SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Tena Bačani

MATEMATIKA ŽONGLIRANJA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Matija Kazalicki

Zagreb, rujan, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj diplomksi rad posvećujem svima koji su utjecali na mene na bilo koji način za vrijeme mog studiranja i pomogli mi da postanem osoba kakva sam danas: obitelj, prijatelji, kolege, profesori i poznanici u studiju i režiji. Možda mislite da niste napravili puno, ali vjerujte mi, mahnuli ste krilima dovoljno jako da ja to osijetim.
Također bih se htjela zahvaliti mentoru na strpljenju i savjetima koje sam dobila tijekom pisanja diplomskog rada.

Sadržaj

Uvod

U ovom diplomskom radu opisat će se matematička pozadina i rezultati koji se koriste u modeliranju žonglerskih trikova po uzoru na knjigu *The Mathematics of Juggling* autora Burkard Polstera.

U radu se koristi slobodan prijevod engleskih izraza vezanih za matematiku žongliranja.

U prvom poglavlju upoznajemo žongliranje i žonglersku terminologiju. Također je dan primjer nekih osnovnih žonglerskih trikova. Žongliranje ima matematičku pozadinu, te žonglerske trikove možemo opisati pomoću žonglerskih dijagrama toka, žonglerskih nizova, ali i pomoću žonglerskih funkcija.

U drugom poglavlju opisujemo neke transformacije žonglerskih nizova. Neke od transformacija mijenjaju osnovna svojstva žonglerskog trika, dok druge stvaraju nove žonglerske trikove. Koristimo teoreme teorije brojeva i kombinatorike da bi pokazali teoreme o žongliranju.

U trećem poglavlju istražujemo broj žonglerskih nizova, te u zadnjem poglavlju dajemo vezu između žongliranja, matematike i svijeta oko nas.

Poglavlje 1

Uvod u žongliranje

1.1 Povijest žongliranja

Čovječanstvo je oduvijek bilo zainteresirano za neku vrstu žongliranja. To je vrsta jednostavne zabave, a ljudi povijesno vole zabavu još od antičkih vremena i starogrčkih tragedija. Danas žongliranje vole svi, pa tako i matematičari, a matematičari također vole i definicije, pa krenimo onda s definicijom žongliranja.

Definicija 1.1.1 (Žongliranje)**.** *Žongliranje je bacanje u zrak, ponovno hvatanje, međusobno dodavanje, te vješto manipuliranje: loptica, palica, prstenova, dijabola, čunjeva, voća i povrća, pa čak i plamtećih objekata. Osoba koja žonglira zove se žongler. Žongler izvodi trikove.*

Riječ „*žongliranje*“ vuče svoje korijene iz starofrancuskog, srednjeengleskog i starolatinskog jezika. U starofrancuskom jeziku nalazi se riječ „*jangler*“, u engleskom jeziku riječ „*jogelen*“ koja znači *zabavljati izvođenjem trikova*, a u latinskom je riječ „*ioculari*“ koja znači „*šaliti se*“. U 15. stoljeću javilo se i drugo značenje riječi; „*prevariti, začarati*“.

U hrvatskom rječniku uz riječ „*žonglirati*“ dolaze sljedeća značenja: *vješto baratati predmetima, izvoditi žonglerske vještine*, *sport; vješto baratati loptom (u nogometu, košarci i sl.)* i *pren. vješto iskorištavati okolnosti, snalaziti se u svakoj situaciji*.

Povijesni dokazi koji upućuju na žongliranje predmeta se javljaju u mnogim civilizacijama od Europe, Starog Egipta, preko Tihog oceana do Južne Amerike i Meksika, pa čak i Kine i Japana. Prve slike koje prikazuju žongliranje stare su oko 4000 godina i dolaze iz Egipta. Stari Egipćani su na zidovima grobnica crtali ljude koji bacaju kuglice.

Kroz povijest se žongliranje često spominje zajedno s dvorskim ludama, magičarima i klaunovima. U Europske se zemlje žongliranje proširilo nakon što je kretanje stanovništva postalo dostupnije u srednjem vijeku i renesansi, te su trgovci i putujući zabavljači naučili nove trikove na svojim putovanjima. Ulični zabavljači su dodali žonglerske trikove u svoje priredbe kako bi zadovoljili potrebe tadašnjeg plemstva za zabavom. Tada je postalo popularno ulično žongliranje kojeg danas možemo vidjeti na raskrižjima velikih gradova.

Žongliranje je postalo vrsni trik u cirkusima u drugoj polovici 18. stoljeća. Ubrzo se proširilo i u Sjedinjene Američke Države. Žongleri su umjesto zabavljanja plemstva, počeli zabavljati publiku tijekom stanki u kazališnim predstavama. Sve do kasnog 19. stoljeća, žonglerski aktovi su bili neizostavni dio vodvilja (franc. *Vaudeville*); francuske komedije prošarane šaljivim monolozima i prizorima u kojima se izvode popularne pjesme. Dolaskom filmova i televizije, stanovništvo je sve manje bilo zainteresirano za vodvilj, no žongliranje nije postalo zaboravljeno, te se danas njime ne bave samo profesionalni akrobati, nego i laici.

Matematiku žongliranja je nezavisno razvilo više matematičara oko 1985. godine. Najznačajniji su Bengt Magnusson i Bruce „Boppo" Tiemann u Los Angelesu, Paul Klimak u Santa Cruzu i Adam Chalcraft, Mike Day i Colin Wright u Cambridgeu. Claude Shannon je svoj rad, koji sadrži dijagrame toka žonglerskog trika i neke od jednostavnijih šablona, napisao 1981. godine, no njegov rad je objavljen tek nakon 1990. godine. Shannon je također poznat i po svojim teoremima o žongliranju.

Arthur Lewbel je prvi objavio radove koji su sistematski povezali sve dosadašnje objavljene radove. Nakon njega, Burkard Polster je nastavio sistematizaciju radova, te 2003. godine objavio knjigu na kojoj se zasnivaju svi noviji radovi o matematici žongliranja. Steve Butler je autor internet stranice *Jugglingcounts* na kojoj su objavljeni najnoviji rezulatati matematike žongliranja.

U vrijeme pisanja ovog diplomskog rada u Hrvatskoj je objavljeno nekoliko članaka zainteresiranih stranaka i diplomskih radova studenata matematike.

1.2 Uvod u matematiku žongliranja

Definirajmo pojmove koji su potrebni za daljnji opis matematičke pozadine i rezultata vezanih za žongliranje.

Napomena 1.2.1. *Za sve primjere koji slijede, neka je dan žongler koji, bez smanjenja općenitosti, žonglira s lotpicama.*

Definicija 1.2.2 (Jednostavno žongliranje)**.** *Žongliranje koje zadovoljava sljedeća svojstva naziva se jednostavno žongliranje.*

(J1) *Loptice se žongliraju u konstantnom ritmu, to jest bacanja se događaju u diskretnim jednako udaljenim trenutcima.*

(J2) *Žonglerski trik je periodičan, te pretpostavljamo da žongler žonglira oduvijek i zauvijek.*

(J3) *Najviše jedna loptica je bačena ili uhvaćena na svaki otkucaj. Ako je loptica uhvaćena, onda mora biti i bačena.*

Žonglerski trikovi koje ćemo spomenuti će biti jednostavni žonglerski trikovi, to jest zadovoljavat će svojstva (J1), (J2) i (J3). Naravno, svojstvo (J3) nije zadovoljeno u složenim trikovima gdje jedna ruka rukuje s više od jedne loptice.

Definicija 1.2.3 (Otkucaj)**.** *Vremenski period između dva bacanja loptice zovemo otkucaj.*

Definicija 1.2.4 (Visina bacanja)**.** *Neka je $h \in \mathbb{N}_0$. Bacanje koje traje h otkucaja nazivamo h-bacanje ili bacanje visine h.*

Primjetimo sljedeće:

1. 0-bacanje je bacanje u kojem niti jedna ruka nije bacila ili primila lopticu na taj otkucaj. Žonglerova ruka je prazna.
2. 1-bacanje je bacanje u kojem jedna ruka baci lopticu prema drugoj ruci u ravnoj liniji, a druga ruka je odmah uhvati.
3. 2-bacanje je teoretsko bacanje u kojem jedna ruka baci lopticu u visokom luku i odmah je uhvati. No, u praktičnom triku žongleri izvršavaju 2-bacanje tako da drže lopticu u ruci dva otkucaja.
4. Neka je $n \in \mathbb{N}$. $(2n)$-bacanje je uvijek bacanje u visinu, te loptica će biti uhvaćena istom rukom kojom je bačena, dok je $(2n + 1)$-bacanje, bacanje koje mijenja ruku.

Žongleri mogu žonglirati zbilja zapanjujuće trikove, no ukoliko žongler želi zabilježiti novi trik, treba mu jednostavan način na koji to može napraviti. Najjednostavniji način za bilježenje je dijagram toka žonglerskog trika.

Definicija 1.2.5 (Dijagram toka žonglerskog trika)**.** *Dijagram toka žonglerskog trika je grafički prikaz uzorka. Dijagram pokazuje položaj loptice u ovisnosti o visini bacanja h i otkucajima bacanja. Lukovi koje označuju kretanje loptice nazivamo orbite. Dijagram toka žonglerskog trika je periodičan s periodom p.*

Dijagram toka crtamo tako da parne i neparne otkucaje bacanja označimo praznim i ispunjenim kružićima, što pak odgovara prikazu lijeve i desne ruke koja bacaju loptice. Poznata nam je visina h_i i-tog bacanja, te kružić, koji označava $i-$ti otkucaj te visine, spojimo lukom s kružićem koji je udaljen za h_i.

Dijagrami kojima se stvarni žongleri koriste nisu crtani u mjeri, već se koriste kako bi se prikazala suština trika. Neki žonglerski trikovi mogu imati jednak dijagram toka. Primjer takvog trika je fontana s 4 loptice i klipovi s 4 loptice.

Dijagram toka žonglerskog trika možemo koristiti da bi iščitali i njegov niz (eng. *siteswap*).

Definicija 1.2.6 (Žonglerski niz)**.** *Konačan niz*[1] *nenegativnih cijelih brojeva koji opisuje uzorak žonglerskog trika nazivamo žonglerski niz. Članove žonglerskog niza nabrajamo bez zareza.*

Definicija 1.2.7 (Period bacanja)**.** *Duljina žonglerskog niza je period p žonglerskog dijagrama toka.*

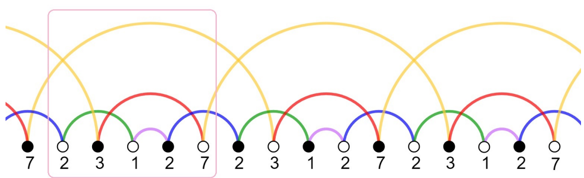
Propozicija 1.2.8. *Svi žonglerski nizovi istog trika perioda p su cikličke permutacije tog niza. Nadalje, postoji najviše p žonglerskih nizova za jedan trik.*

Neka je dan neki žonglerski trik i njegov dijagram toka (Slika 1.1). Žonglerski niz danog trika je 23127 jer se bacanja 2, 3, 1, 2 i 7 periodički ponavaljaju i ne dolazi do preklapanja.

Na Slici 1.1 dijagram toka počinje s bacanjem visine 7. Bacanje visine 7 traje 7 otkucaja, te će pasti na otkucaj koji je 7 kružića udaljen od početnog. To bacanje pada na otkucaj na kojem počinje bacanje visine 3. To bacanje traje 3 otkucaja i pada na otkucaj na kojem započinje bacanje visine 7. To bacanje visine 7 se dalje ponaša isto kao bacanje visine 7 s kojim smo počeli. Periodično se izmjenjuju bacanja visine 7 i 3.

Također, nakon okucaja s kojim počinje bacanja visine 7, je bacanje visine 2. Ono završava 2 otkucaja kasnije na otkucaju s kojim počinje bacanje visine 1. To bacanje završava u sljedećem otkucaju. U tom otkucaju započinje još jedno bacanje visine 2 koje završava u bacanju visine 2 nakon dva otkucaja. To bacanje visine 2 se ponaša isto kao bacanje visine 2 s kojim smo počeli. U ovom slučaju se periodično izmjenjuju bacanja visine 2, 1 i 2.

Ni u jednom otkucaju se nije dogodilo da dva bacanja padaju na isti otkucaj, to jest, nije bilo preklapanja.



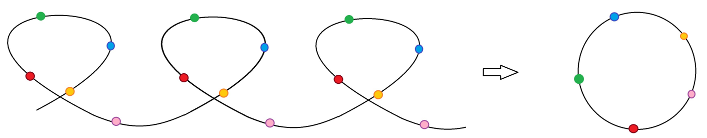
Slika 1.1: Primjer dijagrama toka žonglerskog trika

Dani žonglerski niz je 23127. Žonglerski nizovi su periodični, pa ako zapišemo više članova istog niza dobivamo ...72312723127231.... Iz ovog niza možemo iščitati sljedeće

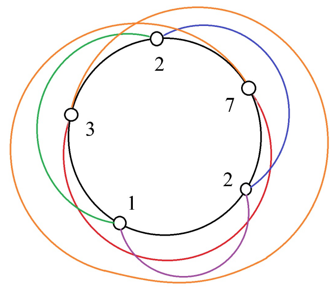
[1]Funkciju $a : \mathbb{N} \to S$ zovemo niz u skupu S. i-ti član niza se označava a_i.

žonglerske nizove: 23127, 723127, 27231, 12723 i 31272. Uočimo da su oni ciklične permutacije početnog niza.

Znamo da je dijagram toka periodičan, te ima neki period p. Tada su bacanja $i, i+p, ..., i+kp$ za neki $k \in \mathbb{N}$ kongruentna[2] modulo p. Dijagram prikazuje bacanja i otkucaje, te položaj otkucaja možemo shvatiti kao da su smješteni na brojevnom pravcu. Tada taj brojevni pravac možemo namotati na kružnicu tako da se sva bacanja koja su ekvivalentna poklapaju (Slika 1.2 i Slika 1.3).



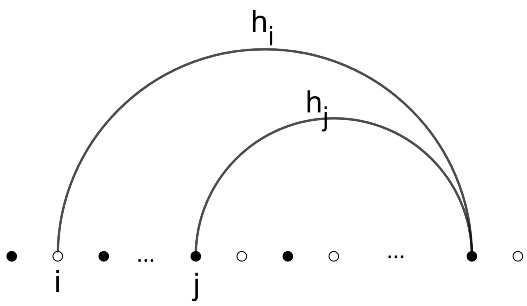
Slika 1.2: Namotavanje pravca na kružnicu



Slika 1.3: Kružnica

Propozicija 1.2.9. *Neka je dan žonglerski trik i njegov dijagram toka. Dana su bacanja i i j takva da $i \neq j$, te njihove visine h_i i h_j. Žonglerski niz se može žonglirati ako i samo ako je dijagram toka ispravan, to jest ako i samo ako vrijedi:*

$$i \neq j \Rightarrow i + h_i \neq j + h_j$$

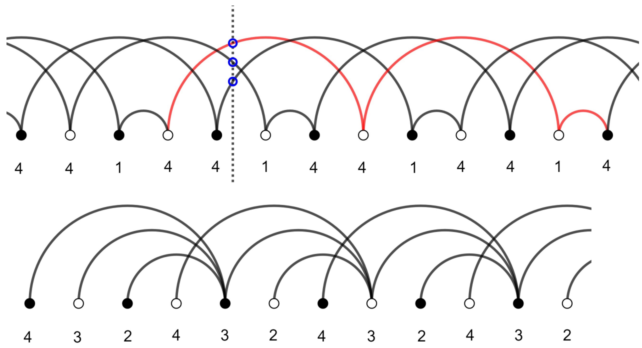


Slika 1.4: Primjer dijagrama toka žonglerskog trika s bacanjima h_i i h_j

[2]Ako cijeli broj $m \neq 0$ dijeli razliku $a - b$, kažemo da je a kongruentan b modulo m i pišemo $a \equiv b \pmod{m}$. U protivnom, kažemo da a nije kongruentan b modulo m i pišmo $a \not\equiv b \pmod{m}$.

Ukoliko bi bacanja h_i i h_j sletjela na isti otkucaj, jedna ruka bi trebala uhvatiti obje loptice, a zbog svojstva jednostavnog žongliranja (J3) to nije moguće.

Iz dijagrama toka žonglerskog trika možemo pročitati koliko loptica nam treba za žongliranje trika. Radimo *vertikalni test*. Povlačimo okomiti pravac između bilo koja dva kružića, te gledamo u koliko točaka taj pravac siječe orbite. Broj orbita označuje broj loptica potreban za žongliranje trika.



Slika 1.5: Primjer dijagrama toka žonglerskog trika

Primjer 1.2.10. *Promotrimo dijagram na Slici 1.5.*

Slika prikazuje dva dijagrama. Ispunjeni i prazni kružići prikazuju ruke kojima se baca. Prvi dijagram je žonglerski trik koji se može izvesti jer svaka ruka rukuje jednom lopticom u svakom otkucaju.

Vidimo da dijagram toka prikazuje 3 orbite koje se ponavljaju. Zbog preglednosti te orbite su označene crvenom bojom. Radimo vertikalni test, to jest povlačimo okomiti pravac između bilo koja dva kružića, te gledamo u koliko točaka taj pravac siječe orbite. Iz toga možemo zaključiti da se ovaj trik žonglira pomoću tri loptice.

Slijedi, niz prikazanog žonglerskog trika je 441*. Uočimo da je period* 3*, te elementi koji se ponavljaju su* 4*,* 4 *i* 1*.*

Drugi dijagram prikazuje žonglerski trik koji se ne može žonglirati jer u jednom od sljedećih otkucaja jedna od ruka prihvaća barem dvije loptice, te dijagram nije ispravan. To je niz 432*. Svi nizovi oblika* $n(n-1)(n-2)\ldots$ *za* $n \geq 3$ *nisu žonglerski nizovi jer žonglerski dijagram toka nije ispravan. Naime, za bacanje visine* 4 *u otkucaju* 1 *i bacanje visine* 3 *u otkucaju* 2 *vrijedi* $1 + 4 = 2 + 3$*. Da bi dijagram toka bio ispravan njihov zbroj ne smije biti jednak.*

1.3 Prikaz žonglerskog trika pomoću funkcije

Otkrivanje trikova u žongliranju je zabavno u praksi, no moramo se pitati postoji li neki egzaktan način na koji bi mogli izračunati koliko loptica nam treba za neki trik i može li to biti beskonačno ili može li se neka kombinacija uopće žonglirati bez da fizički probamo.

Iz definicije jednostavnog žongliranja slijedi da žongler žonglira uvijek i zauvijek. Odaberimo tada neki otkucaj kao nulti otkucaj. Sad svim otkucajima možemo pridružiti cijele brojeve. Svakom bacanju je pridužen $i \in \mathbb{Z}$ i zovemo ga i-to bacanje. Također, znamo da svako bacanje ima svoju visinu h_i, gdje $h_i \in \mathbb{N}_0$. Tada možemo definirati sljedeću funkciju:

Definicija 1.3.1 (Žonglerska funkcija)**.** *Dan je neki žonglerski trik. Dana su bacanja $i, i \in \mathbb{Z}$, te visina $h_i, h_i \in \mathbb{N}_0$, tih bacanja. Neka je za svaki i najviše jedna loptica bačena ili uhvaćena.*

Neka je $j : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ funkcija definirana s $j(i) = h_i$.

Ako je $j_+ : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ bijekcija definirana s $j_+(i) = i + j(i)$, tada tako definiranu funkciju j nazivamo žongerska funckija.

Iz činjenice da je funkcija j_+ bijekcija, slijedi sljedeći korolar.

Korolar 1.3.2. *Niz $(j(i))_{i=0}^{p-1}$ je žonglerski niz perioda p dobiven pomoću žonglerske funkcije j.*

Žonglerske trikove sad znamo precizno opisati pomoću žonglerskih funkcija. One su prirodna generalizacija žonglerskih nizova. Žonglerske nizove konstruiramo pomoću žonglerskih funkcija.

Propozicija 1.3.3. *Neka je $s = (a_k)_{k=0}^{p-1}$ konačan niz nenegativnih cijelih brojeva. Niz s je žonglerski niz perioda p ako i samo ako je funkcija $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ definirana s $f(i) = a_{i \pmod p}$ žonglerska funkcija.*

Kako je $s = (a_k)_{k=0}^{p-1}$ žonglerski niz, tada postoji neka funkcija $j : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ koja određuje članove niza. Konstruirajmo funkciju na sljedeći način: $j(i) = a_{i \pmod p}, \forall i \in \mathbb{Z}$. To je funkcija koju smo tražili. Obrnuto, neka je $f(i) = a_{i \pmod p}$ žonglerska funkcija. Slika funkcije $\mathrm{Im}_f = \{a_i \in \mathbb{N}_0 : a_i = f(i), \text{za } i \in \mathbb{Z}\}$. Kako je funkcija definirana s modulo p, ukupno ima p elementata slike. Tada je niz konstruiran s tom žonglerskom funkcijom žonglerski niz perioda p.

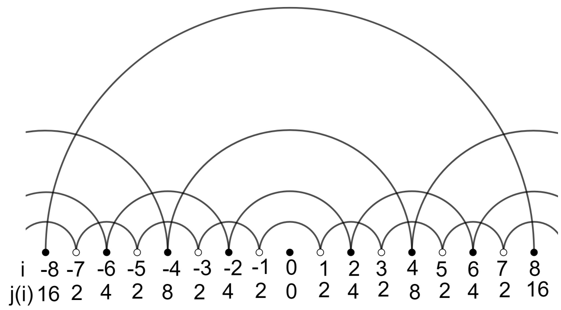
Slijedi primjer funkcije koja nije žonglerska funkcija.

Primjer 1.3.4. *Neka je dana funkcija $j : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}_0$ definirana s*

$$j(i) = \begin{cases} 0 & \text{za } i = 0 \\ 2^{T(i)+1} & \text{inače} \end{cases}$$

gdje je $T(i)$ najviša potencija broja 2 koja djeli i.

Prikazan je dijagram toka na Slici 1.6.



Slika 1.6: Primjer dijagrama toka

Primjetimo da za razliku od dijagrama toka koji su dobiveni pomoću žonglerskih nizova, ovaj dijagram toka nije periodičan, te visine bacanja nisu ograničene. Niz dobiven pomoću ove funkcije nije periodičan. Iz svega navedenoga zaključujemo da niz dobiven ovom funkcijom nije žonglerski niz.

1.4 Osnovni žonglerski trikovi

Postoje tri osnovna žonglerska trika: kaskada s b loptica, fontana s b loptica i pljusak s b loptica.

Kaskada s b loptica (eng. b-ball cascade)

Prvi trik je kaskada s b loptica, gdje je b neparnan prirodan broj. Kaskada se izvodi pomoću neparnog broja loptica, te kaskadu nije moguće izvesti pomoću parnog broja loptica. Primjer kaskade je prikazan na Slici 1.7.

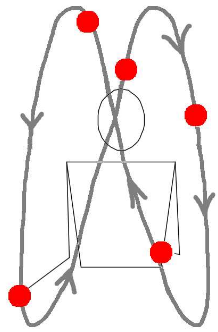
Dijagram toka kaskade s 5 loptica je prikazan na Slici 1.8. Svaki otkucaj ima bacanje visine 5. Da bismo nacrtali dijagram toka moramo spojiti svaki otkucaj s otkucajem koji je udaljen za 5 otkucaja. Zaključujemo da je niz koji opisuje trik, 55555, s periodom 1, te je žonglerski niz 5.

Primjer 1.4.1. *Neka je dan žonglerski trik kaskada s b loptica. Pronađimo žonglersku funkciju.*

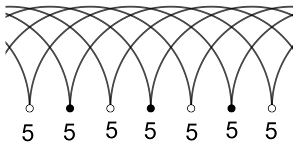
Rješenje: Svako bacanje je iste visine. Visina bacanja mora biti neparan broj. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $b = 2n - 1$ gdje je b broj loptica potreban za žongliranje. Tada je *žonglerska funkcija konstantna, te je definirana s*

$$j(i) = 2n - 1, \forall i \in \mathbb{Z}$$

za neki $n \in \mathbb{N}$.



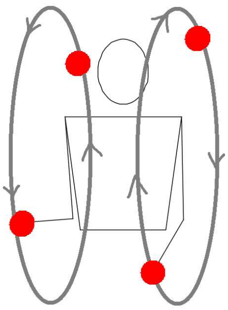
Slika 1.7: Kaskada s 5 loptica



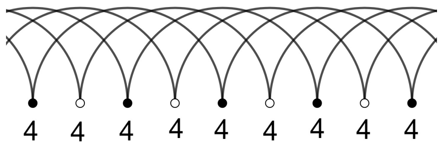
Slika 1.8: Dijagram kasade s 5 loptica

Fontana s b loptica (eng. b-ball fountain)

Sljedeći trik je fontana s b loptica, gdje je b paran prirodan broj. Fontana se izvodi pomoću parnog broja loptica (Slika 1.9), te ju je nemoguće izvesti pomoću neparnog broja loptica.



Slika 1.9: Fontana s 4 loptice



Slika 1.10: Dijagram fontane s 4 loptice

Dijagram toka fontane s 4 loptice je prikazan na Slici 1.10. Svako bacanje je visine 4, te je svaki otkucaj spojen s otkucajem koji je udaljen za 4 otkucaja od početnog. Zaključujemo da je žonglerski niz fontane s 4 loptice 4.

Zanimljivo je primjetiti da se parna bacanja odvijaju na istoj strani na kojoj su bačena, to jest loptica u triku fontana bačena s desnom rukom će biti uhvaćena s desnom rukom.

Kod neparnih bacanja loptica mijenja stranu, to jest loptica bačena u triku kaskada s lijevom rukom će biti uhvaćena s desnom rukom i obrnuto.

Primjer 1.4.2. *Neka je dan žonglerski trik fontana s b loptica. Pronađimo žonglersku funkciju.*

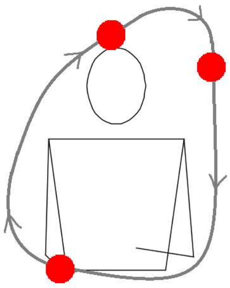
Rješenje: Svako bacanje je iste visine. Visina bacanja mora biti paran broj. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $b = 2n$ gdje je b broj loptica potreban za žongliranje.Tada je žonglerska funkcija konstantna, te je definirana s

$$j(i) = 2n, \forall i \in \mathbb{Z}$$

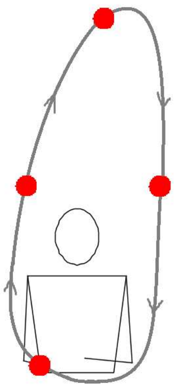
za neki $n \in \mathbb{N}$.

Pljusak s b loptica (eng. b-ball shower)

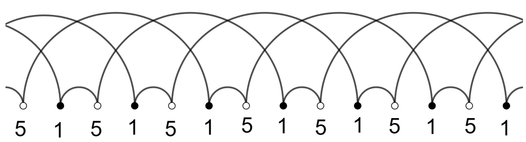
Pljusak s b loptica, gdje je $b \in \mathbb{N}$, je žonglerski trik u kojem žongler rukuje s bilo kojim brojem loptica, te ih baca u krug. Primjer trika je prikazan na Slikama 1.11 i 1.12.



Slika 1.11: Pljusak s 3 loptice

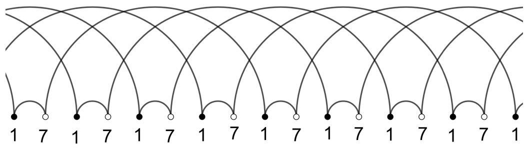


Slika 1.12: Pljusak s 4 loptice



Slika 1.13: Dijagram pljuska s 3 loptice

Dijagram toka pljuska S 3 i 4 loptice je prikazan na Slikama 1.13 i 1.14. Zaključujemo da je žonglerski niz pljuska s 3 loptice 51, dok je žonglerski niz pljuska s 4 loptice 71.



Slika 1.14: Dijagram pljuska s 4 loptice

Primjer 1.4.3. *Neka je dan žonglerski trik pljusak s b loptica. Pronađimo žonglersku funkciju.*

Rješenje: Pljusak s 2 *loptice ima žonglerski niz* 31*, pljusak s* 3 *loptice ima niz* 51*, dok pljusak s* 4 *loptice ima niz* 71*. Zaključujemo da pljusak ima dva bacanja; jedna ruka baca* $(2n-1)$*-bacanje, dok druga baca 1-bacanje.*

Tada je žonglerska funkcija definirana s

$$j(i) = \begin{cases} 2b-1 & \text{za } i \text{ paran, } b \text{ broj loptica} \\ 1 & \text{za } i \text{ neparan} \end{cases}$$

Upoznali smo se s osnovnim žonglerskim trikovima i vidjeli smo njihov prikaz pomoću dijagrama i žonglerskog niza. Dedukcijom smo pronašli žonglerske funkcije koje odgovaraju tim žonglerskim trikovima.

1.5 Prvi teorem o žongliranju

U prijašnjem poglavlju smo naveli da broj loptica potreban za neki trik možemo odrediti tako da prebrojimo orbite u dijagramu toka, no to nije uvijek moguće, pogotovo ako je žonglerski niz dugačak. Slijedi algebarski način za određivanje broja loptica potrebnih za žongliranje trika.

Teorem 1.5.1 (Teorem o prosjeku)**.** *Neka je* $s = (a_k)_{k=0}^{p-1}$ *žonglerski niz perioda* p*. Tada je broj loptica potreban za žongliranje trika jednak aritmetičkoj sredini elemenata niza.*

$$B = \overline{s} = \frac{a_0 + a_1 + ... + a_{p-1}}{p}$$

Dokaz. Aritmetička sredina p elemenata niza je prirodan broj ako je zbroj elemenata djeljiv s p. Tada, da bismo dokazali ovaj teorem, prvo je potrebno pokazati

$$a_0 + a_1 + ... + a_{p-1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Zbrojimo visine svih bacanja. Tada, jer je s žonglerski niz, vrijedi:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + ... + a_{p-1} &= \underbrace{0 + a_0 + 1 + a_1 + 2 + a_2 + ... + p-1 + a_{p-1}}_{\text{različiti otkucaji kad loptice padnu, to jest } \equiv i \pmod{p}} - (1 + 2 + ... + p - 1) \\ &\equiv 0, 1, ..., p-1 - (1, 2, ..., p-1) \pmod{p} \\ &\equiv 0 \pmod{p} \end{aligned}$$

Dokazali smo da je zbroj visina žonglerskog niza kongruentan s 0 modulo p, te tada slijedi da je aritmetička sredina niza s prirodan broj.

Neka je B broj loptica potreban za žongliranje. U jednom periodu imamo p bacanja i to su bacanja visina $a_0, ..., a_{p-1}$, te ćemo lopticu baciti jednom za svako bacanje. Tada, kad zbrojimo sva bacanja, lopticu smo bacili $B \cdot p$ puta.

Tada imamo:

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + ... + a_{p-1} &= B \cdot p \\ B &= \frac{a_0 + a_1 + ... + a_{p-1}}{p} \end{aligned}$$

□

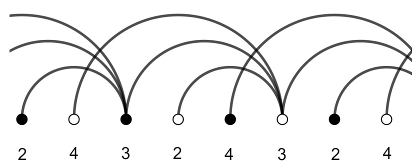
Prirodna posljedica ovog teorema je sljedeći korolar.

Korolar 1.5.2 (Test prosjeka)**.** *Neka je $s = (a_k)_{k=0}^{p-1}$ konačan niz cijelih brojeva. Ako aritmetička sredina danog niza nije prirodan broj, onda niz nije žonglerski niz.*

Ovaj korolar nam daje dobar način da provjerimo je li neki niz žonglerski niz. No, obrat ne vrijedi. Ako je aritmetička sredina nekog niza prirodan broj, to ne mora značiti da je niz žonglerski niz.

Primjer 1.5.3. *Dan je niz 243. Koristeći test prosjeka, provjerit ćemo je li niz žonglerski.*

Rješenje: Njegova aritmetička sredina je 3, no niz nije žonglerski niz kao što možemo vidjeti iz dijagrama na Slici 1.15. Dijagram toka nije ispravan jer više bacanja završava u istom otkucaju.



Slika 1.15: Dijagram toka za niz 243

Teorem 1.5.4 (Permutacijski test). *Neka je $s = (a_k)_{k=0}^{p-1}$ konačan niz nenegativnih cijelih brojeva i neka je $P = \{0, 1, ..., p-1\}$ reducirani sustav ostataka modulo p. Niz s je žonglerski niz perioda p ako i samo ako je funkcija $\phi_s : P \to P$ definirana s:*

$$\phi_s(i) = i + a_i \pmod p$$

bijekcija na skupu P.

Dokaz. Neka je s žonglerski niz. On je periodičan s periodom p. Visina i-tog bacanja je $a_i, \forall i \in P$. Znamo da je $i \equiv i + a_i \pmod p$ zbog periodičnosti žonglerskog niza. Tada slijedi tvrdnja. □

Definicija 1.5.5 (Test-vektor). *Vektor*

$$(\phi_s(0), \phi_s(1), ..., \phi_s(p-1))$$

nazivamo test-vektor funkcije ϕ_s.

Lema 1.5.6. *Funkcija ϕ_s je bijekcija ako i samo ako test-vektor*

$$(\phi_s(0), \phi_s(1), ..., \phi_s(p-1))$$

sadrži sve elemente skupa P.

Primjer 1.5.7. *Dana su dva niza, niz* 47823 *i* 441. *Provjerit ćemo jesu li dani nizovi žonglerski pomoću permutacijskog testa.*

Rješenje: Period prvog niza je 5. *Tada da bismo dobili test-vektor, vektoru čije su komponente članovi niza s_1, $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4)$, dodajemo vektor $(0, 1, 2, 3, 4)$ i gledamo ostatak pri djeljenju s* 5. *Period drugog niza je* 3 *i da bismo dobili drugi test-vektor zbrojit ćemo vektor čije komponente čine članovi niza s_2, (b_0, b_1, b_2), i vektor $(0, 1, 2)$, te gledati ostatak pri djeljenju s* 3.

Nacrtat ćemo tablice.

žonglerski niz s_1	4	7	8	2	3
i	0	1	2	3	4
$\phi_{s_1}(i) = i + a_i \pmod 5$	4	3	0	0	2

žonglerski niz s_2	4	4	1
i	0	1	2
$\phi_{s_2}(i) = i + b_i \pmod 3$	1	2	0

Tablica 1.1: Tablice rješenja za Primjer 1.5.7

Niz 47823 *nije žonglerski niz jer se u test-vektoru dva puta pojavljuje* 0, *dok niz* 441 *jest jer test-vektor sadrži sve elemente reduciranog sustava ostataka modulo* 3.

Poglavlje 2

Novi žonglerski nizovi

U prvom poglavlju, nakon što smo upoznali žonglerske nizove, spomenuli smo da su cikličke permutacije žonglerskih nizova opet žonglerski nizovi. Možemo se pitati postoje li još neke operacije žonglerskih nizova koje transformiraju nizove, ali ne mijenjaju njihovo svojstvo žonglirabilnosti.

2.1 Zamjena mjesta (eng. site swap)

Prva transformacija žonglerskog niza koju ćemo spomenuti je zamjena mjesta. To je operacija kojom mijenjamo otkucaje na koje hvatamo loptice da bi promjenili žonglerski niz trika.

Zamislimo da žongliramo neki trik, te na jednom od otkucaja želimo promjeniti koji trik žongliramo, to jest umjesto bacanja visine h_1, mi želimo baciti lopticu tako da traje h_2 otkucaja. Tada moramo promjeniti način na koji žongliramo, to jest započeti žonglirati novi trik bez da prestanemo žonglirati. Iako se to čini kao težak problem, postoji algoritam koji nam omogućava izračunati kako napraviti promjene u žonglerskom nizu.

Definicija 2.1.1 (Zamjena mjesta). *Neka je $s = (a_k)_{k=0}^{p-1}$ niz $p, p \geq 2$, nenegativnih cijelih brojeva. Neka su $i, j \in \mathbb{N}_0$ takvi da $0 \leq i < j \leq p-1$ i $j - i \leq a_i$. Neka je $s_{i,j}$ niz p nenegativnih cijelih brojeva takav da:*

$$(s_{i,j})_k = \begin{cases} a_k & \text{za } k \neq i, j \\ a_j + (j-i) & \text{za } k = i \\ a_i - (j-i) & \text{za } k = j \end{cases}$$

Transformacija niza s u niz $s_{i,j}$ nazivamo zamjena mjesta otkucaja i i j niza s.

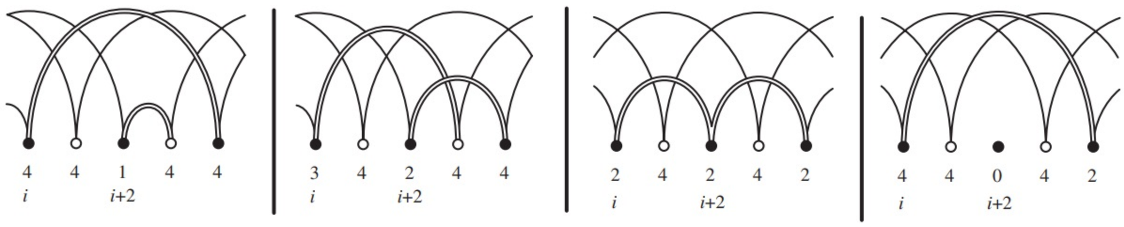
Propozicija 2.1.2. *Za zamjenu mjesta vrijede sljedeća svojstva:*

(Z1) *Niz s je žonglerski niz ako i samo ako je $s_{i,j}$ žonglerski niz.*

(Z2) *Aritmetička sredina niza s je jednaka aritmetičkoj sredini niza $s_{i,j}$.*

(Z3) *Ako je s žonglerski niz, onda je je broj loptica potreban za žongliranje B_s jednak broju loptica $B_{s_{i,j}}$ za žongliranje niza $s_{i,j}$.*

Razmislimo kako zamjena mjesta utječe na niz i promotrimo Sliku 2.1 koja prikazuje dijagram žonglerskog niza, te zamjenu mjesta otkucaja i i $i+2$ u nekim žonglerskim nizovima. Zamjena mjesta mijenja pozicije na koje će loptica pasti, to jest mijenja lokaciju orbita. Orbite loptica se mijenjaju, no ne mijenja se njihov broj. Dijagram toka niza $s_{i,j}$ je ispravan i niz se može žonglirati.



Slika 2.1: Dijagram toka za zamjenu mjesta otkucaja i i $i+2$

Tada možemo zaključiti da ukoliko se niz $s_{i,j}$ može žonglrati, tada se može i niz s.
Izračunajmo aritmetičku sredinu niza $s_{i,j}$ i niza s:

$$\overline{s}_{i,j} = \frac{a_1 + ... + a_{i-1} + a_j \boxed{+(j-i)} + a_{i+1} ... + a_i \boxed{-(j-i)} + ... + a_{p-1}}{p} = \frac{\sum a_{k_{k=0}}^{p-1}}{p} = \overline{s}$$

Pokazali smo da je njihova aritmetička sredina ista. Iz toga također zaključujemo da ćemo u svakom trenutku imati isti broj loptica prema teoremu o prosjeku.

Pogledajmo kako operacija zamjene mjesta utječe na žonglersku funkciju u sljedećem primjeru.

Primjer 2.1.3. *Neka je j žonglerska funkcija. Neka je $I \subset \mathbb{Z}$ skup otkucaja. Odaberimo neki otkucaj $k \in I$ tako da je $j(k) \geq 1$. Odaberimo neki kasniji otkucaj $k+d$ tako da je $d \leq j(k)$. Tada možemo konstruirati novu žonglersku funkciju j' na sljedeći način:*

$$j'(i) = \begin{cases} j(i) & \text{za } i \neq k, k+d \\ j(i+d)+d & \text{za } i = k \\ j(i)-d & \text{za } i = k+d, \forall i \in I \end{cases}$$

Transformacija funkcije j u j' je operacija zamjene mjesta.

Napomena 2.1.4. *Ukoliko iskoristimo operaciju zamjene mjesta na novonastaloj funkciji j' dobit ćemo početnu funkciju j.*

Pogledajmo primjer operacije zamjene mjesta na žonglerskim nizovima.

Primjer 2.1.5. *Dan je žonglerski niz $s = (a_k)_{k=0}^{p-1}$. Raspišimo članove niza i promotrimo jedan od mnogo parova otkucaja koji odgovaraju članovima a_i i a_{i+d}. Tada imamo:*

$$a_0 a_1 ... a_{i-1} \boxed{a_i} a_{i+1} ... a_{i+d-1} \boxed{a_{i+d}} a_{i+d+1} ... a_{p-1}$$

Ako je $0 < d \leq a_i$, onda možemo koristiti zamjenu mjesta da bi transformirali funkciju j kojoj je pridružen žonglerski niz u bilo kojem paru otkucaja a_i i a_{i+d}. Naravno, moramo transformirati sve parove koji dolaze zbog periodičnosti žonglerskog niza.

Novonastali niz je:

$$a_0 a_1 ... a_{i-1} \boxed{a_{i+d} + d} a_{i+1} ... a_{i+d-1} \boxed{a_i - d} a_{i+d+1} ... a_{p-1}$$

Primjer 2.1.6. *Dan je niz* 4413*. Transforirajmo niz koristeći zamjenu mjesta.*

Rješenje: Promotrimo niz 4413 *koji ćemo transformirali u niz* 4233 *zamjenom otkucaja* 2 *i* 3*.*

$a_2 = 4, a_3 = 1, d = j - i = 1$*. Tada je* $a_2' = a_3 + 1 = 1 + 1 = 2$*, te* $a_3' = a_2 - 1 = 4 - 1 = 3$*. Novi niz je:* 4233*.*

$$\boxed{4}\boxed{4}\boxed{1}\boxed{3} \longrightarrow \boxed{4}\boxed{1+1}\boxed{4-1}\boxed{3} \longrightarrow \boxed{4}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{3} \longrightarrow \boxed{4}\boxed{3+1}\boxed{2-1}\boxed{3} \longrightarrow \boxed{4}\boxed{4}\boxed{1}\boxed{3}$$

Niz 4233 *možemo ponovnom zamjenom* 2. *i* 3. *otkucaja transformirati u početni niz.*

$a_2 = 2, a_3 = 3, d = j - i = 1$*. Tada je* $a_2' = a_3 + 1 = 3 + 1 = 4$*, te* $a_3' = a_2 - 1 = 2 - 1 = 1$*. Novi niz je početni niz* 4413*.*

2.2 Ciklički pomak (eng. cyclic shift)

Sljedeća transformacija koju ćemo spomenuti je posljedica činjenice da su žonglerski nizovi dobiveni cikličkim permutacijama opet žonglerski nizovi.

Definicija 2.2.1. *Neka je $s = (a_k)_{k=0}^{p-1}$ niz $p, p \geq 2$ nenegativnih cijelih brojeva. Neka je $s_{\rightarrow} = a_{p-1} a_0 a_1 ... a_{p-2}$ niz. Operaciju koja transformira s u $s_{\rightarrow}$ nazivamo ciklički pomak.*

Propozicija 2.2.2. *Za ciklički pomak vrijede sljedeća svojstva:*

(C1) *Niz s je žonglerski niz ako i samo ako je $s_{\rightarrow}$ žonglerski niz.*

(C2) *Aritmetička sredina niza s je jednaka aritmetičkoj sredini niza* $s_{\rightarrow}$.

(C3) *Ako je s žonglerski niz, onda je je broj loptica potreban za žongliranje* B_s *jednak broju loptica* $B_{s_{\rightarrow}}$ *za žongliranje niza* $s_{\rightarrow}$.

Zbog periodičnosti žonglerskih nizova vrijede svojstva (C1), (C2) i (C3).

2.3 Algoritam poravnanja žonglerskog niza

Sljedeći algoritam je otkrio matematičar Allen Knutson. Algoritam uzima neki niz

$$s = (a_k)_{k=0}^{p-1}$$

koji se sastoji od $p \geq 1$ nenegativnih cijelih brojeva. Niz s se transformira u konstantni niz perioda p.

Slijedi algoritam za poravnanje:

1. Ako je s konstantan niz, ispiši s. Inače;

2. Koristi ciklički pomak na elementima od s tako da element maksimalne visine e bude na otkucaju 0 i element visine f, $f < e$, bude na otkucaju 0. Ako se e i f razlikuju za 1, ispiši novi niz. Inače;

3. Koristi zamjenu mjesta na otkucajima 0 i 1. Nazovi dobiveni niz s i vrati se na korak 1.

Kad algoritam koristi zamjenu mjesta otkucaja, smanjuje visinu bacanja otkucaja u trenutnom nizu. Iz toga slijedi da će algoritam završiti u konačno mnogo koraka. Iz svojstva (Z1) i (C1) slijedi da niz koji dobijemo je žonglerski niz ako i samo ako je početni niz s žonglerski niz. Iz toga slijedi da ukoliko je s žonglerski niz, algoritam nikad neće stati na drugom koraku jer će se visine e i f sigurno razlikovati za barem 2. Niz ne može biti žonglerski i imati razliku 1 (Slika 1.5).

Svojstva (Z2) i (C2) osiguravaju da će izlazni niz s biti konstantan niz b s periodom p ukoliko je aritmetička sredina ulaznog niza s jednaka b i njegov period je p. Ukoliko niz s nije žonglerski niz, algoritam će stati na drugom koraku i izlazni niz će biti oblika $e(e-1)$....

Kako je svaka operacija zamjene mjesta otkucaja i cikličkog pomaka reverzibilna, algoritam poravnanja ima jako važnu posljedicu.

Teorem 2.3.1. *Neka je dan konstantan niz b perioda p. Niz b se može transformirati u bilo koji žonglerskih niz perioda p koji se žonglira s b loptica koristeći samo operacije zamjene mjesta orbita i cikličke pomake. Obratno, ako imamo neki žonglerski niz s perioda p, on se* *može transformirati u konstantan niz b perioda p koristeći samo operacije zamjene mjesta orbita i cikličke pomake.*

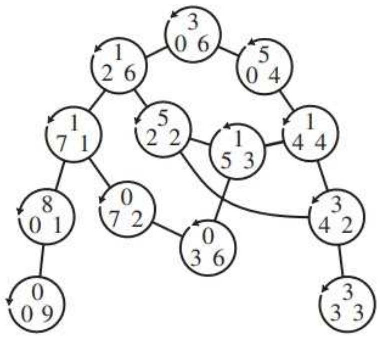
Primjer 2.3.2. *Koristeći algoritam poravnanja, transformirajmo niz* 67741 *u konstantan niz.*

Rješenje: Krenimo od niza 67741 *i koristimo operacije cikličkih pomaka i zamjene mjesta otkucaja.*

$$
\begin{gathered}
67741 \xrightarrow{\text{cikl. pom.}} 16774 \xrightarrow{\text{cikl. pom.}} 41677 \xrightarrow{\text{cikl. pom.}} 74167 \xrightarrow{\text{zamj. mj.}} 56167 \xrightarrow{\text{cikl. pom.}} \\
75616 \xrightarrow{\text{zamj. mj.}} 66616 \xrightarrow{\text{cikl. pom.}} 66661 \xrightarrow{\text{cikl. pom.}} 16666 \xrightarrow{\text{cikl. pom.}} 61666 \xrightarrow{\text{zamj. mj.}} \\
25666 \xrightarrow{\text{cikl. pom.}} 56662 \xrightarrow{\text{cikl. pom.}} 66625 \xrightarrow{\text{cikl. pom.}} 66256 \xrightarrow{\text{cikl. pom.}} 62566 \xrightarrow{\text{zamj. mj.}} \\
35566 \xrightarrow{\text{cikl. pom.}} 55663 \xrightarrow{\text{cikl. pom.}} 56635 \xrightarrow{\text{cikl. pom.}} 66355 \xrightarrow{\text{cikl. pom.}} 63556 \xrightarrow{\text{zamj. mj.}} \\
45556 \xrightarrow{\text{cikl. pom.}} 55564 \xrightarrow{\text{cikl. pom.}} 55645 \xrightarrow{\text{cikl. pom.}} 56455 \xrightarrow{\text{cikl. pom.}} 64555 \xrightarrow{\text{zamj. mj.}} 55555
\end{gathered}
$$

Primjer 2.3.3. *Koristeći algoritam poravnanja, transformirajmo niz* 514 *u konstantan niz.*
Rješenje: $514 \xrightarrow{\text{zamj. mj.}} 244 \xrightarrow{\text{cikl. pom.}} 424 \xrightarrow{\text{zamj. mj.}} 334 \xrightarrow{\text{cikl. pom.}} 433$
Niz 433 *nije žonglerski jer bacanja* 4 *i* 3 *padaju na isti otkucaj.*

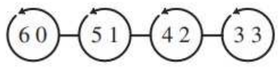
Ukupno ima 37 žonglerskih nizova koji se mogu dobiti algoritmom poravnanja niza trikova s 3 loptice perioda 3 i njih 13 do na ciklički pomak. Slike 2.2 i 2.3 prikazuju grafove[1] zamjene mjesta orbita za trikove s 3 loptice perioda 2 i 3.



Slika 2.2: Graf zamjene mjesta orbita

U grafu su nizovi koji se razlikuju samo za ciklički pomak spojeni u jedan vrh. Kako bi pretvorili jedan od vrhova u žonglerski niz, odaberemo jedan vrh grafa i pratimo smjer

[1]Jednostavni graf G je objekt u teoriji grafova koji se sastoji od nepraznog konačnog skupa skupa $V(G)$ čije elemente zovemo vrhovi i konačnog skupa $B(G)$ različitih parova elemenata $V(G)$ koje zovemo bridovi.



Slika 2.3: Graf zamjene mjesta orbita

strelice u pozitivnom smjeru. Dva niza u vrhovima su povezani bridovima ukoliko se jedan može dobiti od drugoga koristeći zamjenu mjesta otkucaja za susjedne otkucaje.

Na primjer, iz žonglerskog niza 333 zamjenom mjesta 1. i 2. otkucaja dobivamo niz 342. Tada ponovom zamjenom mjesta 1. i 2. otkucaja dobivamo niz 522. Nakon zamjene mjesta 1. i 3. otkucaja dobivamo niz 126, zamjenom mjesta 2. i 3. otkucaja dobivamo niz 171. Zamjenom mjesta 1. i 2. otkucaja dobivamo niz 801. Na nizu 801 koristimo ciklički pomak da bismo dobili niz 081, te tada možemo koristiti zamjenu mjesta 2. i 3. otkucaja da bi dobili zadnji niz 009.

Za svaki žonglerski niz možemo nacrtati graf zamjene mjesta orbita. Za $p = 1$ taj graf ima jedan vrh. Za $p > 1$ graf ima dva vrha. Za $p \geq 2$ grafovi imaju dvije glave, to jest vrhove koji su konstantni b niz i niz $b00...0$.

Lema 2.3.4. *Neka je dan žonglerski niz $b00...0$ perioda p za $b \in \mathbb{N}$. Algoritam poravnanja će transformirati niz u konstantan b niz u $b(p-1)$ koraka.*

2.4 Vertikalni pomak (eng. vertical shift)

Sljedeća operacija na žonglerskim nizovima je operacija koja mijenja svojstva niza.

Definicija 2.4.1 (Vertikalni pomak)**.** *Neka je $s = (a_k)_{k=0}^{p-1}$ niz p nenegativnih cijelih brojeva. Neka je $d \in \mathbb{Z}, d \geq -\min\{a_0, a_1, ..., a_{p-1}\}$. Neka je $s' = (a_k + d)_{k=0}^{p-1}$. Operaciju koja transformira niz s u s' nazivamo vertikalni pomak.*

Primjetimo, ako je niz s žonglerski niz, onda je i niz s' žonglerski niz.

Primjer 2.4.2. *Neka je dan žonglerski niz 423. Konstruirajmo novi niz koristeći vertikalni pomak.*

Rješenje: Koristeći vertikalni pomak možemo dobiti novi niz 312 tako da od svakog člana oduzmemo 1 ili niz 645 tako da svakom članu dodamo 2.

Do sad smo naveli operacije na žonglerskim nizovima koje nisu mjenjale broj loptica potrebnih za žongliranje trika koji niz opisuje, no vertikalni pomak nije jedna od njih.

Propozicija 2.4.3. *Neka je $s = (a_k)_{k=0}^{p-1}$ žonglerski niz perioda p, te s' žonglersk niz koji smo dobili pomoću vertikalnog pomaka za $d \in \mathbb{Z}, d \geq -\min\{a_0, a_1, ..., a_{p-1}\}$. Ako je broj loptica* *potreban za žongliranje niza s jednak B, tada je broj loptica potreban za žongliranje niza s' jednak $B + d$.*

Neka je broj loptica B aritmetička sredina niza s.

$$\overline{s'} = \frac{a_0 + d + a_1 + d + ... + a_i + d + ... + a_{p-1} + d}{p} = \overline{s} + \frac{d \cdot p}{p} = B + d$$

2.5 Dodavanje perioda

Postoji poseban slučaj vertikalnog pomaka koji djeluje na samo jedan otkucaj.

Propozicija 2.5.1. *Neka je $s = (a_k)_{k=0}^{p-1}$ žonglerski niz perioda p. Konstruirajmo niz s'' tako da nizu s zamijenimo barem jedan član. Za svaku promjenu a_i u $a_i + kp$ gdje je $k \in \mathbb{Z}$ vrijedi da se broj loptica B promjenio za k.*

Broj loptica B je aritmetička sredina niza s. Tada svaka promjena visine otkucaja a_i za $k \cdot p$ mijenja aritmetičku sredinu za k.

$$\overline{s''} = \frac{a_0 + a_1 + ... + a_i + kp + ... + a_{p-1}}{p} = \overline{s} + \frac{k \cdot p}{p} = B + k$$

Primjer 2.5.2. *Dan je niz* 441. *Izračunajmo broj loptica potreban za žongliranje trika nakon dodavanja perioda.*

Rješenje: Potrebno nam je 3 *loptice za žongliranje tog trika jer je aritmetička sredina niza* 3. *Ako dodamo 3 jednom od otkucaja, na primjer prvom, imat ćemo niz* 741. *Njegova aritmetička sredina je* 4, *te nam trebaju* 4 *loptice za žonglirati. Ako ipak oduzmemo* 3 *jednom od otkucaja, na primjer drugom, dobit ćemo niz* 411, *te je njegova aritmetička sredina* 2 *i trebaju nam* 2 *loptice za žongliranje.*

2.6 Obrat teorema o prosjeku

Jedan od važnih teorema je Teorem o prosjeku (Teorem 1.5.1) koji nam daje broj loptica B potreban za žongliranje nekog niza koji smo spomenuli u prethodnom poglavlju. Sada ćemo iskazati i dokazati njegov obrat. Obrat su dokazali matematičari u internetskoj grupi *rec.juggling*. Zanimljivo je da je rec.juggling jedan od nastarijih aktivnih internetskih foruma.

Teorem 2.6.1 (Obrat teorema o prosjeku)**.** *Neka je $s = (a_k)_{k=0}^{p-1}$ konačan niz nenegativnih cijelih brojeva čija je aritmetička sredina prirodan broj. Tada postoji permutacija tog niza koja je žonglerski niz.*

Dokaz obrata teorema o prosjeku se zasniva na sljedećoj lemi.

Lema 2.6.2. *Neka je dan konačan niz $s = (a_k)_{k=0}^{p-1}$ od p nenegativnih cijelih brojeva čija je aritmetička sredina prirodan broj, te koji se može presložiti u žonglerski niz. Konstruirajmo novi niz na sljedeći način; zamijenimo bilo koja dva elementa niza tako da njihova suma modulo p ostaje jednaka. Tada se i novi niz može presložiti u žonglerski niz.*

Lema 2.6.2 implicira obrat Teorema o prosjeku zato što zamjena dva elemenata niza na ovaj način ne mijenja njegovu aritmetičku sredinu.

Neka je dan konačan niz $s = (a_k)_{k=0}^{p-1}$ p nenegativnih cijelih brojeva čija je aritmetička sredina prirodan broj. Tada slijedi $\sum_{k=0}^{p-1} a_k \equiv 0 \pmod{p}$.

Pokazat ćemo da lema vrijedi za neki žonglerski niz fiksiranog perioda p. Dokaz je konstruktivni, pa ćemo koristiti žonglerski niz 53053630 perioda 8 kao primjer.

Napravimo tablicu na sljedeći način: prvi redak su prirodni brojevi od 0 do p, drugi redak su bacanja a_0 do a_p, te treći redak je njihova suma modulo p.

Tablica za žonglerski niz 53053630 perioda 8 je dana niže (Tablica 2.1).

k	0	1	2	3	4	5	6	7
a_k	5	3	$\boxed{0}$	5	$\boxed{2}$	6	3	0
$k + a_k \pmod{8}$	5	4	2	0	6	3	1	7

Tablica 2.1: Početna tablica

Algoritam se provodi po stupcima. Prvi korak je odabrati neka dva člana niza i njih zamijeniti s prirodnim brojevima koji će u zbroju biti kongruentna s istim brojem modulo p. Nove članove zapisujemo sa strane i ispod njih zapisujemo i elemente iz redtka $k + a_k$.

Zamijenit ćemo elemente 0 i 2 u drugom redtku. Primjetimo da je

$$0 + 2 \equiv 2 \pmod{8}.$$

Tražimo zbroj dva prirodna broja koja će biti kongruentna s 2 modulo 8. To su 1 i 1. Sljedeća tablica (Tablica 2.2) prikazuje elemente koje želimo zamijeniti napisane sa strane.

k	0	1	$\boxed{2}$	3	$\boxed{4}$	5	6	7		
a_k	5	3	-	5	-	6	3	0	$\boxed{1}$	$\boxed{1}$
$k + a_k \pmod{8}$	5	4	-	0	-	3	1	7	$\boxed{2}$	$\boxed{6}$

Tablica 2.2: Postupak transformacije niza

Pogledajmo zaokružene elemente. Elemente prvog retka označimo s x_i, elemente drugog retka s y_i, te elemente trećeg retka s z_i, za indeks $i \in \mathbb{N}$.

Tada je $x_1 = 2, x_2 = 4, y_1 = 1, y_2 = 1, z_1 = 2, z_2 = 6$.

Također, mora vrijediti sljedeća jednakost,

$$x_1 + x_2 + y_1 + y_2 \equiv z_1 + z_2 \pmod p \tag{2.1}$$

Jednakost u primjeru vrijedi jer je $2 + 4 + 1 + 1 = 8$, što je kongruentno s $2 + 6 = 8$ modulo 8.

Sljedeći korak je provjeriti je li jedna od suma $x_1 + y_1$ i $x_1 + y_2$ kongruentna sa z_1 ili z_2 modulo p. U slučaju da je na primjer $x_1 + y_2 \equiv z_1 \pmod p$ tada iz izraza (2.1) slijedi $x_2 + y_1 \equiv z_2 \pmod p$. Tada novi žonglerski niz dobivamo zamjenom mjesta elementa x_1 s y_2, te x_2 s y_1. Analogno za ostale slučajeve.

U slučaju da prvom promjenom nismo uspjeli napraviti novi niz, sljedeći korak je napraviti novu tablicu (Tablica 2.3), gdje je $w \equiv z_1 - y_1 \pmod p$ indeks elementa kojeg mjenjamo.

$$\begin{array}{ccccc} \dots & w & \dots & & \\ \dots & y3 & \dots & y1 & y2 \\ \dots & z3 & \dots & z1 & z2 \end{array} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{array}{ccccc} \dots & w & \dots & & \\ \dots & y1 & \dots & y3 & y2 \\ \dots & z1 & \dots & z2 & z3 \end{array}$$

Tablica 2.3: Tablica transformacije niza

Primjetimo da je $w + y_1 \equiv z_1 \pmod p$.

Također,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + y_3 + y_2 &\equiv x_1 + x_2 + y_1 + y_2 + y_3 - y_1 \pmod p \\ &\equiv z_1 + z_2 + y_3 - y_1 \pmod p \\ &\equiv z_2 + y_3 + z_1 - y_1 \pmod p \\ &\equiv z_2 + y_3 + w \pmod p \\ &\equiv z_2 + y_3 + z_3 - y_3 \pmod p \\ &\equiv z_2 + z_3 \pmod p \end{aligned}$$

Tada slijedi da je izraz 2.1 točan i za novu tablicu.

U našem primjeru, sume ne odgovaraju, te moramo provoditi algoritam dalje. Tada imamo,

$$w \equiv 2 - 1 \pmod 8 \equiv 1 \pmod 8,$$

te je nova tablica prikazana ispod (Tablica 2.4). Zamjenili smo elemente 3 i 6 sa starim elementima 1 i 2.

Redefiniramo oznake $y_1 = 3, y_2 = 1, z_1 = 6, z_2 = 4$. x_1, x_2 i y_2 se nisu mijenjali.

k	0	$\boxed{1}$	2	3	4	5	6	7		
a_k	5	$\boxed{1}$	-	5	-	6	3	0	$\boxed{3}$	$\boxed{1}$
$k + a_k \pmod 8$	5	$\boxed{2}$	-	0	-	3	1	7	$\boxed{6}$	$\boxed{4}$

Tablica 2.4: Tablica transformacije niza

Ponavljamo postupak. Provjeravamo jesu li sume jednake, ako jesu imamo novi niz, ako nisu, onda računamo novi w. Postupak se završava u konačno mnogo koraka jer je svaki w različit, to jest poprima jednu od $p - 1$ vrijednosti.

Nastavimo s primjerom; računamo novi w, te je,

$$w \equiv z_1 - y_1 \pmod 8 \equiv 6 - 3 \pmod 8 \equiv 3 \pmod 8$$

Radimo novu tablicu (Tablica 2.5)

k	0	1	2	$\boxed{3}$	4	5	6	7		
a_k	5	1	-	$\boxed{3}$	-	6	3	0	$\boxed{5}$	$\boxed{1}$
$k + a_k \pmod 8$	5	2	-	$\boxed{6}$	-	3	1	7	$\boxed{4}$	$\boxed{0}$

Tablica 2.5: Tablica transformacije niza

Ponovo redefiniramo oznake, imamo $w \equiv 4 - 5 \pmod 8 \equiv 7 \pmod 8$, te radimo novu tablicu (Tablica 2.6)

k	0	1	2	3	4	5	6	$\boxed{7}$		
a_k	5	1	-	3	-	6	3	$\boxed{5}$	$\boxed{0}$	$\boxed{1}$
$k + a_k \pmod 8$	5	2	-	6	-	3	1	$\boxed{4}$	$\boxed{0}$	$\boxed{7}$

Tablica 2.6: Tablica transformacije niza

Ponovo redefiniramo oznake, imamo $w \equiv 0 \pmod 8$, te radimo novu tablicu (Tablica 2.7)

k	$\boxed{0}$	1	2	3	4	5	6	7		
a_k	$\boxed{0}$	1	-	3	-	6	3	5	$\boxed{5}$	$\boxed{1}$
$k + a_k \pmod 8$	$\boxed{0}$	2	-	6	-	3	1	4	$\boxed{7}$	$\boxed{5}$

Tablica 2.7: Tablica transformacije niza

Ponovo redefiniramo oznake, te napokon imamo;

$$x_1 + y_1 \equiv 2 + 5 \pmod 8 \equiv 7 \pmod 8 = z_1$$

$$x_2 + y_2 \equiv 4 + 1 \pmod 8 \equiv 5 \pmod 8 = z_2$$

Da bi dobili traženi niz moramo zamijeniti mjesta elemenata, to jest $y_1 = 5$ pomaknuti u drugi stupac, te $y_2 = 1$ u četvrti stupac. Novi žonglerski niz čitamo iz drugog redka zadnje tablice. To je niz 01531635.

2.7 Raštrkani žonglerski nizovi

Obrat teorema o prosjeku povlači da se svaki niz može transformirati u žonglerski niz ako mu je aritmetička sredina prirodan broj. No, također postoje žonglerski nizovi koji ostaju žonglerski bez obzira na operacije nad njegovim elementima.

Definicija 2.7.1 (Raštrkani žonglerski niz)**.** *Žonglerski niz oblika* $(a_k \cdot p + c)_{k=0}^{p-1}$*, za* $c \in \mathbb{N}$ *se naziva raštrkani žonglerski niz.*

Propozicija 2.7.2. *Žonglerski niz s perioda p je raštrkani žonglerski niz ako i samo ako ga možemo transformirati u konstantni niz b.*

Raštrkane žonglerske nizove je lako karakterizirati pomoću konstantnih b nizova perioda p. Koristeći permutacijski test, uvjerit ćemo se da elementima niza možemo dodavati višekratnike broja p i da će novi niz također biti žonglerski.

Obratno, ako imamo neki žonglerski niz, njega možemo svesti na konstantni žonglerski niz. Tada, ukoliko nismo dobili konstatni niz b, onda postoje dva elementa tog niza a i b takvi da $a > b$. Raštrkajmo niz tako da je a 0-to bacanje, a b $(a - b)$-to bacanje. Tada pomoću permutacijskog testa dolazimo do sljedeće kontradikcije: $a + 0 \equiv b + (a - b) \pmod p$. Tada slijedi da ne mogu postojati takvi a i b, te je naš niz sigurno konstantni b niz.

Primjer 2.7.3. *Neka je dan žonglerski niz* 471*. Pokažimo da su nizovi* 147*,* 714*,* 741*,* 174 *i* 417 *također žonglerski.*

Rješenje: Prikažimo rješenje u tablici radi preglednosti. Provjeravamo jesu li nizovi žonglerski pomoću permutacijskog testa. Test-vektor je ispravan, te možemo zaključiti da su svi nizovi žongleski.

niz	(1,4,7)	(7,1,4)	(7,4,1)	(1,7,4)	(4,1,7)
	(0,1,2)	(0,1,2)	(0,1,2)	(0,1,2)	(0,1,2)
test-vektor	(1,2,0)	(1,2,0)	(1,2,0)	(1,2,0)	(1,2,0)

Tablica 2.8: Tablica rješenja za Primjer 2.7.3

Napomena 2.7.4. *Svaki niz perioda* 1 *ili* 2 *je raštrkani niz. Postoje nizovi koji nisu raštrkani perioda* $p > 2$.

2.8 Magični žonglerski nizovi

Magični kvadrat dimenzije n je kvardat ispunjenim različitim cijelim brojevima iz skupa $\{1, 2, ..., n^2\}$ tako da svaki stupac, red ili dijagonala pri zbrajanju daju isti iznos. Na sličan način, možemo definirati i magični žonglerski niz.

Definicija 2.8.1. *Magični žonglerski niz perioda p je žonglerski niz koji sadrži svaki broj od 0 do* $p - 1$ *samo jednom.*

Propozicija 2.8.2. *Neka su p i q prirodni brojevi takvi da je p neparan broj, $q > 1$ i p je relativno prost s q i $q - 1$. Tada, niz oblika* $((q-1)k \pmod p))_{k=0}^{p-1}$ *je magični žonglerski niz.*

Aritmetička sredina niza oblika $((q-1)k \pmod p))_{k=0}^{p-1}$ je:

$$\frac{\sum_{k=0}^{p-1} k}{p} = \frac{p-1}{2}$$

Očito, p je neparan broj. Tada po obratu teorema o prosjeku slijedi da je niz žonglerski ako je neka njegova permutacija žonglerski niz. Primjetimo da je svaka ciklička permutacija magičnog niza je također magični niz.

Primjer 2.8.3. *Neka je* $q = 2$ *i* $p = 1, 3, 5, 7$. *U Tablici 2.9 su prikazani svi magični nizovi do na ciklički pomak.*

Rješenje:

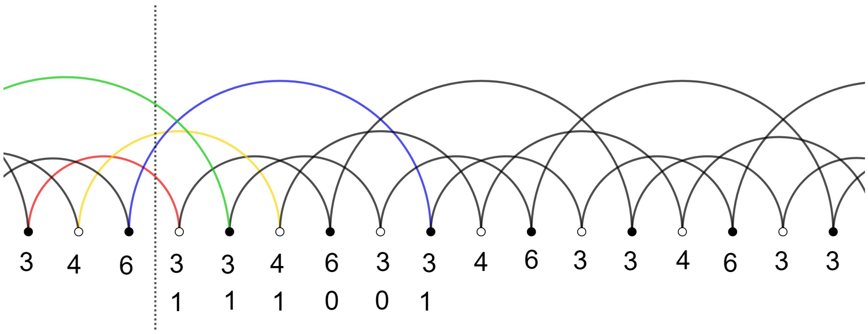
broj loptica	0	1	2	3			
žonglerski niz	0	012		0123456	0246135	0362514	0461253
			01234	0135264	0245163	0413562	0512463
			02413	0142635	0263145	0415263	0526134
			03142	0236415	0315246	0416235	0531642
				0241536	0346152	0425613	

Tablica 2.9: Magični žonglerski nizovi do perioda 7

2.9 Grafovi žonglerskih stanja

Žongliranje ima ritam, to jest loptice bacamo i hvatamo u nekom konstantnom ritmu. Možemo se zapitati kako zapisati taj ritam. Naravno, to će biti s nulama i jedinicama.

Neka nam je dan dijagram toka žonglerskog trika na Slici 2.4. Prikazani su neki otkucaji i bacanja nekih visina.



Slika 2.4: Dijagram toka za niz 3463

Postavljamo si pitanje, što se događa u točno određenom otkucaju? Ono što možemo pročitati iz dijagrama toka je sljedeće; na primjer, odaberimo otkucaj koji nas zanima i u tom otkucaju prestanemo žonglirati. Neka je to nakon trećeg otkucaja visine 6. U tom trenutku 4 loptice su u zraku jer pravac vertikalnog testa siječe 4 orbite. Sad se pitamo, što će se dogoditi u sljedećem otkucaju?

Naravno, 4 loptice koje su u zraku moraju sletjeti. Na prvom sljedećem otkucaju će sletjeti jedna loptica. Na otkucaju poslije još jedna. Tri otkucaja kasnije će sletjeti još jedna, no na četvrtom otkucaju nakon prestanka žongliranja neće sletjeti niti jedna loptica koja je bila u zraku kad smo stali žonglirati. Zadnja loptica neće sletjeti ni na otkucaju nakon toga. Zadnja loptica će sletjeti tek na šestom otkucaju nakon prestanka žongliranja.

Stanje loptica u određenom otkucaju zabilježavamo pomoću niza nula i jedinica. U našem primjeru to je 111001. Općenito, stanje se zabilježava kao niz nula i jedinica gdje je 1 na i-to mjestu ako će loptica sletjeti u i otkucaja, a 0 ako neće.

Definicija 2.9.1 (Žonglersko stanje)**.** *Neka nam je dan dijagram toka žonglerskog trika. Praćenje otkucaja kada loptice trebaju sletjeti nazivamo žonglersko stanje. Žonglersko stanje b loptica visine h kada je $0 \leq b \leq h$ i $h \geq 1$ je niz b jedinica i h nula.*

Iz početnog primjera možemo iščitati više od jednog žonglerskih stanja. To su stanja: 111001, 11101, 1111 i 1111. Kako je žonglerski dijagram toka periodičan, žonglerska stanja možemo zamisliti kao da su na pokretnoj traci i stalno se vrte u krug.

Jedan žonglerski niz ima više stanja koja su povezana jer možemo stati žonglirati na bilo kojem otkucaju. Možemo zaključiti da iz jednog žongleskog stanja možemo preći u drugo.

Propozicija 2.9.2. *Neka su dana dva žonglerska stanja S_1 i S_2. Tada:*

(S1) *Iz stanja S_1 možemo preći u stanje S_2 ako i samo ako je za svaki $i \geq 2$ i-ti unos od S_1 jednak 1 i $i-1$-i unos od S_2 jednak 1.*

(S2) *Iz stanja S_1 i S_2 možemo odrediti visinu bacanja, ako je prvi unos stanja $S_1 = 0$ ili ako je i-ti unos stanja $S_2 = 1$ i $i+1$-i unos stanja $S_1 = 0$ za neki i.*

Primjer 2.9.3. *Neka je $S_1 = 110010111$ i $S_2 = 10010111$. Odredimo bacanje.*
Rješenje:

i	1	2	3	4	5	6	7
S_1	1	1	0	0	1	0	1
		$\swarrow$			$\swarrow$		$\swarrow$
S_2	1	$\boxed{1}$	0	1	0	1	

Tablica 2.10: Tablica rješenja za Primjer 2.9.3

(Tablica 2.10.) Stanje S_2 dobijemo tako da stanje S_1 pomaknemo za jedan unos kao na pokretnoj traci. Sve unose jedinica nasljeđujemo. Nakon što smo odredili koje jedinice smo naslijedili, pogledamo koji unos ne odgovara prethodnom. Unos u drugom otkucaju nismo naslijedili, te iz toga zaključujemo da je loptica pala na drugi otkucaj, te je promjena stanja S_1 u S_2 bacanje visine 2.

Primjer 2.9.4. *Dana su povezana žonglerska stanja. Pronađimo žonglerski niz kojeg opisuju.*

Rješenje: (Tablica 2.11.) Promotrimo stanja $S_1, ..., S_6$ i koje promjene su se dogodile u nizu. Promjena S_1 u S_2 ima novi unos jedinice na sedmom otkucaju, pa slijedi da je to bacanje visine 7. Promjena S_2 u S_3 ima novi unos jedinice na petom otkucaju, pa slijedi da je to bacanje visine 5. Promjena S_3 u S_4 ima novi unos jedinice na sedmom otkucaju, pa slijedi da je to bacanje visine 7. Promjena S_4 u S_5 ima novi unos jedinice na osmom otkucaju, pa slijedi da je to bacanje visine 8. Promjena S_5 u S_6 nema novih unosa jedinica, pa slijedi da je to bacanje visine 0. To smo također mogli zaključiti jer S_5 započinje nulom. Promjena S_6 u S_1 ima novi unos jedinice na trećem otkucaju, pa slijedi da je to bacanje visine 3. Tada slijedi da je žonglerski niz 7573803.

Propozicija 2.9.5. *Neka je dano neko žonglersko stanje za neki trik maksimalne visine bacanja h koji se žonglira s b loptica. Neka je $0 \leq b \leq h$ i $h \geq 1$. Ako je prvi unos jednak 0,*

i	1	2	3	4	5	6	7	8
S_1	1	1	1	1	0	1		
S_2	1	1	1	0	1	0	$\boxed{1}$	
S_3	1	1	0	1	$\boxed{1}$	1		
S_4	1	0	1	1	1	0	$\boxed{1}$	
S_5	$\boxed{0}$	1	1	1	0	1	0	$\boxed{1}$
S_6	1	1	1	0	1	1	1	
(S_1)	(1)	(1)	$\boxed{(1)}$	(1)	(0)	(1)		

Tablica 2.11: Tablica rješenja za Primjer 2.9.4

tada iz tog stanja možemo preći u samo jedno stanje, te je tada to bacanje, bacanje visine 0*. Ako je prvi unos jednak* 1*, tada iz stog stanja možemo preći u $h - b$ stanja.*

Žonglerska stanja možemo bolje predočiti pomoću usmjerenih grafova[2].

Definicija 2.9.6 (Graf žonglerskih stanja)**.** *Graf kojem su vrhovi moguća žonglerska stanja, te bridovi bacanja između neka dva stanja nazivamo graf žonglerskih stanja.*

Broj vrhova u grafu je broj loptica potrebnih za žongliranje trika koji je određen stanjima.

Propozicija 2.9.7. *Neka je dan žonglerski niz s b loptica maksimalne visine h. Neka je $0 \leq b \leq h$ i $h \geq 1$. Dani žonglerski niz odgovara zatvorenoj šetnji[3] u usmjerenom grafu ako sadrži barem jedan vrh i barem jedan brid.*

Kako u grafu možemo imati neograničen broj loptica i bacanja neograničene visine, ukoliko ograničimo broj loptica i visinu bacanja, broj vrhova možemo izračunati pomoću formule.

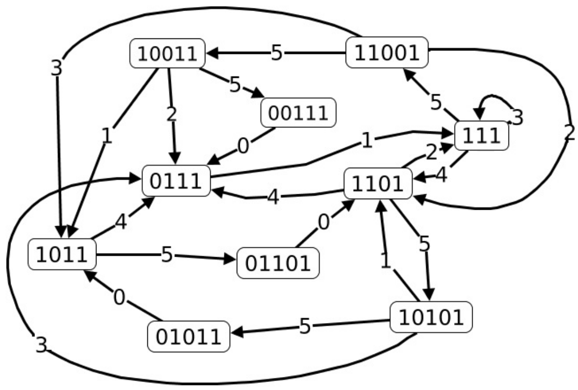
[2]Usmjereni graf je graf u kojem svaki brid ima smjer od početka prema kraju. Usmjereni graf ima orijentirane bridove, koje prikazujemo strelicama.

[3]Šetnja u grafu G je niz čiji članovi su naizmjenično vrhovi i bridovi tako da su krajevi brida vrhovi. Šetnja je zatvorena ako se početak i kraj podudaraju.

Lema 2.9.8. *Ukoliko ograničimo broj loptica i visinu bacanja, broj vrhova je dan formulom:*

$$V(b) = \binom{h}{b} = \frac{h!}{b!(h-b)!}$$

Primjer 2.9.9. *Dan je graf žonglerskih stanja trika koji se žonglira s* 3 *loptice maksimalne visine bacanja* 5 *na Slici 2.5.*



Slika 2.5: Graf žonglerskih stanja

Rješenje: Broj loptica je $b = 3$*, visina bacanja je* $h = 5$*. Broj vrhova u grafu je:*

$$V(3) = \binom{5}{3} = \frac{5!}{5! \cdot 2!} = 10$$

U grafu stvarno ima 10 *vrhova. Bridovi između dva vrha predstavljaju trazicije između dva stanja, to jest visine bacanja koje su određene na način iz prijašnjeg primjera. Na primjer, ako šetnju započnemo u vrhu određen stanjem* 1101 *i prođemo kroz vrhove sa stanjima* 10101*,* 0111*,* 111 *i vratimo se u* 1101*, ta šetnja određuje žonglerski niz* 5314*.*

Poglavlje 3

Postoji li limit ili je samo nebo granica?

U prethodnom poglavlju smo koristili transformacije nad žonglerskim nizovima da bi dobili nove žonglerske nizove. U ovom poglavlju ćemo predstaviti metode na pomoću kojih se mogu kreirati novi žonglerski nizovi.

3.1 Konstrukcija žonglerskih nizova

Permutacijski test nam daje algoritam za konstrukciju svih žonglerskih nizova s B loptica perioda p. Neka je $s = (a_k)_{k=0}^{p-1}$ žonglerski niz, neka je $P = \{0, 1, ..., p-1\}$ reducirani sustav ostataka modulo p, te neka je ϕ_s funkcija $\phi_s : P \to P$, definirana s $\phi_s(i) = i + a_i \pmod p$.

Slijedi algoritam za konstrukciju žonglerskog niza:

1. Ispišimo sve permutacije F test vektora funkcije ϕ_s. Ima ih $p!$.

2. Izračunamo sve žonglerske nizove koji odgovaraju svakom od vektora. Računamo: $F' = (F - (0, 1, ..., p-1)) \pmod p$.

3. Izračunamo $A = B - F'$.

4. Ispišemo sve mogućnosti za vektor C čiji je zbroj komponenti jednak A.

5. Traženi žonglerski nizovi su oblika: $F' + pC$.

Promotrimo korak 2 algoritma za kreairanje žonglerskih nizova. Algoritam zahtjeva da je aritmetička sredina od F' prirodan broj. Naime, vektor F' je dobiven oduzimanjem komponenata dvaju vektora. Vektor F je test-vektor, te su njegove komponente $\phi_s(i) = i + a_i \pmod p$ za $i \in P$. Suma njegovih komponenata modulo p je sljedeća: $\sum_{i=0}^{p-1} \phi_s(i) \equiv i + a_i \pmod p$. Kad od komponenata oduzmemo $\sum_{i=0}^{p-1} i \pmod p$, imamo $\sum_{i=0}^{p-1} a_i \pmod p$, te znamo da $\sum_{i=0}^{p-1} a_i \equiv 0 \pmod p$. Tada slijedi da F' ima cjelobrojnu aritmetičku sredinu.

Primjer 3.1.1. *Konstruirajmo sve žonglerske nizove s 3 loptice perioda 3.*
Rješenje:

F	(0,1,2)	(2,0,1)	(1,2,0)	(0,2,1)	(1,0,2)	(2,1,0)
$F' = (F - (0,1,2)) \pmod 3$	(0,0,0)	(2,2,2)	(1,1,1)	(0,1,2)	(1,2,0)	(2,0,1)
$A = B - F'$	3	1	2	2	2	2
mogućnosti za vektor C	(3,0,0) (0,3,0) (0,0,3) (1,2,0) (0,1,2) (2,0,1) (2,1,0) (0,2,1) (1,0,2)	(1,0,0) (0,1,0) (0,0,1)	(2,0,0) (0,2,0) (0,0,2) (1,1,0) (0,1,1) (1,0,1)	(2,0,0) (0,2,0) (0,0,2) (1,1,0) (0,1,1) (1,0,1)	(2,0,0) (0,2,0) (0,0,2) (1,1,0) (0,1,1) (1,0,1)	(2,0,0) (0,2,0) (0,0,2) (1,1,0) (0,1,1) (1,0,1)
žonglerski nizovi oblika $F' + 3C$	900 090 009 360 036 603 630 063 306	522 252 225	711 171 117 441 144 414	612 072 018 432 045 315	720 180 126 450 153 423	801 261 207 531 234 504

Tablica 3.1: Primjer svih nizova perioda 3 žongliranih s 3 loptice

U tablici 3.1 možemo vidjeti svih 36 žonglerskih nizova perioda 3 koji se žongliraju s 3 loptice.

3.2 Topovska teorija u žongliranju

Jedna konstrukcija žonglerskih nizova je pomoću matrica i topovske teorije. Neka je dan žonglerski niz perioda p. Neka nam je dana $p \times p$ matrica čiji je element i-tog retka i j-tog stupca jednak $a_{i,j} = j - i \pmod p$.

Primjetimo da su svi elementi na glavnoj dijagonali jednaki 0, te su elementi također jednaki na svim ostalim diagonalama paralelnim s glavnom dijagonalom.

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & p-1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Retke matrice shvaćamo kao vrijeme u kojem smo bacili lopticu modulo p, a stupce kao vijeme u kojem smo uhvatili lopticu modulo p. Tada je element $a_{i,j}$ minimalno bacanje koje je bačeno na otkucaj i i uhvaćeno na otkucaj j.

Matricu možemo shvatiti kao šahovsku ploču i pisati je kao tablicu. Žonglerske nizove konstruiramo tako da biramo mjesta na tablici na koja ćemo staviti svoje topove[1]. Elemente niza biramo tako da u svakom retku i stupcu bude točno jedan top.

Neka je a_k element kojeg smo odabrali u retku $k+1$ za $k = 0, ..., p-1$.

Propozicija 3.2.1. *Tako dobiveni niz $(a_k)_{k=0}^{p-1}$ je žonglerski niz.*

Dana je $p \times p$ matrica i $0 \leq i, j \leq p-1$. Elementi matrice su oblika $a_{i,j} = j - i \pmod{p}$.

Ako krenemo po retcima i i dodajmo $i-1$ svakom elementu u i-tom retku, dobit ćemo elemente matrice $\tilde{a}_{i,j} = j - 1 \pmod{p}$. Tada su svi elementi u svakom stupcu jednaki.

Imamo novu matricu

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & p-1 \\ 0 & 1 & \dots & p-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & p-1 \end{bmatrix}$$

Elemente niza, za kojeg provjeravamo da je žonglerski, smo birali tako da je element a_k element $k+1$-og stupca za $k = 0, ..., p-1$. Test-vektor permutacijskog testa je oblika $(a_0 + 0 \pmod{p}, a_1 + 1 \pmod{p}, ..., a_{p-1} + p - 1 \pmod{p})$. Kako smo elemente niza birali u početnoj matrici, a nova matrica ima jednake elemente u svakom stupcu, test vektor sadržava svaki prirodan broj $0, ..., p-1$ samo jednom. Tada slijedi da je niz žonglerski.

Primjer 3.2.2. *Konstruirajmo žonglerski niz perioda* 6.

Prvo nacrtamo matricu 6×6 *u tabličnom obliku. Onda biramo neke elemente iz stupaca. Elemente žonglerskog niza čitamo po retcima, od 1. do 6. retka. Konstruirani niz je 114255. Uvjerimo se da je dobiveni niz žonglerski. Koristimo permutacijski test. Test-vektor je* $(0+1, 1+1, 2+4, 3+2, 4+5, 5+5) = (1, 2, 0, 5, 3, 4)$. *Test-vektor sadrži svaki prirodan broj iz reduciranog skupa ostataka modulo 6 samo jednom, te tada slijedi da je niz 114255 žongerski niz.*

Rješenje je prikazano u Tablici 3.2.

Propozicija 3.2.3. *Žonglerski niz perioda p ovom metodom možemo konstruirati na p! načina.*

[1] Top ili kula je figura u šahu koja se može micati jedino lijevo i desno do kraja retka ili stupca.

0	1	2	3	4	5
5	0	1	2	3	4
4	5	0	1	2	3
3	4	5	0	1	2
2	3	4	5	0	1
1	2	3	4	5	0

Tablica 3.2: Tablica rješenja za Primjer 3.2.2

Razmislimo kako biramo elemente niza. Prvi element niza biramo na p načina, drugi na $p-1$ jer je jedan redak i stupac zauzet. U trećem koraku biramo jedan od $p-2$ mjesta, te tako sve do zadnjeg kojeg ćemo morati odabrati na samo jedan način. Ukupno ima $p \cdot (p-1) \cdot (p-2) \cdot ... \cdot 1 = p!$ načina za konstruirati žonglerski niz.

No, ovom metodom nećemo konstruirati sve žonglerske nizove. Konstruirati ćemo samo nizove čije su visine bacanja $0 \leq h < p$.

Propozicija 3.2.4. *Neka je dan žonglerski niz konstruiran pomoću tablice. Broj loptica potreban za žongliranje niza je jednak broju topova ispod glavne dijagonale.*

Primjer 3.2.5. *Predočimo Propoziciju 3.2.4 na primjeru. Neka nam je dana tablica za konstrukciju nizova perioda* 5*. Odaberimo nekoliko nizova i izračunajmo broj loptica potreban za žongliranje trika, te pogledajmo koliko ima topova ispod glavne dijagonale.*

	1	2	3	4	5
1	0	1	2	3	4
2	4	0	1	2	3
3	3	4	0	1	2
4	2	3	4	0	1
5	1	2	3	4	0

Pomoću topova smo odabrali žongleski niz 14014*. Broj loptica potreban za žongliranje je*

$$B = \frac{1+4+1+4}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

što je jednako broju topova ispod glavne dijagonale.

Također, za niz 34440 *odabran pomoću topova, broj loptica potreban za žonglranje je*

$$B = \frac{3+4+4+4}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

što je također jednako broju topova ispod glavne dijagonale.

3.3 Žonglerske karte

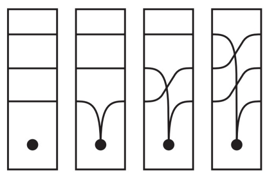
Dosad smo u poglavljima 3.1 i 3.2 opisali kako na dva načina možemo konstruirati žonglerske nizove s b loptica, perioda p. U ovom poglavlju ćemo pokazati još jedan način; pomoću žonglerskih karata.

Sjetimo se dijagrama toka žonglerskog trika. Crtali smo ga tako da svaki otkucaj pridružimo kružiću, te smo spajali otkucaje lukovima. Dijagram toka žonglerskog trika razdvojimo na dijelove tako da je jedan otkucaj na jednoj kartici.

Neka je dan dijagram žonglerskog trika koji se žonglira s b loptica. Tada postoji $b + 1$ različitih karta u oznaci $C_0, ..., C_b$. Skup od $b + 1$ karte se može koristi za konstrukciju svih nizova koji se mogu žonglirati s b loptica. (Vidi Sliku 3.1.)

Svaka od karata ima jedan kružić koji služi kao otkucaj, te linije koje služe kao orbite bacanja. Raspored žonglerskih karata je također bitan. Lnije koje predstavljaju orbite najviših bacanja se naralaze pri vrhu karata. To jest, ukoliko je raspored karata ispravan, linije će se podizati prema vrhu karte prije nego padnu u kružić otkucaja.

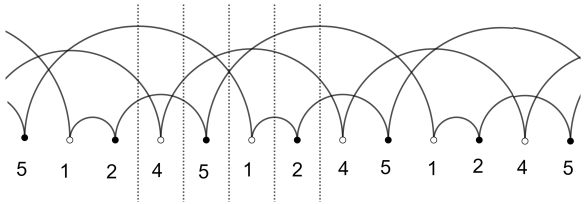
Slika 3.1 prikazuje različite žonglerske karte trika koji se žonglira s 3 loptice.



Slika 3.1: Primjer žonglerskih karata C_0, C_1, C_2 i C_3

Primjer 3.3.1. *Prikažimo žonglerski niz 4512 pomoću žonglerskih karata.*

Rješenje:



Slika 3.2: Primjer žonglerskog dijagrama toka za niz 4512

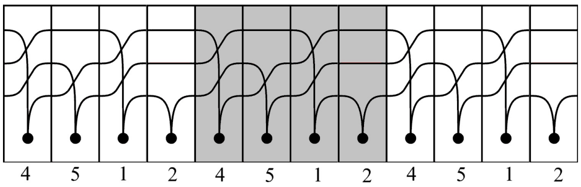
Dijagram crtamo pomoću žonglerskih karata na sljedeći način. Prvo nacrtamo žonglerski dijagram toka za niz 4512, te promotrimo koje karte možemo koristiti za kreiranje niza pomoću karata.

Vidimo da bacanje visine 4 ima dvije orbite koje prolaze iznad otkucaja, jedna dolazi u kružić i jedna odlazi iz kružića. Sve orbite se međusobno sijeku u dvije točke. Tom stanju odgovara karta C_3 jer ta karta ima linije koje se sijeku u dvije točke.

Bacanje visine 5 ima dvije orbite koje prolaze iznad kružića, ali one se međusobno sijeku samo u jednoj točki. Tom stanju odgovara karta C_2.

Bacanje visine 1 ima dvije orbite koja prolaze iznad kružića i jednu orbitu koji siječe druge dvije u dvije točke. Od ponuđenih karata, karta C_3 odgovara toj situaciji.

Bacanje visine 2 nema orbite koji se sijeku, no jedna orbita dolazi u kružić i jedna orbita odlazi iz kružića, te tom stanju odgovara karta C_1.



Slika 3.3: Primjer žonglerskih karata za niz 4512

3.4 Broj žonglerskih nizova

Upoznali smo transformacije žonglerskih nizova, te smo se uvjerili da možemo konstruirati nove žonglerske nizove. U ovom poglavlju ćemo dati načine za prebrojavanje žonglerskih nizova.

Teorem 3.4.1 (Teorem o broju nizova)**.** *Ukupan broj svih žonglerskih nizova je:*

(N1) *Broj svih žonglerskih nizova perioda p koji se žongliraju s najviše b loptica $S(b, p)$ je:*

$$S(b, p) = (b + 1)^p$$

(N2) *Broj svih žonglerskih nizova perioda p koji se žongliraju s točno b loptica $S^*(b, p)$ je:*

$$S^*(b, p) = S(b, p) - S(b - 1, p) = (b + 1)^p - b^p$$

(N3) *Broj svih žonglerskih nizova minimalnog perioda p koji se žongliraju s $b \geq 1$ loptica je:*

$$MS(b, p) = \frac{1}{p} \sum_{d \text{ dijeli } p} \mu(d)[(b + 1)^{\frac{p}{d}} - b^{\frac{p}{d}}]$$

gdje je μ Möbiusova funkcija, a d djelitelj od p. Broj $MS(b, p)$ ne sadrži žonglerske nizove koji se dobiju cikličkim pomacima.

Definirajmo Möbiusovu funkciju i Möbiusovu inverziju.

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{ako } p^2 | n \text{ za } p \text{ prost} \\ (-1)^i & \text{ako } n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_i \end{cases}$$

Ako su f i g funkcije definirane za svaki prirodan broj p takav da je

$$f(p) = \sum_{d \text{ dijeli } p} g(d)$$

onda je

$$g(p) = \sum_{d \text{ dijeli } p} \mu(\frac{p}{d}) f(d).$$

Slijedi dokaz teorema.

Dokaz. Dokazat ćemo formule za broj žonglerskih nizova.

(N1) Ukoliko imamo niz perioda p koji se žonglira s najviše b loptica, ukupno imamo $b+1$ različitih bacanja loptica (jer u jednom od otkucaja se ne mora dogoditi bacanje). Tada ukupno svih varijacija ima $(b+1)^p$.

(N2) Broj $S^*(b, p)$ sadrži sve cikličke permutacije žonglerskih nizova i one su brojane kao drugačiji niz, te također sve nizove koji nisu minimalnog perioda. Da bismo izračunali točan broj žonglerskih nizova s točno b loptica perioda p, moramo od $S(b, p)$ oduzeti broj cikličkih permutacija žonglerskih nizova.

(N3) $S^*(b, p)$ broj svih žonglerskih trikova s točno b loptica perioda p. Neka je $MS(b, p)$ broj svih žonglerskih trikova s b loptica i minimalnog perioda p. U tom slučaju 333 neće biti brojan kao trik perioda 3.

Tada je

$$S^*(b, p) = (b+1)^p - b^p = \sum_{d \text{ dijeli } p} d \cdot MS(b, d),$$

gdje sumiramo po svim djeliteljima d od p.

Tada, koristeći Möbiusevu inverziju imamo

$$p \cdot MS(b, p) = \sum_{d \text{ dijeli } p} \mu(d) S^*(b, \frac{p}{d})$$

Znamo da je $S^*(b, p) = (b+1)^p - b^p$, tada

$$p \cdot MS(b, p) = \sum_{d \text{ dijeli } p} \mu(d)[(b+1)^{\frac{p}{d}} - b^{\frac{p}{d}}]$$

Odnosno,

$$MS(b, p) = \frac{1}{p} \sum_{d \text{ dijeli } p} \mu(d)[(b+1)^{\frac{p}{d}} - b^{\frac{p}{d}}]$$

□

Primjer 3.4.2. *Izračunajmo koliko ima žonglerskih trikova minimalnog perioda 3 s 3 loptice.*

Rješenje:

$$\begin{aligned} MS(3,3) &= \frac{1}{3}\sum_{d|3}\mu(d)[(3+1)^{\frac{3}{d}} - 3^{\frac{3}{d}}] \\ &= \frac{1}{3}(\mu(1)(4^3 - 3^3) + \mu(3)(4^1 - 3^1)) \\ &= \frac{1}{3}(64 - 27 + (-1)(4+3)) \\ &= \frac{1}{3}(37 - 1) = 12 \end{aligned}$$

U primjeru 3.1.1 ispisali smo svih 36 nizova, no njih 12 je s minimalnim periodom 3, i dodajemo niz 333, tada ukupno imamo 13 nizova, kao što smo vidjeli u prikazali na Slici 2.2.

Primjer 3.4.3. *Izračunajmo koliko ima žonglerskih trikova minimalnog perioda 4 s 8 loptica.*

Rješenje: Za razliku od prijašnjeg primjera, ovaj primjer nije optimalno brojati pješke.

$$\begin{aligned} MS(8,4) &= \frac{1}{4}\sum_{d|4}\mu(d)[(8+1)^{\frac{4}{d}} - 8^{\frac{4}{d}}] \\ &= \frac{1}{4}(\mu(1)(9^4 - 8^4) + \mu(2)(9^2 - 8^2)) + \mu(4)(9^1 - 8^1)) \\ &= \frac{1}{4}(6561 - 4096 + (-1)^1(81 - 64) + 0 \cdot (9 - 8)) \\ &= \frac{1}{4}(2465 - 17) = 612 \end{aligned}$$

Ukupno ima 612 *žonglerskih trikova.*

Poglavlje 4

Žongleri i matematika

Netko tko ne voli matematiku može vidjeti ovaj rad i pomisliti da matematičari sve pokvare. Uzeli su nešto zabavno poput žongliranja i počeli su izmišljati svoju matematiku koju nitko osim njih ne razumije. Je li to zaista tako? Jesu li matematičari stvarno samo zakomplicirali žongliranje?

Matematičar kojeg smo već spomenuli, Colin Wright, i njegova grupa kolega su zapravo dali veliki doprinos žongliranju, a ne samo matematici. Oni su otkrili nove žonglerske trikove koristeći zamjenu mjesta. Najpoznatiji od njih je 441.

Jedna od zanimljivih tema žonglerima nematematičarima bi bila koliko ima žonglerskih trikova. U ovom smo radu dali odgovor na to. Također smo pokazali više načina na koje možemo konstruirati nove žonglerske nizove.

4.1 Kako nam matematika može pomoći bolje žonglirati?

Ako netko želi naučiti žonglirati, najbolje bi bilo upoznati žonglera i njega pitati za savjete. No, ukoliko to nije moguće, možemo koristiti računalne programe.

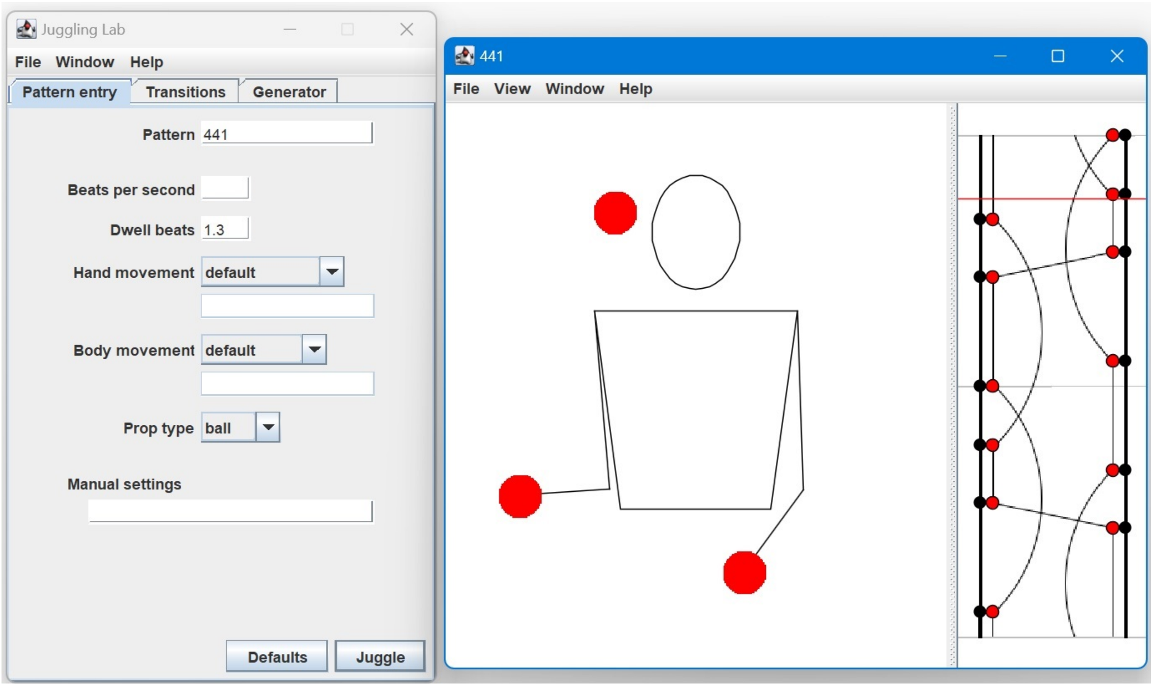
Većina programa je besplatna i kompatibilni su s različitim operativnimm sustavima i uređajima. Neki od njih su:

1. Juggling Lab: besplatni računalni program koji se lako koristi i ima intuitivno korisničko sučelje

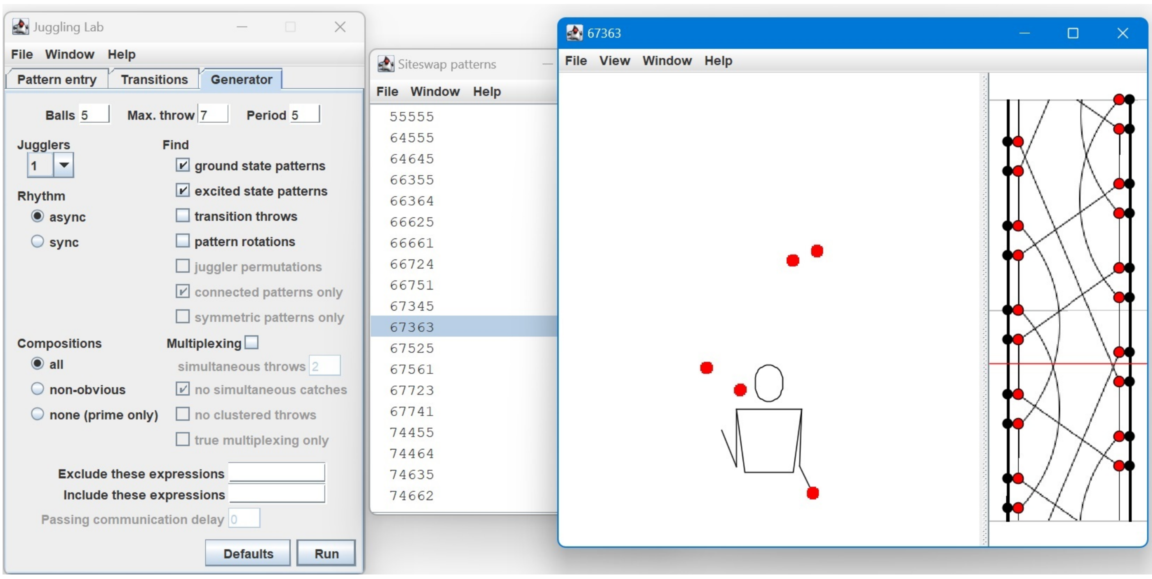
2. Juggling Library: besplatna aplikacija za android stvorena u suradnji s libraryofjuggling.com

3. Različiti online simulatori, na primjer Siteswap animator[1]

[1] https://www.jugglingedge.com/help/siteswapanimator.php?Pattern=441



Slika 4.1: Žongliranje niza 441 u programu Juggling Lab



Slika 4.2: Žongliranje niza 67363 u programu Juggling Lab

4.2 Žongliranje u nastavi matematike

Kreativnost je teško definirati, ali jedna činjenica s kojom se slažu svi znanstvenici je da je kreativnost mogućnost pojedinca da poveže naizgled nepovezive objekte. Žongliranje je fizička vještina koja je često povezana s rekreacijom i kao takva nas možda neće odmah podsjetiti na nastavu matematike. U prošlim smo poglavljima ipak pokazali da u žongliranju postoji matematička podloga.

U nastojanju da potaknu studente da razmišljaju o matematici na drugačiji način, profesori Sveučilišta Montclair u New Yerseyu u Sjedinjenim Američkim Državama su implementirali kolegij za istraživanje veze matematike i žongliranja u suradnji s NSF[2]-om. U svom istraživačkom radu su predstavili rezultate.

U projektu su sudjelovali studenti koji ne studiraju matematičke predmete, isto kao i studenti koji studiraju u matematičko-prirodoslovnom području. Studenti su sudjelovali u radionicama žongliranja gdje su učili žonglirati i u isto vrijeme razmišljali o matematici. U konačnici, studenti su uspostavljali vezu matematike i drugih područja, smislili svoje žonglerske trikove, razumjeli matematiku i naučili kako biti ustrajni, fleksibilni i kako se usredotočiti na proces, te su naučili preispitivati norme.

Kolegij je poticao studente da uoče matematičke pravilnosti kako u žongliranju, tako i u svijetu oko sebe. Studenti fizike su iz svojih razmišljanja razvili fizičke modele.

Reakcije studenata nakon završetka kolegija su bile pozitivne. Većina studenata je mislila da je kolegij šala, no bili su dovoljno znatiželjni da ga upišu.

U drugom istraživanju provedenom u osnovnim školama u Nizozemskoj, znanstvenici su istraživali kako će žongliranje tijekom nastave matematike utjecati na učenje i pamćenje tablice množenja. Odabrali su žongliranje kao vrstu tjelesne aktivnosti jer su prijašnja istraživanja pokazala da tjelesna aktivnost utječe na razvoj motoričlih i kognitivnih funkcija djece. Njihovo istraživanje je pokazalo da ne postoji veza između žongliranja i učenja tablice množenja, no više od 70% učenika se izjasnilo da bi radije pohađali nastavu matematike sa žongliranjem.

Zadatak za mlade matematičare

Slijedi zagonetka.

Da bi dovršio isporuku streljiva, čovjek koji teži 68 *kg mora proći visoki klimavi most koji može izdržati samo* 70 *kg. U rukama nosi 3 topovske lopte i svaka je teška* 1 *kg. Ima vremena da prođe most samo jednom. Kako čovjek može preći most i isporučiti sve kugle?*

Rješenje: Čovjek će žonglirati neki žonglerski trik s 3 kugle da bi prešao most.

[2]National Science Foundation; Nacionalna znanstvena zaklada

Bibliografija

[1] B. Polster, *The Mathematics of Juggling*, Springer-Verlag, New York, 2003

[2] B. Polster, *The Mathematics of Juggling*, `https://www.qedcat.com/articles/juggling_survey.pdf` (kolovoz 2023.)

[3] J. Buhler, D. Eisenbud, R. Graham, C. Wright, *Juggling Drops and Descents*, Canadian Mathematical Society, Broj 20, 1997., `https://mathweb.ucsd.edu/~ronspubs/94_01a_juggling.pdf` (kolovoz 2023.)

[4] E. Banaian, S. Butler, C. Cox, J. Davis, J. Landgraf, S. Ponce, *A generalization of Eulerian numbers via rook placements*, Involve, Broj 10, 2017, `https://arxiv.org/abs/1508.03673v2` (kolovoz 2023.)

[5] M. Jager, *How to juggle the proof for every theorem*, završni rad, Universiteit Utrecht, 2020., `https://studenttheses.uu.nl/handle/20.500.12932/36303` (kolovoz 2023.)

[6] I. Prašnjak, *Matematika žongliranja*, završni rad, Preddiplomski studij Matematika, Odjel za matematiku, Sveučilište u Rijeci, 2011. `https://hrcak.srce.hr/file/354221` (kolovoz 2023.)

[7] C. Monahan, M. Munakata, A. Vaidya, S. Gandini, *Inspiring Mathematical Creativity through Juggling*, Journal of Humanistic Mathematics, Broj 10-2, 291.-314., 2020., `https://scholarship.claremont.edu/jhm/vol10/iss2/14` (kolovoz 2023.)

[8] V. van den Berg, A. S. Singh, A. Komen, C. Hazelebach, I. van Hilvoorde, M. J. M. Chinapaw, *Integrating Juggling with Math Lessons: A Randomized Controlled Trial Assessing Effects of Physically Active Learning on Maths Performance and Enjoyment in Primary School Children*, Int. J. Environ. Res. Public Health, Broj 16, 2019., `https://doi.org/10.3390/ijerph16142452` (kolovoz 2023.)

[9] Juggling Counts, `https://www.jugglingcounts.org/` (kolovoz 2023.)

[10] Library of Juggling, https://libraryofjuggling.com/ (kolovoz 2023.)

[11] Juggling Edge siteswap simulator, https://www.jugglingedge.com/help/siteswapanimator.php?Pattern=441 (kolovoz 2023.)

[12] A. Lewbel, *History of Juggling*, https://sites.google.com/bc.edu/arthur-lewbel/history-of-juggling?authuser=0 (kolovoz 2023.)

Sažetak

U ovom diplomskom radu upoznajemo matematičku pozadinu žonglerskih trikova. Žonglerski trikovi su povezani s žonglerskim nizovima, te se modeliraju pomoću žonglerskih funkcija. Opisujemo kako promjene na žonglerskim nizovima utječu na svojstva žonglerskih trikova, te donosimo broj žonglerskih trikova koji se mogu žonglirati s određenim brojem predmeta.

Summary

In this thesis we get to know the mathematical background of juggling. Juggling patterns are associated with juggling sequences and are modeled using juggling functions. We describe how changes to the juggling sequences affect the properties of juggling tricks and we provide the total number of juggling patterns that can be juggled with a specified number of juggling props.

Životopis

Rođena sam 13.7.1992. godine u Varaždinu. U Varaždinu sam živjela do 19. godine kad sam upisala Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, studij matematike, smjer nastavnički. Nakon završenog diplomskog studija želja im je raditi u školi i poučavati djecu matematici.