Statistička analiza utjecaja grupnog rada na usvajanje matematičkih sadržaja

Subotičanec, Iva

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Iva Subotičanec

STATISTIčKA ANALIZA UTJECAJA GRUPNOG RADA NA USVAJANJE MATEMATIčKIH SADRžAJA

Diplomski rad

Voditelji rada:
dr. sc. Ivana Valentić
izv. prof. dr. sc. Nikola Sandrić

Zagreb, rujan, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Ovaj rad posvećujem svojoj baki na nebu.

Najprije se želim zahvaliti mentorici Ivani Valentić. Veliko hvala na svom strpljenju, uloženom trudu, vremenu i brizi. Vi ste primjer mentora kakvog se samo može poželjeti.
Zahvale upućujem i svim profesoricama koje su mi ustupile svoje razrede kako bih mogla provesti svoje istraživanje, posebno hvala profesorici Sanji.
Riječi zahvale dugujem i cijeloj mojoj obitelji, a najviše roditeljima, braći i djedu, koji su uvijek bili tu za mene kad je trebalo.
Također, veliko hvala svim mojim prijateljima i sestričnama. Najviše Ani, koju sam imala sreće upoznati upravo na fakultetu i bez koje bi put od početka do kraja studiranja bio barem sto puta teži.
Za kraj, hvala dragom Bogu na svemu.

Sadržaj

Uvod

Cilj ovog diplomskog rada jest statistički analizirati i odrediti postoji li razlika u razini usvojenosti matematičkog sadržaja kod dvije skupine učenika. Uspoređivati će se dva od tri osnovna oblika rada u nastavi: individualni rad, frontalni rad i grupni rad. U jednoj odgojno - obrazovnoj skupini nastavni sadržaj biti će obrađen metodom frontalne nastave, dok će u drugoj skupini nastavni sadržaj biti obrađen metodom grupnog rada, točnije, provesti će se aktivnost "Slagalica". Svi učenici će dobiti iste pisane provjere znanja, kojima će se utvrditi usvojenost nastavnog sadržaja.

Ovaj diplomski rad sastoji se od četiri poglavlja. U prvom poglavlju biti će objašnjene nastavne metode korištene u svrhu realizacije ovog rada te priloženi neki materijali korišteni u nastavi. U drugom poglavlju biti će definirani svi pojmovi koji će se koristiti u trećem poglavlju prilikom statističke obrade podataka, a u četvrtom poglavlju mogu se vidjeti svi materijali korišteni u svrhu provođenja nastavnih sati.

Poglavlje 1

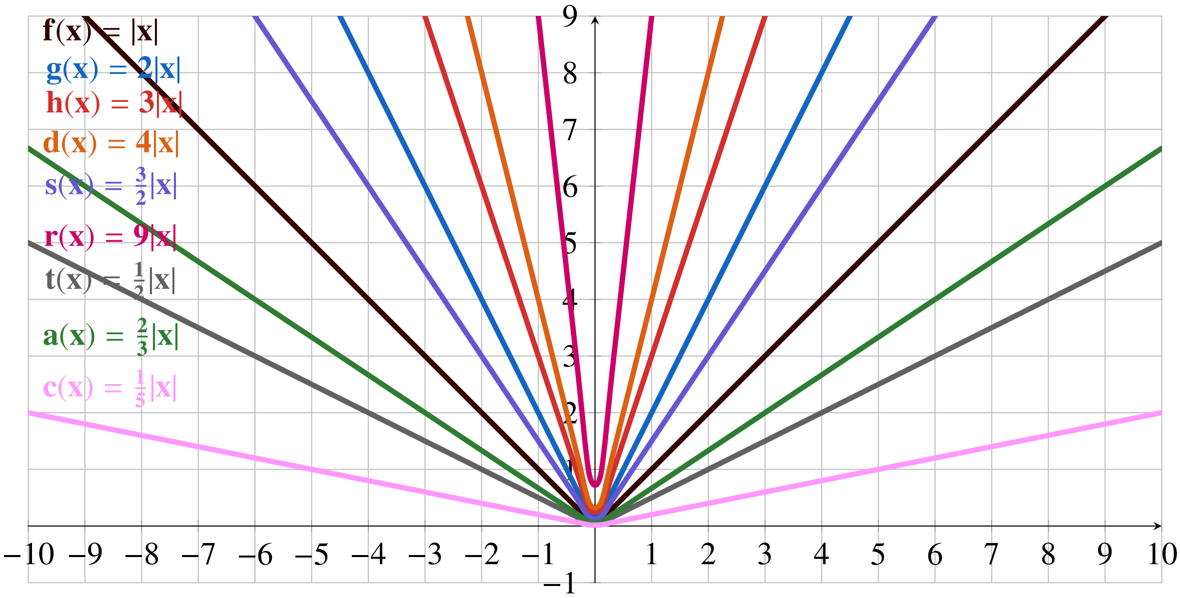
Korištene nastavne metode i materijali

Kao što je već spomenuto, prvi korak provedbe ovog istraživanja je odrada praktičnog dijela istraživanja na način da se odabrani nastavni sadržaj, a to je "Graf funkcije apsolutne vrijednosti" odradi na dva načina, frontalnom nastavom i grupnim radom, koji će u nastavku biti detaljnije objašnjeni. Istraživanje je provedeno na skupini učenika prvog razreda srednje škole. Nastavni materijali korišteni u nastavi napravljeni su u sklopu ovog diplomskog rada. Samo istraživanje provedeno je u XV. gimnaziji u Zagrebu u 4 prva razreda.

1.1 Frontalni rad

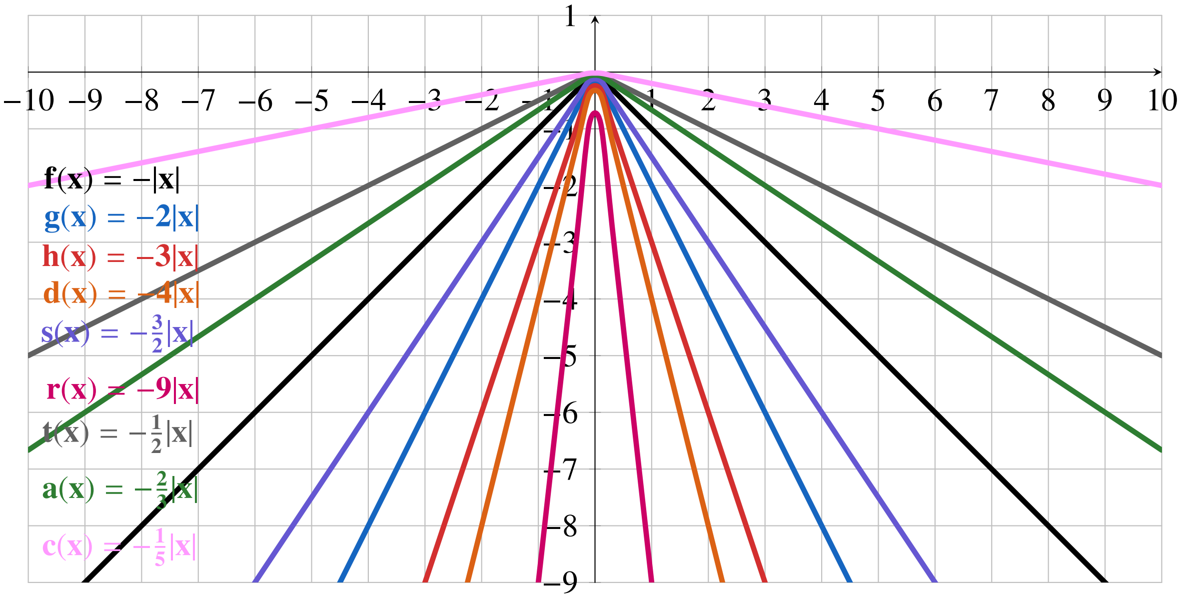
Frontalni rad podrazumijeva izvođenje nastave na način da jedan nastavnik poučava cijelo razredno odjeljenje. (vidi [6]) U ovakvom obliku rada nastavnik je direktini posrednik između učenika i nastavnog sadržaja koji poučava. (vidi [6]) Sam rad u frontalnoj nastavi je baziran na činjenici da se sadržaj formulira i prilagođava prema prosječnom učeniku te je na taj način sadržaj svima prezentiran na jednak način. Odnosno, svi učenici primaju informacije na isti način i istim tempom. (vidi [3]) Općenito, prednost frontalnog rada jest ekonomičnost, tj. mogućnost nastavnika da u dosta kratkom vremenu učenike pouči veliki obujam informacija. Nedostatak ovakvog oblika rada jest to što ovakav oblik rada često prijeđe u tzv. predavačku nastavu koja učenike ne uključuje aktivno u proces učenja, već učenici imaju samo ulogu slušača i promatrača. (vidi [1]) U dva razreda provedena je nastava s fokusom na frontalan rad, to su bili 1.b (5 sati matematike tjedno) i 1.e razred (6 sati matematike tjedno). U 1.b razredu u istraživanju je sudjelovao 21 učenik, dok je u 1.e razredu sudjelovalo 23 učenika. U nastavku slijedi opis i tijek nastavnog sata proveden metodom frontalnog rada.

Svaki učenik dobiva nastavni listić s primjerima koje redom rješava, a nastavnik paralelno s njima, kada su gotovi, prikazuje točna rješenja na prezentaciji te pripremljenom materijalu u GeoGebri. Učenici su na prethodnom satu učili kako izgleda graf fukcije $f(x) = |x|$ pa nastavnik s učenicima to ponavlja na početku nastavnog sata. Učenici zatim sami crtaju graf funkcije $f(x) = -|x|$, a zatim s nastavnikom provjeravaju točnost svog rješenja. Nakon toga, učenici sami crtaju graf funkcije $f(x) = 2|x|$ te točnost svog rješenja kasnije provjeravaju s nastavnikom.



Slika 1.1: Grafovi funkcija oblika $f(x) = \alpha|x|$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$

Nastavnik učenicima prema pripremljenom materijalu u GeoGebri pokazuje grafove funkcija vidljivih sa Slike 1.1 te zajedno komentiraju kako izgledaju ti grafovi u odnosu na graf funkcije $f(x) = |x|$, tj. učenici zaključuju hoće li se graf funkcije $f(x) = \alpha|x|$ nalaziti "iznad" ili "ispod" grafa funkcije u ovisnosti o $\alpha \in \mathbb{R}^+$.



Slika 1.2: Grafovi funkcija oblika $f(x) = \alpha|x|$, $\alpha \in \mathbb{R}^-$

Nadalje, učenici rješavaju primjer gdje trebaju nacrtati graf funkcije $f(x) = -2|x|$. Nakon što su završili, nastavnik im pokazuje točno rješenje te uz pomoć materijala pripremljenog u GeoGebri, prikazanog na Slici 1.2, s učenicima komentira kako će izgledati graf funkcije $f(x) = \alpha|x|$ u odnosu na graf funkcije $f(x) = -|x|$ za $\alpha \in \mathbb{R}^-$.

Učenici povezuju sve primjere koje su vidjeli i generalizacijom dolaze do zaključka koji nadopunjuju na svojim nastavnim listićima, a može se vidjeti u nastavku, gdje su crveno obojene riječi koje učenici trebaju nadopuniti.

ZAKLJUČAK

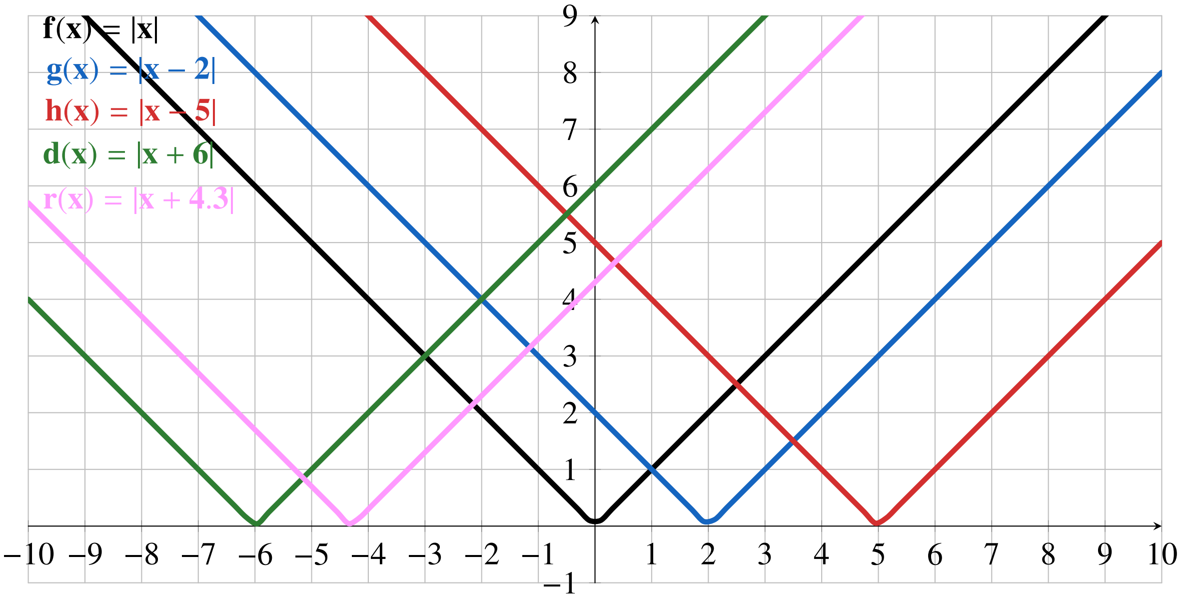
Za funkciju $f(x) = \alpha|x|$ i njezin graf razlikujemo 4 slučaja:

1. $\alpha > 1$
   Graf funkcije $f(x) = \alpha|x|$ nalazi se iznad grafa funkcije $g(x) = |x|$ i s povećanjem α sve je "uži".

2. $0 < \alpha < 1$
   Graf funkcije $f(x) = \alpha|x|$ nalazi se ispod grafa funkcije $g(x) = |x|$ i s povećanjem α sve je "uži".

3. $-1 < \alpha < 0$
   Graf funkcije $f(x) = \alpha|x|$ nalazi se iznad grafa funkcije $g(x) = |x|$ i s povećanjem α sve je "širi".

4. $\alpha < -1$
   Graf funkcije $f(x) = \alpha|x|$ nalazi se ispod grafa funkcije $g(x) = |x|$ i s povećanjem α sve je "širi".



Slika 1.3: Grafovi funkcija oblika $f(x) = |x - c|$, $c \in \mathbb{R}$

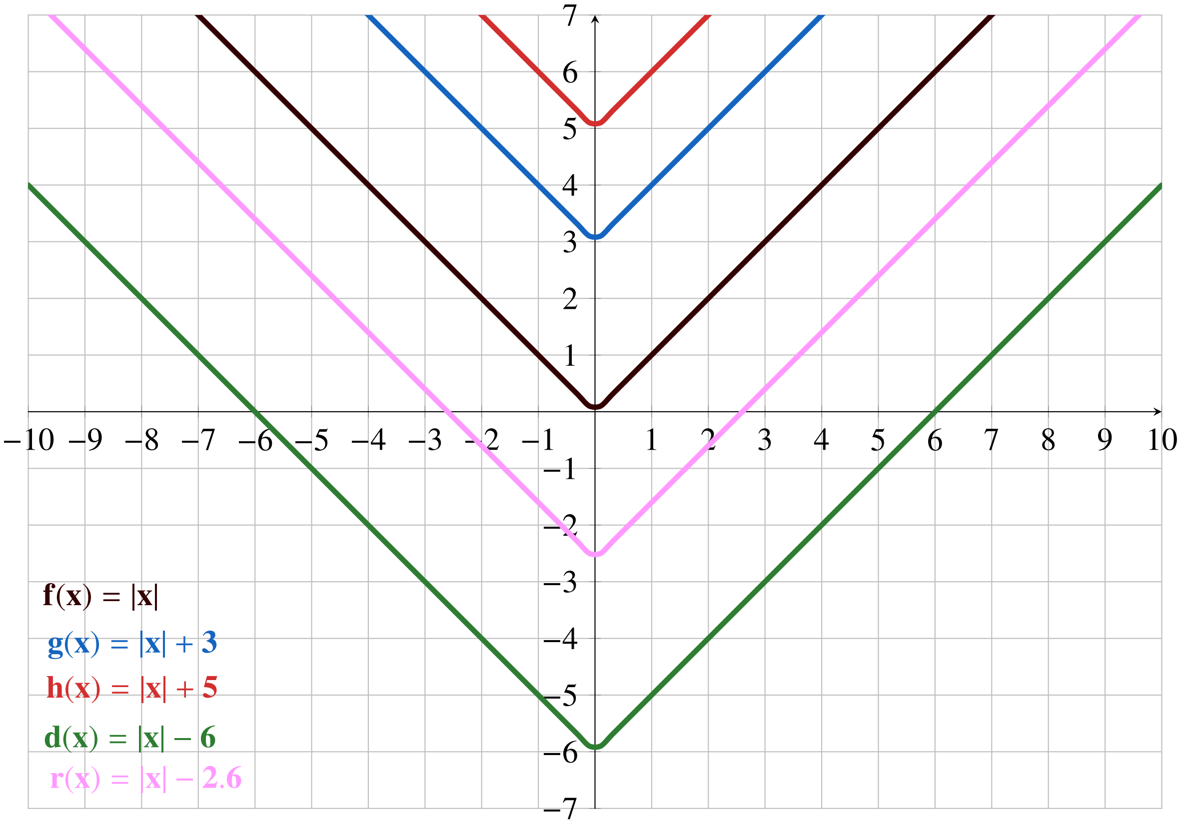
U idućem primjeru učenici trebaju nacrtati graf funkcije $f(x) = |x - 2|$. Nakon što su učenici nacrtali graf zadane funkcije, nastavnik pokazuje točno rješenje te učenicima pokazuje u pripremljenom materijalu u Geogebri još neke funkcije oblika $f(x) = |x-c|$ za $c \in \mathbb{R}$ koje se mogu vidjeti na Slici 1.3. Učenici uočavaju da se grafovi funkcija oblika $f(x) = |x - c|$, $c \in \mathbb{R}$ mogu dobiti translacijom grafa funkcije $f(x) = |x|$ te zapisuju zaključak koji se može vidjeti u nastavku, gdje su crveno označene riječi koje učenici trebaju nadopuniti.

ZAKLJUČAK
Za funkciju $f(x) = |x - c|$ i njezin graf razlikujemo 2 slučaja:

1. $c > 0$
   Graf funkcije $f(x) = |x - c|$ dobijemo tako da graf funkcije $g(x) = |x|$ translatiramo po x - osi za $|c|$ udesno.

2. $c < 0$
   Graf funkcije $f(x) = |x - c|$ dobijemo tako da graf funkcije $g(x) = |x|$ translatiramo po x - osi za $|c|$ ulijevo.

U posljednjem primjeru koji učenici rješavaju potrebno je nacrtati graf funkcije $f(x) = |x|+3$. Nakon što su učenici gotovi, nastavnik im pokazuje prethodno pripremljeni materijal u GeoGebri gdje su prikazane još neke funkcije oblika $f(x) = |x| + b$ za $b \in \mathbb{R}$, vidljivo sa Slike 1.4. Učenici dolaze do zaključka da se grafovi funkcija oblika $f(x) = |x| + b$, $b \in \mathbb{R}$ lako dobiju translacijom grafa funkcije $f(x) = |x|$ te zapisuju zaključak koji se može vidjeti u nastavku.



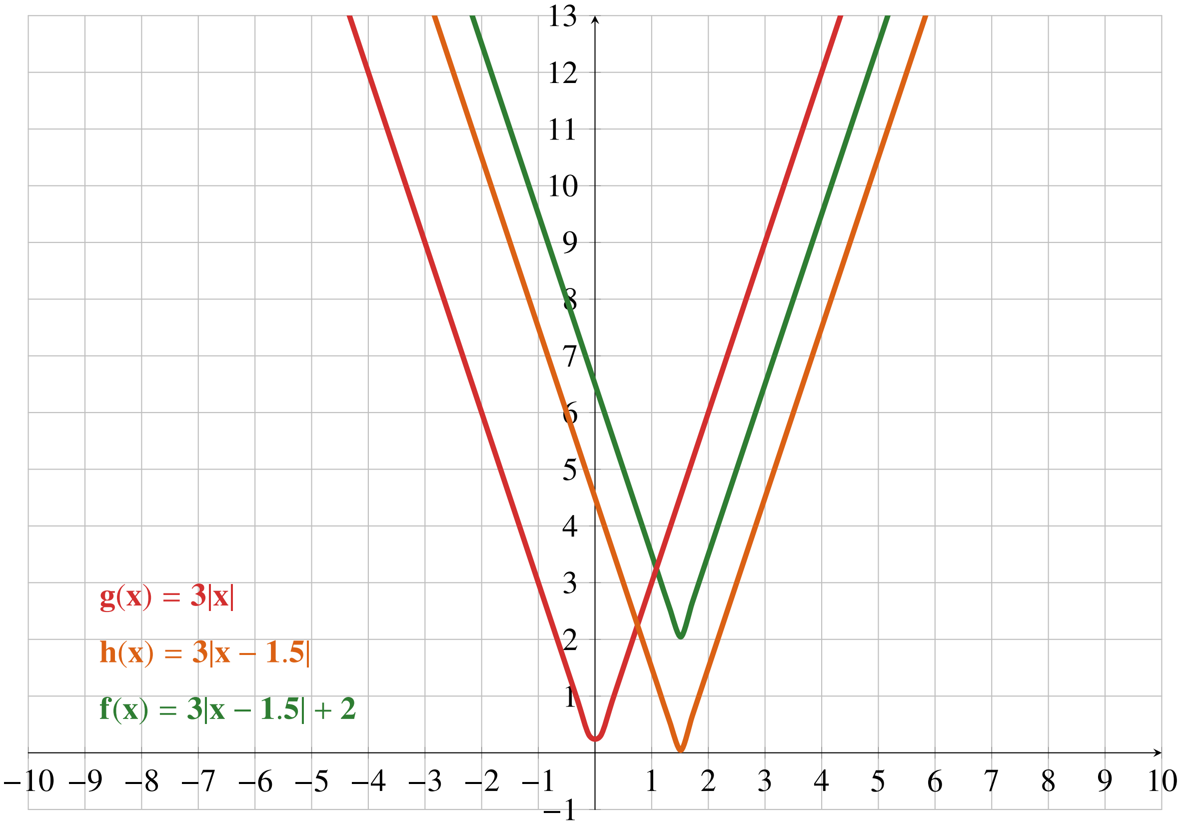
Slika 1.4: Grafovi funkcija oblika $f(x) = |x| + b$, $b \in \mathbb{R}$

ZAKLJUČAK

Za funkciju $f(x) = |x| + b$ i njezin graf razlikujemo 2 slučaja:

1. $b > 0$
   Graf funkcije $f(x) = |x| + b$ dobijemo tako da graf funkcije $g(x) = |x|$ translatiramo po y - osi za $|b|$ prema gore.

2. $b < 0$
   Graf funkcije $f(x) = |x| + b$ dobijemo tako da graf funkcije $g(x) = |x|$ translatiramo po y - osi za $|b|$ prema dolje.



Slika 1.5: Graf funkcije $f(x) = 3|x - 1.5| + 2$ (zeleno)

Učenici zatim rješavaju primjer gdje trebaju primijeniti zaključke do kojih su prethodno došli, dakle, poanta je da učenici uz pomoć pomaka nacrtaju traženi graf funkcije. Potrebno je nacrati graf funkcije $f(x) = 3|x-1.5|+2$, a rješenje se može vidjeti na Slici 1.5. Za kraj, učenici samostalno rješavaju zadatak u nastavku.

Zadatak 1. Nacrtaj grafove funkcija:

- $f(x) = |x + 4| + 3$
- $f(x) = 2|x - 3| + 2.5$
- $f(x) = 4| - x - 1| - 1$
- $f(x) = -3|x - 4| - 2$

Svi materijali korišteni mogu se pronaći u poglavlju "Dodaci" na strani 33.

Na kraju oba sata provedena na ovaj način imala sam dojam da su učenici savladali gradivo koje su trebali. Naravno, kada se nastava provodi na ovakav način, većinom u dijalogu sudjeluju isti učenici pa nastavnik može dobiti dojam da su svi učenici savladali gradivo, a možda ipak nisu jer je komunikacija tekla samo s jednim dijelom učenika. Isto tako, valja napomenuti kako je jedan nastavni sat bio dovoljan za obradu odabranog gradiva ovom metodom, također valja napomenuti kako je tijekom sata korištena metoda dijaloga kako bi učenici ipak sami došli do nekih zaključaka umjesto da im sve bude "servirano". Smatram da je ovakav sat dobro prošao upravo zbog korištene metode dijaloga i alata poput Geogebre koji učenicima pomažu prilikom učenja. Također, prednost održavanja ovakve vrste sata jest manja vremenska zahtjevnost za pripremu nastavnih materijala budući da svi učenici dobivaju iste materijale.

1.2 Grupni rad

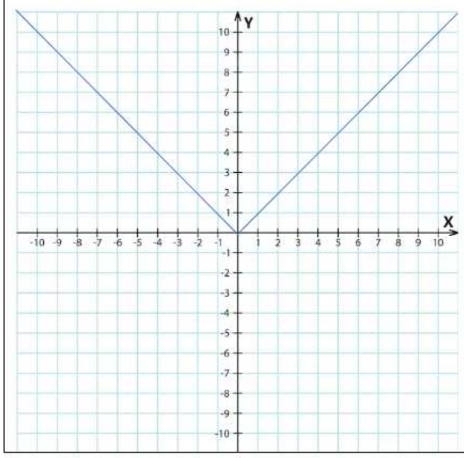
Grupni rad definira se kao rad u sklopu kojeg se veće grupe poput razreda, dijele u manje grupe koje mogu biti stalne ili povremene. Unutar formiranih grupa se odvija proces učenja na način da članovi grupa sudjeluju u učenju kroz rješavanje zadataka koji su zadani u okvirima zadanog nastavnog sadržaja. (vidi [5]) Ovakav način rada uključuje učenike u sami proces učenja i oni postaju aktivni sudionici, za razliku od frontalne metode rada, gdje su učenici uglavnom pasivni. "Nedostaci se javljaju kad pojedinci ometaju aktivnost grupe, kad unutar grupe dolazi do sukoba i neslaganja, te ako se cijela grupa ne drži zadane teme nego se počne baviti nekim drugim aktivnostima. Češćim nastavničkim obilaženje grupa mogu se ovi problemi izbjeći, ali i pomoći grupi da ih riješi na produktivan način." (vidi [1])
U dva razreda provedena je nastava s fokusom na grupni rad učenika, to su bili 1.f(5 sati matematike tjedno) i 1.g razred(5 sati matematike tjedno). U 1.f razredu u istraživanju je sudjelovalo je 17 učenika, dok je u 1.g razredu sudjelovalo 18 učenika.
Aktivnost "slagalica" jest aktivnost koja podrazumijeva rad učenika u skupinama, a odvija se u tri faze. Prva faza jest takva da su učenici najprije podijeljeni u skupine, u ovom slučaju imati ćemo 4 skupine, svaka skupina dobiva svoj zadatak koji samostalno rješava. Svaka skupina ima bitno različite zadatke, koji zajedno čine cjelinu, odnosno jednu nastavnu temu. "Kada su svi dijelovi zadatka riješeni, moguće je spojiti dijelove u "slagalicu"." (vidi [4]) Nastavnik ima ulogu promatrača i učenicima samo daje upute te im pomaže ako im nešto nije jasno, ali im ne daje točne odgovore niti rješenja zadataka. Poanta ove aktivnosti je da učenici, uz pomoć prethodno pripremljenih materijala od strane nastavnika, suradnički u skupinama dođu do potrebnih zaključaka. Nakon što učenici završe svoj prvi zadatak, slijedi druga faza, učenici se razmještaju u nove skupine. Npr. ako je u originalnim skupinama bilo po 6 učenika, sada ćemo imati 6 novih skupina koje se formiraju tako da svaki od učenika u originalnim skupinama dobije broj, npr. 1,2,...,6 te se razmještaju u grupe tako da jednu grupu čine svi učenici kojima je dodijeljen broj 1, drugu grupu čine učenici kojima je dodijeljen broj 2, itd. Bitno je da se u novim skupinama nalazi barem po jedan učenik iz svake originalne skupine. Učenici sada dobivaju novi zadatak, koji je zapravo takav da svatko od učenika treba svojoj novoj skupini predstaviti rezultate i zaključke do kojih su došli radeći u svojoj originalnoj skupini. Cilj je da svaki učenik na kraju ove faze ima sve zaključke iz svih originalnih skupina. Nakon toga, slijedi treća faza, povratak učenika u originalne skupine, provjera i usklađivanje zaključaka te eventualno rješavanje problema te primjena zaključaka do kojih su prethodno došli.
U nastavku se može vidjeti primjer nastavnog listića za jednu skupinu učenika (GRUPA A), a u poglavlju "Dodaci" na strani 46 mogu se vidjeti primjeri nastavnih listića svih skupina.

****PRVA FAZA****

Zadatak 1. Nacrtaj graf zadane funkcije. U svim zadacima nacrtan je i graf funkcije $g(x) = |x|$.

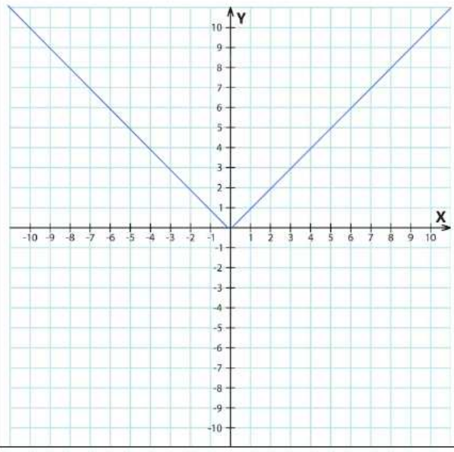
A1) $f(x) = 2|x|$

$f(x) = \begin{cases} & , \\ & , \end{cases}$



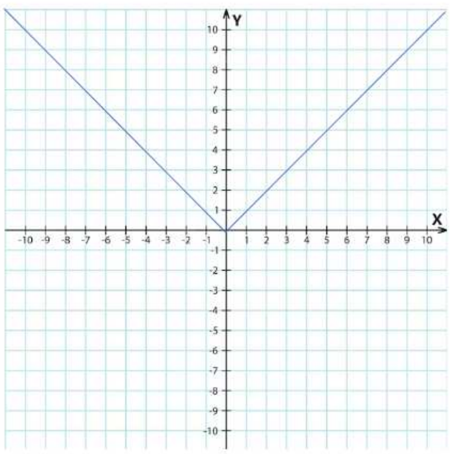
A2) $f(x) = 3|x|$

$f(x) = \begin{cases} & , \\ & , \end{cases}$



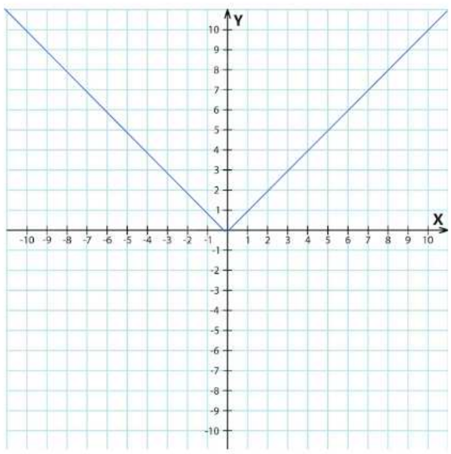
B1) $f(x) = \frac{1}{2}|x|$

$f(x) = \begin{cases} & , \\ & , \end{cases}$



B2) $f(x) = \frac{2}{3}|x|$

$f(x) = \begin{cases} & , \\ & , \end{cases}$



Zadatak 2. Što uočavate, kakav je α u svim primjerima za $f(x) = \alpha|x|$?

Kakvi su α u A1 i A2, a kakvi u B1 i B2?

Zadatak 3. Kakvi su ti grafovi u odnosu na graf funkcije $g(x) = |x|$ za svaki od slučajeva?

ZAKLJUČAK
Za funkciju $f(x) = \alpha|x|$, gdje je $\alpha > 0$ i njezin graf razlikujemo .... slučaja:

1. $\alpha >$ ....
   Graf funkcije $f(x) = \alpha|x|$ nalazi se .... grafa funkcije $g(x) = |x|$ i s .... α sve je "uži".

2. .... $< \alpha <$ ....
   Graf funkcije $f(x) = \alpha|x|$ nalazi se .... grafa funkcije $g(x) = |x|$ i s .... α sve je "uži".

****DRUGA FAZA****

ZAKLJUČCI
Za funkciju $f(x) = \alpha|x|$ i njezin graf razlikujemo 4 slučaja:

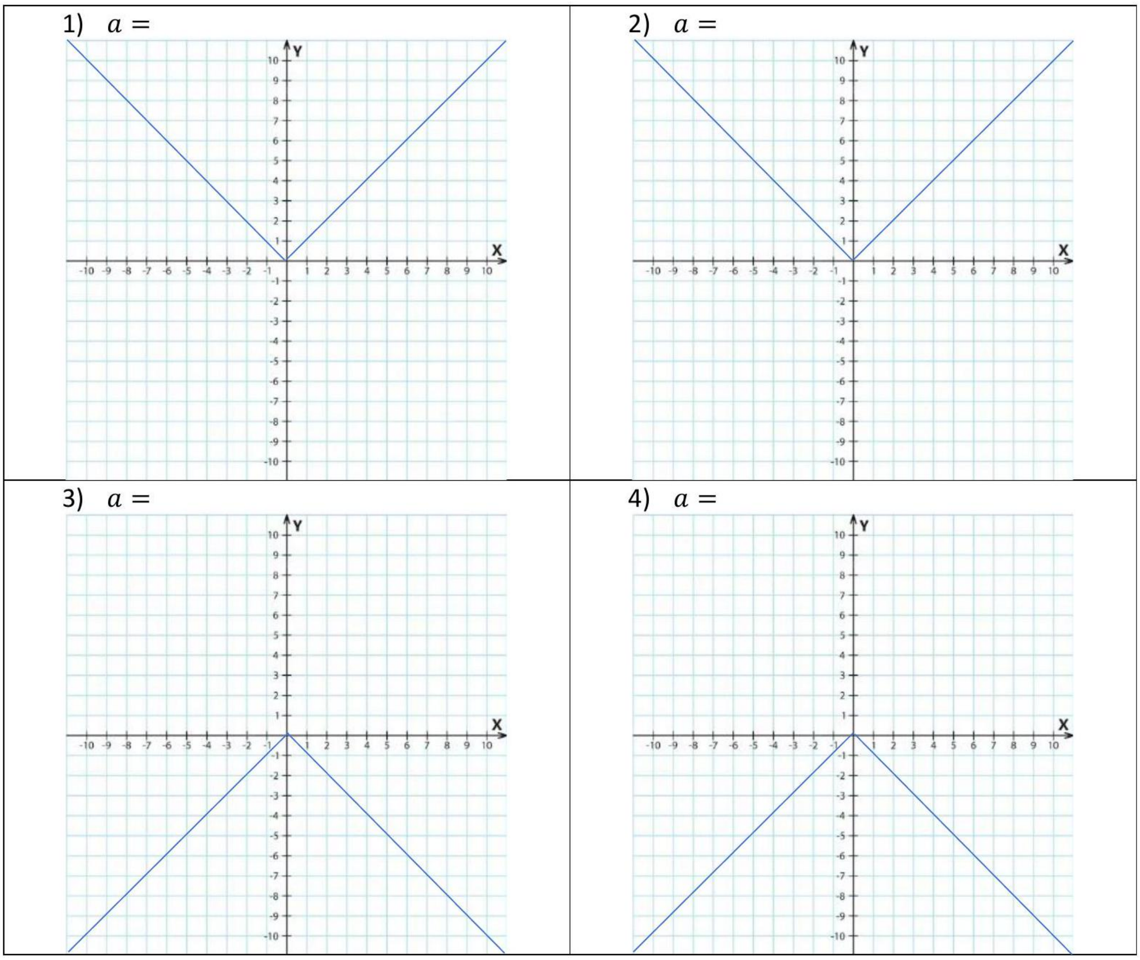
1. $\alpha > 1$
   Graf funkcije $f(x) = \alpha|x|$ nalazi se ...... grafa funkcije $g(x) = |x|$ i s ...... α sve je "uži".

2. $0 < \alpha < 1$
   Graf funkcije $f(x) = \alpha|x|$ nalazi se ...... grafa funkcije $g(x) = |x|$ i s ...... α sve je "uži".

3. $-1 < \alpha < 0$
   Graf funkcije $f(x) = \alpha|x|$ nalazi se ...... grafa funkcije $g(x) = |x|$ i s ...... α sve je "širi".

4. $\alpha < -1$
   Graf funkcije $f(x) = \alpha|x|$ nalazi se ...... grafa funkcije $g(x) = |x|$ i s ...... α sve je "širi".

Za svaki od ova 4 slučaja odaberi proizvoljan α i nacrtaj graf funkcije $f(x) = \alpha|x|$.



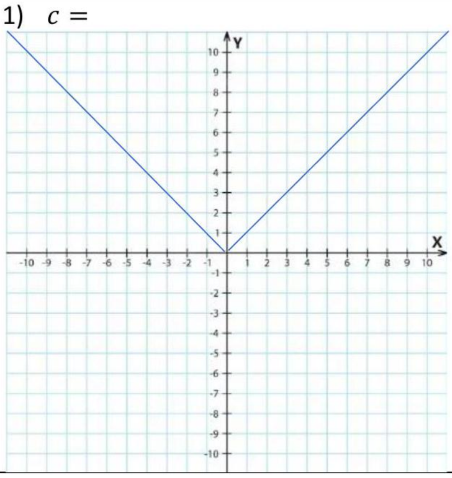
Za funkciju $f(x) = |x - c|$ i njezin graf razlikujemo 2 slučaja:

1. $c > 0$
   Graf funkcije $f(x) = |x - c|$ dobijemo tako da graf funkcije $g(x) = |x|$ translatiramo po ...... za $|c|$ ....

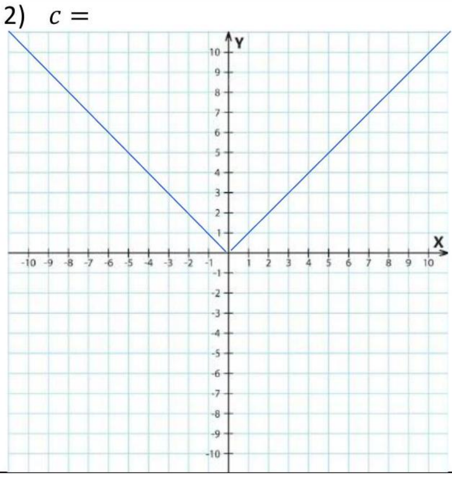
2. $c < 0$
   Graf funkcije $f(x) = |x - c|$ dobijemo tako da graf funkcije $g(x) = |x|$ translatiramo po ...... za $|c|$ ....

Za svaki od ova 2 slučaja odaberi proizvoljan c i nacrtaj graf funkcije $f(x) = |x-c|$.

1) $c =$



2) $c =$



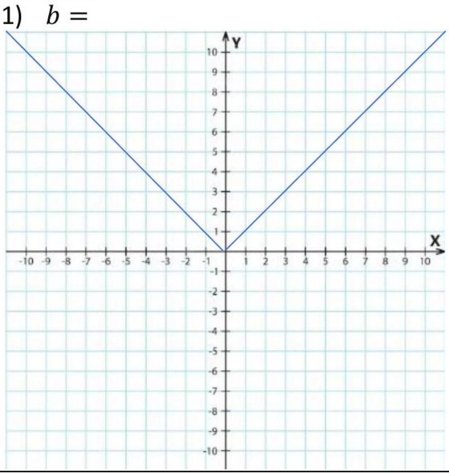
Za funkciju $f(x) = |x| + b$ i njezin graf razlikujemo 2 slučaja:

1. $b > 0$
   Graf funkcije $f(x) = |x - c|$ dobijemo tako da graf funkcije $g(x) = |x|$ translatiramo po ...... za $|b|$ prema ....

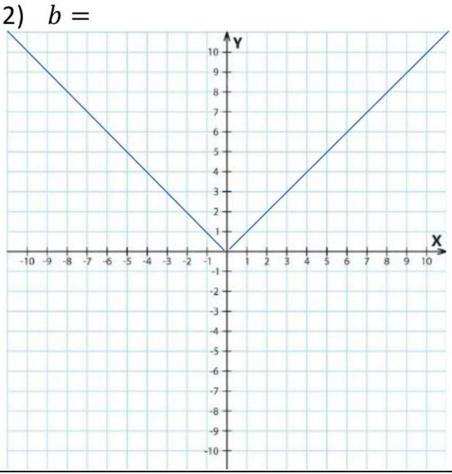
2. $b < 0$
   Graf funkcije $f(x) = |x - c|$ dobijemo tako da graf funkcije $g(x) = |x|$ translatiramo po ...... za $|b|$ prema ....

Za svaki od ova 2 slučaja odaberi proizvoljan b i nacrtaj graf funkcije $f(x) = |x|+b$.

1) $b =$

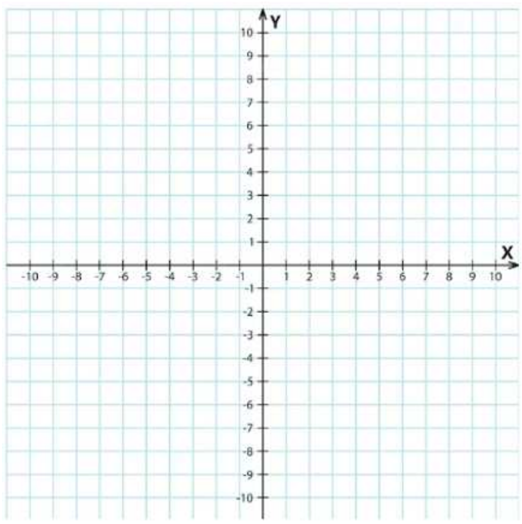


2) $b =$



****TREĆA FAZA****

Zadatak 4. Nacrtaj graf funkcije $f(x) = 3|x - 5| + 2$.



Zadatak 5. Nacrtaj grafove funkcija:

1. $f(x) = |x + 4| + 3$
2. $f(x) = 2|x - 3| + 2.5$
3. $f(x) = 4| - x - 1| - 1$
4. $f(x) = -3|x - 4| - 2$

Rekla bih da su i ovi sati dobro prošli jer su učenici došli do zaključaka do kojih su i trebali doći. Ovdje valja napomenuti da su za neometanu provedbu ovako zamišljene aktivnosti bila potrebna dva školska sata. Prisjetimo se da je za provedbu sata metodom frontalnog rada bio potreban samo jedan školski sat. Također, dobro je spomenuti kako su za uspješnost ove aktivnosti važne upute koje se daju učenicima. Te upute trebaju biti što preciznije, kako bi učenici znali što se od njih očekuje, ali ne i previše opširne kako ne bi previše sugerirale rješenja učenicima. Kao prednost ovakve provedbe nastavnog sata izdvojila bih angažiranost učenika i međusobno surađivanje. Kao nedostatak bih navela vremensko trajanje, ne samo same provedbe, već i pripreme za nastavne sate gdje se provodi ova aktivnost.

1.3 Pisana provjera znanja

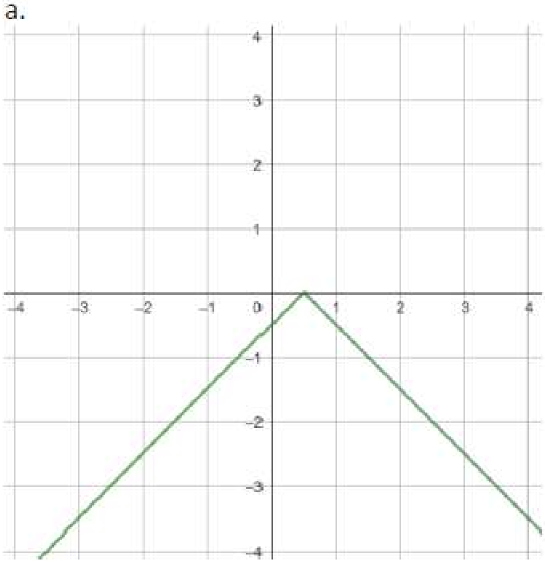
Pisana provjera znanja

Pisana provjera znanja sastojala se od 15 zadataka, gdje se svaki bodovao jednim bodom, tako dolazimo do maksimalnog broja bodova koji učenici mogu ostvariti, a to je 15. Od ukupno 15 zadataka, njih 7 bilo je zadano kao zadatak višestrukog odabira gdje je bila zadana funkcija apsolutne vrijednosti, a učenici su trebali odabrati slovo ispred grafa koji prikazuje zadanu funkciju. Ostatak zadataka, dakle njih 8, bilo je zadano također kao zadatak višestrukog izbora, no ovdje je bio zadan grafički prikaz funkcije apsolutne vrijednosti, a učenici su trebali odabrati slovo ispred pravila pridruživanja funkcije kojoj odgovara zadani graf. U nastavku se mogu vidjeti primjeri oba tipa zadataka. U poglavlju "Dodaci" na strani 58 može se vidjeti cijela pisana provjera znanja. Učenici su pisanu provjeru znanja rješavali nastavni sat koji je uslijedio odmah nakon same obrade nastavnog sadržaja. Svi sudionici ovog istraživanja su oni učenici koji su bili na satu/satovima gdje se obrađivao odabrani nastavni sadržaj. Dakle, ako nisu bili u školi na dan obrade, nisu niti rješavali pisanu provjeru znanja. Svi učenici su za rješavanje imali 20 minuta, a samo sudjelovanje u cjelokupnom istraživanju bilo je anonimno.

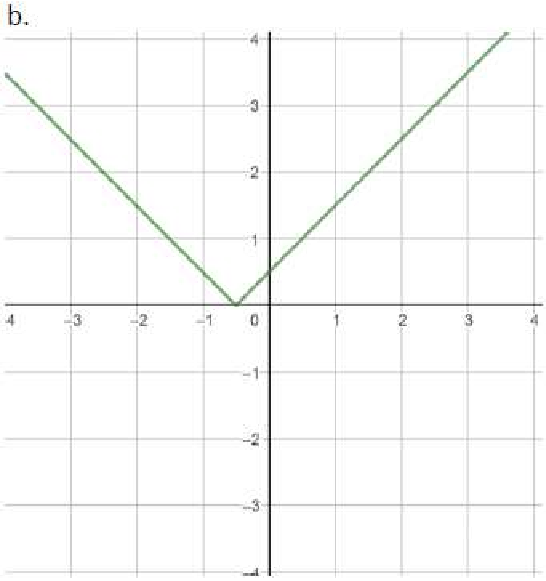
Zadatak 1. Zaokruži slovo ispred grafa zadane funkcije:

1) $f(x) = |-x - 0.5|$

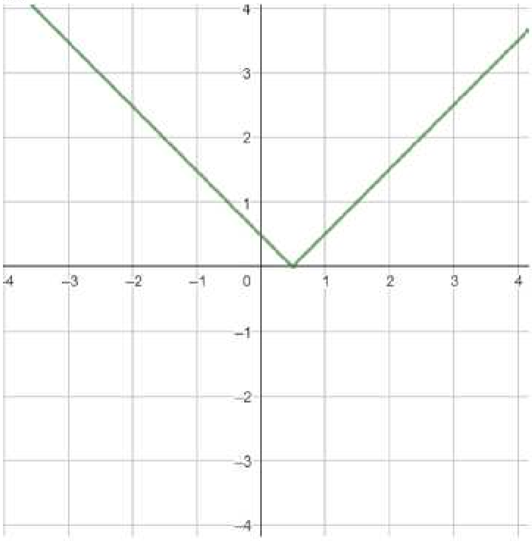
a.



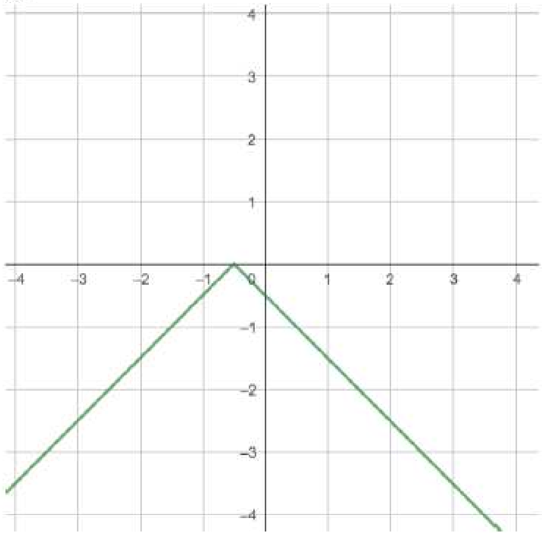
b.



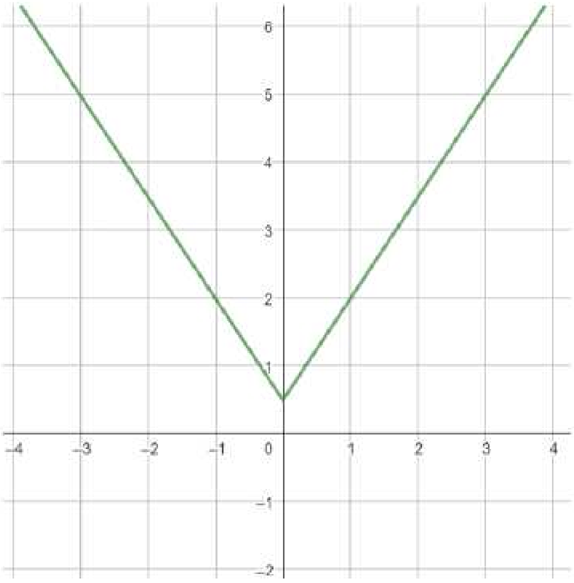
c.



d.



Zadatak 2. Zaokruži slovo ispred funkcije čiji je graf prikazan na slici.



a) $f(x) = 2|x| + \frac{1}{2}$

b) $f(x) = \frac{4}{3}|x| - \frac{1}{2}$

c) $f(x) = \frac{3}{2}|x| + \frac{1}{2}$

d) $f(x) = 4|x| - \frac{1}{2}$

Samovrednovanje učenika

Svi su učenici na na kraju sata obrade nastavnog sadržaja dobili anketu za samovrednovanje koja se može vidjeti u nastavku. Učenici su trebali procijeniti sebe i zaokružiti broj, od 1 do 10, koji predstavlja usvojenost nastavnog sadržaja obrađenog na tom satu, te ocjenu, od 1 do 5, koju smatraju da bi dobili kada bi pisali test samo iz tog gradiva. Budući da ova dva pitanja ispituju istu stvar, procjenu usvojenosti nastavnih sadržaja, prilikom testiranja rezultata samovrednovanja koristit ćemo rezultate odgovora na prvo pitanje, zbog veće skale (1-10).

Samoprocjena

Što misliš u kojoj mjeri si savladao/savladala današnje gradivo? Zaokruži broj na skali od 1 do 10.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Kada bi rješavao/rješavala test vezan samo uz graf funkcije apsolutne vrijednosti, što misliš koju bi ocjenu dobio/dobila?

1 2 3 4 5

Poglavlje 2

Osnovni pojmovi vjerojatnosti i statistike

Kako bismo mogli analizirati dobivene podatke o uspješnosti učenika, najprije je potrebno uvesti neke pojmove iz područja vjerojatnosti i statistike, koje ćemo koristiti u razradi.

2.1 Vjerojatnosni prostor

Definicija 2.1.1. *Neka je Ω neprazan skup. Familija podskupova $\mathcal{F}$ od Ω zove se **σ-algebra** (ili σ-algebra događaja), ako vrijede sljedeća tri svojstva:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$*;*
2. *Ako je $A \in \mathcal{F}$, onda je i $A^c \in \mathcal{F}$ (zatvorenost na komplement);*
3. *Ako su $A_j \in \mathcal{F}$, $j \in \mathbb{N}$, onda je i $\bigcup_{j=1}^{\infty} \in \mathcal{F}$ (zatvorenost na prebrojive unije).*

*Uređen par $(\Omega, \mathcal{F})$ zove se **izmjeriv prostor**.*

Definicija 2.1.2. *Neka je Ω neprazan skup i $\mathcal{F}$ σ-algebra događaja. **Vjerojatnost** na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ je funkcija $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, 1]$ koja zadovoljava sljedeća tri svojstva:*

1. *(nenegativnost) Za sve $A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A) \geq 0$;*
2. *(normiranost) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;*
3. *(σ-aditivnost) Za svaki niz $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ po parovima disjunktinih događaja $A_j \in \mathcal{F}(A_i \cap A_j = \emptyset$ za $i \neq j)$ vrijedi*
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_j).$$

Uređena trojka $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *zove se* ***vjerojatnosni prostor****.*

Definicija 2.1.3. *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor.* ***Slučajna varijabla*** *na* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *je svaka funkcija* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *takva da vrijedi*

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}, x \in \mathbb{R}.$$

Definicija 2.1.4. ***Funkcija distribucije*** *slučajne varijable* X *je funckija* $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ *definirana formulom*

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x), x \in \mathbb{R}.$$

Definicija 2.1.5. *Slučajna varijabla* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *je* ***apsolutno neprekidna*** *ako postoji* $f : \mathbb{R} \to [0, \infty\rangle$ *takva da za sve* $x \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Funkcija f *se zove* ***funkcija gustoće*** *od* X*.*

Definicija 2.1.6. *Neka je* X *apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće* f*. Ako je* $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x)dx < \infty$*, onda postoji* ***matematičko očekivanje*** *od* X *koje definiramo sa*

$$\mathbb{E}(X) := \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx.$$

Definicija 2.1.7. *Neka je* X *slučajna varijabla s funkcijom gustoće* f *i očekivanjem* $\mathbb{E}(X)$*.* ***Varijanca*** *od* X *definira se kao*

$$Var(X) := \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}(X))^2\right].$$

Standardna devijacija *od* X *je definirana kao* $\sigma(X) := \sqrt{Var(X)}$*.*

Teorem 2.1.8. *Neka je* X *apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće* f_X *i neka je* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *neka funkcija (koja zadovoljava određena svojstva, npr.* g *ima najviše prebrojivo mnogo prekida). Definirajmo* $Y := g \circ X = g(X)$*. Ako* $\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| f_X(x)dx < \infty$*, onda* Y *ima matematičko očekivanje i vrijedi*

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx.$$

Dokaz. Dokaz provodimo za slučaj kada je g strogo rastuća i diferencijabilna funkcija. Tada je

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \leq M, y \geq M \\ f_X(g^{-1}(y))(g^{-1})'(y), & m < y < M, \end{cases}$$

gdje je f_Y funkcija gustoće od Y, $m = inf_{x\in X(\Omega)} g(x)$ i $M = sup_{x\in X(\Omega)} g(x)$. Dakle,

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)dy = \int_m^M y f_X(g^{-1}(y))(g^{-1})'(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x)dx.$$

$\square$

Napomena 2.1.9. *Neka su X i Y dvije slučajne varijable. Tada vrijedi*

1. $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$,
2. $\mathbb{E}(\alpha X) = \alpha\mathbb{E}(X)$,
3. $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$
   (ovo svojstvo vrijedi kada su X i Y nezavisne slučajne varijable),
4. $Var(\alpha X) = \alpha^2 Var(X)$.

Dokaz za Svojstvo 1 vidi u [7, str. 77], dokaz za Svojstvo 2 vidi u [7, str. 78], a dokaz za Svojstvo 4 vidi u [7, str. 83].

2.2 Normalna slučajna varijabla

Primjer 2.2.1. *Neka je*

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in \mathbb{R}.$$

Pokažimo da je ϕ funkcija gustoće neke slučajne varijable. Definirajmo:

$$I := \int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Tada imamo

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds\right)\left(\int_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt\right) = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\frac{s^2+t^t}{2}} dsdt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} rdrd\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} rdr \\ &= \frac{\pi}{2}\int_o^{\infty} e^{-t} dt = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Dakle, $I = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Konačno,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt = \frac{2I}{\sqrt{2\pi}} = 1.$$

Slučajna varijabla X s funkcijom gustoće ϕ zove se ***standardna normalna slučajna varijabla****. Oznaka je $X \sim N(0,1)$. Pripadnu funkciju distribucije označavamo s Φ. Nadalje, neka su $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma^2 > 0$ te neka je*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

Budući da vrijedi (zamjena varijabli $t = \frac{x-\mu}{\omega}$),

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt = 1,$$

f je funkcija gustoće neke slučajne varijable. Pripadna slučajna varijabla X zove se ***normalna slučajna varijabla s parametrima** μ **i** σ^2*. Oznaka je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.*

Primjer 2.2.2. *Neka je $X \sim N(0,1)$ i neka su $\mu, \sigma \in \mathbb{R}, \sigma \neq 0$. Definirajmo $g(x) := \sigma x + \mu$. Tada je $Y := g(X)$ dobro definirana slučajna varijabla i pripadna funckija gustoće je*

$$f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Dakle, $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Primjer 2.2.3. *Neka je $X \sim N(0,1)$. Tada je*

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.$$

Primjer 2.2.4. *Neka je $Y \sim N(\mu, \sigma^2)$. Pokažimo da je $\mathbb{E}(Y) = \mu$. Neka je $X \sim N(0,1)$. Budući da je $\sigma X + \mu \sim N(\mu, \sigma^2)$, po Teoremu 2.1.8 zaključujemo da je*

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\sigma x + \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma x + \mu) e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \mu.$$

$$Var(Y) = \sigma^2.$$

Lema 2.2.5. *Neka su $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ i $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ nezavisne slučajne varijable, tada je*

- $\frac{X-a}{b} \sim N(\frac{\mu_1 - a}{b}, \frac{\sigma_1^2}{b^2})$,
- $X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2.)$

2.3 Uzorak, slučajni uzorak, statistika

Naravno da ovo ispitivanje nije bilo moguće provesti na cijeloj populaciji učenika prvog razreda srednje škole pa je za ovo ispitivanje odabran neki manji dio populacije. Naša je pretpostavka da postoji neka distibucija slučajne varijable X te da su rezultati koje smo mi dobili ispitivanjem odabranih učenika jedna realizacija **slučajnog uzorka** koji se sastoji od n nezavisnih slučajnih varijabli $X_1, X_2, ..., X_n$ koje sve imaju istu distribuciju kao X. Takav niz naziva se nizom nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Jedna realizacija slučajnog uzorka naziva se **uzorak**.

Definicija 2.3.1. ***Statistika*** *je slučajna varijabla dobivena djelovanjem funkcije* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *na slučajni uzorak, tj.* $f(X_1, X_2, ..., X_n)$.

Teorem 2.3.2. *(Centralni granični teorem) Neka je* $X_1, X_2, ..., X_n$ *slučajni uzorak s konačnim očekivanjem* $\mathbb{E}(X_1) = \mu$ *i varijancom* $Var(X_1) = \sigma^2$. *Tada je statistika* $\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n}$ *asimptotski normalna, odnosno konvergira po distribuciji prema standardnoj normalnoj slučajnoj varijabli. U oznaci*

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma}\sqrt{n} \sim AN(0, 1).$$

Definicija 2.3.3. *Neka je* T *statistika i* $p \in \mathbb{R}$ *neki parametar.* X *se naziva* ***nepristrani procjenitelj*** *za parametar* p *ako je očekivana vrijednost promatrane slučajne varijable upravo* p, *tj.* $\mathbb{E}(T) = p$.

Primjer 2.3.4. *Neka je* $X_1, X_2, ..., X_n$ *slučajni uzorak iz populacije s konačnim očekivanjem* μ *i varijancom* σ^2. *Tada je*

- *aritmetička sredina* $\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$ *nepristrani procjenitelj za* μ,
- *Uzoračka varijanca* $S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$ *nepristrani procjenitelj za* σ^2.

Dokaz navedenih tvrdnji u Primjeru 2.3.4 može se pronaći u [8, str. 28]

2.4 T-test

Rezultate dobivene testiranjem učenika želimo statistički obraditi. Za to ćemo iskoristiti tzv. t-test, tj. njegovu verziju koja se koristi kada populaciju dijelimo na dvije skupine, npr. muške i ženske ispitanike, u ovom slučaju na učenike koji su učili jednom metodom i učenike koji su učili drugom metodom.

Krenimo od početka, svaki statistički test započinje postavljanjem pretpostavke (ili hipoteze), a cilj statističkog testa je provjeriti točnost postavljene hipoteze. Ova vrsta statističkog testa provodi se u nekoliko koraka. Prvi je korak definirati slučajnu varijablu i odrediti iz koje distribucije ona dolazi. Drugi je korak određivanje hipoteza. Imamo dvije hipoteze, **nul-hipoteza** u oznaci H_0 i **alternativnu hipotezu** u oznaci H_1. Hipoteza koju želimo pokazati jest upravo alternativna hipoteza, dok je nul-hipoteza tvrdnja koja vrijedi ukoliko ne vidimo neke dokaze za suprotno. U ovom slučaju nul-hipoteza će biti: "Nema razlike u očekivanim vrijednostima rezultata pisanih provjera znanja u promatranim skupinama", dok će alternativna hipoteza biti: "Postoji razlika u očekivanim vrijednostima rezultata pisanih provjera znanja". Testiranjem ovakve hipoteze provodimo tzv. dvostrani t-test, gdje nas zanima samo postoji li razlika u rezultatima istraživanja, ali nas ne zanima je li jedna od skupina po rezultataima bolja od druge.

Kako bismo odredili hoćemo li odbaciti nul-hipotezu ili ne, potrebno je odrediti tzv. **p-vrijednost**. "P-vrijednost jest vjerojatnost opažanja podataka kakvi su na promatranom uzorku ili nekih još ekstremnijih, kada je nul-hipoteza istinita." (vidi [2]) U ovom primjeru, kada promatramo razliku u srednjim vrijednostima rezultata pisane provjere znanja kod dvije skupine učenika, želimo znati koja je vjerojatnost da ćemo dobiti takvu (ili još ekstremniju razliku) kad ne bi bilo stvarne razlike između te dvije skupine. Sada se pitamo koliko mala mora biti p-vrijednost kako bismo mogli odbaciti nul-hipotezu u korist alternativne hipoteze. Ovdje nema univerzalnog odgovora, što je p-vrijednost manja to znači da s većom sigurnošću možemo odbaciti nul-hipotezu u korist alternativne.

Prije provođenja samog testa odabire se granična vrijednost α koju nazivamo **razina značajnosti** ili **nivo značajnosti**. Obično se uzima razina značajnosti $\alpha = 5\%$. Ako je p-vrijednost manja od prethodno odabrane razine značajnosti kažemo da odbacujemo nul-hipotezu u korist alternativne, ako je pak p-vrijednost veća od odabrane razine značajnosti ne kažemo da prihvaćamo nul-hipotezu, već ju samo ne odbacujemo. Ono što možemo reći je da nismo pronašli dovoljno dokaza da opovrgnemo nul-hipotezu, ali to ne znači da ti dokazi ne postoje i da je ona istinita. (vidi [2])

Bitno je naglasiti kako je moguće doći do neispravnog zaključka, iako je naš zaključak temeljen na podacima koje smo ispravno prikupili i matematički obradili. Moguće je da smo odabcili nul-hipotezu, a ona je ustvari bila točna. Takva pogreška naziva se **pogreška prve vrste** (*false positive*). Druga bi pogreška bila da ne odbacimo nul-hipotezu, a ona je ustvari kriva. Takva se pogreška naziva **pogreška druge vrste** (*false negative*).

Prisjetimo se, za obradu rezultata dobivenih istraživanjem provedenim u sklopu ovog rada, koristiti ćemo verziju t-testa koja uspoređuje dvije međusobno nezavisne skupine ispitanika. Ono što nas zanima jest imaju li slučajni uzorci iz obje skupine isto očekivanje. Ti slučajni uzorci ne moraju biti iste veličine, možemo ih označiti s $X_1, X_2, ..., X_n$ i $Y_1, Y_2, ..., Y_m$. Pretpostavljamo da su i ti slučajni uzorci međusobno nezavisni te da imaju iste varijance, tj. da je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ te $Y \sim N(\nu, \sigma^2)$. Znamo da je

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k,$$

$$\overline{Y}_m = \frac{Y_1 + Y_2 + ... + Y_m}{m} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} Y_k.$$

Iz Leme 2.2.5 i Napomene 2.1.9 slijedi da su njihove distribucije redom

$$\overline{X}_n \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}),$$

$$\overline{Y}_m \sim N(\nu, \frac{\sigma^2}{m}).$$

Iz Svojstva 4 slijedi $Var(-X) = Var(X)$. Dodatno, iz Leme 2.2.5 imamo

$$\overline{X}_n - \overline{Y}_m \sim N\left(\mu - \nu, \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\sigma^2\right).$$

Sada standardizacijom normalne razdiobe, tj. oduzimanjem očekivanja $(\mu - \nu)$ i dijeljenjem sa standardnom devijacijom $\sqrt{\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)\sigma^2}$, opet primjenjujući Lemu 2.2.5, imamo

$$\frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m - (\mu - \nu)}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim N(0, 1).$$

Budući da nemamo podatak o varijanci, morati ćemo σ zamijeniti s procjeniteljem. Iz Primjera 2.3.4 znamo da su uzoračke varijance

$$S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2 \text{ i } S_Y^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}\left(Y_i - \overline{Y}_m\right)^2 \tag{2.1}$$

nepristrani procjenitelji za σ^2.Pokažimo da je i

$$S_d^2 = \frac{1}{n+m-2}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \overline{X}_n\right)^2 + \sum_{k=1}^{m}\left(Y_k - \overline{Y}_m\right)^2\right]$$

nepristrani procjenitelj za σ^2. Iz (2.1) imamo

$$S_d^2 = \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}.$$

Sjetimo se Definicije 2.3.3, imamo

$$\mathbb{E}\left[S_d^2\right] = \mathbb{E}\left[\frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}\right] = \frac{(n-1)\sigma^2 + (m-1)\sigma^2}{n+m-2} = \sigma^2$$

Dobivamo testnu statistiku sa tzv. studentovom razdiobom (više o tome u [8, str. 46 i 47])

$$T = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m - (\mu - \nu)}{S_d\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim t(n+m-2).$$

Međutim, što je uzorak veći to studentova razdioba sve više sliči normalnoj razdiobi, odnosno, formalno će testna statistika koju ćemo mi promatrati imati asimpotski normalnu razdiobu

$$T = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m - (\mu - \nu)}{S_d\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim AN(0,1).$$

Poglavlje 3

Razrada

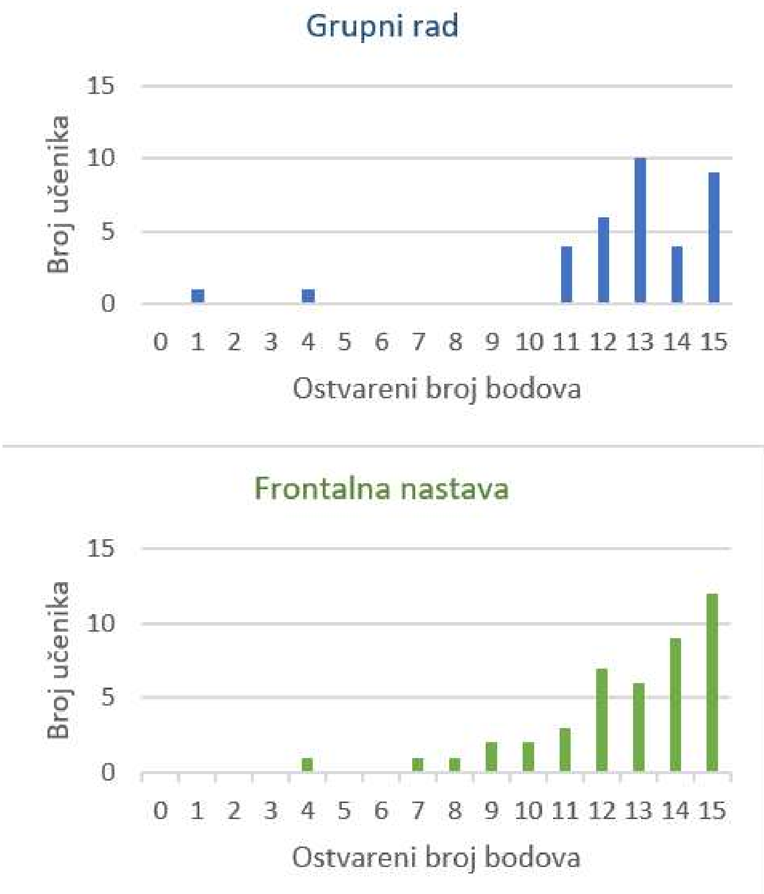
3.1 Rezultati pisane provjere znanja

U Tablici 3.1 mogu se vidjeti rezultati pisane provjere znanja kod prve grupe učenika, gdje je implementirana fronatlna nastava te kod druge grupe učenika, gdje je implementiran rad učenika u skupinama.

FRONTALNA NASTAVA	GRUPNI RAD
14,9,12,7,13,15,12,14,15,	11,13,11,12,14,13,12,1,12,
15,11,13,15,8,15,11,14,4,	11,12,15,14,14,15,15,15,15,
14,12,10,13,15,12,12,14,12,	11,13,13,14,13,12,4,15,12,
14,15,14,13,13,12,13,15,	15,13,13,15,13,13,13,15
11,15,9,10,14,15,15,15,14	

Tablica 3.1: Rezultati pisane provjere znanja

Imamo dva međusobno nezavisna slučajna uzorka različitih veličina: $X_1, X_2, ..., X_{44}$ (učenici koji su radili metodom frontalnog rada) i $Y_1, Y_2, ..., Y_{35}$ (učenici koji su radili metodom grupnog rada). Vidimo da prva skupina broji 44 učenika, tj. $n = 44$, a druga skupina 35 učenika pa je $m = 35$. Prisjetimo se da je pretpostavka t-testa koji ćemo primijeniti da su varijance dobivenih međusobno nezavisnih uzoraka jednake (ta se tvrdnja može provjeriti primjenom tzv. F-testa). Također, pretpostavka je da razdioba obje slučajne varijable normalna. Kraće zapisano $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ i $Y \sim N(\nu, \sigma^2)$. Podaci su prikazani dijagramom na Slici 3.1, možemo reći da pretpostavka o normalnosti ima smisla.



Slika 3.1: Grafički prikaz dobivenih rezulata pisane provjere znanja

Postavimo hipoteze koje ćemo testirati na razini značajnosti od 5%:

$$H_0 : \mu - \nu = 0$$

$$H_1 : \mu - \nu \neq 0$$

Prisjetimo se, testna statistika koju promatramo je

$$T = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m - (\mu - \nu)}{S_d \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \sim AN(0, 1).$$

Odredimo sada vrijednost testne statistike T. Odredimo najprije vrijednosti $\overline{X}_{44}$, $\overline{Y}_{35}$, S_X^2, S_Y^2 te S_d:

$$\overline{X}_{44} = \frac{X_1 + X_2 + ... + X_{44}}{44} \approx 12.68182,$$

$$\overline{Y}_{35} = \frac{Y_1 + Y_2 + ... + Y_{35}}{35} \approx 12.62857,$$

$$S_X^2 = \frac{1}{44-1} \sum_{i=1}^{44} \left(X_i - \overline{X}_4\right)^2 \approx 6.12896,$$

$$S_Y^2 = \frac{1}{35-1} \sum_{i=1}^{35} \left(Y_i - \overline{Y}_{35}\right)^2 \approx 8.29916,$$

$$S_d^2 = \frac{(44-1)S_X^2 + (35-1)S_Y^2}{44+35-2} \approx 7.08723.$$

Iz pretpostavke $H_0 : \mu - \nu = 0$ i prethodno izračunatih vrijednosti odredimo sada i realizaciju testne stratistike T:

$$t = \frac{\overline{X}_n - \overline{Y}_m - (\mu - \nu)}{S_d \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}}} \approx \frac{12.62857 - 12.62857}{7.08723 \cdot \sqrt{\frac{1}{44} + \frac{1}{35}}} \approx 0.088308$$

Preostaje još odrediti p-vrijednost, budući da radimo dvostrani t-test, p-vrijednost će biti:

$$\mathbb{P}(|T| > 0.088308) = \mathbb{P}(T > 0.088308) + \mathbb{P}(T < -0.088308) = 2 \cdot \mathbb{P}(T < -0.088308)$$

Za računanje $2 \cdot \mathbb{P}(T < -0.088308)$ koristimo funkciju NORM.DIST u programu Microsoft Excel. Kao rezultat dobivamo

$$\mathbb{P}(|T| > 0.088308) \approx 0.93.$$

Dakle, vjerojatnost opažanja podataka kakvi su na promatranom uzorku ili nekih još ekstremnijih, kada je nul-hipoteza istinita je otprilike 93% što nam daje zaključiti da ne odbacujemo nul-hipotezu. Nemamo dokaze da možemo reći da rezultati pisanih provjera znanja koje su učenici pisali u obje skupine pokazuju da postoje razlike u usvojenom znanju između metode frontalne nastave i metode grupnog rada.

3.2 Usporedba ostalih promatranih parametara

Kao što je ranije spomenuto, učenici su na skali od 1 do 10 trebali procijeniti u kolikoj mjeri smatraju da su usvojili nastavni sadržaj. Također, iako je pisana provjera znanja učenika bila anonimna, prikupljali su se podaci o spolu učenika kako bi se rezultati mogli usporediti i prema spolu.

U Tablici 3.2 mogu se vidjeti rezultati anketa samovrednovanja. U prvom stupcu su rezultati anketa samovrednovanja učenica, a u drugom stupcu rezultati anketa samovrednovanja učenika.

UČENICE	UČENICI
7, 8.5, 7, 9, 9, 9, 8, 9, 8,	9, 8, 7.5, 5, 7, 8, 10, 7, 9,
10, 8, 6, 9, 7.5, 10, 9, 8, 7,	8, 10, 10, 9, 8, 10, 10, 9, 9,
7, 7, 5, 7, 7, 9, 4, 8, 10,	10, 10, 10, 7, 9, 9, 8, 9, 9,
9, 8, 8, 7, 7, 8, 10, 10	10, 10, 10, 10, 10, 10, 8, 10
	6, 7, 7, 10, 9, 10, 9, 10, 9

Tablica 3.2: Rezultati anketa samovrednovanja prema spolu učenika

U prethodnom poglavlju, primjenom t-testa , dobili smo p-vrijednost od 93% iz čega smo zaključili da ne možemo vidjeti statistički značajnu razliku između rezultata pisane provjere znanja kod učenika koji su radili jednom ili drugom metodom rada. Sada se pitamo, postoji li razlika ako uspoređujemo te dvije metode unutar skupina istog spola.
Prvo ćemo analizirati rezultate pisane provjere znanja za učenike. Frontalnom metodom rada radilo je 20 učenika, a metodom grupnog rada radilo je 24 učenika. Neka je slučajni uzorak $X_1, X_2, ..., X_{20} \sim N(\mu_F, \sigma^2)$ i $Y_1, Y_2, ..., Y_{24} \sim N(\mu_G, \sigma^2)$. Postavimo hipoteze koje ćemo testirati na razini značajnosti od 5%:

$$H_0 : \mu_F = \mu_G,$$

$$H_1 : \mu_F \neq \mu_G.$$

Korištenjem naredbe TTEST u programu Microsoft Excel za dvostrani t-test dobivena je p-vrijednost od 0.3137, tj 31.37%.
Analizirati ćemo i rezultate pisane provjere znanja za učenice. Frontalnom metodom rada radile su 24 učenice, a metodom grupnog rada radilo je 11 učenica. Neka je slučajni uzorak $X_1, X_2, ..., X_{24} \sim N(\mu_F, \sigma^2)$ i $Y_1, Y_2, ..., Y_{11} \sim N(\mu_G, \sigma^2)$. Postavimo hipoteze koje ćemo testirati na razini značajnosti od 5%:

$$H_0 : \mu_F = \mu_G,$$

$$H_1 : \mu_F \neq \mu_G.$$

Korištenjem naredbe TTEST u programu Microsoft Excel za dvostrani t-test dobivena je p-vrijednost od $0,1512$, tj 15.12%.
Vidimo da dobivene p-vrijednosti nisu ispod razine zančajnosti od 5%, ali su osjetno manje od p-vrijednosti koju smo dobili kada smo gledali cijelu populaciju. Kako smo radili dvostranim t-testom, vidimo da potencijalno postoji razlika. Budući da je prosjek broja bodova kod učenika koji su radili metodom frontalne nastave bio 12.2, a prosjek broja bodova kod učenika koji su radili metodom grupnog rada bio je 13.04, moguće je da učenicima bolje odgovara metoda grupnog rada. Kod učenica je situacija bila suprotna, prosjek broja bodova kod učenica koje su radile metodom frontalne nastave bio 13.08, a prosjek broja bodova kod učenica koje su radile metodom grupnog rada bio je 11.73, pa je moguće da učenicama više odgovara metoda frontalne nastave. Ovi rezultati su se međusobno poništili kada smo uspoređivali samo metode rada, ali ne i po spolu učenika, zato je p-vrijednost bila značajno veća, tj. iznosila je 93%.

U razgovoru s profesoricama koje predaju matematiku u razredima u kojima je provededeno istraživanje, postavljena je hipoteza da su učenice samokritičnije od učenika pa smo to odlučili testirati t-testom.
Analizirati ćemo rezultate anketa samovrednovanja. U istraživanju je sudjelovalo 35 učenica i 44 učenika. Neka je slučajni uzorak $X_1, X_2, ..., X_{35} \sim N(\mu_Z, \sigma^2)$ i $Y_1, Y_2, ..., Y_{44} \sim N(\mu_M, \sigma^2)$. Postavimo hipoteze koje ćemo testirati na razini značajnosti od 5%:

$$H_0 : \mu_Z = \mu_M,$$

$$H_1 : \mu_Z < \mu_M.$$

Korištenjem naredbe TTEST u programu Microsoft Excel za jednostrani t-test dobivena je p-vrijednost od $0,003$, tj. 0.3%. Dobivena p-vrijednost je osjetno manja od razine značajnosti od 5% pa možemo zaključiti da odbacujemo nul-hipotezu u korist alternativne, tj. zaključujemo da su učenice zaiste samokritičnije.
Pitamo se je li samokritičnost učenica opravdana ili nije. Analizirati ćemo rezultate pisanih provjera znanja prema spolu učenika i vidjeti postoji li razlika između njih. U istraživanju je sudjelovalo 35 učenica i 44 učenika. Neka je slučajni uzorak $X_1, X_2, ..., X_{35} \sim N(\mu_Z, \sigma^2)$ i $Y_1, Y_2, ..., Y_{44} \sim N(\mu_M, \sigma^2)$. Postavimo hipoteze koje ćemo testirati na razini značajnosti od 5%:

$$H_0 : \mu_Z = \mu_M,$$

$$H_1 : \mu_Z \neq \mu_M.$$

Korištenjem naredbe TTEST u programu Microsoft Excel za dvostrani t-test dobivena je p-vrijednost od $0,9974$, tj. 99.74%. Dobivena p-vrijednost nam kaže da ne odbacujemo nul-hipotezu. Odnosno, Nemamo dokaze da možemo reći da rezultati pisanih provjera znanja pokazuju da su učenice/učenici bolje ili lošije riješili pisanu provjeru znanja. Možemo zaključiti da samokritičnost učenica nije opravdana.

Ovo zapažanje posebno je zanimljivo promatrati kod učenika i učenica koji su radili metodom frontalnog rada.
Analizirati ćemo rezultate anketa samovrednovanja prema spolu, kod učenika koji su radili metodom frontalne nastave. Metodom frontalnog rada radile su 24 učenice i 20 učenika. Neka je slučajni uzorak $X_1, X_2, ..., X_{24} \sim N(\mu_Z, \sigma^2)$ i $Y_1, Y_2, ..., Y_{20} \sim N(\mu_M, \sigma^2)$. Postavimo hipoteze koje ćemo testirati na razini značajnosti od 5%:

$$H_0 : \mu_Z = \mu_M,$$

$$H_1 : \mu_Z < \mu_M.$$

Korištenjem naredbe TTEST u programu Microsoft Excel za jednostrani t-test dobivena je p-vrijednost od $0,003$, tj. 0.3%.
Analizirajmo i rezultate pisanih provjera znanja prema spolu, kod učenika koji su radili metodom frontalne nastave. Metodom frontalnog rada radile su 24 učenice i 20 učenika. Neka je slučajni uzorak $X_1, X_2, ..., X_{24} \sim N(\mu_Z, \sigma^2)$ i $Y_1, Y_2, ..., Y_{20} \sim N(\mu_M, \sigma^2)$. Postavimo hipoteze koje ćemo testirati na razini značajnosti od 5%:

$$H_0 : \mu_Z = \mu_M,$$

$$H_1 : \mu_Z > \mu_M.$$

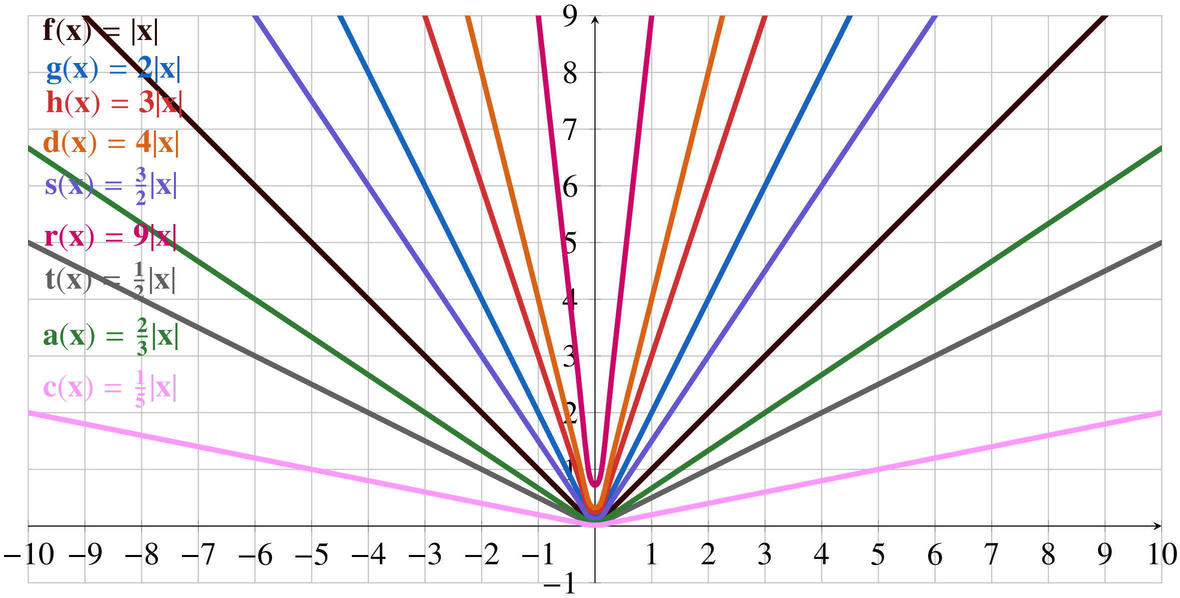
Korištenjem naredbe TTEST u programu Microsoft Excel za jednostrani t-test dobivena je p-vrijednost od $0,1215$, tj. 12.15%, što je p-vrijednost koja nije ispod razine značajnosti od 5%, ali je osjetno manja od p-vrijednosti od 99.74% koju smo dobili kada smo gledali postoji li razlika u riješenosti pisanih provjera znanja, među spolovima, u cijeloj populaciji. Prosječan broj bodova kod učenica koje su radile ovom metodom je 13.08, a kod učenika je 12.2. Dakle, učenice su bile samokritičnije, a pisanu provjeru znanja riješile su bolje od učenika.

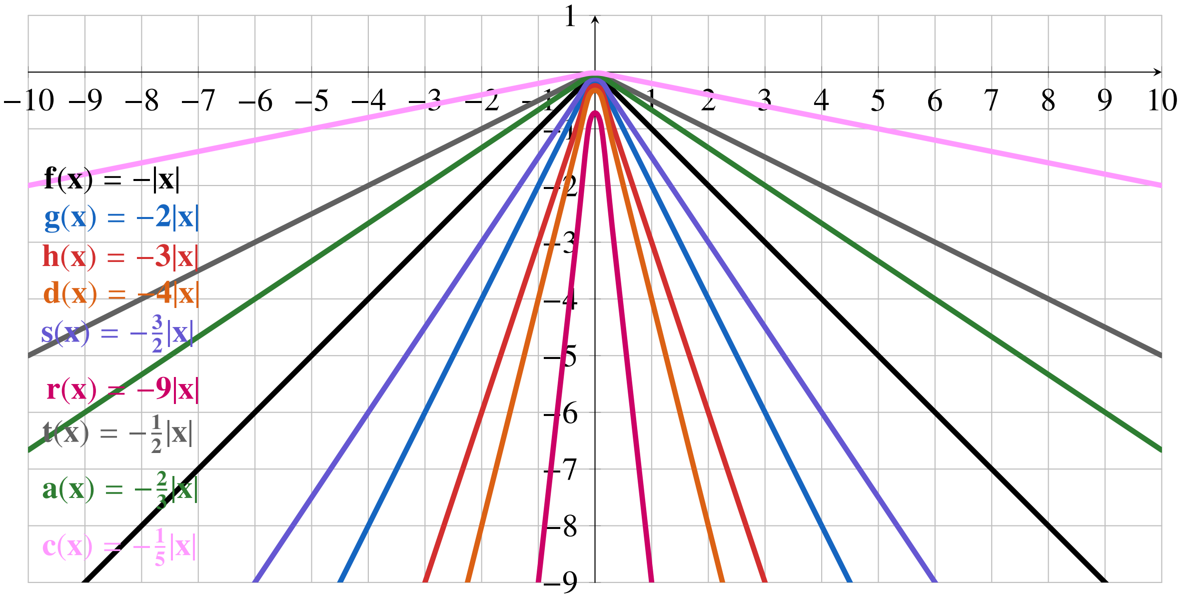
Poglavlje 4

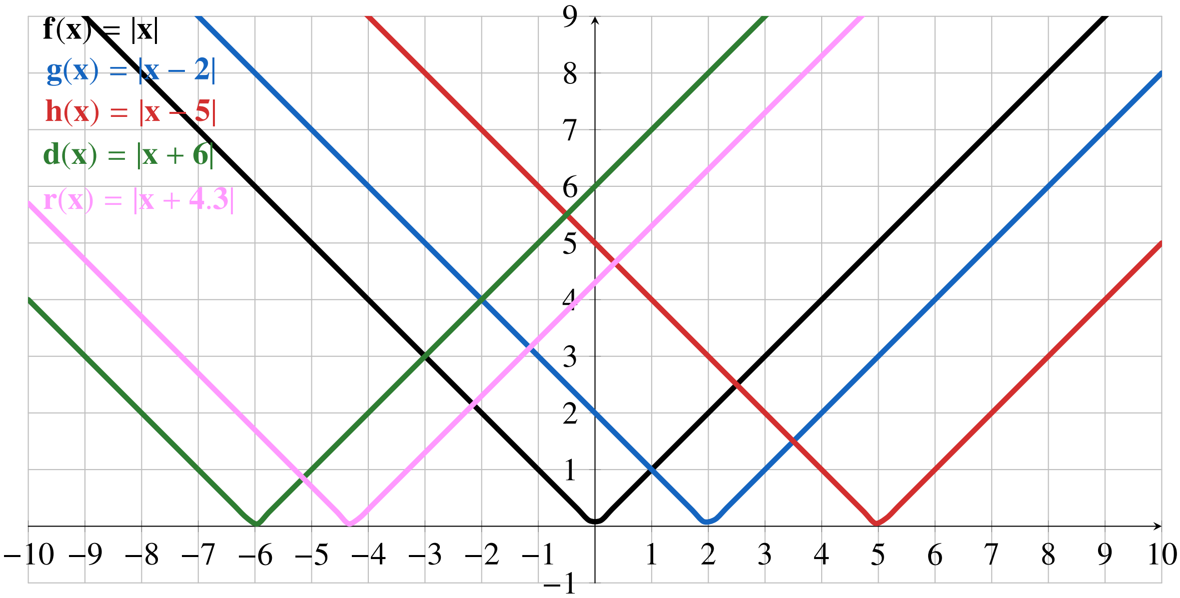
Dodaci

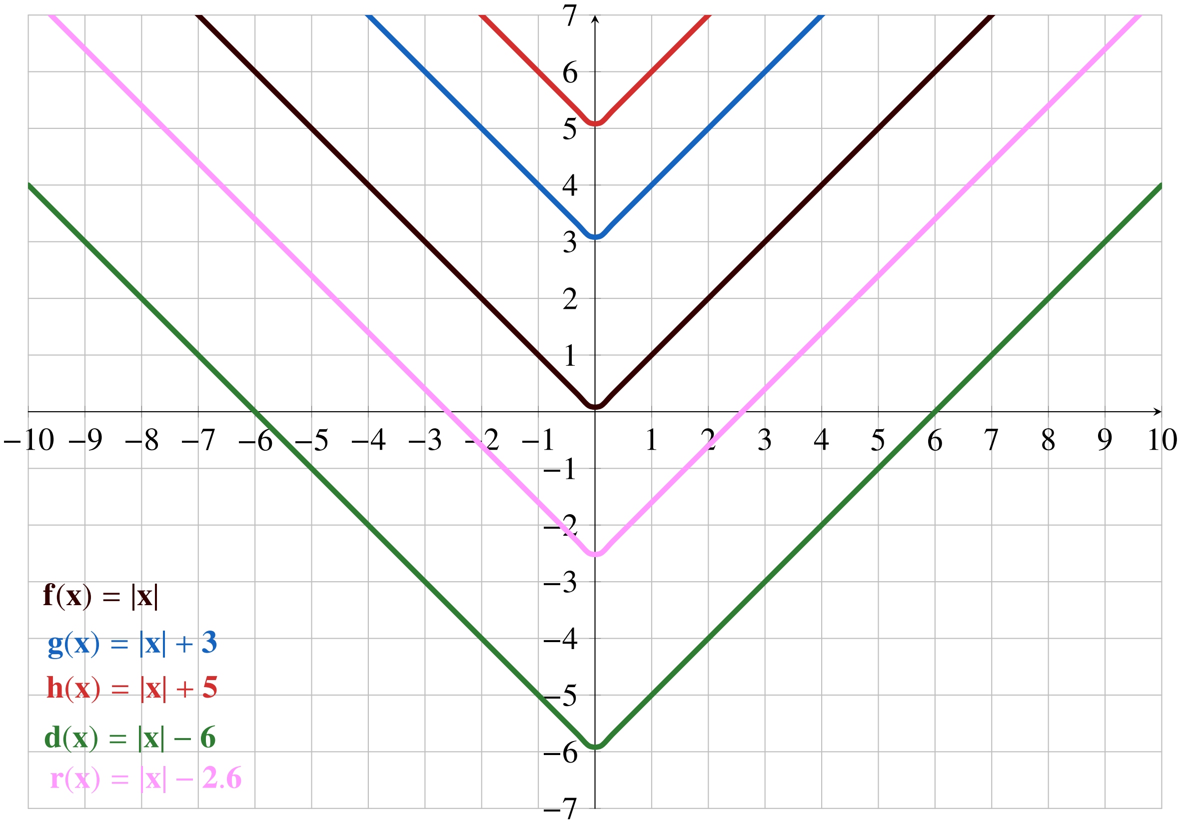
4.1 Frontalni rad

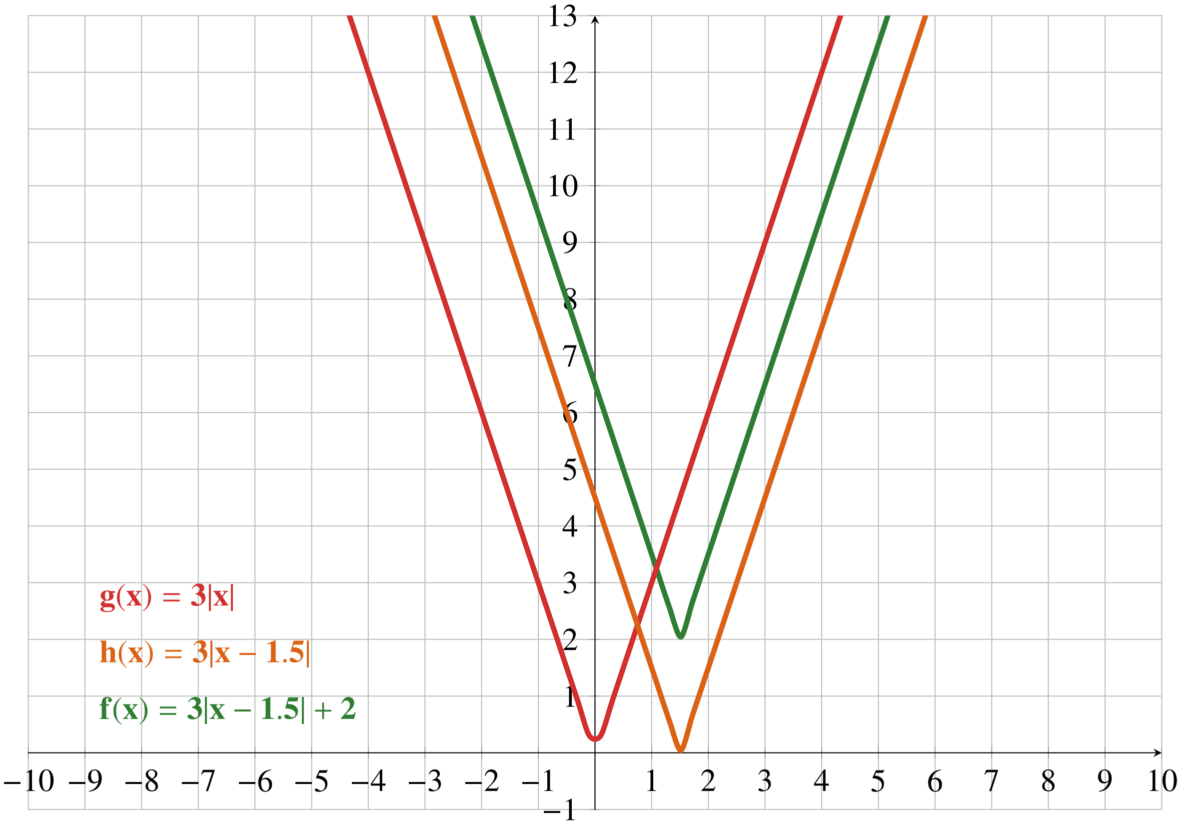
GeoGebra datoteke



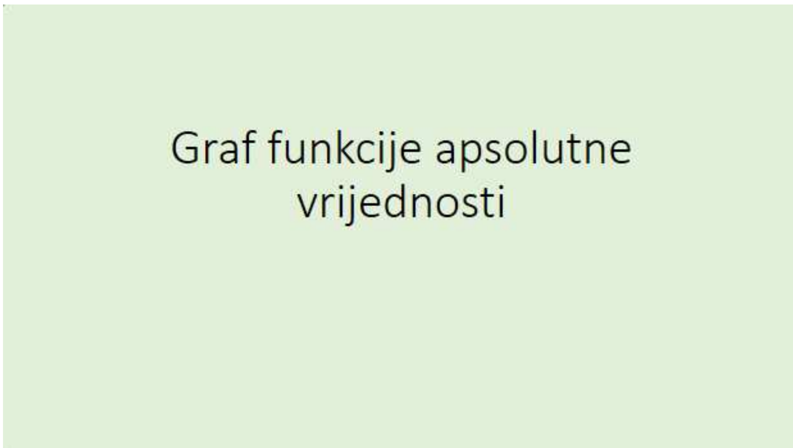

f(x) = −|x|
g(x) = −2|x|
h(x) = −3|x|
d(x) = −4|x|
s(x) = −3/2|x|
r(x) = −9|x|
t(x) = −1/2|x|
a(x) = −2/3|x|
c(x) = −1/5|x|

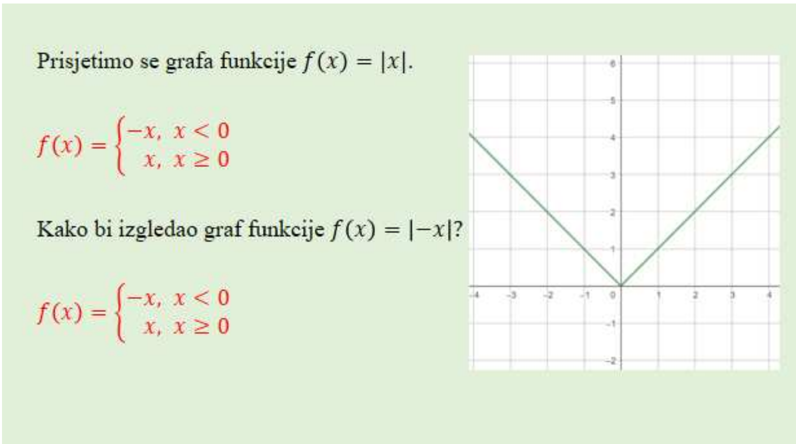

f(x) = |x|
g(x) = |x − 2|
h(x) = |x − 5|
d(x) = |x + 6|
r(x) = |x + 4.3|

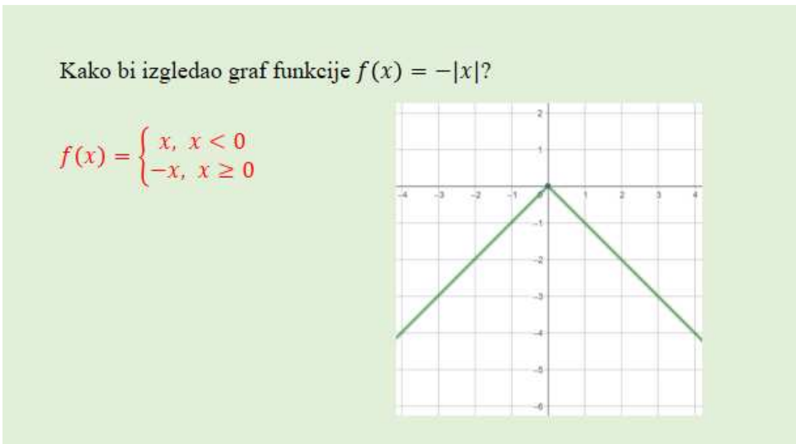

f(x) = |x|
g(x) = |x| + 3
h(x) = |x| + 5
d(x) = |x| − 6
r(x) = |x| − 2.6


g(x) = 3|x|
h(x) = 3|x − 1.5|
f(x) = 3|x − 1.5| + 2
−10 −9 −8 −7 −6 −5 −4 −3 −2 −1 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 −1

Prezentacija

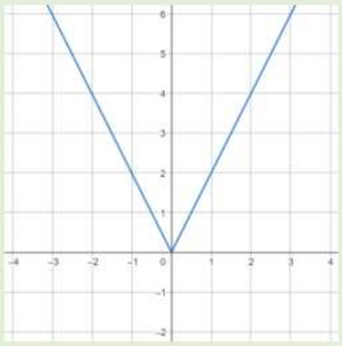






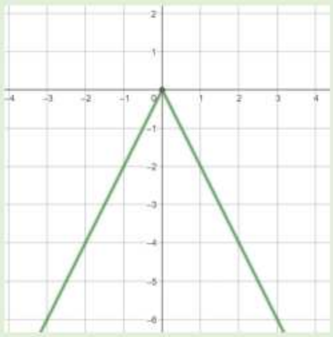
Kako bi izgledao graf funkcije $g(x) = 2|x|$?

$$g(x) = \begin{cases} -2x, & x < 0 \\ 2x, & x \geq 0 \end{cases}$$

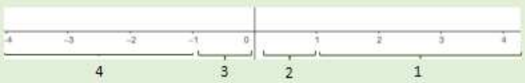


Kako bi izgledao graf funkcije $g(x) = -2|x|$?

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & x < 0 \\ -2x, & x \geq 0 \end{cases}$$



ZAKLJUČAK



Za funkciju $f(x) = a|x|$ i njezin graf razlikujemo 4 slučaja:

1) $a > 1$
Graf funkcije $f(x) = a|x|$ nalazi se **iznad** grafa funkcije $g(x) = |x|$ i s povećanjem a sve je **„uži”** .

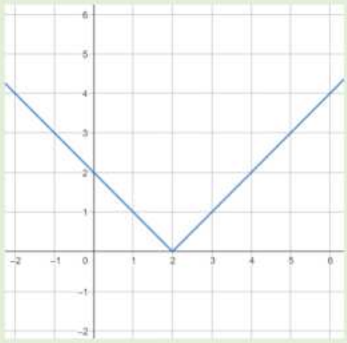
2) $0 < a < 1$
Graf funkcije $f(x) = a|x|$ nalazi se **ispod** grafa funkcije $g(x) = |x|$ i s povećanjem a sve je **„uži”** .

3) $-1 < a < 0$
Graf funkcije $f(x) = a|x|$ nalazi se **iznad** grafa funkcije $h(x) = -|x|$ i s povećanjem a sve je **„širi”** .

4) $-1 > a$
Graf funkcije $f(x) = a|x|$ nalazi se **ispod** grafa funkcije $h(x) = -|x|$ i s povećanjem a sve je **„širi”** .

Kako bi izgledao graf funkcije $g(x) = |x-2|$?

$$g(x) = \begin{cases} -x+2, & x < 2 \\ x-2, & x \geq 2 \end{cases}$$



ZAKLJUČAK

Za funkciju $f(x) = |x-c|$ i njezin graf razlikujemo 2 slučaja:

1) $c > 0$

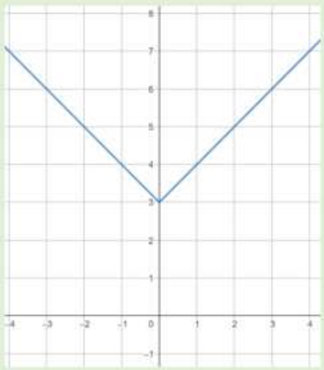
Graf funkcije $f(x) = |x-c|$ dobijemo tako da graf funkcije $g(x) = |x|$ translatiramo po x – osi za c **udesno** .

2) $c < 0$

Graf funkcije $f(x) = |x-c|$ dobijemo tako da graf funkcije $g(x) = |x|$ translatiramo po x – osi za c **ulijevo** .

Kako bi izgledao graf funkcije $g(x) = |x| + 3$?

$$g(x) = \begin{cases} -x+3, & x < 0 \\ x+3, & x \geq 0 \end{cases}$$



ZAKLJUČAK

Za funkciju $f(x) = |x| + b$ i njezin graf razlikujemo 2 slučaja:

1) b> 0

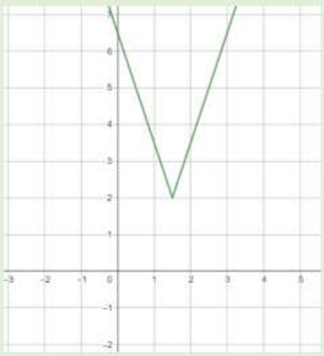
Graf funkcije $f(x) = |x| + b$ dobijemo tako da graf funkcije $g(x) = |x|$ translatiramo po y– osi za b **prema gore** .

2) b< 0

Graf funkcije $f(x) = |x| + b$ dobijemo tako da graf funkcije $g(x) = |x|$ translatiramo po y – osi za b **prema dolje** .

Primjer 6. Odredi graf funkcije $f(x) = 3|x - 1.5| + 2$.

$$g(x) = \begin{cases} -3x + 6.5, & x < 1.5 \\ 3x - 2.5, & x \geq 1.5 \end{cases}$$



Zadatak 1. Nacrtaj grafove funkcija:

a) $f(x) = |x + 4| + 3$

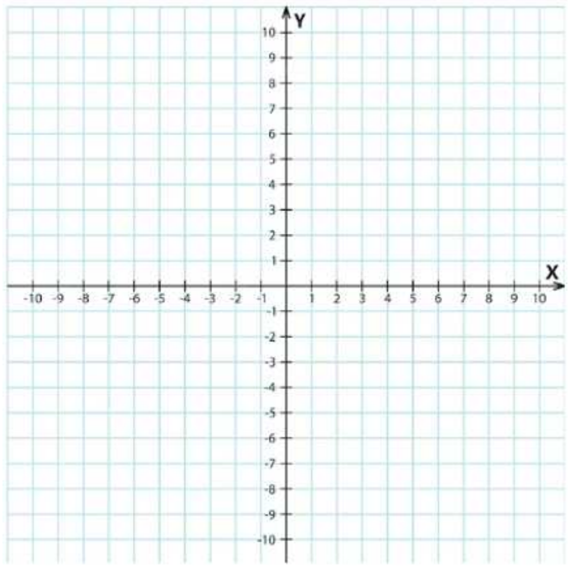
b) $f(x) = 2|x - 3| + 2.5$

c) $f(x) = 4|-x - 1| - 1$

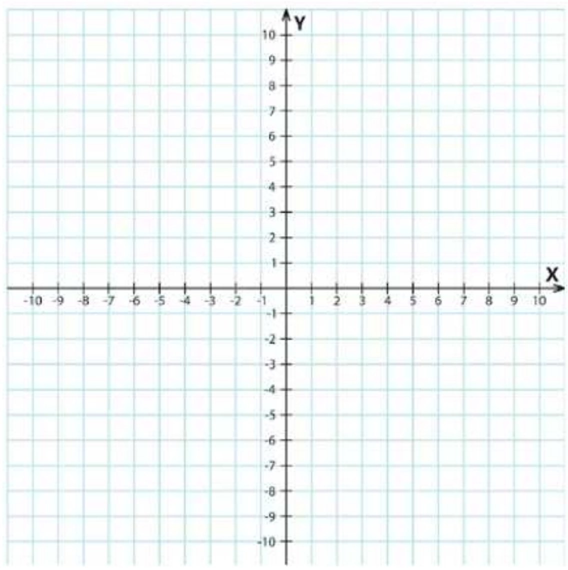
d) $f(x) = -3|x - 4| - 2$

Nastavni listić

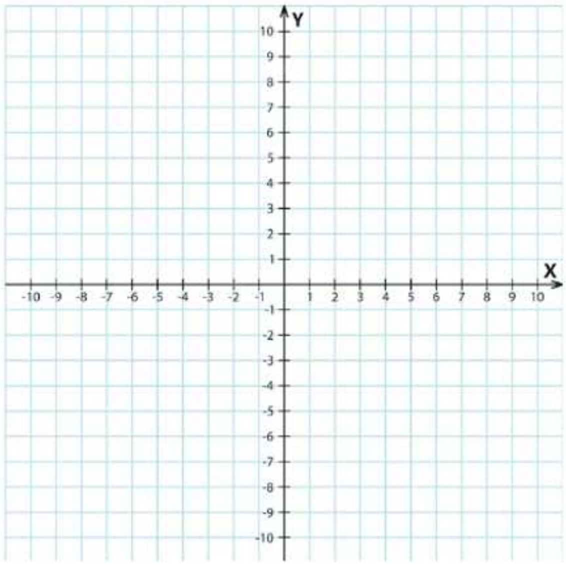
Primjer 1. Nacrtaj graf funkcije $f(x) = -|x|$.



Primjer 2. Nacrtaj graf funkcije $f(x) = 2|x|$.



Primjer 3. Nacrtaj graf funkcije $f(x) = -2|x|$.



ZAKLJUČAK

Za funkciju $f(x) = \alpha|x|$ i njezin graf razlikujemo 4 slučaja:

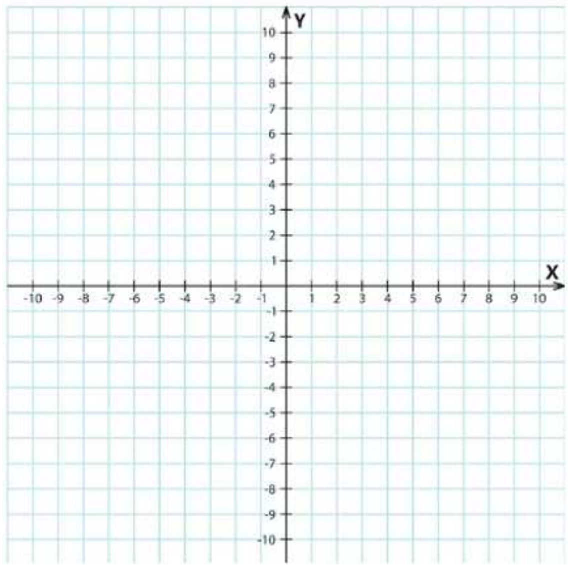
1. $\alpha > 1$
   Graf funkcije $f(x) = \alpha|x|$ nalazi se ...... grafa funkcije $g(x) = |x|$ i s ...... α sve je "uži".

2. $0 < \alpha < 1$
   Graf funkcije $f(x) = \alpha|x|$ nalazi se ...... grafa funkcije $g(x) = |x|$ i s ...... α sve je "uži".

3. $-1 < \alpha < 0$
   Graf funkcije $f(x) = \alpha|x|$ nalazi se ...... grafa funkcije $g(x) = |x|$ i s ...... α sve je "širi".

4. $\alpha < -1$
   Graf funkcije $f(x) = \alpha|x|$ nalazi se ...... grafa funkcije $g(x) = |x|$ i s ...... α sve je "širi".

Primjer 4. Nacrtaj graf funkcije $f(x) = |x - 2|$.



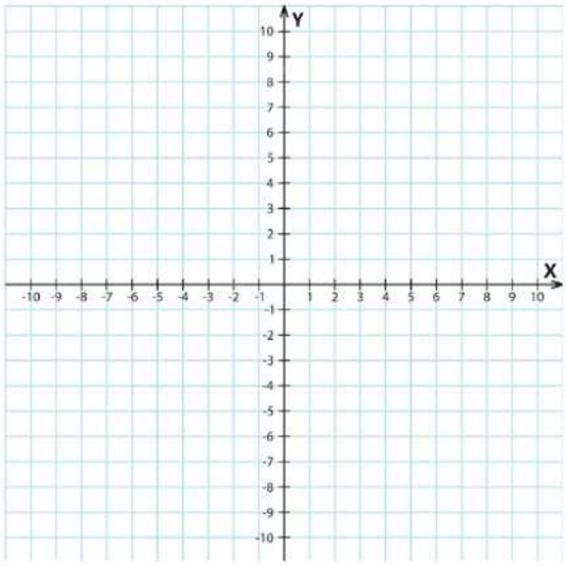
ZAKLJUČAK

Za funkciju $f(x) = |x - c|$ i njezin graf razlikujemo 2 slučaja:

1. $c > 0$
   Graf funkcije $f(x) = |x - c|$ dobijemo tako da graf funkcije $g(x) = |x|$ translatiramo po ...... za $|c|$ ....

2. $c < 0$
   Graf funkcije $f(x) = |x - c|$ dobijemo tako da graf funkcije $g(x) = |x|$ translatiramo po ...... za $|c|$ ....

Primjer 5. Nacrtaj graf funkcije $f(x) = |x| + 3$.



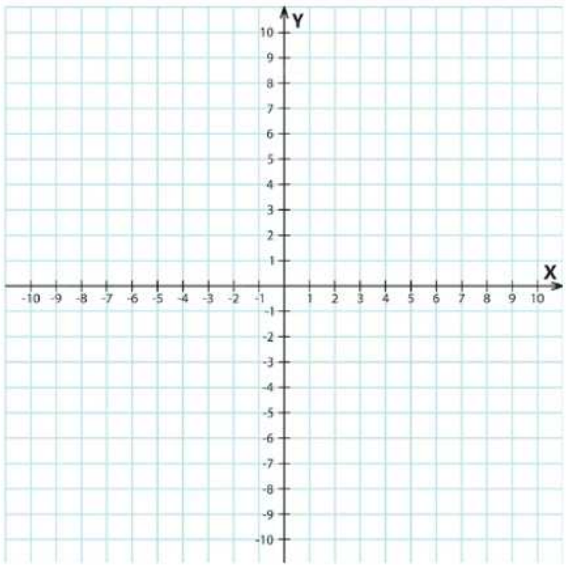
ZAKLJUČAK

Za funkciju $f(x) = |x| + b$ i njezin graf razlikujemo 2 slučaja:

1. $b > 0$
   Graf funkcije $f(x) = |x - c|$ dobijemo tako da graf funkcije $g(x) = |x|$ translatiramo po ...... za $|b|$ prema ....

2. $b < 0$
   Graf funkcije $f(x) = |x - c|$ dobijemo tako da graf funkcije $g(x) = |x|$ translatiramo po ...... za $|b|$ prema ....

Primjer 6. Nacrtaj graf funkcije $f(x) = |x| + 3$.



Zadatak 1. Nacrtaj grafove funkcija:

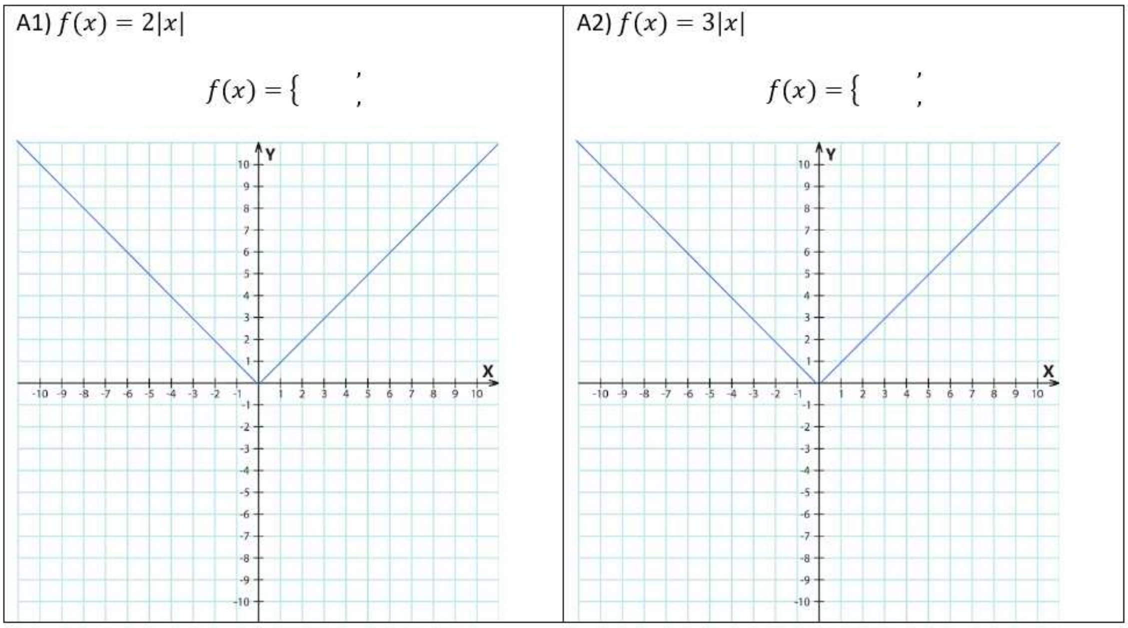
1. $f(x) = |x + 4| + 3$
2. $f(x) = 2|x - 3| + 2.5$
3. $f(x) = 4| - x - 1| - 1$
4. $f(x) = -3|x - 4| - 2$

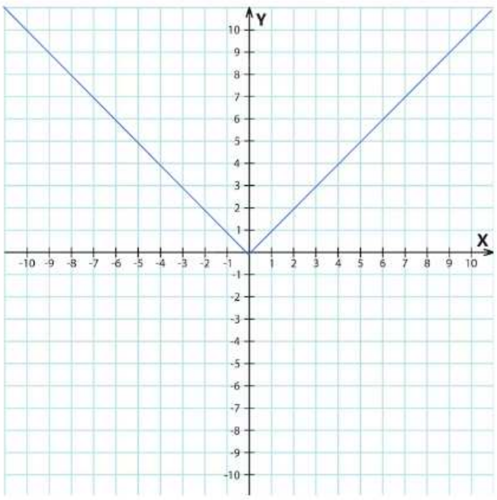
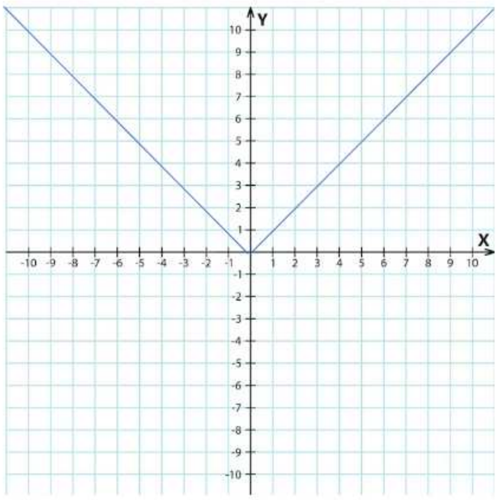
4.2 Grupni rad

****PRVA FAZA****

GRUPA A

Zadatak 1. Nacrtaj graf zadane funkcije. U svim zadacima nacrtan je i graf funkcije $g(x) = |x|$.



B1) $f(x) = \frac{1}{2}\lvert x\rvert$	B2) $f(x) = \frac{2}{3}\lvert x\rvert$
$f(x) = \{ \quad , \quad ,$	$f(x) = \{ \quad , \quad ,$
	

Zadatak 2.Što uočavate, kakav je α u svim primjerima za $f(x) = \alpha|x|$?

Kakvi su α u A1 i A2, a kakvi u B1 i B2?

Zadatak 3. Kakvi su ti grafovi u odnosu na graf funkcije $g(x) = |x|$ za svaki od slučajeva?

ZAKLJUČAK

Za funkciju $f(x) = \alpha|x|$, gdje je $\alpha > 0$ i njezin graf razlikujemo .... slučaja:

1. $\alpha >$ ...
   Graf funkcije $f(x) = \alpha|x|$ nalazi se .... grafa funkcije $g(x) = |x|$ i s .... α sve je "uži".

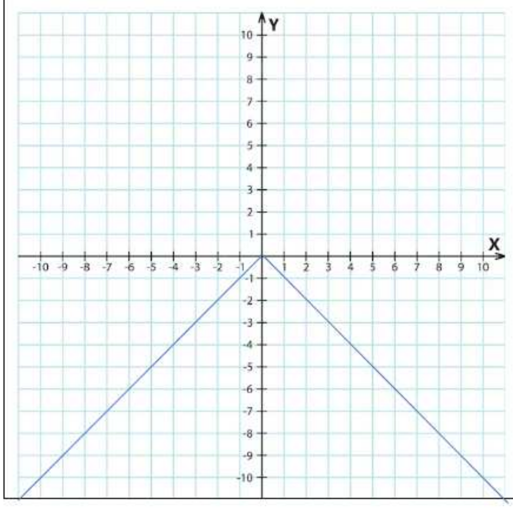
2. .... $< \alpha <$ ....
   Graf funkcije $f(x) = \alpha|x|$ nalazi se .... grafa funkcije $g(x) = |x|$ i s .... α sve je "uži".

GRUPA B

Zadatak 1. Nacrtaj graf zadane funkcije. U svim zadacima nacrtan je i graf funkcije $h(x) = -|x|$.

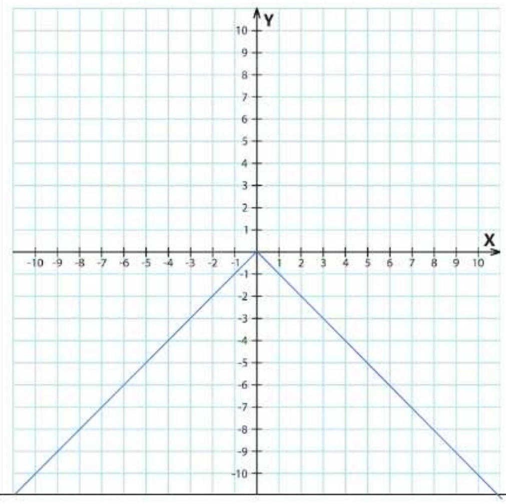
A1) $f(x) = -3|x|$

$$f(x) = \begin{cases} \quad , \\ \quad , \end{cases}$$



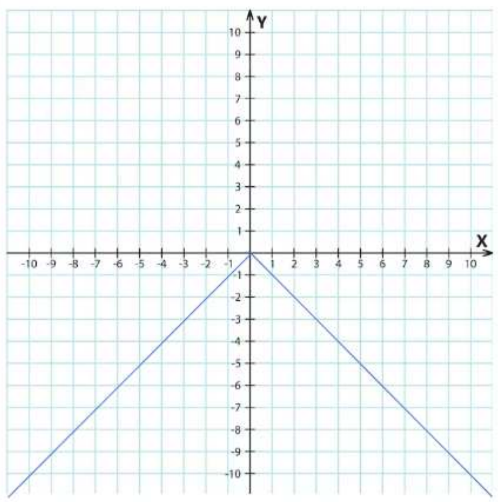
A2) $f(x) = -2|x|$

$$f(x) = \begin{cases} \quad , \\ \quad , \end{cases}$$



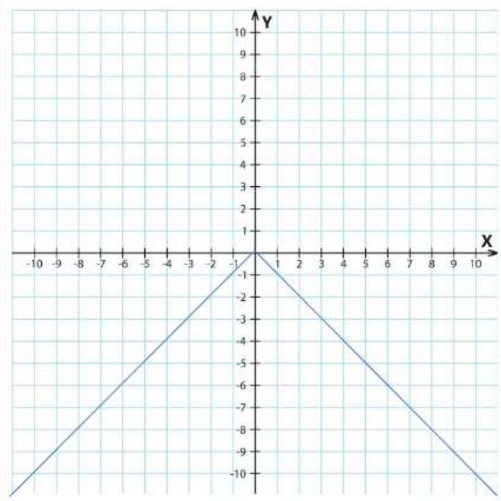
B1) $f(x) = -\frac{1}{2}|x|$

$$f(x) = \begin{cases} \quad , \\ \quad , \end{cases}$$



B2) $f(x) = -\frac{2}{3}|x|$

$$f(x) = \begin{cases} \quad , \\ \quad , \end{cases}$$



Zadatak 2.Što uočavate, kakav je α u svim primjerima za $f(x) = \alpha|x|$?

Kakvi su α u A1 i A2, a kakvi u B1 i B2?

Zadatak 3. Kakvi su ti grafovi u odnosu na graf funkcije $h(x) = -|x|$ za svaki od slučajeva?

ZAKLJUČAK
Za funkciju $f(x) = \alpha|x|$, gdje je $\alpha < 0$ i njezin graf razlikujemo .... slučaja:

1. .... $< \alpha <$ ....
   Graf funkcije $f(x) = \alpha|x|$ nalazi se .... grafa funkcije $h(x) = -|x|$ i s .... α sve je "širi".

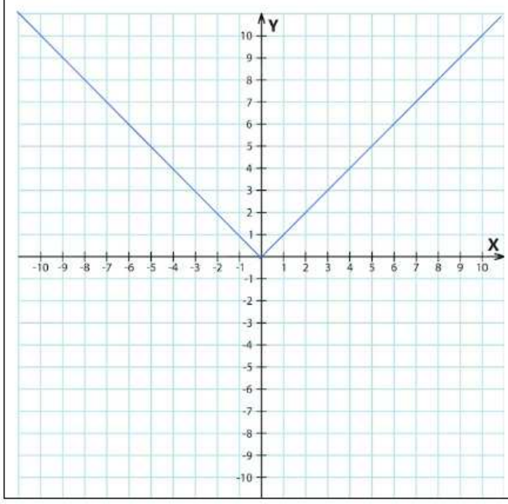
2. $\alpha <$ ....
   Graf funkcije $f(x) = \alpha|x|$ nalazi se .... grafa funkcije $h(x) = -|x|$ i s .... α sve je "širi".

GRUPA C

Zadatak 1. Nacrtaj graf zadane funkcije. U svim zadacima nacrtan je i graf funkcije $g(x) = |x|$.

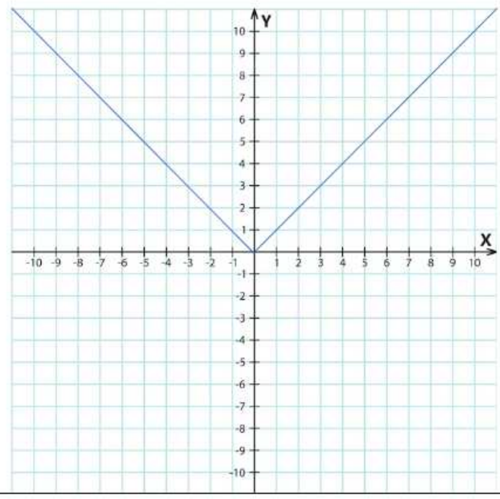
a) $f(x) = |x - 3|$

$f(x) = \{ \quad , \quad ,$



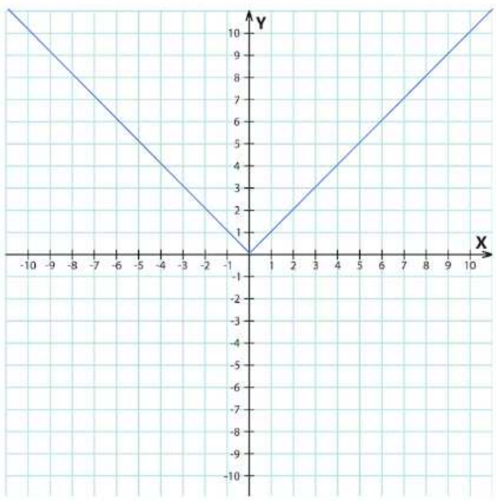
b) $f(x) = |x - 5|$

$f(x) = \{ \quad , \quad ,$



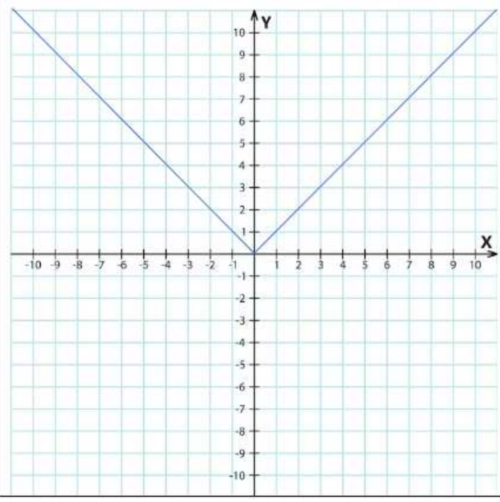
a) $f(x) = |x + 2|$

$f(x) = \{ \quad , \quad ,$



b) $f(x) = |x + \frac{1}{2}|$

$f(x) = \{ \quad , \quad ,$



Zadatak 2. Za graf funkcije $f(x) = |x - c|$ koliko slučajeva u ovisnosti o c razlikujete?

Zadatak 3. Kako smo od grafa funkcije $f(x) = |x|$ mogli doći do grafa funkcije $f(x) = |x - c|$ u ovisnosti o realnom parametru c?

ZAKLJUČAK
Za funkciju $f(x) = |x - c|$ i njezin graf razlikujemo .... slučaja:

1. $c >$ ...
   Graf funkcije $f(x) = |x - c|$ dobijemo tako da graf funkcije $g(x) = |x|$ translatiramo po .... za $|c|$ ....

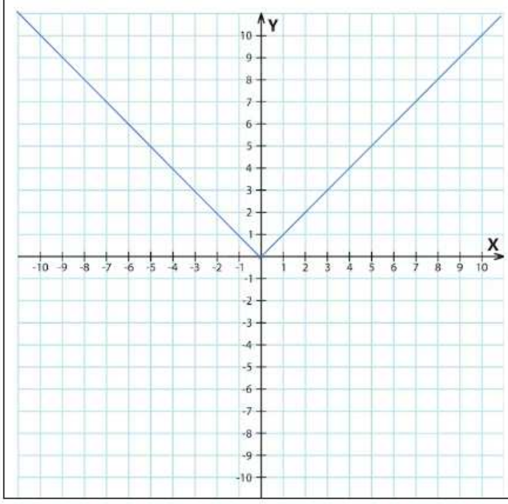
2. $c <$ ....
   Graf funkcije $f(x) = |x - c|$ dobijemo tako da graf funkcije $g(x) = |x|$ translatiramo po .... za $|c|$ ....

GRUPA D

Zadatak 1. Nacrtaj graf zadane funkcije. U svim zadacima nacrtan je i graf funkcije $g(x) = |x|$.

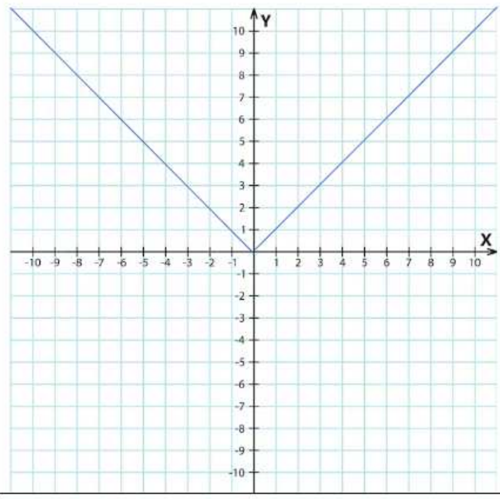
a) $f(x) = |x| + 1$

$f(x) = \{ \quad , \quad ,$



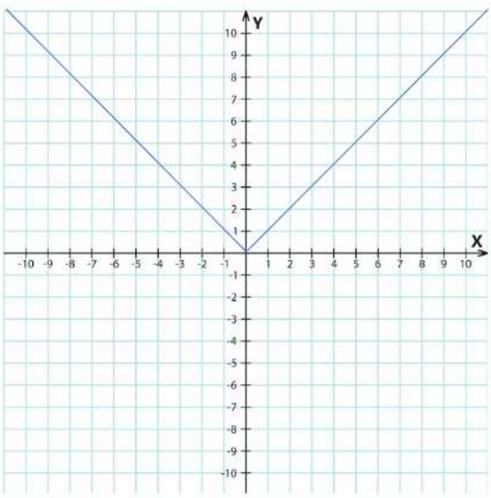
b) $f(x) = |x| + 5$

$f(x) = \{ \quad , \quad ,$



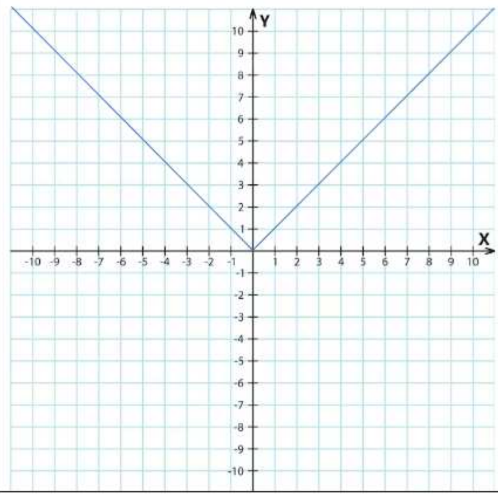
a) $f(x) = |x| - 2$

$f(x) = \{ \quad , \quad ,$



b) $f(x) = |x| - \frac{3}{2}$

$f(x) = \{ \quad , \quad ,$



Zadatak 2. Za graf funkcije $f(x) = |x| + b$ koliko slučajeva u ovisnosti o b razlikujete?

Zadatak 3. Kako smo od grafa funkcije $f(x) = |x|$ mogli doći do grafa funkcije $f(x) = |x| + b$ u ovisnosti o realnom parametru b?

ZAKLJUČAK
Za funkciju $f(x) = |x| + b$ i njezin graf razlikujemo .... slučaja:

1. $b >$ ...
   Graf funkcije $f(x) = |x| + b$ dobijemo tako da graf funkcije $g(x) = |x|$ translatiramo po .... za $|b|$ prema ....

2. $b <$ ....
   Graf funkcije $f(x) = |x| + b$ dobijemo tako da graf funkcije $g(x) = |x|$ translatiramo po .... za $|b|$ prema ....

****DRUGA FAZA****

ZAKLJUČCI

Za funkciju $f(x) = \alpha|x|$ i njezin graf razlikujemo 4 slučaja:

1. $\alpha > 1$
   Graf funkcije $f(x) = \alpha|x|$ nalazi se ...... grafa funkcije $g(x) = |x|$ i s ...... α sve je "uži".

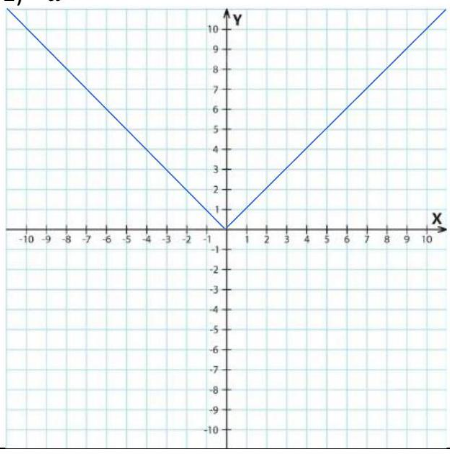
2. $0 < \alpha < 1$
   Graf funkcije $f(x) = \alpha|x|$ nalazi se ...... grafa funkcije $g(x) = |x|$ i s ...... α sve je "uži".

3. $-1 < \alpha < 0$
   Graf funkcije $f(x) = \alpha|x|$ nalazi se ...... grafa funkcije $g(x) = |x|$ i s ...... α sve je "širi".

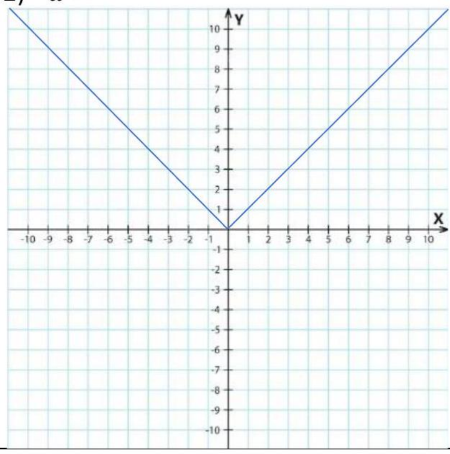
4. $\alpha < -1$
   Graf funkcije $f(x) = \alpha|x|$ nalazi se ...... grafa funkcije $g(x) = |x|$ i s ...... α sve je "širi".

Za svaki od ova 4 slučaja odaberi proizvoljan α i nacrtaj graf funkcije $f(x) = \alpha|x|$.

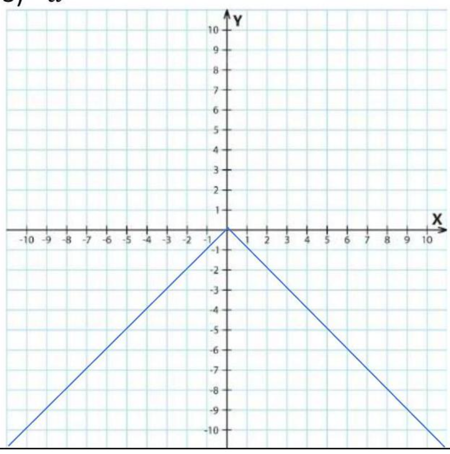
1) $a =$



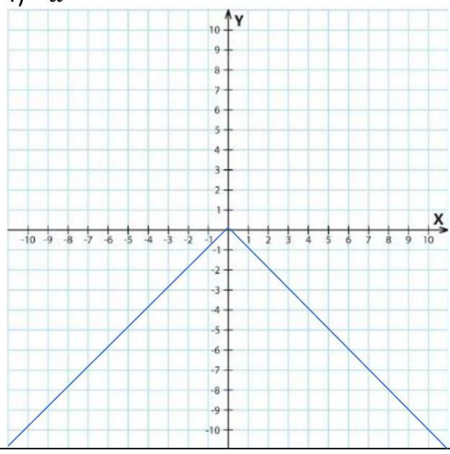
2) $a =$



3) $a =$



4) $a =$



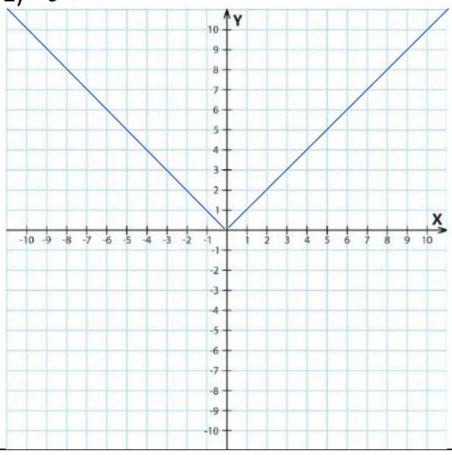
Za funkciju $f(x) = |x - c|$ i njezin graf razlikujemo 2 slučaja:

1. $c > 0$
   Graf funkcije $f(x) = |x - c|$ dobijemo tako da graf funkcije $g(x) = |x|$ translatiramo po ...... za $|c|$ ....

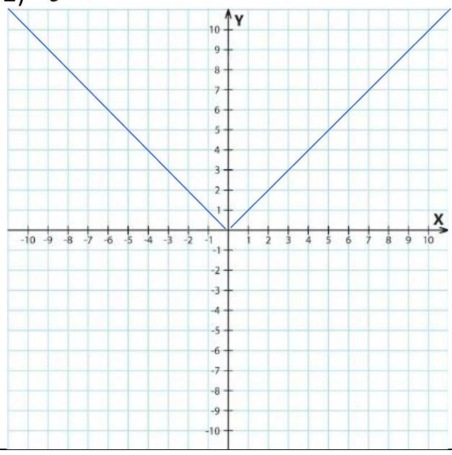
2. $c < 0$
   Graf funkcije $f(x) = |x - c|$ dobijemo tako da graf funkcije $g(x) = |x|$ translatiramo po ...... za $|c|$ ....

Za svaki od ova 2 slučaja odaberi proizvoljan c i nacrtaj graf funkcije $f(x) = |x-c|$.

1) $c =$



2) $c =$



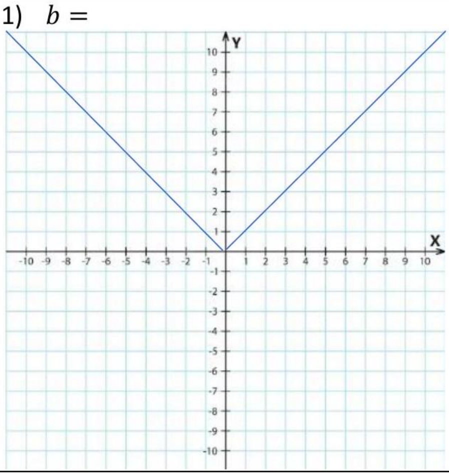
Za funkciju $f(x) = |x| + b$ i njezin graf razlikujemo 2 slučaja:

1. $b > 0$
   Graf funkcije $f(x) = |x - c|$ dobijemo tako da graf funkcije $g(x) = |x|$ translatiramo po ...... za $|b|$ prema ....

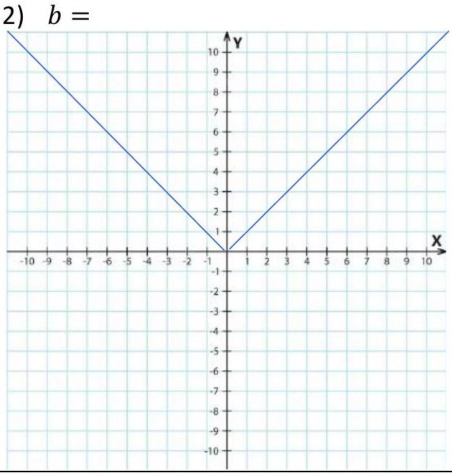
2. $b < 0$
   Graf funkcije $f(x) = |x - c|$ dobijemo tako da graf funkcije $g(x) = |x|$ translatiramo po ...... za $|b|$ prema ....

Za svaki od ova 2 slučaja odaberi proizvoljan b i nacrtaj graf funkcije $f(x) = |x|+b$.

1) $b =$

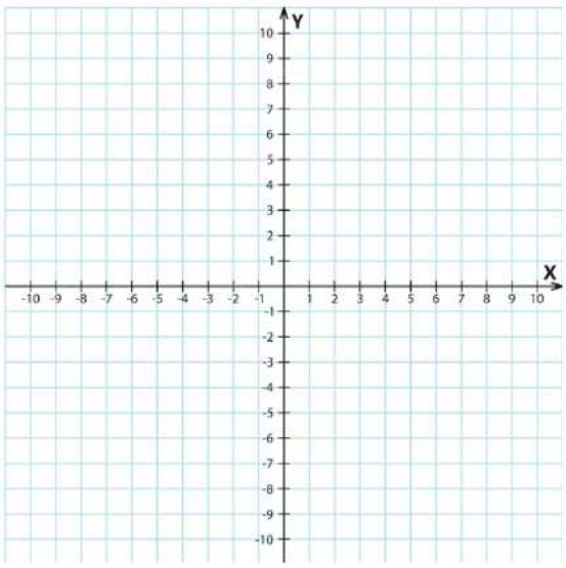


2) $b =$



****TREĆA FAZA****

Zadatak 4. Nacrtaj graf funkcije $f(x) = 3|x - 5| + 2$.



Zadatak 5. Nacrtaj grafove funkcija:

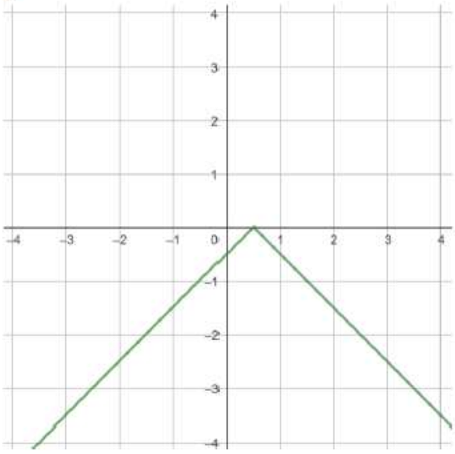
1. $f(x) = |x + 4| + 3$
2. $f(x) = 2|x - 3| + 2.5$
3. $f(x) = 4| - x - 1| - 1$
4. $f(x) = -3|x - 4| - 2$

4.3 Pisana provjera znanja

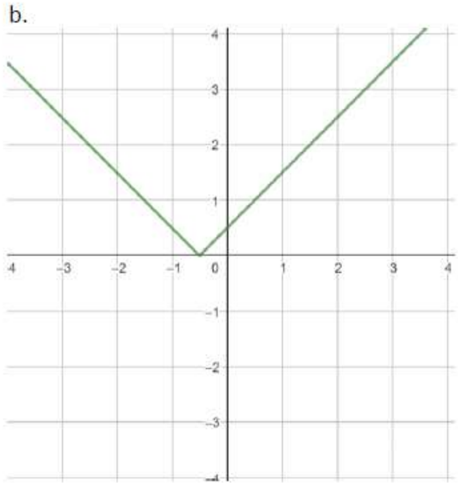
Zadatak 1. Zaokruži slovo ispred grafa zadane funkcije:

1) $f(x) = |-x - 0.5|$

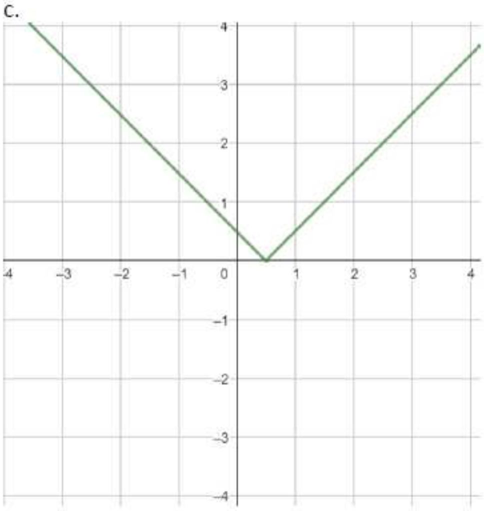
a.



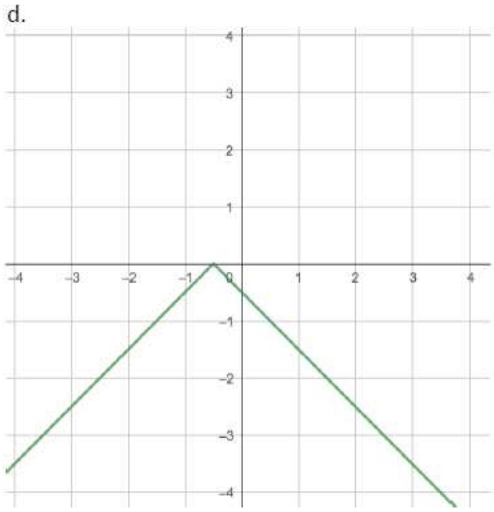
b.



c.

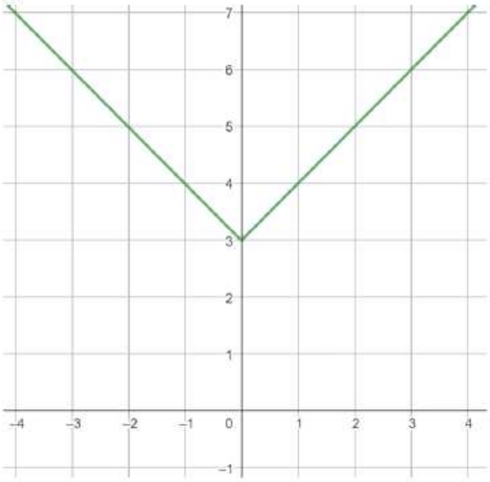


d.

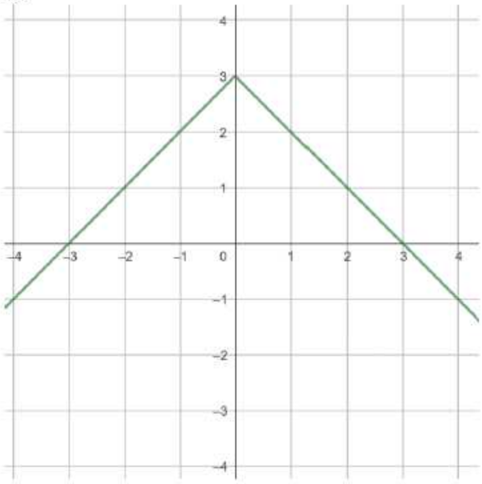


2) $f(x) = |-x| + 3$

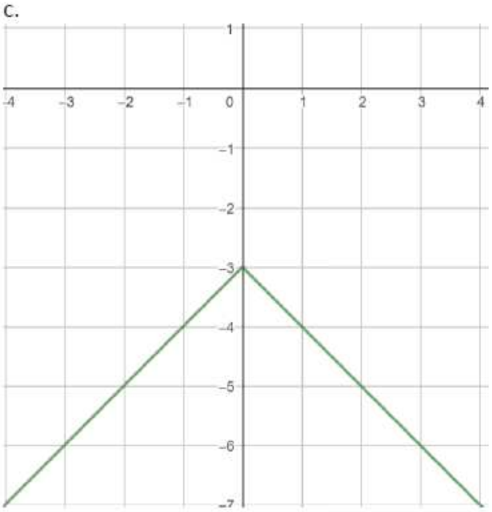
a.



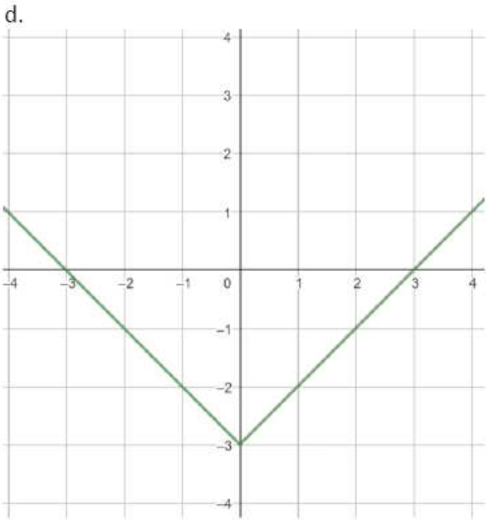
b.



c.

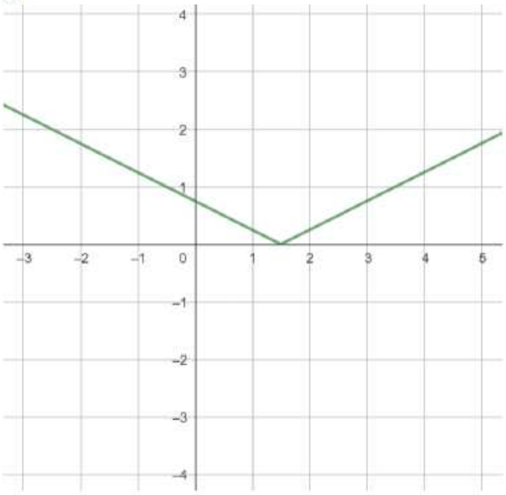


d.

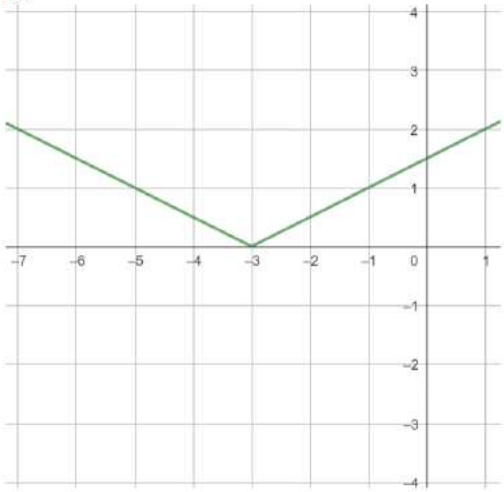


3) $f(x) = \frac{1}{2}|x - 3|$

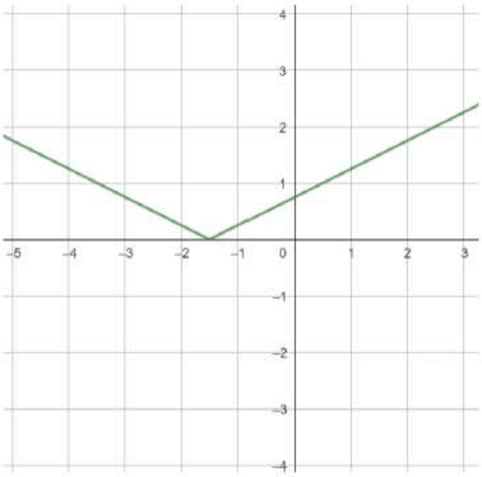
a.



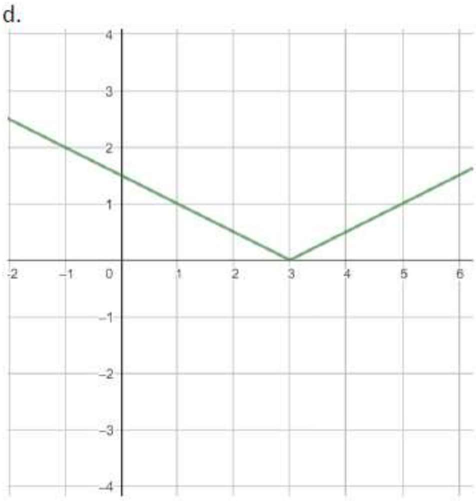
b.



c.

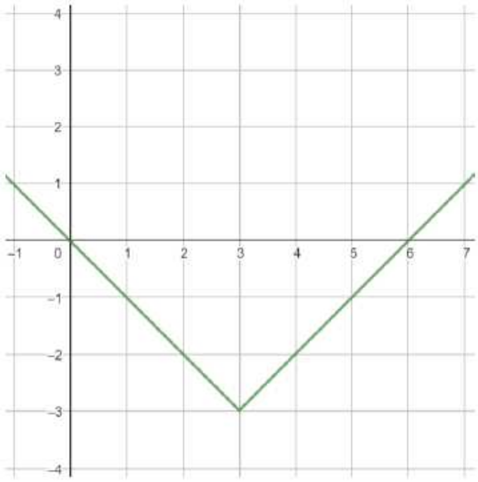


d.

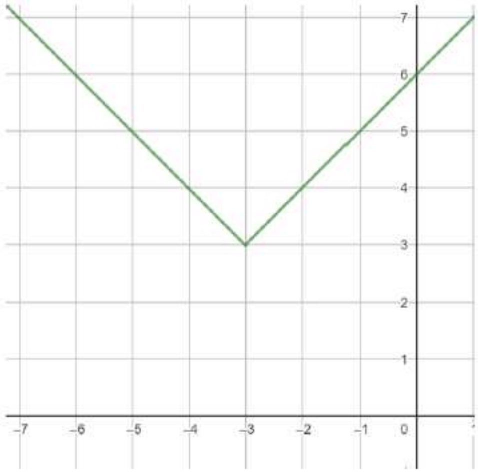


4) $f(x) = |x+3| - 3$

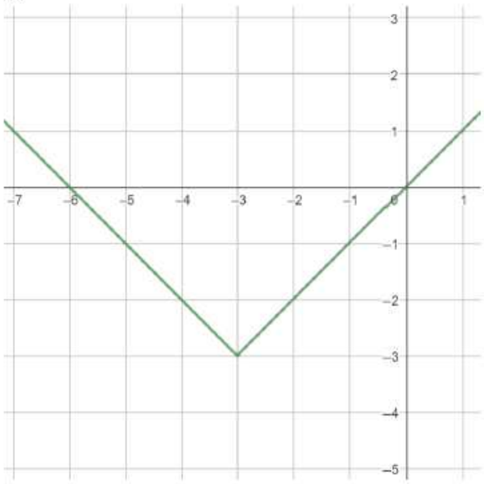
a.



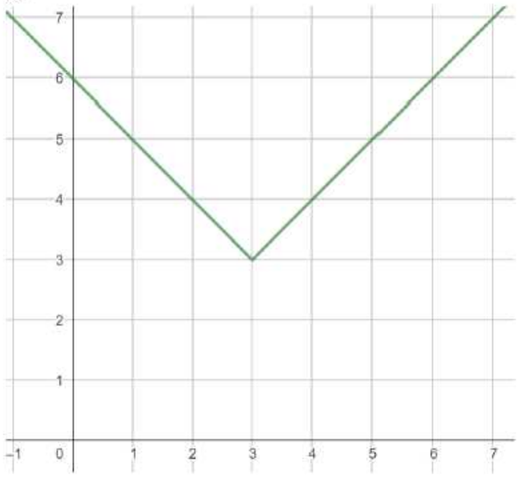
b.



c.

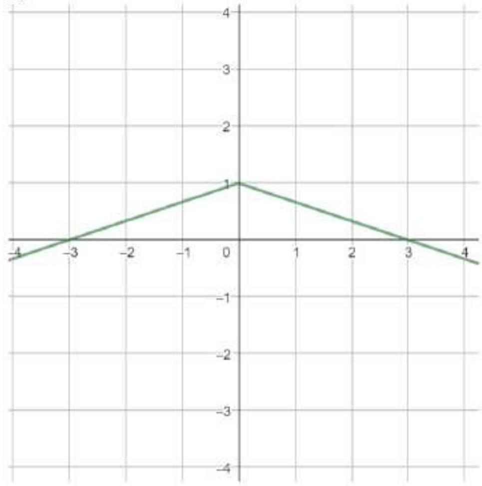


d.

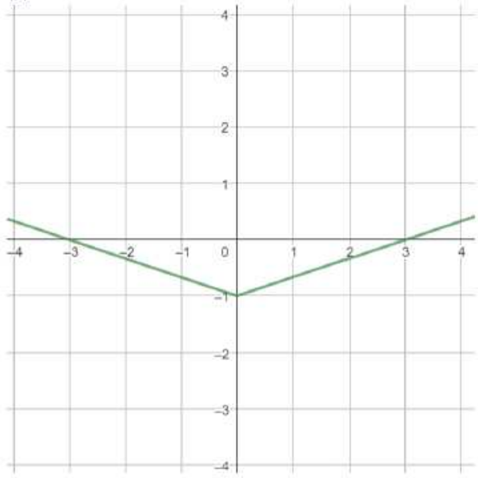


5) $f(x) = -\frac{1}{3}|x| + 1$

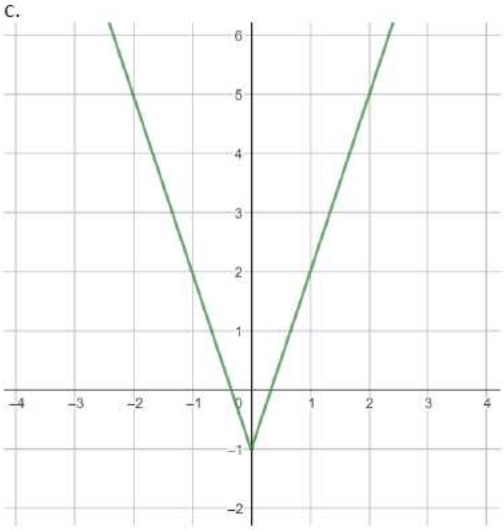
a.



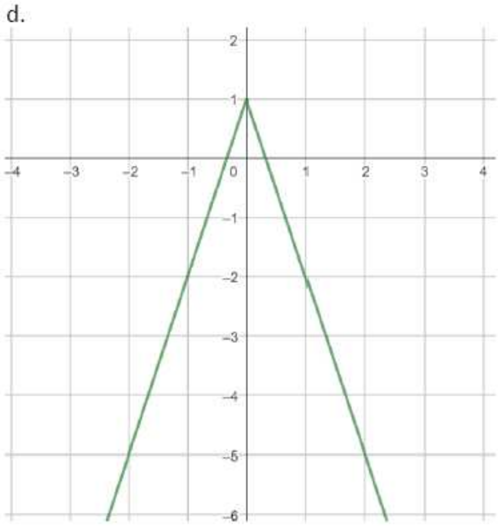
b.



c.

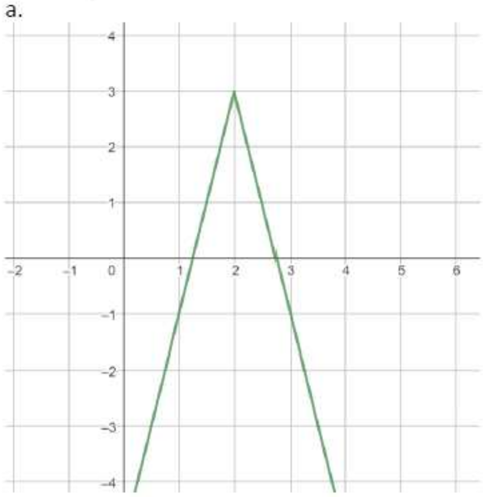


d.

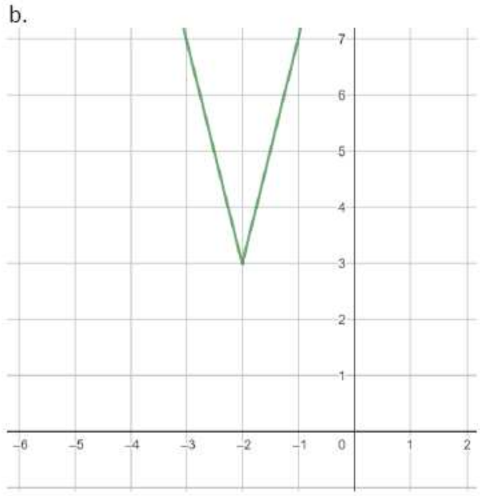


6) $f(x) = -4|x-2|+3$

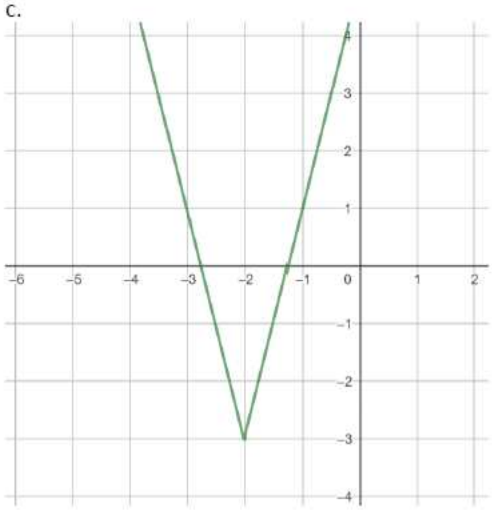
a.



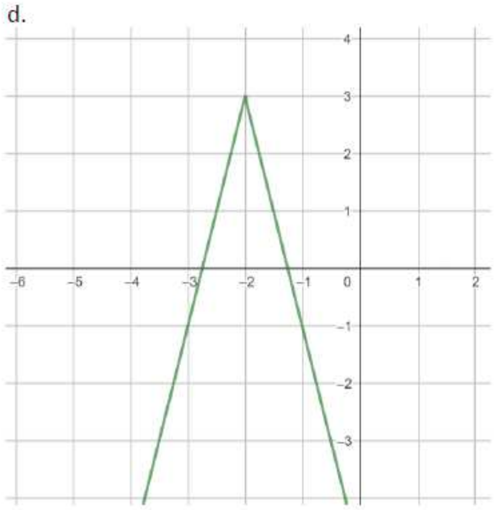
b.



c.

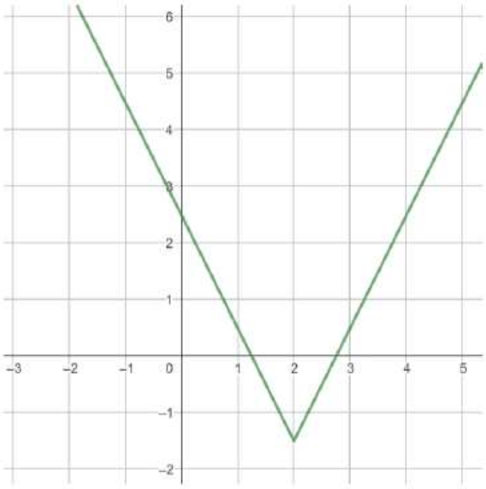


d.

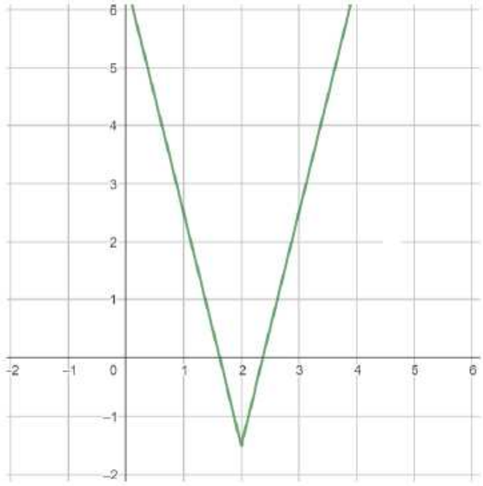


7) $f(x) = 2|2x - 4| - 1.5$

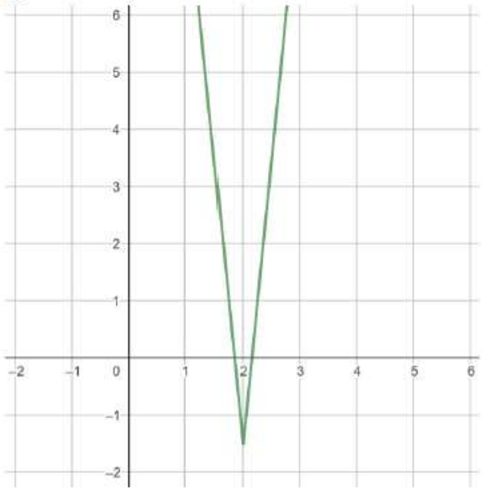
a.



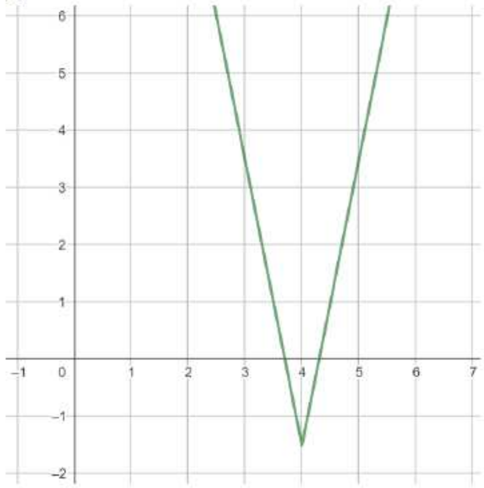
b.



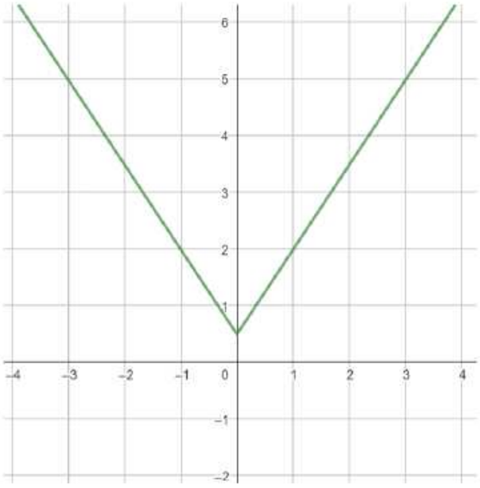
c.



d.



Zadatak 2. Zaokruži slovo ispred funkcije čiji je graf prikazan na slici.

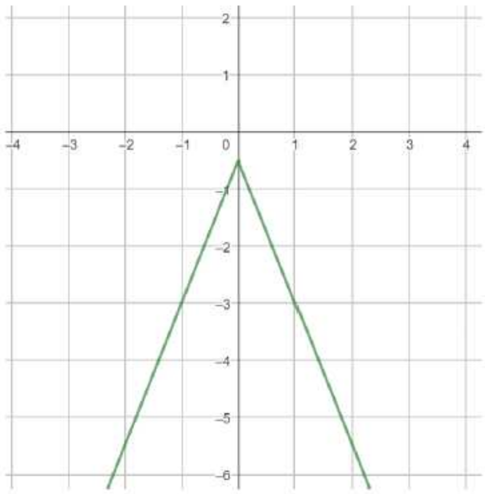


a) $f(x) = 2|x| + \frac{1}{2}$

b) $f(x) = \frac{4}{3}|x| - \frac{1}{2}$

c) $f(x) = \frac{3}{2}|x| + \frac{1}{2}$

d) $f(x) = 4|x| - \frac{1}{2}$

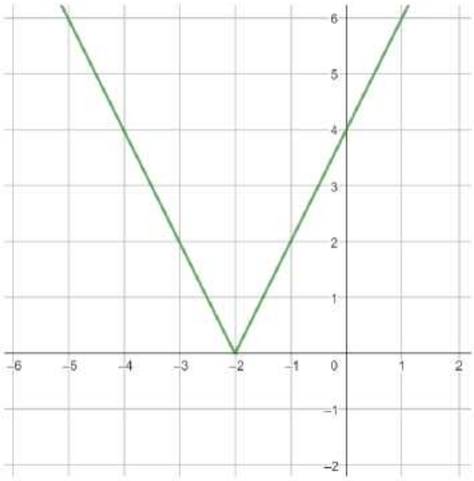


a) $f(x) = -|2.5x| + \frac{1}{2}$

b) $f(x) = -2.5|x| - \frac{1}{2}$

c) $f(x) = \frac{5}{2}|x| + \frac{1}{2}$

d) $f(x) = 2.5|x| - \frac{1}{2}$

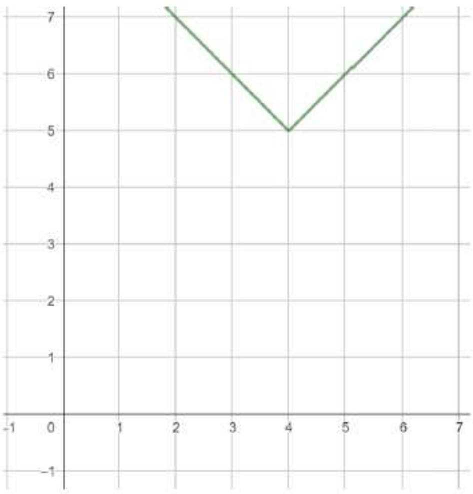


a) $f(x) = |-2x - 4|$

b) $f(x)| = -|2x - 4|$

c) $f(x) = 4|x + 2|$

d) $f(x) = |2x - 4|$

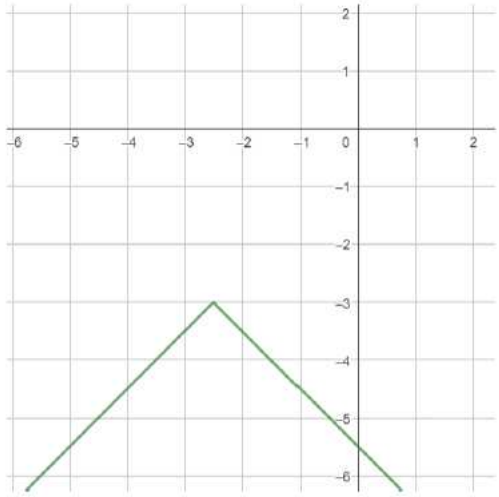


a) $f(x) = |x + 4| + 5$

b) $f(x)| = |x - 4| + 5$

c) $f(x) = |x + 4| - 5$

d) $f(x) = |x - 4| - 5$

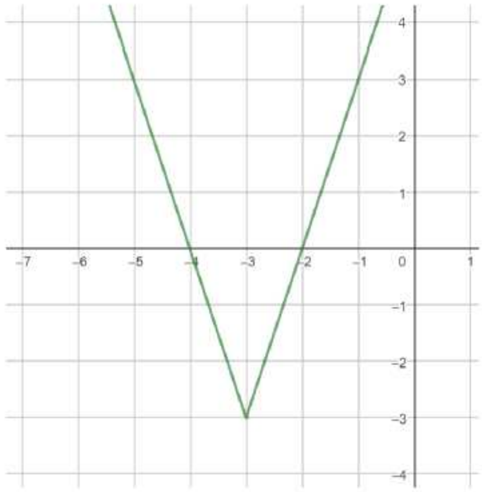


a) $f(x) = \left|x - \frac{5}{2}\right| + 3$

b) $f(x)| = -|x - 3| + \frac{5}{2}$

c) $f(x) = |x + 3| - \frac{5}{2}$

d) $f(x) = -\left|x + \frac{5}{2}\right| - 3$

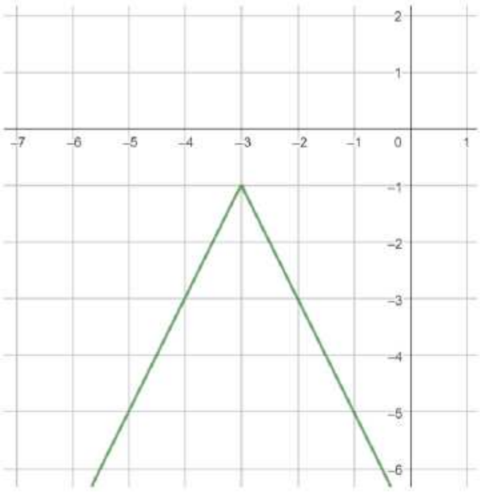


a) $f(x) = 3|x - 3|$

b) $f(x)| = 3|x + 3|$

c) $f(x) = 3|x - 3| - 3$

d) $f(x) = 3|x + 3| - 3$

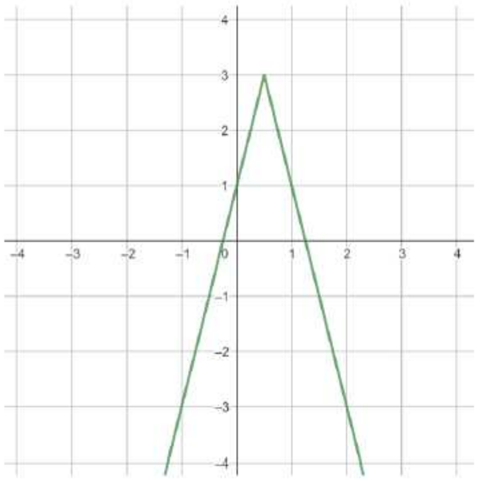


a) $f(x) = -2|x+3| - 1$

b) $f(x)| = 3|x-2| + 1$

c) $f(x) = 2|x-1| - 3$

d) $f(x) = 3|x+1| - 2$



a) $f(x) = -|x+3| - 2$

b) $f(x)| = -3|x-3| + 1$

c) $f(x) = -2|2x-1| + 3$

d) $f(x) = -3|2x+1| - 2$

Samovrednovanje

Samoprocjena

Što misliš u kojoj mjeri si savladao/savladala današnje gradivo? Zaokruži broj na skali od 1 do 10.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Kada bi rješavao/rješavala test vezan samo uz graf funkcije apsolutne vrijednosti, što misliš koju bi ocjenu dobio/dobila?

1 2 3 4 5

Zaključak

Kao što smo već zaključili, neposredno nakon primjene t-testa, na rezultatima pisanih provjera znanja, nemamo podatke na temelju kojih bismo mogli zaključiti da je jedna metoda izvođenja nastave bolja od druge. Iako obje metode imaju svoje prednosti i nedostatke. Metoda frontalne nastave zahtjeva manje vremena, kako za izvođenje, tako i za pripremu. Učenici nisu uključeni u proces učenja u tolikoj mjeri koliko su uključeni kada nastavni sadržaj usvajaju metodom grupnog rada. Učenici su tada primorani razmišljati, komunicirati i razmjenjivati ideje i mišljenja. Priprema za izvođenje nastave metodom grupnog rada iziskuje više uloženog vremena. Isto tako, više vremena potrebno je i za izvođenje nastavnog sata. Možemo zaključiti kako su obje metode primjerene u različitim situacijama i ne možemo reći da je jedna bolja od druge. Važno je u nastavnom procesu učenicima osigurati najbolje moguće uvjete za učenje i razvoj, neovisno o odabranoj metodi izvođenja nastave. Jedno što smo provođenjem t-testa na dobivenim podacima mogli zaključiti jest, da učenicima više odgovara metoda grupnog rada, a učenicama metoda frontalne nastave.

Bibliografija

[1] L. Bognar, *Socijalni oblici*, (2016), https://ladislav-bognar.net/node/78.

[2] V. Ilakovac, *Testiranje statističkih hipoteza i neke zamke*, (2009), 10–16, https://hrcak.srce.hr/32253.

[3] F. Jelavić, *Didaktičke osnove nastave*, Slap, 1994.

[4] S. Kadum-Bošnjak, *Suradničko učenje*, (2012), 181–199, https://hrcak.srce.hr/94728.

[5] I. Lavrnja, *Poglavlja iz didaktike*, Pedagoški fakultet Rijeka, 1998.

[6] Ž. Predojević, *Temeljni nastavni oblici rada*, (2010), http://os-popovac.skole.hr/ucitelji?news_id=672.

[7] N. Sandrić i Z. Vondraček, *Vjerojatnost - predavanja*, Prirodoslovno matematički fakultet, 2019, https://www.pmf.unizg.hr/images/50023697/vjer_predavanja.pdf.

[8] I. Valentić, *Statistika - vježbe*, Prirodoslovno - matematički fakultet, 2023, https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/stat/files/Statistika_vjezbe_skripta.pdf.

Sažetak

Cilj ovog rada je statistički analizirati postoji li razlika u usvojenenosti matematičkog sadržaja kod dvije skupine učenika. Prva skupina učenika, matematički je sadržaj obradila metodom frontalne nastave, dok je druga skupina nastavni sadržaj obradila metodom grupnog rada. Obje su skupine učenika dobile iste pisane provjere znanja koje će biti indikator usvojenosti nastavnog sadržaja kod već spomenutih skupina učenika. Rezultati pisanih provjera znanja analizirat će se statističkim testom pod nazivom t-test. Rezultati dobiveni primjenom navedenog statističkog testa mogu se vidjeti u radu.

Summary

The goal of this thesis is to statistically analyze whether there is a difference or not, in the acquisition of mathematical content by two groups of students. The first group of students processed the mathematical content while teacher was using the method of frontal teaching, while the second group processed the teaching content using the method of group work. Both groups of students received the same tests, whose results will indicate which of the groups acquired the knowledge of the teaching content better. The results of the written knowledge tests will be analyzed using a statistical test called the t-test. The results obtained by applying the mentioned statistical test can be seen in the paper.

Životopis

Iva Subotičanec rođena je 19.12.1998. u Koprivnici gdje je pohađala Osnovnu školu "Đuro Ester" Koprivnica od 2005. do 2013. godine. Nakon toga upisuje Gimnaziju "Fran Galović" u Koprivnici, prirodoslovno - matematički smjer, koju završava 2017. godine. Nakon čega se upisuje na Matematički odsjek Prirodoslovno - matematičkog fakulteta u Zagrebu, najprije smjer Matematika, a već godinu nakon na Matematika: smjer nastavnički, koji završava 2021. godine. Iste godine upisuje diplomski studij Matematika: smjer nastavnički.