SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Marta Cifrek

PITAGORIN POUČAK I NJEGOVE GENERALIZACIJE

Diplomski rad

Voditelj rada:
dr. sc. Renata Vlahović Kruc

Zagreb, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Mom suprugu, za neizmjernu podršku, nevjerojatno strpljenje i neopisivu ljubav...

Sadržaj

Uvod

Pitagorin poučak jedan je od najpoznatijih i osnovnih teorema geometrije. Iako je u nekom obliku bio poznat još starim Egipćanima, legenda kaže da ga je Pitagora prvi dokazao. Osim brojnih dokaza Pitagorinog poučka, poznati su i njegovi analogoni te generalizacije u ravnini, ali i u prostoru. Široka primjena Pitagorinog poučka važna je ne samo u matematici, već i u drugim područjima, kao na primjer u građevini i arhitekturi.
Rad je podijeljen na tri poglavlja. U prvom poglavlju prikazat ćemo povijest Pitagore i Pitagorinog poučka. Istražit ćemo u kojem je obliku Pitagorin poučak bio poznat prije otkrivanja njegovog iskaza i dokaza te čemu je služio starim Egipćanima. Potom ćemo iskazati Pitagorin poučak i iznijeti neke njegove dokaze.
U drugom poglavlju usmjerit ćemo se na generalizacije Pitagorinog poučka. Istraživat ćemo Pitagorine trojke, a zatim promatrati analogone i generalizacije Pitagorinog poučka u ravnini i prostoru.
U trećem poglavlju prikazat ćemo neke primjere obrade Pitagorinog poučka i njegovog obrata u nastavi matematike.

Poglavlje 1

Pitagorin poučak i njegovi dokazi

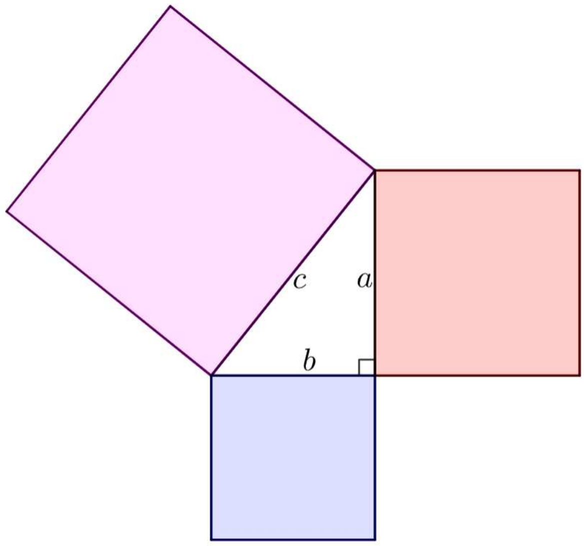
Pitagorin poučak jedan je od osnovnih teorema geometrije. Iako taj poučak nosi ime po grčkom matematičaru Pitagori, on je bio poznat u nekom obliku i prije nego se Pitagora rodio. No, legenda kaže da ga je on prvi dokazao. Danas postoji čak oko 400 raznih dokaza Pitagorinog poučka. Dokazivanjem Pitagorinog poučka bavili su se i mnogi matematičari i fizičari poslije Pitagore, a za jedan od dokaza zaslužan je i dvadeseti američki predsjednik James A. Garfield.

1.1 Pitagorin poučak

Pitagorin poučak jedan je od najosnovnijih teorema geometrije. S povijesnog gledišta, on pripada značajnijim matematičkim otkrićima jer je riječ o jednom od prvih dokaza neke opće matematičke tvrdnje. Neki povjesničari čak smatraju da je to trenutak rođenja suvremene matematike. Naime, početak dokazivanja općih matematičkih tvrdnji predstavlja veliki korak u matematici. Prije pojave dokaza Pitagorinog poučka matematika je bila usmjerena rješavanju konkretnih problema, a upravo je Pitagora dokazom poučka potaknuo razmatranje apstraktnih svojstava čitavih skupova objekata. Pitagori i njegovim učenicima bio je poznat teorem u cjelosti, uključujući i njegov obrat.

Teorem 1.1.1 (Pitagorin Poučak)**.** *U pravokutnom je trokutu površina kvadrata nad hipotenuzom jednaka je zbroju površina kvadrata nad katetama. Odnosno, ako su a i b duljine kateta pravokutnog trokuta, a c duljina hipotenuze, onda vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$.*

Korolar 1.1.2 (Obrat Pitagorina teorema)**.** *Ako za stranice a, b i c trokuta ABC vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$, onda je trokut ABC pravokutan s pravim kutom pri vrhu C.*



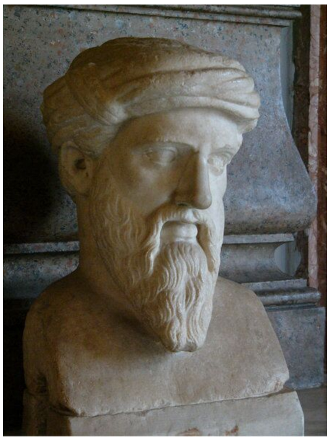
Slika 1.1: Skica Pitagorinog poučka

1.2 Povijest Pitagorinog poučka

Pitagora iz Samosa (oko 570. pr. Kr - 490. pr. Kr.) rođen je na grčkom otoku Samosu kao sin bogatog trgovca Mnezarha i Pitaide. Na njegovo obrazovanje utjecali su filozofi Ferekid, Tales te Talesov učenik Anaksimandar, pri čemu je Tales vjerojatno najzaslužniji za Pitagorin interes za matematiku. Putujući Egiptom upoznao se njihovom matematikom, a na kraju se nastanio u južnoj Italiji u gradu Krotonu gdje je osnovao školu. Danas tu školu nazivamo Pitagorejskom školom, a njegove sljedbenike Pitagorejcima.

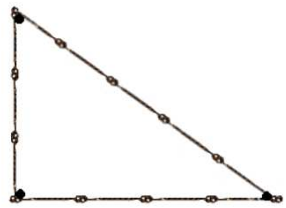
Pitagorejska škola bila je tajna zajednica. Pitagori su se pripisivala božanska svojstva, a društvo se sastojalo od dva kruga: *unutarnji krug* činili su matematičari i učitelji, a *vanjski* učenici. Upravo zbog tajnosti zajednice, teško je odgonetnuti što je rad Pitagore, a što njegovih učenika. Međutim, svakako je Pitagora, svojim djelovanjem, zaslužan za početak deduktivnog dokazivanja tvrdnji u matematici. Zbog toga se često naziva prvim ”pravim” matematičarom.

Prema pitagorejskoj filozofiji, bit svijeta je u harmoniji brojeva. Pitagora je smatrao da se cijeli svemir može opisati brojevima. Za njih, a i kasnije u starogrčkoj matematici, *broj* je isključivo prirodan broj, a *jedinica* ili *monada* nije broj već osnova svih brojeva. Promatrali su razna svojstva prirodnih brojeva pa tako i podjelu na parne i neparne. Parni su brojevi oni koji se mogu podijeliti na dva jednaka dijela dok neparnima pri dijeljenju na dva jednaka dijela preostaje jedinica. Osim toga, razlikovali su proste i složene brojeve. Proučavali su i savršene brojeve te kvadratne i kubne brojeve (brojeve oblika n^2 i n^3, gdje



Slika 1.2: Kip Pitagore u Kapitolskom muzeju, preuzeto iz [3]

je n prirodan broj).
Iako su Pitagorejci prvi dokazali Pitagorin poučak, on je već prije Pitagore i njegovih suvremenika bio poznat. Specijalni slučaj Pitagorinog poučka poznavali su još stari Egipćani. Dobro je poznato da su Egipćani živjeli uz rijeku Nil. Svake godine rijeka Nil bi poplavila, što je tlo činilo izrazito plodnim i time Egipćanima omogućilo bogatu proizvodnju hrane. Međutim, poplave bi isprale granice posjeda Egipćana pa bi svake godine morali isponova postavljati granice. Pritom su mnogo toga naučili o geometriji, Egipat je prozvan "Majkom geometrije", a upravo tako je i geometrija dobila ime (geo - Zemlja, metria - mjerenje). Geometrija je za Egipćane bila osnova rješavanja praktičnih problema mjerenja s kojima su se svakodnevno susretali. Egipatski geodet Harpedonapta, vezao je jednako udaljene čvorove na užetu i time otkrio veliko pomagao u mjerenju. Uz pomoć troje ljudi i užeta s 12 čvorova napravio je sljedeće: Harpedonapta bi bio stao na početku, na mjestu prvog čvora, a prvi čovjek bi hodao ravno dok ne dođe do četvrtog čvora i tamo stao. Zatim bi drugi došao na mjesto gdje stoji prvi, okrenuo se desno i hodao do trećeg čvora. Zatim bi treći od tog mjesta hodao ravno prema Harpedonapte. Harpedonapta je primijetio da je treći čovjek hodao do petog čvora i taj peti čvor zatvorio bi trokut. Trokut čiji je omjer stranica $3 : 4 : 5$, a danas znamo da je trokut kojemu su stranice u navedenom omjeru pravokutan. Egipćani nisu znali zašto uočeno vrijedi, ali znali su da bez obzira na to koliko je dugačko uže, mogu koristiti uočeno pravilo ako je 12 čvorova na užetu jednako razmaknuto. Zbog toga je pravokutan trokut sa stranicama duljina 3, 4 i 5 dobio ime egipatski trokut, slika 1.3.
Osim za označavanje posjeda, otkriveni trokut koristili su pri izgradnji hramova. Naime, starim Egipćanima bila je jako važna zemljopisna orijentacija hramova. Smjer sjever-jug odredili su promatranjem izlaska i zalaska zvijezda na horizontu, a zatim su pomoću užeta s



Slika 1.3: Egipatski trokut

čvorovima i egipatskog trokuta, okomito na smjer sjever-jug, određivali smjer istok-zapad.

1.3 Dokazi Pitagorinog poučka

Danas je poznato više od 400 dokaza Pitagorinog poučka. U prikupljanju dokaza Pitagorina poučka najdalje je otišao Elisha Scott Loomis (1852. - 1940.), matematičar iz Ohija koji je početkom 20. stoljeća objavio knjigu *The Pythagorean Proposition* u kojoj se nalazi čak 370 dokaza. Proučavanjem dokaza detaljnije, primjećuje se da se oni mogu svrstati u 4 skupine:

1. dokazi koji se zasnivaju na izjednačavanju površina,
2. dokazi pomoću razlaganja površina (*mozaički dokazi*),
3. dokazi pomoću računanja,
4. dokazi koji se zasnivaju na sličnosti geometrijskih likova.

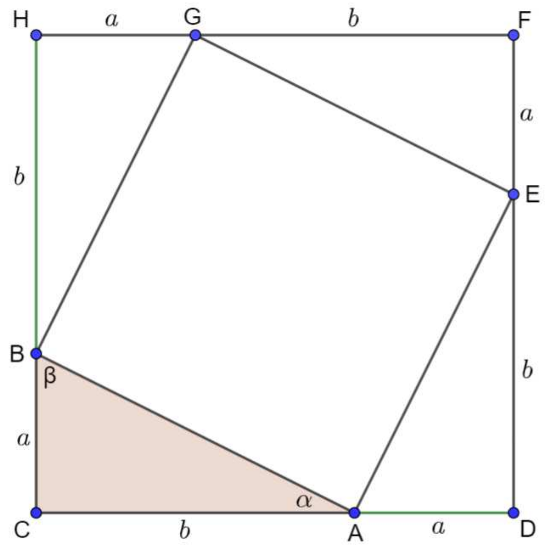
Analizirat ćemo neke dokaze iz svake skupine.

Izjednačavanje površina

Prikazat ćemo tri dokaza Pitagorinog poučka koji se temelje na izjednačavanju površina. S obzirom da se u svim trima dokazima koristi sukladnost trokuta, prikladni su za učenike u prvom razredu srednje škole.

Dokaz 1. Neka je trokut ABC pravokutan s hipotenuzom duljine c i katetama duljina a i b. Dopunimo taj trokut do kvadrata $CDFH$ stranice duljine $a + b$ kao na slici 1.4.
Vrijedi

$$|AD| = |EF| = |GH| = |BC| = a$$
$$|DE| = |FG| = |HB| = |CA| = b.$$



Slika 1.4: Slika uz *Dokaz 1*

S obzirom da je $CDFH$ kvadrat, trokuti ABC, EAD, GEF i BGH su pravokutni s pravim kutom između sukladnih stranica duljina a i b. Stoga su navedeni trokuti međusobno sukladni prema S-K-S teoremu o sukladnosti trokuta.
Iz toga slijedi da je $|AE| = |EG| = |GB| = |BA| = c$ i $\sphericalangle EAD = \sphericalangle ABC = \beta$ pa je

$$\begin{aligned} \sphericalangle BAE &= 180^\circ - (\sphericalangle CAB + \sphericalangle EAD) \\ &= 180^\circ - (\alpha + \beta) \\ &= 180^\circ - 90^\circ \\ &= 90^\circ. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Zaključujemo, četverokut $AEGB$ je kvadrat sa stranicom duljine c. Sada je

$$P(CDFH) = P(ABC) + P(EDA) + P(GFE) + P(BGH) + P(AEGB).$$

Već smo zaključili da su trokuti ABC, EAD, GEF i BGH međusobno sukladni pa su njihove površine jednake. Iz toga slijedi

$$P(CDFH) = 4 \cdot P(ABC) + P(AEBG). \tag{1.2}$$

Stranica kvadrata $CDFH$ duljine je $a + b$ pa vrijedi

$$P(CDFH) = (a + b)^2.$$

Katete pravokutnog trokuta ABC su duljina a i b pa vrijedi

$$P(ABC) = \frac{ab}{2},$$

a kvadrat $AEBG$ ima stranicu duljine c, dakle vrijedi

$$P(AEBG) = c^2.$$

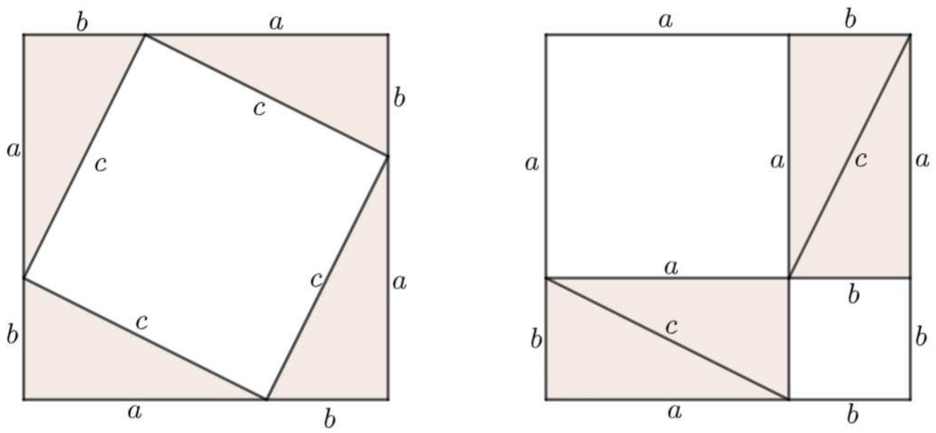
Uvrstimo li dobivene površine u jednadžbu 1.2, sređivanjem izraza dobivamo

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= 4 \cdot \frac{ab}{2} + c^2\\ a^2 + 2ab + b^2 &= 2ab + c^2\\ c^2 &= a^2 + b^2.\end{aligned}$$

□

Sljedeći dokaz najčešće se pojavljuje u udžbenicima iz matematike za osmi razred, ali samo u ilustriranom obliku. Argumentacija dokaza može se pokazati učenicima na dodatnoj nastavi matematike u osmom razredu te svakako učenicima u srednjoj školi.

Dokaz 2. Četiri međusobno sukladna pravokutna trokuta s hipotenuzom duljine c i katetama duljina a i b ucrtajmo u kvadrat sa stranicom duljine $a + b$ kao na prvoj slici 1.5. Presložimo zatim pravokutne trokute kao na drugoj slici 1.5.



Slika 1.5: Dokaz "preslagivanjem"

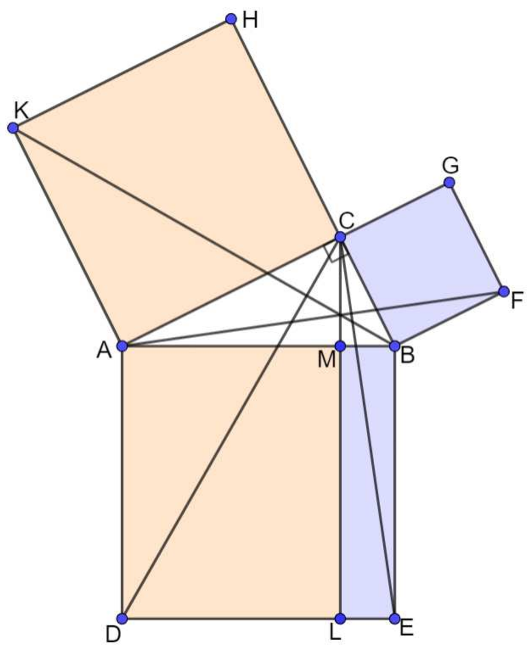
Obje slike prikazuju kvadrat sa stranicom duljine $a + b$. Prvi kvadrat sastoji se od četiri međusobno sukladna pravokutna trokuta, a iz 1.1 slijedi da je bijeli četverokut kvadrat sa

stranicom duljine jednake duljini hipotenuze pravokutnog trokuta, c. Drugi kvadrat sastoji se od ista četiri pravokutna trokuta kao i lijevi kvadrat te dva četverokuta. Četverokuti očito imaju sve prave kutove (slijedi iz činjenice da su upisani u kvadrat sa stranicom duljine $a + b$ i iz 1.1), Duljine stranica tih kvadrata su a i b.
S obzirom da su obojani dijelovi lijevog i desnog kvadrata jednake površine, jednake površine moraju biti i neobojani dijelovi tih kvadrata. Iz toga zaključujemo da je površina bijelog kvadrata s lijeve slike jednaka zbroju površina dvaju bijelih kvadrata s desne slike, odnosno

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

□

Dokaz 3. Neka je trokut ABC pravokutan s pravim kutom pri vrhu C. Nad stranicama trokuta konstruirajmo kvadrate $BADE$, $CBFG$ i $ACHK$. Nadalje, konstruirajmo okomicu iz točke C na stranicu $\overline{DE}$ pri čemu dobivamo točke M i L redom na stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{DE}$.
Dužina $\overline{ML}$ dijeli kvadrat $BADE$ na dva pravokutnika. Dokažimo da je površina pravokutnika $ADLM$ jednaka površini kvadrata $ACHK$ te da je površina pravokutnika $MLEB$ jednaka površini kvadrata $CBFG$.

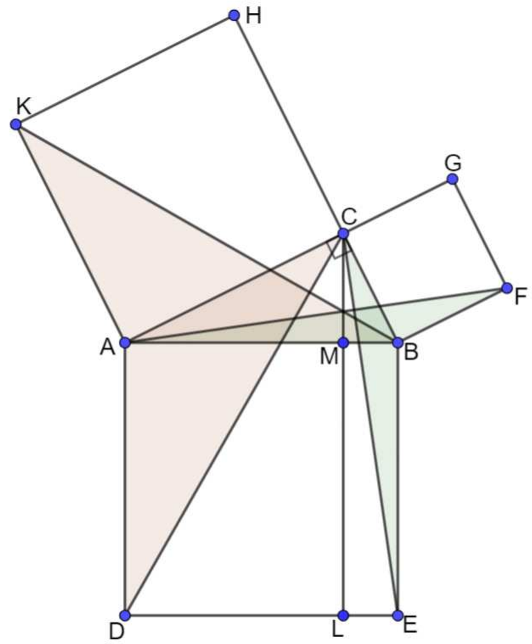


Slika 1.6: Ideja *Dokaza 3*

Dokažimo prvo da je površina pravokutnika $ADLM$ jednaka površini kvadrata $ACHK$. Promotrimo trokute CAD i KAB. S obzirom da je $BADE$ kvadrat, vrijedi $|AB| = |AD|$. Analogno, $|CA| = |KA|$ jer je $ACHK$ kvadrat. Nadalje vrijedi,

$$\sphericalangle CAD = 90^\circ + \sphericalangle CAB \quad \text{i} \quad \sphericalangle KAB = 90^\circ + \sphericalangle CAB.$$

Dakle, prema teoremu S-K-S o sukladnosti trokuta, vrijedi da su trokuti CAD i KAB sukladni.



Slika 1.7: Naznačeni parovi trokuta

Promotrimo trokut CAD i pravokutnik $ADLM$. $\overline{AD}$ im je zajednička stranica. Nadalje, $\overline{DL}$ je druga stranica pravokutnika $ADLM$, a njena duljina jednaka je duljini visine trokuta CAD. Dakle, vrijedi

$$P(ADLM) = |AD| \cdot |DL| \quad \text{i} \quad P(CAD) = \frac{|AD| \cdot |DL|}{2}.$$

Iz toga zaključujemo

$$P(CAD) = \frac{1}{2} \cdot P(ADLM).$$

Analogno $P(KAB) = \frac{1}{2} \cdot P(ACHK)$ jer im je $\overline{AC}$ zajednička stranica te imaju visinu jednake duljine.
Iz sukladnosti trokuta CAD i KAB slijedi da je $P(CAD) = P(KAB)$, odakle je

$$\frac{1}{2} \cdot P(ADLM) = \frac{1}{2} \cdot P(ACHK).$$

Iz toga zaključujemo da je $P(ADLM) = P(ACHK)$.
Potpuno analogno dokazuje se da je $P(MLEB) = P(CBFG)$.
Zbrojimo li dobivene jednakosti

$$P(ADLM) = P(ACHK) \;\; \text{i} \;\; P(MLEB) = P(CBFG)$$

dobivamo

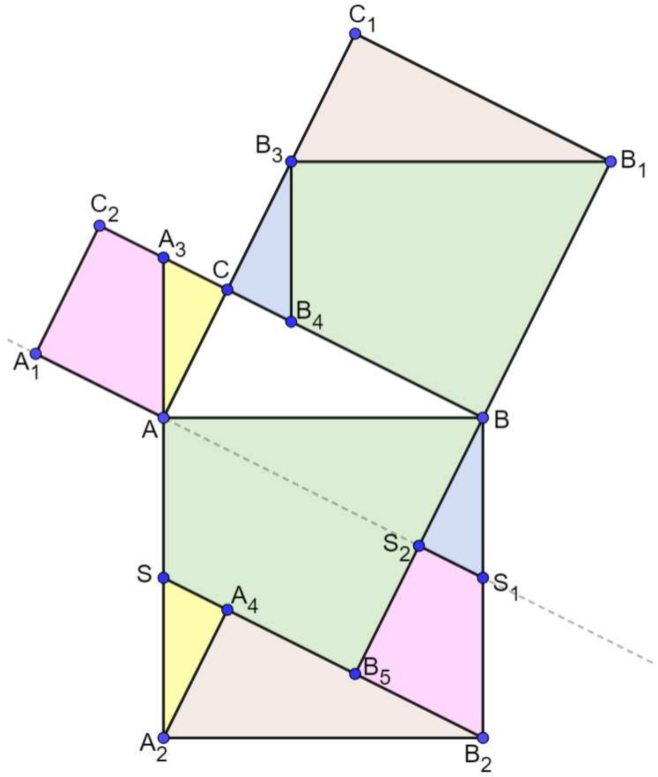
$$\begin{aligned} P(ADLM) + P(MLEB) &= P(ACHK) + P(CBFG) \\ P(BADE) &= P(ACHK) + P(CBFG). \end{aligned}$$

S obzirom da je $BADE$ kvadrat nad hipotenuzom pravokutnog trokuta, a $ACHK$ i $CBFG$ kvadrati nad katetama, pokazali smo da je zbroj površina kvadrata nad katetama jednak površini kvadrata nad hipotenuzom čime je dokazana tvrdnja Pitagorinog poučka. □

Razlaganje površina

Dokazi pomoću razlaganja površina, takozvani *mozaički dokazi* najčešće se pojavljuju samo u ilustriranim oblicima. Praktični su za osnovnu školu jer se učenici izrezivanjem i preslagivanjem dijelova površina mogu uvjeriti u tvrdnju Pitagorinog poučka. Promotrit ćemo jedan mozaik, opisati kako je nastao te matematički dokazati koji su dijelovi površina jednaki i zašto.

Dokaz 4. Neka je ABC pravokutan trokut s pravim kutom pri vrhu C. Neka je AA_2B_2B kvadrat nad hipotenuzom, a BB_1C_1C i ACC_2A_1 kvadrati nad katetama tog trokuta.
Točkom B_1 kontsruirajmo paralelu sa stranicom $\overline{AB}$ i označimo sjecište paralele i stranice $\overline{CC_1}$ sa B_3. Točkom B_3 konstruirajmo okomicu na stranicu $\overline{B_1B_3}$ i označimo sjecište B_4 okomice i stranice $\overline{BC}$.
Dužinu $\overline{AA_2}$ produžimo do sjecišta A_3 sa stranicom CC_2. Točkom B_2 konstruirajmo paralelu sa stranicom $\overline{BC}$ i označimo sjesište S paralele i stranice $\overline{AA_2}$.
Točkama B i A_2 konstruirajmo okomice na $\overline{B_2S}$ i označimo sjecišta okomice i $\overline{B_2S}$ sa B_5 i A_2 redom.
Neka su S_1 i S_2 sjecišta pravca AA_1 te stranica $\overline{BB_2}$ i $\overline{BB_5}$ redom. Time dobivamo mozaik prikazan na slici 1.8.



Slika 1.8: *mozaički dokaz*

Promotrimo četverokute $BB_1B_3B_4$ i B_5BAS. S obzirom da je BB_1C_1C kvadrat, a ABC pravokutan trokut s pravim kutom pri vrhu C, slijedi da su točke A, C, B_3 i C_1 kolinearne, tj. pripadaju istom pravcu. Sada iz načina konstrukcije slijedi da je četverokut ABB_1B_3 paralelogram pa vrijedi $|AB| = |B_3B_1|$. Točke B, B_1, B_5 i S_2 su kolinearne jer je $\overline{B_2S} \parallel \overline{BC}$, $\overline{BB_5} \perp \overline{B_2S}$ i jer je četverokut BB_1C_1C kvadrat. Dakle $\sphericalangle B_5BA$ i $\sphericalangle BB_1B_3$ su kutovi uz presječnicu paralelnih pravaca pa su međusobno sukladni. Nadalje zbog načina konstrukcije oba četverokuta imaju dva prava kuta. Iz toga slijedi da su svi kutovi četverokuta međusobno sukladni. Uz sukladnost kutova iz dokazane jednakosti $|AB| = |B_3B_1|$ slijedi da su četverokuti $BB_1B_3B_4$ i B_5BAS međusobno sukladni. Zbog toga vrijedi

$$P(BB_1B_3B_4) = P(B_5BAS). \tag{1.3}$$

Nadalje, promotrimo trokute $A_2B_2A_4$ i $B_3B_1C_1$. S obzirom da je BB_1C_1C kvadrat i vrijedi $\overline{BC} \parallel \overline{B_2A_4}$, možemo zaključiti da je $\overline{B_2A_4} \parallel \overline{B_1C_1}$. Sada iz načina konstrukcije slijedi da je $\sphericalangle B_2A_4A_2 = \sphericalangle B_1C_1B_3 = 90°$.S obzirom da je AA_2B_2B kvadrat, a ABB_1B_3 paralelogram, slijedi $\overline{A_2B_2} \parallel \overline{B_3B_1}$ i $|A_2B_2| = |B_3B_1|$. Možemo zaključiti da su $\sphericalangle A_2B_2A_4$ i $\sphericalangle B_3B_1C_1$ kutovi s paralelnim kracima pa vrijedi $\sphericalangle A_2B_2A_4 = \sphericalangle B_3B_1C_1$. Dakle, trokuti $A_2B_2A_4$ i B_3B_1C su sukladni po K-S-K teoremu o sukladnosti trokuta. Sukladni likovi jednakih su površina pa vrijedi

$$P(A_2B_2A_4) = P(B_3B_1C_1). \tag{1.4}$$

Analogno bi se pokazalo da je tim trokutima sukladan i početni trokut ABC.
Promotrimo trokute A_2A_4S i ACA_3. Iz načina konstrukcije slijedi $\sphericalangle A_2A_4S = \sphericalangle ACA_3 = 90°$. Osim toga, $\sphericalangle SA_2A_4$ i $\sphericalangle A_3AC$ su kutovi uz presječnicu paralelnih pravaca jer su $\overline{SA_4}$ i $\overline{A_3C}$ okomiti na par paralelnih pravaca, osnosno vrijedi $\sphericalangle SA_2A_4 = \sphericalangle A_3AC$. S obzirom da su trokuti ABC i $A_2B_2A_4$ sukladni, vrijedi $|A_2A_4| = |AC|$. Iz toga zaključujemo da su trokuti SA_2A_4 i ACA_3 sukladni po K-S-K poučku o sukladnosti pa vrijedi

$$P(A_2A_4S) = P(ACA_3). \tag{1.5}$$

Da bismo pokazali sukladnost četverokuta $B_5B_2S_1S_2$ i $A_1AA_3C_2$ dokazat ćemo najprije sukladnost trokuta ABC i B_2BB_5. S obzirom da je $\overline{BB_5} \perp \overline{B_2S}$, vrijedi $\sphericalangle ACB = \sphericalangle B_2B_5B = 90°$. Nadalje, iz sukladnosti trokuta ABC i $A_2B_2A_4$ slijedi $\sphericalangle B_5BB_2 = 90° - \sphericalangle A_2B_2A_4 = 90° - \sphericalangle ABC = \sphericalangle CAB$. S obzirom da je AA_2B_2B kvadrat, vrijedi $|AB| = |B_2B|$. Iz toga zaključujemo da su trokuti ABC i B_2BB_5 sukladni po K-S-K poučku o sukladnosti trokuta.
Promotrimo sada četverokute $B_5B_2S_1S_2$ i $A_1AA_3C_2$. Iz načina konstrukcije i činjenice da su točke B_5, S_2, B i B_1 kolinearne slijedi sa su stranice četverokuta međusobno paralelne iz čega slijedi da su svi kutovi četverokuta međusobno sukladni. Iz sukladnosti trokuta ABC i B_2BB_5 možemo zaključiti da je $|B_5S_2| = |A_1C_2|$, jer je ACC_2A_1 kvadrat. Sada zaključujemo da su četverokuti $B_5B_2S_1S_2$ i $A_1AA_3C_2$ međusobno sukladni. Sukladni likovi jednakih su površina, odnosno

$$P(B_5B_2S_1S_2) = P(A_1AA_3C_2). \tag{1.6}$$

Konačno, promotrimo posljednji par likova, trokute S_2S_1B i CB_4B_3. Iz načina konstrukcije i činjenice da je ABB_1B_3 paralelogram, slijedi $\overline{B_4B_3} \parallel \overline{S_1B}$. S obzirom da su B_5, S_2, B i B_1 kolinearne točke, iz načina konstrukcije zaključujemo i $\overline{S_2B} \parallel \overline{CB_3}$. Također, S_2 i S_1 pripadaju pravcu A_1A (zbog načina konstrukcije), a točke B, C, A_3 i C_2 su kolinearne jer je ACC_2A_1 kvadrat, a trokut ABC pravokutan s pravim kutom pri vrhu C. Sada zaključujemo da su i stranice $\overline{S_2S_1}$ i $\overline{CB_4}$ međusobno paralelne. S obzirom su stranice trokuta međusobno paralelne svi su kutovi trokuta međusobno sukladni. Vrijedi $|CC_1| = |B_1C_1|$ jer je je BB_1C_1C kvadrat. Iz činjenice da su $B_3B_1C_1$ i B_2BB_5 sukladni trokuti, vrijedi $|B_1C_1| = |B_5B|$ pa je $|CC_1| = |B_5B|$. Iz sukladnosti trokuta $B_3B_1C_1$ i B_2BB_5 također zaključujemo $|B_3C_1| = |B_2B_5|$. Iz sukladnosti četverokuta $B_5B_2S_1S_2$ i $A_1AA_3C_2$ i činjenice da je $AA_3C_2A_1$ kvadrat, slijedi $|AA_1| = |A_1C_2| = |B_2B_5| = |B_5S_2|$. Odnosno, vrijedi $|B_3C_1| = |B_5S_2|$. Sada zaključujemo

$$\begin{aligned}|CB_3| &= |CC_1| - |B_3C_1| \\ &= |B_5B| - |B_5S_2| \\ &= |S_2B|.\end{aligned}$$

Slijedi da su trokuti S_2S_1B i CB_4B_3 sukladni prema K-S-K poučku o sukladnosti trokuta pa je

$$P(S_2S_1B) = P(CB_4B_3). \tag{1.7}$$

Kvadrat AA_2B_2B sastoji se od četverokuta B_5BAS i $B_5B_2S_1S_2$ te trokuta $A_2B_2A_4$, A_2A_4S i S_2S_1B pa vrijedi

$$P(AA_2B_2B) = P(B_5BAS) + P(B_5B_2S_1S_2) + P(A_2B_2A_4) + P(A_2A_4S) + P(S_2S_1B).$$

Zbog dokazanih sukladnosti likova te 1.3, 1.4, 1.5, 1.6 i 1.7 vrijedi:

$$P(AA_2B_2B) = P(BB_1B_3B_4) + P(A_1AA_3C_2) + P(B_3B_1C_1) + P(ACA_3) + P(CB_4B_3). \tag{1.8}$$

Kvadrat BB_1C_1C sastoji se od četverokuta $BB_1B_3B_4$ te trokuta $B_3B_1C_1$ i CB_4B_3 pa vrijedi

$$P(BB_1B_3B_4) + P(B_3B_1C_1) + P(CB_4B_3) = P(BB_1C_1C). \tag{1.9}$$

Također, kvadrat ACC_2A_1 sastoji se od četverokuta $A_1AA_3C_2$ i trokuta ACA_3, dakle vrijedi

$$P(A_1AA_3C_2) + P(ACA_3) = P(ACC_2A_1). \tag{1.10}$$

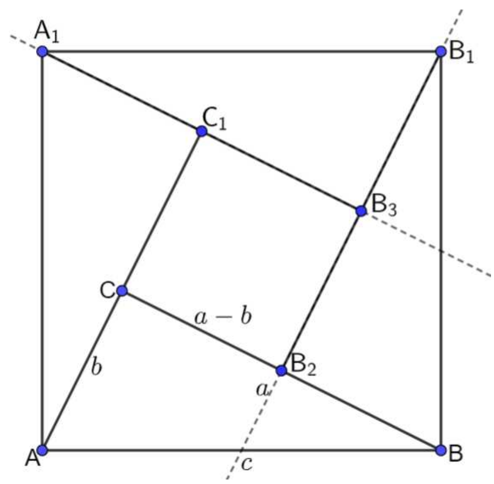
Uvrstimo 1.9 i 1.10 u 1.8 i dobivamo

$$P(AA_2B_2B) = P(ACC_2A_1) + P(BB_1C_1C)$$

S obzirom da je AA_2B_2B kvadrat nad hipotenuzom, a ACC_2A_1 i BB_1C_1C kvadrati nad katetama pravokutnog trokuta ABC, zapravo smo pokazali da je površina kvadrata nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednaka zbroju površina kvadrata nad njegovim katetama i time dokazali tvrdnju Pitagorinog poučka. □

Dokazi pomoću računanja

Dokazi pomoću računanja temelje se na izravnom računanju površina likova pomoću kojih se potom dokazuje tvrdnja Pitagorinog poučka. Promotrimo jedan dokaz Pitagorinog poučka pomoću računanja.



Slika 1.9: Slika uz *Dokaz 5*

Dokaz 5. Neka je ABC pravokutan trokut s hipotenuzom duljine c i katetama duljina a i b. Nad hipotenuzom trokuta ABC konstruirajmo kvadrat ABB_1A_1 sa stranicom duljine c, tako da vrh C bude unutar tog kvadrata kao na slici 1.9. Točkom A_1 konstruirajmo paralelu sa stranicom $\overline{BC}$, a točkom B_1 paralelu sa stranicom $\overline{AC}$. Neka je B_3 presjek tih dviju konstruiranih paralela. Dužinu $\overline{AC}$ produžimo do presjeka C_1 s dužinom $\overline{A_1B_3}$.

Promotrimo trokute ABC i BB_1B_2. S obzirom da je $\sphericalangle BCA = 90°$ i $\overline{AC} \parallel \overline{B_2B_1}$, slijedi da je $\sphericalangle BB_2B_1 = 90°$. Nadalje, vrijedi

$$\sphericalangle B_2BB_1 = 90° - \sphericalangle ABC = \sphericalangle CAB.$$

S obzirom da je ABB_1A_1 kvadrat (tako smo konstruirali), također vrijedi

$$|AB| = |BB_1| = c.$$

Iz toga zaključujemo da su trokuti ABC i BB_1B_2 sukladni po K-S-K teoremu o sukladnosti trokuta. Analogno dokazujemo da su trokuti $B_1A_1B_3$ i A_1AC sukladni trokutima BB_1B_2 i ABC. Dakle, trokuti ABC, BB_1B_2, $B_1A_1B_3$ i A_1AC međusobno su sukladni.
Promotrimo sada četverokut $B_2B_3C_1C_2$. Svakom od unutarnjih kutova tog četverokuta, susjedan kut je pravi. Iz toga slijedi da su svi kutovi četverokuta $B_2B_3C_1C_2$ pravi. Osim toga, vrijedi

$$|CB_2| = |CB| - |B_2B| = a - b \text{ i } |B_2B_3| = |B_2B_1| - |B_3B_1| = a - b.$$

Dakle kvadrat ABB_1A_1 sastoji se od četiri sukladna trokuta s katetama duljina a i b, a hipotenuzom duljine c i kvadrata $B_2B_3C_1C_2$ sa stranicom duljine $a - b$.

Iz toga zaključujemo da je

$$\begin{aligned} P(ABB_1A_1) &= P(B_2B_3C_1C) + P(ABC) + P(BB_1B_2) + P(B_1A_1B_3) + P(A_1AC_1) \\ P(ABB_1A_1) &= P(B_2B_3C_1C) + 4 \cdot P(ABC). \end{aligned} \tag{1.11}$$

S obzirom da je ABB_1A_1 kvadrat sa stranicom duljine c, vrijedi

$$P(ABB_1A_1) = c^2.$$

Zatim, $B_2B_3C_1C$ je kvadrat sa stranicom duljine $a - b$ pa je

$$P(B_2B_3C_1C) = (a - b)^2.$$

Konačno, ABC je pravokutan trokut s katetama duljina a i b pa je

$$P(ABC) = \frac{ab}{2}.$$

Uvrstimo dobivene površine u jednakost 1.11 pa slijedi

$$\begin{aligned} c^2 &= (a - b)^2 + 4 \cdot \frac{ab}{2} \\ &= a^2 - 2ab + b^2 + 2ab \\ &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

□

Sličnost geometrijskih likova

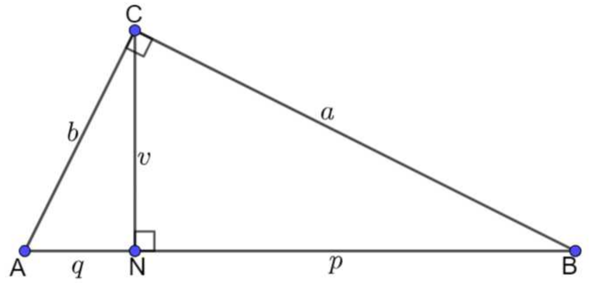
Najviše dokaza koji se zasnivaju na sličnosti geometrijskih likova bazirano je upravo na sličnosti trokuta. Promotrit ćemo četiri takva dokaza koja su prikladna za nastavu matematike u srednjoj školi.

Dokaz 6. Neka je ABC pravokutan trokut s hipotenuzom duljine c i katetama duljina a i b. Neka je N nožište visine iz vrha C na hipotenuzu te $|CN| = v$, $|AN| = q$ i $|NB| = p$.
Vrijedi $\sphericalangle ANC = \sphericalangle CNB = \sphericalangle BCA = 90°$. Nadalje, trokuti CAN i BCN imaju po jedan zajednički šiljasti kut s trokutom ABC pa vrijedi $\sphericalangle CAN = \sphericalangle CAB$ i $\sphericalangle NBC = \sphericalangle ABC$. Dakle, prema K-K teoremu o sličnosti trokuta vrijedi

$$\triangle ABC \sim \triangle CAN \sim \triangle BCN \tag{1.12}$$

pa za njihove stranice vrijedi:

$$\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{|AN|}{|AC|} \text{ i } \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{|BN|}{|BC|}.$$



Slika 1.10: Slika uz *Dokaze 6 i 7*

Uvrštavanjem duljina stranica dobivamo

$$\frac{b}{c} = \frac{q}{b} \;\text{ i }\; \frac{a}{c} = \frac{p}{a}.$$

Množenjem jednakosti sa bc, odnosno ac slijedi

$$b^2 = c \cdot q \;\text{ i }\; a^2 = c \cdot p.$$

Zbrajanjem dobivenih jednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c \cdot q + c \cdot p \\ &= c \cdot (p + q) \\ &= c \cdot c \\ &= c^2. \end{aligned}$$

□

Dokaz 7. Neka je ABC pravokutan trokut s hipotenuzom duljine c i katetama duljina a i b. Neka je N nožište visine iz vrha C na hipotenuzu.
Iz prethodnog dokaza, 1.12 slijedi $\triangle ABC \sim \triangle CAN \sim \triangle BCN$. Koeficijent sličnosti trokuta ABC i CAN je $\frac{c}{b}$, a koeficijent sličnosti trokuta CAN i BCN je $\frac{c}{a}$.
Neka su P, P_1 i P_2 redom površine trokuta ABC, CAN i BCN. Omjer površina sličnih trokuta jednak je kvadratu omjera koeficijenta sličnosti tih trokuta. Iz toga zaključujemo da je:

$$P : P_1 = c^2 : b^2 \;\text{ i }\; P_1 : P_2 = b^2 : c^2,$$

odnosno

$$P : P_1 : P_2 = c^2 : b^2 : a^2.$$

Sada slijedi

$$P = k \cdot c^2,\ P_1 = k \cdot b^2 \text{ i } P_2 = k \cdot a^2,$$

gdje je $k > 0$ faktor proporcionalnosti.
Kako je $P = P_1 + P_2$, slijedi

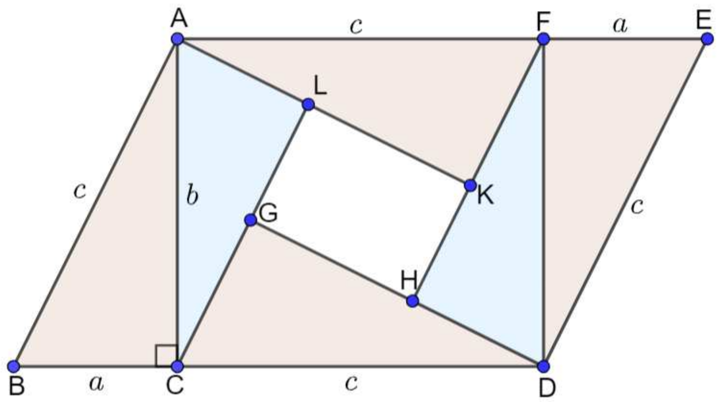
$$k \cdot c^2 = k \cdot b^2 + k \cdot a^2.$$

Dijeljenjem izraza s $k > 0$ dobivamo

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

□

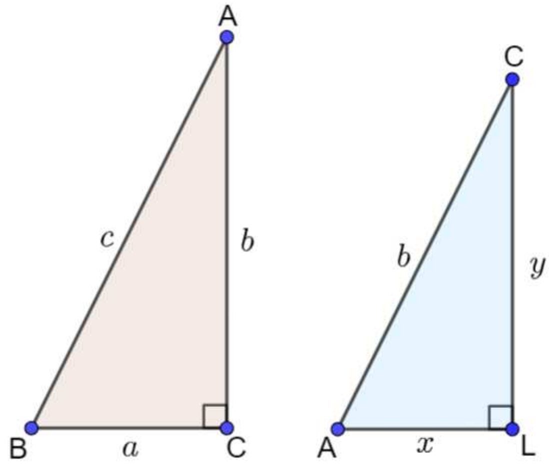
Dokaz 8. Neka je ABC pravokutan trokut s hipotenuzom duljine c te katetama duljina a i b. Stranicu $\overline{BC}$ produljimo preko točke C za duljinu c i označimo točku D. Nadopunimo sliku do paralelograma $ABDE$ čije su stranice duljina c i $a + c$. Točkama C i F konstruirajmo paralele sa stranicom $\overline{AB}$, a točkama A i D okomice na stranicu $\overline{AD}$. Sjecišta nacrtanih pravaca označimo sa G, H, K i L kao na slici 1.11.



Slika 1.11: Slika uz *Dokaz 8*

Vrijedi $\sphericalangle BCA = \sphericalangle DGC = \sphericalangle EFD = \sphericalangle AKF = 90°$. Nadalje $\sphericalangle ABC$, $\sphericalangle GCD$, $\sphericalangle KFA$ i $\sphericalangle DEF$ su kutovi uz presječnicu paralelnih pravaca. Dakle, vrijedi $\sphericalangle ABC = \sphericalangle GCD = \sphericalangle KFA = \sphericalangle DEF$. Također, vrijedi $|AB| = |CD| = |DE| = |FA| = c$ pa prema K-S-K teoremu o sukladnosti trokuta vrijedi da su trokuti ABC, CDG, DEF i AFK međusobno sukladni.
Promotrimo trokute ABC i CAL na slici 1.12. Vrijedi $\sphericalangle BCA = \sphericalangle ALC = 90°$.
Nadalje, jer je ACL pravokutan trokut, a trokuti GCD i ABC su sukladni, vrijedi

$$\begin{aligned} \sphericalangle ACL &= 90° - \sphericalangle GCD \\ &= 90° - \sphericalangle ABC \\ &= \sphericalangle CAB. \end{aligned}$$



Slika 1.12: Trokuti ABC i CAL

Dakle, trokuti ABC i CAL su slični prema K-K teoremu o sličnosti trokuta. Potpuno analogno dokazalo bi se da je trokut FDH sličan trokutu ABC. Iz sličnosti trokuta ABC i CAL zaključujemo da za duljine njihovih stranica vrijedi

$$\frac{|BC|}{|AL|} = \frac{|AB|}{|CA|} \text{ i } \frac{|CA|}{|LC|} = \frac{|AB|}{|CA|}.$$

Uvrstimo duljine stranica $|BC| = a$, $|AL| = x$, $|AB| = c$, $|CA| = b$ i $|LC| = y$ pa dobivamo

$$\frac{a}{x} = \frac{c}{b} \text{ i } \frac{b}{y} = \frac{c}{b}.$$

Pomnožimo dobivene jednakosti sa bx i by redom:

$$cx = ab \text{ i } cy = b^2.$$

Izrazimo x i y iz jednakosti, odnosno podijelimo jednakosti sa c:

$$x = \frac{ab}{c} \text{ i } y = \frac{b^2}{c}. \tag{1.13}$$

Paralelogram $ABCD$ ima stranicu duljine $a + c$ i visinu duljine b pa je njegova površina

$$P = (a + c) \cdot b. \tag{1.14}$$

Također, površina paralelograma sastoji se od četiri međusobno sukladna trokuta s katetama duljina a i b, dva međusobno sukladna pravokutna trokuta s katetama duljina x i y

te četverokuta $GHKL$. S obzirom da je $\sphericalangle ALC = \sphericalangle DHF = \sphericalangle FKA = \sphericalangle CGD = 90°$, onda je četverokut $GHKL$ pravokutnik jer su i njegovi unutarnji kutovi pravi. Za duljine njegovih stranica vrijedi $|GH| = b - x$ i $|HK| = y - a$. Pomoću navedenih likova, površinu paralelograma možemo izraziti i na sljedeći način:

$$\begin{aligned} P &= 4 \cdot \frac{ab}{2} + 2 \cdot \frac{xy}{2} + (b - x) \cdot (y - a) \\ &= 2ab + xy + (b - x) \cdot (y - a) \end{aligned}.$$

Sredimo dobiven izraz za površinu uvrštavanjem izvedenih x i y u 1.13

$$\begin{aligned} P &= 4 \cdot \frac{ab}{2} + 2 \cdot \frac{xy}{2} + (b - x) \cdot (y - a) \\ &= 2ab + xy + (b - x) \cdot (y - a) \\ &= 2ab + \frac{ab}{c} \cdot \frac{b^2}{c} + \left(b - \frac{ab}{c}\right) \cdot \left(\frac{b^2}{c} - a\right) \\ &= 2ab + \frac{ab^3}{c^2} + \frac{b^3}{c} - ab - \frac{ab^3}{c^2} + \frac{a^2b}{c} \\ &= ab + \frac{b^3}{c} + \frac{a^2b}{c} \\ &= b\left(a + \frac{b^2}{c} + \frac{a^2}{c}\right). \end{aligned}$$

Izjednačimo dobivenu površinu paralelograma s 1.14 i dobivamo

$$(a + c) \cdot b = b\left(a + \frac{b^2}{c} + \frac{a^2}{c}\right).$$

Podijelimo izraz sa b

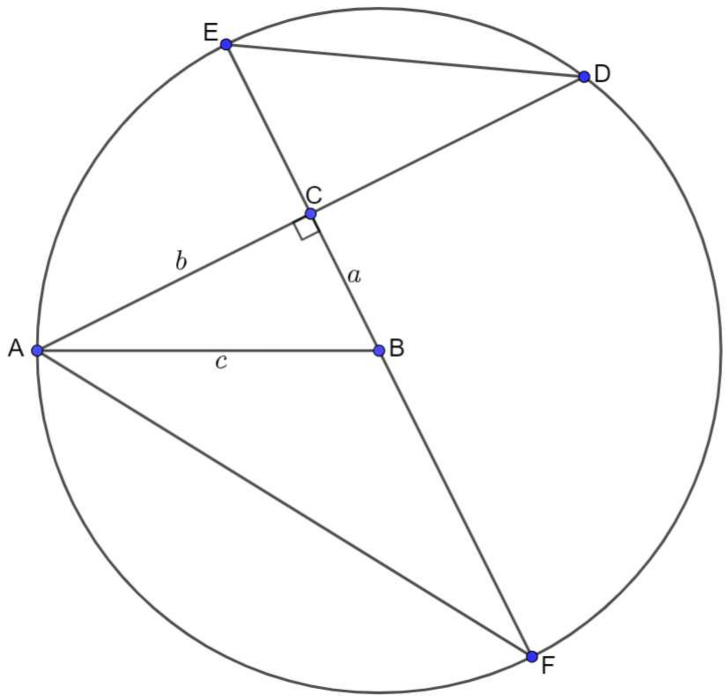
$$a + c = a + \frac{b^2}{c} + \frac{a^2}{c}.$$

Oduzmemo a cijeloj jednakosti pa ju pomnožimo sa c:

$$\begin{aligned} c &= \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} \\ c^2 &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

□

U nastavku slijedi dokaz koji, osim sličnosti trokuta, koristi svojstva kružnice i tetive.



Slika 1.13: Slika uz *Dokaz 9*

Dokaz 9. Zadan je pravokutni trokut ABC s katetama duljina a i b te hipotenuzom duljine c. Oko vrha B opišemo kružnicu polumjera $c = |AB|$. Produžimo katete trokuta do sjecišta D, E i F s kružnicom kao na slici 1.13.
Promotrimo trokute ABC i ACF. Kutovi ACF i DCE su vršni pa vrijedi $\sphericalangle ACF = \sphericalangle DCE$. Nadalje, $\sphericalangle AFC$ i $\sphericalangle EDC$ su obodni kutovi nad istim kružnim lukom, $\overset{\frown}{AE}$. Iz toga zaključujemo da je $\sphericalangle EDC = \sphericalangle AFC$ jer su obodni kutovi nad istim kružnim lukom međusobno sukladni. Dakle trokuti ABC i ACF su slični po K-K poučku o sličnosti trokuta pa za duljine njihovih stranice vrijedi:

$$\begin{aligned} \frac{|AC|}{|FC|} &= \frac{|CE|}{|CD|} \\ |AC| \cdot |CD| &= |CE| \cdot |FC|. \end{aligned} \tag{1.15}$$

S obzirom da je $\overline{EF}$ promjer kružnice, a $\overline{EF} \perp \overline{AD}$ jer je pri vrhu C pravi kut, vrijedi $|AC| = |CD| = b$. Osim toga, $\overline{BE}$ i $\overline{BF}$ su polumjeri kružnice jer je B njeno središte pa vrijedi $|BE| = |BF| = c$. Iz navedenoga zaključujemo $|CE| = |BE| - |BC| = c - a$ i

$|FC| = |BF| + |BC| = c + a$. Uvrstimo dobiveno u 1.15 i sredimo dobiveni izraz:

$$\begin{aligned} b \cdot b &= (c - a) \cdot (c + a) \\ b^2 &= c^2 - a^2 \\ c^2 &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

□

Poglavlje 2

Generalizacija Pitagorinog poučka

Prilikom potrage za odgovorom na neko pitanje, u matematici se vrlo često postavlja pitanje poopćenja neke tvrdnje. Poopćenjima Pitagorinog poučka bavili su se brojni matematičari. Dokazivanjem Pitagorinog poučka i njegovog obrata, postalo je jako zanimljivo tražiti uređene trojke brojeva za koje vrijedi Pitagorin poučak. U ovom poglavlju reći ćemo nešto o Pitagorinim trojkama te promatrati generalizacije Pitagorinog poučka u ravnini, a potom i u prostoru.

2.1 Pitagorine trojke

Pravokutan trokut čije su duljine stranica prirodni brojevi nazivamo Pitagorin trokut. Ako uređena trojka (a, b, c) zadovoljava jednadžbu $a^2 + b^2 = c^2$, nazivamo ju Pitagorinom trojkom. Ukoliko su uz to a, b i c relativno prosti, onda kažemo da je (a, b, c) primitivna Pitagorina trojka. Proučavanje Pitagorinih trojki usko je vezano s rješavanjem diofantskih jednadžbi, a njihova geometrijska interpretacija dobra je motivacija učenicima za rješavanje ovakvih problema. Važan korak u pronalaženju Pitagorinih trojki je određivanje formule koja daje sva rješenja jednadžbe $a^2 + b^2 = c^2$, odnosno, rješavanje te diofantske jednadžbe. Prije rješenja te diofantske jednadžbe, pokažimo sljedeći korolar.

Korolar 2.1.1. *U svakoj primitivnoj Pitagorinoj trojki (a, b, c) točno jedan od brojeva a i b je neparan.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, neka su a i b parni brojevi. Onda a i b nisu relativno prosti, te imaju barem jednog zajedničkog djelitelja, broj 2. To je kontradikcija jer u pitanju nije primitivna trojka.
Pretpostavimo sada da su a i b oba neparni. Tada ih možemo napisati u obliku

$$a = 2k + 1, k \in \mathbb{N} \text{ i } b = 2l + 1, l \in \mathbb{N}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (2k+1)^2 + (2l+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 + 4l^2 + 4l + 1 \\ &= 4(k^2 + k + l^2 + l) + 2. \end{aligned}$$

Odnosno, $a^2 + b^2$ pri dijeljenju s 4 daje ostatak 2. Međutim c^2 pri dijeljenju s 4 ne može dati ostatak 2 jer ne postoji c takav da je $c^2 = 4m + 2, m \in \mathbb{N}$. Opet dolazimo do kontradikcije. Zaista, u svakoj primitivnoj Pitagorinoj trojki (a, b, c) točno jedan od brojeva a i b je neparan. □

Teorem 2.1.2. *Sve primitivne Pitagorine trojke (a, b, c) u kojima je b paran, dane su formulama*

$$a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2,$$

gdje je $m > n$ te su m i n relativno prosti prirodni brojevi, različite parnosti.

Dokaz. S bzirom da je (a, b, c) primitivna Pitagorina trojka, vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$, pri čemu su a, b i c relativno prosti. Izrazimo li iz te jednadžbe b^2, dobivamo

$$b^2 = c^2 - a^2,$$

odnosno, primjenom razlike kvadrata,

$$b^2 = (c + a)(c - a).$$

Broj b je paran pa ga možemo zapisati u obliku $b = 2z, z \in \mathbb{N}$. Brojevi $c + a$ i $c - a$ moraju biti iste parnosti jer je u pitanju zbroj i razlika istih brojeva c i a. Kad bi oba bila neparna, onda bi i umnožak $(c + a)(c - a)$ bio neparan, što nije moguće jer je b^2 paran (kao kvadrat parnog broja). Dakle, $c + a$ i $c - a$ su parni pa postoje prirodni brojevi x i y takvi da je

$$c + a = 2x \ \text{ i } \ c - a = 2y.$$

Uvrstimo $b = 2c$, $c + a = 2x$ i $c - a = 2y$ u $b^2 = (c + a)(c - a)$ pa dobivamo:

$$\begin{aligned} (2z)^2 &= 2x \cdot 2y \\ 4z^2 &= 4xy. \end{aligned}$$

Dijeljenjem jednadžbe brojem 4 dobivamo:

$$z^2 = xy.$$

Riješimo sada sustav

$$\begin{cases} c + a = 2x \\ c - a = 2y. \end{cases}$$

Zbrajanjem jednadžbi dobivamo $2c = 2x + 2y$ pa dijeljenjem brojem 2 slijedi

$$c = x + y.$$

Uvrstimo dobiveni c u jednadžbu $c + a = 2x$ pa slijedi

$$x + y + a = 2x,$$

odnosno

$$a = x - y.$$

S obzirom da su a i b relativno prosti jer je (a, b, c) primitivna Pitagorina trojka, onda i x i y moraju biti relativno prosti. Uz to je $z^2 = xy$ pa postoje prirodni, relativno prosti brojevi m i n takvi da je $x = m^2$ i $y = n^2$. Uvrštavanjem u $z^2 = xy$ slijedi

$$z^2 = m^2 \cdot n^2.$$

Kako su z, m i n prirodni brojevi, korijenovanjem dobivamo

$$z = m \cdot n.$$

Uvrštavanjem u $b = 2z$ dobivamo $b = 2mn$. Također, $a = x - y$ i $c = x + y$, odnosno $a = m^2 - n^2$ i $c = m^2 + n^2$. Dakle, dobili smo

$$a = m^2 - n^2, \; b = 2mn, \; c = m^2 + n^2.$$

S obzirom da je po pretpostavci teorema b paran, prema prethodnom korolaru, a i c moraju biti neparni jer u protivnom nisu relativno prosti s b već imaju zajedničkog djelitelja 2. Nadalje, kad bi m i n bili iste parnosti, onda bi $a = m^2 - n^2$ bio paran, a već smo pokazali da je neparan. Dakle, m i n različite su parnosti. Lako se provjerava da brojevi

$$a = m^2 - n^2, \; b = 2mn, \; c = m^2 + n^2$$

zaista zadovoljavaju jednadžbu $a^2 + b^2 = c^2$, odnosno da su oni Pitagorine trojke. Provjeru vršimo uvrštavanjem:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= \left(m^2 - n^2\right)^2 + (2mn)^2 \\ &= m^4 - 2m^2n^2 + n^4 + 4m^2n^2 \\ &= m^4 + 2m^2n^2 + n^4 \\ &= \left(m^2 + n^2\right)^2 \\ &= c^2. \end{aligned}$$

Preostalo je još provjeriti da su a i c relativno prosti. Pretpostavimo suprotno, da a i c nisu relativno prosti. Tada postoji $d > 1$ kojim su a i c djeljivi. Već smo zaključili da su a i c neparni pa i d mora biti neparan. S obzirom da su a i c djeljivi brojem d, njihov zbroj i njihova razlika također je djeljiva brojem d. Dakle, imamo

$$d \mid a + c,$$

odnosno, uvrštavanjem $a = m^2 - n^2$ i $c = m^2 + n^2$

$$\begin{aligned} &d \mid m^2 - n^2 + m^2 - n^2 \\ &d \mid 2m^2. \end{aligned}$$

Analogno, uvrštavanjem $a = m^2 - n^2$ i $c = m^2 + n^2$ u $d \mid c - a$ dobivamo

$$\begin{aligned} &d \mid m^2 + n^2 - (m^2 - n^2) \\ &d \mid m^2 + n^2 - m^2 + n^2 \\ &d \mid 2n^2. \end{aligned}$$

Kako je d neparan, $d \mid 2m^2$ i $d \mid 2n^2$ je u kontradikciji s pretpostavkom da su m i n (pa time i m^2 i n^2) relativno prosti. Time smo dokazali sve tvrdnje teorema. □

Pronalaskom jedne primitivne Pitagorine trojke

$$(m^2 - n^2, 2mn, m^2 + n^2),$$

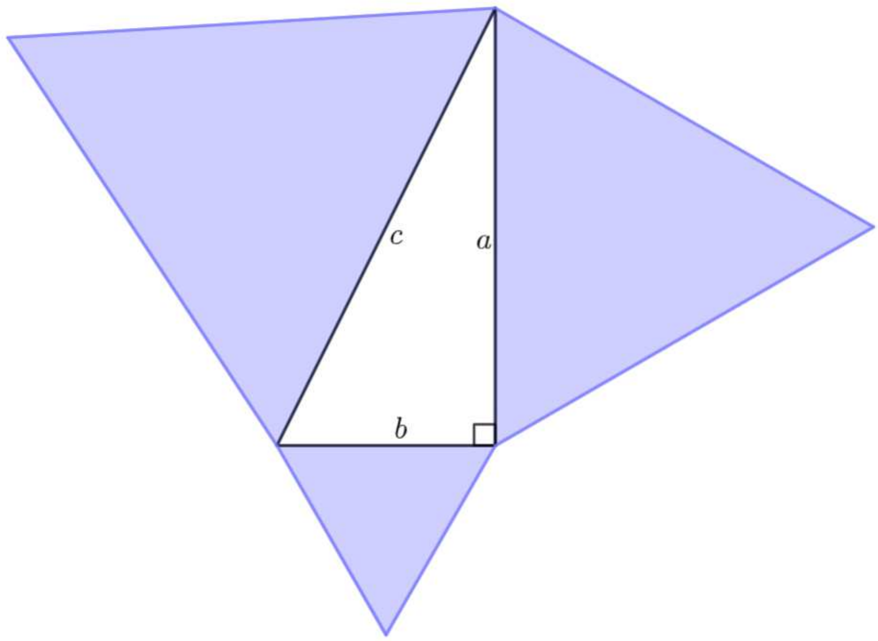
množenjem proizvoljnim prirodnim brojevima većim od 1, dobivamo beskonačno mnogo Pitagorinih trojki. Možemo zaključiti da su sve Pitagorine trojke dane identitetom

$$\left[d(m^2 - n^2)\right]^2 + (2dmn)^2 = \left[d(m^2 + n^2)\right]^2, d \in \mathbb{N}.$$

2.2 Ravnina

Vrlo je jednostavno pokazati kako Pitagorin poučak neće vrijediti za trokut koji nije pravokutan, odnosno da zbroj kvadrata nad kraćim stranicama nije jednak kvadratu nad najduljom stranicom. Međutim, promatramo li pravokutni trokut i neke druge likove konstruirane nad njegovim stranicama, naići ćemo na brojne analogone Pitagorinog poučka.

Teorem 2.2.1. *Ako nad stranicama pravokutnog trokuta konstruiramo jednakostranične trokute, onda je površina trokuta nad hipotenuzom jednaka zbroju površina trokuta nad katetama.*



Slika 2.1: Analogija na jednakostranične trokute nad stranicama

Dokaz. S obzirom na to da je trokut pravokutan, za duljine njegovih stranice vrijedi:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Pomnožimo li tu jednakost sa $\frac{\sqrt{3}}{4}$, dobit ćemo

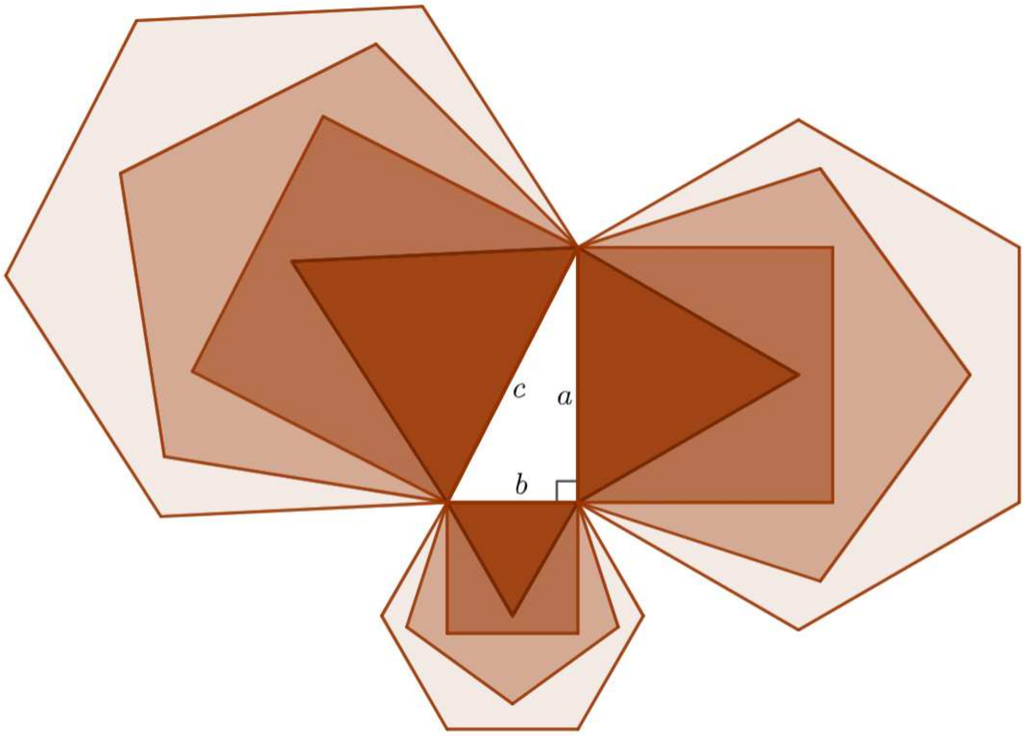
$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}c^2. \tag{2.1}$$

Površina jednakostraničnog trokuta stranice duljine x računa se po formuli

$$P = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

pa je dobivenom jednakošću 2.1 zapravo pokazano da je zbroj površina jednakostraničnih trokuta nad katetama jednaka površini jednakostraničnog trokuta nad hipotenuzom pravokutnog trokuta i time je dokazana tvrdnja teorema. □

Krenemo li korak dalje i promotrimo pravilne peterokute, šesterokute ili bilo koje druge međusodno slične (ne nužno pravilne) likove konstruirane nad stranicama pravokutnog trokuta, doći ćemo do istog rezultata. Dakle, Pitagorin poučak možemo generalizirati na bilo koje međusobno slične likove konstruirane nad stranicama pravokutnog trokuta. Uočimo da smo i u prethodnom teoremu zapravo promatrali slične likove nad stranicama pravokutnog trokuta jer su svi jednakostranični trokuti međusobno slični. Dokažimo izrečenu generalizaciju u sljedećem teoremu.



Slika 2.2: Generalizacija Pitagorinog poučka

Teorem 2.2.2. *Ako nad stranicama pravokutnog trokuta konstruiramo slične likove, onda je površina lika nad hipotenuzom jednaka zbroju površina likova nad katetama.*

Dokaz. Neka su a i b duljine kateta i c duljina hipotenuze pravokutnog trokuta. Neka su P_a i P_b površine likova konstruiranih na katetama, a P_c površina lika nad hipotenuzom i neka su sva tri lika međusobno slična. Likovi nad katetom a i hipotenuzom c međusobno su slični, s koeficijentom sličnosti $\frac{a}{c}$. Također, likovi nad katetom b i hipotenuzom c međusobno su slični, s koeficijentom sličnosti $\frac{b}{c}$. Omjeri površina sličnih likova jednaki su kvadratu koeficijenta sličnosti. Dakle, vrijedi:

$$\frac{P_a}{P_c} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \text{ i } \frac{P_b}{P_c} = \left(\frac{b}{c}\right)^2$$
$$\frac{P_a}{P_c} = \frac{a^2}{c^2} \text{ i } \frac{P_b}{P_c} = \frac{b^2}{c^2}$$

Pomnožimo li obje jednakosti s c^2 dobivamo:

$$a^2 = \frac{P_a}{P_c} \cdot c^2 \text{ i } b^2 = \frac{P_b}{P_c} \cdot c^2$$

Kako je u pitanju pravokutan trokut s katetama a i b te hipotenuzom duljine c, za duljine stranica vrijedi $a^2 + b^2 = c^2$. Konačno, uvrstimo izvedene izraze za a^2 i b^2 te dobivamo:

$$\frac{P_a}{P_c} \cdot c^2 + \frac{P_b}{P_c} \cdot c^2 = c^2.$$

Množenjem jednakosti sa P_c (površina lika nad hipotenuzom koja je sigurno pozitivna) slijedi

$$P_a \cdot c^2 + P_b \cdot c^2 = P_c \cdot c^2,$$

a dijeljenjem s c^2 dobivamo

$$P_a + P_b = P_c.$$

Time smo dokazali tvrdnju teorema. □

Iako Pitagorin poučak ne vrijedi za trokut koji nije pravokutan, postoje generalizacije poučka koje su primjenjive na trokutu koji nije pravokutan. Jedna od njih je djelo Trana Quanga Huanga, vijetnamskog matematičara.

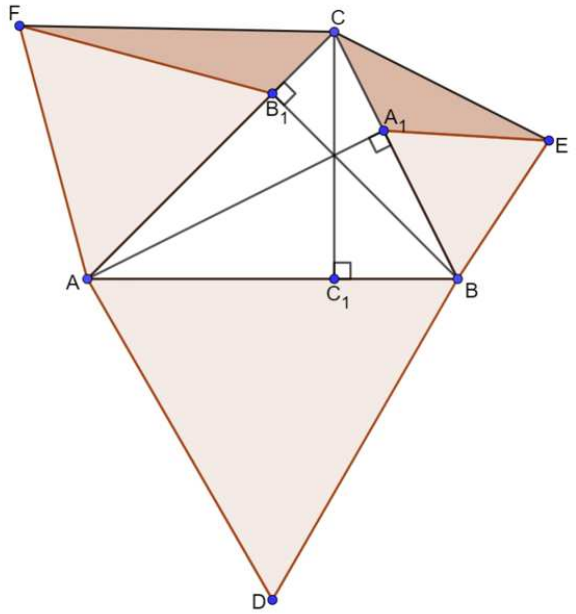
Teorem 2.2.3. *Dan je šiljastokutni trokut ABC i konstruirane su njegove visine s nožištima A_1, B_1 i C_1. Nad dužinama $\overline{AB}$, $\overline{BA_1}$ i $\overline{AB_1}$ konstruirani su jednakostranični trokuti kao na slici 2.3. Tada je*

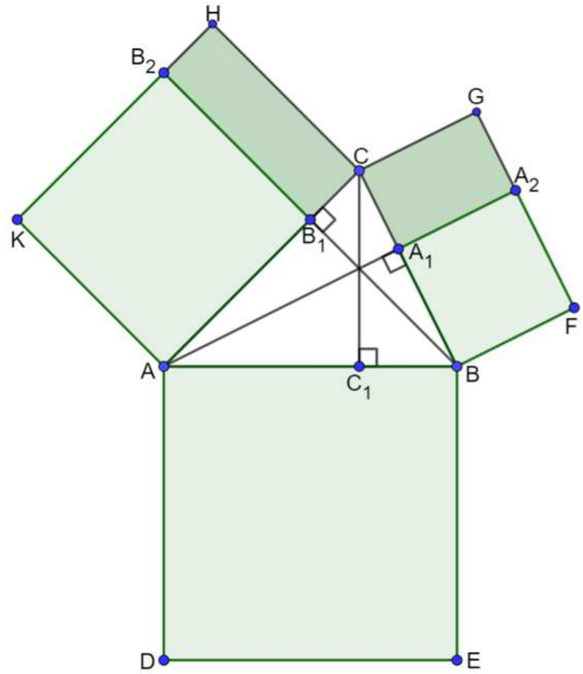
$$P(ADB) = P(ACF) + P(CBE).$$

Vjerojatno inspiriran prethodnom tvrdnjom Huanga, Alexander Bogomolny dokazao je sljedeće:

Teorem 2.2.4. *Dan je šiljastokutni trokut ABC i konstruirane su visine s nožištima A_1, B_1 i C_1. Nad dužinama $\overline{AB}$, $\overline{BA_1}$ i $\overline{AB_1}$ konstruirani su kvadrati, kao na slici 2.3. Tada je*

$$P(ADEB) = P(ACHK) + P(CBFG).$$





Slika 2.3: Ilustracije teorema 2.2.3 i 2.2.4

Za dokazivanje ovih dvaju teorema koristit ćemo tvrdnju:

Teorem 2.2.5. *Ako točkom T izvan kružnice konstruiramo dva pravca koji danu kružnicu sijeku u točkama M i N, odnosno P i Q, onda vrijedi jednakost* $|TM| \cdot |TN| = |TP| \cdot |TQ|$.

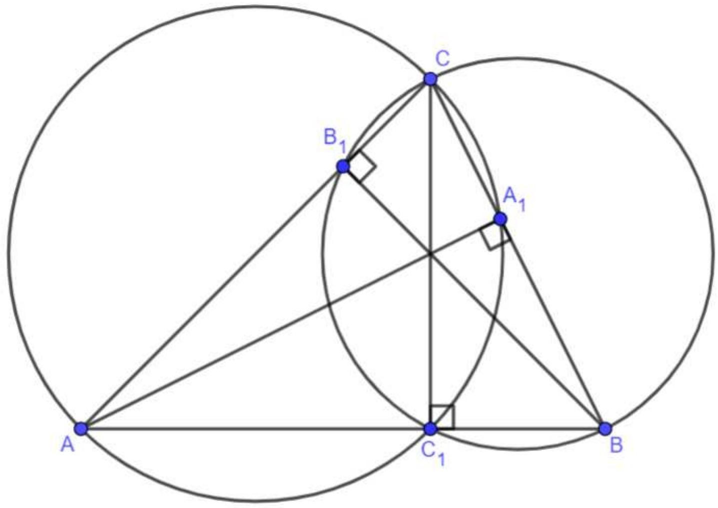
Dokažimo sada teoreme 2.2.3 i 2.2.4.

Dokaz teorema 2.2.3 i 2.2.4: Nacrtajmo trokut ABC. Opišimo kružnice nad stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ tog trokuta kao nad promjerima. Prema Talesovom teoremu o obodnom kutu nad promjerom kružnice slijedi da kružnica nad promjerom $\overline{BC}$ prolazi točkama B_1 i C_1, a kružnica nad promjerom $\overline{AC}$ prolazi točkama A_1 i C_1. Sada, prema Teoremu 2.2.5 slijedi

$$|AC_1| \cdot |AB| = |AB_1| \cdot |AC| \quad \text{i} \quad |BC_1| \cdot |BA| = |BA_1| \cdot |BC|. \tag{2.2}$$

Pokažimo da vrijedi teorem 2.2.3. Trokut ABD je jednakostraničan pa je njegova površina:

$$\begin{aligned} P(ABD) &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |AB|^2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} |AB| \cdot |AB|. \end{aligned}$$



Slika 2.4: Pomoćna slika za dokaz Teorema 2.2.3 i 2.2.4

Primijetimo sa slike 2.4 da vrijedi $|AB| = |AC_1| + |C_1B|$ pa slijedi:

$$\begin{aligned} P(ABD) &= \frac{\sqrt{3}}{4}|AB| \cdot (|AC_1| + |C_1B|) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}|AB| \cdot |AC_1| + \frac{\sqrt{3}}{4}|AB| \cdot |C_1B|. \end{aligned}$$

Sada iz jednakosti 2.2 dobivamo:

$$P(ABD) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |AB_1| \cdot |AC| + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |BA_1| \cdot |BC|$$

Uvrštavanjem $|AC| = |AB_1| + |B_1C|$ i $|BC| = |BA_1| + |A_1C|$ slijedi

$$\begin{aligned} P(ABD) &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |AB_1| \cdot (|AB_1| + |B_1C|) + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |BA_1| \cdot (|BA_1| + |A_1C|) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |AB_1|^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |AB_1| \cdot |B_1C| + \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot |BA_1|^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |BA_1| \cdot |A_1C|. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Trokuti AB_1F i B_1CF imaju istu visinu, a s obzirom na činjenicu da je trokut AB_1F jednakostraničan, duljina te visine je $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |AB_1|$. Zbog toga je površina trokuta B_1CF jednaka

$$P(B_1CF) = \frac{1}{2} \cdot |B_1C| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |AB_1|.$$

Analogno, trokuti CA_1E i A_1BE imaju istu visinu i njena duljina je $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |A_1B|$ pa je površina trokuta CA_1E jednaka

$$P(CA_1E) = \frac{1}{2} \cdot |CA_1| \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot |A_1B|.$$

Trokuti AB_1F i A_1BE su jednakostranični pa su njihove površine:

$$P(AB_1F) = \frac{\sqrt{3}}{4}|AB_1|^2 \text{ i } P(A_1BE) = \frac{\sqrt{3}}{4}|BA_1|^2$$

Uvrštavanjem dobivenih površina u 2.3 slijedi

$$\begin{aligned} P(ABD) &= P(AB_1F) + P(B_1CF) + P(A_1BE) + P(CA_1E) \\ &= P(ACF) + P(CBE). \end{aligned}$$

Time je dokazan teorem 2.2.3.
Slično dokazujemo teorem 2.2.4. $ADEB$ je kvadrat pa je njegova površina

$$\begin{aligned} P(ADEB) &= |AB|^2 \\ &= |AB| \cdot |AB|. \end{aligned}$$

Vrijedi $|AB| = |AC_1| + |C_1B|$ pa možemo pisati

$$\begin{aligned} P(ADEB) &= |AB| \cdot (|AC_1| + |C_1B|) \\ &= |AB| \cdot |AC_1| + |AB| \cdot |C_1B| \end{aligned}$$

Koristeći jednakost 2.2 dobivamo

$$P(ADEB) = |AB_1| \cdot |AC| + |BA_1| \cdot |BC|. \tag{2.4}$$

Vrijedi $|AB_1| = |B_1B_2| = |CH|$ jer je AB_1B_2K kvadrat, a za stranicu $\overline{CH}$ pravokutnika $ACHK$ vrijedi $|CH| = |B_1B_2| = |AB_1|$. Zbog toga za površinu pravokutnika $ACHK$ vrijedi:

$$\begin{aligned} P(ACHK) &= |AC| \cdot |CH| \\ &= |AC| \cdot |AB_1|. \end{aligned}$$

Potpuno analogno zaključuje se da je

$$P(BFGH) = |BA_1| \cdot |BC|.$$

Uvrštavanjem dobivenih površina u 2.4 slijedi

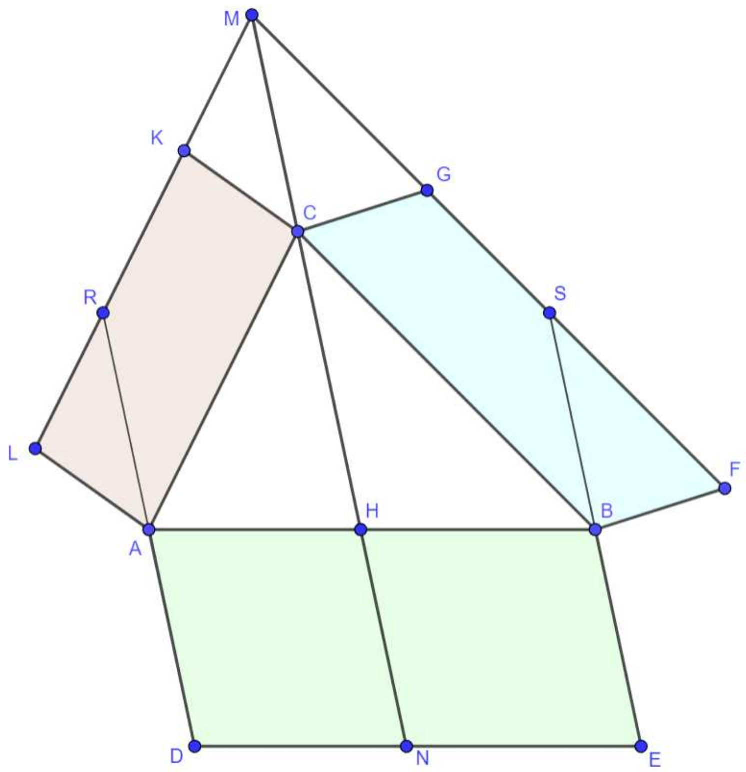
$$P(ADEB) = P(ACHK) + P(BFGC)$$

Time je dokazan i teorem 2.2.4. □

Još jedan matematičar koji se bavio poopćenjima Pitagorinog poučka je Pappus Aleksandrijski (oko 290. - 350.). Upravo on zaslužan je za jedno od najpoznatijih poopćenja Pitagorinog poučka u ravnini.

Teorem 2.2.6. *Neka je ABC bilo koji trokut. Nad proizvoljnim dvjema stranicama (primjerice $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$) konstruirajmo paralelograme $BCFG$ i $ACKL$. Neka je M sjecište pravaca LK i FG. Paralelno s MC nacrtajmo dužine $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ tako da je $|AD| = |BE| = |MC|$. Na ovaj način je određen paralelogram $ADEB$ koji je površinom jednak zbroju površina paralelograma $ACKL$ i $BFGC$.*

Dokaz. Neka su H i N točke u kojima pravac MC siječe dužine $\overline{AB}$ i $\overline{DE}$. Time smo paralelogram $ADEB$ podijelili na paralelograme $ADNH$ i $HNEB$. Pokazat ćemo da je površina prvog paralelograma jednaka površini paralelograma $ACKL$, a površina drugoga jednaka površini paralelograma $BFGC$.



Slika 2.5: Slika uz dokaz teorema 2.2.6

Neka AD siječe $\overline{LK}$ u točki R. Tada je $P(ACKL) = P(ACMR)$ jer paralelogrami imaju zajedničku stranicu $\overline{AC}$ te visine na tu stranice jednake duljine. Kako je $|MC| = |AD| = |AR|$

i paralelogrami $ACMR$ i $ADNH$ imaju visine na stranice $\overline{AD}$ i $\overline{AR}$ jednake duljine, a uz to, njihove nasuprotne stranice pripadaju međusobno paralelnim pravcima. Dakle, imaju i jednake površine pa vrijedi

$$P(ADNH) = P(ACMR) = P(ACKL).$$

Neka BE siječe $\overline{FG}$ u točki S. Tada je $P(BFGC) = P(BSMC)$ jer paralelogrami imaju zajedničku stranicu $\overline{BC}$ te imaju visine na stranicu $\overline{BC}$ jednake duljine. S obzirom da $|MC| = |BE| = |BS|$ i paralelogrami $BSMC$ i $HNEB$ imaju visine jednake duljine nad stranicama $\overline{BS}$ i $\overline{BE}$, a uz to im nasuprotne stranice pripadaju međusobno paralelnim stranicama, onda imaju i jednake površine, Dakle, vrijedi

$$P(HNEB) = P(BSMC) = P(BFGC).$$

Sada očito slijedi

$$\begin{aligned} P(ADEB) &= P(ADNH) + P(HNEB) \\ &= P(ACKL) + P(BFGC). \end{aligned}$$

□

Još jedan zanimljiv primjer poopćenja Pitagorinog poučka u ravnini je poučak o kosinusu. Zapravo je Pitagorin poučak poseban slučaj poučka o kosinusu. Iskažimo i dokažimo taj poučak:

Teorem 2.2.7 (Poučak o kosinusu)**.** *Ako su a, b i c duljine stranica trokuta te α, β i γ redom kutovi nasuprot stranica a, b i c, onda je*

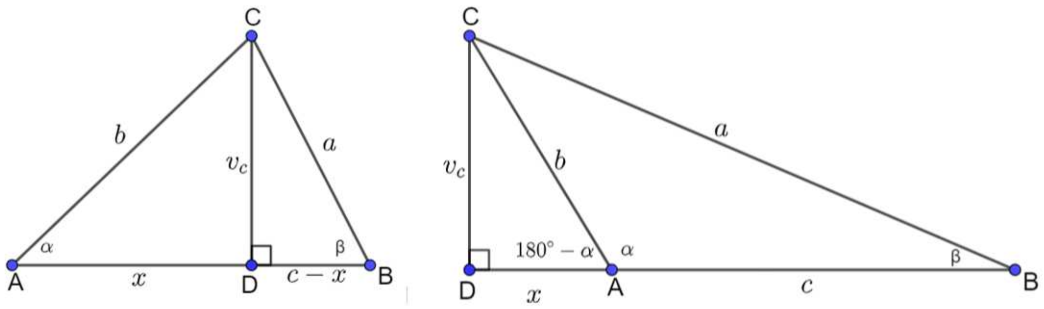
$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma. \end{aligned}$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati samo prvu jednakost jer se sve ostale dokazuju potpuno analogno. Promatramo tri slučaja:
Slučaj 1: pretpostavimo da je α šiljasti kut (lijeva slika na 2.6):
Iz vrha C nacrtajmo visinu na stranicu $\overline{AB}$ i označimo njeno nožište s D. Trokuti ADC i CDB su pravokutni pa za duljine njihovih stranica vrijedi

$$b^2 = x^2 + v_c^2 \;\text{ i }\; a^2 = v_c^2 + (c-x)^2,$$

odnosno

$$v_c^2 = b^2 - x^2 \;\text{ i }\; v_c^2 = a^2 - (c-x)^2$$



Slika 2.6: Slika uz dokaz *Poučka o kosinusu*

Izjednačavanjem izraza za v_c^2 dobivamo:

$$\begin{aligned} b^2 - x^2 &= a^2 - (c-x)^2 \\ a^2 &= b^2 + c^2 - 2cx. \end{aligned}$$

U pravokutnom trokutu ADC koristeći trigonometriju pravokutnog trokuta dobivamo

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{x}{b} \\ x &= b \cdot \cos\alpha. \end{aligned}$$

Uvrstimo x u jednakost $a^2 = b^2 + c^2 - 2cx$ i dobivamo

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

što smo trebali pokazati.
Slučaj 2: pretpostavimo da je α pravi kut:
Tada je trokut ABC pravokutan s pravim kutom pri vrhu A pa vrijedi $a^2 = b^2 + c^2$. Kako je $\alpha = 90°$ vrijedi da je $\cos\alpha = 0$ pa je

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Slučaj 3: pretpostavimo da je α tupi kut (desna slika na 2.6):
Nacrtajmo visinu iz vrha C i označimo njeno nožište s D. Trokuti CDA i BCD su pravokutni pa za duljine njihovih stranica vrijedi

$$b^2 = v_c^2 + x^2 \;\text{ i }\; a^2 = v_c^2 + (c+x)^2,$$

odnosno,

$$v_c^2 = b^2 - x^2 \;\text{ i }\; v_c^2 = a^2 - (c+x)^2.$$

Izjednačavanjem izraza za v_c^2 dobivamo:

$$\begin{aligned} b^2 - x^2 &= a^2 - (c + x)^2 \\ a^2 &= b^2 + c^2 + 2cx. \end{aligned}$$

U pravokutnom trokutu ACD koristeći trigonometriju pravokutnog trokuta dobivamo

$$\cos(180^\circ - \alpha) = \frac{x}{b}.$$

Primjenom redukcijske formule za kosinus, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$ slijedi

$$-\cos\alpha = \frac{x}{b}.$$

Množenjem jednakosti s b dobivamo

$$x = -b \cdot \cos\alpha,$$

a uvrštavanjem u jednakost $a^2 = b^2 + c^2 + 2cx$ slijedi

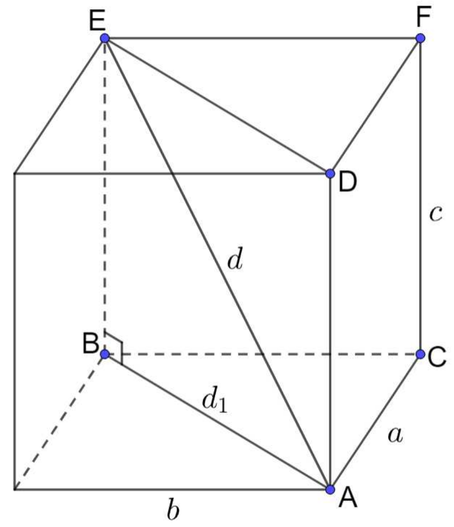
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

što smo htjeli pokazati. □

2.3 Trodimenzionalni prostor

Mnogi poučci geometrije ravnine, pa tako i Pitagorin poučak, imaju svoja poopćenja u geometriji prostora. Ona su utemeljena na usporedbi odgovarajućih objekata u ravnini i prostoru. Tako je, primjerice, sfera analogna kružnici, kocka kvadratu, a tetraedar trokutu. Usporedimo pravokutnik i kvadar. Spajanjem nesusjednih vrhova pravokutnika čije su stranice duljina a i b dobivamo dijagonalu duljine d pa prema Pitagorinom poučku vrijedi $d^2 = a^2 + b^2$.
Pokušamo li sličan postupak na kvadru i promotrimo prostornu dijagonalu kvadra, dobivamo svojevrsnu generalizaciju Pitagorinog poučka:

Teorem 2.3.1. *Neka je $ABCDEF$ trostrana prizma dobivena dijagonalnim presjekom kvadra i neka je $|CA| = a$, $|BC| = c$, $|CF| = c$, $|AB| = d_1$ i $|AE| = d$. Tada vrijedi $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.*



Slika 2.7: Trostrana prizma dobivena dijagonalnim presjekom kvadra

Dokaz. Promotrimo sliku 2.7. Stranice kvadra su pravokutnici pa je trokut ABC, kao dio stranice kvadra, pravokutan. Zbog toga za duljine njegovih stranice vrijedi

$$d_1^2 = a^2 + b^2. \tag{2.5}$$

Trokut ABE također je pravokutan s pravim kutom u vrhu kvadra B i hipotenuzom duljine d pa za duljine njegovih stranica vrijedi

$$d^2 = c^2 + d_1^2. \tag{2.6}$$

Uvrštavanjem 2.5 u 2.6 dobivamo

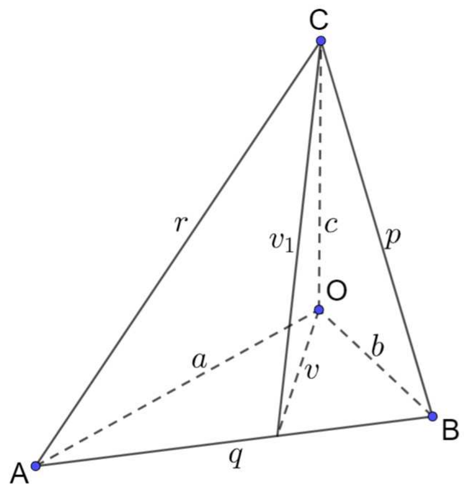
$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

što smo i trebali pokazati. □

Već smo zaključili da je tetraedar prostorni analogon trokuta. Specijalizirajmo situaciju na pravokutni trokut. Naime, pravokutni trokut možemo dobiti odsijecanjem od kvadrata pravcem tako da taj pravac zahvaća dvije susjedne stranice kvadrata. Uzmemo li kocku i presiječemo je ravninom koja prolazi trima točkama na bridovima koji se sastaju u jednom vrhu kocke, u pitanju je postupak analogan onome prethodno opisanom u ravnini. Od kocke dobivamo tetraedar koji možemo nazvati pravokutnim jer su njegove tri stranice pravokutni trokuti čiji se pravi kutovi sastaju u istom vrhu. Zajednički vrh tim stranama je vrh kocke pri kojem su sva tri kuta prava. Taj je tetraedar prostorno analogan pravokutnom trokutu. Za površine četiriju strana pravokutnog tetraedra vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 2.3.2. *Neka je OABC tetraedar kojemu su plošni kutovi kod vrha O pravi. Tada je kvadrat površine strane nasuprot vrha O jednak zbroju kvadrata površina preostalih triju stranica:*

$$P^2(ABC) = P^2(OAB) + P^2(OBC) + P^2(OAC).$$



Slika 2.8: Pravokutni tetraedar

Dokaz. Neka su duljine bridova koji izlaze iz vrha O redom a, b i c, a ostalje duljine bridova označimo s p, q i r. Neka je v_1 visina trokuta ABC iz vrha C, a v visina trokuta OAB iz vrha O na stranicu $\overline{AB}$. Vrijedi

$$P(ABC) = \frac{1}{2}pv_1.$$

Kvadriranjem pa množenjem jednakosti brojem 4 dobivamo

$$4 \cdot P^2(ABC) = p^2v_1^2.$$

Za duljine stranica v_1, v i c vrijedi $v_1^2 = v^2 + c^2$ pa je

$$\begin{aligned} 4 \cdot P^2(ABC) &= p^2(v^2 + c^2) \\ &= p^2v^2 + p^2c^2. \end{aligned}$$

Trokut OAB je pravokutan pa za duljine njegovih stranica vrijedi $p^2 = a^2 + b^2$. Uvrstimo p^2 u $4 \cdot P^2(ABC)$ pa dobivamo:

$$\begin{aligned} 4 \cdot P^2(ABC) &= p^2v^2 + (a^2 + b^2)c^2 \\ &= p^2v^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \\ &= (pv)^2 + (ac)^2 + (bc)^2 \\ &= 4 \cdot P^2(OAB) + 4 \cdot P^2(OAC) + 4 \cdot P^2(OBC). \end{aligned}$$

Iz dobivene jednakosti očito vrijedi

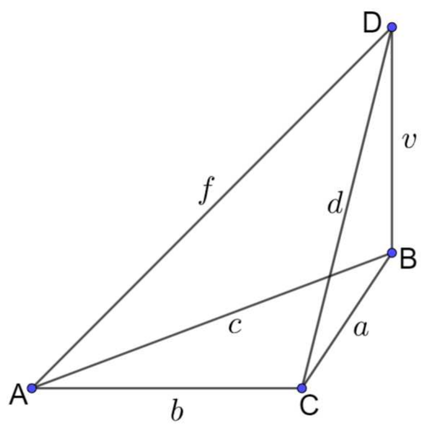
$$P^2(ABC) = P^2(OAB) + P^2(OAC) + P^2(OBC).$$

□

Osim generalizacije na pravokutni tetraedar, Pitagorin poučak možemo generalizirati na još jedan tip tetraedra.

Teorem 2.3.3. *Neka je $ABCD$ tetraedar kojemu su bridovi $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ i $\overline{BD}$ u parovima okomiti. Ako su P_A, P_B, P_C i P_D redom površine strana tetraedra nasuprot vrhova A, B, C i D, onda vrijedi*

$$P_A^2 - P_C^2 + P_B^2 - P_D^2 = 0.$$



Slika 2.9: Tetraedar

Dokaz. Neka je $|AC| = a$, $|BC| = b$, $|BD| = v$, $|AB| = c$, $|CD| = d$ i $|AD| = f$. Trokuti ABC i ACD su pravokutni s pravim kutovima pri vrhu C, a trokuti ABD i CBD su pravokutni s pravim kutovima pri vrhu B. Dakle, za duljine njihovih stranica vrijedi

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ f^2 &= a^2 + d^2 \\ f^2 &= c^2 + v^2 \\ d^2 &= v^2 + b^2. \end{aligned}$$

Odredimo P_A^2, P_B^2, P_C^2 i P_D^2:

$$\begin{aligned} P_A^2 &= \left(\frac{1}{2}bv\right)^2 = \frac{1}{4}b^2v^2 \\ P_B^2 &= \left(\frac{1}{2}ad\right)^2 = \frac{1}{4}a^2d^2 \\ P_C^2 &= \left(\frac{1}{2}cv\right)^2 = \frac{1}{4}c^2v^2 \\ P_D^2 &= \left(\frac{1}{2}ab\right)^2 = \frac{1}{4}a^2b^2. \end{aligned}$$

Sada je

$$P_A^2 - P_C^2 + P_B^2 - P_D^2 = \frac{1}{4}b^2v^2 - \frac{1}{4}c^2v^2 + \frac{1}{4}a^2d^2 - \frac{1}{4}a^2b^2.$$

S obzirom da je $d^2 = v^2 + b^2$ i $c^2 = a^2 + b^2$, vrijedi

$$\begin{aligned} P_A^2 - P_C^2 + P_B^2 - P_D^2 &= \frac{1}{4}b^2v^2 - \frac{1}{4}(a^2 + b^2)v^2 + \frac{1}{4}a^2(v^2 + b^2) - \frac{1}{4}a^2b^2 \\ &= \frac{1}{4}b^2v^2 - \frac{1}{4}a^2v^2 - \frac{1}{4}b^2v^2 + \frac{1}{4}a^2v^2 + \frac{1}{4}a^2b^2 - \frac{1}{4}a^2b^2. \end{aligned}$$

Odnosno,

$$P_A^2 - P_C^2 + P_B^2 - P_D^2 = 0,$$

a to smo trebali pokazati. □

Poglavlje 3

Pitagorin poučak u nastavi matematike

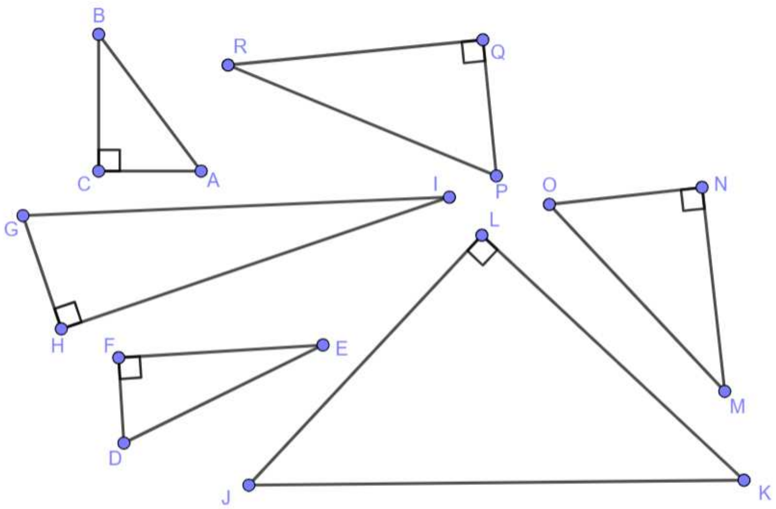
Svakom obrazovnom programu cilj je razviti kompetencije. Kompetencija podrazumijeva dinamičku kombinaciju kognitivnih i metakognitivnih vještina, znanja i razumijevanja, međuljudskih i praktičnih vještina te etičkih vrijednosti. Razlikujemo generičke kompetencije (prenosive u različita područja djelovanja) te područno specifične kompetencije (svojstvene određenoj disciplini ili struci).
Matematička kompetencija je sposobnost razvoja i primjene matematičkog mišljenja i uvida kako bi se riješio niz problema u svakodnevnim situacijama. Zasnovana je na čvrstoj ovladanosti računanjem (tzv. numeričkoj pismenosti), a naglasak je na procesu i aktivnosti, kao i na znanju. Matematička kompetencija uključuje, na različitim stupnjevima, sposobnost i spremnost za korištenje matematičkih načina mišljenja i prikazivanja (formulama, modelima, konstrukcijama, grafovima, grafikonima itd.). Suvremena nastava matematike orijentirana je učenicima. U središte zbivanja stavlja učenike koji planiranim i organiziranim aktivnostima rade matematiku. Zadaća je nastavnika stvoriti okružje u kojem se učenike potiče na istraživanje i primjenu matematičkih ideja i koncepata te suradnju i učenje jednih od drugih.
Prema Kurikulumu za nastavni predmet matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj, Pitagorin poučak smješten je u 8. razred osnovne škole. Osim iskaza Pitagorinog poučka njegovog obrata te primjene na pravokutni trokut, istražuje se i primjena Pitagorinog poučka na kvadratu, pravokutniku, jednakostraničnom i jednakokračnom trokutu te rombu. Pritom se naglasak stavlja na učeničko logičko razmišljanje i sposobnost analize problema umjesto na tehniku računanja.
Sljedeće su aktivnosti neki od primjera istraživanja Pitagorinog poučka s učenicima u nastavi matematike.

Aktivnost: Otkrivanje Pitagorinog poučka

Cilj aktivnosti: Učenici će, radom u četveročlanim skupinama, otkriti Pitagorin poučak.

Za zadane trokute učenici trebaju prvo ustanoviti da su trokuti pravokutni, a potom im mjeriti duljine njihovih stranici, popuniti tablicu s dobivenim vrijednostima i doći do zaključka. Trokuti na slici 3.1 su smanjeni, ali omjeri stranica ostali su očuvani.

Zadatak 1: Promotrite zadane trokute na slikama. Kakvi su trokuti s obzirom na kutove?



Slika 3.1: Zadani pravokutni trokuti

Zadatak 2: Mjerenjem stranica trokuta pomoću ravnala, ispunite sljedeću tablicu.

trokut	$\triangle ABC$	$\triangle DEF$	$\triangle GHI$	$\triangle JKL$	$\triangle MNO$	$\triangle PQR$
duljina kraće katete (cm)						
duljina duže katete (cm)						
duljina hipotenuze (cm)						
površina kvadrata nad kraćom katetom (cm^2)						
površina kvadrata nad dužom katetom (cm^2)						
površina kvadrata nad hipotenuzom (cm^2)						

Zadatak 3: Što ste primijetili? Zapišite svoja opažanja.

Rješenja i diskusija:
Zadatak 1: *S obzirom na kutove, svi zadani trokuti su pravokutni.*

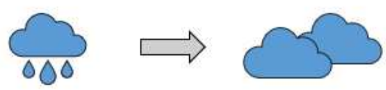
Zadatak 2:

trokut	$\triangle ABC$	$\triangle DEF$	$\triangle GHI$	$\triangle JKL$	$\triangle MNO$	$\triangle PQR$
duljina kraće katete (cm)	3	2.5	3.5	10	4.5	4
duljina duže katete (cm)	4	6	12	10.5	6	7.5
duljina hipotenuze (cm)	5	6.5	12.5	14.5	7.5	8.5
površina kvadrata nad kraćom katetom (cm^2)	9	6.25	12.25	100	20.25	16
površina kvadrata nad dužom katetom (cm^2)	16	36	144	110.25	36	56.25
površina kvadrata nad hipotenuzom (cm^2)	25	42.25	156.25	210.25	56.25	72.25

Zadatak 3: *Zbroj vrijednosti iz 5. i 6. retka tablice podudara se s vrijednostima iz posljednjeg retka, odnosno površina kvadrata nad hipotenuzom jednaka je zbroju površina kvadrata nad katetama.*

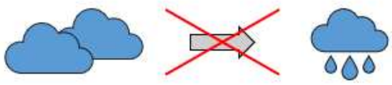
Razrednom diskusijom provjeravamo rješenja zadataka i slušamo učeničke zaključke. Učenici metodom pokušaja i promašaja uoče da se zbroj vrijednosti iz 5. i 6. retka tablice podudara se s vrijednostima iz posljednjeg retka, a s obzirom na to da su istraživali samo pravokutne trokute, zaključuju da za svaki pravokutan trokut vrijedi da je površina kvadrata nad hipotenuzom jednaka zbroju površina kvadrata nad katetama, što je tvrdnja Pitagorinog poučka.

Prije otkrivanja obrata Pitagorinog poučka, prikažimo na jednostavnom primjeru obrat neke istinite tvrdnje. Promotrimo tvrdnju: *Ako pada kiša, onda je oblačno.* Ta je tvrdnja očito istinita i prikazana je ilustracijom na slici 3.2.



Slika 3.2: Ilustracija tvrdnje

Obrat promatrane tvrdnje glasi: *Ako je oblačno, onda pada kiša.* Međutim, ta tvrdnja nije nužno istinita. Može se dogoditi da kiša ne pada iako je oblačno. Dakle, obrat neke istinite tvrdnje nije nužno istinit.



Slika 3.3: Ilustracija obrata tvrdnje

Vratimo se na zaključak prve aktivnosti, odnosno Pitagorin poučak i napišemo ga u obliku "ako, onda". Tada tvrdnja Pitagorinog poučka izgleda ovako: *Ako je trokut pravokutan, onda je površina kvadrata nad hipotenuzom jednaka zbroju površina kvadrata nad katetama.* Tvrdnju možemo i izreći simbolično:

Ako su a i b duljine kateta pravokutnog trokuta, a c duljina hipotenuze, onda vrijedi $c^2 = a^2 + b^2$. (3.1)

Prethodnom aktivnošću uvjerili smo se da je ta tvrdnja istinita, a sljedećom učenici istražuju njen obrat.

Aktivnost: Obrat Pitagorinog poučka

Cilj aktivnosti: Učenici će, u šeteročlanim skupinama, otkriti obrat Pitagorinog poučka.

U Najprije za zadane trokute sa zadanim duljinama stranica ispunjavaju tablicu. Potom konstruiraju zadane trokute, popunjavaju drugu tablicu i iznose zaključke.

Zadatak 1: Za zadane trokute ispunite tablicu.
$\triangle ABC$: 2 cm, 3 cm, 3 cm;
$\triangle DEF$: 4 cm, 3 cm, 5 cm;
$\triangle GHI$: 6 cm, 5 cm, 2 cm;
$\triangle JKL$: 4.5 cm, 7.5 cm, 6 cm;
$\triangle MNO$: 3 cm, 5 cm, 7 cm;
$\triangle PQR$: 8.5 cm, 4 cm, 7.5 cm.

trokut	$\triangle ABC$	$\triangle DEF$	$\triangle GHI$	$\triangle JKL$	$\triangle MNO$	$\triangle PQR$
duljina najkraće stranice a (cm)						
duljina srednje stranice b (cm)						
duljina najduže stranice c (cm)						
a^2						
b^2						
c^2						
$a^2 + b^2$						

Zadatak 2: Promotrite posljednja dva retka tablice i zapiši opažanja.

Zadatak 3: Konstruirajte zadane trokute.

Zadatak 4: Koristeći konstruirane trokute i tablicu iz zadatka 2, ispunite tablicu:

trokut	c^2	$a^2 + b^2$	veličine unutarnjih kutova	vrsta (s obzirom na kutove)
$\triangle ABC$				
$\triangle DEF$				
$\triangle GHI$				
$\triangle JKL$				
$\triangle MNO$				
$\triangle PQR$				

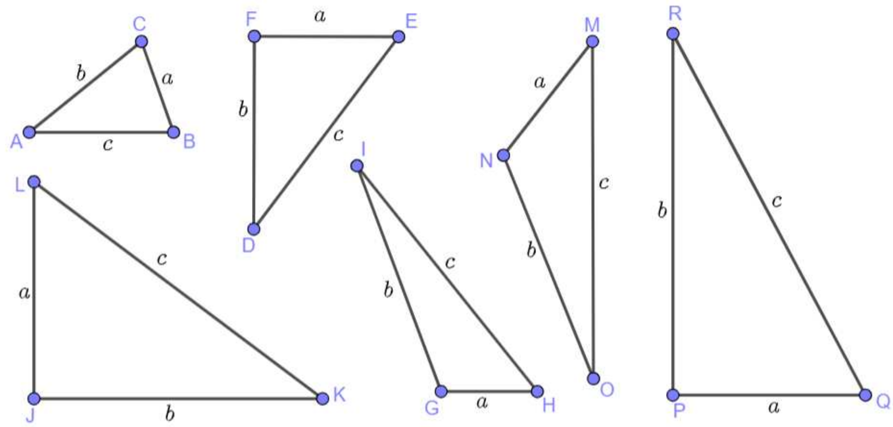
Zadatak 5: Što primjećujete?

Rješenja i diskusija:
Zadatak 1:

trokut	$\triangle ABC$	$\triangle DEF$	$\triangle GHI$	$\triangle JKL$	$\triangle MNO$	$\triangle PQR$
duljina najkraće stranice a (cm)	2	3	2	4.5	3	4
duljina srednje stranice b (cm)	3	4	5	6	5	7.5
duljina najduže stranice c (cm)	3	5	6	7.5	7	8.5
a^2	4	9	4	20.25	9	16
b^2	9	16	25	36	25	56.25
c^2	9	25	36	56.25	49	72.25
$a^2 + b^2$	13	25	29	56.25	34	72.25

Zadatak 2: *Za trokute DEF, JKL i PQR posljednja dva retka tablice jednaka su.*

Zadatak 3:



Slika 3.4: Primjer konstruiranih trokuta

Zadatak 4:

trokut	c^2	$a^2 + b^2$	veličine unutarnjih kutova	vrsta (s obzirom na kutove)
$\triangle ABC$	9	13	38°, 71° i 71°	šiljastokutni
$\triangle DEF$	25	25	90°, 53° i 37°	pravokutni
$\triangle GHI$	36	29	18°, 51° i 111°	tupokutni
$\triangle JKL$	56.25	56.25	90°, 37° i 53°	pravokutni
$\triangle MNO$	49	34	38°, 22° i 120°	tupokutni
$\triangle PQR$	72.25	72.25	90°, 28° i 62°	pravokutni

Zadatak 5: *Trokuti DEF, JKL i PQR, za čije stranice vrijedi $c^2 = a^2 + b^2$, pri čemu je c najdulja stranica trokuta, su pravokutni.*

Diskusijom provjeravamo učenička rješenja i zaključke. Učenici su ispunjavanjem tablice u 2. zadatku uočili da postoje trokuti za čije stranice vrijedi $c^2 = a^2 + b^2$. Konstrukcijom svih trokuta i mjerenjem unutarnjih kutova pomoću kutomjera, ustanovili su da su trokuti za koje vrijedi jednakost pravokutni. Drugim riječima, vrijedi tvrdnja: *Ako za stranice a, b i c nekog trokuta vrijedi $c^2 = a^2 + b^2$, pri čemu je c duljina najduže stranice tog trokuta, onda je taj trokut pravokutan s katetama duljina a i b te hipotenuzom duljine c.* Prisjetimo li se tvrdnje Pitagorinog poučka 3.1, uočavamo da je zaključak ove aktivnosti upravo obrat Pitagorinog poučka.

Već smo spominjali tzv. *mozaičke dokaze* Pitagorinog poučka i jedan smo dokazali. U sljedećoj aktivnosti koristimo ih kako bismo zorno prikazali tvrdnju Pitagorinog poučka.

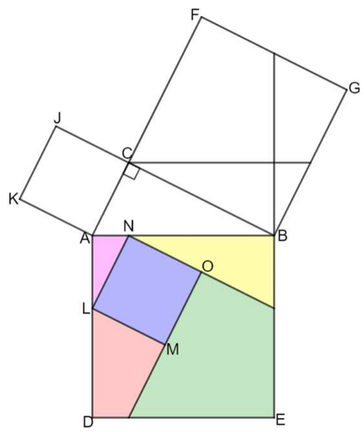
Aktivnost: Razreži i presloži!

Cilj aktivnosti: Učenici će, radeći u parovima, otkrivati tvrdnju Pitagorinog poučka.

Prikazat ćemo primjere dvaju mozaika. Opisat ćemo kako su nastali, a dokaz sukladnosti istaknutih likova nećemo dokazivati jer je u ovom dijelu naglasak na aktivnosti za učenike.

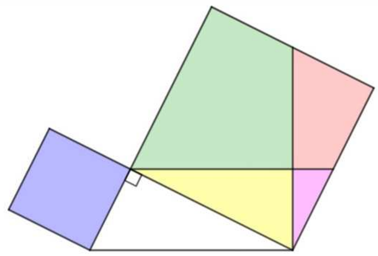
Mozaik 1
Opišimo za početak kako je nastao mozaik na slici na 3.5. Neka je trokut ABC pravokutan s pravim kutom pri vrhu C. Neka je $ADEB$ kvadrat nad hipotenuzom, $ACJK$ kvadrat nad kraćom katetom te $BCFG$ kvadrat nad duljom katetom. Neka je N nožište visine iz vrha C na stranicu $\overline{AB}$. Translatirajmo kvadrat $ACJK$ za vektor $\overrightarrow{JN}$. Time dobivamo kvadrat $NLMO$ unutar kvadrata nad hipotenuzom. Produžimo li stranice $\overline{NO}$ i $\overline{OM}$ redom do stranica $\overline{BE}$ i $\overline{DE}$, kvadrat nad hipotenuzom podijelili smo na jedan kvadrat, dva pravokutna trokuta te dva četverokuta. Nadalje, produžimo stranicu $\overline{BE}$ i konstruirajmo paralelu točkom C sa stranicom $\overline{AB}$. Time smo kvadrat nad duljom katetom podijelili na dva četverokuta i dva pravokutna trokuta. Tako nastaje mozaik na slici na 3.5.

Zadatak: Razrežite likove unutar kvadrata nad hipotenuzom i presložite ih u kvadrate nad katetama.



Slika 3.5: Mozaik 1 - zadatak

Rješenje i diskusija:

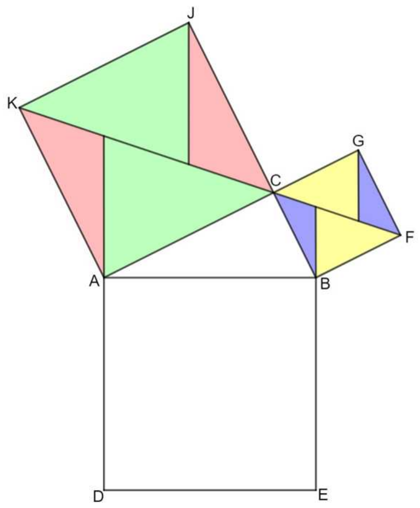


Slika 3.6: Mozaik 1 - rješenje

Izrezivanjem likove na koje je podjeljen kvadrat nad hipotenuzom, učenici uočavaju da svaki od njih ima sukladnog para unutar jednog od kvadrata nad katetama. Preslože sve likove unutar kvadrata nad katetama i uočavaju kako su ti kvadrati u potpunosti ispunjeni, nema praznog prostora, a niti jedan od likova nije ostao neiskorišten, odnosno, dobivaju situaciju prikazanu na slici 3.6. Iz toga zaključuju da je površina kvadrata nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednaka zbroju kvadrata nad njegovim katetama, što je upravo tvrdnja Pitagorinog poučka.

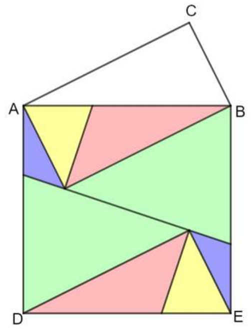
Mozaik 2:
Opišimo kako je nastao mozaik sa slike 3.7. Neka je trokut ABC pravokutan s pravim kutom pri vrhu C. Neka je $ADEB$ kvadrat nad hipotenuzom, a $ACJK$ i $BCGF$ kvadrati nad katetama. Kvadratima $BCGF$ i $ACKJ$ nacrtajmo dijagonale $\overline{CF}$ i $\overline{CK}$. Stranicu $\overline{EB}$ produžimo do dijagonale $\overline{CF}$ i točkom G nacrtajmo paralelu sa stranicom EB do dijagonale $\overline{CF}$. Time smo kvadrat $BCGF$ podijelili na četiri trokuta, odnosno, dva para međusobno sukladnih trokuta. Analogno, stranicu $\overline{AD}$ produžimo do dijagonale $\overline{CK}$ i točkom J nacrtajmo paralelu sa stranicom $\overline{AD}$ do dijagonale CK. Time smo i kvadrat $ACKJ$ podijelili na dva para međusobno sukladnih likova. Na taj način dobili smo lijevu sliku 3.7.
Pristup razmještaja likova ovog mozaika malo je otvoreniji. Ovog puta kvadrati nad katetama razdjeljeni su na opisan način, a kvadrat nad hipotenuzom je prazan. Učenici razrežu označene likove te metodom pokušaja i promašaja pokušavaju sve likove smjestiti u kvadrat nad hipotenuzom.

Zadatak: Razrežite zadani mozaik (slika 3.7) te dobivene likove presložite u kvadrat nad hipotenuzom.



Slika 3.7: Mozaik 2 - zadatak

Rješenje i diskusija: Promatramo učenička rješenja. Sva su rješenja učenika sukladna, a neka su možda zarotirana. Jedan od primjera nalazi se na slici 3.8. Primjećuju da su svi likovi izrezani od kvadrata nad katetama iskorišteni i da unutar kvadrata nad hipotenuzom nema praznog prostora. Prema uočenome zaključuju da je zbroj površina kvadrata nad katetama pravokutnog trokuta jednak površini kvadrata nad hipotenuzom tog trokuta, što je tvrdnja Pitagorinog poučka.



Slika 3.8: Mozaik 2 - rješenje

Literatura

1. M. Bombardelli, D. Ilišević, *Elementarna geometrija*, skripta iz kolegija Elementarna geometrija, verzija 1.0 (2007.)

2. F. M. Brückler, *Povijest matematike*, skripta iz kolegija Povijest matematike, 2022.

3. Pitagora, https://bs.wikipedia.org/wiki/Pitagora (rujan 2023.)

4. B. Dakić, *Priče iz matematike*, Element, 2016.

5. A. Dujella, *Uvod u teoriju brojeva*, skripta iz kolegija Uvod u teoriju brojeva

6. D. Keček, A. Poldrugač, P. Vuković, *Poopćenja Pitagorinog poučka*, Tehnički glasnik, Vol. 7 No. 2, 2013.

7. A. Klobučar, A. Vidić, *Pitagora i Pitagorin poučak*, Poučak : časopis za metodiku i nastavu matematike, Vol. 16 No. 62, 2015.

8. B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Školska knjiga, Zagreb, 2003.

9. Pythagorean Theorem and its many proofs, https://www.cut-the-knot.org/pythagoras/ (kolovoz 2023.)

Sažetak

U ovom radu proučavali smo dobro poznat Pitagorin poučak. Poučak koji, prema nekim matematičarima, predstavlja početak suvremene matematike.
U prvom dijelu istražili smo povijest Pitagore, Pitagorejske škole i Pitagorinog poučka te prikazali neke od preko 400 dokaza. Pritom smo razmatrali različite pristupe dokazivanju poučka.
U drugom dijelu proučavali smo formulu kojom su određeni prirodni brojevi koji zadovoljavaju Pitagorin poučak, takozvane Pitagorine trojke. Potom smo poučak generalizirali na bilo koje međusobno slične likove nad stranicama pravokutnog trokuta, a zatim smo se bavili još nekim generalizacijama poučka u ravnini i prostoru.
Na kraju se predlaže moguća realizacija Pitagorinog poučka i njegovog obrata u nastavi matematike.

Summary

In this thesis we studyed well known Pythagorean theorem. Theorem which, according to some mathematicians, represents the beginning of modern mathematics.
The first part consist of the history of Pythagoras, Pythagoreanism, Pythagorean theorem and analysis of some of over 400 proofs of the theorem. Also, we studyed different approaches to prooving the theorem.
The second part beggins with the formula that determines natural numbers that satisfy Pythagorean theorem, so called Pythagorean triples. Then we generalized the theorem to any similar figures on the sides of the right triangle and then we studyed another generalizations of the theorem in plane and in space.
The final chapter suggests the possible realisation of Pythagorean theorem while teaching mathematics.

Životopis

Rođena sam 13. studenoga 1998. u Zagrebu. Osnovnoškolsko obrazovanje započela sam 2005. u OŠ Mate Lovraka, a završila u OŠ Vugrovec-Kašina 2013. godine. Iste godine upisala sam Žensku opću gimnaziju Družbe sestara milosrdnica s pravom javnosti u Zagrebu koju sam završila 2017. godine. Potom sam upisala Preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer: nastavnički na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu koji sam završila 2021. godine. Iste godine nastavljam obrazovanje na diplomskom sveučilišnom studiju Matematika; smjer: nastavnički.