Georg Cantor i teorija skupova

Topić, Josip

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Josip Topić

GEORG CANTOR I TEORIJA SKUPOVA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Boris Muha

Zagreb, rujan, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ______________________________, predsjednik
2. ______________________________, član
3. ______________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ______________________________
2. ______________________________
3. ______________________________

”Nitko nas neće izgnati iz raja koji je Cantor za nas stvorio.” David Hilbert

Sadržaj

Uvod

Kroz vrtlog vječnosti, u beskonačnosti brojeva, pronalazimo sjaj jednog izuzetnog uma, Georga Cantora. Poput zvijezde koja se uzdiže na nebeskom svodu, Cantor je obasjao matematički svijet svojim briljantnim otkrićima i revolucionarnim idejama. U dubinama teorije skupova, on je tkao niti koje povezuju matematičku misao s neograničenim potencijalom beskonačnosti.

S ovom uvodnom rečenicom započinjemo putovanje kroz vremenski prostor kako bismo istražili sjaj Cantorove vizije i njegov neizbrisiv trag u povijesti matematike. Njegova priča, isprepletena s nadahnućem i izazovima, otkriva nam konture genija koji je hrabro kročio putem manje istraženim, otvarajući vrata novim spoznajama i raspravama.

Prvi korak na tom putovanju vodi nas kroz prostranstva Cantorove biografije. Rođen u sivilu 19. stoljeća, Cantor je sazrijevao uz bljeskove intelektualne strasti i izvanrednu darovitost. Njegova žudnja za znanjem i nespokojna duša vodili su ga do vrhova akademskih institucija, gdje je hrabro postavljao temelje za svoje nevjerojatne matematičke poduhvate.

Dok stupamo u drugi svijet Cantorovog dometa, uranjamo u dubine teorije skupova. Poput putnika u čarobnoj šumi, otkrivamo mistične skupove, njihove elemente i složene odnose među njima. Cantor je bio arhitekt tog svijeta, pronalazeći harmoniju u hijerarhiji skupova i otvarajući vrata neistraženim horizontima beskonačnosti.

No, najveći plodovi Cantorove genijalnosti dolaze do izražaja u koncepciji kardinalnosti skupova. Poput pjesnika koji pronalazi ritam u kaosu, Cantor je dokazao da beskonačnost dolazi u mnogim oblicima. Njegova slavna dijagonalna metoda, poput melodije koja odzvanja, otkrila je bogatstvo kardinalnih brojeva i njihovu neiscrpnu raznolikost.

No, kao što svjetlost baca sjenu, tako su se i Cantorovi radovi suočili s kontroverzama i osporavanjima. Izazvavši ustaljena uvjerenja matematičke zajednice, Cantor je naišao na otpor i skepsu. Ipak, hrabro se suprotstavljajući kritikama, branio je svoje vizionarske ideje, hraneci se vjerom u moć matematike da otkriva istine skrivene duboko u njenoj suštini. Njegova strastvena borba za priznanje i razumijevanje njegovih teorija postala je simbol hrabrosti i predanosti, istinska melodija koja odzvanja kroz vijekove.

Danas, dok zrake svjetlosti obasjavaju matematički horizont, Cantorova nasljeđa ostaju živa inspiracija za mlade umove i istraživače. Njegove ideje su se ukorijenile duboko u temelje suvremene matematike, pružajući platformu za daljnje istraživanje i otvarajući put ka novim spoznajama.

Kroz ovaj rad, započet ćemo svoje putovanje kroz Cantorov svijet, oslikavajući sliku njegovog života i rada. Proći ćemo kroz labirint teorije skupova, otkrivajući njegove inovacije i pronalazeći snagu beskonačnosti. Analizirat ćemo kritike i osporavanja koja su pratila njegove korake te istaknuti njegov utjecaj na matematičku zajednicu.

Dok se krećemo kroz stranice ovog rada, pozvani smo da otkrijemo ljepotu matematičke misli i da prihvatimo izazov istraživanja nepoznatih teritorija. Georg Cantor, svjetionik u beskrajnom oceanu znanja, nastavlja nam ukazivati na snagu ljudske spoznaje i beskrajne mogućnosti koje matematika pruža.

Uključimo se, stoga, u ovo putovanje začaranim svijetom Georga Cantora, gdje svaki korak otkriva novu dubinu i svaki pogled nas vodi bliže razumijevanju tajni matematičkog univerzuma.

Poglavlje 1

Život i djelo Georga Cantora

U ovom diplomskom radu istražujemo život i djelo Georga Cantora, značajne ličnosti u matematičkom svijetu 19. stoljeća. Kroz biografski osvrt, proučavamo njegov rani život, obrazovanje i profesionalnu karijeru kako bismo istaknuli ključne trenutke i utjecaj na suvremenu matematiku. Cantor je pokazao iznimnu matematičku nadarenost od rane mladosti, potaknut vodećim matematičarima tog vremena i plodnom intelektualnom atmosferom. Njegova želja za istraživanjem rezultirala je revolucionarnim matematičkim otkrićima, uključujući radove o beskonačnosti i kardinalnosti skupova. Njegove ideje nisu samo utjecale na matematiku, već i na filozofiju i druge znanstvene discipline. Njegov doprinos i hrabrost u suočavanju s kontroverzama ostavili su trajan utjecaj na matematičku misao i razvoj različitih disciplina.

1.1 Rani život Georga Cantora

Ovo potpoglavlje napisano je prema [4],[5],[6],[8],[14].
Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor rođen je 3. ožujka 1845. godine u Sankt Petersburgu, Rusija. Bio je prvo dijete bračnog para Georga Waldemara Cantora i njegove umjetnosti slkone supruge Marie Anne Böhm. Otac mu se rodio u Kopenhagenu u Danskoj, ali je kao mladić odselio u Sankt Petersburg. Cantorova obitelj, iako židovskog podrijetla, bila je kršćanska budući da se otac preobratio u protestansku vjeru. Otac Georg bio je uspješan trgovac koji se bavio uvozom tkanina, a majka Ruskinja iz katoličke obitelji od koje je Cantor nasljedio talent za glazbu.

Cantorova obitelj bila je dobrostojeća i pružila mu je stabilno djetinjstvo. Tijekom svojih ranih godina, Cantor je pokazivao iznimnu radoznalost i sklonost matematici.

Proveo veći dio svog djetinjstva u Rusiji, gdje je imao priliku upoznati se s bogatom matematičkom tradicijom i intelektualnom atmosferom. No, njegova se obitelj kasnije preselila u Frankfurt zbog očevog lošeg fizičkog stanja. Otac mu je preminuo 1863.g.

U Njemačkoj, Cantor se nastanio u gradu Wiesbadenu. Ondje je održavao blisku vezu sa svojom obitelji, posebno s ocem, koji je za života izrazio želju da Cantor studira tehničke znanosti. Jednom je prilikom otac poslao Cantoru pismo:

”Oni ne očekuju od tebe ništa manje nego da postaneš Theodor Schaeffer, a kasnije možda ako Bog bude htio, blistava zvijezda na tehničkom nebu.”

Unatoč očevoj želji, Cantor je bio iznimno motiviran i strastven prema matematici, što je na kraju prevagnulo u izboru njegove karijere.

Odnosi Cantora s njegovom obitelji bili su značajni u njegovom životu. Oni su ga podržavali u njegovim matematičkim interesima i pružili mu potrebnu podršku i ohrabrenje. Čak je i njegov otac, unatoč želji za tehničkim studijem, prepoznao je Cantorovu strast prema matematici i podržavao ga u njegovim nastojanjima.

”Dragi moj tata, ja sam sada sretan kada vidim da te neću naljutiti zato što slijedim svoja osjećanja pri izboru. Nadam se da ćeš doživjeti da nađeš u meni radost, dragi oče; jer moja duša, moje čitavo biće živi za taj poziv; ono što čovjek želi raditi i ono čemu ga vuče unutarnji poziv, to će i završiti!”

Važno je napomenuti da se Cantorov rani život i odnos s obitelji često smatraju ključnim čimbenicima koji su oblikovali njegovu karijeru i istraživanja u matematici. Njegova radoznalost, potpora obitelji i okruženje koje je poticalo intelektualnu razmjenu imali su značajan utjecaj na formiranje njegovih ideja i revolucionarnih otkrića u teoriji skupova.

Iako su detalji o Cantorovom ranoj obitelji i njegovom životu u Sankt Petersburgu i Wiesbadenu dostupni i dokumentirani, važno je napomenuti da su ovi podaci ponekad oskudni i interpretacije mogu varirati.

1.2 Obrazovanje Georga Cantora

Ovo potpoglavlje napisano je prema [4],[5],[6],[8],[14].
Cantorova školska karijera bila je slična karijeri najvećih nadarenih matematičara. Nakon osnovnog obrazovanja u Rusiji gdje je dobivao poduke od privatnog učitelja, slijedio je pučko-školski tečaj u Sankt Petersburgu. Preseljenjem u Njemačku nastavio je svoje akademsko usavršavanje gdje je najprije pohađao privatne škole u Frankfurtu i neklasičnu školu u Darmstadu da bi se naposljetku s navršenih petnaest godina upisao u gimnaziju u Weisbadenu. Cantor je započeo sveučilišne studije u Zurichu 1862.g., ali je iduće godine prešao na Sveučilište u Berlinu koje je bilo jedno od najprestižnijih sveučilišta u to vrijeme. U Berlinu se usavršio u matematici, filozofiji i fizici. Učitelji iz matematike bili su mu Kummer, Weierstrass i njegov budući protivnik Kronecker, čovjek kojeg se ponekad naziva "čovjek zbog kojeg je Cantor poludio". Pridržavajući se uvriježenog njemačkog običaja, Cantor je proveo kratko vrijeme na drugom sveučilištu, pa je 1866.g. boravio jedan semestar u Gottingenu.

Njegova strast prema matematici nije mogla proći nezapaženo, a Cantor je brzo stekao reputaciju talentiranog i inovativnog matematičara. Nakon završetka diplomskog studija, odlučio se posvetiti istraživanju u području matematike. Njegovi radovi bili su usmjereni prema teoriji brojeva i analizi.

Njegova iznimna sposobnost za matematiku privukla je pozornost profesora i kolega, a Cantor je dobio priliku raditi na svom doktoratu. Pod mentorstvom Hermanna Weierstrassa, jednog od najutjecajnijih matematičara svog vremena, Cantor je istraživao teme vezane uz Gaussovo djelo "Disquisitiones Arithmeticea". 1867.g. njegov rad na Gaussovom problemu pronalaska rješenja jednadžbe s cijelim brojevima x, y, z

$$ax^2 + by^2 + cz^2 = 0,$$

gdje su a, b, c bilo koji cijeli brojevi, biva privhaćen za dobivanje doktorske dizertacije.

Iako je Cantorovo obrazovanje bilo ključno za njegov akademski put, njegova strast, intelektualna znatiželja i iznimni matematički um bili su ključni faktori koji su oblikovali njegovu karijeru. Njegovi radovi ostavili su trajan utjecaj na matematiku i postavili temelje za suvremene koncepte teorije skupova koji su revolucionirali način razmišljanja o matematici. Cantorova upornost u istraživanju nepoznatih područja matematike i hrabrost da se suoči s kontroverzama često su mu donosili kritike i osporavanja.

Unatoč izazovima s kojima se suočavao, Cantor je nastavio razvijati svoje ideje i teorije. On je bio pionir u razumijevanju beskonačnosti i neprebrojivih skupova. Njegovi koncepti poput kardinalnih brojeva i teorije kontinuuma otvorili su vrata novim matematičkim spoznajama i rezultatima.

1.3 Profesionalna karijera

Ovo potpoglavlje napisano je prema [4],[5],[6],[8],[14].

Nakon završetka studija, prvu praksu iz nastave stekao je u djevojačkoj školi u Berlinu. Za ovu zadaću bio je osposobljen slušajući predavanja iz matematičke pedagogije. Ovaj posao pružio mu je priliku da stekne iskustvo u poučavanju i u izgradnji temelja za daljnji rad.

Cantorovo materijalno stanje bilo je ono svakog manje poznatog njemačkog profesora matematike. Nakon stjecanja doktorata 1869.g., u 24. godini života, Cantor je započeo svoju akademsku karijeru kao profesor matematike na Sveučilištu u Halleu, trećerazrednoj instituciji gdje je imenovan u "Privatdozenta" (predavač koji živi od školarine koju uspije skupiti od svojih studenata). 1872.g. imenovan je pomoćnim profesorom, a 1879.g. redovnim profesorom. Tijekom svog boravka u Halleu, Cantor je aktivno sudjelovao u istraživanju i podučavanju. Definirao je iracionalne brojeve kao limese nizova racionalnih brojeva dok se bavio problemom (konvergencije trigonometrijskih redova) na kojega je uputio kolega i prijatelj Heinrich Edouard Heine. Njegov rad na teoriji skupova privukao je pažnju matematičke zajednice, postavljajući temelje za daljnje istraživanje i razvoj u tom području. Nikad nije ostvario svoju ambiciju da dobije mjesto profesora u Berlinu, što je bila najviša čast u vrijeme Cantorova najvećeg i najorginalnijeg stvaranja (1873.-1884.).

Godina 1874. u kojoj se službeno pojavio Cantorov prvi revolucionaran rad o teoriji skupova bila je godina njegova vjenčanja s Vally Guttmann u 29. godini života. Iz ovog braka rodila su se dva sina i četri kćeri. Nijedno od djece nije naslijedilo očevu matematičku nadarenost. Za vrijeme medenog mjeseca na Interlakenu mladi se par susretao s Richardom Dedekindom, s kojim je Cantor razmijenjivao ideje i koncepte koji su oblikovali razvoj teorije skupova. Dedekind je bio podrška Cantoru, a njihova suradnja rezultirala je daljnjim napretkom u istraživanju skupova i njihovih kardinalnosti.

Cantor je također bio povezan s Karlom Weierstrassom. Weierstrass je bio poznat po svojim radovima u analizi i postao je mentor i izvor inspiracije za Cantora. Njihov odnos pružio je Cantoru priliku za daljnji razvitak svojih vještina i ideja u matematici.

Dokaz o neprebrojivosti skupa $\mathbb{R}$ objavljen tek 1874.g. u uglednom časopisu Crelle's Journal iako je već 1873.g. prvu skicu dokaza poslao prijatelju i kolegi Dedekindu. Objavi članka protivio se Kronecker, tada jedan od urednika časopisa, te je članak objavljen tek nakon Dedekindove i Weierstrassove intervencije. Kroneckerovo protivljenje proizašlo je iz filozofske prirode matematičara konstruktivista koji priznaju samo dokaze postojanja matematičkih objekta koji daju precizne načine konstrukcije tih objekta. Kao matematičar, konstruktivist i vjernik, za vrijeme rasprava i sporenja Cantorova rada Kronecker bi znao reći:

"Bog je stvorio cijele brojeve, se ostalo je čovjekovo djelo."

Cantor je iz svog dokaza o neprebrojivosti skupa $\mathbb{R}$ dobio za korolar da postoji beskonačno mnogo transcedentnih brojeva. Ta posljedica Cantorova dokaza je bila posebno senzacionalna jer je uopće postojanje transcedentnih brojeva dokazao 22 godine ranije Joseph Liouville.

Nakon svog članka u Crelle's Journalu Cantor je pokušao dokazati očitu činjenicu neekvipotentnosti kvadrata i dužine. No, 1877.g. dokazao je upravo suprotno: ne samo da su kvadrat i dužina ekvipotentni, nego je i kocka ekvipotentna s njima. Tom prilikom je Cantor rekao:

"Vidim, ali ne vjerujem!"

Taj je rezultat također objavio u Crelle's Journalu ponovo uz velik Kroneckerov otpor, to je bilo njegovo zadnje objavljivanje u tom časopisu.

"Od kakve je koristi vaše divno istraživanje u vezi s brojem π? Zašto studirati takva pitanja, budući da iracionalni brojevi ne postoje."

Ovo mišljenje iako upućeno Lindemannu za dokaz transcedentnosti broja π imalo je veliki učinak i na Cantorov dokaz da su transcedentni brojevi beskonačno brojniji od prirodnih brojeva i pritom ostavilo veliki trag na osjetljivog Georga Cantora.

Unatoč sve većem priznanju i poštovanju koje je Cantor dobivao za svoj rad, nije izbjegao ni kontroverze. Neki matematičari i filozofi, poput Kroneckera, osporavali su Cantorovu teoriju skupova, tvrdeći da je njegova koncepcija beskonačnosti proturječna ili nedostatno temeljena. Ove kritike su utjecale na Cantorovo psihičko stanje. Kronecker je žestoko napao Cantorov rad svim sredstvima koja su mu bila na dohvatu, držeći da matematika pod Cantorovim vodstvom srlja u ludnicu. Ishod je bio taj da nije teorija skupova otišla u ludnicu, nego je sam Cantor otišao u ludnicu. Kroneckerovi napadi uništili su tvorca teorije. Mentalni stresovi s kojima se susretao zbog kritika i osporavanja njegovih ideja doveli su do razdoblja depresije i emocionalne nestabilnosti. Tokom 1880-ih je počeo patiti od depresija; prvi zabilježen napad doživio je 1884.g. S vremenom su napadi postali sve češći i intezivniji. Za vrijeme jednog lucidnog intervala zamolio je svoje pretpostavljene u Halleu da ga premjeste s položaja profesora matematike na katedru filozofije. Te se u svojim "mračnim danima" više bavio teorijama da je drame Williama Shakespara napisao Roger Bacon nego matematikom. Objavljivao je i radove o toj teoriji, a kada je 1911.g. bio kao ugledni znanstvenik pozvan na 500. obljetnicu St. Andrews sveučilišta u Škotskoj, govorio je uglavnom o Shakespare-Bacon teoriji. Jedan dio njegova najuspješnijeg rada na teoriji skupova učinjen je u intervalima između dvaju napada. Nakon oporavljanja od napadaja primjećivao je da mu um postaje bistriji.

Cantorova profesionalna karijera obuhvaćala je ne samo istraživanje, objavljivanje radova i depresiju, već i poučavanje matematike i utjecaj na mlade matematičare. Njegovo poučavanje i mentorstvo imalo je dugotrajan utjecaj na razvoj matematike. Mnogi od Cantorovih studenata kao npr. F. Bernstein kasnije su postali poznati matematičari koji su nastavili njegovu viziju i dalje istraživali teoriju skupova. Godine 1891., nakon dugogodišnjeg rada i revolucionarnih doprinosa matematici, Cantor je dobio status izvanrednog profesora na Sveučilištu u Halleu u Njemačkoj. Ova pozicija omogućila mu je da se potpuno posveti istraživanju i podučavanju matematike te da nastavi s razvojem svojih teorija. Njegovi su radovi objavljeni u uglednim matematičkim časopisima gdje mu je pomogao prijatelj Mittag Leffler objavivši dio Cantorova rada u svojem časopisu "Acta Mathematica", a njegove ideje su raspravljane i proučavane širom svijeta. Cantor je bio priznat kao pionir i vizionar koji je proširio granice matematike. Jedan od onih koji su vjerovali u Cantorove teorije bio je veliki Charles Hermite, njegov srdačan prihvat Cantorove doktrine izrazito su veselile Georga:

"Pohvale s kojima me Hermite obasipa u tom pismu u svezi s predmetom teorije skupova toliko su visoko u mojim očima, toliko su nezaslužene da ih ne bih želio objavljivati, kako ne bih izazvao predbacivanja da sam njima zasljepljen."

Bertrad Russell tvorac jednog od najpoznatijih paradoksa u teoriji skupova jednom je prilikom o Carnoru rekao:

"Zenon se bavio trima problemima...To su problemi neizmjerno male veličine, beskonačnosti i kontinuiranosti...Od toga pa do našeg vremena najsavršeniji umovi svake generacije jedan za drugim zahvaćali su ove probleme, no, grubo rečeno, ništa nisu postigli...Weierstrass, Dedekin i Cantor potpuno su ih riješili. Njihova rješenja toliko su jasna da se više ne stvaraju ni najmanje sumnje u njihovu točnost. Ovo je dostignuće po svojoj prilici najveće s kojim se ovo stoljeće može pohvaliti. Problem beskonačno male veličine riješio je Weiestrass, rješavanje drugih dvaju započeo je Dedekin , a definitivno dokrajčio Cantor."

Godine 1896. umrla je majka Georga Cantora, a 1899.g. izgubio je mlađeg brata i najmlađeg sina. Nakon što je u razdoblju 1900.-1910. zbog čestog boravka u sanatorijima i duševnim ustanovama bio odsutan s posla, povukao se u mirovinu 1913.g. Posljednje godine života proveo je neuhranjen zbog ratnih uvjeta, a umro je u 73. godini životau u Halleu 6. siječnja 1918.g. u duševnoj bolnici zbog srčanog udara. Pred kraj života primao je počasti i priznanja, pa su čak i stare ogorčenosti protiv Kroneckera bile zaboravljene. Za Cantora je bilo zadovoljstvo sjećati se na to da su se on i Kronecker pomirili nekoliko godina prije Kroneckerove smrti 1891.g.

Poglavlje 2

Pojam skupa

2.1 Povijest teorije skupova prije Georga Cantora

Ovo potpoglavlje napisano je prema [8]. Antička matematika obuhvaća razmišljanja i ideje matematičara koji su djelovali u različitim civilizacijama antičkog svijeta, uključujući Babilonce, Egipćane, Grke i Rimljane. Iako pojam skupa kao takav nije bio razvijen u to vrijeme, postoje neki koncepti koji su imali slične ideje kao skupovi. Na primjer, Pitagora i njegova škola koristili su ideju skupova brojeva i razmišljali o matematičkim odnosima među njima. Stari Grci su također istraživali koncepte beskonačnosti, kao što su Zenonovi paradoksi.

Tijekom srednjovjekovnog razdoblja, matematika se uglavnom temeljila na Aristotelovoj logici. Koncept skupova nije bio središnji dio matematičkih razmišljanja tog vremena. Međutim, u renesansi su se počele razvijati ideje koje su prethodile modernoj teoriji skupova. Na primjer, Girolamo Cardano je u svom radu "Ars Magna" iznio osnovne ideje o skupovima i logičkim operacijama nad njima. Richard Dedekind je također pridonio razvoju teorije skupova u svojem radu "Stetigkeit und irrationale Zahlen" (Kontinuitet i iracionalni brojevi).

U 17. i 18. stoljeću, matematičari su počeli razmišljati o konceptu beskonačnosti na nov način. Neki od ključnih doprinosa u ovom razdoblju uključuju sljedeće:

John Wallis je pridonio razvoju beskonačnih redova i omogućio matematičko razumijevanje beskonačnih procesa. Njegov rad "Arithmetica Infinitorum" donio je nove perspektive na beskonačnost. Isaac Newton i Gottfried Wilhelm Leibniz razvili su diferencijalni i integralni račun, koji je uključivao koncepciju beskonačno malih i beskonačno velikih veličina. Ova nova matematička disciplina omogućila je brže napredovanje u matematici. Leonhard Euler je koristio beskonačnost u svojim radovima na brojevima, funkcijama i analizi. Njegova istraživanja pridonijela su daljnjem razumijevanju beskonačnosti.

Bernard Bolzano je u svom radu "Paradoxes of the Infinite" iznio ideje o beskonačnosti i proporcionalnosti. Razmatrao je koncepte beskonačnih skupova i njihovu strukturu. Augustin-Louis Cauchy je bio važan matematičar koji je pridonio razvoju analize i teorije neprekidnosti. Njegovi radovi na konvergenciji redova i neprekidnim funkcijama bili su temeljni za kasnije razumijevanje beskonačnosti skupova. Karl Weierstrass je dao ključan doprinos razvoju matematičke analize i rigoroznog pristupa matematičkim konceptima. Njegova definicija neprekidne funkcije i limesa bili su temeljni za daljnji rad na beskonačnosti.

Ove su ličnosti i njihovi radovi otvorili put za Cantorov pristup teoriji skupova i revolucionarne ideje koje je donio. Njihovi doprinosi u razumijevanju beskonačnosti i matematičke analize bili su ključni za razvoj teorije skupova kao zasebne matematičke discipline.

2.2 Koncepti i definicije teorije skupova

Ovo potpoglavlje napisano je prema [1],[2],[7],[8],[9],[10],[15]. U ovom dijelu rada uvest ćemo osnovne pojmove teorije skupova, iako se sam tvorac naivne teorije skupova Georg Cantor nije eksplicitno pozivao na neke aksiome o skupovima, analizom njegova rada može se zaključiti da se skoro svi teoremi koje je on uveo mogu izvesti iz tri aksioma:

- Aksiom ekstenzionalnosti;
- Aksiom komprehenzije;
- Aksiom izbora;

Te ćemo aksiome kasnije detaljnije obrazložiti. Georg Cantor se opirao uvođenju aksioma u teoriju skupova. To će rezultirati pojavom brojnih paradoksa kao npr. poznati "Russellov paradoks". Pojava brojnih paradoksa potakla je matematičara Ernsta Zermelu da 1908.g. uvede prvi aksiomatski sustav u teoriju skupova, kojeg je 1922.g. nadopunio Adolf Abraham Fraenkel. Taj sustav danas nazivamo Zermelo-Fraenkelov sustav i on prestavlja temelj aksiomatske teorije skupova.
Stoga ćemo tako i mi, iako se u ovom radu bavimo Cantorovom tj. naivnom teorijom skupova, uvesti neke aksiome radi boljeg razumjevanja samog pojma skupa.

Općenito o skupovima

Pojam "skupa" i relacije "biti element" se ne definiraju. U početku ćemo skupove označavati velikim slovima A,B,C,D,E,F, a elemente skupa malim slovima a,b,c,d,e,f.
Ako je a element skupa A, pisat ćemo a∈A , ako a nije element skupa A pišem a∉A. Skup A je potpuno određen svojim elementima. Prirodno se nameće sljedeća definicija:

Aksiom 1. ***Ekstenzionalnost***
Dva su skupa jednaka ako i samo ako imaju iste elemente.
Ako su X i Y skupovi takvi da je X ⊂ Y i Y ⊂ X tada je X=Y

Jednakost skupa A i B označava se s $A = B$. Ako jedan od skupova A i B ima barem jedan element koji nije element drugoga kažemo da su A i B različiti i pišemo $A \neq B$. Istaknimo ovdje činjenicu da elementi skupa mogu i sami biti skupovi. Tako je naprimjer pravac skup točaka, a ravnina skup pravaca tj. skup svih pravaca u ravnini skup je skupova.

Promotrimo skup S dan s

$$S=\{\{4,5\},\{6,7\},\{6\}\}$$

je skup koji se sastoji od tri elementa od koih je svaki opet skup. Istaknimo činjenicu da je skup S≠{S}, naime skup S ima tri elementa dok skup {S} ima jedan a to je S.

Prvi skupovi s kojima se susrećemo u životu a da ih shvaćamo kao skupove su skupovi brojeva. Za skupove brojeva upotrebljavat ćemo uobičajene oznake.

- $\mathbb{N}$ je skup prirodnih brojeva;
- $\mathbb{N}_0$ je skup $\mathbb{N}$ uključivo i 0;
- $\mathbb{Z}$ je skup cijelih brojeva ;
- $\mathbb{Q}$ je skup racionalnih brojeva;
- A je skup algebarskih brojeva;
- $\mathbb{R}$ je skup realnih brojeva;
- $\mathbb{C}$ je skup kompleksnih brojeva

Kada definiramo neki pojam obično nerijetko navodimo širi pojam kojem kao poseban slučaj taj pojam pripada. Za pojam skupa to je nemoguće uraditi, jer u matematici nema općenitijeg pojma od pojma skupa. Stoga umjesto da damo definiciju pojma skupa ilustrirat ćemo ga primjerima. Na primjer, skup dana u tjednu sastoji se od elemenata:

{ponedjeljak,utorak,srijeda,četvrtak,petak,subota,nedjelja}

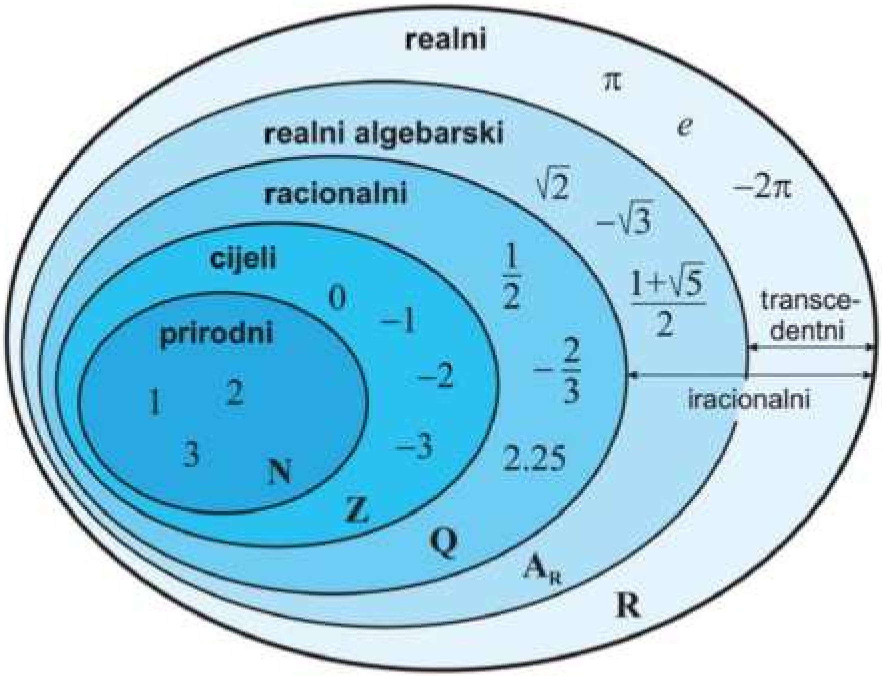
skup mjeseci od elemenata:

{siječanj, veljača, ožuljak, travanj, svibanj, lipanj, srpanj, kolovoz, rujan, listopad, studeni, prosinac}

Prema tome kada govorimo o skupu tada ujedinjavamo neke elemente u cjelinu,upravo u skup kome su elementi ti predmeti. Georg Cantor istako je to ovim riječima:

”Skup je mnoštvo koje shvaćamo kao jedno.”

Skupove je moguće zadavati na razne načne. Jedan od njih je da se da potpun popis elemenata koji ulaze u skup. Na primjer skup učenika određenog razreda definira se njihovim popisom iz imenika, skup svih država na zemlji dan je njihovim popisom u zemljopisnom atlasu...



Slika 2.1: skupovi brojeva [9]

Taj način zadavanja skupa primjenjiv je samo na konačne skupove iako ni tada nije potpuno adekvatan. Na primjer iako je konačan skup svih riba u oceanu jedva ga je moguće dat popisom. Bekonačne skupove ne možemo nikako definirati pomoću popisa; pokušajte sastaviti popis svih prirodnih brojeva ili popis svih točaka kružnice! Jasno je da taj popis nikada ne može završiti.

Ako je skup nemoguće zadati popisom zadajemo ga isticanjem nekog karakterističnog svojstva, takvog svojstva kojeg zadovoljavaju samo elementi skupa, dok ništa drugo na svijetu nema to svojstvo. Primjerice skup svih točaka na ravnini $\mathbb{R}^2$ koje pripadaju kružnici sa središtem u ishodištu i radiusom $r = 5$ možemo zadati sa

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 5 = \sqrt[2]{x^2 + y^2}\ \}$$

Tada je razumljivo da broj 23 ili čudnovati kljunaš ne pripadaju tom skupu dok mu točka (5,0) pripada. Analogno $\sqrt[2]{2}$ i Jupiter ne pripadaju skupu cijelih brojeva dok mu broj 2 pripada.

Prazan skup

Sam naziv skup navodi na misao da svaki skup treba sadržavati bar dva elementa. Ipak nije tako. U matematici se često promatraju skupovi koji sadrže samo jedan element, pa čak i skup koji nema niti jednog elementa. Taj skup nazivamo praznim skupom i označavamo s $\emptyset$.
Kao primjer praznog skupa može poslužiti skup krava koje pasu na Marsu, skup trogodišnjih velemajstora, skup realnih korijena jednadžbe $x^4 + 16 = 0$...
Ne rješavajući jednadžbu $x^4 - 7x^2 - 6x + 26 = 0$ teško je tvrditi je li skup njezinih realnih korijena prazan ili neprazan. Ponekad je teško za skupove nematematičke prirode reći radi li se o praznim skupovima ili ne. Tko ne poznaje zoologiju, ne može odgovoriti na pitanje je li prazan skup dupina u Bajkalu ili skup tigrova koji žive na slobodi u Australiji.

Za neke skupove dugo nisamo znali jesu li prazni ili neprazni. Tako je gotovo 350 godina bilo nepoznato postoji li rješenje Fermatova problema.

Teorem 2.2.1 (Veliki Fermatov teorem)**.** *Za prirodne $x,y,z,n \in \mathbb{N}$ takve da $n > 2$ jednađba*

$$x^n + y^n = z^n$$

nema rješenja.

Pretpostavku ovog teorema dao je Pierre de Fermat pretpostavlja se 1637.g., a dokaz je prvi ponudio Andrewa Wilea 1994.g.

Aksiom 2. ***Postojanje praznog skupa***
Postoji skup koji nema nijednog elementa.

$$(\exists S)(\forall x)(x \notin S)$$

Ovim aksiomom osigurano je postojanje barem jednog skupa, tj. praznog skupa.

Propozicija 2.2.2. *Jedinstvenosti praznog skupa*
Postoji samo jedan prazan skup.

Dokaz. Pretpostavimo da postoje prazni skupovi $\emptyset_1$ i $\emptyset_2$, međusobno različiti , $\emptyset_1 \neq \emptyset_2$. Tada bi po aksiomu ekstenzionalnosti u barem jednom od tih skupova trebao postojati elemant koji nije u drugom skupu, što je nemoguće jer nijedan od tih skupova nemaju nijednog elementa. □

Tvorba novih skupova

Uvest ćemo sada neke aksiome koji će nam omogućiti tvorbu novih skupova.

Aksiom 3. ***Postojanje para***
Ako su A, B skupovi tada postoji skup kojemu su jedini elementi A,B.

Ovaj aksiom omogućuje da se iz dva skupa dobije novi skup. Taj se skup naziva par skupova A i B i označava se s {A,B} ili {B,A}; redoslijed nije bitan. Ako je A=B tada se par {A,A} označava s {A} tj. {A,A}= {A} i to je skup koji se sastoji od jednog jedinog elementa A. Ova jedinstvenost para slijedi direktno iz aksioma ekstenzionalnosti.

Primjetimo da se od praznog skupa $\emptyset$ koji nema elemenata može načiniti skup $\{\emptyset\}$ kojem je jedini element prazan skup. Pri tome je očigledno $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.
Neka je $P(x)$ izjavna funkcija: x je cijeli broj strogo manji od 6 i strogo veći od 1.Tada je

$$\{x \in \mathbb{Z} : P(x)\} = \{2, 3, 4, 5\}$$

Polazeći od skupa cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ koristeći svojstva (biti manji od 6 i biti veći od 1) izdvojili smo jedan njegov dio i tako pomoću izjavne funkcije načinili novi skup. Sada nam se prirodno nameće sljedeći aksiom:

Aksiom 4. ***Princip komprehenzije***
Neka je A zadan skup, a $P(x)$ neka izjavna funkcija takva da za $x \in A$, $P(x)$ je istinito ili lažno. Tada postoji B kojemu su elementi oni i samo oni elementi $x \in A$ za koje je $P(x)$ istinito:

$$B = \{x \in A : P(x)\}$$

Ovaj pristup temelji se na odabiru određenog skupa, a zatim se uključuju svi njegovi elementi koji posjeduju određeno svojstvo. U naivnoj teoriji skupova može se primjetiti da je G. Cantor koristio mnogo šire načelo, koje može biti izraženo na sljedeći način:

”Svaka izjavna funkcija $P(x)$ omogućuje tvorbu skupa $\{x : P(x)\}$ tako da vrijedi:
$a \in \{x : P(x)\}$ ako i samo ako $P(a)$”

Ovdje se ne zahtjeva da područje definicije izjavne funkcije bude ograničeno, odnosno da bude neki skup. Drugim riječima, dopušta se postojanje proizvoljno velikih skupova, kao što je primjerice $\{x : x = x\}$, gdje x može biti bilo što što poželimo. Međutim, brzo se uočilo da je ovako široko formulirano načelo proturječno.

Russellov paradoks

Neka je $P(x)$ izjavna funkcija $x \notin x$,tj. x ne sadrži sebe kao element, a S neka je skup svih takvih skupova

$$S = \{x : x \notin x\}$$

Postavlja se pitanje sadrži li S sebe kao element. Ako je $S \in S$, onda S pripada skupu svih skupova koji sebe ne sadrže kao element, to jest $S \notin S$; ako pak $S \notin S$, onda je S među skupovima koji sebe sadrže kao element to jest $S \in S$. Dolazi se tako do proturiječja koje je poznato kao Russellov paradoks. Ovaj paradoks je objavio Bertrand Russell 1903.g. Jedan od najpoznatijih ilustracija ovog paradoksa je Brijačev paradoks koji glasi:
Pretpostavimo da postoji grad u kojem postoji samo jedan muški brijač. Svi muškarci u gradu su redovito obrijani, ali neki se briju sami, dok drugi dolaze brijaču na brijanje. Postavimo pravilo da brijač brije sve i samo one muškarce koji se ne briju sami.

Sada postavimo pitanje: Brije li brijač sebe? Pokušajmo razmotriti moguće scenarije.

- Ako se brijač ne brije sam, prema pravilu, mora se obrijati, jer brije muškarce koji se sami ne briju.
- Ako se brijač sam brije, prema pravilu, mora prestati s brijanjem, jer ne spada u skup muškaraca koje smije brijati.

Na temelju navedenih mogućnosti, dolazimo do proturječja. Ako se brijač brije, prema pravilu ne bi trebao, a ako se ne brije, prema pravilu bi trebao brijati.

Upravo zbog pojavljivanja brojih paradoksa u Cantorovoj teoriji će 1908.g. Ernest Zarmelo uvesti prvi aksiomatski sustav kojeg će kasnije Adolf Abraham Frankel nadopuniti.

Relacija sadržavanja (inkluzija)

Uvođenje pojma skupa u matematiku pokazalo se vrlo korisnim, jer skupovi mogu obuhvaćati elemente različite prirode. Tvrdnje koje se tiču skupova mogu biti primijenjene i na različite kontekste, kao što su točke geometrijskih figura, prirodni brojevi, životinje, biljke, atomi ili molekule. Pojmovi i teoremi teorije skupova su vrlo općeniti. Sada ćemo se upoznati s pojmom podskupova.

Podskup skupa A, označava se s $B \subseteq A$, ako je svaki element x iz skupa B također element skupa A, što zapisujemo kao "$x \in A$". Drugim riječima, skup B je podskup skupa A ako svi elementi skupa B pripadaju i skupu A.

Na primjer, ako uzmemo bilo koju osnovnu školu, skup učenika petog razreda te škole je podskup skupa svih učenika te škole. Također, skup svih učenika te škole je podskup skupa svih učenika. Skup svih orada je podskup skupa riba, a skup riba je podskup skupa svih životinja.

Trivijalno slijedi da je $A \subseteq A$ za svaki skup A. Ako je $A \subseteq B$ i $A \neq B$, kaže se da je A pravi podskup skupa B, što se može pisati i $A \subset B$.

Relacija sadržavanja $\subseteq$ ima ova temeljna svojstva:

- $A \subseteq A$ (refleksivnost);
- $A \subseteq B$ i $B \subseteq A \implies A = B$ (antisimetričnost);
- $A \subseteq B$ i $B \subseteq C \implies A \subseteq C$ (tranzitivnost);

Svojstvo antisimetričnosti vrlo se često upotrebljava za dokazivanje jednakosti dvaju skupova. Kako bi se dokazalo da je $A = B$, dokazuje se da je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$.

Propozicija 2.2.3. *Prazan skup je podskup svakog skupa*
Za svaki skup A je $\emptyset \subseteq A$

Dokaz. Pretpostavimo da to nije istina. Tada bi trebao postojati barem jedan element skupa $\emptyset$ koji nije element skupa A. Kako prazan skup nema elemenata, to nije moguće. Stoga zaključujemo da $\emptyset \subseteq A$ za svaki A. □

Za skup $A = \{a\}$ znamo da ima dva podskupa $\{a\}$ i $\emptyset$. Primjetimo da prazan skup nije element skupa A ali je njegov podskup, stoga je važno uočiti razliku između pojma elementa od pojma podskupa nekog skupa.

Zbog ovih razloga, može se zaključiti da je sasvim opravdano pretpostaviti postojanje skupa čiji su elementi svi podskupovi zadanog skupa.

Aksiom 5. ***Postojanje partitivnog skupa***
Za svaki skup A postoji partitivan skup $P(A)$ kojemu su elementi svi podskupovi skupa A.

Primjer:
Za skup $A = \{a, b, c\}$, partitivan skup $P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$
Primjetimo da partitivan skup od 3 elementa ima $8 = 2^3$ elemenata

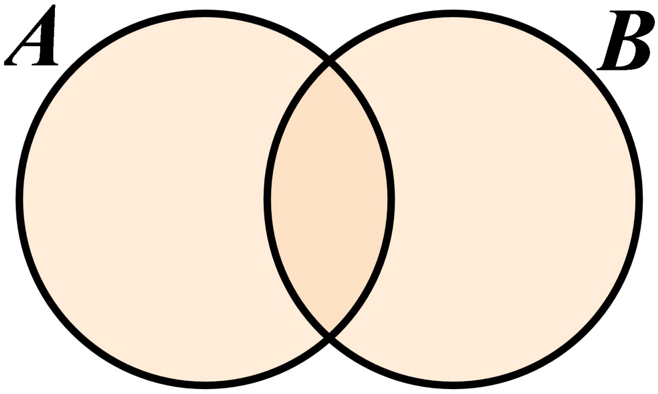
Operacije na skupovima

Sada ćemo se upoznati s drugim metodama za stvaranje novih skupova iz već poznatih skupova.

Unija skupova

Neka su A i B dva skupa. Unija tih skupova, označena s $A \cup B$, sastoji se od elemenata koji pripadaju barem jednom od skupova A ili B. Slično se definira unija više od dvaju skupova.

Međutim, da je unija skupova opet skup, ne slijedi iz već dosad uvedenih aksioma, pa ćemo uvesti novi aksiom koji u općem obliku glasi ovako:



Slika 2.2: Unija skupova [10]

Aksiom 6. *Postojanje unije*
Za svaki skup skupova $\mathbb{S}$ postoji skup S koji se sastoji od onih i samo onih elemenata koji su elementi u barem jednom skupu iz skupa $\mathbb{S}$, odnosno:

$$x \in S \iff \exists X : ((x \in X) \wedge (X \in \mathbb{S}))$$

Skup S naziva se unija skupa $\mathbb{S}$ i označava se kao $S = \cup\mathbb{S}$ ili $S = \{\cup X : X \in \mathbb{S}\}$
Primjer:
Ako su $A = \{a, b, c\}$ i $B = \{a, d, e\}$ tada je $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$

Propozicija 2.2.4. *Ako su $A_1, \ldots, A_n$ skupovi, tada postoji skup $\{A_1, \ldots, A_n\}$.*

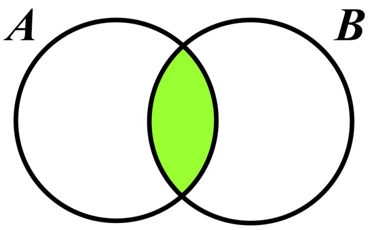
Dokaz. Neka su $A_1, \ldots, A_n$ skupovi. Prema aksiomu para, postoje skupovi $\{A_1, A_2\}$ i $\{A_3, A_3\} = \{A_3\}$, pa, ponovno zbog aksiomu para, postoji skup $\{A_1, A_2\}, \{A_3\}$. Sada, zbog aksioma unije, postoji skup $S = \{A_1, A_2\}, \{A_3\} = \{A_1, A_2, A_3\}$.

Aksiom para $\Rightarrow \exists$ skup $\{A_1, A_2, A_3\}, \{A_4\}$; Aksiom unije $\Rightarrow \exists$ skup $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$; itd. indukcijom. □

Presjek skupova
Slavni detektiv je imao zadatak otkriti ime jednog jedrenjaka. Posjedovao je samo nekoliko podataka o jedrenjaku: u siječnju se nalazio u Opatiji, u veljači u Dubrovniku, a u travnju na Hvaru. Bez obzira na ovu skromnu informaciju, uspio je otkriti ime jedrenjaka. To je postigao uspoređujući tri skupa: skup jedrenjaka koji su bili u Opatiji u siječnju, skup jedrenjaka koji su bili u Dubrovniku u veljači i skup jedrenjaka koji su bili na Hvaru u travnju. Ispostavilo se da je samo jedan jedrenjak bio zajednički svim tim skupovima. Skup

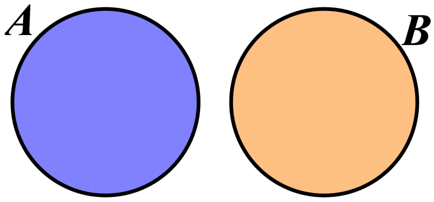
koji se sastoji od elemenata koji pripadaju svim skupovima A, B i C naziva se presjekom tih skupova. Presjek skupova A i B označava se s $A \cap B$.

Presjek praznog skupa nećemo definirati. Naglasimo da smo definirali presjek skupova bez uvođenja novog aksioma. Jedinstvenost presjeka slijedi direktno iz aksioma ekstentionalnosti.



Slika 2.3: Presjek skupova [10]

Kada vrijedi $A \cap B = \emptyset$, kažemo da su skupovi A i B disjunktni skupovi. To znači da ovi skupovi nemaju zajedničkih elemenata, odnosno njihov presjek je prazan skup.



Slika 2.4: Disjuktni skupovi [10]

Propozicija 2.2.5. *Za svaki skup skupova T, presjek skupova $\cap T$ također je skup.*

Dokaz. Prema aksiomu unije aksiomu unije postoji skup $\mathbb{S} = \bigcup T$. Neka je σ svojstvo definirano nad skupom S na sljedeći način:

$\sigma(x) =$ "za svaki skup A iz T, x je element skupa A".

Prema principu komprehenzije za svojstvo σ, skup svih x iz skupa $\mathbb{S}$ za koje vrijedi svojstvo σ (tj. x pripada svakom skupu A iz $\mathbb{S}$) je skup. $\square$

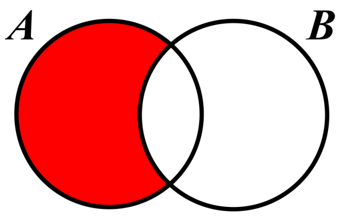
Razlika skupova

Naš detektiv našao se u novoj situaciji. Pregledao je sef, zapisao listu i rekao: "Električnom bušilicom sef obijaju pet provalnika u ovom gradu: Ivan Šmit, Marko Jurić, Ante Boban, Juri Zec i Tin Galić. No, Ivan, Marko i Ante već su u zatvoru. Dakle, treba provjeriti gdje su Juri i Tin bili prošlu noć."

Metoda kojom se koristio naš detektiv temelji se na operaciji razlike skupova. On je imao posla s dva skupa: skupom provalnika koji u gradu obijaju sef s električnom bušilicom i skupom provalnika koji također obijaju sef s električnom bušilicom, ali su već u zatvoru. Oduzevši iz prvog skupa sve elemente drugog skupa, dobio je skup sumnjivih prekršitelja.

Razlika skupova A i B, označena s $A \setminus B$, je skup svih elemenata koji pripadaju skupu A, ali nisu elementi skupa B. Razlika skupova A i B može se definirati kao $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ i } x \notin B\}$.

Razlika skupova A i B, označena s $A \setminus B$, je podskup skupa A, pa njegovo postojanje ćemo dokazati.



Slika 2.5: Razlika skupova [10]

Ako je U neki fiksni skup i $A \subseteq U$, tada se razlika $U \setminus A$ naziva relativni komplement skupa A u odnosu na skup U. Pojam komplementa je relativan i odnosi se na komplement jednog skupa u odnosu na drugi skup. Često se događa da su svi skupovi koji se pojavljuju u nekom razmatranju podskupovi nekog skupa U. U takvom slučaju skup U nazivamo univerzalni skup za to razmatranje i tada za komplement skupa A pišemo A^c. Na primjer, u aritmetici je univerzalni skup $\mathbb{R}$ (realni brojevi), a u geometriji ravnina.

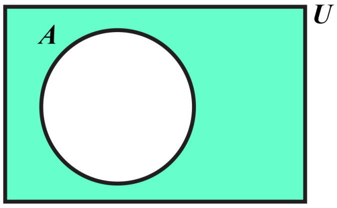
Primjer:

Ako su skupovi A i B dani s $A = \{1, 3, 5\}$,$B = \{2, 3, 4\}$ tada je $A \setminus B = \{1, 5\}$ a $B \setminus A = \{2, 4\}$

Propozicija 2.2.6. *Za proizvoljne skupove A i B, razlika $A \setminus B$ također je skup.*

Dokaz. Razlika $A \setminus B$ definirana je svojstvom σ na A ovako: $\sigma(x) = x \notin B$. Prema principu komprehenzije za svojstvo σ, $A \setminus B$ je skup. □

Korolar 2.2.7. *Ako je U neki univerzalni skup i $A \subseteq U$ (A je podskup od U), onda je komplement skupa A, označen s A^c, koji je definiran kao $U \setminus A$, također skup.*



Slika 2.6: Komplement skupa A [10]

Algebra skupova

Neka su A, B i C skupovi koji su podskupovi univerzalnog skupa U. Tada vrijede sljedeća temeljna svojstva:

1. **Unija skupova:**
   - Komutativnost: $A \cup B = B \cup A$
   - Asocijativnost: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   - Distributivnost unije u odnosu na presjek: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. **Presjek skupova:**
   - Komutativnost: $A \cap B = B \cap A$
   - Asocijativnost: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   - Distributivnost presjeka u odnosu na uniju: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

3. **Komplement skupa:**
    - Komplement komplementa: $(A^c)^c = A$
    - De Morganovi zakoni:
        - Komplement unije: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
        - Komplement presjeka: $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
4. **Dodatna svojstva:**
    - Idempotentnost unije: $A \cup A = A$
    - Idempotentnost presjeka: $A \cap A = A$
    - Distributivnost presjeka u odnosu na uniju: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
    - Distributivnost unije u odnosu na presjek: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
    - Komplement unije i presjeka: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
    - Unija s praznim skupom: $A \cup \varnothing = A$
    - Presjek s praznim skupom: $A \cap \varnothing = \varnothing$
    - Unija s univerzalnim skupom: $A \cup U = U$
    - Presjek s univerzalnim skupom: $A \cap U = A$
    - Komplement unije s univerzalnim skupom: $A \cup A^c = U$
    - Komplement presjeka s univerzalnim skupom: $A \cap A^c = \varnothing$
    - Komplement praznog skupa: $\varnothing^c = U$
    - Komplement univerzalnog skupa: $U^c = \varnothing$

Ova svojstva čine osnovu algebarskih manipulacija sa skupovima te su ključne za razumijevanje i rješavanje problema u teoriji skupova.

Dokaz zakona distributivnosti unije prema presjeku: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Svaku od navedenih jednakosti možemo dokazati pokazujući da je lijeva strana sadržana u desnoj strani i da je desna strana sadržana u lijevoj strani. Neki slučajevi su trivijalni. U ovom trenutku, fokusirat ćemo se na dokazivanje zakona distributivnosti unije prema presjeku.

Želimo dokazati zakon distributivnosti unije prema presjeku:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Dokazat ćemo ovu jednakost korak po korak, dokazujući oba smjera uključenosti:

Dokaz. $\subset$
Pokažimo da je lijeva strana sadržana u desnoj strani.

Neka je $x \in A \cup (B \cap C)$. To znači da je $x \in A$ ili $x \in B \cap C$. Ako je $x \in A$, onda je $x \in A \cup B$, te također $x \in A \cup C$. Budući da je $x \in A \cup B$ i $x \in A \cup C$, tada vrijedi $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
Pokažimo da je desna strana sadržana u lijevoj strani.
$\supset$

Neka je $y \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. To znači da je $y \in A \cup B$ i $y \in A \cup C$. Iz toga slijedi da je $y \in A$ ili $y \in B$ i $y \in C$. S obzirom na to da je $y \in A$, tada vrijedi da $y \in A \cup (B \cap C)$.

Budući da smo dokazali oba smjera uključenosti, zaključujemo da vrijedi:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$\square$

Time smo uspješno dokazali zakon distributivnosti unije prema presjeku.

Dokaz De Morganovog zakona: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
Želimo dokazati De Morganov zakon koji kaže:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Dokaz. $\subset$
Pokažimo da je lijeva strana sadržana u desnoj strani.

Neka je $x \in (A \cup B)^c$. To znači da $x \notin A \cup B$. To implicira da $x \notin A$ i $x \notin B$, stoga $x \in A^c$ i $x \in B^c$. Odatle slijedi da $x \in A^c \cap B^c$.
Pokažimo da je desna strana sadržana u lijevoj strani.
$\supset$

Neka je $y \in A^c \cap B^c$. To znači da je $y \in A^c$ i $y \in B^c$. To implicira da $y \notin A$ i $y \notin B$. S obzirom na to da $y \notin A$ i $\notin B$, zaključujemo da $y \in (A \cup B)^c$.

Budući da smo dokazali oba smjera uključenosti, zaključujemo da vrijedi:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Time smo uspješno dokazali De Morganov zakon. □

Poglavlje Pojam skupa ćemo završiti s aksiomom izbora koji je poslednji od tri aksioma pomoću kojih je Cantor izgradio naivnu teoriju skupova.

Aksiom 7. *Aksiom Izbora*
Za svaki neprazan skup postoji bar jedna funkcija čiji su argumenti neprazni podskupovi tog skupaa, a slike su elementi argumenata.

Valja još samo napomenuti da se Zarmelo-Frankelov-sustav aksioma sastoji od još tri aksioma: beskonačnosti, razdvojivosti, dobre utemeljenosti. O kojima više možete čitati u [1],[2].

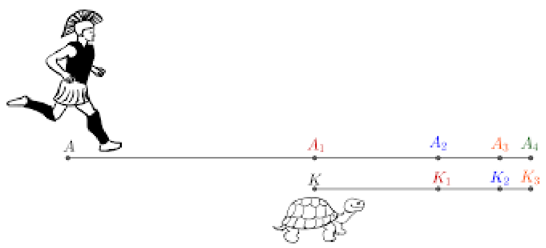
Poglavlje 3

Naivna teorija skupova

Ovaj uvod u 3.poglavlje napisano je prema [7] [11].
Nije pretjerano reći da čitavu matematiku prožima ideja beskonačnosti. U pravilu, u matematici nas zanimaju čitave klase objekata: skup svih prirodnih brojeva, skup svih trokuta, skup svih algebarskih brojeva... Ti se skupovi sastoje od beskonačnog mnoštva različitih elemenata. Zato su se matematičari i filozofi oduvijek bavili pojmom beskonačnosti. Ovo zanimanje se pojavilo kada je postalo jasno da svaki prirodni broj slijedi idući broj, odnosno da je niz prirodnih brojeva beskonačan. No, već prvi pokušaji proučavanja beskonačnosti doveli su do brojnih paradoksa.

Grčki filozof Zenon koristio je pojam beskonačnosti da bi dokazao da nema stvarnog kretanja. Prema njegovom paradoksu o Zenonovoj strijeli, kada strijela leti prema meti, ona prolazi kroz beskonačno mnogo točaka, a svaki trenutak leta je "polovica" prethodnog trenutka. Stoga Zenon tvrdi da strijela nikada ne stigne do mete jer mora proći kroz beskonačno mnogo točaka, što je nemoguće.

Slično tome, Zenon je dokazivao da brzonogi Ahil nikada neće prestići sporu kornjaču. Ahil, iako brži, nikada ne može stići kornjaču jer se uvijek mora prvo približiti mjestu gdje je kornjača bila, a do tada se kornjača već premakne naprijed.



Slika 3.1: Ahil i kornjača[11]

Grčki filozofi atomisti od kojih su najpoznatiji Demokrit i njegov učitelj Leukip su smatrali da se sve geometrijske figure sastoje od konačnog broja najmanjih nedjeljivih čestica, tj. atoma. Metode u kojima se koristi pojam beskonačnosti omogućile su grčkim znanstvenicima da dobiju niz važnih rezultata, posebno u geometriji, no paradoksi Zenona upućivali su ih na oprez.

Euklid je formulirao svoj poučak o beskonačnosti skupova prostih brojeva ovako:

> ”Prostih brojeva ima više od svake predložene količine prostih brojeva.”

Znači, više od svake predložene količine. No, o tome da li ih je beskonačno ili ne, Euklid šuti.

Široka upotreba beskonačnosti u matematici počinje u 18. stoljeću kada je izgrađena matematička analiza. Tek su se sredinom 19. stoljeća počeli proučavati skupovi koji imaju beskonačno puno elemenata. Uz Georga Cantora, doprinos teoriji beskonačnih skupova dao je i češki znanstvenik Bernard Bolzano. Osnovno dostignuće Bolzana i Cantora bilo je proučavanje svojstava beskonačnih skupova; svojstva konačnih skupova bila su poznata znanstvenicima prije njih. Pokazalo se da svojstva konačnih i beskonačnih skupova nikako nisu slična. Mnoge stvari koje su nemoguće za konačne skupove postaju moguće za beskonačne skupove.

3.1 Ekvipotentni skupovi

Ovo potpoglavlje napisano je prema [1],[2],[3],[7].

Priča o Hilbertovom hotelu.

Zamislimo da negdje daleko u Svemiru postoji luksuzni hotel s beskonačno mnogo raskošnih soba. Sobe su označene brojevima 1, 2, 3, i tako dalje. No, predstavimo si situaciju u kojoj su sve te predivne sobe već zauzete gostima, a sada se pojavljuje još jedan putnik koji s nestrpljenjem želi svoj kutak. Kako će se portir nositi s ovim izazovom? Izvanredno, portir hotela će pristupiti situaciji s elegancijom – zamolit će gosta koji boravi u sobi broj 1 da svoju privremeno smjesti u sobu 2, zatim gosta iz sobe 2 u sobu 3, te tako redom. Naposljetku će ovog svježeg putnika udobno smjestiti u praznu sobu broj 1.

Razmotrimo i drugi problem s kojim bi se portir hotela s beskonačnim brojem soba mogao suočiti. Zamislimo da u beskrajnom svemiru postoji još jedan hotel s nesagledivim brojem luksuznih soba, ali sve te sobe već uživaju u društvu zadovoljnih gostiju. Međutim, iznenada, agencija za svemirske građevine otkriva da taj drugi hotel nije legalno izgrađen. Brzopotezni portir ne gubi ni trenutka – gosta iz sobe 1 premješta u sobu 2, gosta iz sobe 2 u sobu 4, gosta iz sobe 3 u sobu 6, te tako dalje. Uz ovu lukavu taktiku, sve neparne sobe postaju slobodne i u njih portir smješta sve goste iz zatvorenog hotela.

Definicija 3.1.1. *Kažemo da je funkcija $f : D \to K$* ***injekcija*** *(injektivno preslikavanje) ako*
$(\forall x_1, x_2 \in D)(x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$.
Za f kažemo da je ***surjekcija****(surjektivno preslikavanje) ako*
$(\forall y \in K)(\exists x \in D)(y = f(x))$.
Za f kažemo da je ***bijekcija*** *(bijektivno preslikavanje) ako je i injekcija i surjekcija.*

Prisjetimo kako smo kao djeca učili brojati predmete - uspostavljajući vezu između prstiju na ruci i predmeta. Georg Cantor je proširio tu jednostavnu ideju na beskonačne skupove. Jedno od osnovnih Cantorovih razmatranja o jednakostima skupova je nevjerojatno intuitivno: za dva skupa A i B kažemo da imaju isti kardinalitet, ili su ekvipotentni, ako postoji bijekcija $f : A \to B$. No, važno je imati na umu da čak ni genijalni grčki matematičari, niti matematičari sve do Cantora, nisu prepoznali "različite" beskonačne skupove.

Na primjer, skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ sadrži "više" elemenata nego skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$. Drugim riječima, ne postoji bijekcija između $\mathbb{R}$ i $\mathbb{N}$. No, skup $\mathbb{N}$ je ekvipotentan sa skupom svih parnih prirodnih brojeva, te također sa skupovima cijelih brojeva i racionalnih brojeva. Ova raznolikost beskonačnih skupova otkriva nam da pojam beskonačnosti nije samo apstraktan, već i iznimno bogat i dubok.

Definicija 3.1.2. *Skupovi A i B nazivaju se* ***ekvipotentni*** *ako postoji barem jedna bijekcija $f : A \to B$. Označava se: $A \sim B$.*

Ako je skup X ekvipotentan skupu Y, tada inverzna funkcija $f^{-1} : Y \to X$ bijekcije f također predstavlja bijekciju. To znači da vrijedi $Y \sim X$. Stoga, umjesto "skup X je ekvipotentan skupu Y", možemo reći da su skupovi X i Y ekvipotentni.

Primjeri:

- **a)** $\{4, 8, 9\} \sim \{13, 10401, 10512\}$;
- **b)** $\{1, 2, 3, \ldots\} \sim \{2, 4, 6, \ldots\}$; jedna bijekcija je dana sa $n \mapsto 2n$;
- **c)**$\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$; jedna bijekcija $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ je dana sa:

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{ako je } x < 0; \\ 0, & \text{ako je } x = 0; \\ 2x - 1, & \text{ako je } x > 0. \end{cases}$$

- **d)** $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R} : a < b, c < d$ vrijedi $< a, b > \sim < c, d >$ i $[a, b] \sim [c, d]$. Funkcija $f :< a, b > \to < c, d >$ dana s $f(x) = \frac{d-c}{b-a}(x - a) + c$ je bijekcija.

Iz prethodnog primjera vidimo da beskonačan skup može biti ekvipotentan svom pravom podskupu, što nije moguće kada se radi o konačnim skupovima.

Propozicija 3.1.3. *Ekvipotentnost među skupovima je refleksivna, simetrična i tranzitivna, to jest relacija ekvivalencije*

Dokaz. Za svaki skup X vrijedi $X \sim X$, jer identitetno preslikavanje predstavlja bijekciju, što čini relaciju refleksivnom. Ako je $X \sim Y$, tada je relacija simetrična, kao što smo već utvrdili. Konačno, ako je $X \sim Y$ i $Y \sim Z$, tada možemo zaključiti da je $X \sim Z$, jer kompozicija bijekcija jest bijekcija. □

3.2 Konačni skupovi

Ovo potpoglavlje napisano je prema [1],[2],[3],[5], [16].
Intuitivno je jasna razlika između konačnih i beskonačnih skupova. Konačni su oni skupovi koji imaju konačan broj elemenata, tj. oni čiji je broj elemenata jednak nekom prirodnom broju n, dok su beskonačni skupovi oni koji nisu konačni. Prije nego što nastavimo s isječkom o konačnim i beskonačnim skupovima uvest ćemo moćno matematičko oružje koje se koristi u dokazivanju raznih teorema vezanih uz prirodne brojeve.

Princip matematičke indukcije:
Neka je $S \subseteq \mathbb{N}$ takav da vrijedi:

- $1 \in S$,
- $\forall n \in \mathbb{N} : (n \in S) \implies (s(n) \in S)$

Tada je $S = \mathbb{N}$
U ovim izlaganjima koristimo skup $\mathbb{N}$ na intuitivnom nivou, tj. pretpostavljamo da su nam poznata svojstva skupa $\{0, 1, 2, \ldots\}$, koju nazivamo skupom prirodnih brojeva, te ga označavamo sa $\mathbb{N}$.

Za svaki $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, označavamo skup $\{1, \ldots, k\}$ sa $\mathbb{N}_k$, a $\mathbb{N}_0$ je prazan skup.

Propozicija 3.2.1. *Neka je $k \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Ako je $f : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$ injekcija, tada je f i surjekcija.*

Dokaz. Koristit ćemo indukciju po prirodnom broju k kako bismo dokazali da svaka injekcija $f : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$ također ispunjava svojstvo surjekcije.

Ako je k jednak nula, tvrdnja je očito točna. U slučaju kada je k jednak 1, jasno je da je funkcija $f : \mathbb{N}_1 \to \mathbb{N}_1$ surjekcija.

Pretpostavimo sada da postoji prirodan broj $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ za koji vrijedi da je svaka injekcija $g : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$ također surjekcija. Uzmimo proizvoljnu injekciju $f : \mathbb{N}_{k+1} \to \mathbb{N}_{k+1}$.

Razmotrimo restrikciju $f|_{\mathbb{N}_k} : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_{k+1}$. Ova restrikcija je također injekcija.

Sada ćemo razmotriti dva slučaja:

a) $f(k + 1) = k + 1$
Tada je slika funkcije $f|_{\mathbb{N}_k}$ sadržana unutar skupa $\mathbb{N}_k$, time zaključujemo da je funkcija $f|_{\mathbb{N}_k} : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$ injekcija. Iz pretpostavke indukcije slijedi da je i surjekcija. Sada je očigledno da je i funkcija f surjekcija.

b)$f(k + 1) = j_0 \in \mathbb{N}_k$
Dokažimo da postoji element $i_0 \in \mathbb{N}_k$ takav da $f(i_0) = k + 1$. Ako bi pretpostavili da takav $i_0 \in \mathbb{N}_k$ ne postoji, tada bi restrikcija $f|_{\mathbb{N}_k}$ bila dobro definirana i bila bi injekcija. Po pretpostavci indukcije restrikcija bila bi i surjekcija. No, tada bi postojao neki $j_1 \in \mathbb{N}_k$ za koji vrijedi $f(j_1) = j_0$. Time smo dobili $f(k + 1) = f(j_1)$ i $k + 1 \neq j_1$ a to je kontradikcija s tim da je $f : \mathbb{N}_{k+1} \to \mathbb{N}_{k+1}$ injekcija.

Definirajmo funkciju $F : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$ na sljedeći način:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{ako } x \neq i_0 \\ j_0, & \text{ako } x = i_0 \end{cases}$$

Jasno je da je funkcija $F : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$ injekcija. Prema pretpostavci indukcije, ona je također surjekcija. Sada je lako vidjeti da iz toga slijedi da je i funkcija f surjekcija.

Neka je $y \in \mathbb{N}_{k+1}$ proizvoljan. Razmatramo tri slučaja:

1. Ako je $y \in \mathbb{N}_k \setminus j_0$, tada iz surjektivnosti funkcije F i njezine definicije slijedi da postoji $x \in \mathbb{N}_k$ za koji vrijedi $f(x) = y$.

2. Ako je $y = j_0$, tada imamo $f(k + 1) = j_0$.

3. Ako $y = k + 1$, tada imamo $f(i_0) = k + 1$

□

Definicija 3.2.2. *Skup A nazivamo* ***konačanim*** *ako postoji $k \in \mathbb{N}$ tako da su skupovi A i $\mathbb{N}_k$ ekvipotentni.*

Napomena Prethodni teorem i definicija nam omogućavaju da za svaki konačan skup A definiramo broj elemenata, što označavamo s $k(A)$, postavljajući $k(A) = n$, gdje vrijedi $A \sim \mathbb{N}_n$.

Propozicija 3.2.3. *Za svaki skup $A \subseteq \mathbb{N}_m$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da vrijedi $k \leq m$ i $k(A) = k$.*

Dokaz. Indukcijom po m. Ako je $m = 0$ ili $m = 1$, tvrdnja očito vrijedi. Neka $m \in \mathbb{N}$ tako da za svaki podskup B skupa $\mathbb{N}_m$ vrijedi da postoji $k \leq m$ za koji je $k(B) = k$. Neka A bude proizvoljan podskup skupa $\mathbb{N}_{m+1}$.

U slučaju kada je $A \subseteq \mathbb{N}_m$, tvrdnja slijedi iz pretpostavke indukcije. Promotrimo sada slučaj kada vrijedi $m + 1 \in A$. Tada je $A \setminus \{m + 1\} \subseteq \mathbb{N}_m$. Prema pretpostavci indukcije, postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $k(A \setminus \{m + 1\}) = k$. Jasno je da tada vrijedi $k(A) = k + 1$. □

Korolar 3.2.4. *Svaki podskup konačnog skupa je konačan.*

3.3 Beskonačni skupovi

Ovo potpoglavlje napisano je prema [1],[2].
Zanimala su nas zajednička svojstva konačnih i beskonačnih skupova. Sada ćemo se početi baviti svojstvima koja su karakteristična samo za beskonačne skupove. Poznato nam je da se ta svojstva značajno razlikuju od svojstava konačnih skupova. Ono što je nemoguće za konačne skupove, postaje izvedivo u beskonačnim skupovima. U daljnjem dijelu rada dotaknut ćemo se usporedbi beskonačnih skupova.

Za konačne skupove različite prirode uvijek je moguće usporediti koji od njih ima više, a koji manje elemenata. Za beskonačne skupove, to pitanje postaje znatno složenije. Na primjer, je li više prirodnih ili racionalnih brojeva, racionalnih ili realnih brojeva? Gdje je više točaka na segmentu ili duž cijelog pravca, na pravcu ili unutar kvadrata?

Na prvi pogled, čini se sasvim jednostavno odgovoriti na ta pitanja, jer skup prirodnih brojeva čini podskup skupa racionalnih brojeva, a segment je dio pravca. No, iz ovoga ne proizlazi nužno da su prirodni brojevi manje brojčani od skupa racionalnih brojeva, niti da je broj točaka na segmentu manji od broja točaka na pravcu.

Pokazuje se da stvari ipak nisu tako jednostavne, jer ne možemo automatski primijeniti zakone izvedene iz razmatranja konačnih skupova na beskonačne skupove. Primjerice, zakon ”dio je manji od cjeline” koji vrijedi za konačne skupove ne može se nužno direktno primijeniti na beskonačne skupove.

Definicija 3.3.1. *Za skup X nije konačan tada ga nazivamo* ***beskonačanim****.*

Teorem 3.3.2. *Neka je X proizvoljan skup. Tada vrijede sljedeće implikacije:*

1. *Ako postoji injekcija iz skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ u skup X, tada postoji injekcija iz skupa X u sebe koja nije surjekcija.*

2. *Ako postoji injekcija iz skupa X u sebe koja nije surjekcija, tada skup X je ekvipotentan s nekim svojim pravim podskupom.*

3. *Ako skup X je ekvipotentan s nekim svojim pravim podskupom, tada skup X je beskonačan.*

Dokaz. 1. Neka je $f : \mathbb{N} \to X$ neka injekcija. Definiramo funkciju $g : X \to X$ ovako:

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{ako } x \notin f[\mathbb{N}] \\ f(n+1), & \text{ako } x = f(n). \end{cases}$$

Pokažimo da je funkcija g injekcija. Neka su x_1 i x_2 iz X takvi da je $x_1 \neq x_2$. Razlikujemo tri slučaja: (i) $x_1, x_2 \notin f[\mathbb{N}]$. Tada je $g(x_1) = x_1 \neq x_2 = g(x_2)$. (ii) $x_1 \in f[\mathbb{N}]$ i $x_2 \notin f[\mathbb{N}]$. Tada je $g(x_1) \in f[\mathbb{N}]$, a $g(x_2) \notin f[\mathbb{N}]$, pa je očito $g(x_1) \neq g(x_2)$. (iii) $x_1, x_2 \in f[\mathbb{N}]$. Tada je $x_1 = f(n)$ i $x_2 = f(m)$, za neke $n, m \in \mathbb{N}$. Pošto je $x_1 \neq x_2$ tada je $n \neq m$. No, funkcija f je po pretpostavci injekcija, pa je $f(n+1) \neq f(m+1)$, a onda je $g(x_1) \neq g(x_2)$. Funkcija g nije surjekcija jer $f(0) \in X \setminus g(X)$.

2. Neka je $f : X \to X$ neka injekcija koja nije surjekcija. Tada je $f[X]$ pravi podskup od X, te je očito $f : X \to f[X]$ bijekcija. To znači da vrijedi $X \sim f(X)$.

3. Neka je $Y \subset X$ i $g : X \to Y$ bijekcija. Pretpostavimo da je skup X konačan. Tada iz definicije slijedi da postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $X \sim \mathbb{N}_k$. Neka je $f : \mathbb{N}_k \to X$ jedna bijekcija. Tada je $h = f^{-1} \circ g \circ f : \mathbb{N}_k \to \mathbb{N}_k$ injekcija. No, $h[\mathbb{N}_k] = f^{-1}[g[f[\mathbb{N}_k]]] = f^{-1}[g[X]] = f^{-1}[Y] \neq \mathbb{N}_k$, pa h nije surjekcija. To je u kontradikciji s teoremom 3.2.1.

□

Napomena Kao što smo već više puta istaknuli u ovom poglavlju, razmatramo naivnu teoriju skupova, a naš cilj je istaknuti činjenice koje koristimo u dokazima. Iskaz i dokaz prethodnog teorema moguće je nadopuniti do ekvivalentnih tvrdnji, gdje je još potrebno dokazati da ”Skup X je beskonačan $\Longrightarrow$ postoji injekcija iz $\mathbb{N}$ u X.” Želim istaknuti da se u dokazu tog dijela koriste pojmovi o uređenim skupovima, te se koristi Zornova lema, za koju se u Aksiomatskoj teoriji skupova dokazuje da je ekvivalentna aksiomu izbora. Stoga kada bismo prihvatili tu činjenicu koju u naivnoj teoriji skupova nije moguće dokazati dobili bi jako zanimljv korolar.

Korolar 3.3.3. *Skup X je konačan ako i samo ako je svaka injekcija iz X u X ujedno i surjekcija.*

Dokaz. Koristeći teorem 3.3.2 i neposrednu napomenu primjećujemo ekvivalenciju ”skup X je beskonačan $\Longleftrightarrow$ postoji injekcija iz X u X koja nije surjekcija”. Negiranjem te tvrdnje dobivamo tezu korolara. □

3.4 Prebrojivi skupovi

Ovo potpoglavlje napisano je prema [1],[2],[3],[5].
Rješavanje problema uspoređivanja konačnih skupova je prilično jednostavno. Ako želimo utvrditi jesu li dva skupa jednake veličine, dovoljno je brojati elemente u svakom skupu. Ako dobijemo isti broj, znači da imaju jednak broj elemenata. Međutim, za beskonačne skupove ova metoda ne funkcionira, jer pokušaj brojanja elemenata beskonačnog skupa može potrajati cijeli život i nikada se ne dovršiti.

Čak ni za konačne skupove metoda prebrojavanja nije uvijek prikladna. Zamislimo situaciju gdje želimo saznati ima li na plesu jednak broj mladića i djevojaka. Zamolimo li sve da se razvrstaju prema spolu i počnemo brojati, dobit ćemo višak informacija jer nas zapravo ne zanima koliko je mladića ili djevojaka na plesu, već samo je li njihov broj jednak. Rješenje je da mladići zamole djevojke za ples, i time će se problem riješiti. Ako se ispostavi da su svi mladići i djevojke pronašli plesne partnere, jasno je da imamo isti broj mladića i djevojaka na plesnom podiju.

Na sličan način možemo pristupiti i problemu uspoređivanja broja gledalaca u kazalištu s brojem sjedala. Ako za vrijeme predstave sva sjedala budu zauzeta, uz pretpostavku da nijedan gledatelj ne stoji u prolazu te da svako sjedište ima točno jednog gledatelja, tada možemo zaključiti da broj gledatelja jednak broju sjedala.

Definicija 3.4.1. *Skup se naziva* ***prebrojiv*** *ako je ekvipotentan skupu $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva. Za skup kažemo da je* ***neprebrojiv*** *ako je beskonačan i nije prebrojiv.*

Primjer:

- Skup $\mathbb{N}$ je prebrojiv jer je $id : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $id(x) = x$, bijekcija.
- Skup $2\mathbb{N}$ svih parnih prirodnih brojeva je prebrojiv jer je $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$, $f(x) = 2x$, jedna bijekcija.
- Skup $2\mathbb{N} + 1$ svih neparnih prirodnih brojeva je prebrojiv jer je $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N} + 1$, $f(x) = 2x + 1$, jedna bijekcija.
- Skup $\mathbb{Z}$ svih cijelih brojeva je prebrojiv jer postoji bijekcija između skupa$\mathbb{Z}$ i skupa $\mathbb{N}$. Jedna bijekcija je dana na str. 28. pod primjerom c).

Propozicija 3.4.2. *Svaki podskup prebrojivog skupa je konačan ili prebrojiv skup.*

Dokaz. Neka je A zadan prebrojiv skup, a $B \subseteq A$. Ako je B konačan, tada nije potrebno ništa dokazivati.

Pretpostavimo da je B beskonačan. Kako je A prebrojiv, postoji bijekcija $f : \mathbb{N} \to A$. Definiramo funkciju $g : \mathbb{N} \to B$ na sljedeći način:

$g(1) = f(i_1)$, gdje je i_1 najmanji prirodni broj za koji je $f(i_1) \in B$.

Pretpostavimo da smo već definirali $g(1), \ldots, g(n-1)$. Tada postavljamo $g(n) = f(i_n)$, gdje je i_n najmanji prirodan broj takav da $i_n > i_{n-1}$ i $f(i_n) \in B$. Na taj način je $g(n)$ definiran za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Iz definicije funkcije g slijedi da je g bijekcija iz $\mathbb{N} \to B$, pa je B prebrojiv. □

Korolar 3.4.3. *Ako je skup A prebrojiv, a $B \subseteq A$ konačan, tada je skup $A \setminus B$ prebrojiv.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. neka je $A \setminus B$ konačan. Kako je $A = (A \setminus B) \cup B$, skup A bi bio unija dva konačna skupa, što znači da bi A bio konačan. Međutim, pretpostavili smo da je A prebrojiv, što je kontradikcija. Dakle, mora vrijediti da je $A \setminus B$ prebrojiv. □

Propozicija 3.4.4. *Ako je skup A konačan, a skup B prebrojiv. Tada je skup $A \cup B$ prebrojiv.*

Dokaz. Neka je $A_0 = A \setminus B$. Tada je očito $A \cup B = A_0 \cup B$. Budući da je A konačan, a $A_0 \subseteq A$, pošto je svaki podskup konačnog skupa konačan (Korolar 3.2.4.) slijedi da je i A_0 konačan skup.

Neka je $k(A_0) = k$, te neka je $g : A_0 \to \mathbb{N}_k$ neka bijekcija. Označimo s h jednu bijekciju između B i $\mathbb{N}$. Definiramo funkciju $f : A_0 \cup B \to \mathbb{N}$ ovako:

$$f(x) = \begin{cases} g(x), & \text{ako je } x \in A_0 \\ h(x) + k + 1, & \text{ako je } x \in B \end{cases}$$

Očito je funkcija f bijekcija. □

Teorem 3.4.5. *Svaki beskonačan skup sadrži prebrojiv podskup.*

Dokaz. Neka je B beskonačan prebrojiv skup. Kako je skup$B$ neprazan to postoji element $b_1 \in B$. Pretpostavimo da smo već odabrali elemente $b_1, b_2, \ldots, b_n$ iz skupa B. Skup $B \setminus \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ je neprazan, pa se u tom skupu može izabrati element b_{n+1}. Na taj način smo došli do prebrojivog podskupa $\{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$ iz skupa B. □

Istaknimo da smo u dokazu prethodnog teorema koristili aksiom izbora (što je u naivnoj teoriji skupova dozvoljeno jer ju je i sam Cantor koristio), što nam je omogućilo da izvršimo beskonačno mnogo proizvoljnih izbora.

Teorem 3.4.6. *Ako je* $(A_j : j \in \mathbb{N})$ *familija skupova čiji su elementi prebrojivi i u parovima disjunktni skupovi. Tada je skup*

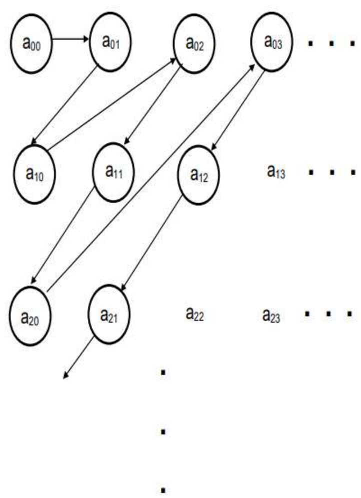
$$A = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j$$

prebrojiv.

Dokaz. Pošto je svaki skup A_j prebrojiv, možemo njegove elemente poredati u niz. Time imamo:

$$\begin{aligned} A_0 &: \ldots, a_{00}, a_{01}, a_{02}, a_{03}, \ldots \\ A_1 &: \ldots, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots \\ A_2 &: \ldots, a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, \ldots \\ A_3 &: \ldots, a_{30}, a_{31}, a_{32}, a_{33}, \ldots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Ovdje svaki skup A_j ima svoj red, a elementi su navedeni u nizu ispod svakog skupa. Sada dijagonalno definiramo traženu bijekciju, tj. uređene parove poredamo u niz na sljedeći način: $a_{00}\ a_{01}\ a_{10}\ a_{02}\ a_{11}\ a_{20}\ a_{03}\ a_{12} \cdots$ Navedena bijekcija je ilustrirana na sljedećoj slici[2].



Najkraća dijagonala sastoji se od jednog elementa kojem je zbroj indeksa $0 + 0 = 0$, sljedeća dijagonala ima 2 elementa i to su svi elementi kojima je zbroj indeksa $0 + 1 = 1 + 0 = 1$. Općenito diagonala koja počinje s a_{0m} sastoji se od svih elemenata sa zbrojem indeksa m i ima ih $m + 1$,

$$m = 0 + m = 1 + (m - 1) = ... = (m - 1) + 1 = m + 0 = m$$

Dakle sve elemente polaznog skupa smo napisali u obliku niza, pa je taj skup prebrojiv. $\square$

Korolar 3.4.7. *Neka je $(A_j : j \in \mathbb{N})$ familija skupova takva da je za svaki $j \in \mathbb{N}$ skup A_j konačan ili prebrojiv. Tada je skup $A = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ konačan ili prebrojiv.*

Korolar 3.4.8. *Vrijede sljedeće tvrdnje:*

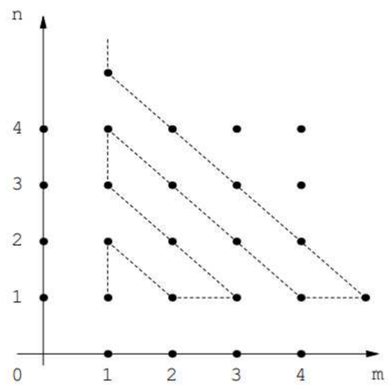
- *Skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ je prebrojiv.*
- *Skupovi $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\mathbb{N}^3$, i tako dalje, su prebrojivi.*

Dokaz. a) Označimo za svaki $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ skup $Q_k = \left\{\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \frac{3}{k}, \ldots\right\}$. Očito je svaki skup Q_k prebrojiv. Tada je $S = \bigcup_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} Q_k$ prebrojiva unija prebrojivih skupova, a onda iz korolara 3.4.7 slijedi da je to prebrojiv skup. Pošto je očito $Q^+ = \bigcup_{k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}} Q_k$, tada je taj skup prebrojiv. No, $Q = Q^+ \cup \{0\} \cup Q^-$, tj. skup racionalnih brojeva je unija dva prebrojiva skupa i jednog konačnog skupa.

b) Konstruiramo preslikavanje $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ kako slijedi:

$$f((m,n)) = \begin{cases} \frac{m+n-1}{2} + n, & \text{za } m+n-1 \text{ neparan} \\ \frac{m+n-1}{2} + m, & \text{za } m+n-1 \text{ paran} \end{cases}$$

Grafički je prikazano na slici [3].



Svakom uređenom paru prirodnih brojeva jednoznačno je određen poredak na putanji označenoj na slici. Dalje za $\mathbb{N}^n$, indukcijom...

$\square$

3.5 Neprebrojivi skupovi

Ovo potpoglavlje napisano je prema [1],[2],[3],[5],[6],[12],[13].
Svi dosad konstruirani skupovi bili su prebrojivi, što navodi na razmišljanje - nisu li uopće svi beskonačni skupovi prebrojivi? Kada bi tako bilo, svi beskonačni skupovi bi imali jednak broj elemenata. No, pokazalo se da je stvar mnogo složenija: neprebrojivi skupovi postoje. Primijetimo da je općenito teško dokazati neprebrojivost nekog skupa. Dokazati da je neki skup prebrojiv znači smisliti pravilo po kojem se numeriraju njegovi elementi, a dokazati neprebrojivost nekog skupa znači dokazati da takvog pravila nema i ne može biti. Drugim riječima, kakvo god pravilo smislili, uvijek će se naći nenumerirani elementi skupa.

Propozicija 3.5.1. *Neka je A beskonačan i $B \subseteq A$ neki konačan podskup. Tada vrijedi $A \sim A \setminus B$.*

Dokaz. Neka je skup dan s $B = \{b_0, b_1, \ldots, b_n\}$. Očito je skup $A \setminus B$ beskonačan. Iz teorema 3.4.5 slijedi da postoji skup $C = \{c_0, c_1, c_2, \ldots\}$ koji je prebrojiv podskup od skupa $A \setminus B$. Sada definiramo funkciju $g : A \to A \setminus B$:

$$g(x) = \begin{cases} c_i, & \text{ako je } x = b_i, \\ c_{n+1+i}, & \text{ako je } x = c_i, \\ x, & \text{ako je } x \in A \setminus (B \cup C). \end{cases}$$

Očito je funkcija g bijekcija. Time smo dokazali $A \sim A \setminus B$ □

Korolar 3.5.2. *Za sve realne brojeve a i b, takve da je $a < b$, vrijedi:*

$$[a, b] \sim < a, b] \sim [a, b > \sim < a, b >$$

Korolar 3.5.3. *Svi omeđeni intervali od $\mathbb{R}$ su međusobno ekvipotentni.*

Dokaz. U primjeru pod **d)** na str. 28. smo dokazali da vrijedi $[a, b] \sim [c, d]$, za sve realne brojeve a, b, c i d, za koje vrijedi $a < b$ i $c < d$. Sada tvrdnja korolara slijedi iz prethodnog korolara. □

Korolar 3.5.4. *Svaki omeđeni interval (zatvoren ili otvoren) od $\mathbb{R}$ je ekvipotentan sa $\mathbb{R}$.*

Dokaz. Lako je provjeriti da je funkcija $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ definirana s $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$ bijekcija. Sada iz prethodnog korolara slijedi tvrdnja. □

Teorem 3.5.5 (Cantorov aksiom)**.** *Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nizovi u $\mathbb{R}$. Nadalje, neka $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ niz segmenata takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada postoji $x \in \mathbb{R}$ takav da je $x \in [a_n, b_n]$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Označimo s $A = \{a_n; n \in \mathbb{N}\}$ i $B = \{b_n; n \in \mathbb{N}\}$. Skupovi A i B su ograničeni (odozdo s a_1 i odozgo s b_1), pa postoje $\sup A$ i $\inf B$. Ovdje smo koristili Aksiom potpunosti koji kaže "svaki neprazan odozgo omeđen podskup $S \subset \mathbb{R}$ ima supremum u $\mathbb{R}$", analogno vrijedi "svaki neprazan odozdo omeđen podskup $S \subset \mathbb{R}$ ima infimum u $\mathbb{R}$".

Želimo pokazati da vrijedi $[\sup A, \inf B] \subseteq [a_n, b_n]$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Za sve $n \in \mathbb{N}$ očigledno vrijedi $a_n \leq b_n$, $a_n \leq a_{n+1}$ i $b_{n+1} \leq b_n$. Dokažimo da vrijedi za sve $n, m \in \mathbb{N}$, $a_n \leq b_m$. Ako je $n = m$, tada je to jasno. Ako je $n < m$, onda $n < n + 1 < \ldots < m - 1 < m$ što povlači $a_n \leq \ldots \leq a_m \leq b_m$, tj. $a_n \leq b_m$. Analogno vrijedi za $m < n$.

Odatle zaključujemo da je za svaki $n \in \mathbb{N}$, a_n donja međa za skup B, dakle, za svaki $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq \inf B$. Sada je $\inf B$ gornja međa za skup A, pa vrijedi $\sup A \leq \inf B$. □

Teorem 3.5.6. *Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ je neprebrojiv skup.*

Dokaz. Kada bi vrijedilo suprotno, tj. da je $[a, b]$ prebrojiv, postojala bi bijekcija $f : \mathbb{N} \to [a, b]$ takva da je $[a, b] = \{f(n); n \in \mathbb{N}\}$. Stavimo $a_1 = a, b_1 = b$. Ako je $f(1) \leq \frac{a_1+b_1}{2}$, stavimo $a_2 = \frac{a_1+3b_1}{4}$ i $b_2 = b_1$, a u slučaju $f(1) \geq \frac{a_1+b_1}{2}$, stavimo $a_2 = a_1$ i $b_2 = \frac{3a_1+b_1}{4}$. U oba slučaja vrijedi $f(1) \notin [a_2, b_2]$ i $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$. Na isti način, zamjenom $a_1 \leftrightarrow a_2$ i $b_1 \leftrightarrow b_2$, nađemo $f(2)$ itd. Na taj način dobivamo segmente $[a_n, b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, sa svojstvom $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ i $f(n) \notin [a_{n+1}, b_{n+1}]$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Po teoremu (Cantorov aksiom) o potpunosti skupa $\mathbb{R}$, postoji $x \in [a, b]$ tako da je $x \in [a_n, b_n]$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Zbog pretpostavke o bijektivnosti funkcije $f : \mathbb{N} \to [a, b]$, postoji $m \in \mathbb{N}$ tako da je $x = f(m)$. No, po konstrukciji vrijedi $f(m) \notin [a_{m+1}, b_{m+1}]$, što je kontradikcija s izborom točke x. □

Dokazali smo da je skup $\mathbb{R}$ ekvipotentan sa svakim svojim omeđenim intervalom. Sada ćemo prvo dokazati korolaro neprebrojivosti skupa $\mathbb{R}$.

Korolar 3.5.7. *Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ je neprebrojiv.*

Dokaz. Kada bi $\mathbb{R}$ bio prebrojiv, tada bi po Teoremu 3.4.2 i segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ bio prebrojiv, a to se kosi s tvrdnjom teorema 3.5.6. □

Prethodni dokaz neprebrojivosti skupa $\mathbb{R}$ iako logički ispravan nije onakav kakvog ga je Cantor prvobitno izveo stoga ćemo u nastavku pružiti skicu Cantorovog dokaza neprebrojivosti skupa $\mathbb{R}$ u kojem je koristio svoj dijagonalni postupak.

Cantorov dokaz

Pretpostavimo suprotno, tj. da je $\mathbb{R}$ prebrojiv. Onda je i njegov podskup, otvoreni interval $(0, 1)$, također prebrojiv, tj. realni brojevi između 0 i 1 mogu se poredati u niz. Svaki od tih brojeva ima decimalni zapis s beskonačno mnogo znamenki iza decimalnog zareza (ako je decimalni zapis konačan, primjerice $1/4 = 0.25$, možemo uzeti da su ostale znamenke nule: $0.25 = 0.2500000...$). Neki od njih se mogu decimalno zapisati na dva načina, primjerice $0.5 = 0.50000... = 0.49999999....$ Da bi se izbjegla ta dvosmislenost, dogovaramo se: biramo onaj decimalni zapis koji ne završava beskonačnim nizom devetki (dakle, za $1/2$ biramo $0.5000...$).

E sad zamislimo da smo uz taj dogovor sve brojeve između 0 i 1 poredali u niz. Da lakše vizualiziramo zašto taj postupak nazivamo dijagonalnim, napišimo prvo nekoliko članova niza (nebitno jesu li baš ti ili neki drugi brojevi na početku):

$$\begin{aligned} x_1 &= 0.5105110... \\ x_2 &= 0.4132043... \\ x_3 &= 0.8245029... \\ x_4 &= 0.2330726... \\ x_5 &= 0.0954152... \\ x_6 &= 0.6100199... \end{aligned}$$

Uočimo sva dijagonalna mjesta - zaokružene brojeve. Formiramo novi broj x tako da najprije uzmemo broj koji nastaje iz istaknutih dijagonalnih mjesta: 0.514019..., a zatim za svaku decimalnu znamenku promijenimo prema pravilu: ako je znamenka 1, pretvaramo je u 0, inače u 1. Dakle, u našem primjeru $x = 0.101101....$ Taj broj je očito između 0 i 1, a nije naveden u nizu, što znači da smo pogrešno pretpostavili da se svi realni brojevi između 0 i 1 mogu poredati u niz. Ako vam nije jasan ovaj dokaz, pokušajte prema ovim pravilima namjestiti neki broj da se uklopi u vaš niz. Ubrzo ćete primijetiti da to nije moguće postići. Zaključujemo: interval $< 0, 1 >$, a stoga i cijeli skup $\mathbb{R}$ su neprebrojivi. Kako je $\mathbb{N}$ podskup od $\mathbb{R}$, dokazali smo da $\mathbb{R}$ ima više elemenata od $\mathbb{N}$.

Varijantama Cantorovog dijagonalnog postupka dokazani su i mnogi drugi teoremi o beskonačnim skupovima, primjerice osnovni Cantorov teorem teorije skupova: " Skup svih podskupova nekog skupa A uvjek ima više elemenata nego skup A".

Propozicija 3.5.8. *Neka je A neprebrojiv skup i $B \subseteq A$ konačan ili prebrojiv. Tada je $A \sim A \setminus B$.*

Dokaz. Ovaj dokaz je sasvim analogan dokazu teorema 3.5.1. Pošto je $B \subseteq A$, tada vrijedi $A = (A \setminus B) \cup B$. Iz toga slijedi da je skup $A \setminus B$ neprebrojiv (inače bi imali da je A unija dva prebrojiva skupa, ili pak unija konačnog i prebrojivog skupa, pa je skup A prebrojiv, što je suprotno pretpostavci propozicije). Sada imamo da je skup $A \setminus B$ beskonačan.

Iz teorema 3.4.5 slijedi da postoji $C \subseteq A \setminus B$ koji je prebrojiv. Neka je $C = \{c_0, c_1, c_2, \ldots\}$. Radi određenosti promatramo slučaj kada je $B = \{b_0, b_1, b_2, \ldots\}$ prebrojiv skup. Sada definiramo funkciju $f : A \to A \setminus B$ ovako:

$$f(x) = \begin{cases} c_{2i}, & \text{ako je } x = b_i; \\ c_{2i+1}, & \text{ako je } x = c_i; \\ x, & \text{ako je } x \in A \setminus (B \cup C). \end{cases}$$

Očito je funkcija f bijekcija, pa imamo $A \sim A \setminus B$. Na sličan način bismo dokazali tvrdnju propozicije kada je B konačan skup. □

Primjer: Vrijedi $R \setminus \mathbb{Q} \sim R$, tj. skup svih iracionalnih brojeva je ekvipotentan sa skupom $\mathbb{R}$. Dakle, skup svih iracionalnih brojeva je neprebrojiv.

Algebarski brojevi

Uspješno smo poredali sve racionalne brojeve. Međutim, racionalni brojevi proističu iz prirodnih brojeva pomoću jedne jedine operacije - dijeljenja (i eventualno promjene znaka). Sada ćemo uključiti i operaciju korijena i istražiti sve brojeve koji se mogu dobiti od prirodnih brojeva koristeći tu operaciju i osnovne aritmetičke operacije. Ovaj skup uključuje brojeve kao što su $2^{1/3} + 1$ i $(3 - (5)^{1/2})^{1/4}$. Postavlja se pitanje: možemo li poredati skup takvih brojeva? To izgleda kao još izazovniji zadatak nego indeksiranje skupa racionalnih brojeva. Ipak, pokazuje se da je i taj skup prebrojiv, tj. moguće je pronaći numeraciju njegovih elemenata.

Izraz $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, gdje su $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ realni brojevi, n prirodan broj, naziva se algebarska jednadžba n-tog stupnja nad skupom $\mathbb{R}$. Znamo da svaka algebarska jednadžba n-tog stupnja ima n korijena koji mogu biti realni ili kompleksni brojevi, pri čemu neki korijeni mogu biti višestruki.

Algebarski broj je svaki broj (bilo da je realan ili kompleksan) čiji korijen je rješenje neke algebarske jednadžbe s koeficijentima koji su cijeli brojevi. Na primjer, ako rješenje jednadžbe $qx - p = 0$ gdje je p cijeli broj i q prirodni broj, tada je p/q algebarski broj.

Iz ovoga slijedi da skup racionalnih brojeva $\mathbb{Q}$ sadrži sve algebarske brojeve jer možemo predstaviti rješenja algebarskih jednadžbi s racionalnim koeficijentima kao racionalne brojeve $\frac{p}{q}$. Stoga vrijedi $\mathbb{Q} \subseteq A$, gdje je A skup svih algebarskih brojeva.

Lema 3.5.9. *Kartezijev produkt konačnog broja prebrojivih skupova je prebrojiv skup.*

Dokaz. Prvi dio dokaza je sličan Teoremu 3.4.6. Neka su $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$ i $B = \{b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ...\}$ dva prebrojiva skupa. Tada se svi elementi skupa $A \times B$ mogu napisati u obliku jednog beskonačnog niza nizova:

$$\begin{array}{ccccccccc}
(a_1, b_1) & & (a_1, b_2) & & (a_1, b_3) & & \cdots & (a_1, b_m) \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
(a_2, b_1) & & (a_2, b_2) & & (a_2, b_3) & & \cdots & (a_2, b_m) \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
(a_3, b_1) & & (a_3, b_2) & & (a_3, b_3) & & \cdots & (a_3, b_m) \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\
 & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\
(a_n, b_1) & & (a_n, b_2) & & (a_n, b_3) & & \cdots & (a_n, b_m)
\end{array}$$

Sada korištenjem iste logike kao u teoremu 3.4.6 slijedi da je skup $A \times B$ prebrojiv.

Za dokaz prebrojivosti Kartezijevog produkta konačnog broja prebrojivih skupova koristimo indukciju. Prema prvom djelu dokaza baza indukcije je istinita. Sada pretpostavimo da je istinita i za n skupova. Pokažimo da je istina i za n+1 skupova. Tada se Kartezijev produkt n+1 prebrojivih skupova skupova $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \times A_{n+1}$ može zapisati na način $(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) \times A_{n+1}$, pa po pretpostavci indukcije je produkt od n prebrojivih skupova unutar zagrade prebrojiv skup. No tada je po prvom djelu dokaza izraz $(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n) \times A_{n+1}$ Kartezijev produkt dva prebrojiva skupa, dakle i on je prebrojiv. □

Lema 3.5.10. *Skup svih polinoma jedne varijable s cjelobrojnim koeficijentima je prebrojiv skup*

Dokaz. Svaki polinom je jedinstveno određen svojim koeficijentima tj. svaki polinom $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ iz $Z[X]$ jedinstveno je određen $(n + 1)$-torkom cijelih brojeva $(a_n, \ldots, a_1, a_0)$. Za svaki prirodan broj n, označimo P_n skup svih polinoma s cjelobrojnim koeficijentima čiji je stupanj n. Zatim, za svaki prirodan broj n, neka je $F_n : P_n \to \{(a_n, \ldots, a_1, a_0) : a_i \in \mathbb{Z},\ a_n \neq 0\}$ funkcija koja polinomu $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ iz skupa P_n pridružuje $(n+1)$-torku $(a_n, \ldots, a_1, a_0)$. Iz prethodnih razmatranja slijedi da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ funkcija $F_n : P_n \to \{(a_n, \ldots, a_1, a_0) : a_i \in \mathbb{Z},\ a_n \neq 0\}$ bijekcija. Budući da je za svaki prirodan broj n skup $\mathbb{Z}^{n+1}$ prebrojiv (što je posljedica primjera c) na stranici 28. i prethodne leme), to slijedi da je i za svaki $n \in \mathbb{N}$ skup $\{(a_n, \ldots, a_1, a_0) : a_i \in \mathbb{Z},\ a_n \neq 0\}$ prebrojiv. To znači da je za svaki prirodan broj n skup P_n svih polinoma stupnja n prebrojiv. Za skup svih polinoma sa cjelobrojnim koeficijentima vrijedi $P = \cup_{i=0}^{n} P_n$, pa po korolaru 3.4.7 slijedi da je i P prebrojiv. □

Propozicija 3.5.11. *Skup svih realnih algebarskih brojeva je prebrojiv.*

Dokaz. Iz prethodne leme znamo da je skup svih polinoma jedne varijable s cjelobrojnim koeficijentima prebrojiv skup. Kako svaki polinom n-tog stupnja ima najviše n nultočaka, prebrojavanjem tih nultočaka po svakom polinomu dobivamo prebrojivu uniju konačnih skupova. Koristeći korolar 3.4.7 slijedi tvrdnja propozicije. □

Propozicija 3.5.12. *Egzistencija transcedentnih realnih brojeva*

Dokaz. Kako je skup $\mathbb{A}$ svih realnih algebarskih brojeva prebrojiv te skup $\mathbb{R}$ neprebrojiv. Tada je skup $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A} = \emptyset$. Time smo dokazali postojanje trenscedentnih brojeva. Štoviše iz propozicije 3.5.8 slijedi $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A} \sim \mathbb{R}$, tj. skup svih transcedentnih brojeva je neprebrojiv. □

Transcedentni brojevi

U nazivu algebarskih brojeva označavamo one brojeve koji su korijeni jednadžbi oblika $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, gdje su koeficijenti $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ cijeli brojevi. Svi ostali brojevi, koji nisu korijeni takvih jednadžbi, nazivaju se transcendentni brojevi. Dugo vremena u matematici, bavili smo se samo algebarskim brojevima kao što su $7/12$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt{2}$, i drugi. Tek je uz značajan trud pošlo za rukom francuskom matematičaru Liouvilleu 1844.g. da pronađe nekoliko transcendentnih brojeva. Posebno značajan je bio dokaz transcedentnosti broja π, koji je dao Lindemann 1882.g., jer iz tog dokaza proizlazi nemogućnost kvadrature kruga. Iznenada, postalo je jasno da su algebarski brojevi točkasto razasuti po ravnini baš kao i zvijezde na tamnom nebu; gusta je tmina nebo transcendentnih brojeva.

Ranije smo primijetili da skup algebarskih brojeva čini samo prebrojiv skup. No, kao što smo vidjeli, skup realnih brojeva je neprebrojiv. Stoga je i razlika između skupova realnih i algebarskih brojeva, odnosno skup transcendentnih brojeva, također neprebrojiva.

Dokaz postojanja transcendentnih brojeva, koji je G. Cantor pružio 1873., ostavlja dubok dojam na matematičare. Cantor je uspio dokazati postojanje transcendentnih brojeva bez da je konstruirao konkretne primjere takvih brojeva, krećući se od općih pretpostavki. Međutim, ova prednost Cantorovog dokaza istovremeno se može shvatiti kao njegova slabost. Iz Liouvilleovog teorema proizlazi jednostavan način konstrukcije konkretnih primjera transcendentnih brojeva. Na primjer [7], broj $0.1010010000001\ldots$, gdje iza n-te jedinice dolazi $n!$ nula, jest transcendentan broj. Nasuprot tome, iz Cantorovog dokaza nije moguće izvesti nijedan konkretan primjer transcendentnog broja. Tako Cantorov dokaz, kako matematičari kažu, nema konstruktivnu prirodu, što će ga kasnije dovesti u sukob s konzervativnim matematičarima poput Leopolda Kroneckera.

3.6 Kardinalnost

Ovo potpoglavlje napisano je prema [1],[2],[3],[5].

Definicija 3.6.1. *Za skupove A i B kažemo da imaju istu* ***kardinalnost*** *i pišemo* $k(A) = k(B)$ *ako su ekvipotentni.*

Svaki prirodni broj ima dvostruku ulogu: on služi kao mjera količine i istodobno kao indikator redoslijeda. Drugim riječima, svaki prirodni broj istovremeno je kardinalni (osnovni) broj i redni broj. Naš idući cilj je oblikovati koncept beskonačnih kardinalnih brojeva koji će nam omogućiti da mjerimo veličinu beskonačnih skupova. Nadalje, težimo definirati beskonačne redne brojeve koji će odražavati poredak elemenata u beskonačnim skupovima. Kasnije ćemo definirati kardinalni broj za proizvoljni skup A kao jedinstveni skup iz klase svih skupova koji su ekvipotentni s A. Kako bismo olakšali zapis, uvodimo nekoliko oznaka za kardinalnost: $k(\emptyset) = 0$, $k(\{0, \dots, n-1\}) = n$, $k(\mathbb{N}) = \aleph_0$, $k(\mathbb{R}) = \mathfrak{c}$ ("kontinuum"). Kada npr. napišemo $k(A) = \aleph_0$, to znači da je skup A ekvipotentan s $\mathbb{N}$.

Dosad smo pokazali da vrijedi:

- $\aleph_0 = k(\mathbb{N}) = k(\{1, 2, 3, \dots\}) = k(\mathbb{Q}) = k(\mathbb{Z}) = k(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$
- $k(\mathbb{R}) = k([a, b])$, za sve $a, b \in \mathbb{R}$, pri čemu je $a < b$
- $k(\mathbb{R}) \neq k(\mathbb{N})$, tj. $\mathfrak{c} \neq \aleph_0$
- $k(\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}) = k(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = k(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}) = \mathfrak{c}$

Definicija 3.6.2. *Za skup A kažemo da ima manju ili jednaku kardinalnost od skupa B ako postoji* $B_1 \subseteq B$ *takav da je* $A \sim B_1$ *tada pišemo (*$k(A) \leq k(B)$*). Ako vrijedi* $k(A) \leq k(B)$ *i* $k(A) \neq k(B)$*, tada kažemo da je kardinalnost skupa A strogo manja od kardinalnosti skupa B i pišemo (*$k(A) < k(B)$*).*

Primjetimo da: $k(A) \leq k(B)$ ako i samo ako skup A možemo injektivno preslikati u skup B. Sada ćemo iskazati i dokazati jedan od najvažnijih teorema u teoriji skupova kojeg je Cantor prvi iskazao a dokazao ga je njegov student F. Bernstein 1897.g.

Teorem 3.6.3 (Cantor, Bernsteinov teorem)**.** *Ako postoji injekcija $f : A \to B$ i injekcija $g : B \to A$, tada postoji bijekcija između skupova A i B.*

Dokaz. Prema pretpostavci teorema postoje bijekcije $f : A \to f(A) \subseteq B$ i $g : B \to g(B) \subseteq A$. Želimo pokazati da postoji bijekcija $h : A \to B$.

Prvo ćemo pokazati da postoji $T \subseteq A$ takav da je $A \setminus T = g(B \setminus f(T))$. Definirajmo funkciju $k : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ tako da za $X \subseteq A$ vrijedi $k(X) = A \setminus g(B \setminus f(X))$. Za funkciju k i bilo koja dva podskupa X, $Y \subseteq A$ vrijedi:

$$\begin{aligned}(X \subseteq Y) &\Rightarrow (f(X) \subseteq f(Y))\\ &\Rightarrow (B \setminus f(Y) \subseteq B \setminus f(X))\\ &\Rightarrow (g(B \setminus f(Y)) \subseteq g(B \setminus f(X)))\\ &\Rightarrow (A \setminus g(B \setminus f(X)) \subseteq A \setminus g(B \setminus f(Y)))\\ &\Rightarrow (k(X) \subseteq k(Y)).\end{aligned}$$

Neka je $F = \{S \subseteq A \mid S \subseteq k(S)\}$ familija podskupova od A. Jasno, $F \neq \emptyset$ jer je $\emptyset \subseteq k(\emptyset)$. Neka je T unija svih elemenata familije F. Pokažimo da je $T \subseteq A$ fiksna točka preslikavanja k, tj. $k(T) = T$. Za svaki $S \in F$ vrijedi $S \subseteq k(S)$ i $S \subseteq T$, što implicira $k(S) \subseteq k(T)$, odakle slijedi $S \subseteq k(T)$. Tada je i $T \subseteq k(T)$, tj. $T \in F$. To znači da $k(T) \subseteq k(k(T))$, pa je $k(T) \in F$. To implicira $k(T) \subseteq T$, iz čega slijedi $k(T) = T$, odnosno $T = A \setminus g(B \setminus f(T))$.

Sada konstruiramo funkciju $h : A \to B$ na sljedeći način:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{za } x \in T \\ g^{-1}(x), & \text{za } x \in A \setminus T \end{cases}.$$

Funkcija h je tražena bijekcija, jer pridružuje elementima iz skupa T njihove slikovne vrijednosti prema f, dok elementima iz skupa $A \setminus T$ pridružuje slikovne vrijednosti prema inverznoj funkciji g^{-1}.

Dakle, imamo $A \sim B$, što znači da su skupovi A i B ekvipotentni. □

U kontekstu kardinalnosti, prethodni rezultat može se sažeti ovako: Kada vrijedi $k(A) \leq k(B)$ i istovremeno $k(B) \leq k(A)$, tada nužno vrijedi i $k(A) = k(B)$.

Prikazat ćemo primjenu Cantor-Bernsteinovog teorema prilikom dokaza da su skupovi $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}$ ekvipotentni. Dovoljno je primijetiti da postoji injekcija iz skupa $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}$ i obratno. Jedna injekcija iz $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}^2$ može se definirati kao preslikavanje $x \mapsto (x, 0)$. Budući da je $\mathbb{R} \sim < 0, 1 >$, tada je očigledno $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim < 0, 1 > \times < 0, 1 >$. Stoga, umjesto injekcije iz $\mathbb{R}^2$ u $\mathbb{R}$, dovoljno je navesti injekciju iz $< 0, 1 > \times < 0, 1 >$ u $\mathbb{R}$. Jedna takva injekcija je:

$$(0.a_0a_1\ldots, 0.b_0b_1\ldots) \mapsto 0.a_01b_01a_11b_1\ldots$$

Upoznali smo se s raznovrsnim kardinalnim brojevima skupova. Kao što smo već ranije istakli, kardinalni brojevi generaliziraju pojam broja elemenata u konačnim skupovima. Analogno prirodnim brojevima, kardinalni brojevi omogućuju aritmetičke operacije poput zbrajanja, oduzimanja i množenja. Te operacije odražavaju svojevrsne operacije nad skupovima.

Primjerice, zbrajanje prirodnih brojeva se može povezati s unijom dvaju disjunktnih konačnih skupova. Ako jedan skup ima m elemenata, a drugi n elemenata, zbroj tih skupova će imati ukupno $m + n$ elemenata. Ovo opravdava sljedeću definiciju:

Definicija 3.6.4. *Neka su A i B skupovi. Neka je $A_0 = A \times \{0\}$ i $B_0 = B \times \{1\}$. Tada $A_0 \cap B_0 = 0$ te vrijedi $k(A) = k(A_0)$ i $k(B) = k(B_0)$. Tada $k(A) + k(B)$ označavamo $k(A_0 \cup B_0)$.*

Propozicija 3.6.5. *Neka su A, B i C skupovi kojima su kardinalni brojevi po redu a, b i c. Tada vrijedi:*

1. $a + b = b + a$
2. $(a + b) + c = a + (b + c)$
3. $a + 0 = a$
4. *ako je $a \leq b$, tada je $a + c \leq b + c$*

Dokaz. Dokaz tvrdnje 1): Neka su A i B skupovi za koje vrijedi $k(A) = a$ i $k(B) = b$. Pošto je očito $A_0 \cup B_0 \sim B_0 \cup A_0$, tada imamo:

$$a + b = k(A) + k(B) = k(A_0 \cup B_0) = k(B_0 \cup A_0) = k(B) + k(A) = b + a$$

2),3) Se dokazuju na analogan način.
4) Neka su A, B, C skupovi kojima su kardinalni brojevi redom a, b, c; Kako je po pretpostavci $A \leq B$ to možemo odabrati $A' \sim A$ takav da $A' \subseteq B$ i $A' \cap C = \emptyset$. Tada je očito $A \cup C \subseteq B \cup C$, pa je $k(A \cup C) \leq k(B \cup C)$ tj. $a + c \leq b + c$. □

Kardinalnim brojevima možemo operirati zbrajanjem na sličan način kao prirodnim brojevima. Međutim, pravila za zbrajanje beskonačnih kardinalnih brojeva znatno se razlikuju od običnih pravila aritmetike. Ova razlika nije iznenađujuća, s obzirom na to da svojstva beskonačnih skupova znatno se razlikuju od svojstava konačnih skupova. Na primjer, u beskonačnoj aritmetici važi:

$$n + \aleph_0 = \aleph_0, \quad \aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0, \quad \aleph_0 + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}, \quad \mathfrak{c} + \mathfrak{c} = \mathfrak{c}, \ldots$$

Prva od ovih relacija označava da je zbroj konačnog skupa i prebrojivog skupa opet prebrojiv skup. Druga relacija označava da je zbroj dva prebrojiva skupa ponovno prebrojiv skup. Treća relacija pokazuje da dodavanje prebrojivog skupa skupu čija je kardinalnost kontinuum daje skup s kardinalnošću kontinuuma.

Razmotrimo sada kako se beskonačni kardinalni brojevi međusobno množe. Prvo, trebamo razumjeti kakva je skupovna operacija vezana uz množenje prirodnih brojeva.

Pretpostavimo da imamo konačne skupove: skup A s n elemenata i skup B s m elemenata. Tada možemo stvoriti novi skup $A \times B$ čiji su elementi svi mogući uređeni parovi (a, b), gdje je $a \in A$ i $b \in B$. Ako označimo elemente prvog skupa kao $a_1, a_2, \dots, a_n$, a elemente drugog skupa kao $b_1, b_2, \dots, b_m$, onda ovi uređeni parovi mogu biti prikazani u obliku tablice:

$$\begin{matrix} (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & \dots & (a_1, b_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a_n, b_1) & (a_n, b_2) & \dots & (a_n, b_m) \end{matrix}$$

Jasno je da je ukupan broj ovih uređenih parova jednak $m \cdot n$. Ovo opravdava sljedeću definiciju.

Definicija 3.6.6. *Neka su A i B proizvoljni skupovi. Tada s* $k(A) \cdot k(B)$ *označavamo* $k(A \times B)$.

Primijenimo ovu operaciju na beskonačne skupove. Neka su A i B beskonačni skupovi. Nazovimo njihov produkt skup $A \times B$, koji sadržava sve moguće elemente parova (a, b), gdje je $a \in A$ i $b \in B$. Na primjer, ako je skup A skup točaka na intervalu $[1, 4]$, a skup B skup točaka na intervalu $[2, 5]$, tada skup $A \times B$ možemo prikazati točkama unutar pravokutnika. Svaka točka unutar tog pravokutnika ima svoje dvije projekcije na osi.

Kada je kardinalni broj skupa A jednak n, a kardinalni broj skupa B jednak m, označit ćemo kardinalni broj skupa $A \times B$ s $m \cdot n$. Sada možemo razmotriti zakone koji vrijede za množenje kardinalnih brojeva:

Propozicija 3.6.7. *Neka su A, B i C skupovi, te a, b i c redom oznake za njihove kardinalnosti. Tada vrijedi:*

1. $a \cdot b = b \cdot a$
2. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. $a \cdot 1 = a$
4. *Ako je* $a \leq b$, *tada je* $a \cdot c \leq b \cdot c$

Dokaz. Dokaz tvrdnje 1,2,3): slijede iz činjenice da su preslikavanja $((x, y).t) \to (x, (y, t)), (x, y) \to (y, x), (x, y) \to (x, y)$ bijekcije.

4) Neka su A, B, C skupovi kojima su kardinalni brojevi redom a, b, c; Kako je po pretpostavci $A \leq B$ to možemo odabrati $A' \sim A$ takav da $A' \subseteq B$ i $A' \cap C = \emptyset$. Tada je očito $A \times C \subseteq B \times C$, pa je $k(A \times C) \leq k(B \times C)$ tj. $ac \leq bc$. □

Sada nam je još preostalo iskazati i dokazati osnovni Cantorov teorem teorije skupova.

Teorem 3.6.8 (Osnovni Cantorov teorem teorije skupova)**.** *Za svaki skup A vrijedi relacija $k(A) < k(P(A))$, odnosno $k(A)$ je strogo manje od $2^{k(A)}$.*

Dokaz. Iz definicije relacije $<$ proizlazi potreba za dokazivanjem dvije stvari: $k(A) \leq k(P(A))$ i $k(A) \neq k(P(A))$.

U slučaju kada je $A = \emptyset$, dobijemo $P(\emptyset) = \{\emptyset\}$, što znači da u ovom slučaju vrijedi $k(A) < k(P(A))$.

Sada, pretpostavimo da je $A \neq \emptyset$. Prvo primjetimo da $k(A) \leq k(P(A))$, jer funkcija $f : A \to P(A)$, gdje $f(x) = \{x\}$, predstavlja injekciju.

Dalje, dokažimo da vrijedi $k(A) \neq k(P(A))$. Pretpostavimo, suprotno, da je $k(A) = k(P(A))$, što znači da postoji bijekcija $f : A \to P(A)$. Definiramo skup $B = \{x \in A | x \notin f(x)\}$. Primjetimo da $B \neq \emptyset$, jer je f surjekcija, a budući da $\emptyset \in P(A)$, postoji $x \in A$ za koji vrijedi $f(x) = \emptyset$. Međutim, to dovodi do kontradikcije, jer bi $x \notin f(x)$, što znači da $x \in B$.

Neka $b \in A$ bude takav da vrijedi $f(b) = B$. Ako pretpostavimo da je $b \in B$, tada iz $B = f(b)$ i definicije skupa B sledi da $b \notin f(b)$. Odatle, mora biti $b \notin B = f(b)$. Opet, iz definicije skupa B sledi da $b \in B$. Ovo dovodi do kontradikcije. Zaključujemo da ne postoji bijekcija između skupova A i $P(A)$. □

Jednostavna posljedica osnovnog Cantorovog teorema teorije skupova je da postoji beskonačno mnogo beskonačnih kardinalnih brojeva: za kardinalni broj nekog skupa A, od njega je veći kardinalni broj ob $B = P(A)$, od tog je pak veći kardinalni broj od $C = P(B) = P(P(A))$.

Ovim zaključujem svoj diplomski rad koji se bavio istraživanjem života i doprinosa Georga Cantora u kontekstu teorije skupova. Kroz ovo istraživanje, istaknuti su ključni aspekti Cantorovog rada i njegova značajna uloga u razvoju matematike.

Cantorova naivna teorija skupova i dalje ostaje ključna za razumijevanje matematičkih koncepta. Njegove inovacije i danas služe kao izvor inspiracije za matematičare širom svijeta.

Cantorova strast prema istraživanju i njegova upornost ostaju inspiracija za buduće generacije istraživača. Njegovo nasljeđe će i dalje obogaćivati matematiku i nadahnjivati sve one koji teže dubljem razumijevanju matematičkih principa.

Daljnje istraživanje u skladu s Cantorovom teorijom skupova može pružiti nove perspektive i doprinijeti napretku u različitim sferama znanosti. Cantorova djela i dalje će biti neizbrisiv dio matematičke baštine, podsjećajući nas na snagu ljudskog uma, sposobnost razumijevanja i istraživanja apstraktnih koncepata.

Bibliografija

[1] Pavle papić, *Uvod u teoriju skupova*, Matkina Biblioteka,HMD Zagreb, 2000.

[2] Mladen Vuković, *Skripta-Teorija skupova*, Sceučilište u Zagrebu PMF-Matematički odsjek, 2015.

[3] Boris Guljaš, *Skripta-Osnove Matematičke analize*, Sceučilište u Zagrebu PMF-Matematički odsjek, 2013.

[4] David Berlinski, *Beskonačni uspon- Kratka povjest matematike*, Alfa, 2005.

[5] E.T.Bell, *Veliki matematičar*, Zdanje-Zagreb, 1965.

[6] Franka Miriam Bruckler, *Matematički dvoboji*, Školska knjiga, 2011.

[7] N.J,Velekin, *Priče o skupovima*, Moderna matematika, 1971.

[8] Žarko Dadić, *Povjest ideja i mtoda u matematici*, Školska knjiga, 1992.

[9] Helena Rebić, *Realni brojevi kroz povjest*, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, 2014.

[10] Sanja Antoliš, Aneta Copić, Eva Špal, *1.1 Skupovi*, dutorij.e-skole.hr, 2021.

[11] Emina Kušec, *Matematički paradoksi*, Sveučilište u Zagrebu -Matematički osjek, 2022.

[12] Petar Gregorek, Mladen Vuković, *Neprebrojivost skupa transcedentnih brojeva*, Matematičko-fizički list, (2017.-2018.)

[13] Franka Miriam Bruckler, Vedran Čačić, Marko Doko, Mladen Vuković, *Zbirka zadataka iz teorije skupova*, veučilište u Zagrebu -Matematički osjek, 2009.

[14] Franka Miriam Bruckler, *Povijesna rubrika- Georg Cantor*, Osječki matematički list 7, 2007.

[15] Šime Ungar, *Uvod u teoriju skupova i matematičku logiku*, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijek, 2016.

[16] Marija Marijić, *Problematika ekvipotentnosti skupova u školskoj matematici*, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, 2018.

Sažetak

Ovaj diplomski rad istražuje život i nasljedstvo Georga Cantora, značajnog matematičara čiji su doprinosi imali dubok utjecaj na teoriju skupova i koncept beskonačnosti. U uvodnom dijelu, naglašava se važnost Cantorovih dostignuća za matematičku zajednicu i razlozi za istraživanje njegovog života.

Prva sekcija rada detaljno prikazuje rani život Cantora, istražujući njegovo porijeklo, obiteljsku pozadinu te rane sklonosti prema matematici koje su oblikovale njegovu buduću karijeru. Obrazovno putovanje Cantora, koje se raspravlja u drugom dijelu, bilo je ključno za formiranje temelja njegovih matematičkih interesa.

Središnji dio rada usmjerava se na Cantorovu revolucionarnu teoriju skupova. Proučavaju se povijesni okviri teorije skupova prije Cantora kako bi se razumio kontekst u kojem su se njegove ideje razvijale. Zatim se analiziraju temeljni koncepti teorije skupova koje je Cantor razvio, kao što su ekvipotentnost skupova, različite vrste beskonačnosti te značajke prebrojivih i neprebrojivih skupova.

Zaključna sekcija rada sažima ključne zaključke i naglašava nasljeđe koje je Cantor ostavio u matematici. Njegova teorija skupova nije samo promijenila način na koji matematičari razmišljaju o beskonačnosti, već je postavila temelje za dublje razumijevanje strukture i relacija unutar matematičkih objekata.

Kroz sve dijelove rada ističe se Cantorova strast prema istraživanju i njegova upornost u suočavanju s izazovima. Njegova vizija beskonačnosti i inovativni pristupi teoriji skupova ostavili su dubok i trajan utjecaj na matematičku misao.

Summary

This thesis explores the life and legacy of Georg Cantor, a significant mathematician whose contributions deeply influenced set theory and the concept of infinity. In the introduction, the importance of Cantor's achievements for the mathematical community is emphasized, along with the reasons for researching his life.

The first section of the paper provides a detailed portrayal of Cantor's early life, delving into his background, family context, and early inclinations towards mathematics that shaped his future career. Cantor's educational journey, discussed in the second part, was pivotal in laying the foundation for his mathematical interests.

The central part of the paper focuses on Cantor's revolutionary set theory. Historical frameworks of set theory prior to Cantor are studied to understand the context in which his ideas developed. Then, the fundamental concepts of set theory that Cantor developed are analyzed, such as equinumerosity of sets, various types of infinity, and features of countable and uncountable sets.

The concluding section of the paper summarizes key findings and highlights the legacy Cantor left in mathematics. His set theory not only changed how mathematicians think about infinity but also laid the groundwork for a deeper understanding of the structure and relationships within mathematical objects.

Throughout all sections, Cantor's passion for research and his perseverance in facing challenges are emphasized. His vision of infinity and innovative approaches to set theory have had a profound and lasting impact on mathematical thought.

Životopis

Rođen sam 9. listopada 1997. godine u Splitu. Završio sam Osnovnu školu Trnsko u Zagrebu, a nakon toga, također u Zagrebu, Ugostiteljsko-turističku školu (smjer: Ugostiteljsko-turistički tehničar). Tijekom srednjoškolskog obazovanja aktivno sam se bavio vatrepolom. Nakon završetka srednje škole upisao sam Prirodoslovno-matematički fakultet u Zagrebu, Matematički odsjek. Akademske godine 2017./18. držao sam demonstrature iz kolegija Linearna algebra 1 te godine 2018./19. iz kolegija Linearna algebra 2 i Konstruktivnih metoda u geometriji. Godine 2020. upisao sam diplomski studij Matematika - smjer financijska i poslovna matematika, koji trenutno završavam.