SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Lara Ćuća

LAPLACEOVA TRANSFORMACIJA

Diplomski rad

Voditeljica rada:
prof. dr. sc. Ljiljana Arambašić

Zagreb, rujan 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________ , predsjednik
2. ______________________________ , član
3. ______________________________ , član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ____________________ .

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

Mojoj obitelji, prijateljima i zaručniku Tomi.

Bez vas ne bih bila ovdje gdje stojim danas.

♡

Sadržaj

Uvod

Integralne transformacije imaju široku primjenu u brojnim znanstvenim područjima, a ponajviše u matematici i fizici. Prvi se put spominju u 18. stoljeću u radovima švicarskog matematičara Leonarda Eulera (1707.-1783.) koji ih je smatrao ključnim alatom za rješavanje diferencijalnih jednadžbi. Njegovim stopama nastavio je i francuski matematičar i astronom Pierre-Simone Laplace (1749.-1827.), koji je u svom poznatom djelu *Théorie analytique des probabilités* (1812.) pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi koristio jednu integralnu transformaciju. Ona je kasnije, njemu u čast, dobila naziv *Laplaceova transformacija*.

Laplaceova transformacija je linearni operator koji predstavlja preslikavanje funkcija realne varijable u drugi skup funkcija koje mogu biti realne ili kompleksne varijable. Zbog njezine linearnosti njome ne mogu rješavati općenite diferencijalne jednadžbe, već samo linearne, no u primjenama se to pokazuje i više nego dovoljnim. Osim toga, Laplaceova transformacija se koristi u mnogim zadaćama iz elektrotehnike, hidrodinamike i mehanike, kao što su analiza strujnih krugova, titranje tijela na opruzi, radioaktivni raspad, uvijanje greda uslijed opterećenja i mnoge druge. Ona se u tim slučajevima tumači kao transformacija iz vremenske domene t u frekvencijsku domenu s. Ipak, mi ćemo se u ovom radu ograničiti na njezinu primjenu u rješavanju jednadžbi, a osnovna ideja je da se dana diferencijalna jednadžba djelovanjem ove transformacije svede na algebarsku jednadžbu koja je znatno lakša za rješavanje od početne.

Uslijed sve češćeg korištenja Laplaceove transformacije, došlo je do određene "ležernosti" prilikom upotrebe iste. Drugim riječima, zna se dogoditi da se ona koristi olako, bez mnogo razmatranja o valjanosti određenih matematičkih pretpostavki. Cilj ovoga rada jest precizno definirati i proučiti Laplaceovu transformaciju te njezina svojstva. Razjasnit ćemo kada i na kakve funkcije ju je moguće primijeniti te ćemo navesti svojstva koja će nam omogućiti njezino brže izračunavanje, što ćemo i prikazati na konkretnim primjerima. Laplaceovom transformacijom diferencijalne jednadžbe prevodimo u algebarske, no, da bi se od rješenja algebarske jednadžbe dobilo rješenje polaznog problema, odnosno početne diferencijalne jednadžbe, trebamo znati odrediti njezin inverz. U tu svrhu bavit ćemo se i pitanjem postojanja i metodama određivanja inverza Laplaceove transformacije. Na kraju ćemo sve navedeno iskoristiti pri rješavanju nekih tipova običnih diferencijalnih jednadžbi.

1 Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju ćemo se, kao što smo i najavili, upoznati s pojmom Laplaceove transformacije te s osnovnim svojstvima koja posjeduje.

1.1 Definicija i egzistencija Laplaceove transformacije

Laplaceova transformacija jedna je od poznatijih integralnih transformacija. Integralne transformacije su izrazi oblika

$$F(s) = \int_{\alpha}^{\beta} K(s,t) f(t)\, dt, \tag{1.1}$$

gdje su $s \in \mathbb{C}$, $t \in \mathbb{R}$ i $\alpha < \beta$. Pritom funkciju f nazivamo originalom, funkciju F slikom, a funkciju K jezgrom integralne transformacije. Oblik i karakter transformacije ovise o izboru granica integracije α i β te o funkciji K. Stavimo li u (1.1) $\alpha = 0$, $\beta = \infty$ i $K(s,t) = e^{-st}$, dobivamo

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt. \tag{1.2}$$

Time dolazimo do definicije Laplaceove transformacije:

Definicija 1.1. *Neka je f realna ili kompleksna funkcija realne varijable $t \in [0, +\infty\rangle$ te s realan ili kompleksan parametar. Laplaceova transformacija funkcije f je funkcija F realne ili kompleksne varijable s definirana kao*

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt \\ &= \lim_{a \to \infty} \int_0^{a} e^{-st} f(t)\, dt. \end{aligned}$$

Kažemo da je funkcija F Laplaceov transformat funkcije f i pišemo $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, ili kraće, bez oznake nezavisne varijable, $F = \mathcal{L}\{f\}$.

Laplaceova transformacija funkcije f postoji ako integral (1.2), kojega još nazivamo Laplaceovim integralom, konvergira. To znači da funkcija f, tj. original, mora ispunjavati određene uvjete koji osiguravaju egzistenciju toga integrala, a iste ćemo razmatrati u nastavku ovoga rada. U slučaju kada Laplaceov integral divergira, kažemo da Laplaceova transformacija funkcije f ne postoji.

Napomena 1.2. *U definiciji 1.1 riječ je bila o jednostranoj Laplaceovoj transformaciji, no, šireći granice integrala po cijeloj realnoj osi, možemo definirati i dvostranu Laplaceovu transformaciju kao*

$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

Mi ćemo se u nastavku ovoga rada posvetiti jednostranoj Laplaceovoj transformaciji, koju ćemo kraće nazivati Laplaceovom ili $\mathcal{L}$-transformacijom.

Spomenuli smo kako je s fiksirani parametar čija vrijednost može biti realan ili kompleksan broj. U složenijim primjenama Laplaceove transformacije, o kojima ćemo reći više nešto kasnije, parametar s često poprima kompleksne vrijednosti (u tom slučaju, pišemo $s = x + iy$), pa je tada F funkcija kompleksne varijable. Prije negoli se krenemo baviti pitanjem egzistencije Laplaceovog integrala, dokažimo jedan koristan rezultat.

Propozicija 1.3. *Za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi*

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \big(s \in \mathbb{R},\ s > 0\big). \tag{1.3}$$

Dokaz. Dokažimo tvrdnju matematičkom indukcijom po n.

Baza indukcije. Za $n = 0$ je $f(t) \equiv 1$, pa iz definicije Laplaceove transformacije slijedi

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(1) &= \int_0^\infty e^{-st}\, 1\, dt \\
&= \lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-st}\, 1\, dt \\
&= \lim_{a\to\infty} \left(\frac{e^{-st}}{-s} \Bigg|_0^a \right) \\
&= \lim_{a\to\infty} \left(\frac{e^{-sa}}{-s} + \frac{1}{s} \right) \\
&= \frac{1}{s} \quad \big(s \in \mathbb{R},\ s > 0\big).
\end{aligned}$$

Budući da je $0! = 1$, baza indukcije je provjerena.

Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \big(s \in \mathbb{R},\ s > 0\big).$$

Korak indukcije. Dokažimo da i za $n + 1$ vrijedi ista zakonitost, to jest da je

$$\mathcal{L}(t^{n+1}) = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}} \quad \big(s \in \mathbb{R},\ s > 0\big).$$

Iz definicije Laplaceove transformacije i parcijalnim integriranjem, dobivamo rekurziju

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t^{n+1}) &= \int_0^{\infty} e^{-st}\, t^{n+1}\, dt \\
&= \lim_{a\to\infty} \int_0^{a} e^{-st}\, t^{n+1}\, dt \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} u = t^{n+1} & du = (n+1)\, t^n\, dt \\ dv = e^{-st}\, dt & v = -\dfrac{1}{s} e^{-st} \end{array} \right\} \\
&= \lim_{a\to\infty} \left(-\frac{t^{n+1}}{s} e^{-st} \Big|_0^a + \int_0^a \frac{(n+1)\, t^n}{s} e^{-st}\, dt \right) \\
&= \lim_{a\to\infty} \left(-\frac{a^{n+1}}{s} e^{-sa} + \frac{n+1}{s} \int_0^a t^n\, e^{-st}\, dt \right) \\
&= \frac{n+1}{s} \mathcal{L}(t^n) \qquad \big(s \in \mathbb{R},\ s > 0\big).
\end{aligned}$$

Sada, primjenom uočene rekurzije i prepostavke indukcije, imamo

$$\mathcal{L}(t^{n+1}) = \frac{n+1}{s} \mathcal{L}(t^n) = \frac{n+1}{s} \cdot \frac{n!}{s^{n+1}} = \frac{(n+1)!}{s^{n+2}} \qquad \big(s \in \mathbb{R},\ s > 0\big),$$

što smo i željeli dobiti. Stoga, prema aksiomu matematičke indukcije, za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \big(s \in \mathbb{R},\ s > 0\big). \qquad \square$$

Napomena 1.4. *Primijetimo da smo jednakost (1.3) dokazali samo za $s \in \mathbb{R},\ s > 0$. Za $s \leq 0$ je*

$$\lim_{a\to\infty} \left(\frac{e^{-sa}}{-s} + \frac{1}{s} \right) = \infty,$$

pa integral divergira i Laplaceova transformacija funkcije ne postoji.

Pogledajmo sada što bi se dogodilo u slučaju da je s bila kompleksna varijabla. Pokažimo najprije da smo u računu provedenom u propoziciji 1.3, integral mogli tumačiti na isti način kao da je $s \in \mathbb{C}$. U tu svrhu nam je potrebna svima dobro poznata Eulerova formula

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta, \qquad \theta \in \mathbb{R},$$

i činjenica da je $|e^{i\theta}| = 1$. Ono što želimo je da i za $s \in \mathbb{C}$, $s \neq 0$, vrijedi

$$\int e^{st}\, dt = \frac{e^{st}}{s}. \tag{1.4}$$

Zbog Eulerove formule, za $s = x + iy$, $x,\ y \in \mathbb{R}$, integral s lijeve strane jednakosti (1.4) možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}
\int e^{st}\, dt &= \int e^{(x+iy)t}\, dt \\
&= \int e^{xt} e^{iyt}\, dt \\
&= \int e^{xt}\big(\cos yt + i \sin yt\big)\, dt \\
&= \int e^{xt} \cos yt\, dt + i \int e^{xt} \sin yt\, dt,
\end{aligned}$$

pa primjenjujući dvostruku parcijalnu integraciju na oba integrala, dobivamo

$$\int e^{st}\, dt = \frac{e^{xt}}{x^2 + y^2}\Big((x \cos yt + y \sin yt) + i(x \sin yt - y \cos yt)\Big).$$

Desnu stranu jednakosti (1.4) sada možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}
\frac{e^{st}}{s} &= \frac{e^{(x+iy)t}}{x + iy} \\
&= \frac{e^{xt}(\cos yt + i \sin yt)(x - iy)}{x^2 + y^2} \\
&= \frac{e^{xt}}{x^2 + y^2}\Big((x \cos yt + y \sin yt) + i(x \sin yt - y \cos yt)\Big),
\end{aligned}$$

čime smo dobili izraz jednak lijevoj strani te jednakosti, pa (1.4) slijedi.

Dakle, u računu provedenom u propoziciji 1.3, a i općenito, integral možemo tumačiti na isti način kao da je $s \in \mathbb{C}$. Nadalje, rezultat (1.3) također vrijedi i za $s \in \mathbb{C}$, ukoliko uzmemo s takav da je $\mathrm{Re}(s) = x > 0$. Znamo da za $s \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$|e^s| = |e^x(\cos y + i \sin y)| = e^x = e^{\mathrm{Re}(s)}, \tag{1.5}$$

pa je

$$\lim_{a\to\infty} |e^{-sa}| = \lim_{a\to\infty} e^{-xa} = 0,$$

za $x > 0$. Stoga bismo, analognim računom kao i u propoziciji 1.3, opet dobili (1.3).

Napomena 1.5. *Jednakost (1.3) vrijedi i za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\mathrm{Re}(s) > 0$, odnosno*

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad \big(s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 0\big), \tag{1.6}$$

za svaki $n \in \mathbb{N}_0$.

U nastavku ćemo se baviti pitanjem za koje sve funkcije postoji Laplaceova transformacija, odnosno koje uvjete funkcije moraju ispunjavati kako bi Laplaceov integral konvergirao. Naime, postoje funkcije za koje on divergira.

Primjer 1.6. *Pokažimo da Laplaceova transformacija funkcije f dane s $f(t) = e^{t^4}$, ne postoji.*

Rješenje. Primjenom definicije Laplaceove transformacije, slijedi da je

$$F(s) = \lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-st} e^{t^4}\, dt = \lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-st+t^4}\, dt = \infty,$$

za bilo koji izbor varijable s, budući da vrijednost integrala neograničeno raste kako $a \to \infty$.

Uvedimo sada pojmove dvaju posebnih tipova konvergencije Laplaceovog integrala.

Definicija 1.7. *Laplaceov integral* ***kovergira apsolutno*** *ako postoji*

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a |e^{-st} f(t)|\, dt.$$

Definicija 1.8. *Laplaceov integral* ***konvergira uniformno*** *po varijabli s na $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji a_0 takav da je*

$$\left| \int_a^\infty e^{-st} f(t)\, dt \right| < \varepsilon,$$

za svaki $a \geq a_0$ te za svaki $s \in \Omega$.

Prije negoli iskažemo teorem koji nam daje (dovoljne) uvjete pod kojima Laplaceov integral konvergira, definirajmo obilježja funkcije koja će to osigurati.

Definicija 1.9. *Za funkciju f kažemo da ima* ***prekid prve vrste*** *u točki t_0 ako limesi*

$$\lim_{t\to {t_0}^-} f(t) = f({t_0}^-) \quad i \quad \lim_{t\to {t_0}^+} f(t) = f({t_0}^+)$$

postoje (kao konačni brojevi) i vrijedi $f({t_0}^-) \neq f({t_0}^+)$.

Definicija 1.10. *Funkcija f je* ***po dijelovima neprekidna*** *na $[0, \infty\rangle$ ako:*

(i) $\lim_{t\to 0^+} f(t) = f(0^+)$ *postoji,*

(ii) *f je neprekidna na svakom konačnom intervalu $\langle 0, b\rangle$ osim, eventualno, u konačno mnogo točaka $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ iz $\langle 0, b\rangle$ u kojima ima prekid prve vrste.*

Važna posljedica neprekidnosti funkcije po dijelovima jest ta da je na svakom podintervalu $\langle \tau_i, \tau_{i+1} \rangle, i = 1, 2, \ldots, n-1$, funkcija f također omeđena, odnosno vrijedi

$$|f(t)| \leq M_i, \quad \tau_i < t < \tau_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

za neke konstante M_i. Usto, funkcija f je i neprekidna na svakom tom podintervalu, pa je njezin integral jednak

$$\int_0^b f(t)\,dt = \int_0^{\tau_1} f(t)\,dt + \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)\,dt + \cdots + \int_{\tau_n}^{b} f(t)\,dt.$$

Nadalje, funkcije s dobro definiranom Laplaceovom transformacijom imaju i sljedeće svojstvo.

Definicija 1.11. *Funkcija f je* ***eksponencijalnog rasta reda α*** *ako postoji konstanta $M > 0$ takva da za neki $t_0 \geq 0$ vrijedi*

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \quad t \geq t_0. \tag{1.7}$$

Uočimo da ako je f eksponencijalnog rasta reda α, onda je i eksponencijalnog rasta reda β, za svaki $\beta > \alpha$. Nadalje, definicija 1.11 nam intuitivno govori da funkcije eksponencijalnog rasta po apsolutnoj vrijednosti ne mogu "rasti brže" od funkcije $Me^{\alpha t}$. Takve su, primjerice, eksponencijalna funkcija, trigonometrijske funkcije i polinomi. Eksponencijalna funkcija e^{at} je eksponencijalnog rasta reda $\alpha = a$, a ograničene funkcije, poput trigonometrijskih, su eksponencijalnog rasta reda $\alpha = 0$. Funkcija t^n je eksponencijalnog rasta reda α za bilo koji $\alpha > 0$ i za bilo koji $n \in \mathbb{N}$. Primijetimo da se i u primjeru 1.6 već dalo naslutiti da će biti potrebno na neki način "mjeriti" brzinu rasta funkcije te tražiti da je ona ograničena u okolini točke prekida.

Sada je moguće iskazati teorem koji kaže da zaista postoji jedna velika klasa funkcija koja posjeduje Laplaceovu transformaciju, odnosno daje (dovoljne) uvjete pod kojima Laplaceov integral konvergira.

Teorem 1.12 (O egzistenciji). *Neka je f po dijelovima neprekidna funkcija na $[0, \infty\rangle$ i eksponencijalnog rasta reda α. Tada Laplaceova transformacija $\mathcal{L}\{f\}$ postoji za svaki $s \in \mathbb{C}$ za koji je $\mathrm{Re}(s) > \alpha$ te pripadni Laplaceov integral konvergira apsolutno.*

Dokaz. Budući da je f eksponencijalnog rasta reda α, postoje konstanta $M_1 > 0$ i $t_0 \geq 0$ takvi da je

$$|f(t)| \leq M_1 e^{\alpha t}, \quad t \geq t_0.$$

Nadalje, kako je f po dijelovima neprekidna na $[0, t_0]$ pa time i omeđena na tom segmentu, slijedi

$$|f(t)| \leq M_2, \quad 0 < t < t_0,$$

pri čemu za M_2 uzimamo najveću među nad svim podintervalima.

Budući da je vrijednost minimuma funkcije $e^{\alpha t}$ pozitivna na $[0, t_0]$, možemo izabrati dovoljno veliku konstantu M takvu da vrijedi

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \quad t > 0.$$

Stoga, uz pretpostavku da je $s = x + iy$ i $x > \alpha$, vrijedi

$$\begin{aligned}
\int_0^\tau |e^{-st} f(t)|\, dt &\leq \int_0^\tau e^{-xt} M e^{\alpha t}\, dt \\
&= M \int_0^\tau e^{-(x-\alpha)t}\, dt \\
&= \frac{Me^{-(x-\alpha)t}}{-(x-\alpha)}\Bigg|_0^\tau \\
&= \frac{M}{x-\alpha} - \frac{Me^{-(x-\alpha)t}}{x-\alpha}.
\end{aligned}$$

Puštajući $\tau \to \infty$, imamo

$$\int_0^\infty |e^{-st} f(t)|\, dt \leq \frac{M}{x-\alpha}. \tag{1.8}$$

Stoga, za $\mathrm{Re}(s) = x > \alpha$ Laplaceov integral konvergira apsolutno te smo time dokazali da Laplaceova transformacija $\mathcal{L}\{f\}$ postoji. □

Štoviše, uz pretpostavke iz teorema 1.12, Laplaceov integral konvergira i uniformno za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\mathrm{Re}(s) = x > \alpha$. Budući da je f eksponencijalnog rasta reda α, postoje konstanta $M > 0$ i $t_0 \geq 0$ takvi da je

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \quad t \geq t_0.$$

Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
\left| \int_{t_0}^\infty e^{-st} f(t)\, dt \right| &\leq \int_{t_0}^\infty e^{-xt} |f(t)|\, dt \\
&\leq M \int_{t_0}^\infty e^{-(x-\alpha)t}\, dt \\
&= \frac{Me^{-(x-\alpha)t}}{-(x-\alpha)}\Bigg|_{t_0}^\infty \\
&= \frac{Me^{-(x-\alpha)t_0}}{x-\alpha}.
\end{aligned}$$

Uzimajući $x \geq x_0 > \alpha$ dobivamo gornju među dobivenog izraza:

$$\frac{Me^{-(x-\alpha)t_0}}{x-\alpha} \leq \frac{M}{x_0-\alpha} e^{-(x_0-\alpha)t_0}. \tag{1.9}$$

Izaberemo li t_0 dovoljno velik, izraz s desne strane nejednakosti (1.9) možemo učiniti proizvoljno malim. Drugim riječima, za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $T > 0$ takav da je

$$\left| \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt \right| < \varepsilon, \quad t_0 \geq T,$$

za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\mathrm{Re}(s) \geq x_0 > \alpha$, što je upravo definicija uniformne konvergencije Laplaceovog integrala. Sljedeći teorem govori nam što se događa u slučaju kada $\mathrm{Re}(s) \to \infty$.

Teorem 1.13. *Ako je f po dijelovima neprekidna funkcija na $[0, \infty\rangle$ i eksponencijalnog rasta reda α, tada*

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \to 0$$

za $\mathrm{Re}(s) \to \infty$.

Dokaz. Zbog svojstva nejednakosti trokuta i (1.8), za $\mathrm{Re}(s) = x > \alpha$ vrijedi

$$\left| \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt \right| \leq \int_0^{\infty} |e^{-st} f(t)|\, dt \leq \frac{M}{x-\alpha},$$

pa puštajući $x \to \infty$, tvrdnja slijedi. □

Sada kada smo upoznati s uvjetima egzistencije Laplaceovog integrala, riješimo nekoliko primjera.

Primjer 1.14. *Odredimo Laplaceovu transformaciju funkcije f dane s $f(t) = e^{wt}$, gdje je $w \in \mathbb{R}$.*

Rješenje. Funkcija f je neprekidna na $[0, \infty\rangle$ i eksponencijalnog rasta reda w. Stoga je, primjenom definicije Laplaceove transformacije

$$\begin{aligned} \int_0^a e^{-st}\, e^{wt}\, dt &= \int_0^a e^{-(s-w)t}\, dt \\ &= -\frac{1}{s-w} e^{-(s-w)t} \Big|_0^a \\ &= -\frac{1}{s-w}\big(e^{-(s-w)a} - 1\big). \end{aligned}$$

Po teoremu 1.12, integral konvergira (kako $a \to \infty$) za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\mathrm{Re}(s) > w$ i u tom slučaju vrijedi

$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-st}\, e^{wt}\, dt = \frac{1}{s-w}.$$

Stoga je

$$\mathcal{L}\big(e^{wt}\big) = \frac{1}{s-w}, \qquad w \in \mathbb{R}, \tag{1.10}$$

za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\mathrm{Re}(s) > w$.

Napomena 1.15. *Na isti način se pokaže da je*

$$\mathcal{L}\big(e^{-wt}\big) = \frac{1}{s+w}, \qquad w \in \mathbb{R}, \tag{1.11}$$

za sve $s \in \mathbb{C}$ *za koje je* $\mathrm{Re}(s) > |w|$.

Primjer 1.16. *Odredimo Laplaceovu transformaciju funkcije* f *dane s* $f(t) = te^{2t}$.

Rješenje. Funkcija f je neprekidna na $[0, \infty\rangle$ i eksponencijalnog rasta. Stoga, primjenom definicije Laplaceove transformacije i parcijalnim integriranjem, dobivamo

$$\begin{aligned}
\int_0^a e^{-st}\, te^{2t}\, dt &= \int_0^a te^{(2-s)t}\, dt \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} u = t & du = dt \\ dv = e^{(2-s)t}\, dt & v = \frac{1}{2-s} e^{(2-s)t} \end{array} \right\} \\
&= \frac{t}{2-s} e^{(2-s)t} \Big|_0^a - \frac{1}{2-s} \int_0^a e^{(2-s)t}\, dt \\
&= \frac{a}{2-s} e^{(2-s)a} - \frac{1}{(2-s)^2} \Big(e^{(2-s)t} \Big) \Big|_0^a \\
&= \frac{a}{2-s} e^{(2-s)a} - \frac{1}{(2-s)^2} \Big(e^{(2-s)a} - 1 \Big) \\
&= \frac{a}{2-s} e^{(2-s)a} - \frac{e^{(2-s)a}}{(2-s)^2} + \frac{1}{(2-s)^2}.
\end{aligned}$$

Po teoremu 1.12, integral konvergira (kako $a \to \infty$) za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\mathrm{Re}(s) > 2$ i u tom slučaju vrijedi

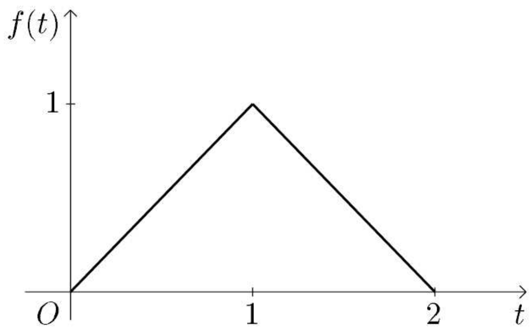
$$\lim_{a\to\infty} \int_0^a e^{-st}\, te^{2t}\, dt = \frac{1}{(2-s)^2}.$$

Stoga je

$$\mathcal{L}\big(te^{2t}\big) = \frac{1}{(2-s)^2},$$

za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\mathrm{Re}(s) > 2$.

Primjer 1.17. *Odredimo Laplaceovu transformaciju funkcije f čiji je graf prikazan na slici 1.*



Slika 1: Graf funkcije f

Rješenje. Funkcija f je neprekidna i zadana po dijelovima. Kao takvu, možemo ju zapisati na sljedeći način:

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1 \\ -t+2, & 1 < t \leq 2 \\ 0, & t > 2. \end{cases}$$

Iz definicije Laplaceove transformacije, sada slijedi

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\, f(t)\, dt \\
&= \int_0^1 e^{-st}\, t\, dt + \int_1^2 e^{-st}\, (-t+2)\, dt \\
&= \int_0^1 e^{-st}\, t\, dt - \int_1^2 e^{-st}\, t\, dt + 2\int_1^2 e^{-st}\, dt \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} u = t & du = dt \\ dv = e^{-st}\, dt & v = -\frac{1}{s}e^{-st} \end{array} \right\} \\
&= -\frac{te^{-st}}{s}\Big|_0^1 + \frac{1}{s}\int_0^1 e^{-st}\, dt + \frac{te^{-st}}{s}\Big|_1^2 - \frac{1}{s}\int_1^2 e^{-st}\, dt - \frac{2}{s}e^{-st}\Big|_1^2 \\
&= -\frac{e^{-s}}{s} - \frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_0^1 + \frac{2e^{-2s} - e^{-s}}{s} + \frac{1}{s^2}e^{-st}\Big|_1^2 - \frac{2(e^{-2s} - e^{-s})}{s} \\
&= -\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s} - 1}{s^2} + \frac{2e^{-2s} - e^{-s}}{s} + \frac{e^{-2s} - e^{-s}}{s^2} - \frac{2e^{-2s} - 2e^{-s}}{s} \\
&= \frac{-se^{-s} - e^{-s} + 1 + 2se^{-2s} - se^{-s} + e^{-2s} - e^{-s} - 2se^{-2s} + 2se^{-s}}{s^2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2}$$

$$= \frac{(1 - e^{-s})^2}{s^2},$$

za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\mathrm{Re}(s) > 0$.

1.2 Temeljna svojstva

U ovom odjeljku ćemo iskazati i dokazati neka najvažnija svojstva Laplaceove transformacije koja će nam uvelike koristiti prilikom računanja iste (složenija svojstva bit će obrađena u idućem poglavlju). Pomoću njih odredit ćemo transformacije nekih važnih funkcija, poput trigonometrijskih. Također, naglasimo da ćemo od sada promatrati samo funkcije koje zadovoljavaju uvjete teorema 1.12.

Napomena 1.18. *Prilikom računanja s nekim konkretnim funkcijama zbog jasnoće zapisa, umjesto oznake $\mathcal{L}\{f\}$ koristit ćemo oznaku $\mathcal{L}\{f(t)\}$, pri čemu $f(t)$ ne predstavlja vrijednost funkcije f u točki t, već ovisnost funkcije f o varijabli t.*

Sljedeći teorem pokazuje da je Laplaceova transformacija linearan operator na odgovarajućim prostorima funkcija. Pri tome domenu čine sve one funkcije koje zadovoljavaju uvjete teorema 1.12, a kodomenu čine njihovi Laplaceovi transformati.

Teorem 1.19 (Linearnost Laplaceove transformacije). *Neka su f_1 i f_2 po dijelovima neprekidne funkcije na $[0, \infty\rangle$ i eksponencijalnog rasta reda α, odnosno β. Tada za svaki $s \in \mathbb{C}$ za koji je $\mathrm{Re}(s) > \max\{\alpha, \beta\}$, vrijedi*

$$\mathcal{L}\{af_1(t) + bf_2(t)\} = a\mathcal{L}\{f_1(t)\} + b\mathcal{L}\{f_2(t)\},$$

gdje su a i b proizvoljne konstante.

Dokaz. Dokaz se provodi direktno iz definicije Laplaceove transformacije:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{af_1(t) + bf_2(t)\} &= \int_0^\infty (af_1 + bf_2)e^{-st}\,dt \\
&= \int_0^\infty (af_1e^{-st} + bf_2e^{-st})\,dt \\
&= a\int_0^\infty f_1e^{-st}\,dt + b\int_0^\infty f_2e^{-st}\,dt \\
&= a\mathcal{L}\{f_1(t)\} + b\mathcal{L}\{f_2(t)\},
\end{aligned}$$

gdje za f_1 i f_2 po pretpostavci vrijedi

$$|f_1| \leq M_1e^{\alpha t} \text{ i } |f_2| \leq M_2e^{\beta t}$$

pa je

$$\begin{aligned}|af_1 + bf_2| &\leq |a||f_1| + |b||f_2|\\ &\leq (|a|M_1 + |b|M_2)e^{\max\{\alpha,\beta\}t},\end{aligned}$$

odakle zaključujemo da je i funkcija $af_1 + bf_2$ eksponencijalnog rasta. $\square$

Odredimo sada Laplaceove transformacije još nekih važnih funkcija.

Primjer 1.20. *Odredimo $\mathcal{L}(\cos wt)$ i $\mathcal{L}(\sin wt)$, gdje je $w \in \mathbb{R}$.*

Rješenje. Prisjetimo se za početak Eulerove formule koja glasi

$$e^{iw} = \cos w + i \sin w, \quad w \in \mathbb{R}, \tag{1.12}$$

odnosno

$$e^{-iw} = \cos w - i \sin w, \quad w \in \mathbb{R}. \tag{1.13}$$

Zbrajanjem (1.12) i (1.13) dobivamo

$$\cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}, \tag{1.14}$$

a oduzimanjem (1.13) od (1.12)

$$\sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}. \tag{1.15}$$

Sada, primjenom (1.14) i (1.15) te uvažavajući linearnost Laplaceove transformacije, slijedi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\cos wt) &= \mathcal{L}\left(\frac{e^{iwt} + e^{-iwt}}{2}\right) = \frac{\mathcal{L}(e^{iwt}) + \mathcal{L}(e^{-iwt})}{2},\\ \mathcal{L}(\sin wt) &= \mathcal{L}\left(\frac{e^{iwt} - e^{-iwt}}{2i}\right) = \frac{\mathcal{L}(e^{iwt}) - \mathcal{L}(e^{-iwt})}{2i}.\end{aligned}$$

Preostaje nam izračunati $\mathcal{L}(e^{iwt})$, odnosno $\mathcal{L}(e^{-iwt})$. Imamo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(e^{iwt}) &= \int_0^\infty e^{-st}e^{iwt}\,dt\\ &= \lim_{a\to\infty} \frac{e^{(iw-s)t}}{iw-s}\bigg|_0^a\\ &= \lim_{a\to\infty} \frac{e^{(iw-s)a}}{iw-s} - \frac{1}{iw-s}\\ &= \frac{1}{s-iw},\end{aligned}$$

za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\text{Re}(s) > 0$, budući da za $s = x + iy$, $x > 0$, zbog (1.5) vrijedi

$$\lim_{a\to\infty} |e^{(iw-s)a}| = \lim_{a\to\infty} |e^{(iw-x-iy)a}| = \lim_{a\to\infty} e^{-xa} = 0.$$

Na analogan način, za $s \in \mathbb{C}$ i $\text{Re}(s) > 0$, dobivamo i

$$\mathcal{L}(e^{-iwt}) = \frac{1}{s + iw}.$$

Stoga je

$$\mathcal{L}(\cos wt) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - iw} + \frac{1}{s + iw}\right) = \frac{s}{s^2 + w^2}, \tag{1.16}$$

$$\mathcal{L}(\sin wt) = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s - iw} - \frac{1}{s + iw}\right) = \frac{w}{s^2 + w^2}, \tag{1.17}$$

za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\text{Re}(s) > 0$.

Primjer 1.21. *Odredimo $\mathcal{L}(\operatorname{ch} wt)$ i $\mathcal{L}(\operatorname{sh} wt)$, gdje je $w \in \mathbb{R}$.*

Rješenje. Prisjetimo se najprije kako su definirane funkcije $\operatorname{ch} wt$ (kosinus hiperbolični) i $\operatorname{sh} wt$ (sinus hiperbolični):

$$\operatorname{ch} wt = \frac{e^{wt} + e^{-wt}}{2},$$
$$\operatorname{sh} wt = \frac{e^{wt} - e^{-wt}}{2}.$$

Analogno kao u primjeru 1.20, računamo

$$\mathcal{L}(\operatorname{ch} wt) = \frac{\mathcal{L}(e^{wt}) + \mathcal{L}(e^{-wt})}{2},$$
$$\mathcal{L}(\operatorname{sh} wt) = \frac{\mathcal{L}(e^{wt}) - \mathcal{L}(e^{-wt})}{2}.$$

Sada, zbog (1.10) i (1.11) vrijedi

$$\mathcal{L}(\operatorname{ch} wt) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - w} + \frac{1}{s + w}\right) = \frac{s}{s^2 - w^2}, \tag{1.18}$$

$$\mathcal{L}(\operatorname{sh} wt) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s - w} - \frac{1}{s + w}\right) = \frac{w}{s^2 - w^2}, \tag{1.19}$$

za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\text{Re}(s) > |w|$.

Primjer 1.22. *Odredimo* $\mathcal{L}\big(2t + 3t^2 - 4e^{3t} + 5\sin 4t\big)$.

Rješenje. Zbog linearnosti Laplaceove transformacije i primjenom već izvedenih formula, dobivamo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\big(2t + 3t^2 - 4e^{3t} + 5\sin 4t\big) &= 2\mathcal{L}\big(t\big) + 3\mathcal{L}\big(t^2\big) - 4\mathcal{L}\big(e^{3t}\big) + 5\mathcal{L}\big(\sin 4t\big) \\ &= \frac{2}{s^2} + \frac{6}{s^3} - \frac{4}{s-3} + \frac{20}{s^2+16},\end{aligned}$$

za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\mathrm{Re}(s) > 3$.

Sada ćemo razmatrati dva izrazito korisna svojstva prilikom određivanja Laplaceove transformacije. Prvo svojstvo navodi da ako znamo Laplaceovu transformaciju bilo koje funkcije, tada transformaciju te funkcije pomnožene s eksponencijalnom možemo dobiti odmah, i to s jedinstvenim pomakom u varijabli s. Drugim riječima, sljedeće svojstvo nam omogućuje lako računanje Laplaceove transformacije funkcije $e^{\alpha t} f(t)$, ako već znamo transformaciju funkcije $f(t)$.

Teorem 1.23 (**O prigušenju**)**.** *Neka je* $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ *za* $\mathrm{Re}(s) > 0$ *te* $a \in \mathbb{R}$. *Tada za svaki* $s \in \mathbb{C}$ *za koji je* $\mathrm{Re}(s) > a$, *vrijedi*

$$F(s-a) = \mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}.$$

Dokaz. Za $s \in \mathbb{C}$ takav da je $\mathrm{Re}(s) > a$, izravnom primjenom definicije Laplaceove transformacije, vrijedi

$$\begin{aligned}F(s-a) &= \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} e^{at} f(t)\, dt \\ &= \mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}.\end{aligned}$$

□

Pogledajmo sada kako pomoću rezultata teorema 1.23 možemo odrediti Laplaceove transformacije nekih funkcija.

Primjer 1.24. *Odredimo* $\mathcal{L}\big(te^{at}\big)$, *gdje je* $a \in \mathbb{R}$.

Rješenje. Stavimo $f(t) = t$. Za $s \in \mathbb{C}$ takav da je $\mathrm{Re}(s) > 0$, vrijedi

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Stoga, primjenom teorema 1.23 slijedi

$$\mathcal{L}\big(te^{at}\big) = F(s-a) = \frac{1}{(s-a)^2},$$

za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\mathrm{Re}(s) > a$.

Napomena 1.25. *Lako se dokaže i općeniti zaključak:*

$$\mathcal{L}\big(t^n e^{at}\big) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \qquad n \in \mathbb{N}_0, \tag{1.20}$$

za sve $s \in \mathbb{C}$ *za koje je* $\mathrm{Re}(s) > a$.

Uočimo sada da smo primjer 1.16 mogli jednostavnije riješiti na ovaj način.

Primjer 1.26. *Odredimo* $\mathcal{L}\big(e^{5t}\sin 8t\big)$.

Rješenje. Stavimo $f(t) = \sin 8t$. Stoga je, zbog (1.17)

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{8}{s^2+64},$$

za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\mathrm{Re}(s) > 0$. Primjenom teorema 1.23, sada imamo

$$\mathcal{L}\big(e^{5t}\sin 8t\big) = F(s-5) = \frac{8}{(s-5)^2+64},$$

za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\mathrm{Re}(s) > a = 5$.

Napomena 1.27. *Generalno, vrijede sljedeći rezultati:*

$$\mathcal{L}(e^{at}\cos wt) = \frac{s-a}{(s-a)^2+w^2}, \quad \mathrm{Re}(s) > a, \tag{1.21}$$

$$\mathcal{L}(e^{at}\sin wt) = \frac{w}{(s-a)^2+w^2}, \quad \mathrm{Re}(s) > a, \tag{1.22}$$

$$\mathcal{L}(e^{at}\cosh wt) = \frac{s-a}{(s-a)^2-w^2}, \quad \mathrm{Re}(s) > a, \tag{1.23}$$

$$\mathcal{L}(e^{at}\sinh wt) = \frac{w}{(s-a)^2-w^2}, \quad \mathrm{Re}(s) > a, \tag{1.24}$$

koji se lako dokazuju (na analogan način kao i primjer 1.26).

Prije negoli iskažemo drugo svojstvo, trebamo uvesti pojam Heavisideove funkcije.

Definicija 1.28. ***Heavisideovu funkciju*** *ili* ***step funkciju*** *definiramo na sljedeći način*

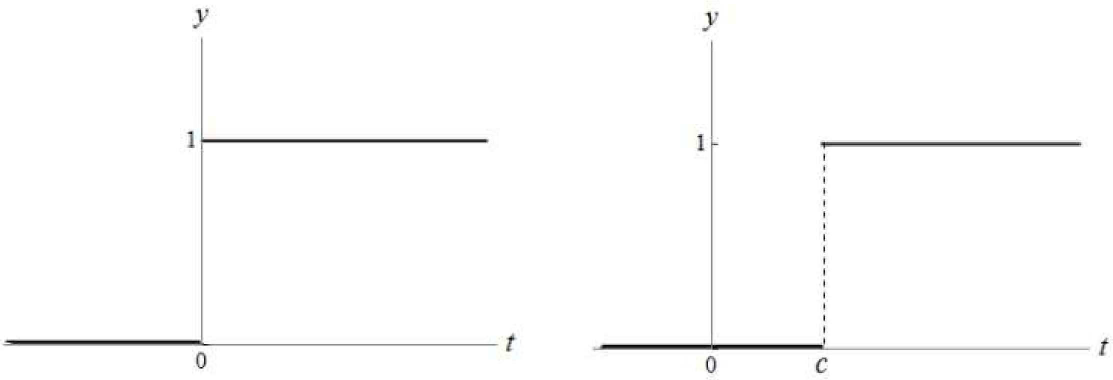
$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0. \end{cases}$$

Heavisideova funkcija najčešće se koristi pri rješavanju diferencijalnih jednadžbi kod kojih funkcija smetnje ima prekid, a javlja se i u analizi strujnih krugova ili mehaničkih vibracija. Ime je dobila po Oliveru Heavisideu (1850.-1925.) - samoukom engleskom inženjeru, matematičaru i fizičaru.

Budući da je vrijednost $H(t)$ jednaka 1 za $t \geq 0$, iz jednakosti (1.6) slijedi da je $\mathcal{L}\{H(t)\} = \mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$, za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\text{Re}(s) > 0$. Međutim, od većeg interesa nam je tzv. "odgođena" step funkcija

$$H_a(t) = \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}, \quad a \geq 0.$$

Zovemo ju tako upravo zato što ona "odgađa" preuzimanje konstantne vrijednosti funkcije u iznosu 1 do trenutka $t = a$, $a \geq 0$. U tom slučaju reći ćemo da se funkcija uključila u trenutku $t = a$. Također, uočimo da je $H_a(t) = H(t-a)$. Pogledajmo sada grafove funkcija H i H_a prikazanih na slici 2.



(a) Graf funkcije H (b) Graf funkcije H_a

Slika 2: Grafovi step funkcija

Laplaceovu transformaciju funkcije H_a (odnosno njezine restrikcije na $[0, +\infty\rangle$) sada lako možemo izračunati:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{H_a(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} H_a(t)\, dt \\ &= \int_a^\infty e^{-st}\, dt \\ &= \frac{e^{-as}}{s}, \end{aligned} \tag{1.25}$$

za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\text{Re}(s) > 0$, pri čemu smo koristili da je $H_a(t) = 0$ (za $t < a$) i $H_a(t) = 1$ (za $t \geq a$).

Sada smo spremni iskazati sljedeće svojstvo. Dok se prvo odnosilo na pomak u varijabli s, ovo će se odnositi na pomak u varijabli t.

Teorem 1.29 (**O pomaku**). *Neka je* $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ *te* $a \geq 0$. *Tada vrijedi*

$$\mathcal{L}\{H_a(t)f(t-a)\} = e^{-as}F(s).$$

Dokaz. Izravnom primjenom definicije Laplaceove transformacije, slijedi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{H_a(t)f(t-a)\} &= \int_0^\infty H_a(t)f(t-a)e^{-st}\,dt \\ &= \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}\,dt.\end{aligned}$$

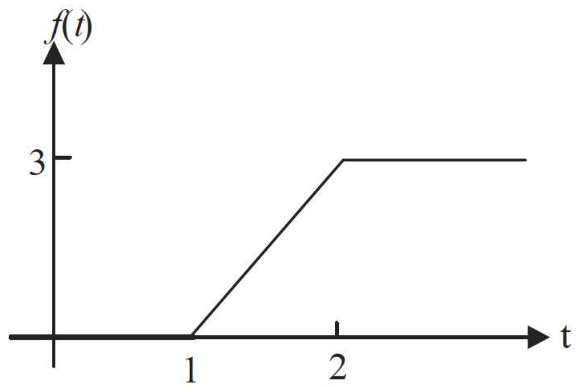
Supstitucijom $\tau = t-a$, dobivamo $d\tau = dt$, pa gornji integral postaje

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-s(\tau+a)}f(\tau)\,d\tau &= e^{-as}\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)\,d\tau \\ &= e^{-as}F(s),\end{aligned}$$

čime je tvrdnja dokazana. □

Jedini uvjet jest taj da je funkcija f eksponencijalnog rasta što znači da za $t > a$ nema singulariteta. Tvrdnja ovog teorema omogućuje nam određivanje Laplaceove transformacije funkcije koja se uključuje u trenutku $t = a$.

Primjer 1.30. *Koristeći Heavisideovu step funkciju, odredimo Laplaceovu transformaciju funkcije* f *čiji je graf prikazan na slici 3.*



Slika 3: Graf funkcije f

Rješenje. Funkcija f je neprekidna i zadana po dijelovima. Kao takvu, možemo ju zapisati na sljedeći način:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1 \\ 3(t-1), & 1 < t \leq 2 \\ 3, & t > 2. \end{cases}$$

Kako bismo zapisali funkciju f u terminima Heavisideove funkcije, moramo imati na umu sljedeće:

- u trenutku $t = 0$ uključuje se funkcija f_1;
- u trenutku $t = 1$ uključuje se funkcija f_2 te se u istom tom trenutku isključuje funkcija f_1;
- u trenutku $t = 2$ uključuje se funkcija f_3 te se u istom tom trenutku isključuje funkcija f_2.

Stoga, $f(t)$ možemo zapisati kao

$$f(t) = f_1(t) + \big(f_2(t) - f_1(t)\big)H(t-1) + \big(f_3(t) - f_2(t)\big)H(t-2),$$

pa, budući da je $f_1(t) = 0, f_2(t) = 3(t-1)$ i $f_3(t) = 3$, slijedi

$$\begin{aligned} f(t) &= 3(t-1)H(t-1) + \big(3 - 3(t-1)\big)H(t-2) \\ &= (3t-3)H(t-1) + (6-3t)H(t-2). \end{aligned}$$

Zbog linearnosti, Laplaceova transformacija funkcije f sada glasi

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{(3t-3)H(t-1)\} + \mathcal{L}\{(6-3t)H(t-2)\}.$$

Međutim, još uvijek ne možemo primijeniti tvrdnju teorema 1.29 jer on vrijedi kada su argumenti originala jednaki argumentima Heavisideovih funkcija.

Stoga, neka su g_1 i g_2 funkcije za koje je $g_1(t-1) = 3t-3$ i $g_2(t-2) = 6-3t$. Tada je

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g_1(t-1)H(t-1)\} + \mathcal{L}\{g_2(t-2)H(t-2)\},$$

pa na ovaj oblik smijemo primijeniti tvrdnju teorema 1.29, po kojemu onda slijedi

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = e^{-s}\mathcal{L}\{g_1(t)\} + e^{-2s}\mathcal{L}\{g_2(t)\}.$$

Prvo tražimo funkciju g_1 takvu da je $g_1(t-1) = 3t-3$. Budući da je $g_1(t-1) = 3(t-1)$, slijedi da je $g_1(t) = 3t$, pa je

$$\mathcal{L}\{g_1(t)\} = \frac{3}{s^2},$$

za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\mathrm{Re}(s) > 0$. Još moramo pronaći funkciju g_2 takvu da je $g_2(t-2) = 6-3t$. Budući da je $g_2(t-2) = -3(t-2)$, slijedi da je $g_2(t) = -3t$, pa je

$$\mathcal{L}\{g_2(t)\} = -\frac{3}{s^2},$$

za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\mathrm{Re}(s) > 0$. Sada konačno imamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t)\} &= e^{-s}\left(\frac{3}{s^2}\right) - e^{-2s}\left(\frac{3}{s^2}\right) \\ &= \frac{3}{s^2}\big(e^{-s} - e^{-2s}\big), \end{aligned}$$

za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Još nekim važnim svojstvima Laplaceove transformacije bavit ćemo se u idućem poglavlju, nakon što definiramo inverznu Laplaceovu transformaciju.

1.3 Inverzna Laplaceova transformacija

Inverzna Laplaceova transformacija ima široku primjenu u fizikalnim sustavima i kao takva nam je izuzetno važna. Nama će ipak najviše koristiti prilikom određivanja rješenja diferencijalne jednadžbe u trenutku kada dobiveno rješenje transformirane jednadžbe trebamo "vratiti" u polazni problem. Iako je (vjerojatno) intuitivno jasno što je inverz Laplaceove transformacije, za početak ćemo ga ipak definirati.

Definicija 1.31. *Neka je $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Inverznu Laplaceovu transformaciju definiramo kao*

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t), \quad t \geq 0.$$

Da bi inverz postojao, preslikavanje $f \mapsto \mathcal{L}\{f\}$ mora biti injektivno. Stoga se postavlja pitanje postoje li dvije različite funkcije koje se preslikavaju u istu? Može se pokazati da postoje.

Primjer 1.32. *Odredimo $\mathcal{L}\{h(t)\}$, gdje je*

$$h(t) = \begin{cases} t^2, & t > 0 \\ 1, & t = 0. \end{cases}$$

Rješenje. Otprije već znamo da za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\mathrm{Re}(s) > 0$, vrijedi

$$\mathcal{L}\big(t^2\big) = \frac{2}{s^3},$$

pa je zato i

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{2}{s^3},$$

budući da promjena vrijednosti funkcije u nekoj točki ne utječe na vrijednost Laplaceovog (Riemannovog) integrala.

Općenito govoreći, funkcije čije se vrijednosti razlikuju u konačno mnogo točaka imaju jednake Laplaceove transformacije, stoga njihov inverz nije jedinstven. Dakle, $\mathcal{L}^{-1}\{F\}$ nije jedinstven ukoliko promatramo funkcije s prekidima. Taj problem možemo izbjeći promatrajući samo neprekidne funkcije. O tome nam govori sljedeći teorem, čiji se dokaz može pronaći u [10, str. 61.].

Teorem 1.33 (Lerchov teorem). *Različite neprekidne funkcije na $[0, +\infty\rangle$ imaju različite Laplaceove transformacije.*

Osim jedinstvenosti, još jedno važno svojstvo inverzne Laplaceove transformacije jest njezina linearnost.

Teorem 1.34 (**Linearnost inverzne Laplaceove transformacije**). *Inverzna Laplaceova transformacija je linearno preslikavanje, odnosno za* $F_1(s) = \mathcal{L}\{f_1(t)\}$ *i* $F_2(s) = \mathcal{L}\{f_2(t)\}$ *vrijedi*

$$\mathcal{L}^{-1}\{aF_1(s) + bF_2(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\},$$

gdje su a *i* b *proizvoljne konstante.*

Dokaz. U teoremu 1.19 smo dokazali linearnost Laplaceove transformacije, odnosno da za proizvoljne konstante a i b vrijedi

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{af_1(t) + bf_2(t)\} &= a\mathcal{L}\{f_1(t)\} + b\mathcal{L}\{f_2(t)\}\\ &= aF_1(s) + bF_2(s).\end{aligned}$$

Djelujući s $\mathcal{L}^{-1}$ na obje strane prethodne jednadžbe, dobivamo

$$af_1(t) + bf_2(t) = \mathcal{L}^{-1}\{aF_1(s) + bF_2(s)\},$$

a to je ekvivalentno s

$$a\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\{aF_1(s) + bF_2(s)\},$$

što smo i željeli pokazati. Time je teorem dokazan. □

Napomena 1.35. *Općenito vrijedi da je inverz linearnog operatora linearan operator.*

U sljedećim primjerima ćemo određivati inverzne Laplaceove transformacije nekih funkcija. Za početak direktno iščitajmo inverze koji su se pojavili u prethodnim računima. Iz jednakosti (1.6) možemo zaključiti da za svaki $n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{n!}{s^{n+1}}\right) = t^n \quad \big(t > 0\big). \tag{1.26}$$

Iz primjera 1.20 slijedi da je:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + w^2}\right) = \cos wt \quad \big(w \in \mathbb{R},\ t \geq 0\big), \tag{1.27}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{w}{s^2 + w^2}\right) = \sin wt \quad \big(w \in \mathbb{R},\ t \geq 0\big), \tag{1.28}$$

a iz primjera 1.21:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 - w^2}\right) = \cosh wt \quad \big(w \in \mathbb{R},\ t \geq 0\big), \tag{1.29}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{w}{s^2 - w^2}\right) = \sinh wt \quad \big(w \in \mathbb{R},\ t \geq 0\big). \tag{1.30}$$

Teoreme 1.23 i 1.29, za $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, također možemo razmatrati i u njihovim inverznim oblicima:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at}f(t) \quad \big(a \in \mathbb{R},\ t \geq 0\big), \tag{1.31}$$

i

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = H_a(t)f(t-a) \quad \big(a \geq 0,\ t \geq 0\big), \tag{1.32}$$

redom. Ne zaboravimo spomenuti inverz kojeg dobivamo iz (1.25), a glasi

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-as}}{s}\right) = H_a(t) \quad \big(a \geq 0,\ t \geq 0\big), \tag{1.33}$$

gdje je $H_a(t)$ Heavisideova step funkcija.

Naravno, postoje i mnoge funkcije za koje ne možemo odmah prepoznati Laplaceovom transformacijom kojih funkcija su one nastale. Ono što nam nekad zna praviti problem je to da zapravo ne postoji sustavna metoda određivanja inverza Laplaceove transformacije i zato ne možemo biti sigurni da ćemo ju uspjeti pronaći. Iz tog razloga, razvile su se razne metode određivanja inverza, a neki od alata za kojima često posežemo kod racionalnih funkcija su svakako rastav na parcijalne razlomke i nadopuna do potpunog kvadrata.

Primjer 1.36. *Odredimo*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2+1}{s(s-1)^2}\right).$$

Rješenje. Rastavimo funkciju na parcijalne razlomke. Tražimo konstante A, B i C takve da vrijedi

$$\frac{s^2+1}{s(s-1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2}.$$

Prethodna jednakost ekvivalentna je s

$$s^2 + 1 = A(s-1)^2 + Bs(s-1) + Cs,$$

iz čega, izjednačavanjem slobodnog člana te koeficijenata uz s i s^2, dobivamo:

$$A = 1,\ B = 0,\ C = 2.$$

Stoga, zbog linearnosti inverza Laplaceove transformacije, vrijedi:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2+1}{s(s-1)^2}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} + \frac{2}{(s-1)^2}\right)\\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) + 2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right).\end{aligned}$$

Iz (1.26) znamo da je

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = 1,$$

a (1.20) nam daje

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-1)^2}\right) = te^t \quad \big(t > 0\big).$$

Stoga je traženi inverz, za $t > 0$, jednak

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2+1}{s(s-1)^2}\right) = 1 + te^t.$$

Primjer 1.37. *Odredimo*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+2s+5}\right).$$

Rješenje. Nazivnik dane funkcije ne može se faktorizirati, pa ćemo ga u ovom slučaju nadopuniti do potpunog kvadrata. Vrijedi:

$$\frac{s}{s^2+2s+5} = \frac{s}{(s+1)^2+4} = \frac{(s+1)-1}{(s+1)^2+4}.$$

Stoga, iz linearnosti inverza Laplaceove transformacije, slijedi:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+2s+5}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(s+1)-1}{(s+1)^2+4}\right) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2+4}\right) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+1)^2+4}\right).
\end{aligned}$$

Sada, zbog (1.27) i (1.31) imamo

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+4}\right) = e^{-t}\cos 2t \quad \big(t \geq 0\big),$$

a iz (1.28) i (1.31) slijedi

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+1)^2+4}\right) = e^{-t}\sin 2t \quad \big(t \geq 0\big).$$

Stoga je traženi inverz, za $t \geq 0$, jednak

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+2s+5}\right) &= e^{-t}\cos 2t - \frac{1}{2}e^{-t}\sin 2t \\ &= e^{-t}\left(\cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t\right).\end{aligned}$$

2 Svojstva Laplaceove transformacije

U prethodnom poglavlju smo naveli i dokazali osnovna svojstva Laplaceove transformacije, no to nije ni približno sve. Ona posjeduje još mnoga bitna svojstva koja ćemo u nastavku detaljno proučiti.

2.1 Deriviranje i integriranje Laplaceove transformacije

U ovom odjeljku pokazat ćemo čemu su jednaki derivacija i integral Laplaceovog transformata F funkcije f. Svojstvo da Laplaceovu transformaciju možemo derivirati i integrirati, te pravilo po kojem to možemo učiniti, bit će nam od velike koristi pri računanju transformacija nekih funkcija, što ćemo kasnije i pokazati.

Sljedeći teorem govori o deriviranju Laplaceovog transformata kao funkcije realne varijable s.

Teorem 2.1 (**O deriviranju slike**). *Neka je f po dijelovima neprekidna funkcija na $[0, +\infty\rangle$ i eksponencijalnog rasta reda α, i neka je $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. Tada za svaki $s \in \mathbb{R}$ takav da je $s > \alpha$, vrijedi*

$$\frac{d^n}{ds^n}F(s) = \mathcal{L}\{(-1)^n t^n f(t)\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.1}$$

Dokaz. Dokažimo tvrdnju matematičkom indukcijom po n.

Baza indukcije. Kako bismo dokazali tvrdnju za $n = 1$, funkciju F, po definiciji jednaku

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt,$$

deriviramo po varijabli s, te dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{ds} &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty \frac{d}{ds} e^{-st} f(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty -te^{-st} f(t)\, dt \\
&= -\int_0^\infty te^{-st} f(t)\, dt \\
&= -\mathcal{L}\{tf(t)\} \quad \big(s \in \mathbb{R},\ s > \alpha\big),
\end{aligned}$$

pri čemu smo kod druge jednakosti koristili da za $s > \alpha$ Laplaceov integral konvergira apsolutno pa derivacija i integral komutiraju. Stoga je

$$\mathcal{L}\{tf(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s) \quad \big(s \in \mathbb{R},\ s > \alpha\big),$$

čime je baza indukcije provjerena.

Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s) \quad \big(s \in \mathbb{R},\ s > \alpha\big). \tag{2.2}$$

Korak indukcije. Dokažimo da i za $n+1$ vrijedi ista zakonitost, to jest da je

$$\mathcal{L}\{t^{n+1} f(t)\} = (-1)^{n+1} \frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}}F(s) \quad \big(s \in \mathbb{R},\ s > \alpha\big).$$

Deriviranjem obiju strana jednadžbe (2.2) po varijabli s, dobivamo

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}}F(s) \quad \big(s \in \mathbb{R},\ s > \alpha\big).$$

Budući da je (opet zbog apsolutne konvergencije Laplaceovog integrala):

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{t^n f(t)\} &= \frac{d}{ds}\int_0^\infty t^n e^{-st} f(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty \frac{d}{ds} t^n e^{-st} f(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty -t \cdot t^n e^{-st} f(t)\, dt \\
&= -\int_0^\infty t^{n+1} e^{-st} f(t)\, dt \quad \big(s \in \mathbb{R},\ s > \alpha\big),
\end{aligned}$$

slijedi da je

$$-\int_0^\infty t^{n+1} e^{-st} f(t)\, dt = (-1)^n \frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}}F(s) \quad \big(s \in \mathbb{R},\ s > \alpha\big),$$

odnosno

$$\int_0^\infty t^{n+1} e^{-st} f(t)\, dt = (-1)^{n+1} \frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}}F(s) \quad \big(s \in \mathbb{R},\ s > \alpha\big).$$

Dakle, dokazali smo da za $n+1$ vrijedi

$$\mathcal{L}\{t^{n+1} f(t)\} = (-1)^{n+1} \frac{d^{n+1}}{ds^{n+1}}F(s) \quad \big(s \in \mathbb{R},\ s > \alpha\big).$$

Stoga, prema aksiomu matematičke indukcije, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $s \in \mathbb{R}$, $s > \alpha$, vrijedi

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}F(s). \qquad \square$$

Napomena 2.2. *Može se pokazati da je Laplaceov transformat i analitička funkcija te da jednakost (2.1) vrijedi i za sve* $s \in \mathbb{C}$ *za koje je* $\mathrm{Re}(s) > \alpha$. *Taj se dokaz može pronaći u [9, str. 126.].*

Napomena 2.3. *Jednakost (2.1) se može zapisati i u ekvivalentnom obliku*

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{d^n}{ds^n}F(s)\right) = (-1)^n\, t^n\, f(t), \tag{2.3}$$

za $t > 0$ *i* $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$.

Laplaceov transformat možemo i integrirati, a rezultat je još jedna Laplaceova transformacija. Sljedeći teorem govori o integriranju Laplaceovog transformata kao funkcije realne varijable s.

Teorem 2.4 (O integriranju slike). *Neka je* f *po dijelovima neprekidna funkcija na* $[0, +\infty\rangle$ *i eksponencijalnog rasta reda* α *takva da* $\lim\limits_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ *postoji, i neka je* $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$. *Tada za svaki* $s \in \mathbb{R}$ *takav da je* $s > \alpha$, *vrijedi*

$$\int_s^\infty F(x)\,dx = \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right).$$

Dokaz. Po definiciji Laplaceove transformacije, funkcija F jednaka je

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t)\,dt.$$

Integrirajući obje strane prethodne jednakosti po $x \in \mathbb{R}$, dobivamo

$$\begin{aligned}\int_s^\infty F(x)\,dx &= \int_s^\infty \left(\int_0^\infty e^{-xt} f(t)\,dt\right)dx\\ &= \lim_{\omega\to\infty}\int_s^\omega \left(\int_0^\infty e^{-xt} f(t)\,dt\right)dx.\end{aligned}$$

Budući da integral $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xt} f(t)\,dt$ konvergira uniformno za $\alpha < s < x < \omega$, opravdano je zamijeniti redoslijed integracije, iz čega onda slijedi

$$\begin{aligned}\int_s^\infty F(x)\,dx &= \lim_{\omega\to\infty}\int_0^\infty \left(\int_s^\omega e^{-xt} f(t)\,dt\right)dx\\ &= \lim_{\omega\to\infty}\int_0^\infty \left[\frac{e^{-xt}}{-t} f(t)\right]_s^\omega dt\end{aligned}$$

$$= \lim_{\omega\to\infty} \int_0^\infty \left[\frac{e^{-\omega t}}{-t} f(t) - \frac{e^{-st}}{-t} f(t) \right] dt$$

$$= \lim_{\omega\to\infty} \int_0^\infty \left[\frac{e^{-st}}{t} f(t) - \frac{e^{-\omega t}}{t} f(t) \right] dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-st} \frac{f(t)}{t} \, dt - \lim_{\omega\to\infty} \int_0^\infty e^{-\omega t} \frac{f(t)}{t} \, dt$$

$$= \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) - \lim_{\omega\to\infty} \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) \qquad \big(s \in \mathbb{R},\ s > \alpha\big).$$

Sada iz teorema 1.13 znamo da je

$$\lim_{\omega\to\infty} \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = 0,$$

pa je zato

$$\int_s^\infty F(x)\, dx = \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right),$$

za sve $s \in \mathbb{R}$ takve da je $s > \alpha$. □

Za kraj ovog dijela, bez dokaza navodimo svojstvo koje govori o integriranju Laplaceovog transformata kao funkcije kompleksne varijable s. Dokaz se može pronaći u [7, str. 63.].

Teorem 2.5. *Neka su f i $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ po dijelovima neprekidne funkcije na $[0, +\infty\rangle$ i f eksponencijalnog rasta reda α_0, a $t \mapsto \dfrac{f(t)}{t}$ eksponencijalnog rasta reda α_1. Nadalje, neka je $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ i neka integral $\displaystyle\int_s^\infty F(x)\, dx$ konvergira za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\mathrm{Re}(s) > \alpha_1$. Tada vrijedi*

$$\int_s^\infty F(x)\, dx = \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right).$$

U sljedeća dva primjera pokazat ćemo kako iskoristiti tvrdnje prethodnih teorema za računanje Laplaceovih transformacija.

Primjer 2.6. *Odredimo $\mathcal{L}\big(te^t \sin 2t\big)$.*

Rješenje. Iz (1.22) znamo da je

$$\mathcal{L}\big(e^t \sin 2t\big) = \frac{2}{(s-1)^2 + 4} \qquad \big(s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 1\big).$$

Sada primjenjujući tvrdnju napomene 2.2, dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\big(te^t \sin 2t\big) &= -\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{(s-1)^2+4}\right) \\
&= 2\cdot\frac{2s-2}{(s^2-2s+5)^2} \\
&= \frac{4s-4}{(s^2-2s+5)^2} \qquad \big(s\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s)>1\big).
\end{aligned}$$

Primjer 2.7. *Odredimo*

$$\mathcal{L}\left(\frac{e^{3t}-e^{-2t}}{t}\right).$$

Rješenje. Stavimo $f(t)=e^{3t}-e^{-2t}$. Iz linearnosti Laplaceove transformacije te (1.10) i (1.11), slijedi

$$\mathcal{L}\big(e^{3t}-e^{-2t}\big)=F(s)=\frac{1}{s-3}-\frac{1}{s+2} \qquad \big(s\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s)>3\big).$$

Primjenom teorema 2.5, za sve $s\in\mathbb{C}$ za koje je $\mathrm{Re}(s)>3$, vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) &= \int_s^\infty F(x)\,dx \\
&= \int_s^\infty\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x+2}\right)dx \\
&= \big[\log(x-3)-\log(x+2)\big]\Big|_s^\infty \\
&= \left[\log\left(\frac{x-3}{x+2}\right)\right]\Bigg|_s^\infty \\
&= \lim_{x\to\infty}\left[\log\left(\frac{x-3}{x+2}\right)\right]-\log\left[\frac{s-3}{s+2}\right].
\end{aligned}$$

Preostaje nam izračunati

$$\lim_{x\to\infty}\left[\log\left(\frac{x-3}{x+2}\right)\right].$$

Zbog neprekidnosti logaritamske funkcije na svojoj domeni, limes i logaritam komutiraju, pa vrijedi:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\log\left(\frac{x-3}{x+2}\right)\right] = \log\left[\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-3}{x+2}\right)\right] = \log 1 = 0.$$

Stoga je

$$\mathcal{L}\left(\frac{e^{3t}-e^{-2t}}{t}\right) = \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) = -\log\left[\frac{s-3}{s+2}\right] = \log\left[\frac{s+2}{s-3}\right],$$

za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\mathrm{Re}(s) > 3$.

2.2 Laplaceova transformacija derivacije i integrala

U mnogim granama matematike javlja se potreba za rješavanjem diferencijalnih jednadžbi. U sljedećem poglavlju ovoga rada pokazat ćemo kako se neke od njih mogu riješiti pomoću Laplaceove transformacije. Prije toga, moramo znati čemu je jednaka Laplaceova transformacija derivacije funkcije f, o čemu nam govore sljedeći teoremi.

Teorem 2.8 **(O deriviranju originala).** *Neka je f neprekidna funkcija na $\langle 0,\infty\rangle$ i eksponencijalnog rasta reda α, i neka je f' po dijelovima neprekidna funkcija na $[0,\infty\rangle$. Tada za svaki $s \in \mathbb{C}$ takav da je $\mathrm{Re}(s) > \alpha$, vrijedi*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0^+).$$

Dokaz. Metodom parcijalne integracije, dobivamo:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt &= \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \tau\to\infty}} \int_\delta^\tau e^{-st} f'(t)\,dt \\
&= \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \tau\to\infty}} \left[e^{-st} f(t)\Big|_\delta^\tau + s\int_\delta^\tau e^{-st} f(t)\,dt \right] \\
&= \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \tau\to\infty}} \left[e^{-s\tau} f(\tau) - e^{-s\delta} f(\delta) + s\int_\delta^\tau e^{-st} f(t)\,dt \right] \\
&= -f(0^+) + s\int_\delta^\tau e^{-st} f(t)\,dt \quad \big(s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > \alpha\big),
\end{aligned}$$

pri čemu smo koristili da za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\mathrm{Re}(s) = x > \alpha$, vrijedi

$$|e^{-s\tau} f(\tau)| \le e^{-x\tau} M e^{\alpha\tau} = M e^{-(x-\alpha)\tau} \to 0,$$

kako $\tau \to \infty$. Stoga je

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0^+), \tag{2.4}$$

za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\mathrm{Re}(s) > \alpha$. Također, primijetimo da $f(0^+)$ postoji budući da $f'(0^+) = \lim\limits_{t \to 0^+} f'(t)$ postoji. Nadalje, ako je f neprekidna u $t = 0$, onda je $f(0^+) = f(0)$, pa jednakost (2.4) prelazi u

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) \quad \big(s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > \alpha\big). \tag{2.5}$$

□

Napomena 2.9. *Zanimljiva posljedica teorema 2.8 jest ta da $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ možemo izračunati i bez da zahtijevamo eksponencijalni rast funkcije f'.*

Napomena 2.10. *Primijetimo da se, ako je $f(0) = 0$, jednakost (2.5) može zapisati i u ekvivalentnom obliku*

$$\mathcal{L}^{-1}\{sF(s)\} = f'(t), \tag{2.6}$$

gdje je $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ i $t \geq 0$.

Može se dogoditi da funkcija f ima prekid prve vrste. U tom slučaju vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 2.11. *Neka je f neprekidna funkcija na $[0, \infty\rangle$, osim u točki $t = t_1 > 0$ u kojoj ima prekid prve vrste i eksponencijalnog rasta reda α, i neka je f' po dijelovima neprekidna funkcija na $[0, \infty\rangle$. Tada za svaki $s \in \mathbb{C}$ takav da je $\mathrm{Re}(s) > \alpha$, vrijedi*

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) - e^{-t_1 s}\big(f({t_1}^+) - f({t_1}^-)\big).$$

Dokaz. Metodom parcijalne integracije i uvažavajući činjenicu da funkcija f ima prekid u točki $t = t_1 > 0$, dobivamo:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \int_0^\tau e^{-st} f'(t)\, dt \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \left[e^{-st} f(t) \Big|_0^{{t_1}^-} + e^{-st} f(t) \Big|_{{t_1}^+}^{\tau} + s \int_0^\tau e^{-st} f(t)\, dt \right] \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \left[e^{-st_1} f({t_1}^-) - f(0) + e^{-s\tau} f(\tau) - e^{-st_1} f({t_1}^+) + s \int_0^\tau e^{-st} f(t)\, dt \right].
\end{aligned}$$

Stoga je

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) - e^{-st_1}\big(f({t_1}^+) - f({t_1}^-)\big), \tag{2.7}$$

za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\mathrm{Re}(s) > \alpha$. Generalno, ako f ima prekid u konačno mnogo točaka $t_1, t_2, \ldots, t_n$ za koje je $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, onda vrijedi

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) - \sum_{k=1}^{n} e^{-st_k}\big(f({t_k}^+) - f({t_k}^-)\big), \tag{2.8}$$

za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\mathrm{Re}(s) > \alpha$. □

Napomena 2.12. *Ako pretpostavimo da je f' neprekidna na $[0, \infty\rangle$ i eksponencijalnog rasta reda α, onda isto vrijedi i za samu funkciju f.*

Budući da je f' eksponencijalnog rasta reda α, za $t \geq t_0$ i $\alpha \neq 0$, vrijedi

$$|f'(t)| \leq Me^{\alpha t}.$$

Također je, po osnovnom teoremu integralnog računa

$$f(t) = \int_{t_0}^{t} f'(\tau)\, d\tau + f(t_0).$$

Stoga, za funkciju f i $\alpha \neq 0$, vrijedi:

$$\begin{aligned}
|f(t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} f'(\tau)\, d\tau + f(t_0) \right| \\
&\leq \int_{t_0}^{t} |f'(\tau)|\, d\tau + |f(t_0)| \\
&\leq M \int_{t_0}^{t} e^{\alpha\tau}\, d\tau + |f(t_0)| \\
&\leq \frac{M}{\alpha} e^{\alpha t} + |f(t_0)| \\
&\leq Ce^{\alpha t}, \quad t \geq t_0.
\end{aligned}$$

Za $\alpha = 0$ je $|f(t)| \leq C$, pa dobiveni rezultat vrijedi i za $\alpha = 0$.

U svrhu pronalaska rješenja diferencijalne jednadžbe, trebat ćemo računati i $\mathcal{L}\{f''\}$, $\mathcal{L}\{f'''\}, \ldots$ Pretpostavimo da, uz odgovarajuće uvjete, možemo primijeniti formulu (2.5). Tada za f'' vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f''(t)\} &= s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) \\
&= s\big(s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)\big) - f'(0) \\
&= s^2\mathcal{L}\{f(t)\} - sf(0) - f'(0).
\end{aligned}$$

Analogno,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f'''(t)\} &= s\mathcal{L}\{f''(t)\} - f''(0) \\
&= s^3\mathcal{L}\{f(t)\} - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0).
\end{aligned}$$

Uz određene pretpostavke na glatkoću i brzinu rasta funkcije f, sukcesivnom primjenom teorema 2.8 dolazimo do izraza za Laplaceovu transformaciju n-te derivacije funkcije f koji je dan u idućem korolaru.

Korolar 2.13. *Neka su $f, f', \dots, f^{(n-1)}$ neprekidne funkcije na $\langle 0, \infty\rangle$ i eksponencijalnog rasta reda α, i neka je $f^{(n)}$ po dijelovima neprekidna funkcija na $[0, \infty\rangle$. Tada za svaki $s \in \mathbb{C}$ takav da je $\mathrm{Re}(s) > \alpha$, vrijedi*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n \mathcal{L}\{f(t)\} - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0). \tag{2.9}$$

Dokaz se provodi matematičkom indukcijom po n.

Sljedeći rezultat govori o Laplaceovoj transformaciji određenog integrala funkcije f, a koristi se pri rješavanju određenih integrala koji se ne mogu odrediti standardnim metodama integracije.

Teorem 2.14 (O integriranju originala). *Neka je f po dijelovima neprekidna funkcija na $[0, \infty\rangle$ i eksponencijalnog rasta reda α, i neka je*

$$g(t) = \int_0^t f(u)\, du,$$

za $t \geq 0$. Tada za svaki $s \in \mathbb{C}$ takav da je $\mathrm{Re}(s) > \alpha$, vrijedi

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s} \mathcal{L}\{f(t)\}. \tag{2.10}$$

Dokaz. Lako se provjeri da je g po dijelovima neprekidna funkcija na $[0, \infty\rangle$ i eksponencijalnog rasta reda α. Naime, za svaki $t \geq t_0$, vrijedi

$$\begin{aligned} |g(t)| &= \left| \int_0^t f(u)\, du \right| \leq \int_0^t |f(u)|\, du \\ &\leq \int_0^t M e^{\alpha u}\, du = \frac{M}{\alpha} e^{\alpha u} \Big|_0^t \\ &= \frac{M}{\alpha} e^{\alpha t} - \frac{M}{\alpha} \leq \frac{M}{\alpha} e^{\alpha t}. \end{aligned}$$

Dakle, Laplaceova transformacija funkcije g postoji. Budući da je $g' = f$ (osim u točkama u kojima funkcija f ima prekid), koristeći (2.5) imamo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{g'(t)\} &= s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0) \\ &= s\mathcal{L}\{g(t)\} - \int_0^0 f(u)\, du \\ &= s\mathcal{L}\{g(t)\} \quad \big(s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > \alpha\big), \end{aligned}$$

to jest

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} \quad \big(s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > \alpha\big).$$

Dakle, za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\mathrm{Re}(s) > \alpha$, vrijedi

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\}. \qquad \square$$

Uočimo da prema svojstvima iz teorema 2.8 i teorema 2.14, Laplaceova transformacija prevodi deriviranje i integriranje funkcije u množenje, odnosno dijeljenje sa s. Zbog toga se, u određenoj literaturi, ti teoremi nazivaju *O množenju*, odnosno *O dijeljenju*. Kasnije ćemo vidjeti kako pomoću toga neke tipove diferencijalnih jednadžbi svesti na algebarske. Zasad riješimo dva primjera u kojima ćemo ih iskoristiti kako bismo pronašli Laplaceovu transformaciju dane funkcije.

Primjer 2.15. *Odredimo* $\mathcal{L}\big(\sin^2 wt\big)$ *i* $\mathcal{L}\big(\cos^2 wt\big)$, $w \in \mathbb{R}$.

Rješenje. Za $f(t) = \sin^2 wt$ je $f'(t) = 2w \sin wt \cos wt = w \sin 2wt$. Koristeći (2.5), sada imamo

$$\mathcal{L}\big(w \sin 2wt\big) = s\mathcal{L}\big(\sin^2 wt\big) - \sin^2 0 = s\mathcal{L}\big(\sin^2 wt\big) \quad \big(s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 0\big).$$

Stoga je, zbog (1.17)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\big(\sin^2 wt\big) &= \frac{1}{s}\,\mathcal{L}\big(w \sin 2wt\big) \\
&= \frac{w}{s}\,\mathcal{L}\big(\sin 2wt\big) \\
&= \frac{w}{s}\,\frac{2w}{s^2 + 4w^2} \\
&= \frac{2w^2}{s^3 + 4sw^2} \quad \big(s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 0\big).
\end{aligned}$$

Nadalje, za $g(t) = \cos^2 wt$ je $f'(t) = -2w \sin wt \cos wt = -w \sin 2wt$. Koristeći (2.5), sada imamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\big(-w \sin 2wt\big) &= s\mathcal{L}\big(\cos^2 wt\big) - \cos^2 0 \\
&= s\mathcal{L}\big(\cos^2 wt\big) - 1 \quad \big(s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 0\big).
\end{aligned}$$

Stoga je, zbog (1.16)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\big(\cos^2 wt\big) &= \frac{1}{s}\,\mathcal{L}\big(-w \sin 2wt\big) + \frac{1}{s} \\
&= -\frac{w}{s}\,\mathcal{L}\big(\sin 2wt\big) + \frac{1}{s} \\
&= -\frac{w}{s}\,\frac{2w}{s^2 + 4w^2} + \frac{1}{s} \\
&= \frac{s^2 + 2w^2}{s^3 + 4sw^2} \quad \big(s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 0\big).
\end{aligned}$$

Primjer 2.16. *Odredimo*

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t \big(\sin 2\tau + e^{-3\tau} \big)\, d\tau \right).$$

Rješenje. Stavimo $f(t) = \sin 2t + e^{-3t}$ i $g(t) = \displaystyle\int_0^t f(\tau)\, d\tau$. Iz linearnosti Laplaceove transformacije te (1.17) i (1.11), slijedi

$$\mathcal{L}\big(\sin 2t + e^{-3t} \big) = F(s) = \frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{s+3} \qquad \big(s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 3\big).$$

Stoga je, zbog (2.10)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\int_0^t \big(\sin 2\tau + e^{-3\tau} \big)\, d\tau \right) &= \frac{1}{s}\, F(s) \\ &= \frac{1}{s}\left(\frac{2}{s^2+4} + \frac{1}{s+3} \right) \qquad \big(s \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(s) > 3\big). \end{aligned}$$

2.3 Granične vrijednosti

Kao što je već naglašeno, važan alat za rješavanje linearnih diferencijalnih jednadžbi je upravo Laplaceova transformacija. Nakon pronalaska rješenja transformirane jednadžbe, inverznim postupkom dolazimo do rješenja početne jednadžbe. Prilikom toga, nerijetko se javljaju teškoće u određivanju spomenutog inverza. Srećom, uvid u ponašanje rješenja možemo dobiti i bez rješavanja diferencijalne jednadžbe ispitivanjem ponašanja funkcije f za jako velike, odnosno jako male vrijednosti realne varijable t. Drugim riječima, pokazat ćemo da je ponekad moguće odrediti granično ponašanje funkcije f kada $t \to 0$ ili $t \to \infty$ čak i ako nam funkcija f nije eksplicitno zadana. Sljedeća dva teorema nam govore o tome.

Teorem 2.17 (O početnim vrijednostima). *Pretpostavimo da funkcije f i f' zadovoljavaju uvjete teorema 2.8, i neka je $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Tada vrijedi*

$$f(0) = \lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{\mathrm{Re}(s) \to \infty} sF(s). \tag{2.11}$$

Dokaz. Prema teoremu 2.8 imamo

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0),$$

za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\mathrm{Re}(s) > \alpha$. Nadalje, iz teorema 1.13 slijedi

$$\lim_{\mathrm{Re}(s) \to \infty} \mathcal{L}\{f'(t)\} = \lim_{\mathrm{Re}(s) \to \infty} \big(sF(s) - f(0) \big) = 0,$$

odakle je

$$f(0) = \lim_{\mathrm{Re}(s) \to \infty} sF(s). \qquad \square$$

Teorem 2.18 (**O krajnjim vrijednostima**). *Pretpostavimo da funkcije f i f' zadovoljavaju uvjete teorema 2.8, i neka je $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. Nadalje, neka limes $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ postoji (kao konačan broj). Tada za svaki $s \in \mathbb{C}$ takav da je $\mathrm{Re}(s) > 0$, vrijedi*

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{\mathrm{Re}(s)\to 0} sF(s).$$

Dokaz. Uočimo da postojanje limesa $\lim\limits_{t\to\infty} f(t)$ govori da je funkcija f omeđena. Stoga, njezin eksponencijalni red jednak je 0. Prema teoremu 2.8, vrijedi

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0),$$

za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\mathrm{Re}(s) > 0$. Pustimo li na obje strane gornje jednakosti da $\mathrm{Re}(s) \to 0$, dobivamo

$$\lim_{\mathrm{Re}(s)\to 0} \mathcal{L}\{f'(t)\} = \lim_{\mathrm{Re}(s)\to 0} sF(s) - f(0). \tag{2.12}$$

Također je

$$\begin{aligned}
\lim_{\mathrm{Re}(s)\to 0} \mathcal{L}\{f'(t)\} &= \lim_{\mathrm{Re}(s)\to 0} \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt \\
&= \int_0^\infty f'(t)\, dt \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau f'(t)\, dt \\
&= \lim_{\tau\to\infty} f(\tau) - f(0) \\
&= \lim_{t\to\infty} f(t) - f(0),
\end{aligned}$$

iz čega, izjednačavanjem s (2.12), slijedi

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{\mathrm{Re}(s)\to 0} sF(s),$$

za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\mathrm{Re}(s) > 0$. □

2.4 Konvolucija

Neka je H Laplaceova transformacija neke funkcije te neka su f i g originali. Ako je $F = \mathcal{L}\{f\}$, $G = \mathcal{L}\{g\}$ te $H = F \cdot G$, postavlja se pitanje je li funkcija H dobivena kao Laplaceova transformacija produkta $f \cdot g$, odnosno vrijedi li $\mathcal{L}\{f \cdot g\} = \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\}$. Lako se pokaže da to općenito ne vrijedi. Iz tog razloga, uvodimo poseban oblik množenja funkcija kojega ćemo nazivati konvolucija.

Konvolucija dviju funkcija f i g definiranih za $t \geq 0$, jedan je od oblika integralne transformacije. Budući da se Laplaceova transformacija primjenjuje pri rješavanju integralnih jednadžbi konvolucijskog tipa, u nastavku ćemo se upoznati s konvolucijom i njezinim svojstvima.

Definicija 2.19. ***Konvolucija funkcija*** *$f, g : [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$, u oznaci $f * g$, je funkcija dana s*

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau)\, d\tau. \tag{2.13}$$

Konvolucijski integral (2.13) postoji ukoliko su f i g po dijelovima neprekidne funkcije. Također, često se pojavljuje i u fizici gdje ima primjenu u opisivanju fizikalnih sustava kod kojih ponašanje sustava ne ovisi samo o stanju sustava u trenutku t, već i o stanju sustava prije tog trenutka.

Za početak navedimo temeljna svojstva konvolucije koja se lako mogu dokazati jednostavnim integralnim računom. Za po dijelovima neprekidne funkcije $f, g, h : [0, \infty\rangle \to \mathbb{R}$, vrijedi:

(i) kvaziasocijativnost
$$c(f * g) = cf * g = f * cg, \;\; c \in \mathbb{R},$$

(ii) komutativnost
$$f * g = g * f,$$

(iii) asocijativnost
$$f * (g * h) = (f * g) * h,$$

(iv) distributivnost
$$f * (g + h) = f * g + f * h.$$

Vidimo da konvolucija ima neka zajednička svojstva s običnim množenjem, ali postoje svojstva množenja koja ne vrijede za konvoluciju.

Primjer 2.20. *Pokažimo da općenito ne vrijedi $f * 1 = f$.*

Rješenje. Po (2.13), lako se vidi da je

$$(f * 1)(t) = \int_0^t f(\tau) \cdot 1\, d\tau \neq f(t).$$

Iako operacija konvolucije nalazi svoju primjenu u raznim područjima, nas će ipak najviše zanimati kako nam ona pomaže u računanju inverzne Laplaceove transformacije produkta dviju funkcija, ako znamo inverznu transformaciju svakog od faktora. Konvolucija posjeduje jedno vrlo značajno svojstvo u vezi s Laplaceovom transformacijom, a to je da je Laplaceova transformacija konvolucije dviju funkcija jednaka produktu njihovih Laplaceovih transformacija. O tome nam govori sljedeći teorem.

Teorem 2.21 (**O konvoluciji**). *Neka su f i g po dijelovima neprekidne funkcije na $[0, \infty\rangle$ i eksponencijalnog rasta reda α, odnosno β. Tada za svaki $s \in \mathbb{C}$ takav da je $\mathrm{Re}(s) > \max\{\alpha, \beta\}$, vrijedi*

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\}. \tag{2.14}$$

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $\alpha > \beta$. Tada je i funkcija g eksponencijalnog rasta reda α. Nadalje, neka su

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau \text{ i } G(s) = \mathcal{L}\{g(t)\} = \int_0^\infty e^{-sv} g(v)\, dv,$$

za $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > \max\{\alpha, \beta\}$. Tada imamo

$$\begin{aligned} F(s) \cdot G(s) &= \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau \cdot \int_0^\infty e^{-sv} g(v)\, dv \\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-s(\tau+v)} f(\tau) g(v)\, dv \right) d\tau. \end{aligned}$$

Supstitucijom $t = \tau + v$ za fiksni τ, dobivamo $dt = dv$, pa je sada

$$F(s) \cdot G(s) = \int_0^\infty \left(\int_\tau^\infty e^{-st} f(\tau) g(t-\tau)\, dt \right) d\tau. \tag{2.15}$$

Neka je funkcija g definirana tako da je $g(t) = 0$ za sve $t < 0$. Onda je $g(t - \tau) = 0$ za sve $t < \tau$, pa (2.15) možemo zapisati kao

$$F(s) \cdot G(s) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st} f(\tau) g(t-\tau)\, dt\, d\tau.$$

Budući da su, po pretpostavci, f i g po dijelovima neprekidne funkcije na $[0, \infty\rangle$ i eksponencijalnog rasta reda α, njihov Laplaceov integral konvergira apsolutno. Stoga

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |e^{-st} f(\tau) g(t-\tau)|\, dt\, d\tau$$

također konvergira, što nam omogućuje zamjenu redoslijeda integracije. Sada je

$$
\begin{aligned}
F(s) \cdot G(s) &= \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau\, dt \\
&= \int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-st} f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau \right) dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t f(\tau) g(t-\tau)\, d\tau \right) dt \\
&= \mathcal{L}\{(f * g)(t)\},
\end{aligned}
$$

za sve $s \in \mathbb{C}$ za koje je $\mathrm{Re}(s) > \max\{\alpha, \beta\}$. □

Napomena 2.22. *Jednakost (2.14) se može zapisati i u ekvivalentnom obliku*

$$
\mathcal{L}^{-1}\{F(s) \cdot G(s)\} = (f * g)(t), \tag{2.16}
$$

za $t > 0$ *i* $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$.

U sljedećem primjeru ćemo odrediti inverznu Laplaceovu transformaciju funkcije pomoću jednakosti (2.16).

Primjer 2.23. *Koristeći jednakost (2.16), odredimo*

$$
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2} \right).
$$

Rješenje. Zapišimo izraz

$$
\frac{s}{(s^2+4)^2}
$$

kao

$$
\left(\frac{1}{s^2+4} \right) \left(\frac{s}{s^2+4} \right)
$$

te stavimo

$$
F(s) = \frac{1}{s^2+4} \text{ i } G(s) = \frac{s}{s^2+4}.
$$

Stoga je, zbog (1.28) i (1.27), redom

$$
f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4} \right) = \frac{1}{2}\, \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4} \right) = \frac{1}{2} \sin 2t \quad \big(t \geq 0\big)
$$

i

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) = \cos 2t \qquad \big(t \geq 0\big).$$

Sada koristeći (2.16) i (2.13), dobivamo

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^t \sin 2\tau \ \cos 2(t-\tau)\, d\tau \qquad \big(t > 0\big). \tag{2.17}$$

Prisjetimo se sada trigonometrije i jedne od formula pretvorbe zbroja u umnožak koja glasi

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}\big(\sin(A+B) + \sin(A-B)\big).$$

Stavimo li $A = 2\tau$ i $B = 2(t-\tau)$, tada jednakost (2.17) postaje

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right) &= \frac{1}{4}\int_0^t \sin 2t + \sin(4\tau - 2t)\, d\tau \\
&= \frac{1}{4}\left(\sin 2t\ \tau\Big|_0^t - \frac{1}{4}\cos(4\tau - 2t)\Big|_0^t\right) \\
&= \frac{1}{4}\Big(t \sin 2t - \frac{1}{4}\big(\cos 2t - \cos 2t\big)\Big) \\
&= \frac{1}{4}\, t \sin 2t \qquad \big(t > 0\big).
\end{aligned}$$

Stoga je traženi inverz, za $t > 0$, jednak

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+4)^2}\right) = \frac{1}{4}\, t \sin 2t.$$

3 Primjena na rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi

U prethodnim poglavljima smo definirali Laplaceovu transformaciju te naveli i dokazali njezina najvažnija svojstva, a sada je vrijeme da to sve primijenimo na određenom problemu. Spomenuli smo kako Laplaceova transformacija ima brojne i važne mogućnosti primjene u matematici, fizici, elektrotehnici i drugdje. No, kao što smo prethodno i najavili, mi ćemo se ograničiti na jednu njezinu važnu primjenu u matematici, a odnosi se na rješavanje običnih diferencijalnih jednadžbi. Činjenica da će Laplaceova transformacija biti zgodan alat za rješavanje određenih tipova diferencijalnih jednadžbi zapravo i ne začuđuje mnogo, budući da smo u prethodnom poglavlju vidjeli da uzimanjem Laplaceove transformacije derivacije funkcije, derivacija "nestaje". U ovom poglavlju ćemo se detaljno posvetiti tome. No, prije toga, dajmo kratak pregled osnovnih pojmova koji će nam ovdje biti potrebni.

Diferencijalne jednadžbe su jednadžbe u kojima se, osim nepoznate funkcije koju je potrebno odrediti, pojavljuju i njezine derivacije. Ukoliko se radi o funkciji jedne varijable, govorimo o običnim diferencijalnim jednadžbama i njima ćemo se u nastavku detaljnije baviti. U slučaju funkcije više varijabli, govorimo o parcijalnim diferencijalnim jednadžbama. Red diferencijalne jednadžbe jednak je najvišem stupnju derivacije koja se u njoj pojavljuje. U ovisnosti o redu, dijelimo ih na diferencijalne jednadžbe prvog ili višeg reda.

Općenita **obična diferencijalna jednadžba n-tog reda** je jednadžba oblika

$$F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

koja povezuje nezavisnu varijablu t, nepoznatu funkciju jedne varijable $y(t)$ i njezine derivacije $y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n)}(t)$. F označava poznatu funkciju više varijabli, a cilj je pronaći funkciju $y(t)$ koja zadovoljava danu diferencijalnu jednadžbu (varijablu t uz y ćemo u nastavku najčešće izostavljati).

3.1 Linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima

Zbog svojstva linearnosti koje posjeduje Laplaceova transformacija, njome se ne mogu rješavati općenite diferencijalne jednadžbe, na primjer jednadžbu

$$\left(y'\right)^3 + y = \sin t$$

ne možemo riješiti pomoću Laplaceove transformacije. Iz tog razloga nas će posebno zanimati jednadžbe oblika

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = f(t), \tag{3.1}$$

gdje su $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ funkcije nezavisne varijable t i $a_0 \neq 0$, a nazivamo ih **linearnim diferencijalnim jednadžbama**. Funkciju $f(t)$ s desne strane jednadžbe (3.1) nazivamo funkcijom smetnje. Ako je $f(t) = 0$, kažemo da je linearna diferencijalna jednadžba **homogena**. Ako je $f(t) \neq 0$, kažemo da je linearna diferencijalna jednadžba **nehomogena**. Nadalje, ako su u jednadžbi (3.1) $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ konstantne funkcije, tada govorimo o **linearnoj diferencijalnoj jednadžbi s konstantnim koeficijentima**,

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(t). \tag{3.2}$$

Laplaceova transformacija bit će korisna upravo pri rješavanju jednadžbi tog oblika.

Napomena 3.1. *Općenito, jednadžba (3.1) ima beskonačno mnogo rješenja. Pretpostavimo li još da y zadovoljava početne uvjete*

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = y_1,\ \ldots,\ y^{(n-2)}(0) = y_{n-2},\ y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}, \tag{3.3}$$

tada (3.1) zajedno s (3.3) čini ***Cauchyjevu*** *ili* ***početnu zadaću*** *koja ima jedinstveno rješenje.*

Promotrimo sada linearnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda s konstantnim koeficijentima $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$ay'' + by' + cy = f(t),$$

uz početne uvjete $y(0) = A$ i $y'(0) = B$. Pretpostavimo da f zadovoljava uvjete teorema 1.12 (o egzistenciji), a rješenje y uvjete korolara 2.13. U tom slučaju ima smisla uzeti Laplaceovu transformaciju lijeve i desne strane dane jednadžbe, pa koristeći svojstvo linearnosti, dobivamo

$$\mathcal{L}\{ay'' + by' + cy\} = a\mathcal{L}\{y''\} + b\mathcal{L}\{y'\} + c\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{f(t)\}.$$

Na osnovi jednakosti (2.9) i zadanih početnih uvjeta, vrijedi:

$$\mathcal{L}\{y'\} = s\mathcal{L}\{y\} - y(0) = s\mathcal{L}\{y\} - A,$$

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) = s^2\mathcal{L}\{y\} - sA - B.$$

Uvrštavanjem dobivenih izraza za $\mathcal{L}\{y'\}$ i $\mathcal{L}\{y''\}$, sada imamo

$$a\big(s^2\mathcal{L}\{y\} - sA - B\big) + b\big(s\mathcal{L}\{y\} - A\big) + c\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{f(t)\},$$

odnosno

$$\big(as^2 + bs + c\big)\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + aAs + aB + bA.$$

Odatle dobivamo Laplaceovu transformaciju traženog rješenja

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\} + aAs + aB + bA}{as^2 + bs + c}.$$

Prema tome, rješenje polazne diferencijalne jednadžbe dobivamo određivanjem inverzne Laplaceove transformacije

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\mathcal{L}\{f(t)\} + aAs + aB + bA}{as^2 + bs + c}\right\}.$$

Naravno, za linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima reda višeg od $n = 2$, račun provodimo analogno.

Napomena 3.2. *Postupak rješavanja linearne diferencijalne jednadžbe s konstantnim koeficijentima Laplaceovom metodom možemo sažeti u sljedeća tri koraka.*

1. *Primijenimo Laplaceovu transformaciju na obje strane jednadžbe. Dobivamo tzv. transformiranu jednadžbu.*

2. *Iz algebarske jednadžbe odredimo Laplaceov transformat rješenja.*

3. *Odredimo rješenje polazne jednadžbe primjenom inverzne Laplaceove transformacije.*

Osnovna ideja opisanog računa je da se dana diferencijalna jednadžba djelovanjem Laplaceove transformacije svede na algebarsku koja je znatno lakša za rješavanje od početne. Ipak, ni to nije uvijek jednostavan posao budući da na kraju, kako bismo dobili rješenje polazne jednadžbe moramo pronaći inverz Laplaceovog transformata, što zna biti itekako zahtjevno.

Nadalje, uočimo da diferencijalne jednadžbe možemo rješavati na ovaj način samo ako funkcija smetnje f u jednadžbi (3.2) zadovoljava uvjete teorema 1.12, a rješenje y uvjete korolara 2.13. Primjenu Laplaceove transformacije na rješavanje linearnih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima nam pomaže opravdati sljedeća činjenica. Naime, može se pokazati da ako je f neprekidna i eksponencijalog rasta, onda je i y također neprekidna i eksponencijalnog rasta. O tome nam govori sljedeći teorem.

Teorem 3.3. *Neka je zadana linearna, nehomogena diferencijalna jednadžba n-tog reda s konstantnim koeficijentima*

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = f(t).$$

Ako je f neprekidna na $[0, \infty\rangle$ i eksponencijalnog rasta, onda je i y također neprekidna na $[0, \infty\rangle$ i eksponencijalnog rasta.

Dokaz. Teorem ćemo dokazati za $n = 2$ budući da za jednadžbe reda višeg od 2 dokaz provodimo na sličan način.

Za jednadžbu

$$ay'' + by' + cy = f(t) \quad \big(a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0\big),$$

neka je

$$y_h = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

opće rješenje pripadne homogene jednadžbe $ay'' + by' + cy = 0$, gdje su y_1 i y_2 dva njezina linearno nezavisna rješenja i C_1, C_2 konstante. Neka su $m_1, m_2 \in \mathbb{C}$ nultočke karakterističnog polinoma $a\lambda^2 + b\lambda + c$. Tada su funkcije y_1 i y_2 dane s:

(i) ako su $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ i $m_1 \neq m_2$, onda su $y_1 = e^{m_1 t}$ i $y_2 = e^{m_2 t}$;

(ii) ako su $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ i $m_1 = m_2$ $(= m)$, onda su $y_1 = e^{mt}$ i $y_2 = te^{mt}$;

(iii) ako su $m_1 = \alpha+\beta i, m_2 = \alpha-\beta i, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, onda su $y_1 = e^{\alpha t}\cos\beta t$ i $y_2 = e^{\alpha t}\sin\beta t$.

Svaka od iznad navedenih funkcija y_1, y_2 je eksponencijalnog rasta, pa je i y_h također eksponencijalog rasta i neprekidna na $[0, \infty\rangle$.

Partikularno rješenje y_p polazne jednadžbe možemo pronaći metodom varijacije konstanti. Neka je y_p oblika

$$y_p = C_1(t)y_1 + C_2(t)y_2,$$

gdje funkcije $C_1(t)$ i $C_2(t)$ određujemo iz sustava

$$\begin{aligned} C_1'(t)y_1 + C_2'(t)y_2 &= 0 \\ C_1'(t)y_1' + C_2'(t)y_2' &= f(t). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Budući da su y_1 i y_2 linearno nezavisni, determinanta matrice sustava (3.4) (Wronskijan)

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2' - y_1'y_2$$

različita je od nule, pa u tom slučaju imamo

$$C_1'(t) = \frac{-y_2f(t)}{aW(y_1, y_2)} \quad \text{i} \quad C_2'(t) = \frac{y_1f(t)}{aW(y_1, y_2)}.$$

U sva tri slučaja *(i)*, *(ii)*, *(iii)*, determinanta $W(y_1, y_2)$ će biti oblika Me^{wt}, odnosno ta će funkcija biti eksponencijalnog rasta. Budući da je produkt funkcija eksponencijalnog rasta također eksponencijalnog rasta, zaključujemo da su funkcije C_1' i C_2' eksponencijalnog rasta i neprekidne na $[0, \infty\rangle$. Isto vrijedi i za funkcije C_1 i C_2 (napomena 2.12).

Konačno, opće rješenje polazne jednadžbe je funkcija y dana s

$$y = y_h + y_p.$$

Vidimo da je ona neprekidna na $[0, \infty\rangle$ i eksponencijalnog rasta (jer su y_h i y_p eksponencijalnog rasta), a to je upravo ono što smo željeli dokazati. $\square$

Napomena 3.4. *Pokažimo da je za $n = 2$ korištenje Laplaceove transformacije pri rješavanju jednadžbe (3.2) zaista opravdano teoremom 3.3. Štoviše, ne samo da je $y = y_h + y_p$ neprekidna na $[0, \infty\rangle$ i eksponencijalnog rasta, nego to vrijedi i za*

$$y' = y_h' + y_p' = y_h' + \big(C_1'y_1 + C_1y_1' + C_2'y_2 + C_2y_2'\big),$$

pa onda i za

$$y'' = \frac{1}{a}\big(f(t) - by' - cy\big).$$

Pretpostavke korolara 2.13 su očito zadovoljene, čime smo opravdali primjenu Laplaceove transformacije pri rješavanju jednadžbe (3.2).

Prema tome, za primjenu Laplaceove transformacije potrebno je jedino da funkcija smetnje f u jednadžbi (3.2) zadovoljava uvjete teorema 1.12, što samo po sebi predstavlja prednost u odnosu na ostale metode rješavanja diferencijalnih jednadžbi.

Napomena 3.5. *Uočimo da rješenje Cauchyjeve zadaće $y = y(t)$ dobiveno Laplaceovom transformacijom vrijedi za $t \geq 0$. Generalno, ono vrijedi i za sve $t \in \mathbb{R}$, naravno pod pretpostavkom da je to domena funkcije f.*

Sada kada smo upoznati s postupkom i uvjetima primjene Laplaceove transformacije pri rješavanju linearnih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima, riješimo nekoliko primjera. Naglasimo da će u svakom od njih funkcije smetnje zadovoljavati uvjete teorema 1.12, pa tu činjenicu nećemo dodatno naglašavati.

Primjer 3.6. *Riješimo Cauchyjevu zadaću*

$$y'' + 4y = \sin t, \qquad y(0) = y'(0) = 0.$$

Rješenje. Primijenimo Laplaceovu transformaciju na zadanu jednadžbu. Koristeći svojstvo linearnosti, dobivamo

$$\mathcal{L}\{y''\} + 4\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{\sin t\}.$$

Na osnovi jednakosti (2.9) i zadanih početnih uvjeta, vrijedi

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) = s^2\mathcal{L}\{y\}.$$

Uvrštavanjem dobivenog izraza za $\mathcal{L}\{y''\}$ te primjenjujući (1.17), sada imamo

$$s^2\mathcal{L}\{y\} + 4\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s^2+1},$$

odnosno

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{(s^2+4)(s^2+1)}.$$

Odredili smo Laplaceovu transformaciju traženog rješenja. Rješenje polazne jednadžbe dobivamo određivanjem njezinog inverza

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4)(s^2+1)}\right).$$

Rastavimo funkciju na parcijalne razlomke. Tražimo konstante A, B, C i D takve da vrijedi

$$\frac{1}{(s^2+4)(s^2+1)} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{s^2+1}.$$

Prethodna jednakost ekvivalentna je s

$$1 = (As+B)(s^2+1) + (Cs+D)(s^2+4),$$

iz čega, izjednačavanjem slobodnog člana te koeficijenata uz s, s^2 i s^3, dobivamo:

$$A = 0,\ B = -\frac{1}{3},\ C = 0,\ D = \frac{1}{3}.$$

Stoga, zbog linearnosti inverza Laplaceove transformacije i primjenom (1.28), slijedi

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^2+4)(s^2+1)}\right) \\ &= -\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+4}\right) + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) \\ &= -\frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) + \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) \\ &= -\frac{1}{6}\sin 2t + \frac{1}{3}\sin t \quad \big(t \geq 0\big). \end{aligned}$$

Prema tome, konačno rješenje polazne jednadžbe je

$$y = \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{6}\sin 2t \quad \big(t \in \mathbb{R}\big).$$

Primjer 3.7. *Riješimo Cauchyjevu zadaću*

$$y'' + 2y' - 15y = e^{2t}, \qquad y(0) = 1,\ y'(0) = 0.$$

Rješenje. Primijenimo Laplaceovu transformaciju na zadanu jednadžbu. Na osnovi jednakosti (2.9) i zadanih početnih uvjeta, vrijedi

$$\mathcal{L}\{y'\} = s\mathcal{L}\{y\} - y(0) = s\mathcal{L}\{y\} - 1,$$

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) = s^2\mathcal{L}\{y\} - s.$$

Uvrštavanjem dobivenih izraza za $\mathcal{L}\{y'\}$ i $\mathcal{L}\{y''\}$ te primjenjujući (1.10), pritom uvažavajući linearnost Laplaceove transformacije, dobivamo

$$\begin{aligned} s^2\mathcal{L}\{y\} - s + 2s\mathcal{L}\{y\} - 2 - 15\mathcal{L}\{y\} &= \frac{1}{s-2} \\ (s^2 + 2s - 15)\mathcal{L}\{y\} - s - 2 &= \frac{1}{s-2} \\ (s-3)(s+5)\mathcal{L}\{y\} &= \frac{s^2-3}{s-2} \\ \mathcal{L}\{y\} &= \frac{s^2-3}{(s-3)(s-2)(s+5)}. \end{aligned}$$

Odredili smo Laplaceovu transformaciju traženog rješenja. Rješenje polazne jednadžbe dobivamo određivanjem njezinog inverza

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2-3}{(s-3)(s-2)(s+5)}\right).$$

Rastavimo funkciju na parcijalne razlomke. Tražimo konstante A, B i C takve da vrijedi

$$\frac{s^2-3}{(s-3)(s-2)(s+5)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s-2} + \frac{C}{s+5}.$$

Prethodna jednakost ekvivalentna je s

$$s^2 - 3 = A(s-2)(s+5) + B(s-3)(s+5) + C(s-3)(s-2),$$

iz čega, izjednačavanjem slobodnog člana te koeficijenata uz s i s^2, dobivamo:

$$A = \frac{3}{4},\ B = -\frac{1}{7},\ C = \frac{11}{28}.$$

Stoga, zbog linearnosti inverza Laplaceove transformacije i primjenom (1.10) te (1.11), slijedi

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2-3}{(s-3)(s-2)(s+5)}\right) \\ &= \frac{3}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right) - \frac{1}{7}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) + \frac{11}{28}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+5}\right) \\ &= \frac{3}{4}e^{3t} - \frac{1}{7}e^{2t} + \frac{11}{28}e^{-5t} \quad \big(t \geq 0\big). \end{aligned}$$

Prema tome, konačno rješenje polazne jednadžbe je

$$y = \frac{3}{4}e^{3t} - \frac{1}{7}e^{2t} + \frac{11}{28}e^{-5t} \quad \big(t \in \mathbb{R}\big).$$

Još jedna prednost Laplaceove metode jest ta da se njome, za razliku od uobičajene metode rješavanja diferencijalnih jednadžbi, mogu rješavati diferencijalne jednadžbe kod kojih funkcija smetnje f ima prekid. To je ilustrirano na sljedećem primjeru.

Primjer 3.8. *Riješimo Cauchyjevu zadaću*

$$y'' + y = M \cdot H_a(t), \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 1,$$

gdje je H_a Heavisideova step funkcija, a $M > 0$ konstanta.

Rješenje. Primjenom Laplaceove transformacije na obje strane zadane jednadžbe, iz jednakosti (2.9), zadanih početnih uvjeta te (1.25), dobivamo

$$
\begin{aligned}
s^2\mathcal{L}\{y\} - 1 + \mathcal{L}\{y\} &= M \cdot \frac{e^{-as}}{s} \\
(s^2+1)\mathcal{L}\{y\} - 1 &= M \cdot \frac{e^{-as}}{s} \\
\mathcal{L}\{y\} &= \frac{1}{s^2+1} + M \cdot \frac{e^{-as}}{s(s^2+1)}.
\end{aligned}
$$

Rješenje polazne jednadžbe dobivamo određivanjem inverza

$$
\begin{aligned}
y &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1} + M \cdot \frac{e^{-as}}{s(s^2+1)}\right) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) + M \cdot \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-as}}{s(s^2+1)}\right).
\end{aligned}
$$

Iz (1.28) znamo da je

$$
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \sin t \quad \big(t \geq 0\big).
$$

Kako bismo odredili

$$
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-as}}{s(s^2+1)}\right)
$$

primjenjujemo rastav na parcijalne razlomke. Tražimo konstante A, B i C takve da vrijedi

$$
\frac{1}{s(s^2+1)} = \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2+1},
$$

što je ekvivalentno s

$$
1 = A(s^2+1) + Bs^2 + Cs.
$$

Izjednačavanjem slobodnog člana te koeficijenata uz s i s^2, dobivamo:

$$
A = 1,\ B = -1,\ C = 0.
$$

Uvažavajući linearnost inverza Laplaceove transformacije i primjenom (1.27), (1.32) te (1.33), imamo

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-as}}{s(s^2+1)}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}\right)e^{-as}\right) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-as}}{s}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}e^{-as}\right) \\
&= H_a(t) - H_a(t)\cos(t-a) \quad \big(t \geq 0\big).
\end{aligned}
$$

Prema tome, konačno rješenje polazne jednadžbe je

$$y = \sin t + M \cdot H_a(t)\big(1 - \cos(t-a)\big) \qquad \big(t \in \mathbb{R}\big),$$

ili drugačije zapisano

$$y = \begin{cases} \sin t, & t < a \\ \sin t + M\big(1 - \cos(t-a)\big), & t \geq a. \end{cases}$$

Može se dogoditi da nam početni uvjeti (3.3) jednadžbe (3.2) nisu određeni. U tom slučaju, Laplaceovu transformaciju svejedno možemo iskoristiti kako bismo dobili opće rješenje zadane diferencijalne jednadžbe.

Primjer 3.9. *Nađimo rješenje diferencijalne jednadžbe*

$$y'' + y = e^{-t}$$

gdje su početni uvjeti $y(0) = y_0$ *i* $y'(0) = y_1$ *neodređeni.*

Rješenje. Laplaceova transformacija obje strane gornje jednadžbe nam daje

$$\begin{aligned} s^2\mathcal{L}\{y\} - sy_0 - y_1 + \mathcal{L}\{y\} &= \frac{1}{s+1} \\ (s^2+1)\mathcal{L}\{y\} - sy_0 - y_1 &= \frac{1}{s+1} \\ \mathcal{L}\{y\} &= \frac{1}{(s+1)(s^2+1)} + \frac{sy_0}{s^2+1} + \frac{y_1}{s^2+1}, \end{aligned}$$

gdje smo iskoristili jednakosti (2.9) i (1.11). Rješenje polazne jednadžbe dobivamo određivanjem inverza

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)(s^2+1)} + \frac{sy_0}{s^2+1} + \frac{y_1}{s^2+1}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right) + y_0\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + y_1\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right). \end{aligned}$$

Iz (1.27) znamo da je

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) = \cos t \qquad \big(t \geq 0\big),$$

a iz (1.28) je

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \sin t \qquad \big(t \geq 0\big).$$

Kako bismo odredili

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right)$$

primjenjujemo rastav na parcijalne razlomke. Tražimo konstante A, B i C takve da vrijedi

$$\frac{1}{(s+1)(s^2+1)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+1}.$$

Primjenom već dobro poznate metode, dobivamo:

$$A = \frac{1}{2},\ B = -\frac{1}{2},\ C = \frac{1}{2}.$$

Uvažavajući linearnost inverza Laplaceove transformacije i primjenom (1.11), (1.27) te (1.28), imamo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)(s^2+1)}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\frac{1}{2}}{s+1} - \frac{\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}}{s^2+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s-1}{s^2+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t \quad \big(t \geq 0\big).
\end{aligned}$$

Prema tome, opće rješenje polazne jednadžbe je

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t + y_0\cos t + y_1\sin t \\
&= \frac{1}{2}e^{-t} + \left(y_0 - \frac{1}{2}\right)\cos t + \left(y_1 + \frac{1}{2}\right)\sin t \quad \big(t \in \mathbb{R}\big),
\end{aligned}$$

odnosno

$$y = \frac{1}{2}e^{-t} + C_0\cos t + C_1\sin t \quad \big(t \in \mathbb{R}\big),$$

za neke realne konstante C_0 i C_1, budući da y_0 i y_1 mogu poprimiti bilo koje (proizvoljne) vrijednosti.

Sljedeći tip diferencijalne jednadžbe, odnosno problema u čijem nam rješavanju koristi Laplaceova transformacija, je tzv. *granični problem*. Granični problem vrlo je sličan prethodno rješavanoj Cauchyjevoj zadaći, osim što su njegovi uvjeti specificirani u ekstremima (tj. *granicama*) funkcije smetnje f, odnosno poznate su vrijednosti $y(t)$ u dva slučaja - kada je varijabla t jednaka točki u kojoj f postiže svoj minimum i kada je ona jednaka točki u kojoj f postiže svoj maksimum. Za razliku od toga, u Cauchyjevoj zadaći su uvjeti specificirani u istoj vrijednosti nezavisne varijable t, a ona je jednaka donjoj granici domene, odnosno njezinoj *početnoj vrijednosti* (odatle termin *početna zadaća*). U nastavku donosimo jedan tipični primjer graničnog problema.

Primjer 3.10. *Riješimo granični problem*

$$y'' + 9y = \cos 2t, \qquad y(0) = 1,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$$

Rješenje. Budući da vrijednost $y'(0)$ nije zadana, stavimo $y'(0) = a$. Laplaceova transformacija obje strane gornje jednadžbe nam daje

$$\begin{aligned} s^2\mathcal{L}\{y\} - s - a + 9\mathcal{L}\{y\} &= \frac{s}{s^2+4} \\ (s^2+9)\mathcal{L}\{y\} &= s + a + \frac{s}{s^2+4} \\ \mathcal{L}\{y\} &= \frac{s+a}{s^2+9} + \frac{s}{(s^2+9)(s^2+4)}. \end{aligned}$$

Rješenje polazne jednadžbe dobivamo određivanjem inverza

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+a}{s^2+9} + \frac{s}{(s^2+9)(s^2+4)}\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+9}\right) + \frac{a}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2+9}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+9)(s^2+4)}\right). \end{aligned}$$

Iz (1.27) znamo da je

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+9}\right) = \cos 3t \qquad \big(t \geq 0\big),$$

a iz (1.28) je

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s^2+9}\right) = \sin 3t \qquad \big(t \geq 0\big).$$

Kako bismo odredili

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+9)(s^2+4)}\right)$$

primjenjujemo rastav na parcijalne razlomke. Tražimo konstante A, B, C i D takve da vrijedi

$$\frac{s}{(s^2+9)(s^2+4)} = \frac{As+B}{s^2+9} + \frac{Cs+D}{s^2+4}.$$

Primjenom već dobro poznate metode, dobivamo:

$$A = -\frac{1}{5},\ B = 0,\ C = \frac{1}{5},\ D = 0.$$

Sada imamo

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+9)(s^2+4)}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{-\frac{1}{5}s}{s^2+9}+\frac{\frac{1}{5}s}{s^2+4}\right)\\
&= -\frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+9}\right)+\frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right)\\
&= -\frac{1}{5}\cos 3t+\frac{1}{5}\cos 2t \quad \big(t\geq 0\big),
\end{aligned}
$$

pa je

$$
\begin{aligned}
y &= \cos 3t+\frac{a}{3}\sin 3t-\frac{1}{5}\cos 3t+\frac{1}{5}\cos 2t\\
&= \frac{a}{3}\sin 3t+\frac{1}{5}\cos 2t+\frac{4}{5}\cos 3t \quad \big(t\in\mathbb{R}\big).
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

Preostaje nam izračunati vrijednost a. Iz uvjeta $y\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1$, uvrštavanjem u (3.5), dobivamo

$$
-1=-\frac{a}{3}-\frac{1}{5}\Rightarrow a=\frac{12}{5}.
$$

Prema tome, konačno rješenje polazne jednadžbe je

$$
y=\frac{4}{5}\sin 3t+\frac{1}{5}\cos 2t+\frac{4}{5}\cos 3t \quad \big(t\in\mathbb{R}\big).
$$

Laplaceovom metodom mogu se rješavati i sustavi linearnih diferencijalnih jednadžbi s konstantnim koeficijentima.

Primjer 3.11. *Riješimo sustav diferencijalnih jednadžbi*

$$
\begin{aligned}
&y'+z'+y+z=1\\
&\qquad y'+z=e^t, \qquad y(0)=-1,\ z(0)=2.
\end{aligned}
$$

Rješenje. Primijenimo Laplaceovu transformaciju na zadane jednadžbe. Iz prve jednadžbe dobivamo

$$
s\mathcal{L}\{y\}+1+s\mathcal{L}\{z\}-2+\mathcal{L}\{y\}+\mathcal{L}\{z\}=\frac{1}{s},
$$

a iz druge

$$
s\mathcal{L}\{y\}+1+\mathcal{L}\{z\}=\frac{1}{s-1}.
$$

Dobiveni sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} s\mathcal{L}\{y\} + 1 + s\mathcal{L}\{z\} - 2 + \mathcal{L}\{y\} + \mathcal{L}\{z\} &= \frac{1}{s} \\ s\mathcal{L}\{y\} + 1 + \mathcal{L}\{z\} &= \frac{1}{s-1} \end{aligned}$$

rješavamo metodom supstitucije. Iz druge jednadžbe je

$$\mathcal{L}\{z\} = \frac{1}{s-1} - s\mathcal{L}\{y\} - 1,$$

pa uvrštavanjem u prvu, slijedi

$$s\mathcal{L}\{y\} + 1 + s\left(\frac{1}{s-1} - s\mathcal{L}\{y\} - 1\right) - 2 + \mathcal{L}\{y\} + \frac{1}{s-1} - s\mathcal{L}\{y\} - 1 = \frac{1}{s}.$$

Nakon malo sređivanja i rješavanja sustava, dobivamo

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{-s^2+s+1}{s(s-1)^2} \quad \text{i} \quad \mathcal{L}\{z\} = \frac{2s-3}{(s-1)^2},$$

odnosno, nakon rastava na parcijalne razlomke

$$\mathcal{L}\{y\} = \frac{1}{s} - \frac{2}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2} \quad \text{i} \quad \mathcal{L}\{z\} = \frac{2}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Odredili smo Laplaceove transformacije rješenja sustava. Rješenje polaznog sustava dobivamo određivanjem njihovih inverza

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} - \frac{2}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}\right) \quad \text{i} \quad z = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2}\right).$$

Linearnost inverza Laplaceove transformacije i primjena već poznatih formula nam daje konačno rješenje polaznog sustava koje glasi

$$y = 1 - 2e^t + te^t \quad \text{i} \quad z = 2e^t - te^t \quad \big(t \in \mathbb{R}\big).$$

3.2 Linearne diferencijalne jednadžbe s nekonstantnim koeficijentima

Do sada smo pokazali kako se pomoću Laplaceove transformacije rješavaju linearne jednadžbe s konstantnim koeficijentima. Općenita metoda za rješavanje linearnih jednadžbi s nekonstantnim koeficijentima još ne postoji. Međutim, postoje specijalni slučajevi koji se mogu riješiti primjenom Laplaceove transformacije. U tu svrhu, prisjetimo se još jednom teorema 2.1 koji kaže sljedeće:

Neka je y po dijelovima neprekidna funkcija na $[0, +\infty\rangle$ i eksponencijalnog rasta reda α, i neka je $\mathcal{L}\{y(t)\} = F(s)$. Tada za svaki $s \in \mathbb{R}$ takav da je $s > \alpha$, vrijedi

$$\frac{d^n}{ds^n}F(s) = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n y(t)\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Stoga, za $n = 1$ vrijedi

$$\mathcal{L}\{ty(t)\} = -F'(s).$$

Nadalje, pretpostavimo da i funkcija y' zadovoljava uvjete teorema 2.1. U tom je slučaju za $n = 1$:

$$\mathcal{L}\{ty'(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{y'(t)\}. \tag{3.6}$$

Budući da iz jednakosti (2.9) slijedi

$$\mathcal{L}\{y'(t)\} = sF(s) - y(0),$$

jednakost (3.6) postaje

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{ty'(t)\} &= -\frac{d}{ds}\Big(sF(s) - y(0)\Big) \\ &= -F(s) - sF'(s). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Slično, za y'' (pod istom pretpostavkom) vrijedi

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{ty''(t)\} &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{y''(t)\} \\ &= -\frac{d}{ds}\Big(s^2F(s) - sy(0) - y'(0)\Big) \\ &= -s^2F'(s) - 2sF(s) + y(0), \end{aligned}$$

i generalno

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{ty^{(n)}(t)\} &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{y^{(n)}(t)\} \\ &= -\frac{d}{ds}\Big(s^nF(s) - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \ldots - y^{(n-1)}(0)\Big) \end{aligned}$$

$$= -ns^{n-1}F(s) - s^nF'(s) + (n-1)s^{n-2}y(0) + (n-2)s^{n-3}y'(0)$$

$$+ \ldots + y^{(n-2)}(0), \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Ono što ćemo zapravo pokazati je da nam dobivene formule za $\mathcal{L}\{ty^{(n)}(t)\}$, $n \in \mathbb{N}$, nerijetko mogu poslužiti za rješavanje linearnih diferencijalnih jednadžbi čiji su koeficijenti polinomi prvoga stupnja. Njihovom primjenom doći ćemo do transformirane jednadžbe koja će također biti diferencijalna, ali reda manjeg od onog polazne diferencijalne jednadžbe. To ćemo najbolje ilustrirati sljedećim primjerom.

Primjer 3.12. *Riješimo Cauchyjevu zadaću*

$$y'' + ty' - 2y = 4, \qquad y(0) = -1, \ y'(0) = 0.$$

Rješenje. Primijenimo Laplaceovu transformaciju na zadanu jednadžbu. Na osnovi jednakosti (2.9) i zadanih početnih uvjeta, vrijedi

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2\mathcal{L}\{y\} - sy(0) - y'(0) = s^2\mathcal{L}\{y\} + s = s^2F(s) + s.$$

Uvrštavanjem dobivenog izraza za $\mathcal{L}\{y''\}$ te primjenjujući jednakost (3.7), sada imamo

$$\begin{aligned} s^2F(s) + s - sF'(s) - F(s) - 2F(s) &= \frac{4}{s} \\ (s^2-3)F(s) - sF'(s) &= \frac{4}{s} - s \\ -s\left(-s + \frac{3}{s}\right)F(s) - sF'(s) &= -s\left(-\frac{4}{s^2} + 1\right) \\ \left(\frac{3}{s} - s\right)F(s) + F'(s) &= 1 - \frac{4}{s^2}. \end{aligned}$$

Dakle, dobili smo linearnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda

$$F'(s) + \left(\frac{3}{s} - s\right)F(s) = 1 - \frac{4}{s^2}. \tag{3.8}$$

Prije negoli nastavimo dalje rješavati, prisjetimo se sljedećeg:

Napomena 3.13. *Linearna diferencijalna jednadžba prvog reda oblika*

$$y' + g(x)y = h(x)$$

ima integrirajući faktor $\mu(x) = e^{\int g(x)dx}$ *i rješenje*

$$y = \frac{1}{\mu(x)}\int \mu(x)\,h(x)\,dx.$$

Stoga, integrirajući faktor u jednadžbi (3.8) je

$$\mu(s) = e^{\int \left(\frac{3}{s} - s\right) ds} = s^3 e^{-\frac{s^2}{2}},$$

a rješenje je

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{s^3 e^{-\frac{s^2}{2}}} \int s^3 e^{-\frac{s^2}{2}} \left(1 - \frac{4}{s^2}\right) ds \\ &= \frac{1}{s^3 e^{-\frac{s^2}{2}}} \left(\int s^3 e^{-\frac{s^2}{2}} \, ds - 4 \int s e^{-\frac{s^2}{2}} \, ds \right). \end{aligned}$$

Riješimo dobivene integrale. Supstitucijom $u = -\dfrac{s^2}{2}$, dobivamo $du = -s\, ds$, pa gornji integrali prelaze u

$$\int s^3 e^{-\frac{s^2}{2}} \, ds = 2 \int u e^u \, du \quad \text{i} \quad \int s e^{-\frac{s^2}{2}} \, ds = -\int e^u \, du.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} \int s^3 e^{-\frac{s^2}{2}} \, ds - 4 \int s e^{-\frac{s^2}{2}} \, ds &= 2 \int u e^u \, du + 4 \int e^u \, du \\ &= 2\left(u e^u - \int e^u \, du \right) + 4 e^u \\ &= 2 u e^u + 2 e^u + C \\ &= -s^2 e^{-\frac{s^2}{2}} + 2 e^{-\frac{s^2}{2}} + C, \;\; C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Stoga je

$$F(s) = -\frac{1}{s} + \frac{2}{s^3} + \frac{C}{s^3} e^{\frac{s^2}{2}}.$$

Budući da $F(s) \to 0$ kako $s \to \infty$ (teorem 1.13), moramo imati $C = 0$. Tako smo odredili Laplaceovu transformaciju traženog rješenja koja glasi

$$F(s) = \mathcal{L}\{y\} = -\frac{1}{s} + \frac{2}{s^3}.$$

Rješenje polazne jednadžbe dobivamo određivanjem njezinog inverza

$$y = \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{1}{s} + \frac{2}{s^3} \right).$$

Zbog linearnosti inverza Laplaceove transformacije i primjenom već poznatih formula, dobivamo

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{L}^{-1}\left(-\frac{1}{s}+\frac{2}{s^3}\right) \\ &= -\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s}\right)+2\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^3}\right) \\ &= -1+t^2 \quad \big(t \geq 0\big). \end{aligned}$$

Prema tome, konačno rješenje polazne jednadžbe je

$$y = t^2 - 1 \quad \big(t \in \mathbb{R}\big).$$

Literatura

[1] Blanuša, D. *Laplaceova transformacija.* Komisija za udžbenike i skripta Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb, 1960.

[2] Doetsch, G. *Introduction to the Theory and Application of the Laplace Transformation.* Springer-Verlag, Berlin, 1974.

[3] Dyke, P. P. G. *An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series.* Springer-Verlag, London, 2004.

[4] Gangadharaiah, Y. H., Sandeep, N. *Engineering Applications of the Laplace Transform.* Cambridge Scholars Publishing, Newcastle upon Tyne, 2021.

[5] Katić, M. *Laplaceova transformacija.* Završni rad. Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku - Odjel za matematiku, Osijek, 2018.

[6] Mihalčić, D. *Laplaceova transformacija.* Završni rad. Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku - Odjel za matematiku, Osijek, 2020.

[7] Nurkanović, N., Nurkanović, Z. *Laplaceova transformacija i primjena.* PrintCom d.o.o. grafički inženjering, Tuzla, 2010.

[8] Salinger, Ž. *Laplaceova transformacija.* Završni rad. Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku - Odjel za matematiku, Osijek, 2011.

[9] Schiff, J. L. *The Laplace Transform: Theory and Applications.* Springer-Verlag, New York, 1999.

[10] Widder, D. V. *The Laplace Transform.* Princeton University Press, Princeton, 1946.

[11] Zemlić, V. *Laplaceova transformacija.* Diplomski rad. Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, Zagreb, 2017.

[12] *Boundary value problem.* Wikipedia. Dostupno na: https://en.wikipedia.org/wiki/Boundary_value_problem (kolovoz 2023.)

[13] *Diferencijalne jednadžbe.* Wikipedia. Dostupno na: https://hr.wikipedia.org/wiki/Diferencijalne_jednadžbe (kolovoz 2023.)

[14] *Laplaceova transformacija.* Wikipedia. Dostupno na: https://hr.wikipedia.org/wiki/Laplaceova_transformacija (lipanj 2023.)

[15] *Linearne diferencijalne jednadžbe.* Dostupno na: https://web.math.pmf.unizg.hr/~kslaven/mmf_materijali/mmfv_v00.pdf (kolovoz 2023.)

[16] *Metoda varijacije konstanti. Linearne diferencijalne jednadžbe višeg reda.* Dostupno na: http://www.grad.hr/nastava/matematika/mat2/node30.html (kolovoz 2023.)

[17] *Obične diferencijalne jednadžbe.* Dostupno na: https://www.grad.unizg.hr/_download/repository/MAT2[1].pdf (kolovoz 2023.)

Sažetak

Budući da je Laplaceova transformacija jedna od najvažnijih integralnih transformacija, cilj rada je upoznati se s Laplaceovom transformacijom i njezinim osnovnim svojstvima. Analiziramo na koje funkcije ju možemo primijeniti i na koji način efikasno odrediti Laplaceovu transformaciju nekih funkcija, te kako nam neka njezina svojstva mogu u tome pomoći. Također, bavimo se i pitanjem postojanja i metodama određivanja inverza Laplaceove transformacije. Na samom kraju rada, detaljnije proučavamo jednu primjenu Laplaceove transformacije u matematici, a odnosi se na rješavanje linearnih diferencijalnih jednadžbi.

Summary

Since the Laplace transform is one of the most important integral transforms, the aim of this paper is to introduce ourselves with Laplace transform and its basic properties. We analyze which functions we can apply it on and how to efficiently determine the Laplace transform of some functions, and how some of its properties can help us. Also, we deal with the question of existence and methods of determining the inverse of the Laplace transform. At the end of the paper, we study in more detail one application of the Laplace transform in mathematics, related to solving linear differential equations.

Životopis

Rođena sam 10. svibnja 1998. godine u Zadru. Osnovnoškolsko obrazovanje završila sam u Preku na otoku Ugljanu, u Osnovnoj školi Valentin Klarin, 2013. godine. Potom upisujem Gimnaziju Vladimira Nazora u Zadru; opći smjer. 2017. godine upisujem Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, točnije Preddiplomski sveučilišni studij Matematika; smjer nastavnički. 2021. godine stječem akademski naziv sveučilišne prvostupnice edukacije matematike. Iste te godine upisujem Diplomski sveučilišni studij Matematika; smjer nastavnički.