inicijalnim hlađenjem uzoraka do temperature od 1 K. Brzina inicijalnog hlađenja je -22 K/h dok je struja preko koje smo vršili mjerenje otpora istosmjerna i iznosila je $I = 2 \mu\text{A}$. Iz tog početnog mjerenja vidimo događa li se na uzorcima uopće supravodljivi prijelaz ili ne, a ako da na kojoj temperaturi. Kako je kod svih naših uzoraka postojao supravodljivi prijelaz nastavili smo s daljnjim mjerenjem. Njega smo provodili na način da smo vršili mjerenje otpora u temperaturnom rasponu koji se kretao od temperature koja je nešto viša od temperature supravodljivog prijelaza (u našem slučaju je to 6 K) pa do najniže temperature koju smo mogli postići. Nakon što smo stigli do najniže temperature nastavili smo mjerenje grijući uzorak do temperature od koje smo krenuli. Taj postupak ponovili smo za različita magnetska polja po dva puta (dakle hlađenje, grijanje, hlađenje i grijanje). Brzina grijanja odnosno hlađenja iznosila je 5 K/h dok je struja ostala $2 \mu\text{A}$. Promjenu magnetskog polja uvijek radimo kada se uzorak nalazi u normalnom stanju tj. iznad temperature supravodljivog prijelaza. Kako je riječ o supravodljivom magnetu nakon što smo uspostavili magnetsko polje isključili smo vanjski izvor napajanja supravodljivog magneta te je on radio u tzv. "persistent" modu. Nakon što smo odredili ovisnost otpora o temperaturi za željeni raspon magnetskih polja izmjerili smo još i IV karakteristike uzoraka. To mjerenje činimo na način da pokušamo pomoću VTI-a i grijača na nosaču što bolje stabilizirati temperaturu te nakon toga pomoću programa vršimo mjerenje napona na uzorku za razne vrijednosti struja. Mjerenje smo proveli u rasponu struje od -1 mA do $+1 \text{ mA}$ pri čemu smo mjerenje napona izvršili za svakih $10 \mu\text{A}$. Mjerenje je provedeno u etapama koje su se kretale od 0 mA do 1 mA , zatim od 1 mA do -1 mA te od -1 mA do 0 mA . Isti ovakav postupak proveli smo na više temperatura pri čemu smo pazili da obuhvatimo što veći dio područja od interesa.

4 Eksperimentalni rezultati

U ovom smo istraživanju nastojali doznati nešto više o supravodljivom prijelazu kod nanostruktura od zlata prekrivenih mrežom tankog filma niobija koju karakterizira parametar perkolacije "p" u intervalu od 0.45 do 0.6. Detalji o pripremi samih uzoraka dani su u jednom od prethodnih poglavlja. Kako se izgled krivulja na $R(T)$ grafovima za uzorke s istim parametrom perkolacije ali na različitim pločicama jako razlikuje, označavanje pojedinog uzorka vršit ćemo na način da navodimo i naziv pločice na kojoj se uzorak nalazi i parametar perkolacije. Primjer označavanja određenog uzorka je: Nb001 p=0.45. Pretpostavljamo da je uzrok postojanja različitosti u obliku krivulja razlika u debljini niobija između pločica Nb001 i Nb004. Same fluktuacije u debljini filma su neizbježne a pogotovo kod vrlo tankih filmova kod kojih je moguće odstupanje i do 10 %. Parametri pomoću kojih ćemo opisati izmjerene uzorke su: R_N , T_c , T_c^{on} , $\mu_0 H_{c2}$, B_c , νz i $\xi(0)$. Ti su parametri definirani na sljedeći način. R_N predstavlja otpor u normalnom stanju odnosno otpor kojeg uzorak ima kada iz supravodljivog prijeđe u normalno stanje što je u našem slučaju ekvivalentno otporu na temperaturi od 6 K. T_c predstavlja temperaturu na kojoj otpor uzorka, koji se nalazi u nultom magnetskom polju, padne na polovicu vrijednosti otpora u normalnom stanju:

$$R(T_c, B = 0 \text{ T}) = 0.5 \cdot R_N.$$

T_c^{on} je pak temperatura na kojoj je otpor uzorka u nultom magnetskom polju pao na vrijednosti koja je jednaka:

$$R(T_c^{on}, B = 0 \text{ T}) = 0.9 \cdot R_N.$$

Tu temperaturu još nazivamo i temperaturom supravodljivog prijelaza. Razlog zbog čega ju definiramo na ovaj način je kako bi eliminirali nesigurnosti u određivanju uzrokovane nemogućnošću preciznijeg očitavanja vrijednosti temperature na kojoj dolazi do pada otpora usred pojave supravodljivosti. $\mu_0 H_{c2}$ je gornje kritično magnetsko polje odnosno magnetsko polje u koje je potrebno staviti uzorak kako bi on pri temperaturi od 0 K iz supravodljive prešao u normalnu fazu. Ovdje ponovno uzimamo da se taj prijelaz događa kada je otpor uzorka jednak 90 % vrijednosti otpora u normalnom stanju. B_c je kritična vrijednost magnetskog polja koja se određuje kao

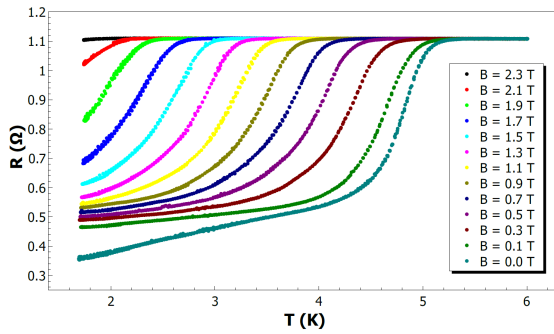
točka u kojoj dolazi do presijecanja izoterme u $R(B)$ dijagramu što će detaljnije biti objašnjeno u potpoglavlju 5.4. Zbog limitiranosti u podacima koje smo dobili provedenim mjerenjem, a koji nisu dostatni za ovakvo određivanje te vrijednosti koja nam je vrlo važna jer njeno poznavanje predstavlja preduvjet za provedbu analize skaliranja, mi smo ju odredili (ili bolje rečeno procijenili) na drugačiji način. Način na koji smo to učinili je da smo ju poistovjetili s gornjom kritičnom vrijednosti magnetskog polja pri čemu ovdje uzimamo da do pojave supravodljivosti dolazi neposredno nakon što otpor padne ispod vrijednosti R_N . Iako je ova vrijednost više procijenjena nego određena u nastavku će se pokazati kako je njezina procjena zadovoljavajuća. Sljedeći parametar, ν_z , predstavlja rezultat analize skaliranja a jednak je produktu prostornog i dinamičkog kritičnog eksponenta. Uspoređujući produkte dobivene za različite uzorke možemo nešto više reći o klasi univerzalnosti kojoj izmjereni uzorci pripadaju. Posljednji parametar, $\xi(0)$, označava duljinu koherencije pri temperaturi od $T = 0$ K koju određujemo sukladno relaciji 2.99 i ona je jednaka:

$$\xi(0) = \sqrt{\frac{\Phi_0}{2\pi\mu_0 H_{c2}(0)}}, \quad (4.1)$$

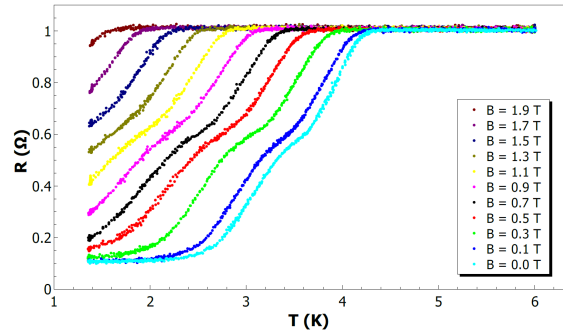
gdje je $\Phi_0 = 2.067 \times 10^{-15}$ Wb kvant magnetskog toka.

4.1 Ovisnost otpora o temperaturi

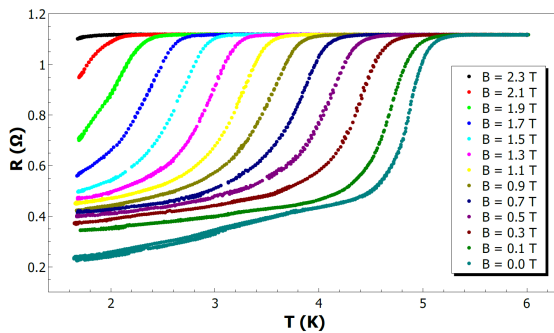
Na slici 4.1 prikazani su grafovi ovisnosti otpora o temperaturi pri različitim magnetskim poljima. Iz tih grafova možemo odrediti iznose parametara R_N , T_c i T_c^{on} . Njihove vrijednosti prikazane su u tablici 4.1. Supravodljiv prijelaz u nultom magnetskom polju vidljiv je na svim uzorcima pri čemu se širina supravodljivog prijelaza smanjuje s porastom parametra perkolacije "p" na svakoj od pločica. Pretpostavljamo da je razlika između širina prijelaza koja postoji za uzorke s istim parametrom perkolacije, ali koji se nalaze na različitim pločicama, posljedica već ranije spomenute razlike u debljini niobija. Naime s povećanjem debljine niobija dolazi do smanjenja širine supravodljivog prijelaza [12] što je na slici 4.1 i vidljivo. Nadalje, povećavanjem vrijednosti vanjskog magnetskog polja dolazi do smanjenja vrijednosti kritične temperature što je u skladu s teorijom o supravodljivosti koju smo opisali u uvodu (prikazano na slici 1.3). Ono što je također na grafovima vrlo uočljivo jest



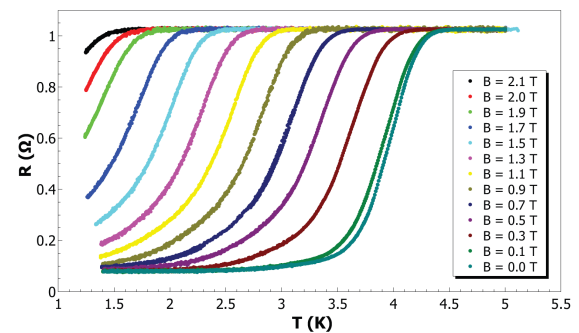
(a) Nb001 $p=0.45$.



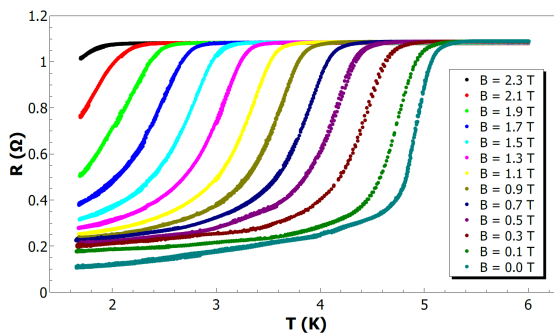
(b) Nb004 $p=0.45$.



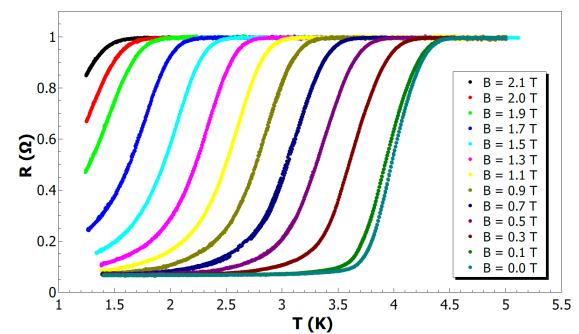
(c) Nb001 $p=0.55$.



(d) Nb004 $p=0.592$.



(e) Nb001 $p=0.6$.



(f) Nb004 $p=0.6$.

Slika 4.1: Grafovi ovisnosti otpora o temperaturi za različite vrijednosti magnetskih polja.

razlika u obliku krivulja za uzorke na pločici Nb001 i Nb004. Za uzorke $p=0.592$ i $p=0.6$ s pločice Nb004 dobivene krivulje su upravo onakve kakve i očekujemo kod supravodiča tipa II. Kod preostalog uzorka s pločice Nb004 na krivuljama primjećujemo postojanje "drugog" prijelaza. Taj "drugi" prijelaz uočljiv je na svim krivuljama neovisno o magnetskom polju s tim da se širina tog prijelaza smanjuje s povećanjem magnetskog polja. Širinu prijelaza definiramo kao razliku između temperatura na kojoj počinje te one na kojoj završava "drugi" supravodljivi prijelaz. Pretpostavljamo da je uočena "anomalija" kod krivulja u $R(T)$ dijagramu potpis *proximity* efekta. Naime, supravodljive korelacije ne javljaju se samo kod supravodiča već one postoje

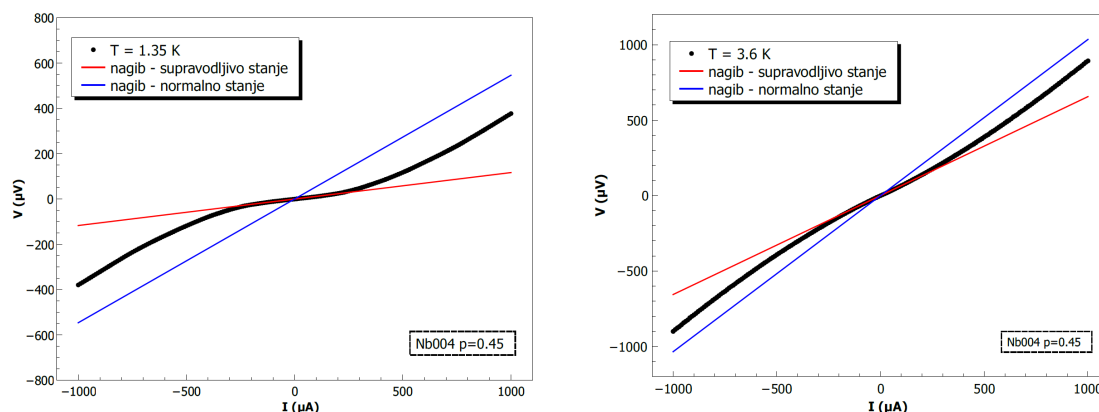
pločica	p	$R_N(\Omega)$	$T_c(K)$	$T_c^{on}(K)$
Nb001	0.45	1.11	4.17	4.94
	0.55	1.12	4.65	4.99
	0.6	1.09	4.85	5.06
Nb004	0.45	1.02	3.33	4.06
	0.592	1.03	3.93	4.20
	0.6	1.00	3.98	4.26

Tablica 4.1: Vrijednosti parametara očitanih iz $R(T)$ grafova za izmjerene uzorke.

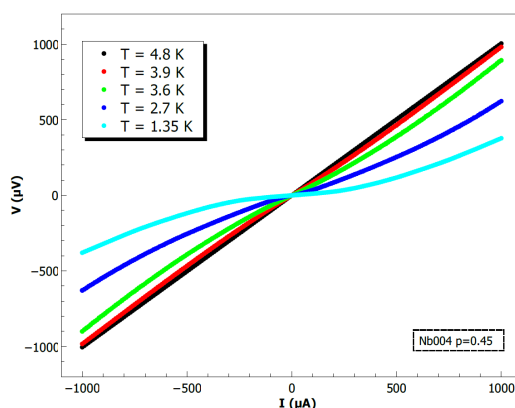
i na granici između supravodiča i normalnog metala. Kao što je sasvim logično za pretpostaviti da normalan metal ima utjecaj na svojstva supravodiča na način da smanjuje iznos energijskog procijepa Δ do mjesta reda veličine duljine koherencije udaljenog od mjesta na kojem oni ostvaruju kontakt isto tako je sasvim logično očekivati kako će i supravodič svoja svojstva nastojati prenijeti normalnom metalu s kojim je u kontaktu. Koliko se svojstva supravodiča mijenjaju kada se nalazi u kontaktu s normalnim metalom dovoljno govori činjenica da će supravodljivi film koji je tanji od duljine koherencije nanesen preko normalnog metala izgubiti svoja supravodljiva svojstva i postati normalan metal. Isto tako vrijedi i obrnuto, nanesimo li na supravodič tanki film normalnog metala taj će normalni metal postati supravodljiv. Ti su fenomeni eksperimentalno potvrđeni (Meissner 1958. i 1959.) te su poznati pod nazivom *proximity* efekt (PE) [10]. Detaljnija analiza utjecaja *proximity* efekta na izgled izmjerenih krivulja bit će dana u sljedećem poglavlju.

4.2 IV karakteristika

Za sve navedene uzorke napravili smo i mjerenja IV karakteristike. Kako svi uzorci pokazuju ponašanje sličnog tipa ovdje ćemo prikazati samo rezultate dobivene za uzorak Nb004 p=0.45. Dobiveni rezultati, koji su prikazani su na slici 4.2, u skladu su s očekivanjem odnosno onime što predviđa teorija supravodljivosti. Teorija supravodljivosti nam govori da uz kritičnu temperaturu te kritično (kod tipa II gornje) magnetsko polje postoji i treća veličina koja uzrokuje prijelaz iz supravodljivog u normalno stanje a to je kritična vrijednost struje. Njezino postojanje se na IV dijagramima reprezentira na način da dolazi do promjene nagiba krivulje. Promotrimo li izgled krivulje za uzorak koji se nalazi na temperaturi $T = 1.35$ K (slika 4.2 (a)) možemo jasno vidjeti razliku između nagiba krivulje za struje koje su blizu nule te na-



(a) IV karakteristika na temperaturi $T = 1.35$ K. (b) IV karakteristika na temperaturi $T = 3.6$ K.



(c) IV karakteristike na različitim temperaturama.

Slika 4.2: Strujno-naponska karakteristika za uzorak Nb004 $p=0.45$.

giba na jačim strujama. Nagib pravca u IV dijagramu ekvivalentan je otporu uzorka na kojem se vrši mjerenje. Nagib krivulje na niskim vrijednostima struje (crvena linija) je $0.1169 \mu\text{V}/\mu\text{A}$ što znači da bi otpor uzorka na temperaturi od 1.35 K trebao biti vrlo blizu te vrijednosti (vrlo blizu jer već i mali iznos struje dovodi do promjene otpora). Ta vrijednost doista odgovara vrijednosti otpora na toj temperaturi (prikazano na grafu (b) slika 4.1). Ta vrijednost nije nula (odnosno linija na grafu nije horizontalna) jer se ukupnoj vrijednosti otpora samog uzorka pribrajaju i vrijednosti otpora zlatnih kontakata preko kojih je ostvarena veza s uzorkom. Što se tiče nagiba na jačim strujama on iznosi $0.5465 \mu\text{V}/\mu\text{A}$ što je niže od vrijednosti otpora u normalnom stanju. Razlog tome je taj što primijenjena struja nije dovoljno jaka da bi u potpunosti poništila supravodljivost u uzorku dok jaču struju nismo upotrebljavali kako ne bi spalili uzorak. Da se za dovoljno jaku struju sustav ipak vrati u normalno stanje možemo vidjeti na grafu (b) sa slike 4.2 gdje se sada uzorak nalazi na višoj temperaturi, točnije $T = 3.6$ K, pa je raspon struje koji smo koristili dovoljno širok

da se supravodljivost u potpunosti poništi. Nagib krivulje pri jakim strujama (plava krivulja) je $1.035 \mu\text{V}/\mu\text{A}$ što odgovara vrijednosti otpora u normalnom stanju. Sam utjecaj promjene temperature na izgled IV karakteristika za uzorak Nb004 $p=0.45$ prikazan je na grafu (c) slike 4.2.

5 Diskusija rezultata

5.1 Gornja kritična vrijednost magnetskog polja

Iz izmjerenih podataka ovisnosti otpora o temperaturi za različita magnetska polja, možemo odrediti iznose temperatura na kojima pri određenim magnetskim poljima dolazi do nestajanja supravodljivosti. Iz tog skupa točaka možemo odrediti vrijednost gornjeg kritičnog magnetskog polja. Da bi to mogli moramo poznavati relaciju ovisnosti gornjeg kritičnog magnetskog polja o temperaturi koju će naši uzorci pratiti te fitanjem na očitane vrijednosti precizirati izraz za svaki od uzoraka. Samo očitavanje vrijednosti kritične temperature za određena magnetska polja radili smo na način da samo točku supravodljivog prijelaza uzeli kao onu u kojoj je otpor uzorka jednak 90 % svoje vrijednosti u normalnom stanju. Dobivene vrijednosti za uzorke s obje pločice prikazane su na slikama 5.1 i 5.2. Na dobivene vrijednosti pokušali smo fitati relaciju danu WHH⁹ [15] teorijom koja glasi:

$$\ln \frac{1}{t} = \left(\frac{1}{2} + \frac{i\lambda_{SO}}{4\gamma} \right) \psi \left(\frac{1}{2} + \frac{h + \lambda_{SO}/2 + i\gamma}{2t} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{i\lambda_{SO}}{4\gamma} \right) \psi \left(\frac{1}{2} + \frac{h + \lambda_{SO}/2 - i\gamma}{2t} \right) - \psi \left(\frac{1}{2} \right), \quad (5.1)$$

gdje je $t = T/T_c$, $\gamma = [(\alpha h)^2 - (\lambda_{SO}/2)^2]^{1/2}$ i

$$h = -\frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\mu_0 H_{c2}}{T_c} \cdot \frac{1}{\left(\frac{d(\mu_0 H_{c2})}{dT} \right)_{T=T_c}}. \quad (5.2)$$

Parametre α i λ_{SO} uzimamo kao parametre fitanja. Njihove vrijednosti opisuje utjecaj paramagnetskog odnosno spin-orbit međudjelovanja na iznos gornjeg kritičnog magnetskog polja. Za $\alpha = 0$ i $\lambda_{SO} = 0$ izraz 5.1 se reducira na:

$$\ln \frac{1}{t} = \psi \left(\frac{1}{2} + \frac{h}{2t} \right) - \psi \left(\frac{1}{2} \right). \quad (5.3)$$

Funkcija ψ u izrazima 5.1 i 5.3 je digamma funkcija. WHH teorija je pogodna za opis "weak-coupling" supravodiča što kod niobija nije slučaj jer je on "intermediate-coupling" supravodič. No teoriju je moguće modificirati (kao što je to u članku [12] i učinjeno) kako bi ona opisivala i "intermediate-coupling" supravodiče. To činimo na

⁹Werthamer–Helfand–Hohenberg

način da u relaciju 5.2 uvedemo dodatni parametar koji nazivamo parametrom prilagodbe i koji reprezentira činjenicu da se radi o "intermediate-coupling" supravodiču. Relacija 5.2 je tada jednaka:

$$h = -\frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{\mu_0 H_{c2}}{T_c} \cdot \frac{1}{\left(\frac{d(\mu_0 H_{c2})}{dT}\right)_{T=T_c}} \cdot C. \quad (5.4)$$

Parametar prilagodbe C proporcionalan je s $\frac{2\Delta}{kT_c}$. Kako je kod "intermediate-coupling" supravodiča $\frac{2\Delta}{kT_c}$ veći nego kod "weak-coupling" supravodiča parametar prilagodbe će biti veći od jedan. Poznavajući vrijednosti za $\frac{2\Delta}{kT_c}$ (koje nezavisno određujemo na način opisan u člancima [13] i [14]) iznose parametara prilagodbe možemo odrediti sukladno relaciji:

$$C = \frac{\frac{2\Delta}{kT_c}}{3.52}. \quad (5.5)$$

Koristeći relacije 5.4 i 5.5 tada možemo provesti fitanje na izmjerene podatke i odrediti parametre α i λ_{SO} . Drugi način je da provedemo fitanje po sva tri parametra: α , λ_{SO} i C . No kako je raspon magnetskih polja i temperatura na kojima smo mi proveli mjerenje premali i kako nam nisu dostupni neovisni podaci za $\frac{2\Delta}{kT_c}$ izmjerenih uzoraka mi nismo bili u mogućnosti provesti fitanje izmjerenih podataka ni na jedan od dva gore opisana načina. Zbog toga smo upotrijebili i drugu relaciju za opis dobivenih podataka. Druga relacija koja opisuje temperaturnu ovisnost gornjeg kritičnog magnetskog polja je, za razliku od WHH teorije koja koristi mikroskopski pristup, termodinamička i slijedi iz poopćenja Ginzburg-Landauovih relacija. Tu relaciju su izveli Abrikosov i Tinkham. Ona povezuje gornje kritično magnetsko polje s dubinom penetracije $\lambda(T)$ i termodinamičkim kritičnim poljem $H_c(T)$ na način da je:

$$H_{c2}(T) = \frac{4\pi}{\Phi_0} \lambda^2(T) H_c^2(T), \quad (5.6)$$

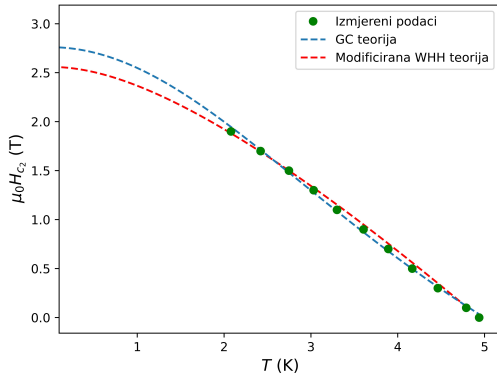
gdje je $\Phi_0 = 2.067 \times 10^{-15}$ Wb kvant magnetskog toka. Prednost ove relacije je njezina generalnost tj. ona je primjenjiva na sve sustave koji imaju supravodljivi prijelaz drugog reda kakav je upravo i naš. U Gorter-Casimirovoj (GC) teoriji [16] za temperaturnu ovisnost dubine penetracije i termodinamičkog kritičnog polja uzimamo:

$$\begin{aligned} \lambda(T) &= \lambda(0) (1 - t^4)^{-\frac{1}{2}}, \\ H_c(T) &= H_0 (1 - t^2), \end{aligned} \quad (5.7)$$

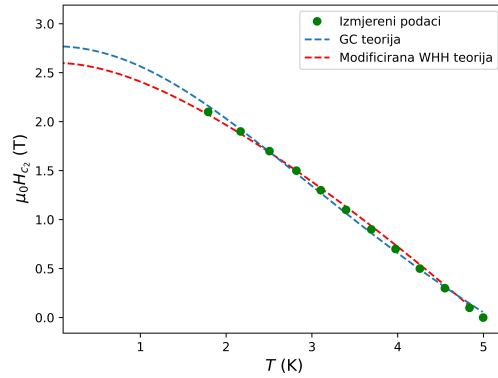
gdje je $t = \frac{T}{T_c}$. Relacija 5.6 je tada jednaka:

$$H_{c_2}(T) = \frac{4\pi H_0^2 \lambda^2(0)}{\Phi_0} \cdot \frac{(1 - t^2)}{(1 + t^2)}. \quad (5.8)$$

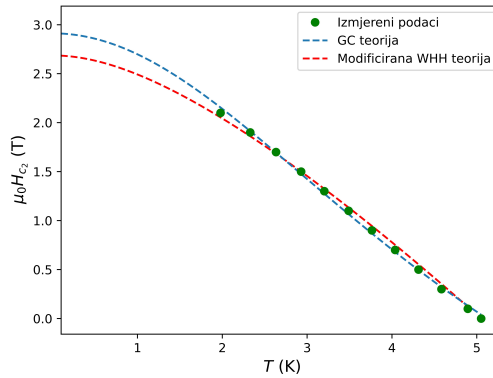
Navedena relacija vrlo dobro odgovara izmjerenim podacima kao što se može i vidjeti na slikama 5.1 i 5.2. Iz parametara dobivenih fitanjem sada možemo ekstrapolirati



(a) Nb001 p=0.45.



(b) Nb004 p=0.45.

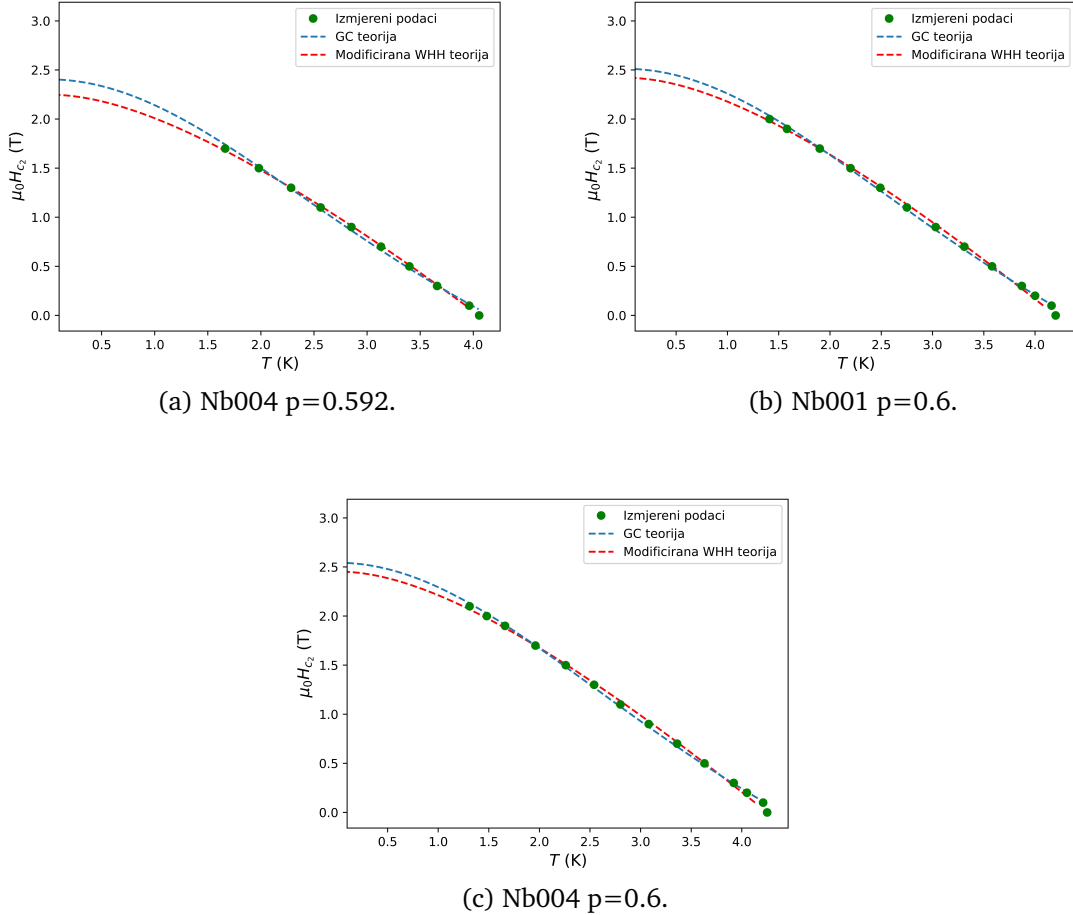


(c) Nb001 p=0.55.

Slika 5.1: Usporedba gornjih kritičnih magnetskih polja dobivenih GC i modificiranom WHH relacijom za uzorke s pločice Nb001.

vrijednosti gornjih kritičnih magnetskih polja na 0 K. Dobivene vrijednosti prikazane su u tablici 5.1. No kako se GC teorija zasniva na relacijama koje su dijelom i empirijske te kako ne uzima u obzir nikakve dodatne doprinose (paramagnetske i spin-orbit) nju možemo koristiti tek za grubu procjenu iznosa gornjeg kritičnog magnetskog polja. Smislenost vrijednosti dobivenih iz te teorije provjerili smo uspoređujući ih s vrijednostima koje dobivamo ekstrapolacijom modificirane WHH relacije (relacija 5.4) uz $\alpha = \lambda_{SO} = 0$ fitane na izmjerene podatke (fitanje je dakle izvršeno po

parametru prilagodbe). Pretpostavke koje smo koristili ($\alpha = 0$ i $\lambda_{SO} = 0$) su vrlo grube no i dalje nam omogućuju da steknemo uvid u smislenost vrijednosti dobivenih GC relacijom. Kao što sa slika 5.1 i 5.2 možemo vidjeti dobivene krivulje su vrlo slične odnosno dobivene vrijednosti gornjih kritičnih magnetskih polja su vrlo bliske. Vrijednosti za $\frac{2\Delta}{kT_c}$ koje dobivamo fitanjem modificirane WHH teorije na iz-



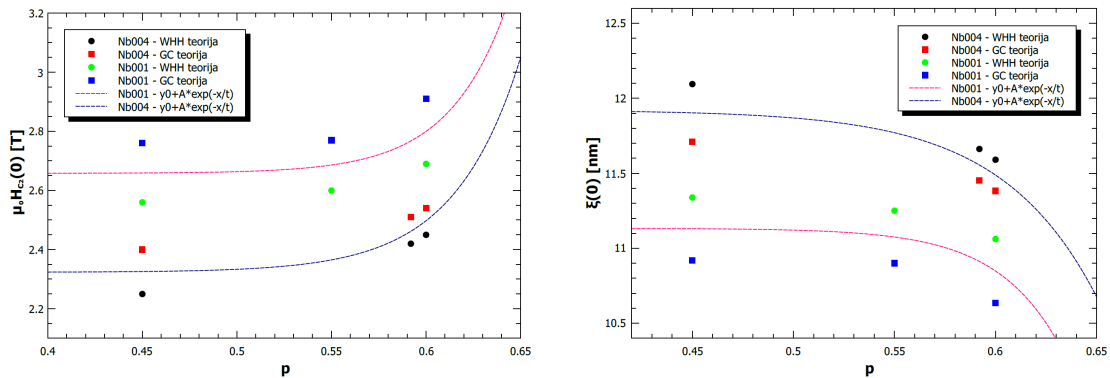
Slika 5.2: Usporedba gornjih kritičnih magnetskih polja dobivenih GC i modificiranom WHH relacijom za uzorke s pločice Nb004.

mjerene podatke (uz $\alpha = \lambda_{SO} = 0$) prikazane su u tablici 5.1 te nalaze se unutar očekivanog raspona [13] [14]. Dobivene vrijednosti gornjih kritičnih magnetskih polja prikazane su na slici 5.3 (a) zajedno s krivuljama koje opisuju njihovo ponašanje prilikom promjene parametra perkolacije. Ono što iz grafa možemo vidjeti jest kako postoji razlika u iznosima gornjih kritičnih magnetskih polja kod uzoraka s istim parametrom perkolacije a koji se nalaze na različitim pločicama. Kod uzoraka s pločice Nb001 su ta magnetska polja veća od onih s pločice Nb004 što je još jedna naznaka da bi debljina niobija na pločici Nb001 mogla biti veća od one na pločici Nb004 (de-

pločica	p	$\mu_0 H_{c2}(T)$ -GC	$\xi(0)(nm)$ -GC	$\mu_0 H_{c2}(T)$ -WHH	$\xi(0)(nm)$ -WHH	$\frac{2\Delta}{kT_c}$
Nb001	0.45	2.76	10.92	2.56	11.34	4.20
	0.55	2.77	10.90	2.60	11.25	3.92
	0.6	2.91	10.63	2.69	11.06	4.21
Nb004	0.45	2.40	11.71	2.25	12.09	3.81
	0.592	2.51	11.45	2.42	11.66	3.53
	0.6	2.54	11.38	2.45	11.59	3.53

Tablica 5.1: Vrijednosti gornjih kritičnih magnetskih polja, duljina koherencije i $\frac{2\Delta}{kT_c}$ dobivene fitanjem modificirane WHH i GC teorije na izmjerene podatke.

taljniji opis ovisnosti gornjeg kritičnog magnetskog polja o debljini niobija dan je u članku [12]). Za kraj smo još iz relacije 4.1 odredili pripadajuće duljine koherencije na nultoj temperaturi. Dobiveni rezultati prikazani su na slici 5.3 (b). Zbog ograničenja obje analize, vrijednost gornjeg kritičnog magnetskog polja, a sukladno tome i duljinu koherencije smo procijenili na način da smo rekli da je ona jednaka aritmetičkoj sredini vrijednosti dobivenih iz svake od teorija. Te su vrijednosti prikazane u tablici 5.2.

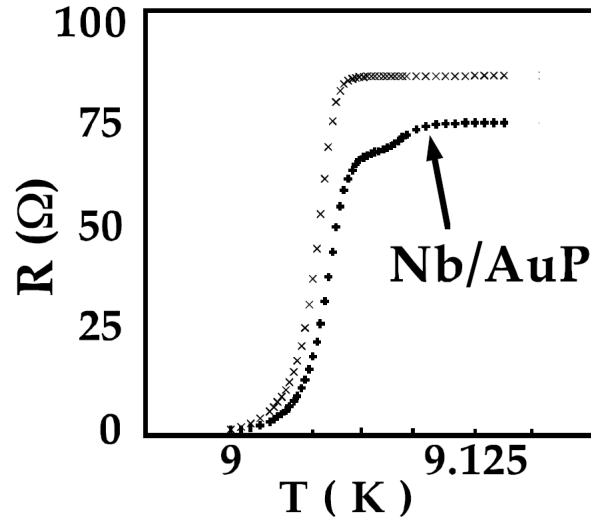


(a) Ovisnosti gornjeg kritičnog magnetskog polja o parametru perkolacije "p". (b) Ovisnost duljine koherencije o parametru perkolacije "p".

Slika 5.3: Ovisnost gornjeg kritičnog magnetskog polja te duljine koherencije o parametru perkolacije "p" za uzorke s obje pločice.

5.2 Proximity efekt

Unutar Ginzburg–Landau teorije nije moguće dobiti općeniti opis ovog efekta već samo u specijalnim slučajevima. Jedan od njih je slučaj u kojem promatramo utjecaj *proximity* efekta (PE) na supravodič pri temperaturi koja je blizu kritične te koji je u kontaktu s normalnim metalom (ili supravodičem čija je kritična temperatura puno



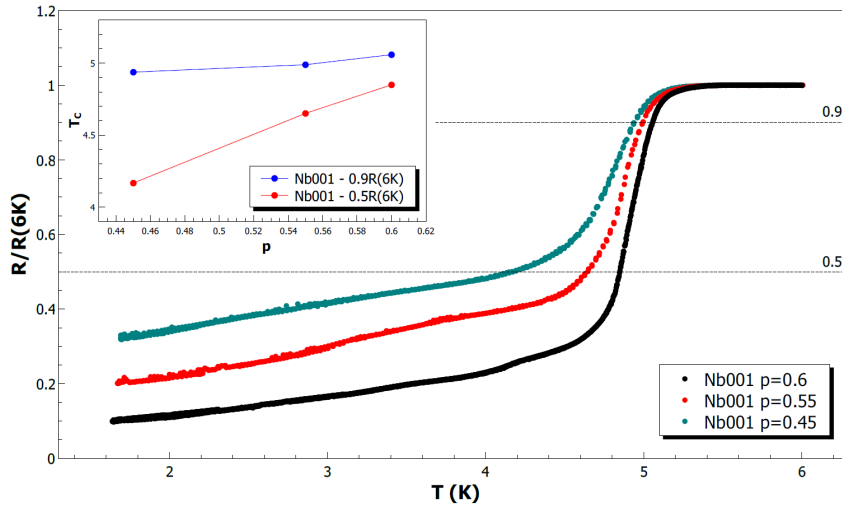
Slika 5.4: Utjecaj *proximity* efekta (PE) na izgled krivulje u $R(T)$ grafu. Slika preuzeta iz [10]

niža od kritične temperature promatranog supravodiča). Jedna od temeljni jednačbi [11] koja opisuje ponašanje sustava koji se nalaze u ovom limesu je jednačba:

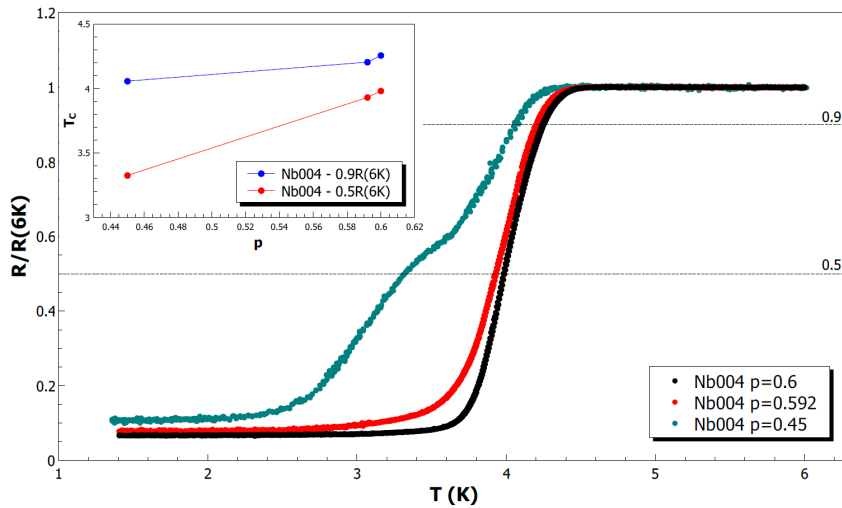
$$\frac{\Delta T_C}{T_C} = 1.35 \left(\frac{\xi(0)}{d_s} \right)^2, \quad (5.9)$$

čiji $R(T)$ grafovi poprimaju izgled sličan onome prikazanom na slici 5.4. Iako naš slučaj nije ekvivalentan gore navedenom modelu, za temeljne ideje tog modela (koje će biti navedene u nastavku) pretpostavit ćemo da vrijede i u općenitijem slučaju kao što je naš. Temeljna ideja koja slijedi iz ovog modela, a koja je sadržana u relaciji 5.9, je da je širina PE prijelaza proporcionalna duljini koherencije i kritičnoj temperaturi te obrnuto proporcionalna debljini u ovom slučaju niobija. Upravo ovakva ovisnost može nam objasniti oblike krivulja dobivenih na $R(T)$ dijagramima. Započnimo prvo s razmatranjem uzoraka na pločici Nb004. Kritična temperatura uzoraka s pločice Nb004 raste linearno s porastom parametra perkolacije "p", što je vidljivo na slici 5.5, dok duljina koherencije pada i to eksponencijalno (slika 5.3 (b)). Koristeći se ponovno logikom relacije 5.9 vidimo da na širinu prijelaza dominantniji utjecaj ima ponašanje duljine koherencije što je u našem slučaju još izraženije jer je njena ovisnost o "p" eksponencijalna dok je ovisnost kritične temperature o istom parametru linearna (u rasponu parametra "p" kojeg smo mi analizirali!). To znači da bi povećanjem parametra "p" *proximity* efekt trebao biti sve manje i manje izražen na $R(T)$ grafu odnosno da bi taj drugi prijelaz trebao biti sve uži. Upravo je to ono što

vidimo na našim grafovima gdje za parametre $p=0.592$ i $p=0.6$ drugi prijelaz uopće ne vidimo. Za razliku od uzoraka s pločice Nb004 gdje se anomalija za koju pretpo-



(a) Uzorci s pločice Nb001.



(b) Uzorci s pločice Nb004.

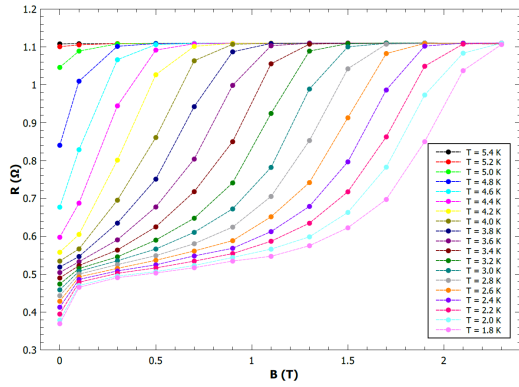
Slika 5.5: Grafovi ovisnost kritične temperature o parametru perkolacije "p".

tavljamo da je potpis *proximity* efekta javlja na samom središtu krivulja kod uzoraka s pločice Nb001 se ta anomalija javlja u donjem dijelu krivulja neposredno prije nego li otpor padne na najnižu vrijednost. Najniža vrijednost otpora nije nula zbog toga što se ukupnoj vrijednosti otpora samog uzorka pribrajaju vrijednosti otpora zlatnih kontakata preko kojih je ostvarena veza s uzorkom. I ovdje pretpostavljamo da je razlog zbog kojeg krivulje s pločice Nb001 na niskim temperaturama imaju neobičan izgled *proximity* efekt. Kada tog efekta ne bi bilo krivulje bi bile nalik onima za uzorak Nb004 $p=0.6$. Promotrimo li detaljnije utjecaj *proximity* efekta na oblik krivulja vidimo da se on počinje javljati negdje u zadnjoj četvrtini vrijednosti otpora između

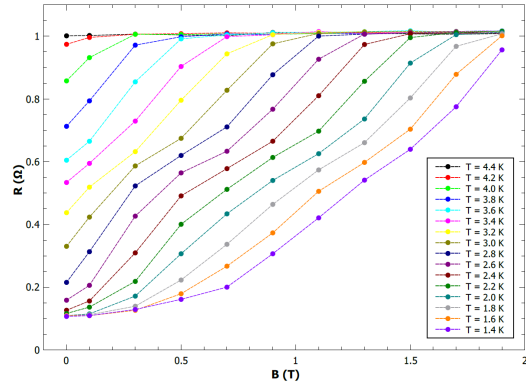
onog u normalnom stanju i minimalne vrijednosti. Širinu prijelaza uzrokovanu *proximity* efektom kod pločice Nb001 nismo u stanju točno odrediti no ona je daleko veća nego kod pločice Nb004. Kako na dvjema različitim pločicama imamo uzorke s istim "p" a dobivamo različite krivulje znamo da postoji neki parametar koji je različit. Taj bi parametar mogla biti debljina niobija. Iz relacije 5.9 slijedi da je odnos širine prijelaza i debljine niobija obrnuto proporcionalan što bi značilo da je niobij deblji na pločici Nb004 što je pak u suprotnosti s indikacijom da je niobij deblji na pločici Nb001. Naime, usporedimo li iznose kritičnih temperatura za uzorke s istim "p" vidimo da su one veće za uzorke s pločice Nb001. Što je veća debljina niobija to će temperatura supravodljivog prijelaza biti viša (temperatura prijelaza samog niobija je 9.25 K). No treba i dalje imati na umu da je taj odnos između širine prijelaza i debljine niobija takav u potpuno drugačijem sustavu nego što je naš. Kao i kod Nb004 PE počinje biti sve slabiji povećanjem parametra perkolacije što na $R(T)$ grafovima za Nb001 vidimo na način da se razmak između krivulja za različita magnetska polja sve više i više smanjuje.

5.3 Ovisnost otpora o magnetskom polju

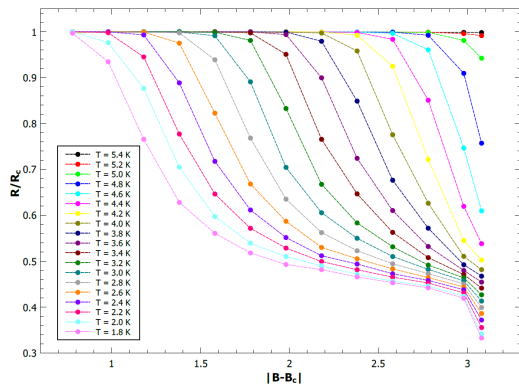
Koristeći se izmjerenim podacima prikazanim na slici 4.1 možemo odrediti i ovisnost otpora o magnetskom polju za različite vrijednosti temperature na kojima se uzorci nalaze. Dio grafova koje pritom dobivamo prikazan je na slici 5.6 dok se ostatak nalazi u dodatku A. Na gornjim grafovima sa slike 5.6 prikazana je ovisnost otpora o primijenjenom magnetskom polju za različite vrijednosti temperature. Raspon temperatura odabran je tako da obuhvati sve dijelove krivulja u kojima dolazi do promjene otpora dok je razlika između temperatura odabrana na način da dobijemo što veći broj točaka. To će nam posebno biti važno kod daljnje analize tih podataka. Na donjim grafovima slike 5.6 prikazane su ovisnosti relativne vrijednosti otpora (odnosno omjer vrijednosti otpora i kritične vrijednosti otpora) u odnosu na odstupanje magnetskog polja od kritične vrijednosti magnetskog polja. Kritična vrijednost otpora te kritična vrijednost magnetskog polja su vrijednosti koje su definirane mjestom presijecanja izoterma u $R(B)$ grafu. Kako je raspon magnetskog polja u kojem smo mi provodili istraživanje premalen za ovakvo određivanje tih vrijednosti mi smo ih odredili (ili bolje rečeno procijenili) alternativnom metodom. Za kritičnu vrijednost



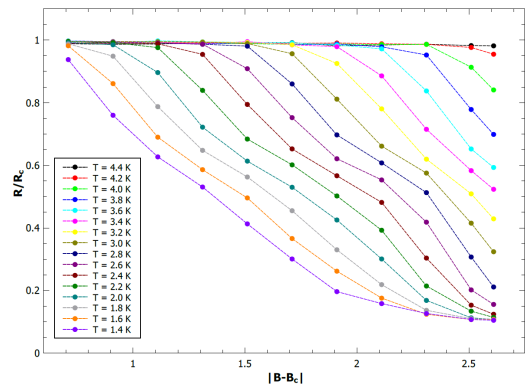
(a) Ovisnost otpora o magnetskom polju pri različitim vrijednostima temperature za uzorak Nb001 $p=0.45$.



(b) Ovisnost otpora o magnetskom polju pri različitim vrijednostima temperature za uzorak Nb004 $p=0.45$.



(c) Prikaz ovisnosti otpora o odstupanju od kritične vrijednosti magnetskog polja za uzorak Nb001 $p=0.45$.



(d) Prikaz ovisnosti otpora o odstupanju od kritične vrijednosti magnetskog polja za uzorak Nb004 $p=0.45$.

Slika 5.6: Ovisnost otpora o magnetskom polju za različite vrijednosti temperature.

otpora smo uzeli onu vrijednost otpora u kojoj se spajaju sve krivulje na $R(B)$ grafu. Ovaj način se ne razlikuje značajno od ispravnog načina. Način određivanja kritične vrijednosti magnetskog polja već je dijelom opisan u uvodu prethodnog poglavlja. Iz parametara dobivenih fitanjem na izmjerene podatke mogli smo ekstrapolirati vrijednost gornjeg kritičnog magnetskog polja pri temperaturi od 0 K koju smo uzeli da je ekvivalentna kritičnom polju u kojem dolazi do presijecanja izoterma.

5.4 Analiza skaliranja

Sada ćemo se posvetiti analizi skaliranja. Naime, osim promjenom temperature fazni prijelaz kod supravodiča moguće je postići i varijacijom nekog netermalnog parametra. Takvi prijelazi koji su uzrokovani varijacijom nekog netermalnog parametra, kao što je u našem slučaju magnetsko polje, nazivaju se kvantni fazni prijelazi (KFP).

Ti fazni prijelazi postoje i na temperaturi $T = 0$ K pri čemu za netermalni parametar tada postoji kritična vrijednost nakon koje dolazi do KFP-a. To mjesto u faznom prostoru nazivamo kvantna kritična točka. Kako će nama parametar biti magnetsko polje tada postoji i kritična vrijednost magnetskog polja na kojoj se događa kvantni fazni prijelaz. Vrijednost kritičnog magnetskog polja najlakše je odrediti na $R(B)$ dijagramu gdje se ona manifestira kao točka u kojoj dolazi do presijecanja izoterme. U blizini KFP-a na temperaturi $T = 0$ K duljina prostorne korelacije ξ i duljina dinamičke korelacije ξ_τ eksponencijalno divergiraju sukladno relacijama:

$$\begin{aligned}\xi &\propto |\delta|^{-\nu} \\ \xi_\tau &\propto \xi^z,\end{aligned}\tag{5.10}$$

gdje je $\delta = |B - B_C|$, a ν i z su prostorni odnosno dinamički kritični eksponenti. Na konačnim temperaturama nastaju ograničenja u vremenskoj dimenziji uzrokovana termalnim fluktuacijama koja se manifestiraju kroz pojavu duljine defaziranja ovisne o temperaturi T i to na način da je:

$$L_\phi \propto T^{-1/z}.\tag{5.11}$$

Na duljinama većim od duljine defaziranja kvantne fluktuacije gube faznu koherenciju. To znači da u kvantnom kritičnom području otpor možemo preko univerzalne funkcije povezati s odstupanjem netermalnog parametra od kritične vrijednosti, temperaturom te kritičnim eksponentima skaliranja ν i z . Eksponenti skaliranja tada određuju klasu univerzalnosti kvantnog faznog prijelaza. Ovisnost otpora dvodimenzionalnog sustava koji se nalazi u kvantnom kritičnom režimu se ponaša sukladno relaciji skaliranja [17] koja glasi:

$$R(\delta, T) = R_c f(\delta T^{-\frac{1}{\nu z}}).\tag{5.12}$$

U potonjoj relaciji je $\delta = |B - B_c|$. R_c je kritična vrijednost otpora odnosno otpor uzorka kada je $\delta = 0$. Funkcija f je univerzalna funkcija skaliranja za koju vrijedi da je $f(0) = 1$. Određivanje kritičnih eksponenata možemo provesti na dva načina:

1. Tako da provjerimo mogu li se izmjereni podaci reskalirati sukladno relaciji

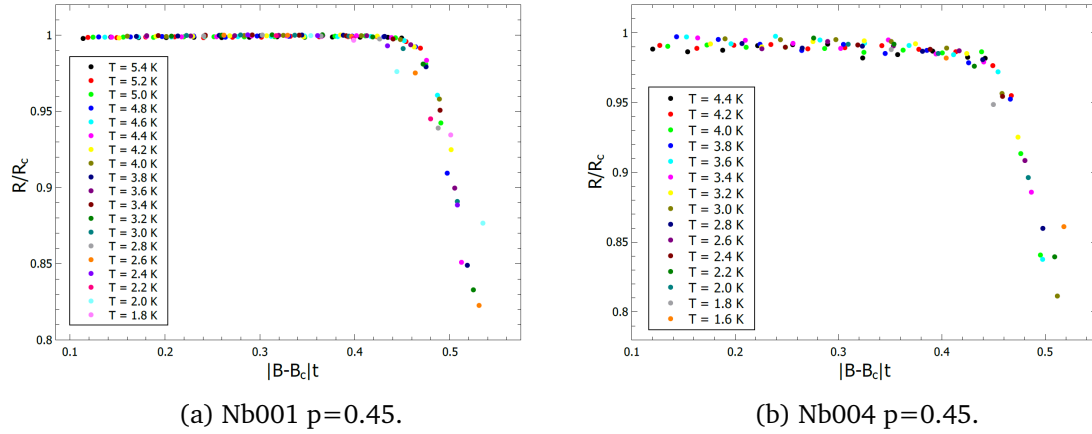
$$R(\delta, T) = R_c f(\delta T^{-\frac{1}{\nu z}}) \text{ gdje produkt } \nu z \text{ predstavlja parametar skaliranja;}$$

2. Tako da nacrtamo graf ovisnosti derivacije otpora po magnetskom polju na kritičnoj vrijednosti magnetskog polja $\left.\frac{\partial R}{\partial B}\right|_{B_c}$, o recipročnoj vrijednosti temperature $\frac{1}{T}$, s osima u logaritamskoj skali. Kako je $\left.\frac{\partial R}{\partial B}\right|_{B_c} \propto T^{-\frac{1}{\nu z}}$ nagib pravca koji bi dobili na tom grafu odgovarao bi produktu kritičnih eksponenata νz .

Kako je magnetsko polje do kojeg smo mi vršili mjerenje ispod kritične vrijednosti nismo bili u mogućnosti kritične eksponente odrediti na način opisan pod točkom 2. Kritične eksponente mogli smo odrediti samo koristeći metodu opisanu pod točkom 1. Kada je to moguće koristimo oba načina za određivanjem kritičnih eksponenata kako bi provjerili ispravnost dobivenih vrijednosti. Ponašanje supravodljivog uzorka ovisi o njegovim tehničkim karakteristikama te karakteristikama okoline u kojoj se nalazi. Da bi precizno opisali ponašanje našeg uzorka moramo definirati i uvjete pri kojima on ima određeno ponašanje. Relevantne veličine u tom smislu su kod nas: magnetsko polje u kojem se sustav nalazi, parametar perkolacije te na kojoj se pločici uzorak nalazi tj. (po pretpostavci) kolika je debljina niobija. Varijacijom svakog od tih parametara možemo uzrokovati kvantni fazni prijelaz. Kao što je već rečeno mi ćemo promatrati KFP uzrokovan promjenom magnetskog polja. Ostale varijable koje karakteriziraju sustav tada će svoj doprinos ponašanju supravodiča davati kroz iznos produkta kritičnih eksponenata. Dakle produkt kritičnih eksponenata je u našem slučaju funkcija definirana s:

$$\nu z = \nu z(p, d), \quad (5.13)$$

gdje je p parametar perkolacije a d debljina niobija. Provođenjem skaliranja (po magnetskom polju) za različite uzorke (za različite parametre p) na različitim pločicama (različite debljine niobija d) dobivamo skup vrijednosti za kritične eksponente koje sada možemo uspoređivati. Ako se vrijednost produkta kritičnih eksponenata ne mijenja prilikom promjene karakterizacijskog parametra tj. ako funkcija produkta kritičnih eksponenata ne ovisi o tom parametru kažemo da svi uzorci, neovisno o iznosu tog parametra, pripadaju istoj klasi univerzalnosti. Dio grafova koje smo dobili analizom skaliranja iz izmjerenih podataka prikazan je na slici 5.7 dok se ostali nalaze u dodatku B. Dobivene vrijednosti produkta kritičnih eksponenata prikazane su u tablici 5.2. Imajući na umu da na iznos produkta kritičnih eksponenata veliki utjecaj ima vrijednost kritičnog magnetskog polja koju smo mi više procijenili nego odredili, možemo izvesti sljedeće zaključke. Iznos produkta kritičnih eksponenata



Slika 5.7: Grafovi dobiveni analizom skaliranja za dio izmjerenih uzoraka.

νz za uzorke na svakoj od pločica je gotovo identičan što znači da produkt ne ovisi značajno o parametru perkolacije tj. svi uzorci s iste pločice pripadaju istoj klasi univerzalnosti. Uspoređujemo li produkte kritičnih eksponenata za dvije različite pločice vidimo da je produkt kritičnih eksponenata za uzorke s pločice Nb001 nešto veći od onih s pločice Nb004. Parametar koji se mijenja i koji uzrokuje promjenu klase uni-

pločica	p	$R_N(\Omega)$	$T_c(K)$	$T_c^{on}(K)$	$\mu_0 H_{c2}(T)$	$B_c(T)$	νz	$\xi(0)(nm)$
Nb001	0.45	1.11	4.17	4.94	2.66	3.08	0.88	11.12
	0.55	1.12	4.65	4.99	2.69	3.17	0.90	11.06
	0.6	1.09	4.85	5.06	2.80	3.30	0.90	10.84
Nb004	0.45	1.02	3.33	4.06	2.33	2.61	0.83	11.88
	0.592	1.03	3.93	4.20	2.47	2.80	0.85	11.54
	0.6	1.00	3.98	4.26	2.50	2.85	0.84	11.47

Tablica 5.2: Vrijednosti parametara koji karakteriziraju izmjerene uzorke.

verzalnosti, na temelju svega dosad izrečenog, mogla bi biti debljina filma. Potvrdu ispravnosti te teze pronalazimo i u istraživanju [12] koje je provedeno upravo na način da se promatra utjecaj debljine tankog filma niobija na iznos kritičnih eksponenata. Iako to istraživanje nije ekvivalentno našem zbog toga što mi imamo "nabacan" niobij dok je kod ovog istraživanja riječ o uniformno raspoređenom niobiju tj. tankom filmu, opažanja o utjecaju debljine na produkt kritičnih eksponenata možemo primijeniti i na našem slučaju. Ono što iz tog istraživanja slijedi jest da prilikom povećanja debljine filma dolazi do promjene iznosa produkta kritičnih eksponenata odnosno promjene klase univerzalnosti što je u skladu sa svime što smo do sada zaključili.

6 Zaključak

Analizom uzoraka s pločica Nb001 i Nb004 odredili smo vrijednosti parametara koji ih karakteriziraju. U $R(T)$ grafovima izmjerenih uzoraka uočene su deformacije krivulja za koje pretpostavljamo da su posljedica *proximity* efekta. Utjecaj *proximity* efekta na izgled krivulja sugerira da postoji nesrazmjer u debljini niobija između uzorka na pločici Nb001 i Nb004 iako iz izmjerenih podataka ne možemo sa sigurnošću utvrditi na koji točno način debljina niobija utječe na širinu supravodljivog prijelaza. Hipoteza o nesrazmjeru debljina niobija na pločicama temelji se na postojanju razlike u iznosima kritičnih temperatura između uzoraka s istim parametrom perkolacije ali koji se nalaze na različitim pločicama. Ovisnost kritične temperature o parametru perkolacije na svakoj od pločica raste linearno s parametrom perkolacije, barem u rasponu u kojem smo mi provodili istraživanje. Prilikom proširenja istraživanja na veći raspon parametra p očekujemo da krivulja poprimi puno složeniju formu. Razlog tome je što će u jednom trenutku parametar p postati previše mali da bi u uzorku uopće došlo do supravodljivog prijelaza, ako ne prije onda za $p = 0$ jer tada uopće nema niobija, a što kod ekstrapolacije linearne ovisnosti nije tako odnosno ona predviđa postojanje supravodljivog prijelaza i za $p = 0$.

Strujno-naponske karakteristike svih izmjerenih uzoraka pokazuju ponašanje koje je u skladu s teorijskim predviđanjem. Detaljnijom analizom podataka o iznosu otpora pri određenoj temperaturi i magnetskom polju odredili smo iznose gornjih kritičnih magnetskih polja te vrijednosti produkta kritičnih eksponenata. Iznose gornjih kritičnih magnetskih polja smo iz izmjerenih podataka dobili ekstrapolacijom funkcija koje smo fitali na izmjerene podatke. Funkcije koje smo koristili za fitanje su funkcije koje predviđa WHH odnosno Gorter-Casimirova teorija. Mikroskopska WHH teorija nije pogodna za opis "intermediate-coupling" supravodiča kakav je niobij zbog čega smo ju morali modificirati. No ni s modificiranom WHH relacijom nismo bili u stanju opisati izmjerene podatke jer nismo imali dovoljno širok skup podataka niti smo iz neovisnih izvora poznavali iznose za $\frac{2\Delta}{kT_c}$ izmjerenih uzoraka. Sukladno tome nismo mogli precizno definirati ulogu pojedinog efekta u definiranju iznosa gornjeg kritičnog magnetskog polja. Fitiranje smo ipak izvršili uz uvjet da su α i λ_{SO} jednaki nuli iz čega smo osim gornjih kritičnih vrijednosti magnetskih polja odredili i vrijednosti za $\frac{2\Delta}{kT_c}$. Iako se ova analiza temeljila na vrlo gruboj pretpostavci dobivene

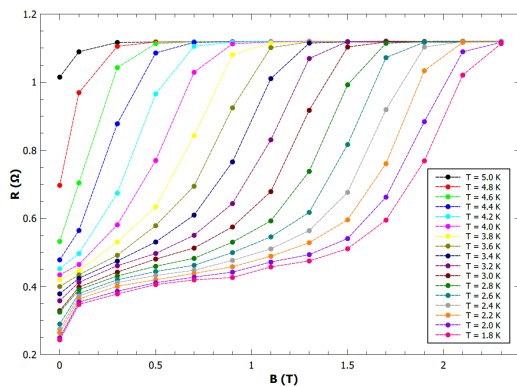
vrijednosti nalaze se unutar očekivanog raspona. Uz to smo na izmjerene podatke fitali i termodinamičku Gorter-Casimir relaciju iz koje smo također odredili iznose gornjih kritičnih magnetskih polja. Vrijednosti dobivene iz obje teorije su vrlo slične. Kao konačne vrijednosti gornjih kritičnih magnetskih polja uzeli smo aritmetičke sredine vrijednosti dobivenih iz obje teorije. Iz vrijednosti gornjih kritičnih magnetskog polja dobivenih iz GC i WHH teorije odredili smo i iznose duljina koherencije. Dobivene vrijednosti također su u skladu s hipotezom o različitim debljinama niobija kod uzoraka s različitim pločica. Proširenjem istraživanja na niže temperature i jača magnetska polja mogli bi odrediti i iznose parametara α i λ_{SO} te točnije vrijednosti parametra $\frac{2\Delta}{kT_c}$.

Za kraj smo još napravili i analizu skaliranja pri varijaciji magnetskog polja iz koje smo dobili da bi svi uzorci bez obzira na iznos parametra perkolacije trebali pripadati istoj klasi univerzalnosti. Razlika u klasi univerzalnosti postoji između uzoraka s različitim pločica što pretpostavljamo da je posljedica promjene debljine niobija. U narednim istraživanjima cilj je mjerenja provesti u širem rasponu parametra perkolacije iz čega bi onda mogli odrediti kritičnu vrijednost parametra perkolacije u kojoj dolazi do supravodljivog prijelaza. Poznavanjem tog podatka mogli bi izvršiti analizu skaliranja varijacijom parametra perkolacije čime bi osim vrijednosti produkta kritičnih eksponenata odredili i utjecaj magnetskog polja na klasu univerzalnosti promatranih uzoraka.

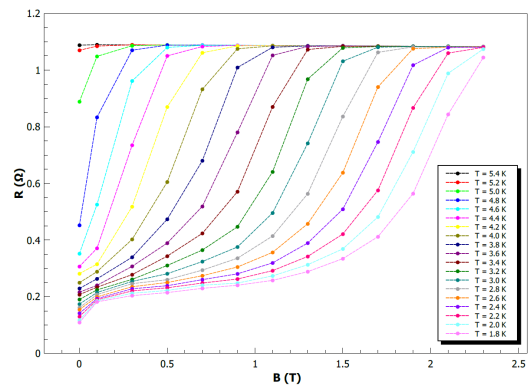
Dodaci

Dodatak A Ovisnost otpora o magnetskog polju

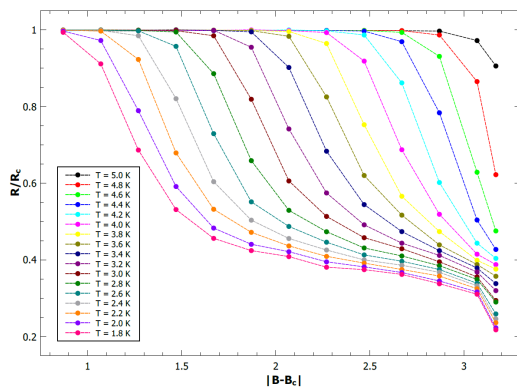
Na slikama A.1 i A.2 prikazani su grafovi ovisnosti otpora o magnetskom polju te grafovi ovisnosti otpora o odstupanju od kritične vrijednosti magnetskog polja za preostale uzorke s pločica Nb001 i Nb004.



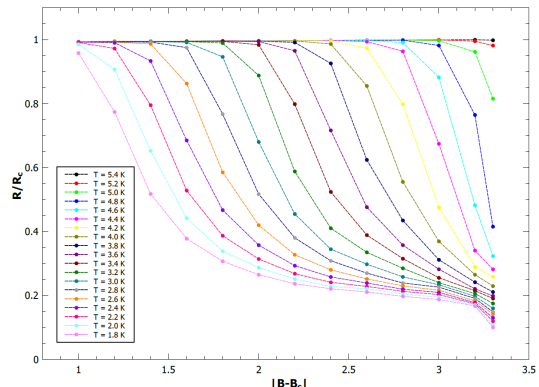
(a) Ovisnost otpora o magnetskom polju pri različitim vrijednostima temperature za uzorak Nb001 $p=0.55$.



(b) Ovisnost otpora o magnetskom polju pri različitim vrijednostima temperature za uzorak Nb001 $p=0.6$.

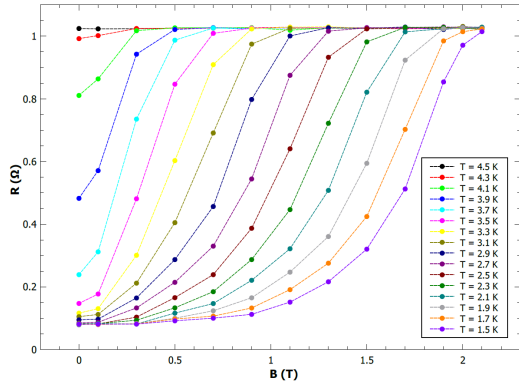


(c) Prikaz ovisnosti otpora o odstupanju od kritične vrijednosti magnetskog polja za uzorak Nb001 $p=0.55$.

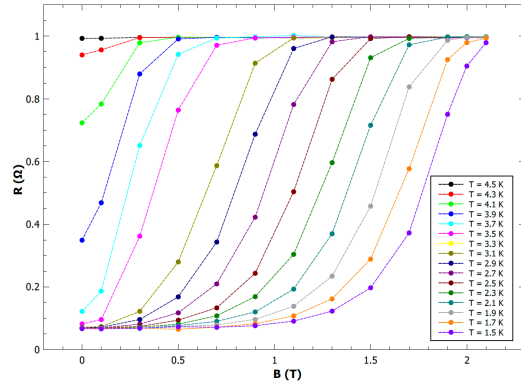


(d) Prikaz ovisnosti otpora o odstupanju od kritične vrijednosti magnetskog polja za uzorak Nb001 $p=0.6$.

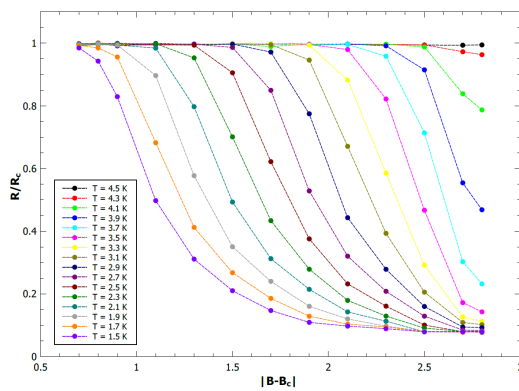
Slika A.1: Ovisnost otpora o magnetskom polju za različite vrijednosti temperature kod uzoraka s pločice Nb001.



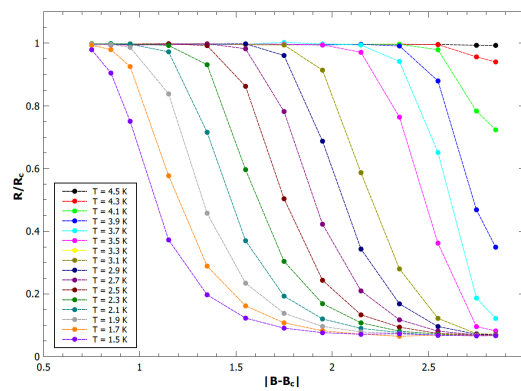
(a) Ovisnost otpora o magnetskom polju pri različitim vrijednostima temperature za uzorak Nb004 $p=0.592$.



(b) Ovisnost otpora o magnetskom polju pri različitim vrijednostima temperature za uzorak Nb004 $p=0.6$.



(c) Prikaz ovisnosti otpora o odstupanju od kritične vrijednosti magnetskog polja za uzorak Nb004 $p=0.592$.

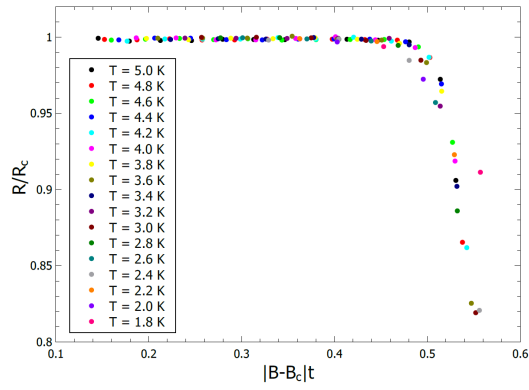


(d) Prikaz ovisnosti otpora o odstupanju od kritične vrijednosti magnetskog polja za uzorak Nb004 $p=0.6$.

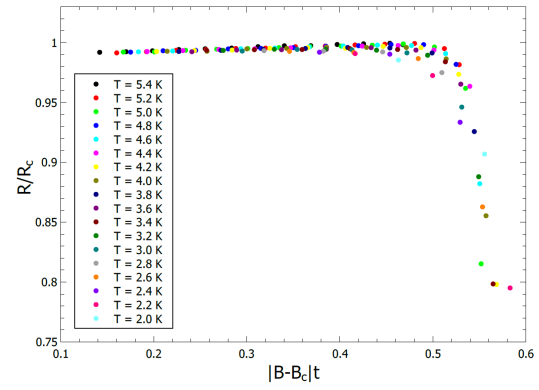
Slika A.2: Ovisnost otpora o magnetskom polju za različite vrijednosti temperature kod uzoraka s pločice Nb004.

Dodatak B Analiza skaliranja

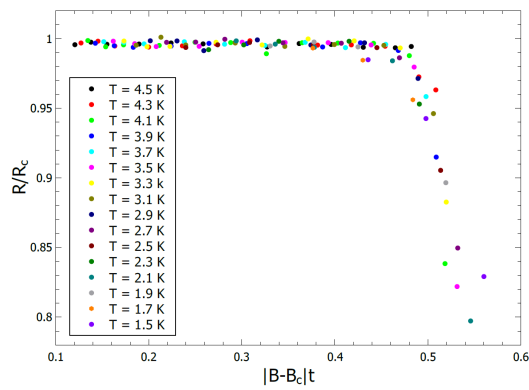
Na slici B.1 prikazani su grafovi dobiveni analizom skaliranja za preostale uzorke s pločica Nb001 i Nb004.



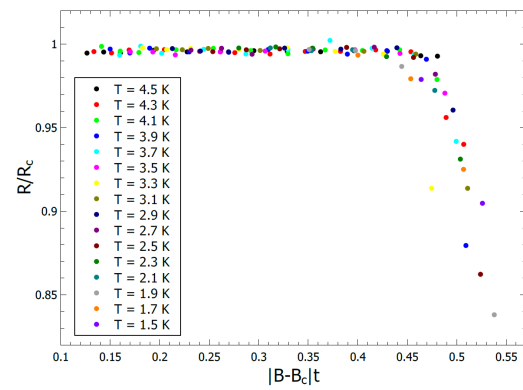
(a) Nb001 $p=0.55$.



(b) Nb001 $p=0.6$.



(c) Nb004 $p=0.592$.



(d) Nb004 $p=0.6$.

Slika B.1: Grafovi dobiveni analizom skaliranja za izmjerene uzorke.

Literatura

- [1] Van Delft, Dirk, and Peter Kes. "The discovery of superconductivity." *Physics today* **63**,9 (2010): 38-43. <https://doi.org/10.1063/1.3490499>.
- [2] Periodic table with superconducting temperatures, Wikipedia, https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/7e/Periodic_table_with_superconducting_temperatures.jpg, 17.4.2023.
- [3] Bussmann-Holder, Annette, and Hugo Keller. "High-temperature superconductors: underlying physics and applications." *Zeitschrift für Naturforschung B* **75**,1-2 (2020): 3-14. <https://doi.org/10.1515/znb-2019-0103>.
- [4] Bardeen, John, Leon N. Cooper, and John Robert Schrieffer. "Theory of superconductivity." *Physical review* **108**,5 (1957): 1175. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.108.1175>.
- [5] Tinkham, Michael. *Introduction to superconductivity*. Courier Corporation, 2004.
- [6] Relationship between the coherence length and penetration depth for Type I and Type II superconductors, University of Cambridge, <https://www.doitpoms.ac.uk/tlplib/superconductivity/type.php>, 20.6.2023.
- [7] Wördenweber, Roger and Vanacken, Johan. "Tutorial on nanostructured superconductors". *Superconductors at the Nanoscale: From Basic Research to Applications*, edited by Roger Wördenweber, Victor Moshchalkov, Simon Bending and Francesco Tafuri, Berlin, Boston: De Gruyter, 2017, pp. 1-28. <https://doi.org/10.1515/9783110456806-001>
- [8] Dyre, Jeppe C. "Simple liquids' quasiuniversality and the hard-sphere paradigm." *Journal of Physics: Condensed Matter* **28**,32 (2016): 323001. <https://doi.org/10.1088/0953-8984/28/32/323001>.
- [9] Isenthalpic contours for temperature versus pressure showing inversion curve, Wikipedia, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Isenthalpic_contours_for_temperature_versus_pressure_showing_inversion_curve.svg, 15.5.2023.

- [10] Peroz, C., et al. "Vortex dynamics at high velocities and proximity effect in superconducting thin films." *Physica C: Superconductivity* **369**,1-4 (2002): 222-226. [https://doi.org/10.1016/S0921-4534\(01\)01246-1](https://doi.org/10.1016/S0921-4534(01)01246-1).
- [11] A.A. Abrikosov, *Fundamentals of the theory of metals*, North-Holland, Amsterdam, 1988, pp. 483–486.
- [12] Zaytseva, Iryna, et al. "Upper critical field and superconductor-metal transition in ultrathin niobium films." *Scientific Reports* **10**,1 (2020): 19062. <https://doi.org/10.1038/s41598-020-75968-9>.
- [13] Park, Sung I., and T. H. Geballe. "Superconducting tunneling in ultrathin Nb films." *Physical review letters* **57**,7 (1986): 901. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.57.901>.
- [14] Kimhi, D. B., and T. H. Geballe. "Superconducting tunneling in the amorphous transition metals Mo and Nb." *Physical Review Letters* **45**,12 (1980): 1039. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.45.1039>.
- [15] Werthamer, N. R., E. F. Helfand, and P. C. Hohenberg. "Temperature and purity dependence of the superconducting critical field, H_{c2} . III. Electron spin and spin-orbit effects." *Physical Review* **147**,1 (1966): 295. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.147.295>.
- [16] Finnemore, D. K., T. F. Stromberg, and C. A. Swenson. "Superconducting properties of high-purity niobium." *Physical Review* **149**,1 (1966): 231. <https://doi.org/10.1103/PhysRev.149.231>.
- [17] Marković, N., et al. "Superconductor-insulator transition in two dimensions." *Physical Review B* **60**,6 (1999): 4320. <https://doi.org/10.1103/PhysRevB.60.4320>