Elementarna geometrija pseudoeuklidske ravnine

Soljačić, Vinka

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Vinka Soljačić

ELEMENTARNA GEOMETRIJA PSEUDOEUKLIDSKE RAVNINE

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof.dr.sc.Željka Milin Šipuš

Zagreb, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Zahvaljujem se svojim roditeljima koji su mi omogućili studiranje i pružali podršku onako kako su najbolje mogli i znali.

Zahvaljujem se i svojoj mentorici na neizmjernom strpljenju i svoj pomoći tijekom nastajanja ovog diplomskog rada.

Sadržaj

Uvod

One geometry cannot be more true than another; it can only be more convenient.

Henri Poincaré

Postoji jako puno različitih geometrija kroz koje bismo mogli promatrati svijet oko nas. Kao što citat kaže niti jedna nije kriva, samo je ponekad efikasnija od druge. Vođeni tom mišlju u ovom diplomskom radu bavit ćemo se pseudoeuklidskom ravninom koja je analogon euklidske ravnine.

U prvom poglavlju opisujemo pojmove elementarne geometrije euklidske ravnine. Promatramo kružnice i pravce, okomitost pravaca te iskazujemo i dokazujemo važnije teoreme koje susrećemo u osnovnoj školi.

U drugom poglavlju upoznajemo pseudoeuklidsku ravninu nazvanu još i Minkowskijeva ravnina. Također, promatramo kružnice i pravce u pseudoeuklidskoj ravnini te dokazujemo analogone spomenutih teorema u prvom poglavlju.

U trećem poglavlju bavit ćemo se pregledom izgradnje pojmova okomitost, trokut i vektor kroz osnovnu i srednju školu. Što u kojem razredu učenik uči i spoznaje te na koji način su ti pojmovi predstavljani učenicima.

U četvrtom poglavlju donosimo tri aktivnosti kroz koje se učenicima srednje škole na dodatnoj nastavi može približiti pseudoeuklidska ravnina te kako ju možemo promatrati kroz pogled euklidske ravnine.

Zanimljivo je spomenuti da Minkowskijeva geometrija nije zanimljiva samo matematičari- ma, nego i fizičarima. Četverodimenzionalni Minkowskijev prostor je prostor u kojem je postavljena Einsteinova teorija relativnosti.

Poglavlje 1

Elementarna geometrija euklidske ravnine

Prostor koji nas okružuje najčešće opisujemo koristeći se svojstvima euklidske geometrije čija smo svojstva učili kroz svoje osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje. U ovom poglavlju bavit ćemo se euklidskim dvodimenzionalnim prostorom, odnosno euklidskom ravninom E^2. Prikazat ćemo ju kao realan vektorski prostor $\mathbb{R}^2$ snabdjeven euklidskim skalarnim produktom, budući da je on standardni analitički model za euklidsku ravninu.

1.1 Prostor $\mathbb{R}^2$

Na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^2$ za vektore $x = (x_1, x_2)$ i $y = (y_1, y_2)$ i skalar λ definiramo su binarne operacije(vidi [4])

- zbrajanja
$$x + y = (x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

- množenja
$$\lambda x = \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$$

Definicija 1.1.1. *Neka su $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Skalarni produkt $\langle x, y\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiramo s*

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$$

sa sljedećim svojstvima (vidi [4]):

1. $\langle x, x\rangle \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$
2. $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$

3. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2 \quad i \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

4. $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^2$

5. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2$

Definicija 1.1.2. *Vektori x i y su međusobno okomiti ili ortogonalni ako je* $\langle x, y\rangle = 0$.

Vektorski prostor s definiranim skalarnim produktom je unitarni prostor pa možemo definirati normu.

Definicija 1.1.3. *Na unitarnom prostoru* $\mathbb{R}^2$ *definiramo duljinu ili modul vektora* $x \in \mathbb{R}^2$ *kao*

$$|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Modul vektora zadovoljava sljedeća svojstva:

Propozicija 1.1.4. *Svojstva modula vektora:*

1. $|x| \geqslant 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$

2. $|x| = o \iff x = 0$

3. $|\lambda x| = |\lambda||x| \quad \forall x \in \mathbb{R}^2 \quad i \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

Pomoću duljine vektora definiramo udaljenost dvaju vektora.

Definicija 1.1.5. *Udaljenost u prostoru* $\mathbb{R}^2$ *definiramo funkcijom* $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$d(x, y) = |x - y|$$

tako da $\forall x, y, z \in \mathbb{R}^2$ *vrijedi:*

1. $d(x, y) \geqslant 0,$

2. $d(x, y) = 0 \iff x = y,$

3. $d(x, y) = d(y, x),$

4. $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z),$

Da bi mogli definirati mjeru kuta u euklidskoj ravnini potrebna nam je Schwarz-Cauchy-Bunjakovski nejednakost.(vidi [21])

Teorem 1.1.6. *Za proizvoljna dva vektora $x, y \in \mathbb{R}^2$ vrijedi:*

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant |x||y|.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori x i y kolinearni.

Dokaz. Neka su vektori x i y različiti od nulvektora. Za nulvektore tvrdnja je očita. Promotrimo funkciju

$$f(t) = |x + ty|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Primjetimo $f(t) \geqslant 0$ za svaki t. Jednakost vrijedi ako i samo ako je vektor $x + ty$ nulvektor, odnosno ako i samo ako su vektori x i y kolinearni.
S druge strane, funkcija $f(t)$ je kvadratna funkcija koja postiže nenegativne vrijednosti

$$f(t) = |x|^2 + 2t\langle x, y\rangle + t^2|y|^2.$$

Funkcija $f(t)$ ima najviše jednu dvostruku nultočku i diskriminanta joj je manja ili jednaka 0 pa dobivamo:

$$\begin{aligned}(2\langle x, y\rangle)^2 - 4|x|^2|y|^2 &\leqslant 0,\\ 4\langle x, y\rangle^2 &\leqslant 4|x|^2|y|^2,\\ \langle x, y\rangle^2 &\leqslant |x|^2|y|^2.\end{aligned}$$

□

Iz Schwarz-Cauchy-Bunjakovski nejednakosti kao posljedicu dobivamo:

$$-1 \leqslant \frac{\langle x, y\rangle}{|x||y|} \leqslant 1$$

pri čemu realan broj $\frac{\langle x, y\rangle}{|x||y|}$ možemo definirati kao $\cos\varphi$ gdje je $\varphi \in [0, \pi]$.

Definicija 1.1.7. *Broj φ zovemo radijanska mjera kuta između vektora x i y.*

Za kolinearne vektore αx i βy vektorima x i y vrijedi:

$$\cos\vartheta = \frac{\langle \alpha x, \beta y\rangle}{|\alpha x||\beta y|} = \pm\frac{\langle x, y\rangle}{|x||y|} = \pm\cos\varphi.$$

Teorem 1.1.8. *Neka su $x, y \in \mathbb{R}^2$. Skalarni produkt $\langle x, y\rangle$ vektora x i y je*

$$\langle x, y\rangle = |x| \cdot |y| \cos\varphi,$$

pri čemu je kut φ kut između vektora x i y.

Vektorski prostor s gore navedenim svojstvima nazivamo euklidska ravnina i označavamo s E^2.

1.2 Kružnica i okomiti pravci

U euklidskoj ravnini kružnicu definiramo kao skup svih točaka jednako udaljenih od neke fiksne točke ravnine. Radijus kružnice u ravnini E^2 uvijek je pozitivan broj.

Definicija 1.2.1. *Neka je točka S proizvoljna točka ravnine E^2. Skup svih točaka X*

$$\{X \in E^2 : d(X, S) = r, r \in \mathbb{R}\}$$

naziva se kružnica sa središtem u točki S radijusa r.

Jednadžba kružnice je

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

pri čemu je točka središta kružnice $S(p, q)$, a r radijus kružnice.
Kružnica i pravac u euklidskoj ravnini imaju tri međuodnosa:

- Pravac dodiruje kružnicu. Kružnica i pravac imaju jednu zajedničku točku.
- Pravac prolazi kroz kružnicu te ju siječe u dvije točke.
- Pravac ne prolazi kroz kružnicu niti ju dodiruje. Tada pravac i kružnica nemaju zajedničkih točaka.

Pravci i međusobno mogu biti u različitim međuodnosima. Mogu se sjeći, biti paralelni i biti okomiti. Prisjetimo se uvjeta okomitosti pravaca u euklidskoj ravnini. Kroz osnovnoškolsko obrazovanje pa dobar dio srednjoškolskog obrazovanja naći ćemo da se pravac opisuje kao neograničena ravna crta te u višim razredima osnovne škole upoznajemo jednadžbu pravca $y = kx + l$. Iznimka su srednjoškolski programi za matematičke gimnazije. U stručnoj literaturi pronaći ćemo sljedeću karakterizaciju pravca.

Definicija 1.2.2. *Neka je $P \in E^2$ te neka je $v \in \mathbb{R}^2, v \neq 0$. Tada skup*

$$p = \{T \in E^2 : T - P \in [v]\}$$

nazivamo pravac određen točkom P i smjerom vektora v.

Za određivanje uvjeta okomitosti dvaju pravaca u euklidskoj ravnini koristit ćemo analitičku jednadžbu pravca

$$p ... y = k \cdot x + l.$$

Neka su p_1 i p_2 dva pravca ravnine koji se sijeku. Pod kutom φ podrazumijevamo šiljasti kut od dva kuta koja međusobno zatvaraju pravci p_1 i p_2. Da bi odredili mjeru kuta φ računamo $\operatorname{tg} \varphi$. Prisjetimo se da se nagib k pravca p definira $k = \operatorname{tg} \alpha$.(vidi [14]) Kutove koji pravci p_1 i p_2 zatvaraju s pozitivnim dijelom osi x, označavamo redom s α_1 i α_2. Promatramo tri slučaja:

1. $\alpha_1 = \alpha_2$
2. $\alpha_1 > \alpha_2$
3. $\alpha_1 < \alpha_2$

U prvom slučaju riječ je o paralelnim ili podudarnim pravcima budući da pravci zatvaraju sukladne kutove s pozitivnim dijelom x osi. Stoga je $\varphi = 0$.

U drugom i trećem slučaju dobivamo izraz $\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1)$ zbog periodičnosti funkcije tangens s temeljnim periodom π. Raspisujući po adicijskoj formuli dobivamo:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Uvrštavanjem $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$ i $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$ dobivamo

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \tag{1.1}$$

Iz jednakosti (1.1) za $\varphi = \frac{\pi}{2}$ slijedi $\operatorname{tg}\varphi = \infty$, a to vrijedi za $1 + k_1 k_2 = 0$.
Iz jednakosti $1 + k_1 k_2 = 0$ dobivamo da je uvjet okomitosti dvaju pravaca u euklidskoj ravnini

$$k_1 = -\frac{1}{k_2}.$$

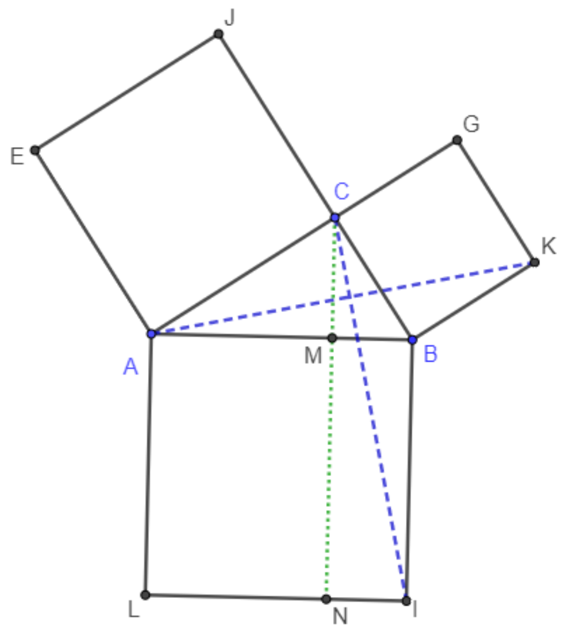
Dakle, uvjet okomitosti u euklidskoj ravnini kaže da su pravci okomiti ako i samo ako su im nagibi suprotni i recipročni.

1.3 Odabrani teoremi euklidske ravnine

U ovom dijelu promatrat ćemo određene teoreme na pravokutnom trokutu i kružnici koje susrećemo još u osnovnoj školi.
Prvi od teorema kojima ćemo se baviti je Pitagorin poučak. Do sada je poučak dokazan na jako puno različitih načina, a u ovom dijelu mi ćemo obraditi dva različita dokaza.

Teorem 1.3.1. *Pitagorin poučak(vidi [15], str. 228)*
U pravokutnom je trokutu kvadrat hipotenuze jednak zbroju kvadrata obje katete.

Dokaz. Prvi dokaz koji ćemo prikazati je Euklidov dokaz Pitagorinog poučka. Pogledajmo sliku 1.1:
Promotrimo prvo trokut ABK. Odredimo njegovu površinu. Uzmimo stranicu $\overline{BK}$. Duljina visine na stranicu $\overline{BK}$ jednaka je duljini dužine $\overline{BC}$, budući da su pravci BK i AC paralelni



Slika 1.1: Euklidov dokaz

pa je udaljenost pravaca BK i AC u svakoj točki jednaka duljini dužine $\overline{BC}$. Dakle, površina trokuta ABK jednaka je

$$P = \frac{|BK| \cdot |BC|}{2}.$$

Iz čega slijedi da je površina kvadrata $BKGC$ dvostruko veća od površine trokuta ABK, odnosno vrijedi sljedeće

$$P_{BKGC} = 2P_{ABK}.$$

Povucimo okomicu iz točke C na dužine $\overline{AB}$ i $\overline{LI}$. Nožišta okomice i dužina $\overline{AB}$ i $\overline{LI}$ označimo redom s M i N. Promotrimo sad trokut IBC. Odredimo njegovu površinu. Uzmimo stranicu $\overline{IB}$. Duljina visine na stranicu $\overline{IB}$ jednaka je duljini dužine $\overline{BM}$, budući da su pravci IB i MC paralelni pa je udaljenost pravaca IB i MC u svakoj točki jednaka duljini dužine $\overline{BM}$. Dakle, površina trokuta IBC jednaka je

$$P = \frac{|IB| \cdot |BM|}{2}.$$

Iz čega slijedi da je površina pravokutnika $NIBM$ dvostruko veća od površine trokuta IBC, odnosno vrijedi sljedeće

$$P_{NIBM} = 2P_{IBC}.$$

Budući da su kutovi $\measuredangle KBC$ i $\measuredangle IBA$ kutovi kvadrata, oni su pravi kutovi. Dakle,

$$|\measuredangle KBC| = |\measuredangle IBA|$$

$$|\measuredangle KBC| + |\measuredangle ABM| = |\measuredangle IBA| + |\measuredangle ABM|$$

$$|\measuredangle ABK| = |\measuredangle IBC|$$

Budući da je $BKGC$ kvadrat, njigove stranice su sukladne pa vrijedi $|BK| = |BC|$. Analogno vrijedi $|IB| = |AB|$ iz kvadrata $LIBA$. Trokuti ABK i IBC imaju dvije sukladne stranica, $|AB| = |IB|$ i $|BK| = |BC|$ te sukladan kut između njih $|\measuredangle ABK| = |\measuredangle IBC|$. Po SKS teoremu o sukladnosti trokuta slijedi $\triangle ABK \cong \triangle IBC$. Budući da su trokuti ABK i IBC sukladni imaju jednaku površinu te slijedi

$$P_{ABK} = P_{IBC}$$

$$2P_{ABK} = 2P_{IBC}$$

$$P_{BKGC} = P_{NIBM}.$$

Analogno se dokazuje da vrijedi

$$P_{ACJE} = P_{LNMA}.$$

Pravokutnici $LNMA$ i $NIBM$ su dijelovi kvadrata $LIBA$ pa zbrajanjem njihovih površina dobivamo površinu kvadrata $LIBA$

$$P_{LNMA} + P_{NIBM} = P_{LIBA}$$

$$P_{ACJE} + P_{BKGC} = P_{LIBA}$$

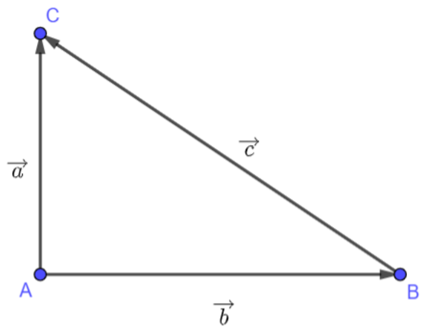
Kako je $\overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{CA} = b$ za trokut ABC vrijedi:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

□

Dokaz. U drugom dokazu dokazat ćemo Pitagorin poučak preko vektora. Neka nam je dan pravokutni trokut ABC te neka su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ međusobno okomiti vektori. Zbog preglednijeg računa označimo vektore $\overrightarrow{AC}$ s $\overrightarrow{a}$, vektor $\overrightarrow{AB}$ s $\overrightarrow{b}$ te vektor $\overrightarrow{BC}$ s $\overrightarrow{c}$. Vektor $\overrightarrow{c}$ možemo zapisati i kao razliku vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$. Dakle, $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}$.
Računajući normu vektora $\overrightarrow{c}$ slijedi

$$|c|^2 = |a - b|^2 = (a - b)(a - b) = a \cdot a - a \cdot b - b \cdot a + b \cdot b \tag{1.2}$$



Slika 1.2: Pravokutni trokut

Primjenom skalarnog produkta vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ dobivamo:

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \measuredangle BAC$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot 0$$

$$\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$$

Sada iz (1.2) dobivamo:

$$|c|^2 = |a - b|^2 = a \cdot a - 0 - 0 + b \cdot b$$

$$|c|^2 = |a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2$$

$$|c|^2 = |a|^2 + |b|^2$$

□

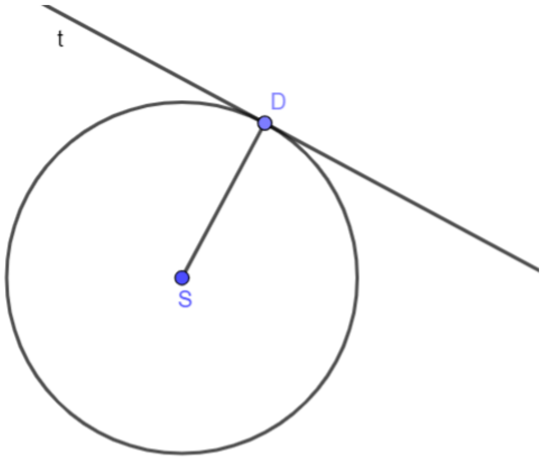
Prije sljedećeg teorema prisjetimo se međusobnog odnosa kružnice i pravca. Kružnica i pravac mogu imati jednu, dvije ili niti jednu zajedničku točku.

Definicija 1.3.2. *Tangenta kružnice je pravac koji s kružnicom ima točno jednu zajedničku točku. Tu točku zovemo diralište tangente.*

Definicija 1.3.3. *Pravak koji kružnicu siječe u dvije točke naziva se sekanta.*

U sljedećem teoremu iskazat ćemo svojstvo tangente koje kaže da je tangenta okomita na polumjer kružnice u točki dirališta.

Teorem 1.3.4. *Polumjer kružnice okomit je na tangentu kružnice u točki dirališta.*



Slika 1.3: Kružnica i njena tangenta u točki D

Dokaz. Neka je pravac t tangenta i neka je točka D točka dirališta tangente i kružnice. Pretpostavimo suprotno, odnosno da polumjer kružnice nije okomit na tangentu kružnice u točki D. Povucimo okomicu na tangentu t kroz točku središta S. Sjecište okomice i tangente neka je točka A.

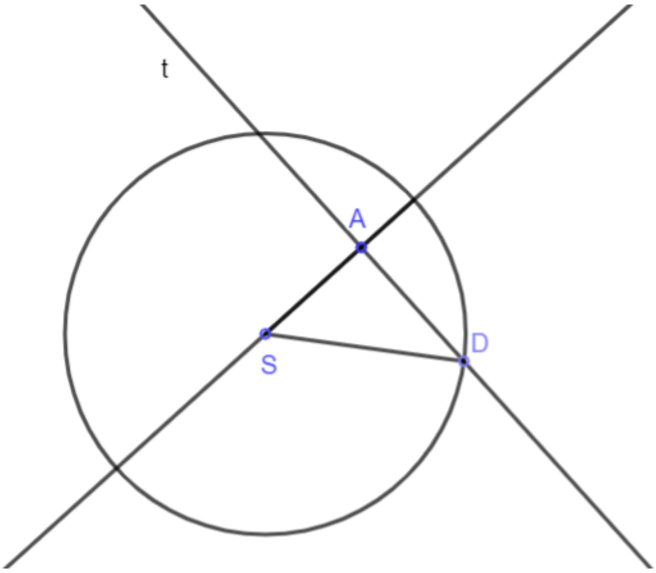
Promotrimo sada sliku 1.4. Uočimo da je duljina dužine $\overline{SA}$ kraća od duljine polumjera $\overline{SD}$, odnosno

$$|SA| < |SD| = r.$$

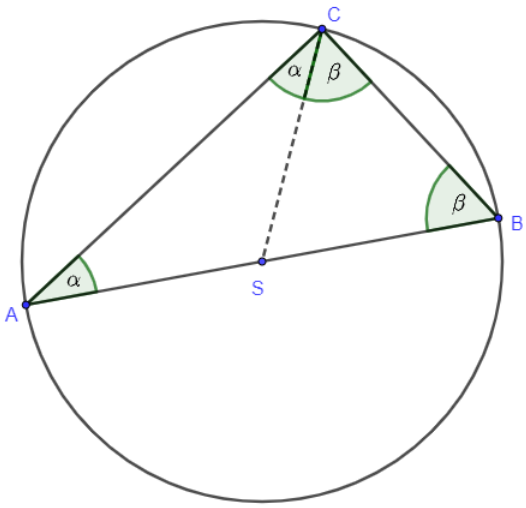
Dobili smo da je udaljenost pravca od središta manja od radijusa kružnice te tangenta siječe kružnicu u dvije točke, šo je u kontradikciji s definicijom tangente.
Dakle, polumjer kružnice okomit je na tangentu u točki dirališta D. □

Treći teorem kojim ćemo se baviti je Talesov poučak o kutu nad promjerom kružnice. I za ovaj teorem razmotrit ćemo dva dokaza

Teorem 1.3.5. *Talesov poučak o kutu nad promjerom kružnice (vidi[15], str. 260.)*
Ako je $\overline{AB}$ promjer kružnice, a C bilo koja točka kružnice različita od A i B, onda je $\triangle ABC$ pravokutan s pravim kutom pri vrhu C.



Slika 1.4: Kružnica i okomica na pravac t



Slika 1.5: Talesov poučak o kutu nad promjerom kružnice

Dokaz. Promotrimo sliku 1.5 kružnice sa središtem u točki S. Na slici možemo uočiti dva jednakokračna trokuta jer su dužine $\overline{AS}$, $\overline{SC}$ i $\overline{SB}$ polumjeri prikazane kružnice. To su

$\triangle ASC$ i $\triangle SBC$. Iz jednakokračnog trokuta $\triangle ASC$ slijedi $|\measuredangle SAC| = |\measuredangle SCA|$, a iz jednakokračnog trokuta $\triangle SBC$ slijedi $|\measuredangle SBC| = |\measuredangle SCB|$.
Označimo kutova kao što je prikazano na slici 1.5. Dakle,

$$|\measuredangle SAC| = |\measuredangle SCA| = \alpha \quad \text{i} \quad |\measuredangle SBC| = |\measuredangle SCB| = \beta.$$

Kut $|\measuredangle BCA|$ možemo zapisati i na drugi način

$$|\measuredangle BCA| = |\measuredangle SCA| + |\measuredangle SCB| = \alpha + \beta.$$

Koristeći činjenicu da je zbroj veličina unutarnjih kutova trokuta ABC jednak 180° dobivamo sljedeće

$$|\measuredangle BAC| + |\measuredangle ABC| + |\measuredangle BCA| = 180^\circ$$

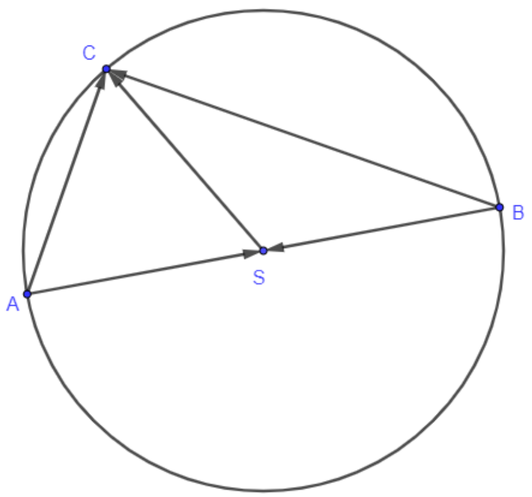
$$\alpha + \beta + \alpha + \beta = 180^\circ$$

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ / : 2$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

Dakle, kut $\measuredangle BCA$ je pravi kut. $\square$

Talesov poučak o kutu nad promjerom kružnice možemo dokazati i koristeći vektore.



Slika 1.6: Talesov poučak o kutu nad promjerom kružnice preko vektora

Dokaz. Neka je dana kružnica sa središtem u točki S radijusa r te točkama A, B i C kako je prikazano na slici 1.6. Odredimo skalarni produkt vektora $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$. Najprije vektore $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$ zapišimo na drugi način koristeći se pravilom trokuta za zbrajanje vektora.

$$\begin{aligned}\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}\rangle &= \langle\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SC},\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{SC}\rangle\\ &= \langle\overrightarrow{AS},\overrightarrow{BS}\rangle+\langle\overrightarrow{AS},\overrightarrow{SC}\rangle+\langle\overrightarrow{SC},\overrightarrow{BS}\rangle+\langle\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SC}\rangle \qquad (1.3)\end{aligned}$$

Sa slike 1.6 uočimo da su vektori $\overrightarrow{AS}$ i $\overrightarrow{BS}$ suprotni vektori $\overrightarrow{AS} = -\overrightarrow{BS}$. Sada iz (1.3) slijedi

$$\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}\rangle = -\langle\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BS}\rangle-\langle\overrightarrow{BS},\overrightarrow{SC}\rangle+\langle\overrightarrow{SC},\overrightarrow{BS}\rangle+\langle\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SC}\rangle$$
$$\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}\rangle = -|\overrightarrow{BS}|^2+0+|\overrightarrow{SC}|^2$$
$$\langle\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BC}\rangle = -r^2+r^2=0$$

Budući da je skalarni produkt vektora $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$ jednak nula slijedi da su vektori međusobno okomiti jer niti jedan od vektora $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$ nije jednak nulvektoru. □

Poglavlje 2

Elementarna geometrija pseudoeuklidske ravnine

U ovom poglavlju bavit ćemo se osnovnim pojmovima pseudoeuklidske ravnine još zvanom Minkowskijeva ravnina po Hermannu Minkowskom, njemačkom matematičaru i fizičaru. Kao i u prethodnom poglavlju prvo ćemo opisati vektorski prostor potreban da bismo mogli promatrati pseudoeuklidsku ravninu.

2.1 Prostor $\mathbb{R}^2_1$

Realni vektorski prostor $\mathbb{R}^2$ poslužit će nam kao analitički model za pseudoeuklidsku ravninu. Pseudoeuklidska ravnina razlikuje od euklidske ravnine u tome što u pseudoeuklidskoj ravnini ne definiramo skalarni produkt kao u E^2, nego definiramo Lorentzov skalarni produkt.

Definicija 2.1.1. *Neka su $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Lorentzov skalarni produkt $\langle x, y\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiramo s*

$$\langle x, y\rangle = -x_1 y_1 + x_2 y_2$$

(vidi [20], str.56.):

S Lorentzovim skalarnim produktom prostor $\mathbb{R}^2$ nazivamo pseudoeuklidskom ravninom ili Minkowskijevom ravninom te označavamo s $\mathbb{R}^2_1$. Lorentzov skalarni produkt zadovoljava svojstvo kvaziasocijativnosti, distributivnosti prema zbrajanju i komutativnosti, ali za razliku od skalarnog produkta u $\mathbb{R}^2$ koji je pozitivno definitan, Lorentzov skalarni produkt to nije. Naime, realan broj

$$\langle x, x\rangle = \langle (x_1, x_2), (x_1, x_2)\rangle = -x_1^2 + x_2^2$$

može biti i pozitivan i negativan i jednak nuli. Stoga, u pseudoeuklidskoj ravnini razlikujemo tri vrste vektora.

Definicija 2.1.2. *Za vektor* $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_1$ *kažemo da je*

- *vremenski ako je* $\langle x, x\rangle < 0$,
- *svjetlosni ako je* $\langle x, x\rangle = 0, x \neq 0$
- *prostorni ako je* $\langle x, x\rangle > 0$ *ili je* x *nulvektor.*

Kod vremenskih i svjetlosnih vektora razlikujemo još dvije klase vektora. Ako vektori zadovoljavaju $x_1 > 0$ to su pozitivni vremenski, odnosno svjetlosni vektori, a ako zadovoljavaju $x_1 < 0$ to su negativni vremenski, odnosno svjetlosni vektori.

Sve tri vrste čine određeni skup u pseudoeuklidskoj ravnini. Odredimo koji su to skupovi.
Vremenski vektori zadovoljavaju nejednakost

$$\langle x, x\rangle = -x_1^2 + x_2^2 < 0 \iff x_2^2 < x_1^2 \iff |x_2| < |x_1|$$

Svjetlosni vektori zadovoljavaju jednakost

$$\langle x, x\rangle = -x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)(-x_1 + x_2) = 0 \iff x_1 = \pm x_2$$

Dobiveni skup za svjetlosne vektore se pravci s nagibom 1 i -1 u x_1x_2 ravnini. Prostorni vektori zadovoljavaju nejednakost

$$\langle x, x\rangle = -x_1^2 + x_2^2 > 0 \iff x_2^2 > x_1^2 \iff |x_2| > |x_1|$$

Područja vremenskih, svjetlosnih i prostornih vektora u ravnini x_1x_2 prikazana su na slici 2.1

Definicija 2.1.3. *Na pseudounitarnom prostoru* $\mathbb{R}^2_1$ *definiramo duljinu ili modul vektora* $x \in \mathbb{R}^2_1$ *kao*

$$|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{-x_1^2 + x_2^2}.$$

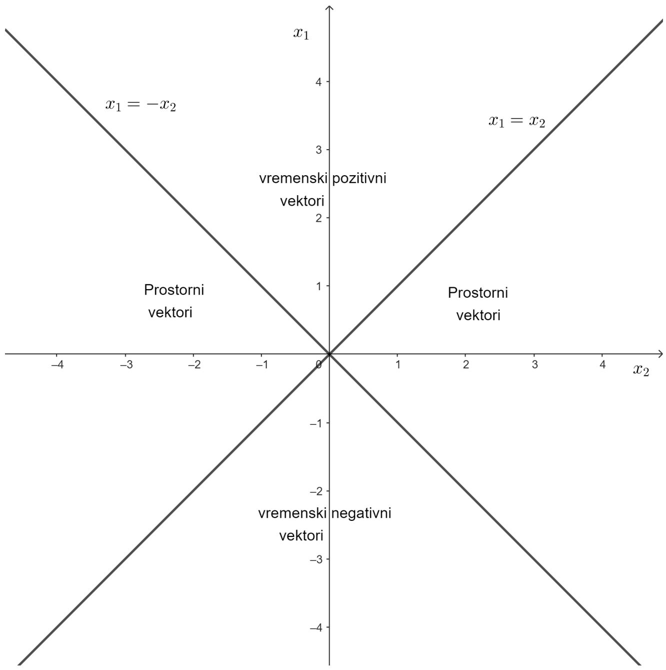
Pomoću duljine vektora definiramo udaljenost dvaju vektora kao i u ravnini E^2.

Definicija 2.1.4. *Udaljenost u prostoru* $\mathbb{R}^2_1$ *definiramo s*

$$d(x, y) = |x - y|$$

Udaljenost dvaju vektora u pseudoeuklidskoj ravnini može biti pozitivan realni ili imaginarni broj ili nula.(vidi [20], str.55.)

Vremenski vektori $x \in \mathbb{R}^2_1$ bit će pozitivne imaginarne duljine jer za vremenske vektore vrijedi $\langle x, x\rangle < 0$. Svjetlosni vektori $x \in \mathbb{R}^2_1$ bit će duljine 0 jer za svjetlosne vektore vrijedi $\langle x, x\rangle = 0$.



Slika 2.1: Vremenski, svjetlosni i prostorni vektori

2.2 Kružnice i okomiti pravci

Definicija 2.2.1. *Za $x, y \in \mathbb{R}^2_1$ kažemo da su okomiti ili ortogonalni ako vrijedi*

$$\langle x, y \rangle = 0$$

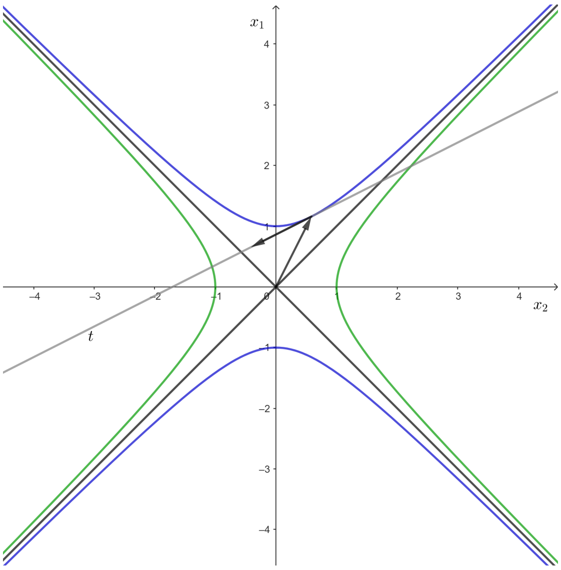
U pseudoeuklidskoj ravnini, kao i u euklidskoj ravnini, vrijedi svojstvo da je jedino nulvektor okomit na sve vektore ravnine.
Dakle, $\langle x, y \rangle = 0$ za svaki x povlaći posebno za $x = (1, 0)$:

$$\langle x, y \rangle = -1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 = 0 \implies y_1 = 0$$

te za $x = (0, 1)$:

$$\langle x, y \rangle = -0 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 = 0 \implies y_2 = 0.$$

Dakle, $y = 0$.
To svojstvo zovemo nedegeneriranost Lorentzovog skalarnog produkta.
U pseudoeuklidskoj ravnini kao i u euklidskoj ravnini, jednadžba pravca je $y = kx + l$.
Promotrimo sada dva pravca u pseudoeuklidskoj ravnini $p...y = k_1x + l_1$ i $p...y = k_2x + l_2$.



Slika 2.2: Okomiti vektori u Minkowskijevoj ravnini

Ako su ti pravci okomiti, onda njihovi vektori smjera zadovoljavaju

$$(k_1, -1) \cdot (k_2, -1) = -k_1 k_2 + 1 = 0.$$

Iz čega slijedi

$$k_1 = \frac{1}{k_2}.$$

Vidimo da za pseudoeuklidsku ravninu dovoljno da su nagibi pravca recipročni da bi pravci bili okomiti.(vidi [10])

Propozicija 2.2.2. *Neka su vektori $x, y \in \mathbb{R}^2_1$ okomiti. Ako je x vremenski vektor, tada je y prostorni vektor i obrnuto.*

Dokaz. Vektor x je vremenski vektor pa vrijedi

$$\langle x, x \rangle = -x_1^2 + x_2^2 < 0 \iff x_2^2 < x_1^2. \tag{2.1}$$

Budući da su x i y okomiti vektori vrijedi

$$-x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0 \iff x_1 y_1 = x_2 y_2.$$

Vektor x je vremenski pa vrijedi $x_1 \neq 0$ te dobijemo

$$y_1 = \frac{x_2 y_2}{x_1} \tag{2.2}$$

Uvrštavanjem (2.2) u $y = (y_1, y_2)$ dobivamo

$$\langle y, y\rangle = -y_1^2 + y_2^2 = -\left(\frac{x_2 y_2}{x_1}\right)^2 + y_2^2 = \frac{-x_2^2 y_2^2 + y_2^2 x_1^2}{x_1^2} = y_2^2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2}$$

Budući da je x vremenski vektor vrijedi (2.1), zaključujemo

$$y_2^2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2} > 0.$$

Dakle, vektor y je prostorni vektor jer je $\langle y, y\rangle > 0$. Na analogan način bi dokazali i tvrdnju ako je x prostorni, tada je y vremenski. □

Propozicija 2.2.3. *Neka su vektori $x, y \in \mathbb{R}_1^2$ okomiti. Ako je x svjetlosni vektor, tada je y svjetlosni ili nulvektor.*

Dokaz. Vektor x je svjetlosni vektor pa vrijedi

$$\langle x, x\rangle = -x_1^2 + x_2^2 = 0 \iff x_2^2 = x_1^2 \tag{2.3}$$

Budući da su x i y okomiti vektori vrijedi

$$-x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0 \iff x_1 y_1 = x_2 y_2$$

Vektor x je svjetlosni pa je tada naprimjer $x_1 \neq 0$ te dobijemo

$$y_1 = \frac{x_2 y_2}{x_1} \tag{2.4}$$

Uvrštavanjem (2.4) u $y = (y_1, y_2)$ dobivamo

$$\langle y, y\rangle = -y_1^2 + y_2^2 = -\left(\frac{x_2 y_2}{x_1}\right)^2 + y_2^2 = \frac{-x_2^2 y_2^2 + y_2^2 x_1^2}{x_1^2} = y_2^2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2}.$$

Budući da je x vremenski vektor vrijedi (2.3), zaključujemo

$$y_2^2 \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2} = 0.$$

Dakle, za vektor y dobili smo $\langle y, y\rangle = 0$ pa zaključujemo da je vektor y ili također svjetlosni ili nulvektor. □

Propozicija 2.2.4. *Za sve vektore $x, y \in \mathbb{R}_1^2$ vrijedi*

$$\langle x, y\rangle^2 \geqslant |x|^2 |y|^2. \tag{2.5}$$

Dokaz. Neka je $x = (x_1, x_2)$ i $y = (y_1, y_2)$. Računamo

$$\langle x, y\rangle = \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2)\rangle = -x_1y_1 + x_2y_2. \tag{2.6}$$

Kvadriranjem izraza (2.6) dobiva se

$$\langle x, y\rangle^2 = (-x_1y_1 + x_2y_2)^2 = x_1^2y_1^2 - 2x_1y_1x_2y_2 + x_2^2y_2^2 = x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 - 2x_1y_1x_2y_2.$$

Dobiveni izraz možemo napisati i na sljedeći način

$$x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 = \langle x, y\rangle^2 + 2x_1y_1x_2y_2. \tag{2.7}$$

$$|x|^2|y|^2 = \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle = (-x_1^2 + x_2^2)(-y_1^2 + y_2^2) = x_1^2y_1^2 - x_1^2y_2^2 - x_2^2y_1^2 + x_2^2y_2^2. \tag{2.8}$$

Uvrštavanjem (2.7) u izraz (2.8) dobijemo

$$\begin{aligned} |x|^2|y|^2 &= x_1^2y_1^2 - x_1^2y_2^2 - x_2^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 \\ &= \langle x, y\rangle^2 + 2x_1y_1x_2y_2 - x_1^2y_2^2 - x_2^2y_1^2 \\ &= \langle x, y\rangle^2 - (x_1^2y_2^2 - 2x_1y_1x_2y_2 + x_2^2y_1^2) \\ &= \langle x, y\rangle^2 - (x_1y_2 - x_2y_1)^2 \leqslant \langle x, y\rangle^2 \end{aligned}$$

□

Propozicija 2.2.4 omogućava nam definiranje kuta među vektorima pseudoeuklidske ravnine. Budući da smo u propoziciji 2.2.2. dokazali da ako je jedan vektor vremenski, a drugi prostorni tada su vektori okomiti pa kut definiramo za dva prostorna vektora i za dva vremenska pozitivna ili negativna.
Kod prostornih vektora umnožak $|x||y|$ je pozitivan pa je relacija(2.5) za prostorne vektore

$$|\langle x, y\rangle| \geqslant |x||y|.$$

Kod vremenskih pozitivnih, odnosno negativnih vektora umnožak $|x||y|$ je negativan jer su $|x|$ i $|y|$ pozitivni imaginarni brojevi pa je relacija (2.5) za vremenske pozitivne, odnosno negativne brojeve

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant |x||y| < 0.$$

Propozicija 2.2.5. *Za $x, y \in \mathbb{R}^2_1$, oba prostorni ili pozitivni (negativni) vremenski vektori, postoji jedinstveni nenegativni realni broj $\varphi(x, y)$ takav da je*

$$|\langle x, y\rangle| = |x||y| \operatorname{ch} \varphi(x, y). \tag{2.9}$$

Funkcija kosinus hiperbolni $\operatorname{ch} : \mathbb{R} \longrightarrow [1, +\infty\rangle$ definirana je s

$$\operatorname{ch}\varphi = \frac{e^{\varphi} + e^{-\varphi}}{2}.$$

Definicija 2.2.6. *(vidi [10]) Za realan broj φ u izrazu* (2.9) *kažemo da je kut između prostornih vektora, odnosno pozitivnih (negativnih) vremenskih vektora x i y.*

Uočimo da se kut definira samo za vektore iste vrste pa ne možemo tražiti mjeru kuta okomitih vektora jer kut za vektore različitih vrsta nije definiran, za razliku od euklidske ravnine u kojoj je mjera kuta okomitih vektora uvijek $\frac{\pi}{2}$.

Nakon okomitih pravaca i kuta između pravaca koji se sijeku, a nisu okomiti, promotrimo kružnice u pseudoeuklidskoj ravnini.
Prisjetimo se jednadžbe kružnice u euklidskoj ravnini sa središtem u ishodištu radijusa $r > 0$.

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : |x|^2 = r^2\} \tag{2.10}$$

U pseudoeuklidskoj ravnini kružnicu također definiramo koristeći jednadžbu (2.10) pa jednadžba kružnice u Minkowskijevoj ravnini glasi

$$-x_1^2 + x_2^2 = r^2.$$

Duljina vektora u pseudoeuklidskoj ravnini može biti pozitivan realan broj, pozitivan imaginaran broj ili nula pa i duljina polumjera kružnice može biti pozitivan realni broj, pozitivan imaginarni broj ili pak 0.
Promotrimo kružnice radijusa 0 na slici 2.3.

$$-x_1^2 + x_2^2 = r^2 \overset{r=0}{\Longrightarrow} -x_1^2 + x_2^2 = 0 \Longrightarrow x_2^2 = x_1^2$$

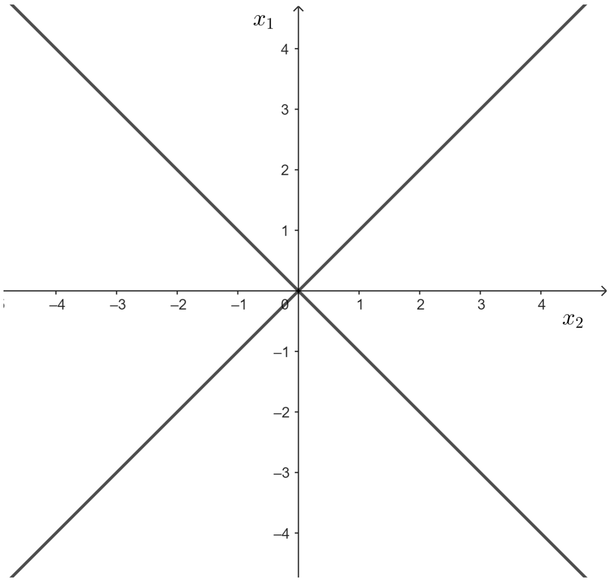
Uočimo da je kružnica radijusa 0 zapravo par pravaca kojim su određeni svjetlosni vektori u $\mathbb{R}_1^2$.

Promotrimo jediničnu kružnicu pozitivnog realnog radijusa na slici 2.4.

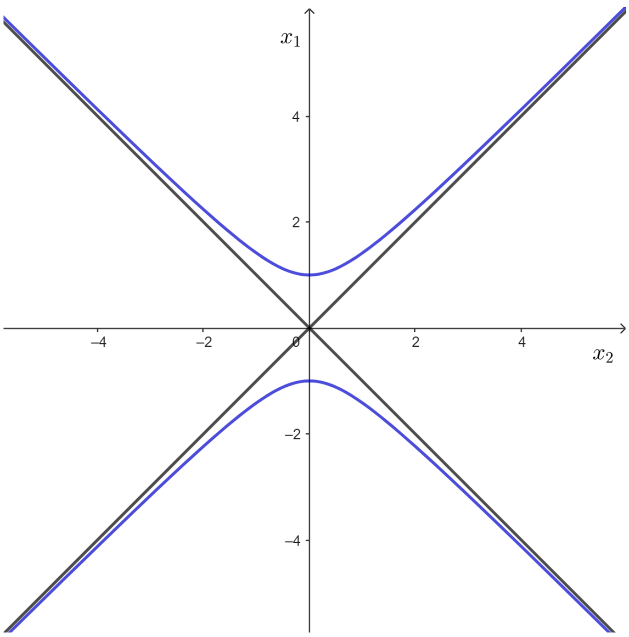
$$-x_1^2 + x_2^2 = r^2 \overset{r=1}{\Longrightarrow} -x_1^2 + x_2^2 = 1$$

Promotrimo jediničnu kružnicu pozitivnog imaginarnog radijusa na slici 2.5.

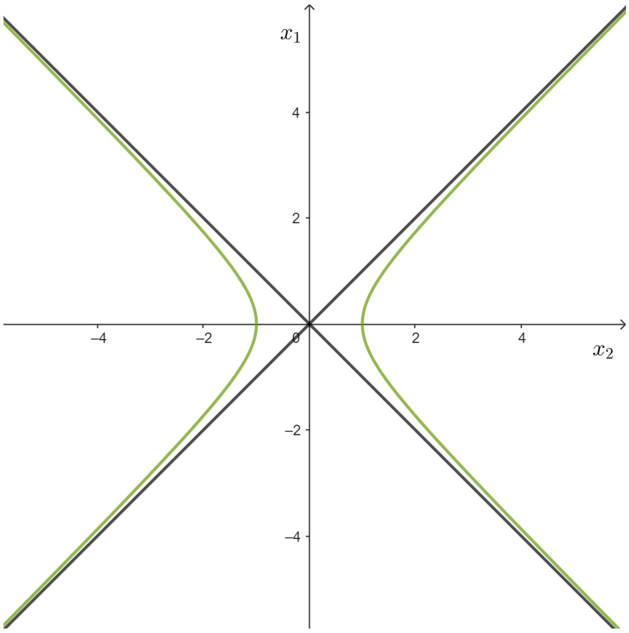
$$-x_1^2 + x_2^2 = r^2 \overset{r=i}{\Longrightarrow} -x_1^2 + x_2^2 = -1$$



Slika 2.3: Kružnice radijusa 0



Slika 2.4: Kružnica pozitivnog realnog radijusa



Slika 2.5: Kružnica imaginarnog radijusa

Promotrimo li kružnice pseudoeuklidske ravnini s gledišta euklidske ravnine primjećujemo da su kružnice pozitivnog realnog radijusa zapravo hiperbole s tjemenima na osi x_1 u euklidskoj ravnini. Također, kružnice pozitivnog imaginarnog radijusa zapravo hiperbole s tjemenima na osi x_2 u euklidskoj ravnini.

Uočimo još jedno svojstvo kružnica pseudoeuklidske ravnine. Kružnicama pozitivnog realnog radijusa svi tangencijalni vektori su vremenski, svi tangencijalni vektori kružnice pozitivnog imaginarnog radijusa su prostorni vektori. Stoga se kružnica pozitivnog realnog radijusa zove vremenska krivulja, a kružnica pozitivnog imaginarnog radijusa prostorna krivulja.

Nakon razmatranja kružnica, sada okomitost možemo opravdati geometrijskim analogonom tvrdnje iz euklidske geometrije koja kaže da je polumjer kružnice okomit na tangentu u odgovarajućoj točki. Definirajmo prvo polumjer kružnice u Minkowskijevoj ravnini.

Definicija 2.2.7. *Spojnica središta i neke točke kružnice naziva se polumjer kružnice.*

Teorem 2.2.8. *Polumjer kružnice ortogonalan je na vektor smjera tangente kružnice u odgovarajućoj točki kružnice.*

Dokaz. Vektor polumjera kružnice ima smjer radijvektora odabrane točke na kružnici. Neka je to vektor $x_p = (x_0, \pm\sqrt{x_0^2 - r^2})$.

Vektor smjera tangente u istoj točki određen je derivacijom pa je to vektor $v_t = \left(1, \pm\frac{1}{\sqrt{x_0^2 - r^2}} x_0\right)$.

Izračunajmo Lorentzov skalarni produkt za ta dva vektora:

$$\begin{aligned}
\langle v_p, v_t \rangle &= \left\langle (x_0, \pm\sqrt{x_0^2 - r^2}), \left(1, \pm\frac{1}{\sqrt{x_0^2 - r^2}} x_0\right)\right\rangle \\
&= -x_0 \cdot 1 + (\pm\sqrt{x_0^2 - r^2}) \cdot \left(\pm\frac{1}{\sqrt{x_0^2 - r^2}} x_0\right) \\
&= -x_0 + x_0 \\
&= 0 \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

□

2.3 Odabrani teoremi pseudoeuklidske ravnine

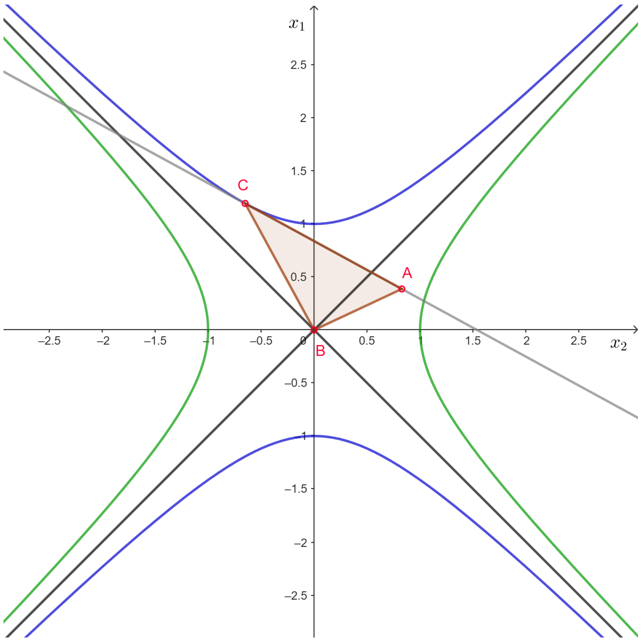
U ovom dijelu iskazat ćemo i dokazati analogone teorema spomenutih u prvom poglavlju.

Teorem 2.3.1. *Pitagorin poučak(vidi [10], str. 165.)*
U pravokutnom je trokutu kvadrat hipotenuze jednak razlici kvadrata kateta.

Dokaz. Neka je dan pravokutan trokut $\triangle ACB$ takav da su mu stranice $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ katete, a stranica $\overline{BA}$ hipotenuza.
Promotrimo sljedeći specijalni slučaj, ostali slučajevi dokazuju se analogno:
Neka je vektor katete $\overrightarrow{CA}$ prostorni vektor, a vektor druge katete $\overrightarrow{BC}$ vremenski jer je na njega okomit, kao na slici 2.6. Pretpostavimo da je vektor hipotenuze $\overrightarrow{BA}$ vremenski vektor. Radi preglednijeg zapisa apsolutne vrijednosti duljina vektora označit ćemo s $\left||\overrightarrow{BA}|\right| = c$, $\left||\overrightarrow{BC}|\right| = a$ te $\left||\overrightarrow{CA}|\right| = b$.

Vektor $\overrightarrow{BA}$ se može zapisati kao zbroj vektora $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{CA}$ pa dobivamo

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}.$$



Slika 2.6: Pravokutni trokut - Minkowskijeva ravnina

Sada izračunajmo skalarni kvadrat vektora $\overrightarrow{BA}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BA}^2 = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})^2 &= \langle \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} \rangle \\ &= \overrightarrow{BC}^2 + \langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA} \rangle + \langle \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC} \rangle + \overrightarrow{CA}^2 \\ &= \overrightarrow{BC}^2 + 2\langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA} \rangle + \overrightarrow{CA}^2. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Budući da su vektori $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{CA}$ okomiti, vrijedi

$$\langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA} \rangle = 0, \tag{2.13}$$

a za vektor $\overrightarrow{BA}$ vrijedi

$$\overrightarrow{BA}^2 = -c^2, \tag{2.14}$$

Uvrštavanjem (2.13) i (2.14) u (2.12) slijedi

$$-c^2 = (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA})^2 = \overrightarrow{BC}^2 + \overrightarrow{CA}^2 = -a^2 + b^2$$

Sređivanjem izraza dobivamo

$$c^2 = a^2 - b^2$$

□

U prikazanom dokazu pretpostavili smo da je hipotenuza vremenski vektor. U slučaju da je vektor $\overrightarrow{CA}$ prostorni, $\overrightarrow{BC}$ vremenski, a $\overrightarrow{BA}$ prostorni dobivamo

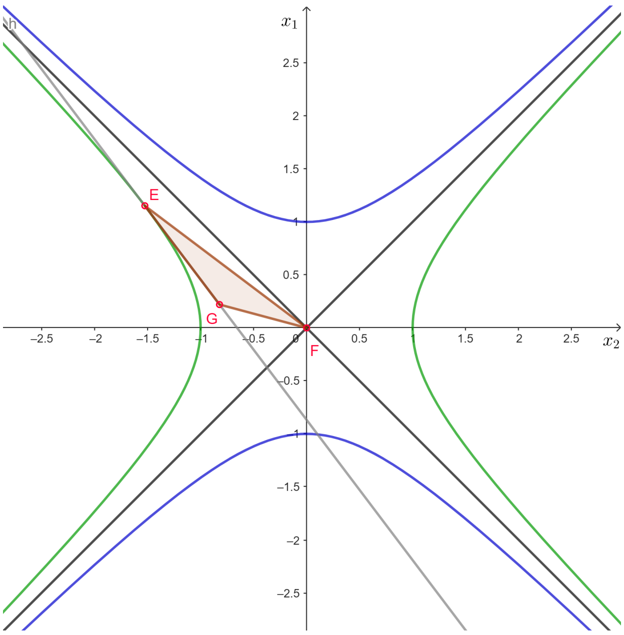
$$-a^2 + b^2 = c^2$$

. Slično dobivamo i za slučajeve kada je vektor $\overrightarrow{CA}$ vremenski, $\overrightarrow{BC}$ prostorni, a $\overrightarrow{BA}$ vremenski, odnosno prostorni

$$a^2 - b^2 = -c^2,$$

$$a^2 - b^2 = c^2.$$

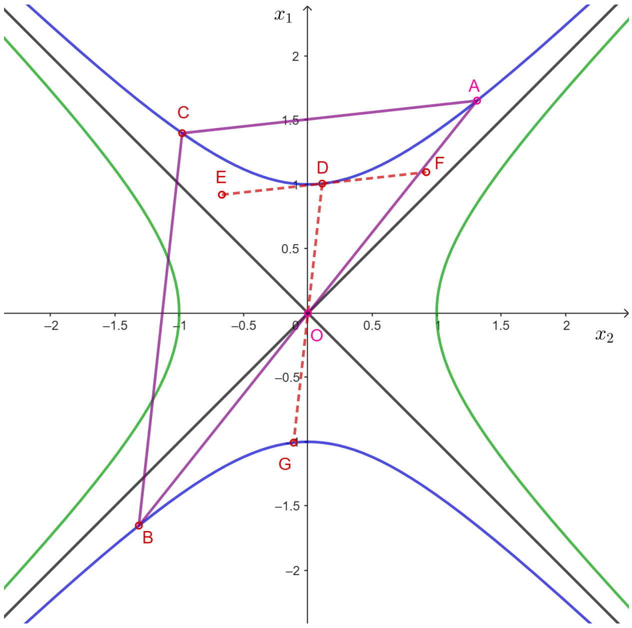
Pravokutan trokut s prostornim vektorom kao hipotenuza prikazan je na slici 2.7.



Slika 2.7: Pravokutni trokut - Minkowskijeva ravnina

Sljedeći teorem koji ćemo iskazati i dokazati u pseudoeuklidskoj ravnini je analogon Talesovog teorema o kutu nad promjerom kružnice.

Teorem 2.3.2. *Talesov poučak o kutu nad promjerom kružnice (vidi[15], str. 260.) Ako je $\overline{AB}$ promjer kružnice, a C bilo koja točka kružnice različita od A i B, onda je $\triangle ABC$ pravokutan s pravim kutom pri vrhu C.*



Slika 2.8: Talesov poučak - Minkowskijeva ravnina, kružnica pozitivnog realnog radijusa

Dokaz. Neka je dana kružnica sa središtem u točki O radijusa r te točkama A, B i C kako je prikazano na slici 2.8.

Promotrimo najprije radijvektor $\overrightarrow{OD}$ i vektor $\overrightarrow{DE}$. Radijvektor $\overrightarrow{OD}$ zapravo je vektor polumjera kružnice, a vektor $\overrightarrow{DE}$ vektor smjera tangente u točki D na kružnicu. Kao što je prikazano u (2.11) Lorentzov skalarni produkt vektora $\overrightarrow{OD}$ i $\overrightarrow{DE}$ bit će 0. Dakle,

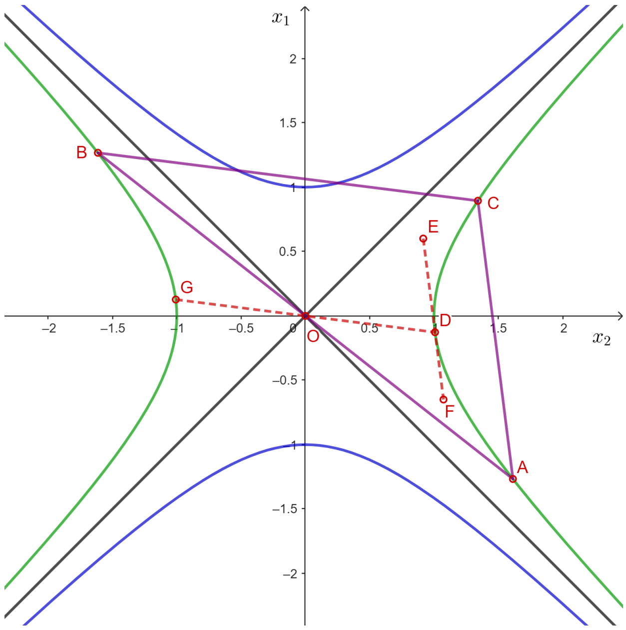
$$\langle \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{DE} \rangle = 0 \tag{2.15}$$

Budući da je pravac BC paralelan pravcu OD te pravac CA paralelan pravcu DE, njihovi vektori smjera su kolinearni pa će po (2.15) vrijediti

$$\langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA} \rangle = 0$$

Budući da je skalarni produkt vektora $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{CB}$ jednak nula slijedi da su vektori međusobno okomiti jer niti jedan od vektora $\overrightarrow{CA}$ i $\overrightarrow{CB}$ nije jednak nulvektoru. □

Na analogan način mogli smo dokazati Talesov poučak o kutu nad promjerom kružnice i da smo promatrali kružnicu pozitivnog imaginarnog radijusa, prikazano na slici 2.9.



Slika 2.9: Talesov poučak - Minkowskijeva ravnina, kružnica pozitivnog imaginarnog radijusa

Poglavlje 3

Okomitost, trokut i vektori kroz školu

Po novom kurikulu nastavnog predmeta Matematike pojmovi se protežu i nadograđuju tijekom cijelog osnovnoškolskog i srednjoškolskog obrazovanja. U ovom poglavlju opisat ćemo kako se uvodi i kasnije nadograđuju pojmovi okomitost, trokut te vektori učenicima kroz osnovnoškolsko i srednjoškolsko obrazovanje. (vidi [30])

3.1 Okomitost pravaca

Razredna nastava

Prvi susret učenika s pojmovima pravac i okomiti pravci javlja se u trećem razredu osnovne škole. Učenicima je pravac objašnjen kao ravna neograničena crta. (vidi [8], str. 122.) Zatim, nakon upoznavanja s dužinom na pravcu i polupravcem, učenici se susreću s pravcima koji se sijeku i usporednim pravcima. Sada im se prezentiraju okomiti pravci kao jedna vrsta pravaca koji se sijeku. (vidi [8], str. 142.) Ne navodi se nikakvo objašnjenje, samo je u slikama prikazan postupak crtanja okomitih pravaca te se daje oznaka za okomite pravce.

Prelaskom u četvrti razred učenici se susreću s pojmom kuta, što je to kut te kakav sve može biti. Sada se pravi kut učenicima objašnjava prisjećajući se okomitih pravaca upoznatih u prethodnome razredu. Učenike se usmjerava da uoče da okomiti pravci dijele ravninu na 4 jednaka dijela. Sjecište dvaju okomitih pravaca je vrh kuta, a polupravci kao krakovi kuta odrađuju četiri sukladna kuta. U četvrtom razredu učenici nisu još upoznati s pojmom sukladnosti pa govore da su to četiri jednaka kuta. (vidi [13], str. 131.)

Predmetna nastava

Prelaskom u peti razred učenici produbljuju svoja znanja o pravcima, dužinama i polupravcima. Sada je fokus na određenosti pravca u ravnini. Prisjećaju se međusobnih položaja

dvaju pravaca u ravnini te kako se crtaju određeni pravci uz pomoć ravnala i trokuta ili dva trokuta. Kada se govori o okomitim pravcima, udžbenici daju definiciju okomitih pravaca kao dva pravca koji ravninu dijele na četiri jednaka dijela. (vidi [23], str. 107.,[11], [3]). Također, u nekim udžbenicima se može pronaći i naziv okomica (vidi [23], [3]) te kada kažemo da su dužine ili polupravci međusobno okomiti. (vidi[23])
Učenici u osnovnoj školi još u osmom razredu obrađuju pravce, ali sada je fokus na jednadžbi pravca. Na ovoj razini uči se uvjet usporednosti, ali se ne spominje uvjet okomitosti dvaju pravaca. (vidi [28], str. 8-42)

Srednja škola

U srednjoj školi okomitost pravaca javlja se kod obrade nastavne jedinice Kut između pravaca. Izvodeći formulu za kut između pravaca

$$\tan\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$$

te primjenjujući je na okomite pravce koji zatvaraju pravi kut dolaze do uvjeta okomitosti dvaju pravaca. Dakle, učenici sada spoznaju da su dva pravca okomita ako i samo ako vrijedi da je nagib jednog pravca jednak negativnoj recipročnoj vrijednosti nagiba drugog pravca. Koliko će učenici detaljno obrađivati kut između pravaca i uvjet okomitosti ovisi i tjednom broju sati nastavnog predmeta Matematike, što u trećem razredu srednje škole može biti od 2 do 7 sati tjedno.(vidi [22], 63-64;[19] 75-92; [18], 107-128.)

3.2 Trokut

Razredna nastava

Kroz prvi razred osnovne škole učenici uče geometrijske likove i geometrijska tijela pa se pojam trokuta javlja samo kao vrsta geometrijskog lika ili strana geometrijskog tijela.(vidi [5],[6])U drugom razredu učenici ponavljaju geometrijske likove i geometrijska tijela te se prikazuju stranice i vrhovi geometrijskih likova, (vidi[7], str.17), odnosno bridovi, plohe i vrhovi za geometrijska tijela. Na kraju trećeg razreda učenici se upoznaju s pojmom opseg te računaju opseg kvadrata, pravokutnika i trokuta. (vidi [9], str. 76.). Prelaskom u četvrti razred učenici ponavljaju osnove koje su do sada učili o trokutu te ih nadopunjuju novim znanjima kako označavamo vrhove i stranice trokuta te koliko kutova ima trokut. Također uče podjelu trokuta ovisno o duljinama stanica te pravokutni trokut. Za svaku vrstu trokuta koji uče prikazana im je i pravilna konstrukcija. (vidi [13], str. 139-161).

Predmetna nastava

U petom razredu osnovne škole učenici ponavljaju do sada naučena svojstva trokuta. U većini udžbenika spominje se samo podjela trokuta ovisno o duljini stranice (vidi [12], [24], 99-101), dok neki udžbenici spominju i podjelu trokuta ovisno o veličini unutarnjih kutova (vidi [3], 62-68). Svojstva trokuta se obrađuju u šestom razredu. Učenici utvrđuju prijašnja znanja o trokutu i vrstama trokuta te ih proširuju učeći o unutarnjim i vanjskim kutovima trokuta, sukladnosti trokuta, nejednakosti trokuta te površini trokuta. Učenici se kroz obradu sukladnosti trokuta prvi put susreću s pojmom poučka. Također, obrađuju se i tri osnovne konstrukcije trokuta (vidi [25], str. 62-100, [2], str. 114-162). Na kraju svog osnovnoškolskog obrazovanja, učenici se u osmom razredu osnovne škole susreću s pojmom sličnosti trokuta. (vidi [27], str. 149-154). Također, učenici se prisjećaju pravokutnog trokuta kroz temu Pitagorin poučak (vidi [28], str. 44-98), a svojstava pojedinih trokuta prisjećaju se kroz cjelinu Geometrijska tijela proučavajući njihove pobočke i baze (vidi [28], str. 104-110; 133-145).

Srednja škola

Učenici su se još u osnovnoj školi susreli samo s pojmovima sukladnost i sličnost te obrađivali poučke o sukladnosti trokuta. U prvom razredu srednje škole svoje znanje o sličnosti trokuta proširuju s poučcima o sličnosti trokuta. Sada se detaljnije pristupa obradi poučaka te njihovoj primjeni kroz razne zadatke i dokaze određenih tvrdnji. Koliko će učenici detaljno obrađivati sukladnost i sličnost trokuta ovisi i tjednom broju sati nastavnog predmeta Matematike, što u prvom razredu srednje škole može biti od 2 do 5 sati tjedno. Također, u prvom razredu obrađuje se trigonometrija pravokutnog trokuta. (vidi [29], 58-74;[17] 56-128; [16], 60-132).

3.3 Vektori

Predmetna nastava

Pojam vektor učenicima je apstraktan pojam s kojim se susreću prvi put u sedmom razredu osnovne škole. Učenici uče da su vektori određeni smjerom, duljinom i orijentacijom. Spoznaju da smjer i orijentacija nisu isti pojmovi. Upoznaju se s kolinearnim, jednakim i suprotnim vektorima. Obrađuju zbrajanje vektora preko pravila trokuta i pravila paralelograma te oduzimanje dvaju vektora prikazuju kao zbrajanje prvog sa suprotnim vektorom drugog vektora. (vidi [26], str. 8-26; [1], str. 20-46).

Srednja škola

Nakon prvog susreta s vektorima u sedmom razredu osnovne škole, učenici će u trećem razredu srednje škole produbiti svoja znanja o vektorima. Najprije se prisjećaju osnovnih pojmova i zbrajanja vektora te obrađuju množenje vektora skalarom, linearnu kombinaciju vektora, vektore u pravokutnom koordinatnom sustavu te skalarni umnožak. Koliko će učenici detaljno obrađivati temu vektora ovisi i tjednom broju sati nastavnog predmeta Matematike, što u trećem razredu srednje škole može biti od 2 do 7 sati tjedno.(vidi [22], 10-48;[19] 6-64; [18], 6-68.) U nastavnim programima sa 6 ili 7 sati tjedno obrađuju se i nastavne jedinice Vektori u prostoru te Vektorski i mješoviti umnožak (vidi [18], 68-94).

Poglavlje 4

Pseudoeuklidska ravnina - aktivnosti na dodatnoj nastavi

4.1 Aktivnosti za dodatnu nastavu

Kroz prva dva poglavlja prisjetili smo se euklidske ravnine $\mathbb{R}^2$ te upoznali pseudoeuklidsku ravninu ili Minkowskijevu ravninu $\mathbb{R}^2_1$. Pokazali smo da je pseudoeuklidska ravnina analogon euklidske ravnine s Lorentzovim skalarnim produktom. Učenicima prirodoslovnih matematičkih gimnazija koji imaju dara za matematiku bilo bi zanimljivo prezentirati pseudoeuklidsku ravninu kroz određene aktivnosti na dodatnoj nastavi. Takve tri aktivnosti prikazat ćemo u ovom poglavlju.

Aktivnost 1. Kružnica

Cilj aktivnosti:

Učenici će otkriti analogon kružnice euklidske ravnine u pseudoeuklidskoj ravnini.

Potrebni materijali:

Bilježnica, olovka, tableti ili računala

Detaljan tijek:

Učenicima se prije samostalnog rada objašnjava Lorentzov skalarni produkt i njegova svojstva. Zatim učenici dobiju upute da primjene Lorentzov skalarni produkt pri računanju modula vektora u pseudoeuklidskoj ravnini te da dobiveni rezultat uvrste u definiciju kružnice

(2.10) te da dobiveni rezultat generiraju u programu dinamičke geometrije. Učenicima se postavljaju pitanja:

- Koji su skup dobili kao kružnicu u pseudoeuklidskoj ravnini?
- Što je središte kružnice?
- Što je polumjer kružnice, a što promjer?
- Hoće li za kružnicu u pseudoeuklidskoj ravnini vrijediti ista svojstva kao za kružnicu u euklidskoj ravnini?

Zaključak:

Učenici primjenom Lorentzovog skalarnog produkta u definiciji kružnice dolaze do zaključka da je analogon kružnice euklidske ravnine u pseudoeuklidskoj ravnini zapravo hiperbola euklidske ravnine.

Nakon zaključka da je kružnica pseudoeuklidske ravnine hiperbola euklidske ravnine, učenicima se nameće pitanje ima li više vrsta kružnica. Naime, za prethodnu aktivnost učenicima se trebao objasniti Lorentzov skalarni produkt te pokazati da u pseudoeuklidskoj ravnini imamo 3 vrste vektora. Negativan predznak kod učenika može pobuditi radoznalost kakva onda može biti duljina vektora i kako to utječe na kružnicu i njezin radijus.

Aktivnost 2. Vrste kružnice

Cilj aktivnosti:

Učenici će otkriti da u pseudoeuklidskoj ravnini postoje tri vrste kružnica.

Potrebni materijali:

Bilježnica, olovka, tableti ili računala

Detaljan tijek:

Nakon predstavljanja vremenskih, svjetlosnih i prostornih vektora, učenicima se postavlja pitanje:

- S obzirom na vrstu vektora kojemu računamo duljinu, kakva ona može biti?

Uz malo raspisivanja učenici uviđaju da duljina vektora može biti pozitivan realni ili imaginarni broj ili nula.
Zatim im se postavljaju sljedeća pitanja:

- Koje je vrste polumjer kružnice koju su dobili u prvoj aktivnosti?
- Što predstavlja kružnicu čiji je polumjer svjetlosni vektor?
- Može li biti kružnica radijusa 0?
- Može li kružnica biti pozitivnog imaginarnog radijusa?
- Može li kružnica biti negativnog radijusa?

Svoje rezultate trebaju prikazati u programu dinamičke geometrije.

Zaključak:

Učenici nakon davanja svojih odgovora i međusobne rasprave dolaze do zaključka da u Minkowskijevoj ravnini postoje kružnice pozitivnog realnog radijusa, kružnice radijusa 0 te kružnice pozitivnog imaginarnog radijusa. Kružnica negativnog radijusa nema.

Osim kružnica, učenicima bi bilo zanimljivo prezentirati kut između pravaca i okomite pravce pseudoeuklidske ravnine. Potaknuti ih da uvide da u drugim ravninama nije nužno imati pravi kut da bi pravci bili okomiti.

Aktivnost 3. Kut između okomitih pravaca

Cilj aktivnosti:

Učenici će otkriti da kut između okomitih pravaca pseudoeuklidske ravnine nije $\frac{\pi}{2}$.

Potrebni materijali:

Bilježnica, olovka, tableti ili računala

Detaljan tijek:

Prije samostalnog rada učenika, definira im se kut između prostornih vektora te kut između pozitivnih, odnosno negativnih vremenskih vektora. Također, reče im se definicija okomitih vektora u $\mathbb{R}^2_1$ te im se iskaže propozicija 2.2.2. i 2.2.3. Zadatak za učenike je dokazati dvije iskazane propozicije te predočiti sebi par okomitih vektora. Potom se učenicima postavljaju sljedeća pitanja:

- Mogu li dva svjetlosna vektora međusobno biti ortogonalna?
- Mogu li dva vremenska vektora međusobno biti ortogonalna?
- Mogu li dva prostorna vektora međusobno biti ortogonalna?
- Možemo li mjeriti kut između dva svjetlosna vektora?
- Možemo li dobivene dvije definicije za kut dvaju istovrsnih vektora primijeniti na okomite pravce?
- Kada bi u programu dinamičke geometrije mjerili kut između dva okomita vektora, je li taj kut jedinstvene mjere za sve okomite vektore?

Zaključak:

Učenici kroz prezentiranje svojih odgovora i raspravu zaključuju da ako su dva vektora ortogonalna u pseudoeuklidskoj ravnini, nužno je jedan prostorni, a drugi vremenski vektor. Također, interpretacijom definicije uviđaju da su svjetlosni vektori ortogonalni sami na sebe. Pri mjerenju kuta programom dinamičke geometrije između dva okomita vektora pseudoeuklidske ravnine, uočavaju da ne dobivaju jedinstvenu mjeru kuta. Učenici zaključuju, budući da kut između različitih vrsta vektora uopće nije definiran, mjeru kuta dvaju okomitih vektora ne možemo odrediti.

Na analogan način kao što istražujemo svojstva euklidske ravnine te njezinih podskupova, mogli bismo dalje istraživati svojstva pseudoeuklidske ravnine i njezinih podskupova.

Bibliografija

[1] B. Antunović Piton, A. Bogner Beroš, P. Brkić, M. Karlo, M. Kuliš i T. Rodiger, *MATEMATIKA 7 udžbenik matematike u sedmom razredu osnovne škole sa zadatcima za rješavanje, 1. dio*, Školska knjiga, 2020. (hrvatski).

[2] B. Antunović Piton, A. Bogner Beroš, P. Brkić, M. Kuliš, T. Rodiger i N. Zvelf, *MATEMATIKA 6 udžbenik matematike u šestom razredu osnovne škole sa zadatcima za rješavanje, 2. dio*, Školska knjiga, 2020. (hrvatski).

[3] B. Antunović Piton, M. Kuliš, I. Matić i N. Zvelf, *MATEMATIKA 5 udžbenik matematike u petom razredu osnovne škole sa zadatcima za rješavanje, 2. dio*, Školska knjiga, 2020. (hrvatski).

[4] D. Bakić, Nastavni materijali kolegija *Linearna algebra 1 i 2*, PMF - Matematički odsjek, 2008. (hrvatski).

[5] A. Bonas Mandić, L. Lončar, R. Pešut i M. Križman Roškar, *NINA I TINO 1 udžbenik za prvi razred osnovne škole, 1. dio*, ProfilKlett, 2020. (hrvatski).

[6] ______, *NINA I TINO 2 udžbenik za drugi razred osnovne škole, 1. dio*, ProfilKlett, 2020. (hrvatski).

[7] ______, *NINA I TINO 2 udžbenik za drugi razred osnovne škole, 2. dio*, ProfilKlett, 2020. (hrvatski).

[8] ______, *NINA I TINO 3 udžbenik za treći razred osnovne škole, 1. dio*, ProfilKlett, 2020. (hrvatski).

[9] ______, *NINA I TINO 3 udžbenik za treći razred osnovne škole, 2. dio*, ProfilKlett, 2020. (hrvatski).

[10] R. Capor i Ž. Milin Šipuš, *Geometrija Minkowskog*, Matematičko-fizički list 3 **58** (2008.), br. 231, 161–167 (hrvatski).

[11] G. Gojmerac Dekanić, P. Radanovićć i S. Varošanec, *MATEMATIKA 5 elektronički udžbenik za 5. razred osnovne škole, 1. dio*, Element, 2021. (hrvatski).

[12] ______, *MATEMATIKA 5 elektronički udžbenik za 5. razred osnovne škole, 2. dio*, Element, 2021. (hrvatski).

[13] L. Lončar, R. Pešut, Ž Rossi i M. Križman-Roškar, *NINA I TINO 4 udžbenik za četvrti razred osnovne škole, 1. dio*, ProfilKlett, 2021. (hrvatski).

[14] B. Pavković i D. Veljan, *ELEMENTARNA MATEMATIKA 2*, Školska knjiga, 1995. (hrvatski).

[15] ______, *ELEMENTARNA MATEMATIKA 1*, Školska knjiga, 2004. (hrvatski).

[16] A. Pletikosić, J. Barišin, Lj. Jukić Matić, R. Gortan i Vujasin Ilić V., *MATEMATIKA 1 udžbenik matematike u drugom razredu srednje škole sa zadatcima za rješavanje 5 sati tjedno, 2.dio*, Školska knjiga, 2020. (hrvatski).

[17] A. Pletikosić, J. Barišin, Lj. Jukić Matić, R. Gortan, Vujasin Ilić V. i Ž. Dijanić, *MATEMATIKA 1 udžbenik matematike u drugom razredu srednje škole sa zadatcima za rješavanje 3 i 4 sati tjedno, 2.dio*, Školska knjiga, 2022. (hrvatski).

[18] A. Pletikosić, I. Matić, Lj. Jukić Matić, M. Zelčić, M. Njerš, R. Gortan, T. Srnec i Ž. Dijanić, *MATEMATIKA 3 udžbenik matematike u drugom razredu srednje škole sa zadatcima za rješavanje 5 i 6 sati tjedno, 2.dio*, Školska knjiga, 2020. (hrvatski).

[19] ______, *MATEMATIKA 3 udžbenik matematike u drugom razredu srednje škole sa zadatcima za rješavanje 3 i 4 sati tjedno, 2.dio*, Školska knjiga, 2022. (hrvatski).

[20] J. G. Ratcliffe, *Foundations of Hyperbolic Manifolds*, Springer, 2006.

[21] P. J. Ryan, *EUCLIDEAN AND NONEUCLIDEAN GEOMETRY An analytic approach*, CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS, 1986.

[22] Z. Šikić, A. Copić, M. Ćulav Markičević, Lj. Jeliˇčić, R. Kalazić, S. Lukač i K. J. Penzar, *MATEMATIKA 3 udžbenik za treći razred gimnazije i srednje strukovne škole, 2. svezak*, ProfilKlett, 2020. (hrvatski).

[23] Z. Šikić, V. Draženović Žitko, I. Golac Jakopović, B. Goleš, Z. Lobar, M. Marić, T. Nemeth, G. Stajčić i M. Vuković, *MATEMATIKA 5 udžbenik za peti razred osnovne škole, 1. svezak*, ProfilKlett, 2020. (hrvatski).

[24] ______, *MATEMATIKA 5 udžbenik za peti razred osnovne škole, 2. svezak*, ProfilKlett, 2020. (hrvatski).

[25] ______, *MATEMATIKA 6 udžbenik za šesti razred osnovne škole, 1. svezak*, ProfilKlett, 2020. (hrvatski).

[26] ______, *MATEMATIKA 7 udžbenik za sedmi razred osnovne škole, 1. svezak*, ProfilKlett, 2020. (hrvatski).

[27] Z. Šikić, V. Draženović Žitko, I. Golac Jakopović, Z. Lobar, M. Milić, T. Nemeth, G. Stajčić i M. Vuković, *MATEMATIKA 8 udžbenik za osmi razred osnovne škole, 1. svezak*, ProfilKlett, 2020. (hrvatski).

[28] ______, *MATEMATIKA 8 udžbenik za osmi razred osnovne škole, 2. svezak*, ProfilKlett, 2020. (hrvatski).

[29] Z. Šikić, R. Kalazić, S. Lukač i K. J. Penzar, *MATEMATIKA 1 udžbenik za prvi razred gimnazije i srednje strukovne škole, 2. svezak*, ProfilKlett, 2020. (hrvatski).

[30] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, *KURIKULUM NASTAVNOG PREDMETA MATEMATIKA ZA OSNOVNE ŠKOLE I GIMNAZIJE*, Narodne novine, 2019. (hrvatski).

Sažetak

U ovom diplomskom radu promatramo pseudoeuklidsku ravninu ili Minkowskijevu ravninu. Ona je analogon euklidske ravnine s Lorentzovim skalarnim produktom. Za obje ravnine iznosimo elementarne pojmove, promatramo kružnice i pravce te iskazujemo i dokazujemo Pitagorin poučak i Talesov poučak o kutu nad promjerom kružnice. Za kraj donosimo tri aktivnosti kojima se učenicima srednje škole može približiti pseudoeuklidska ravnina.

Summary

In this thesis, we observe the pseudoeuclidean plane or the Minkowski plane. It is the analogue of the Euclidean plane with the Lorentz scalar product. For both planes, we present elementary notions, observe circles and lines, then state and prove Pythagoras's theorem and Thales's theorem on an inscribed angle spanned by the diameter of a circle. Finally, we present three activities that can help high school pupils get closer to the pseudoeuclidean plane.

Životopis

Rođena sam u Dubrovnik 15.12.1994. godine. Upisujem Osnovnu školu Lapad pa Gimnaziju Dubrovnik, prirodoslovno - matematički smjer koju završavam 2013. godine. Potom, te iste godine upisujem Prirodoslovno - matematički fakultet u Zagrebu, sveučilišni preddiplomski studij - Matematika. Nakon tri godine prebacujem se na sveučilišni preddiplomski studij Matematika;smjer nastavnički koji uspješno završavam 2018. godine. Te iste godine upisujem sveučilišni diplomski studij Matematika; nastavnički smjer.