Izometrično injektivni Banachovi prostori

Skoko, Pero

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Zagreb, Faculty of Science / Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:906051

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Pero Skoko

IZOMETRIČNO INJEKTIVNI BANACHOVI PROSTORI

Diplomski rad

Voditelj rada:
izv. prof. dr. sc. Ilja Gogić

Zagreb, rujan, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Jedan od najosnovnijih i najvažnijih rezultata funkcionalne analize jest Hahn-Banachov teorem. U slučaju normiranih prostora on nam jamči da ograničeni linearni funkcional možemo proširiti s manjeg prostora na veći uz čuvanje norme. Konkretno, ako je X normirani vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ ($\mathbb{F}$ može biti $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$), Y njegov potprostor i $f : Y \to \mathbb{F}$ ograničeni linearni funkcional, tada postoji ograničeni linearni funkcional $\tilde{f} : X \to \mathbb{F}$ takav da je $\tilde{f}|_Y = f$ te $\|\tilde{f}\| = \|f\|$.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook] \arrow[d, "f"] & X \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"] \\ \mathbb{F} & \end{tikzcd}$$

Slika 0.1: Hahn-Banachov teorem kao komutativni dijagram

Jedan od načina njegova generaliziranja jest da umjesto polja $\mathbb{F}$ gledamo neki Banachov prostor. Neku su X i Y Banachovi prostori, te $E \subseteq X$ zatvoren potprostor od X. Zbog zatvorenosti je i E Banachov. Neka je sada $T : E \to Y$ ograničen linearan operator. Pitamo

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, hook] \arrow[d, "T"] & X \arrow[dl, dashed, "\tilde{T}"] \\ Y & \end{tikzcd}$$

Slika 0.2: Izometrična injektivnost

se možemo li T proširiti do $\tilde{T} : X \to Y$ uz čuvanje norme. Banachove prostore Y za koje je to uvijek moguće zovemo izometrično injektivnim Banachovim prostorima i oni su tema ovoga rada. Dokazat ćemo Goodner-Nachbin-Kellyjev teorem koji nam daje karakterizaciju izometrično injektivnih prostora, odnosno to će biti prostori izometrično izomorfni s $\mathcal{C}(K)$ gdje je K ekstremno nepovezan kompaktan Hausdorffov topološki prostor.

Prvo ćemo uvesti neku preliminarnu teoriju i rezultate koji će nam biti potrebni za ostatak rada. Zatim ćemo reći nešto o klasičnim Banachovim prostorima $\mathcal{C}(K)$ i $L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ gdje μ σ-konačna mjera te dati novi primjer izometrično injektivnog prostora: prostor ℓ_∞ svih ograničenih $\mathbb{F}$-nizova. Nakon toga ćemo dokazati Goodner-Nachbin-Kellyjev teorem, te ćemo navesti neke njegove posljedice. Između ostalog, uz pomoć dekompozicijske tehnike Pełczyńskog, dokazat ćemo da su prostori ℓ_∞ i $L_\infty[0,1]$ izomorfni. Također ćemo vidjeti i neke netrivijalne primjere izometrično injektivnih prostora.

U ovom diplomskom radu ćemo raditi isključivo s realnim vektorskim prostorima.

Poglavlje 1

Preliminarna teorija

Sažeto ćemo navesti neke osnove definicije i teoreme iz područja matematike koja su nam potrebna. U sklopu toga ćemo dokazati i neke leme koje će nam kasnije biti korisne.

1.1 Opća topologija

S obzirom na to da ćemo raditi s beskonačno dimenzionalnim vektorskim prostorima, bit će nam potrebni određeni rezultati iz opće topologije. Krenut ćemo s definicijom topologije.

Definicija 1.1.1. *Neka je X neprazan skup. Za $\tau \subset \mathcal{P}(X)$ kažemo da je* ***topologija*** *na X ako vrijedi:*

(i) $\emptyset, X \in \tau$.

(ii) Svaka proizvoljna unija elemenata iz τ se nalazi u τ.

(iii) Konačni presjeci elementa iz τ se nalaze u τ.

Ako je τ topologija na X, onda (X, τ) zovemo ***topološkim prostorom****. Za elemente τ kažemo da su* ***otvoreni skupovi****. Za $V \subseteq X$ takav da postoji U otvoren skup koji je njegov komplement kažemo da je* ***zatvoren****.*

Obično ćemo skup X implicitno poistovjećivati s topološkim prostorom (X, τ) ako je iz konteksta jasno o kojoj se topologiji radi.

Na podskupovima od $S \subseteq X$ možemo promatrati **relativnu topologiju** τ_S koja se definira kao $\tau_S = \{S \cap U \mid U \in \tau\}$. Lako se provjeri da zadovoljava definiciju topologije. Za (S, τ_S) kažemo da je **topološki potprostor** od (X, τ).

Lema 1.1.2. *Neka je Y zatvoren podskup od X. Ako je V zatvoren u Y, tada je V zatvoren i u X.*

Dokaz. V je zatvoren u Y pa postoji W zatvoren u X takav da je $V = Y \cap W$. Vidimo da je V presjek dva zatvorena skupa u X pa je onda i sam zatvoren. $\square$

Definicija 1.1.3. *Ako je (X, τ) topološki prostor i $S \subseteq X$ skup. Zatvarač od S koji označavamo sa $\overline{S}$ je najmanji zatvoren skup koji sadrži S.*

Lako se vidi da je gornja definicija dobra jer je presjek proizvoljne familije zatvorenih skupova opet zatvoren skup, a to lako slijedi iz činjenice da je proizvoljna unija otvorenih skupova otvorena.

Definicija 1.1.4. *Neka je (X, τ) topološki prostor. Familija $\mathcal{F} \subseteq \tau$ je **baza topologije** τ ako se svaki $U \in \tau$ može prikazati kao unija neke kolekcije skupova iz $\mathcal{F}$.*

Sada možemo definirati predbazu topologije:

Definicija 1.1.5. *Neka je (X, τ) topološki prostor. Familija $\mathcal{F} \subseteq \tau$ je **predbaza topologije** ako vrijedi jedan od sljedeća dva ekvivalentna uvjeta:*

(i) τ je topologija generirana $\mathcal{F}$ odnosno to je najmanja topologija na X koja sadrži $\mathcal{F}$.

(ii) Familija $\mathcal{B}$ koja sadrži sve konačne presjeke iz $\mathcal{F}$ je baza od τ.

Druga točka gornje definicije nam omogućuje da definiramo topologiju preko predbaze. Ako imamo kolekciju koja zadovoljava drugu točku, onda postoji najmanja topologija u kojoj su ti elementi otvoreni skupovi. Definirajmo sada neprekidne funkcije:

Definicija 1.1.6. *Neka su (X, τ) i (Y, σ) topološki prostori. Funkcija $f : X \to Y$ je **neprekidna** ako za svaki $V \in \sigma$ vrijedi $f^{-1}(V) \in \tau$. Ako je $\mathcal{F}$ predbaza od σ, onda je dovoljno provjeriti da je $f^{-1}(V) \in \sigma$ za sve $V \in \mathcal{F}$.*

Ako je $f : X \to Y$ bijekcija i ako je f^{-1} također neprekidna, onda za f kažemo da je **homeomorfizam**.

Preko predbaze možemo lako definirati produktnu topologiju i inicijalne topologije.

Definicija 1.1.7. *Neka su $\{(X_i, \tau_i)\}$ za $1 \leq i \leq n$ topološki prostori. Na $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ definiramo predbazu topologije:*

$$\mathcal{F} = \left\{ \prod_{i=1}^{n} V_i \mid V_i \in \tau_i \right\}.$$

*Topologija X kojoj je $\mathcal{F}$ predbaza je **produktna topologija** na X.*

Definicija 1.1.8. *Neka je X skup, $\{(X_i, \tau_i) \mid i \in \mathcal{I}\}$ familija topoloških prostora te $f_i : X \to X_i$ za svaki $i \in \mathcal{I}$ familija funkcija.* ***Inicijalna topologija*** *na X generirana funkcijama f_i je najmanja topologija u kojoj su sve f_i neprekidne. Predbaza te topologije je:*

$$\left\{f_i^{-1}(V_i) \mid i \in \mathcal{I}, V_i \in \tau_i\right\}.$$

Teorem 1.1.9. *Neka su $\{(X_i, \tau_i)\}$ i $\{(Y_i, \sigma_i)\}$ za $1 \leq i \leq n$ topološki prostori, te promatrajmo na $X = \prod_{i=1}^n X_i$ i $Y = \prod_{i=1}^n Y_i$ produktne topologije, i neka su funkcije $f_i : X_i \to Y_i$ neprekidne. Tada je funkcija $f = f_1 \times f_2 \times \cdots f_n : X \to Y$ definirana kao*

$$f(x_1, x_2 \dots x_n) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots f_n(x_n))$$

neprekidna.

Dokaz. Dovoljno je provjeriti praslike predbaze, a to su skupovi oblika $V = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ gdje je $V_i \in \sigma_i$. Imamo:

$$f^{-1}(V) = \left(f_1^{-1}(V_1), f_2^{-1}(V_2), \dots f_n^{-1}(V_n)\right).$$

Sve praslike $f_i^{-1}(V_i)$ su otvorene, i onda je $f^{-1}(V)$ u predbazi produktne topologije na X pa je automatski i otvoren. Slijedi da je f neprekidna. □

Bitan koncept nam je i kompaktnost prostora:

Definicija 1.1.10. *Topološki prostor (X, τ) je* ***kompaktan*** *ako vrijedi jedan od sljedeća dva ekvivalentna uvjeta:*

(i) Svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{F}$ (familija otvorenih skupova čija je unija X) ima konačni potpokrivač (konačnu podfamiliju koja je pokrivač).

(ii) Ako je $\mathcal{F}$ familija zatvorenih skupova sa svojstvom konačnog presjeka (svaki konačni presjek iz familije je neprazan), onda je presjek cijele familije $\mathcal{F}$ neprazan.

Podskup $Y \subseteq X$ topološkog prostora je kompaktan ako je kao topološki potprostor od X kompaktan.

Recimo sada nešto o aksiomima separacije:

Definicija 1.1.11. *Topološki prostor (X, τ) je:*

(i) $\boldsymbol{T_0}$ prostor ako za $x, y \in X$ različite postoji $U \in \tau$ takav da je $x \in U$ i $y \notin U$ ili $y \in U$ i $x \notin U$;

(ii) $\boldsymbol{T_1}$ prostor ako za $x, y \in X$ različite postoji $U \in \tau$ takav da je $x \in U$ i $y \notin U$;

(iii) ***T_2 prostor** ili **Hausdorffov** prostor ako za $x, y \in X$ različite postoje $U, V \in \tau$ takvi da $U \cap V = \emptyset$ te $x \in U$ i $y \in V$;*

(iv) ***T_3 prostor** ako za $x \in X$, F zatvoren i $x \notin F$ postoje $U, V \in \tau$ takvi da $U \cap V = \emptyset$ te $x \in U$ i $F \subseteq V$;*

(v) ***T_4 prostor** ako za F i G zatvorene takve da $F \cap G = \emptyset$ postoje $U, V \in \tau$ takvi da $U \cap V = \emptyset$ te $F \subseteq U$ i $G \subseteq V$;*

(vi) ***regularan** ako je T_3 i Hausdorffov;*

(vii) ***normalan** ako je T_4 i Hausdorffov.*

Napomena 1.1.12. *Lako se vidi da T_1 uvjet ekvivalentan tome da je svaki jednočlan skup zatvoren.*

Napomenimo da je u nekoj literaturi značenje regularnog odnosno normalnog prostora te T_3 odnosno T_4 obrnuto. Navedimo par teorema koji će nam biti potrebni:

Teorem 1.1.13. *Kompaktan Hausdorffov prostor je normalan i regularan.*

Teorem 1.1.14 (Urysohnova lema)**.** *X je normalan ako i samo ako vrijedi da za svaka dva F i G disjunktna zatvorena skupa postoji neprekidna funkcija $f : X \to [0, 1]$ takva da je $f(F) = \{0\}$ i $f(G) = \{1\}$.*

Teorem 1.1.15. *Neka je X Hausdorffov topološki prostor te $K \subseteq X$ kompaktan. Tada je K zatvoren (u X).*

Dokaz. Fiksirajmo $x \in X \setminus K$. Budući da je X Hausdorffov, za svaki $y \in K$ postoje disjunktni otvoreni skupovi U_y i V_y takvi da je $x \in U_y$ i $y \in V_y$. $\left\{U_y \mid y \in K\right\}$ je otvoreni pokrivač od K pa zbog njegove kompaktnosti postoje $\{y_1, y_2, \dots y_m\}$ takvi da je $\left\{V_{y_1}, \dots V_{y_n}\right\}$ otvoreni pokrivač za K. Sad je svaki U_{y_i} disjunktan s V_{y_i} pa je njihov presjek disjunktan sa svakim V_{y_i} pa onda i s njihovom unijom koja sadrži K. Dakle, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ je disjunktan s K i otvoren kao konačan presjek otvorenih skupova. x je bio proizvoljan pa za svaki $x \in X \setminus K$ možemo naći otvorenu okolinu koja je disjunktna s K, i unija tih otvorenih okolina će onda upravo biti $X \setminus K$ pa je on otvoren. Stoga je K zatvoren. □

Teorem 1.1.16. *Neka je X kompaktan topološki prostor te $F \subseteq X$ zatvoren. Tada je F kompaktan.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{F}$ neki otvoreni pokrivač od F. Tada je $\mathcal{F} \cup \{X \setminus F\}$ otvoreni pokrivač za X. On se zbog kompaktnosti može svesti konačan otvoreni potpokrivač. Ako je $X \setminus F$ u tom potpokrivaču, uklonimo ga i dobili smo konačan potpokrivač za F. □

Teorem 1.1.17. *Neka je X Hausdorffov topološki prostor te neka je* $\mathcal{F} = \{K_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ *neprazna familija kompaktnih skupova sa svojstvom konačnog presjeka, odnosno takva da je svaki konačan presjek elemenata iz te familije neprazan. Onda je presjek cijele familije* $\mathcal{F}$ *neprazan.*

Dokaz. Neka je $K \in \mathcal{F}$ proizvoljan. Promatrajmo familiju:

$$\mathcal{F}_K = \{K_i \cap K \mid i \in \mathcal{I}\} .$$

Po teoremu 1.1.15 K je zatvoren pa je $K_i \cap K$ zatvoren za svaki $i \in \mathcal{I}$, posebno je onda i zatvoren u K. Provjerimo da familija $\mathcal{F}_K$ ima svojstvo konačnog presjeka, neka su $\{i_1, i_2 \dots i_n\} \subseteq \mathcal{I}$ proizvoljni. Imamo:

$$\bigcap_{j=1}^{n} (K_{i_j} \cap K) = K \cap \bigcap_{j=1}^{n} K_{i_j} .$$

To je presjek konačne familije elemenata iz $\mathcal{F}$ koja ima svojstvo konačnog presjeka pa je taj presjek neprazan. Time smo dokazali da je zatvorena familija $\mathcal{F}_K$ sadržana u kompaktnom K ima svojstvo konačnog presjeka. Iz karakterizacije kompaktnog prostora slijedi da je presjek te familije neprazan. No onda je posebno presjek familije $\mathcal{F}$ neprazan. □

1.2 Normirani prostori

Krenimo s definicijom normiranog prostora:

Definicija 1.2.1. *Vektorski prostor X je **normiran prostor** ako postoji nenegativna funkcija* $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ *za koju vrijedi:*

(i) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$, *za sve* $x \in X$ *i* $\lambda \in \mathbb{R}$.

(ii) $\|x\| = 0$ *ako i samo ako* $x = 0$.

(iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *za sve* $x, y \in X$. *(nejednakost trokuta)*

*Ta funkcija se naziva **norma**.*

Ako funkcija $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ ne zadovoljava drugo svojstvo, a zadovoljava ostala, onda za nju kažemo da je polunorma. Lako se može vidjeti da su operacije zbrajanja i množenja neprekidne s obzirom na metriku definiranu kao $d(x, y) = \|x - y\|$, pa su posljedično neprekidne i u topologiji određenoj tom metrikom. Polje $\mathbb{R}$ s apsolutnom vrijednošću možemo promatrati kao normiran prostor što nam je bitno zbog proučavanja linearnih funkcionala. S B_X označavamo jediničnu zatvorenu kuglu u X.

Ako imamo više normiranih prostora, obično ne označavamo različito norme za svaki od njih ako je iz konteksta (elemenata na koje se primjenjuju) jasno o kojim se normama radi.

Definicija 1.2.2. *Normiran prostor X je* ***Banachov*** *ako je potpun odnosno ako je svaki Cauchyjev niz u njemu konvergentan.*

Definicija 1.2.3. *Neka su X i Y normirani prostori. Linearni operator $A : X \to Y$ je* ***ograničen*** *ako postoji konstanta $C > 0$ takva da za sve $x \in X$ vrijedi:*

$$\|Ax\| \leq C \|x\|.$$

Infimum svih takvih C nazivamo ***operatorskom normom*** *od A.*

Skup svih ograničenih linearnih operatora između normiranih prostora X i Y označavamo s $B(X, Y)$. U slučaju $X = Y$ pišemo $B(X)$. Oni su s operatorskom normom i sami normirani prostori što se lako provjeri. Prostor svih ograničenih linearnih funkcionala nazivamo **dualom** od X te ga označavamo s X^*. Ako je $T \in B(X, Y)$ bijekcija čiji je inverz također ograničen onda je to **izomorfizam** normiranih prostora X i Y te tada za njih kažemo da su međusobno **izomorfni**. Izomorfnost X i Y ćemo označavati s $X \approx Y$.

Definicija 1.2.4. *Neka su X i Y normirani prostori te $A : X \to Y$ linearan operator. Ako vrijedi $\|Ax\| = \|x\|$ za svaki $x \in X$, za njega kažemo da je* ***izometričan*** *ili* ***izometrija****.*

Napomena 1.2.5. *Ako je izometričan operator surjektivan, onda je očito da je i njegov inverz izometrija pa i ograničen linearan operator.*

Očito je norma izometrije jednaka 1. Ako je T izomorfizam i izometrija, onda za njega kažemo da je **izometrički izomorfizam**, a za prostore X i Y kažemo da su **izometrički izomorfni**.

Ako je $f \in X^*$ i $x \in X$, ponekad ćemo djelovanje funkcionala f na x zapisivati kao:

$$\langle x, f \rangle = f(x).$$

U slučaju linearnih operatora ograničenost je ekvivalentna s neprekidnosti:

Teorem 1.2.6. *Neka su X i Y normirani prostori te $A : X \to Y$ linearan operator. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) A je ograničen.

(ii) A je neprekidan u 0.

(iii) A je neprekidan.

Lema 1.2.7. *Neka su X i Y normirani prostori te $A \in B(X,Y)$. Jezgra operatora A je zatvorena.*

Dokaz. $\mathrm{Ker}\,A = A^{-1}(\{0\})$, a $\{0\}$ je zatvoren (topologija na Y je generirana normom pa je Hausdorffova), a A neprekidan pa je $\mathrm{Ker}\,A$ zatvoren kao praslika zatvorenog skupa. □

Normu operatora možemo računati na sljedeće načine:

Lema 1.2.8. *Neka su X i Y normirani prostori te $T : X \to Y$ ograničen linearan operator. Vrijedi sljedeće:*

(i) $\|T\| = \sup\limits_{x \in B_x} \|T(x)\|$.

(ii) $\|T\| = \inf\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$.

Navedimo klasičan rezultat:

Teorem 1.2.9 (Hahn-Banachov teorem)**.** *Neka je X normiran prostor i $Y \subseteq X$ njegov potprostor (ne nužno zatvoren). Ako je $f \in Y^*$, tada se f može proširiti do $\hat{f} \in X^*$ tako da vrijedi $\|f\| = \left\|\hat{f}\right\|$.*

Sad slijedi jedna posljedica:

Korolar 1.2.10. *Neka je $x \in X$ različit od* 0*. Tada postoji $f \in X^*$ takav da je $\|f\| = 1$ te $f(x) = \|x\|$.*

Dokaz. Neka je Y potprostor razapet s $\{x\}$. Na njemu definiramo funkcional $f : M \to \mathbb{R}$ tako da vrijedi $f(x) = \|x\|$. Baza od M je $\{x\}$ pa je f s tim dobro definiran. Očito je $\|f\| = 1$. Primjenom Hahn-Banachova teorema slijedi da postoji $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ koji proširuje f i vrijedi $\left\|\tilde{f}\right\| = \|f\| = 1$ te je to traženi funkcional. □

Definirajmo sljedeće:

Definicija 1.2.11. *Neka su X i Y normirani prostori te $A : X \to Y$ ograničen linearan operator. Njemu* ***adjungiran*** *operator $A^* : Y^* \to X^*$ definiramo na sljedeći način:*

$$\langle x, A^* f \rangle = \langle Ax, f \rangle = f(Ax).$$

A^* je jedinstven ograničen linearan operator koji zadovoljava gornju jednakost. Vrijedi $\|A^*\| = \|A\|$.

Slaba i slaba* topologija

Slaba topologija na normiranom prostoru X je najmanja topologija u kojoj su svi ograničeni linearni funkcionali iz X^* neprekidni. Odnosno, to je inicijalna topologija na familiji linearnih funkcionala. X možemo na prirodan način uložiti u bidual kao $x \mapsto \hat{x}$ gdje $\hat{x}(f) = f(x)$ za svaki $f \in X^*$. Sada, ako promatramo inicijalnu topologiju X^* generiranu familijom $\{\hat{x} : X^* \to \mathbb{R} \mid x \in X\}$, govorimo o slabo* topologiji na X^*. Imamo sljedeći značajan rezultat:

Teorem 1.2.12 (Banach-Alaouglu)**.** *Neka je X normiran prostor. Zatvorena jedinična kugla u dualnom prostoru B_{X^*} je kompaktna u slabo* topologiji.*

Sada navodimo jedan od fundamentalnih teorema funkcionalne analize:

Teorem 1.2.13 (Princip uniformne ograničenosti)**.** *Neke je X Banachov prostor, a Y normiran. Neka je $S \subseteq B(X, Y)$ takav da vrijedi:*

$$\sup_{f \in S} \|f(x)\| < \infty, \ \forall x \in X.$$

Tada vrijedi:

$$\sup_{f \in S} \|f\| < \infty.$$

Izračunajmo sada normu od $\hat{x} : X^* \to \mathbb{R}$.

Lema 1.2.14. *Neka X normiran prostor. Vrijedi sljedeće:*

$$\|x\| = \|\hat{x}\| = \sup_{f \in B_{X^*}} |f(x)|.$$

Dokaz. Iz 1.2.8 možemo računati normu od $\hat{x}$ za $x \in X$:

$$\begin{aligned} \|\hat{x}\| = \sup_{f \in B_{X^*}} |\hat{x}(f)| = \sup_{f \in B_{X^*}} |f(x)| \leq \sup_{f \in B_{X^*}} \|f\| \, \|x\| = \\ = \|x\| \cdot \sup_{f \in B_{X^*}} \|f\| = \|x\|. \end{aligned}$$

Dakle, imamo $\|\hat{x}\| \leq \|x\|$. Iz 1.2.10 slijedi da postoji $x^* \in X^*$ takav da je $x^*(x) = \|x\|$ te $\|x^*\| = 1$. Posebno:

$$\hat{x}(x^*) = x^*(x) = \|x\| = \|x\| \cdot \|x^*\|.$$

Sad mora vrijediti da je $\|\hat{x}\| \geq \|x\|$ jer je $x^* \in B_{X^*}$ te imamo $\|\hat{x}\| = \|x\|$. □

Dakle, preslikavanje $x \mapsto \hat{x}$ je izometrija. Provjerimo još da je injekcija, neka su $x_1, x_2 \in X$ takvi da $\hat{x}_1 = \hat{x}_2$, to povlači:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(x_2), \quad \forall f \in X^*, \\ f(x_1 - x_2) &= 0, \quad \forall f \in X^*. \end{aligned}$$

Pretpostavimo da je $y = x_1 - x_2$ različito od nule. Pomoću korolara 1.2.10 odaberimo $y^* \in X^*$ takav da vrijedi $y^*(y) = \|y\|$, posebno iz gornjeg slijedi $0 = y^*(y) = \|y\|$ i $y = 0$ pa smo dobili kontradikciju. Time je dokazano sljedeće:

Korolar 1.2.15. *Preslikavanje $J : X \to X^{**}$ definirano kao $J(x) = \hat{x}$ je izometrično ulaganje u X^{**}.*

U općenitom slučaju J nije surjekcija. Ako jest, onda se takvi prostori zovu **refleksivnima**.

Teorem 1.2.16. *Neka je X normiran prostor. Tada je slaba* topologija na X^* Hausdorffova.*

Dokaz. Neka su $f, g \in X^*$ različiti. Tada postoji $x \in X$ takav da je $f(x) \neq g(x)$ odnosno $\hat{x}(f) \neq \hat{x}(g)$. Dakle, imamo slabo* neprekidnu funkciju u $\mathbb{R}$ koja ih razdvaja pa se lako vidi da imaju disjunktne otvorene okoline. □

Teorem 1.2.17. *Neka je X Banachov prostor. Podskup $S \subseteq X^*$ je slabo* kompaktan samo i ako samo je slabo* zatvoren i ograničen u normi.*

Dokaz. Neka je S slabo* kompaktan. Slabo* topologija je Hausdorffova pa onda iz slabo* kompaktnosti slijedi da je S slabo* zatvoren. Sada za svaki $x \in X$ imamo:

$$\sup_{f \in S} |f(x)| = \sup_{f \in S} |\hat{x}(f)| = \max_{f \in S} |\hat{x}(f)| < \infty.$$

Koristili smo činjenicu da je S slabo* kompaktan, a $\hat{x}$ slabo* neprekidna pa onda ona postiže maksimum na S. x je bio proizvoljan pa možemo upotrijebiti princip uniformne ograničenosti(1.2.13) i zaključiti:

$$\sup_{f \in S} \|f\| < \infty.$$

Dakle, S je ograničen u normi.

Pretpostavimo sada da je S slabo* zatvoren i ograničen u normi. Budući da je S ograničen u normi, sadržan je u nekoj zatvorenoj kugli oko 0, tj. postoji $\lambda > 0$ takva da je $S \subseteq \lambda B_{X^*}$. Iz Banach-Alaougluova teorema (1.2.12 je B_{X^*} slabo* kompaktan pa je i λB_{X^*} slabo* kompaktan (množenje skalarom je homeomorfizam). Slaba* topologija je Hausdorffova, a S je slabo* zatvoren podskup slabo* kompaktnog skupa pa je i sam slabo* kompaktan. □

1.3 Topološki vektorski prostori

Definicija 1.3.1. ***Topološki vektorski prostor*** *(skraćeno TVP) X je vektorski prostor s topologijom τ takvom da vrijedi:*

(i) Za svaki $x \in X$ skup $\{x\}$ je zatvoren u τ.

(ii) Operacije zbrajanja i množenja skalarom su neprekidne u τ.

τ je tada ***vektorska topologija****.*

Neprekidnost operacija zbrajanja i množenja skalarom se odnosi na neprekidnost s produktnih topologija na $X \times X$ i $\mathbb{R} \times X$.

Napomena 1.3.2. *Prvi i drugi uvjet iz gornje definicije nam osiguravaju da je vektorska topologija Hausdorffova (vidi teorem 1.12 u [6]).*

Konstruirajmo sada konačan produkt topoloških vektorskih prostora:

Teorem 1.3.3. *Neka su $X_1, X_2 \dots X_n$ topološki vektorski prostori. Neka je $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ direktni produkt vektorskih prostora, odnosno kartezijev produkt $X_1 \times X_2 \cdots \times X_n$ sa zbrajanjem i množenjem skalarom definiranim po koordinatama. $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ s produktnom topologijom je topološki vektorski prostor.*

Dokaz. Moramo provjeriti da su operacije zbrajanja i množenja skalarom neprekidne s obzirom na produktnu topologiju. Neka je $A : X \times X \to X$ zbrajanje, a $A_i : X_i \times X_i$ zbrajanje u X_i koje je po pretpostavci neprekidno. Uočimo:

$$X \times X = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i \right) \times \left(\prod_{i=1}^{n} X_i \right) = \prod_{i=1}^{n} (X_i \times X_i) .$$

Stoga A možemo prikazati kao produkt preslikavanja $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. A_i su po pretpostavci neprekidni, pa je A kao produkt neprekidnih preslikavanja i sam neprekidan(1.1.9).

Neka je $M : \mathbb{R} \times X \to X$ množenje skalarom te neka je $M_i : \mathbb{R} \times X_i \to X_i$ množenje skalarom u X_i koje je po pretpostavci neprekidno. Promatrajmo funkciju

$$f : \mathbb{R} \times \left(\prod_{i=1}^{n} X_i \right) \to \prod_{i=1}^{n} (\mathbb{R} \times X_i)$$

definiranu kao $f(t, x_1, \dots, x_n) = (t, x_1, t, x_2, \dots, t, x_n)$. Ona je homeomorfizam. Sada vrijedi $M = (M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n) \circ f$ što je neprekidno.

Također, topologije na $X_i,\ i \in \{1, 2 \dots n\}$ su Hausdorffove pa je onda i produktna topologija Hausdorffova. Sada možemo zaključiti da je X topološki vektorski prostor. □

Sada možemo uvesti definiciju.

Definicija 1.3.4. *Neka su Y i Z potprostori topološkog vektorskog prostora X. Neka je $S : Y \times Z \to X$ linearno preslikavanje definirano kao $S(y, z) = y + z$. Ako je S linearni bijektivni homeomorfizam između $Y \times Z$ i X, kažemo da je X* ***produkt topoloških prostora*** *Y i Z.*

S je očito linearno preslikavanje i ako je bijekcija onda se radi o tzv. algebarskom produktu. Lako se vidi da je S neprekidan jer je operacija zbrajanja u X neprekidna. No ako je dodatno S^{-1} neprekidan, to povlači da je S otvoreno preslikavanje pa je onda i homeomorfizam. Ako je S bijekcija, onda imamo i prirodno definirane projekcije iz X na Y i Z. Ako je S^{-1} neprekidan, onda će i te projekcije biti neprekidne. Sada ćemo vidjeti da je za neprekidnost od S^{-1} dovoljno da je samo jedna od tih projekcija neprekidna:

Lema 1.3.5. *Da bi definicija 1.3.4 bila zadovoljena, dovoljno je da je S neprekidna linearna bijekcija i da je barem jedna od kanonskih projekcija na Y ili Z neprekidna.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je projekcija na Y neprekidna. Tada je $P_Z(x) = x - P_Y(x)$, pa je P_Z neprekidan kao razlika dviju neprekidnih funkcija. Razlika $X \times X \to X$ se lako prikaže kao kompozicija zbrajanja, množenja skalarom i projekcije koji su neprekidni pa je zato i ona neprekidna. Onda je $S^{-1} = (P_Y, P_Z)$, a P_Z i P_Y su obje neprekidne pa je onda i S^{-1} neprekidna. □

Konveksnost

Definicija 1.3.6. *Za S podskup vektorskog prostora X kažemo da je* ***konveksan*** *ako za sve $x, y \in S$ i $0 \leq t \leq 1$ vrijedi:*
$$tx + (1 - t)y \in S.$$

Definicija 1.3.7. *Za S podskup vektorskog prostora X kažemo da je* ***balansiran*** *ako za svaki $0 \leq \alpha \leq 1$ vrijedi:*
$$\alpha S \subseteq S.$$

Definicija 1.3.8. *Topološki vektorski je* ***lokalno konveksan*** *ako postoji baza okoline čiji su elementi konveksni.*

Dual normiranog prostora sa slabo* topologijom je lokalno konveksan topološki vektorski prostor (str. 68 i teorem 3.10 u [6]).

Teorem 1.3.9. *Neka je X normiran prostor. Tada je X^* sa slabo* topologijom lokalno konveksan topološki vektorski prostor.*

Vrijedi još i sljedeće (korolar teorema 1.14 u [6]):

Teorem 1.3.10. *Svaki lokalno konveksni topološki vektorski prostor ima balansiranu i konveksnu (apsolutno konveksnu) bazu okoline.*

Definicija 1.3.11. *Neka je S podskup vektorskog prostora X. $x \in S$ je* ***ekstremna točka*** *ako ne postoje $y, z \in S$ i $0 < t < 1$ takvi da je $x = ty + (1-t)z$. Skup svih ekstremnih točaka od S označavamo s $\partial_e S$.*

Lema 1.3.12. *Neka je X netrivijalan normiran prostor te neka je x ekstremna točka jedinične zatvorene kugle B_X u X. Tada vrijedi $\|x\| = 1$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\|x\| < 1$. Ako je $\|x\| = 0$, tada je $x = 0$. Uzmimo neki $y \in X \setminus \{0\}$, te definirajmo $z = \frac{1}{\|y\|} y$. Tada je $\|z\| = 1$ te $z, -z \in B_X$. Vrijedi $0 = \frac{1}{2}(-z) + (1 - \frac{1}{2})z$ što je u kontradikciji s definicijom ekstremne točke.

Neka je sad $\|x\| \neq 0$. Definirajmo $y = \frac{1}{\|x\|} x$, tada je $\|y\| = 1$ te $y \in B_X$. Vrijedi $x = \|x\| \, y + (1 - \|x\|) \cdot 0$, što je u kontradikciji s definicijom ekstremne točke. □

Definicija 1.3.13. *Neka je X vektorski prostor i $S \subseteq X$ neki njegov podskup.* ***Konveksna ljuska*** *od S je najmanji konveksan skup koji sadrži S.*

Lako se vidi da je proizvoljan presjek konveksnih skupova i sam konveksan pa je gornja definicija dobra.

Definicija 1.3.14. *Neka je X topološki vektorski prostor i $S \subseteq X$ neki njegov podskup.* ***Zatvorena konveksna ljuska*** *od S je najmanji zatvoren konveksan skup koji sadrži S.*

Navedimo sljedeći teorem o zatvorenoj konveksnoj ljusci koji je posljedica Hanh-Banachova separacijskog teorema u kontekstu topoloških vektorskih prostora (teorem 3.8 u [6]).

Teorem 1.3.15. *Neka je B konveksan, balansiran i zatvoren skup u lokalno konveksnom topološkom vektorskom prostoru X, te neka je $y \in X \setminus B$. Tada postoji $f \in X^*$ takav da vrijedi:*

(i) $|f(x)| \leq 1$ *za sve* $x \in B$, *i*

(ii) $f(y) > 1$.

Teorem 1.3.16. *Neka je X lokalno konveksan topološki prostor, S neki njegov konveksan podskup koji ima ekstremne točke, te $f : S \to \mathbb{R}$ neprekidna i konveksna. Tada f postiže maksimum u nekoj ekstremnoj točki od S.*

Teorem 1.3.17 (Krein-Millman). *Neka je X lokalno konveksan topološki vektorski prostor. Ako je K neprazan kompaktan konveksan skup iz X, onda je K zatvorena konveksna ljuska svojih ekstremnih točaka. Posebno, svaki neprazan kompaktan konveksan podskup lokalno konveksnog topološkog vektorskog prostora ima ekstremnu točku.*

Teorem 1.3.18 (Banach-Dieudonné)**.** *Neka je X Banachov prostor te neka je $\mathcal{C}$ konveksan podskup dualnog prostora X^*. Tada je $\mathcal{C}$ slabo* zatvoren ako i samo ako je $\mathcal{C} \cap \lambda B_{X^*}$ slabo* zatvoren za svako $\lambda > 0$.*

Teorem 1.3.19 (Millman)**.** *Neka je X lokalno konveksan topološki vektorski prostor te K neki njegov kompaktan podskup. Ako je x ekstremna točka zatvorene konveksne ljuske od K, onda $x \in K$.*

1.4 Teorija mjere

Definicija 1.4.1. *Neka je Ω skup. Familija skupova $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ je **σ-algebra** ako vrijedi sljedeće:*

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$.

(ii) $F \in \mathcal{F}$ *povlači* $\Omega \setminus F \in \mathcal{F}$.

(iii) $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ *povlači* $\bigcup_{i=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{F}$.

*Za $(\Omega, \mathcal{F})$ se tada kaže da je **izmjeriv prostor**.*

Ako imamo neku familiju $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, možemo tražiti najmanju σ-algebru koja sadrži $\mathcal{F}$. Za nju kažemo da je generirana s $\mathcal{F}$. Ako je X topološki prostor, onda σ-algebru generiranu svim otvorenim skupovima zovemo Borelovom. Na $\mathbb{R}$ obično gledamo Borelovu σ-algebru.

Definicija 1.4.2. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor. Funkcija $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ je (pozitivna) **mjera** na $(\Omega, \mathcal{F})$ ako vrijedi:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) Za u parovima disjunktne skupove $\{A_n\}_n \subseteq \mathcal{F}$ vrijedi:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right).$$

*Za $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ kažemo da je **prostor mjere**.*

Ako postoji rastući niz $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ u $\mathcal{F}$ takav da je $\mu(A_i) < \infty$ te $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$, za mjeru kažemo da je ***σ*-konačna**. Ako je $\mu(\Omega) < \infty$, onda za mjeru kažemo da je **konačna**.

Na $\mathbb{R}$ ćemo obično promatrati Lebesgueovu mjeru λ koja je definirana preko poluzatvorenih intervala:

$$\lambda([a,b)) = b - a.$$

Definicija 1.4.3. *Neka su $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ i $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ izmjerivi prostori. Za funkciju $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ kažemo da je izmjeriva ako vrijedi $f^{-1}(F) \in \mathcal{F}_1$ za svaki $F \in \mathcal{F}_2$.*

Za $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor s $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ ćemo označavati sve izmjerive funkcije $f : \Omega \to \mathbb{R}$.
Sada se za $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ može koristeći Lebesgueovu indukciju konstruirati integral nad izmjerivim funkcijama $\mathcal{M}(\mathcal{F})$. Naravno, nisu sve izmjerive funkcije integrabilne. Nabrojimo neka svojstva integrala:

Teorem 1.4.4. *Neka su u, v integrabilne, te $\alpha \in \mathbb{R}$. Vrijedi:*

(i) αu *je integrabilna i* $\int \alpha u \, d\mu = \alpha \int u \, d\mu$;

(ii) $u + v$ *je integrabilna te* $\int u + v \, d\mu = \int u \, d\mu + \int u \, d\mu$;

(iii) $\min\{u, v\}$ *i* $\max\{u, v\}$ *su integrabilne;*

(iv) $u \leq v$ *povlači* $\int u \, d\mu \leq \int u \, d\mu$;

(v) $\left|\int u \, d\mu\right| \leq \int |u| \, d\mu$.

Definirajmo još regularne mjere:

Definicija 1.4.5. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor gdje je $\mathcal{F}$ Borelova σ-algebra. Definiramo:*

(i) μ *je* ***regularna iznutra*** *ako vrijedi:*

$$\mu(E) = \sup\{\mu(F) \mid F \subseteq E,\ F \text{ je kompaktan i izmjeriv.}\}.$$

(ii) μ *je* ***regularna izvana*** *ako vrijedi:*

$$\mu(E) = \inf\{\mu(G) \mid G \supseteq E,\ G \text{ je otvoren i izmjeriv.}\}.$$

Ako je μ regularna iznutra i izvana, onda kažemo da je ***regularna****.*

Mjere se predznakom

Sada ćemo uvesti mjere koje mogu poprimiti i negativnu vrijednost, one će nam biti potrebne pri dokazu Kellyjevog teorema.

Definicija 1.4.6. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor.* ***Mjera s predznakom*** *na $(\Omega, \mathcal{F})$ je funkcija $\mu : \mathcal{F} \to [-\infty, \infty]$ takva da vrijedi:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) *μ poprima najviše jednu od vrijednosti $\pm\infty$.*

(iii) *Neka je $(E_j)_{j\in\mathbb{N}}$ niz u parovima disjunktnih skupova iz $\mathcal{F}$, vrijedi $\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu(E_j)$ gdje suma desne strane konvergira apsolutno ako je $\mu\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)$ konačno.*

Jasno je da je svaka mjera ujedno i mjera s predznakom. Mjere koje nisu mjere s predznakom ćemo nekad zvati **pozitivnim mjerama** da bismo naglasili da ne radi o mjerama s predznakom.

Definicija 1.4.7. *Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor i $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ mjera s predznakom. Skup $E \in \mathcal{F}$ je:*

(i) ***pozitivan*** *ako $\mu(F) \geq 0$ za sve $F \in \mathcal{F}$ takve da $F \subseteq E$;*

(ii) ***negativan*** *ako $\mu(F) \leq 0$ za sve $F \in \mathcal{F}$ takve da $F \subseteq E$;*

(iii) ***nul*** *skup ako $\mu(F) = 0$ za sve $F \in \mathcal{F}$ takve da $F \subseteq E$.*

Sada ćemo navesti jako bitan teorem o dekompoziciji skupa Ω na pozitivan i negativan skup na temelju mjere s predznakom čiji se dokaz može naći u [2, str. 86]:

Teorem 1.4.8 (Hahnov teorem o dekompoziciji)**.** *Neka je μ mjera s predznakom na $(\Omega, \mathcal{F})$. Tada postoje pozitivan skup P i negativan skup N za μ takvi da vrijedi:*

(i) $P \cup N = \Omega$.

(ii) $P \cap N = \emptyset$.

Ako su P' i N' neki drugi takav par, onda su $P \triangle P$ i $N \triangle N'$ nul skupovi za μ.

Dekompozicija $\Omega = P \cup N$ iz gornjeg teorema se zove **Hahnova dekompozicija** za μ i obično nije jedinstvena. Uz pomoć nje ćemo na kanonski način moći prikazati mjeru s predznakom kao razliku dvije pozitivne mjere. Za to će nam biti potrebna sljedeća definicija:

Definicija 1.4.9. *Za dvije mjere s predznakom μ i ν na $(\Omega, \mathcal{F})$ kažemo da su **međusobno singularne**, ili da je μ **singularna** u odnosu na ν ili obrnuto, ako postoje E i F iz $\mathcal{F}$ takvi da vrijedi:*

(i) $E \cap F = \emptyset$.

(ii) $E \cup F = \Omega$.

(iii) *E je nul skup za μ i F je nul skup za ν.*

Takav odnos između mjera označavamo kao:

$$\mu \perp \nu.$$

Sada možemo dokazati teorem koji mjeru s predznakom prikazuje kao razliku dviju pozitivnih mjera:

Teorem 1.4.10 (Jordanov teorem dekompozicije)**.** *Ako je μ mjera s predznakom, onda postoje jedinstvene pozitivne mjere μ^+ i μ^- takve da vrijedi $\mu = \mu^+ - \mu^-$ te $\mu^+ \perp \mu^-$.*

Dokaz. Neka je $\Omega = P \cup N$ Hahnova dekompozicija s obzirom na μ. Definirajmo:

$$\mu^+(E) = \mu(E \cap P),$$
$$\mu^-(E) = -\mu(E \cap N).$$

Očito vrijedi $\mu(E) = \mu\left((E \cap P) \cup (E \cap N)\right) = \mu(E \cap P) - (-\mu(E \cap N)) = \mu^+(E) - \mu^-(E)$, odnosno $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Također vrijedi $\mu^+(N) = \mu(\emptyset) = 0$ te $\mu^-(P) = -\mu(\emptyset) = 0$ iz čega lako vidimo da vrijedi $\mu^+ \perp \mu^-$.

Neka je sada $\mu = \nu^+ - \nu^-$ s $\nu^+ \perp \nu^-$, te neka su $E, F \in \mathcal{F}$ takvi da $E \cup F = \Omega$, $E \cap F = \emptyset$, te $\nu^+(F) = \nu^-(E) = 0$. Tada je $\Omega = E \cup F$ još jedna Hahnova dekompozicija za μ pa onda mora vrijediti $P \bigtriangleup E$ nul skup za μ. Neka je sada $A \in \mathcal{F}$, vrijedi $\nu^+(A) = \nu^+(A \cap E) = \mu(A \cap E) = \mu(A \cap P) = \mu^+(A)$ pa $\nu^+ = \mu^+$, analogno vidimo da $\nu^- = \mu^-$. □

Mjere μ^+ i μ^- se zovu **pozitivne** i **negativne varijacije** od μ. $\mu = \mu^+ - \mu^-$ se zove **Jordanova dekompozicija** od μ. Definiramo i **totalnu varijaciju** od μ kao:

$$|\mu| = \mu^+ + \mu^-.$$

To je očito pozitivna mjera.

Integracija s obzirom na mjeru s predznakom μ se definira na funkcijama

$$L_1(\mu) = L_1(\mu^+) \cap L_1(\mu^-)$$

na sljedeći način:

$$\int f \, d\mu = \int f \, d\mu^+ - \int f \, d\mu^- .$$

Također, mjera s predznakom μ je konačna odnosno σ-konačna ako je $|\mu|$ konačna odnosno σ-konačna. Također ona je **Borelova** ako je $\mathcal{F}$ **Borelova** σ-algebra na Ω, te je **regularna** ako je $|\mu|$ regularna.

Sada možemo promatrati $\mathcal{M}(K)$ gdje K kompaktan Hausdorffov skup. $\mathcal{M}(K)$ je skup svih konačnih regularnih Borelovih mjera na K, a to ćemo koristiti u iskazu Rieszova teorema o reprezentaciji(2.1.2) koji će nam biti potreban pri dokazu Kellyjeva teorema. Za taj dokaz bit će nam potrebna i sljedeća lema:

Lema 1.4.11. *Neka je μ mjera s predznakom, tada za $f \in L^1(|\mu|)$ vrijedi:*

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\,|\mu| .$$

Dokaz.

$$\left| \int f \, d\mu \right| = \left| \int f \, d\mu^+ - \int f \, d\mu^- \right| \leq \left| \int f \, d\mu^+ \right| + \left| \int f \, d\mu^- \right| \leq$$
$$\leq \int |f| \, d\mu^+ + \int |f| \, d\mu^- = \int |f| \, d\,|\mu| .$$

□

Poglavlje 2

Banachovi prostori

Navest ćemo neke od klasičnih primjera Banachovi prostora. Tu će nam jako bitni biti prostori $\mathcal{C}(K)$ jer nam upravo oni, uz dodatni uvjet na K, daju karakterizaciju izometrično injektivnih Banachovih prostora. Zatim ćemo reći nešto i o $L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostorima gdje μ σ-konačna mjera, te ćemo na kraju uvesti pojam izometrično injektivnog prostora i navesti jedan primjer takvoga prostora.

2.1 $\mathcal{C}(K)$ prostori

Neka ja K kompaktan Hausdorffov prostor. Prostor svih neprekidnih funkcija $\mathcal{C}(K)$ iz K u $\mathbb{R}$ je Banachov prostor s normom:

$$\|f\| = \max_{x \in K} |f(x)| .$$

Na njemu, naravno, promatramo zbrajanje po točkama, a možemo dodatno promatrati i množenje po točkama pa će to tada biti komutativna Banachova algebra s jedinicom. Gornja norma je dobro definirana. Naime, funkcija $x \mapsto |f(x)|$ je kompozicija neprekidne apsolutne vrijednosti $|\cdot| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ i neprekidne $f : K \to \mathbb{R}$ pa je kao kompozicija neprekidnih funkcija i sama neprekidna. K je kompaktan skup pa onda neprekidne funkcije u $\mathbb{R}$ na njemu postižu maksimum. Na njima ćemo promatrati parcijalni uređaj:

$$f \leq g \iff f(x) \leq g(x), \ \forall x \in K.$$

Vidimo da je parcijalni uređaj definiran preko usporedbe po točkama, kao što je i norma definirana kao maksimum vrijednosti po tim točkama. Iz toga lako vidimo da je na tom parcijalnom uređaju možemo raditi neke stvari koje su slične kao i kad radimo s realnim brojevima. Ako pišemo $f \geq C$ za neki $C \in \mathbb{R}$, onda C promatramo kao $C \cdot \mathrm{id}_K \in \mathcal{C}(K)$. Dalje imamo:

(i) $f \geq 0$ povlači $\|f\| \geq 0$;

(ii) $f \leq g$ povlači $\|f\| \leq \|g\|$;

(iii) $\|f\| \leq C$ povlači $-C \leq f \leq C$;

(iv) $f \leq g$ i $\alpha \geq 0$ povlači $\alpha f \leq \alpha g$;

(v) $f \leq g$ i $\alpha \leq 0$ povlači $\alpha f \geq \alpha g$.

Te činjenice ćemo često koristiti bez da ih posebno navodimo. Neka su sad $f, g \in \mathcal{C}(K)$. Za proizvoljan $s \in K$ vrijedi:

$$0 \leq (f(s) + g(s))^2 \,,$$
$$-2f(s)g(s) \leq f(s)^2 + g(s)^2.$$

te

$$0 \leq (f(s) - g(s))^2 \,,$$
$$2f(s)s(x) \leq f(s)^2 + g(s)^2.$$

Pa iz te dvije jednadžbe imamo:

$$2\,|f(s)g(s)| \leq f^2(s) + g^2(s),\ \forall s \in K, \tag{2.1}$$

i onda posebno:

$$\|2fg\| \leq \|f\|^2 + \|g\|^2 \,. \tag{2.2}$$

Ta jednadžba povezuje operacije množenja i zbrajanja funkcija u $\mathcal{C}(K)$. Zapravo, ona ima značaj i drugim komutativnim Banachovim algebrama s jedinicom:

Teorem 2.1.1. *Neka je $\mathcal{A}$ komutativna Banachova algebra s jedinicom $\|e\| = 1$. $\mathcal{A}$ je izometrično izomorfna algebri $\mathcal{C}(K)$ za neki K kompaktan Hausdorffov prostor ako i samo ako vrijedi:*

$$\|2ab\| \leq \left\|a^2 + b^2\right\|,\ \forall a, b \in \mathcal{A}.$$

Dokaz teorema se može naći u [1, str. 80].

Sada navodimo jako bitan teorem koji govori o izomorfizmu duala $\mathcal{C}(K)$ i određenog prostora mjera na K:

Teorem 2.1.2 (Rieszov teorem o reprezentaciji)**.** *Neka je K kompaktan Hausdorffov topološki prostor, tada je $\mathcal{C}(K)^*$ izometrično izomorfan s $\mathcal{M}(K)$ odnosno prostorom svih konačnih regularnih Borelovih mjera s predznakom na K i normom $\|\mu\| = |\mu|(K)$. Dualnost je dana s:*

$$\langle f, \mu \rangle = \int_K f\, d\mu \,.$$

Ako je K metrizabilan, onda je svaka Borelova mjera regularna i $\mathcal{M}(K)$ je prostor svih konačnih Borelovih mjera na K.

2.2 L_p prostori

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ prostor mjere gdje μ σ-konačna. Definirajmo sljedeće:

$$\mathcal{L}_p(\mu) = \left\{ u : X \to \mathbb{R} \mid u \in \mathcal{M}(\mathcal{F}),\ \int |u|^p \, d\mu < \infty \right\},\ p \in [1, \infty),$$

$$\mathcal{L}_\infty(\mu) = \{ u : X \to \mathbb{R} \mid u \in \mathcal{M}(\mathcal{F}),\ \exists C > 0 \text{ tako da } \mu(\{|u| \geq C\}) = 0 \}.$$

Definirajmo sljedeće polunorme:

$$\|u\|_p = \left(\int |u|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}},\ p \in [1, \infty), u \in \mathcal{L}_p(\mu),$$

$$\|u\|_\infty = \inf \{ C > 0 \mid \mu(\{|u| \geq C\}) = 0 \},\ u \in \mathcal{L}_\infty.$$

To su polunorme zato što za svaki $p \in [1, \infty]$ vrijedi $\|u\|_p = 0$ ako i samo ako je $u = 0$ skoro svugdje (tj. do na skup mjere nula). Na $\mathcal{L}_p$ definiramo klasu ekvivalencije tako da su f i g ekvivalentni ako vrijedi $f = g$ skoro svugdje. Skup tih klasa ekvivalencije na $\mathcal{L}_p(\mu)$ označavamo kao $L_p(\mu)$. Ako je $f \in L_p(\mu)$, onda f poistovjećujemo s nekim reprezentantom klase f, i gore definirane polunorme postaju norme. S tim normama oni su Banachovi prostori (teorem 13.7 u [7]).

Dokažimo sljedeće:

Teorem 2.2.1. *Ako na $L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, gdje je μ σ-konačna, definiramo množenje elemenata kao množenje njihovih reprezentanata po točkama, tada je $L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ komutativna Banachova algebra s jedinicom $\|1\| = 1$ gdje je 1 konstantna funkcija.*

Dokaz. Neka su $u, v \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, imamo da je $|u| \leq \|u\|$ i $|v| \leq \|v\|$ skoro svugdje. Onda $|uv| = |u|\,|v| \leq \|u\|\,\|v\|$ skoro svugdje, pa $\|uv\|$ kao infimum svih C takvih da je $|uv| \leq C$ skoro svugdje mora biti manji od $\|u\|\,\|v\|$, odnosno $\|uv\| \leq \|u\|\,\|v\|$. Dakle, množenje je submultiplikativno, a očito i komutativno, pa je $L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ komutativna Banachova algebra. Također $\|1\| = 1$ te $u \cdot 1 = u$. □

Korolar 2.2.2. *$L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, gdje je μ σ-konačna, je izometrički izomorfan nekom $\mathcal{C}(K)$ gdje je K kompaktan Hausdorffov prostor.*

Dokaz. Neka su $u, v \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Kao i u prethodnom potpoglavlju dobijemo:

$$2\,|uv| \leq u^2 + v^2.$$

Pa onda mora i vrijediti:

$$2\,\|uv\| \leq \left\| u^2 + v^2 \right\|.$$

Prethodni teorem je dokazao da je $L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ Banachova algebra s jedinicom norme 1. Sada koristeći 2.1.1 zaključujemo da je on izometrički izomorfan nekom $\mathcal{C}(K)$. □

Navodimo sljedeće teoreme bez dokaza:

Teorem 2.2.3 (Hölder)**.** *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *prostor mjere. Neka su* $1 \leq p \leq \infty$ *i* $1 \leq q \leq \infty$ *takvi da vrijedi* $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} =$*, te* $f \in L_p(\mu)$ *i* $g \in L_p(\mu)$*. Tada je* $fg \in L_1(\mu)$ *i vrijedi:*

$$\left| \int fg \, d\mu \right| \leq \|f\|_p \, \|g\|_q .$$

Teorem 2.2.4 (Rieszov teorem o reprezentaciji)**.** *Neka je* $1 < p \leq \infty$ *i* q *takav da vrijedi* $1/p + 1/q = 1$*, te neka je* $x^* \in \left(L_q(\mu)\right)^*$*. Tada postoji* $f \in L_p(\mu)$ *takav da* $\|f\|_p \leq \|x^*\|$ *i:*

$$x^*(g) = \int fg \, d\mu, \ g \in L_q(\mu).$$

Sada možemo dokazati:

Korolar 2.2.5. *Neka je* $1 < p \leq \infty$ *te neka je* $1 \leq q < \infty$ *takav da je* $1/p + 1/q = 1$*. Prostori* $L_p(\mu)$ *i* $\left(L_q(\mu)\right)^*$ *su izometrično izomorfni.*

Dokaz. Neka je $x^* \in \left(L_q(\mu)\right)^*$, po prethodnom teoremu postoji $f \in L_p(\mu)$ takav da vrijedi $\|f\|_p \leq \|x^*\|$ i:

$$x^*(g) = \int fg \, d\mu, \ g \in L_q(\mu).$$

Koristeći Hölderovu nejednakost dobivamo:

$$|x^*(g)| = \left| \int fg \, d\mu \right| \leq \|f\|_p \, \|g\|_q .$$

Sada imamo $\|x^*\| \geq \|f\|_p$ pa $\|x^*\| = \|f\|_p$. Stoga je preslikavanje $x^* \mapsto f$ je izometrija pa je ona automatski i injektivna. Također, za svaki $f \in L_p(\mu)$ definiran je funkcional x^* pomoću gornje formule, pa je preslikavanje i surjekcija. Dakle, to je traženi izometrički izomorfizam. □

S $L_p[a, b]$ označavamo L_p prostor na Borelovoj σ-algebri na intervalu $[a, b]$ s Lebesgueovom mjerom.

Lema 2.2.6. $L_\infty[0, 1]$ *je izometrički izomorfan s* $L_\infty [0, 1/2]$.

Dokaz. Definirajmo $T : L_\infty[0, 1] \to L_\infty[0, 1/2]$ kao $(Tf)(x) = f(2x)$. To je očito linearan operator.

Ako je $|f| < C$ osim na skupu $N \subseteq [0, 1]$ koji je mjere nula, tada je $|T(f)| < C$ svugdje osim na skupu $2N$. Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}$, pa i na $[0, 1]$, je usklađena s množenjem skalarom pa vrijedi $\lambda(2N) = 2\lambda(N) = 2 \cdot 0 = 0$. Stoga, $|f| < C$ skoro svugdje ako i samo ako je $|T(f)| < C$ skoro svugdje pa $\|f\| = \|T(f)\|$. Dakle, T je izometrija pa je automatski i injektivan.

Ako je $g \in L_\infty[0, 1/2]$, definirajmo $f(x) = g(\frac{1}{2}x)$. Očito je $T(f) = g$. $\square$

Lema 2.2.7. *Vrijedi:*

$$L_\infty[0,1] \approx L_\infty[0,1/2] \oplus L_\infty[1/2,1].$$

Dokaz. Definirajmo $T : L_\infty[0,1] \to L_\infty[0,1/2] \oplus L_\infty[1/2,1]$ kao:

$$T(f) = \left(f \cdot \chi_{[0,1/2]}, f \cdot \chi_{[1/2,1]}\right).$$

Na produktnom topološkom prostoru $P = L_\infty[0,1/2] \oplus L_\infty[1/2,1]$ norma

$$\|f\|_P = \max\left\{\|f\|_{L_\infty[0,1/2]}, \|f\|_{L_\infty[1/2,1]}\right\}$$

je usklađena s produktnom topologijom na P. Ako je $|f| < C$ gotovo svugdje na $[0,1]$, onda je $|f| < C$ gotovo svugdje na $[0,1/2]$ i $[1/2,1]$. To znači da vrijedi $\|f\|_{L_\infty[0,1/2]} \leq \|f\|_{L_\infty[0,1]}$ i $\|f\|_{L_\infty[1/2,1]} \leq \|f\|_{L_\infty[0,1]}$ odnosno $\|f\|_P \leq \|f\|_{L_\infty[0,1]}$. T je ograničen linearan operator, a očito je i injekcija. Ako su $g \in L_\infty[0,1/2]$ i $h \in L_\infty[1/2,1]$, onda $T(g+h) = (g,h)$ pa je T i surjekcija. Pri tome smo g i h proširili nulom na $[1/2,1]$ odnosno $[0,1/2]$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}\|g+h\|_{L_\infty[0,1]} &\leq \|g\|_{L_\infty[0,1]} + \|h\|_{L_\infty[0,1]} = \\ = \|g\|_{L_\infty[0,1/2]} + \|h\|_{L_\infty[1/2,1]} &\leq 2\max\left\{\|g\|_{L_\infty[0,1/2]}, \|h\|_{L_\infty[1/2,1]}\right\} = \\ &= 2\,\|(g,h)\|_P.\end{aligned}$$

Dakle, inverz od T je ograničen i T je traženi izomorfizam. $\square$

2.3 Dekompozicijska tehnika Pełczyńskog

Krenut ćemo od definicije komplementiranih (pot)prostora Banachovog prostora da bismo mogli iskazati i dokazati dekompozicijsku tehniku Pełczyńskog te kasnije dokazati izomorfnost $L_\infty[0,1]$ i ℓ_∞.

Definicija 2.3.1. *Neka je X Banachov prostor, a $Y \subseteq X$ njegov zatvoren potprostor. Y je* ***komplementiran*** *u X ako postoji zatvoren potprostor $Z \subseteq X$ takav da vrijedi $X = Y \oplus Z$, odnosno ako je X direktna suma Y i Z.*

Ako imamo izometrično ulaganje s Y u X onda možemo Y promatrati kao potprostor od X (izometrično izomorfan je njegovom zatvorenom potprostoru) i tako gledati je li komplementaran u X. Kod Banachovih prostora gledamo samo zatvorene potprostore jer su jedino oni Banachovi prostori. Sada navedimo jednu karakterizaciju:

Propozicija 2.3.2. *Neka je X Banachov prostor, a $Y \subseteq X$ njegov zatvoren potprostor. X je komplementiran u Y ako i samo ako se identiteta* $\mathrm{id} : Y \to Y$ *može proširiti do ograničenog linearnog operatora $I : X \to Y$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je X komplementiran u Y. Tada postoji zatvoren potprostor $Y \subseteq X$ takav da je $X = Y \oplus Z$ te kanonska ograničena projekcija $P_Y : X \to Y$ koja je proširenje identitete $\mathrm{id} : Y \to Y$.

Pretpostavimo sada da se identiteta može proširiti do ograničenog linearnog operatora $I : X \to Y$. I je tada idempotentan jer $I(Ix) = \mathrm{id}((Ix)) = Ix$. I je tada kanonska projekcija s X na Y. $I \circ (\mathrm{id}_X - I) = I \circ \mathrm{id}_X - I \circ I = I - I = 0$ pa je $Z = \mathrm{Im}(\mathrm{id}_X - I) \subseteq \mathrm{Ker}\, I$. Također, ako je $z \in \mathrm{Ker}\, I$, imamo $I(z) = 0$ što povlači da je $z = \mathrm{id}_X(z) - I(z)$ pa je $z \in Z$, i dobili smo $Z = \mathrm{Ker}\, I$ pa je po 1.2.7 Z kao jezgra linearnog operatora zatvoren. Ako je $x \in Y \cap Z$, onda mora biti $I(x) = 0$ i $\mathrm{id}(x) = I(x) = 0$ pa $x = 0$, odnosno presjek im je trivijalan. Neka je S definiran kao u 1.3.4. $S(x, y) = 0$ povlači $x + y = 0$ odnosno $x \in Y \cap Z$ pa je $x = y = 0$ i S je injekcija. Ako je $x \in X$, imamo $x = I(x) + (id_X(x) - I(x))$ pa $S(I(x), id_X(x) - I(x)) = x$ i S je surjekcija, očito neprekidna. Budući da je I neprekidna projekcija, iz 1.3.5 slijedi da je $X = Y \oplus Z$ te je Y komplementiran u X. □

Uvedimo sada prostore $\ell(X)_p$ za $1 \leq p < \infty$ i $c_0(X)$ za dani Banachov prostor X. To su prostori nizova $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u X takvi da vrijedi da je $(\|x_n\|)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p$ odnosno $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$. Norme su im definirane kao:

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{\ell(X)_p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$
$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_{c_0(X)} = \max_{1\leq n<\infty} \|x_n\|.$$

Potrebne su nam sljedeće tri leme:

Lema 2.3.3. *Vrijedi $\ell_p(X) \approx \ell_p(X) \oplus \ell_p(X)$ i $c_0(X) \approx c_0(X) \oplus c_0(X)$.*

Dokaz. Neka je $T : \ell_p(X) \oplus \ell_p(X) \to \ell_p(X)$ definirano kao:

$$T((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$$
$$z_n = \begin{cases} x_k, & \text{ako je } n = 2k \text{ za } k \in \mathbb{N}, \\ y_k, & \text{ako je } n = 2k - 1 \text{ za } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Neka su $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ i $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dalje računajmo:

$$S_z^{2n} = \sum_{k=1}^{2_n} \|z_k\|^{\frac{1}{p}} = \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^{\frac{1}{p}} + \sum_{k=1}^{n} \|y_k\|^{\frac{1}{p}} =$$
$$= S_x^n + S_y^n.$$

Kad pustimo $n \to \infty$, znamo da će parcijalne sume S_x^n i S_y^n konvergirati k $||x||^p$ i $||y||^p$ (u $\ell(X)_p$). Članovi sume su pozitivni brojevi, pa je suma kao niz rastuća i onda će S_z^{2n} konvergirati k $||z||^p$ i dobili smo $||z||^p = ||x||^p + ||y||^p$. Dakle, preslikavanje je dobro definirano. Također vrijedi:

$$||z|| = (||x||^p + ||y||^p)^{\frac{1}{p}} \leq 2^{\frac{1}{p}} \max\{||x||, ||y||\}.$$

Norma koja uzima maksimum normi elementa je usklađena s produktnom topologijom na $X \times Y$, stoga možemo zaključiti da je T ograničen linearan operator. Provjerimo sada da je T bijekcija.

Neka je $T(x, y) = 0$, odmah slijedi da su $||x_n|| = ||y_n|| = 0$ za $n \in \mathbb{N}$ odnosno $x_n = y_n = 0$ pa je jezgra trivijalna i T je injekcija. Neka je $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p(X)$ proizvoljan, stavimo:

$$x_n = z_{2n}, \ n \in \mathbb{N},$$
$$y_n = z_{2n+1}, \ n \in \mathbb{N}.$$

I lako vidimo da je $T(x, y) = z$, dakle T je i surjekcija pa je bijekcija. Računamo:

$$\left\|T^{-1}(z)\right\| = \max\{||x||, ||y||\} \leq ||z||.$$

Njegov inverz je ograničen pa smo dobili traženi izomorfizam. Dokaz za $c_0(X)$ se provodi na sličan način. □

Lema 2.3.4. *Vrijedi $\ell_p(X \oplus Y) \approx \ell_p(X) \oplus \ell_p(Y)$ i $c_0(X \oplus Y) \approx c_0(x) \oplus c_0(Y)$.*

Dokaz. Slično kao i u prošloj lemi, u direktnoj sumi gledamo norme koje uzimaju maksimum jer su usklađene s produktnim topologijama. Neka je $z = (x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p(X \oplus Y)$. Označimo $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Imamo:

$$||x||^p = \sum_{i=n}^{\infty} ||x_n||^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \max\{||x_n||, ||y_n||\}^p = ||z||^p.$$

Po simetriji isto vrijedi i za y. Dakle, $x, y \in \ell_p(X)$ te $\max\{||x||, ||y||\} \leq ||z||$.

Neka su sad $x, y \in \ell_p(X)$, a z neka ostane definiran kao gore. S druge strane:

$$\begin{aligned}
||z||^p = \sum_{n=1}^{\infty} \max\{||x_n||, ||y_n||\}^p &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (||x_n||^p + ||y_n||^p) \leq \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||^p + \sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||^p = ||x||^p + ||y||^p \leq \\
&\leq 2\max\{||x||, ||y||\}^p.
\end{aligned}$$

Sada imamo $z \in \ell_p(X \oplus Y)$. Definirajmo preslikavanje $T : \ell_p(X \oplus Y) \to \ell_p(X) \oplus \ell_p(Y)$ kao $T(z) = (x, y)$. Očito je bijekcija, a iz gornjeg računa vidimo da su i on i njegov inverz ograničeni pa je to traženi izomorfizam. Dokaz za $c_0(X)$ ide analogno. □

Lema 2.3.5. *Vrijedi $\ell_p(X) \approx X \oplus \ell_p(X)$ i $c_0(X) \approx X \oplus c_0(X)$.*

Dokaz. Neka je $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_p(X)$. Definirajmo (x_0, y) gdje je $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned} x_0 &= x_1, \\ y_n &= x_{n+1}. \end{aligned}$$

Očito je da je $x_0 \in X$ te $y \in \ell_p(X)$. Računamo:

$$\begin{aligned} \|(x_0, y)\|^p &= \max\{\|x_0\|, \|y\|\}^p \leq (\|x_0\|^p + \|y\|^p) = \\ &= \|x_1\|^p + \sum_{n=2}^{\infty} \|x_n\|^p = \|x\|^p. \end{aligned}$$

Pretpostavimo sada da imamo $(x_0, y) \in X \oplus \ell_p(X)$ te definirajmo $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kao:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0, \\ x_n &= y_{n-1}. \end{aligned}$$

I računajmo:

$$\begin{aligned} \|x\|^p = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p &\leq \|x_1\|^p + \sum_{n=2}^{\infty} \|x_n\|^p = \|x_0\|^p + \sum_{n=1}^{\infty} \|y_n\|^p = \\ &= \|x_0\|^p + \|y\|^p \leq 2\max\{\|x_0\|, \|y\|\}^p = \|(x_0, y)\|^p. \end{aligned}$$

Sada možemo definirati: $T : \ell_p(X) \to X \oplus \ell_p(X)$ kao $T(x) = (x_0, y)$ s gornjim formulama. To je očito bijekcija, a iz prethodnih računa se vidi da je preslikavanje izomorfizam. Analogno se dokaže i za $c_0(X)$. □

Sada smo spremni za dokaz Pełczyńskijeve dekompozicijske tehnike:

Teorem 2.3.6 (Pełczyńskijeva dekompozicijska tehnika)**.** *Neka su X i Y Banachovi prostori takvi da je X izomorfan komplementiranom potprostoru od Y te da je Y izomorfan komplementiranom potprostoru od X. Pretpostavimo da vrijedi jedna od sljedećih tvrdnji:*

(i) $X \approx X \oplus X$ *i* $Y \approx Y \oplus Y$.

(ii) $X \approx \ell_p(X)$ *za neki* $1 \leq p < \infty$.

(iii) $X \approx c_0(X)$.

Tada su X i Y izomorfni.

Dokaz. Po pretpostavci imamo $X \approx Y \oplus E$ te $Y \approx F \oplus X$.

(i) Računamo:

$$X \approx Y \oplus E \approx (Y \oplus Y) \oplus E \approx Y \oplus (Y \oplus E) \approx Y \oplus X.$$

Analogno dobijemo i $Y \approx Y \oplus X$ i onda slijedi $X \approx X \oplus Y \approx Y \oplus X \approx Y$.

(ii) Iz $X \approx \ell_p(X)$ koristeći lemu 2.3.3 slijedi $X \approx \ell_p(X) \approx \ell_p(X) \oplus \ell_p(X) \approx X \oplus X$. Sada slično kao pod (i) zaključimo da vrijedi $Y \approx X \oplus Y$. Iz leme 2.3.4 uočavamo:

$$\ell_p(X) \approx \ell_p(Y \oplus E) \approx \ell_p(Y) \oplus \ell_p(E).$$

Uz pomoć leme 2.3.5 računamo:

$$X \approx \ell_p(X) \approx \ell_p(Y) \oplus \ell_p(E) \approx Y \oplus \ell_p(Y) \oplus \ell_p(E) = Y \oplus X.$$

I sad imamo $Y \approx X \oplus Y \approx Y \oplus X \approx X$.

□

2.4 Izometrična injektivnost

Sada uvodimo definiciju prostora koji su predmet proučavanja ovoga rada:

Definicija 2.4.1. *Za Banachov prostor X kažemo da je* ***injektivan*** *ako za svaki Banachov prostor Y, $E \subseteq Y$ njegov potprostor te ograničen operator $T : E \to X$ postoji $\tilde{T} : Y \to X$ koji proširuje T. Ako se još dodatno može osigurati da je $\|T\| = \|\tilde{T}\|$, onda za X kažemo da je* ***izometrično injektivan****.*

Izometrična injektivnost nam jamči da operator možemo proširiti bez povećanja norme kao u Hahn-Banachovom teoremu. Ako promatramo kategoriju svih Banachovih prostora kojima su morfizmi linearne kontrakcije, onda su izometrično injektivni Banachovi prostori upravo injektivni objekti u toj kategoriji.

Prvi primjer izometrično injektivnog Banachovog prostora je ℓ_∞:

Teorem 2.4.2. *ℓ_∞ je izometrično injektivan Banachov prostor.*

Dokaz. Neka je E zatvoren potprostor od X te $T : E \to \ell_\infty$ ograničen linearan operator definiran kao $T(x) = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Promatrajmo operatore na koordinate u ℓ_∞: $T_n(x) = y_n$. To su očito linearni funkcionali. Također:

$$|T_n(x)| \leq \sup_{n\in N} |T_n(x)| = \sup_{n\in N} |y_n| = \|T(x)\| \leq \|T\| \, \|x\| \, .$$

Dakle, to su i ograničeni linearni funkcionali norme $\|T_n\| \leq \|T\|$. Dalje računamo:

$$\|T(x)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|y_n\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n(x)\| \leq \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\|\right) \cdot \|x\| .$$

Stoga vrijedi:

$$\|T\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| .$$

Na svaki $T_E : X \to \mathbb{R}$ sada možemo primijeniti Hahn-Banachov teorem (1.2.9) i zaključiti da postoji $\tilde{T}_n : X \to \mathbb{R}$ koji proširuje T_n te vrijedi $\left\|\tilde{T}_n\right\| = \|T_n\|$. Definirajmo sada $\tilde{T} : X \to \ell_\infty$ kao:

$$\tilde{T}(x) = \left(\tilde{T}_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}} .$$

Kao i gore za normu od T zaključimo:

$$\left\|\tilde{T}\right\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|\tilde{T}_n\right\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| = \|T\| .$$

Dakle, pronašli smo proširenje od T na cijeli X koje ima istu normu. Iz proizvoljnosti X, E i T slijedi da je ℓ_∞ izometrično injektivan. □

Poglavlje 3

Goodner-Nachbin-Kellyjev teorem

U ovom poglavlju dokazat ćemo Goodner-Nachbin-Kellyjev teorem koristeći pristup iz [1]. Također pretpostavljamo da je K kompaktan Hausdorffov topološki prostor.

3.1 Ekstremno nepovezani skupovi

Prvo ćemo definirati ekstremno nepovezan prostor topološki prostor i vidjeti da je on također i projektivan.

Definicija 3.1.1. *Za topološki prostor X kažemo da je* ***ekstremno nepovezan*** *ili* ***Stoneov*** *ako je zatvarač svakog otvorenog skupa i sam otvoren.*

Definicija 3.1.2. *Topološki prostor P je* ***projektivan*** *ako za svaki par topoloških prostora, X i Y, i par neprekidnih preslikavanja $h : Y \to X$ i $f : P \to X$, gdje je h surjektivan, postoji neprekidno preslikavanje $r : P \to Y$ takvo da je $h \circ r = f$. Za r kažemo da je* ***podizanje*** *od f.*

Projektivan topološki prostor je projektivan objekt u kategoriji topoloških prostora. Na slici 3.1 je komutativni dijagram koji to ilustrira.

$$\begin{tikzcd}
& Y \arrow[d, "f"] \arrow[dl, dashed, "r"'] \\
P \arrow[r, two heads, "h"] & X
\end{tikzcd}$$

Slika 3.1: Projektivnost

Gleason[3] je dokazao sljedeće:

Teorem 3.1.3. *Kompaktan Hausdorffov topološki prostor K je ekstremno nepovezan ako i samo ako je projektivan.*

Predmet ovog poglavlja je sljedeći teorem:

Teorem 3.1.4 (Goodner-Nachbin-Kelly)**.** *Banachov prostor X je izometrično injektivan ako i samo ako je izometrično izomorfan $\mathcal{C}(K)$ prostoru takvom da je K ekstremno nepovezan.*

Mi ćemo teorem dokazati koristeći uređajno potpune $\mathcal{C}(K)$ što je ekvivalentno tomu da je K ekstremno nepovezan.

3.2 Uređajno potpuni Banachovi prostori

Krenut ćemo s definicijom uređajno potpunog $\mathcal{C}(K)$:

Definicija 3.2.1. *$\mathcal{C}(K)$ je* ***uređajno potpun*** *ako za svaka dva neprazna podskupa A i B od $\mathcal{C}(K)$ sa svojstvom da za proizvoljne $f \in A$ i $g \in B$ vrijedi $f \leq g$, postoji $h \in \mathcal{C}(K)$ takav da za proizvoljne $f \in A$ i $g \in B$ vrijedi $f \leq h \leq g$.*

Uočimo da je to ekvivalentno postojanju infimuma u $A \subseteq \mathcal{C}(K)$ ograničenom odozdo.

Napomena 3.2.2. *$\mathcal{C}(K)$ je uređajno potpun ako i samo ako svaki neprazan odozdo ograničen (u $\mathcal{C}(K)$) podskup $A \subseteq \mathcal{C}(K)$ ima infimum u $\mathcal{C}(K)$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\mathcal{C}(K)$ uređajno potpun. Neka je $\emptyset \neq A \subseteq \mathcal{C}(K)$ sa svojstvom da postoji $f \in \mathcal{C}(K)$ takav da za svaki $g \in A$ vrijedi $g \geq f$. Neka je sada $B \subseteq \mathcal{C}(K)$ skup svih donjih granica od A, očito je neprazan jer $f \in B$. Iz uređajne potpunosti slijedi da postoji $h \in \mathcal{C}(K)$ takav da je on donja granica za A i gornja granica za B.

Neka je $k \in \mathcal{C}(K)$ donja granica od A, tada je $k \in B$ pa mora biti $h \geq k$. Stoga je h najveća donja granica.

Sada pretpostavimo da svaki odozdo ograničen $A \subseteq \mathcal{C}(K)$ ima infimum. Neka su A i B neprazni podskupovi od $\mathcal{C}(K)$ takvi da za sve $f \in A$ i $g \in B$ vrijedi $f \leq g$. B je očito odozdo ograničen pa ima infimum $h \in \mathcal{C}(K)$. Svaki $f \in A$ je donja granica od B pa mora vrijediti $f \leq h$. Time je dokazano da je $\mathcal{C}(K)$ uređajno potpun. □

Napomena 3.2.3. *Analogno se dokaže da isto vrijedi i za supremum odozgo ograničenog skupa u $\mathcal{C}(K)$.*

Također vrijedi sljedeće:

Lema 3.2.4. *Neka je $A \in \mathcal{C}(K)$ odozdo ograničen te $\alpha \geq 0$. Vrijedi:*

$$\inf_{f \in A} \alpha f = \alpha \inf_{f \in A} f.$$

Dokaz. Ako je g donja granica od A, tada je αg donja granica od αA jer $f \geq g$ povlači $\alpha f \geq \alpha g$. Sada lako slijedi tvrdnja. □

Propozicija 3.2.5. *Ako je $\mathcal{C}(K)$ je uređajno potpun, onda je K ekstremno nepovezan.*

Dokaz. Neka je U otvoren u K, trebamo pokazati da je $\overline{U}$ također otvoren. Promatrajmo skup:

$$S = \{f \in \mathcal{C}(K) \mid f \geq \chi_U\}.$$

Budući da je $\mathcal{C}(K)$ uređajno potpun, postoji funkcija $f \in \mathcal{C}(K)$ koja je infimum od S u $\mathcal{C}(K)$. K je Hausdorffov i kompaktan pa je po lemi 1.1.15 i normalan stoga možemo iskoristiti Urysohnovu lemu (1.1.14). Neka je $x \in K \setminus \overline{U}$, tada po Urysohnovoj lemi postoji neprekidna funkcija $g : K \to [0, 1]$ takva da je $g(x) = 0$ te da je $g\left(\overline{U}\right) = \{1\}$. Očito je $g \in S$ pa onda mora biti $f \leq g$, odnosno $f(U) = \{1\}$ i $f(x) = 0$. x je bio proizvoljan pa možemo zaključiti $f\left(X \setminus \overline{U}\right) = \{0\}$.

f je neprekidna pa vrijedi:

$$f\left(\overline{U}\right) \subseteq \overline{f(U)} = \overline{\{1\}} = \{1\}.$$

Slijedi $f\left(\overline{U}\right) = \{1\}$. Sada je $f^{-1}(\{0\}) = X \setminus \overline{U}$ pa je $X \setminus \overline{U}$ zatvoren, te slijedi da je $\overline{U}$ otvoren.

□

Propozicija 3.2.6. *Ako je K ekstremno nepovezan, onda je $\mathcal{C}(K)$ uređajno potpun.*

Dokaz. Neka je K ekstremno nepovezan. Dovoljno je dokazati da svaki nenegativan podskup $A \subseteq \mathcal{C}(K)$ ima infimum. Za svaki $f \in A$ i $t > 0$ definirajmo:

$$G_{f,t} = \{s \in K \mid f(s) < t\} = f^{-1}((-\infty, t)).$$

$G_{f,t}$ je očito otvoren je jer praslika otvorenog skupa, a funkcija f je neprekidna po pretpostavci. Zato je sljedeći skup, kao unija otvorenih skupova, i sam otvoren:

$$G_t = \bigcup_{f \in A} G_{f,t}.$$

K je po pretpostavci ekstremno nepovezan pa je onda $\overline{G_t}$ otvoren. Štoviše:

$$K = \bigcup_{t>0} \overline{G_t}.$$

Naime, ako postoji $s \in K \setminus \bigcup\limits_{t>0} \overline{G_t}$, to povlači za svaki $t > 0$ i $f \in A$ imamo $f(s) > t$. Ako uzmemo bilo koji $f \in A$, onda bi slijedilo da je f neograničena, a to nije moguće jer je iz $\mathcal{C}(K)$.

Sada, za svaki $s \in K$ vrijedi jedno od sljedećeg:

(i) Postoji $t > 0$ takav da svaki $\epsilon > 0$ vrijedi:

$$s \in G_{t+\epsilon} \text{ i } s \notin G_{t-\epsilon},$$

(ii)

$$s \in \bigcap_{t>0} \overline{G_t}.$$

Očito je da ako nije zadovoljen prvi uvjet, da mora biti zadovoljen drugi. Također, ako je prvi uvjet zadovoljen za neki $t > 0$, onda je takav t jedinstven.

Definirajmo sada funkciju $g : K \to \mathbb{R}$ kao:

$$g(s) = \begin{cases} t, & \text{ako } s \in \overline{G}_{t+\epsilon}, \notin s \in \overline{G}_{t-\epsilon} \text{ za svaki } \epsilon > 0, \\ 0, & \text{ako } s \in \bigcap\limits_{t>0} \overline{G}_t. \end{cases}$$

Sada definirajmo:

$$E_t = \{s \in K \mid g(s) < t\} = \bigcup_{\epsilon>0} \overline{G}_{t-\epsilon},$$

$$F_t = \{s \in K \mid g(s) \leq t\} = \bigcap_{\epsilon>0} \overline{G}_{t+\epsilon}.$$

E_t je otvoren kao otvorena unija otvorenih skupova ($\overline{G}_t$ su otvoreni jer je prostor ekstremno nepovezan). F_t je zatvoren kao presjek zatvorenih skupova ($\overline{G}_t$ su zatvoreni jer su to zatvarači od G_t). Neka je sada (t_1, t_2) proizvoljan otvoren interval u $\mathbb{R}$, vrijedi:

$$g^{-1}((t_1, t_2)) = E_{t_2} \setminus F_{t_1} = E_{t_2} \cap (K \setminus F_{t_1}).$$

Desna strana je otvoren skup kao konačan presjek dva otvorena skupa, stoga je g neprekidna funkcija.

Fiksirajmo $f \in A$. Neka su $t > 0$ i $\epsilon > 0$. Skup E_t sadrži skup:

$$\{s \in K \mid f(s) < t - \epsilon\}.$$

Sada slijedi da je $f \leq g$ za svaki $f \in A$.

Neka je sada $h \in \mathcal{C}(K)$ takav da je h donja granica od A. Neka su $t > 0$ i $\epsilon > 0$ proizvoljni. Ako je $f(s) < t - \epsilon$ za svaki $f \in A$, onda je $h(s) < t - \epsilon$ pa imamo:

$$G_{t-\epsilon} \subseteq \{s \in K \mid h(s) < t - \epsilon\}.$$

Iz neprekidnosti h sada slijedi:

$$\overline{G}_{t-\epsilon} \subseteq \{s \in K \mid h(s) \leq t - \epsilon\} .$$

Na kraju imamo:

$$\{s \in K \mid g(s) < t\} = \bigcup_{\epsilon>0} \overline{G}_{t-\epsilon} \subseteq \{s \in K \mid h(s) < t\} .$$

Dakle, za proizvoljan $t > 0$, $h(s) < t$ povlači $g(s) < t$ pa iz proizvoljnosti $t > 0$ slijedi $g \leq h$. Zaključujemo da je g infimum skupa A u $\mathcal{C}(K)$. □

Korolar 3.2.7. *$\mathcal{C}(K)$ je uređajno potpun ako i samo ako je K ekstremno nepovezan.*

Dokaz. Iz 3.2.6 i 3.2.5. □

3.3 Goodner-Nachbinov teorem

Započet ćemo s uvođenjem sublinearnih preslikavanja. Pomoću njih ćemo dokazati Goodner-Nachbinov teorem.

Definicija 3.3.1. *Neka je F vektorski potprostor Banachovog prostora X. Preslikavanje $V : F \to \mathcal{C}(K)$ je* ***sublinearno*** *ako vrijedi sljedeće:*

(i) $V(\alpha x) = \alpha V(x)$ *za sve* $\alpha \geq 0$ *i* $x \in F$.

(ii) $V(x + y) \leq V(x) + V(y)$ *za sve* $x, y \in F$.

Napomena 3.3.2. *Primijetimo da ako za sublinearna preslikavanja $U, V : X \to \mathcal{C}(K)$ i neki $x \in X$ vrijedi $U(x) \leq V(x)$, tada za $\alpha \geq 0$ vrijedi $U(\alpha x) \leq V(\alpha x)$.*

Dokaz. Ako je $\alpha \geq 0$, imamo $U(\alpha x) = \alpha U(x)$ i $V(\alpha x) = \alpha V(x)$. Sada iz $U(x) \leq V(x)$ imamo $\alpha U(x) \leq \alpha V(x)$ te slijedi tvrdnja. □

Napomena 3.3.3. *Očito je svaki linearni operator $V : X \to \mathcal{C}(K)$ i sublinearno preslikavanje.*

Napomena 3.3.4. *Primijetimo da za sublinearno preslikavanje $U : X \to \mathcal{C}(K)$ vrijedi $U(0) = 0$.*

Dokaz. Neka je $x \in X$. Imamo $U(0) = U(0 \cdot x) = 0 \cdot U(x) = 0$. □

Lema 3.3.5. *Sublinearno preslikavanje $V : F \to \mathcal{C}(K)$ je linearan operator ako i samo ako vrijedi $V(-y) = -V(y)$ za svaki $y \in F$.*

Dokaz. Ako je V linearan operator, onda odmah slijedi $V(-x) = -V(x)$.

Pretpostavimo da vrijedi $V(-y) = -V(y)$ za svaki $y \in F$. Ako je $\lambda \geq 0$, iz definicije sublinearnog preslikavanja za proizvoljan $y \in F$ imamo $V(\lambda x) = \lambda V(x)$. Ako je $\lambda \leq 0$, tada je $-\lambda \geq 0$ pa možemo računati:

$$\begin{aligned} V(\lambda x) &= V(-\lambda(-x)) = -\lambda V(-x) = \\ &= \lambda\left[-V(-x)\right] = \lambda V(x). \end{aligned}$$

Neka su $x, y \in F$. Iz sublinearnosti preslikavanja V imamo $V(x + y) \leq V(x) + V(y)$. S druge strane računamo:

$$\begin{aligned} V(x + y) &= V(-(-x - y)) = -V(-x - y) \geq \\ &\geq -\left[V(-x) + V(-y)\right] = -V(-x) - V(-y) = \\ &= V(x) + V(y). \end{aligned}$$

U prvom i zadnjem redu smo koristili pretpostavku leme, a pri prijelazu iz drugog u treći red koristili smo $V(-x - y) \leq V(-x) + V(-y)$ i množenje nejednakosti s -1. Dokazali smo da je $V(x + y) = V(x) + V(y)$. Sada možemo zaključiti da je V linearan operator. □

Definicija 3.3.6. *Sublinearno preslikavanje $V : X \to \mathcal{C}(K)$ je **minimalno** ako ne postoji drugo različito sublinearno preslikavanje $U : X \to \mathcal{C}(K)$ takvo da je $U(x) \leq V(x)$ za svaki $x \in X$.*

Lema 3.3.7. *Neka je X Banachov prostor i F vektorski potprostor od X. Neka su $V : X \to \mathcal{C}(K)$ i $W : F \to \mathcal{C}(K)$ sublinearna preslikavanja takva da za svaki $y \in F$ vrijedi $W(y) + V(-y) \geq 0$, te neka je $\mathcal{C}(K)$ uređajno potpun. Tada je preslikavanje $V \wedge W : X \to \mathcal{C}(K)$ definirano kao*

$$V \wedge W(x) = \inf\{V(x - y) + W(y) \mid y \in F\}. \tag{3.1}$$

dobro definirano i sublinearno.

Dokaz. Fiksirajmo $x \in F$. Koristeći sublinearnost od V dobivamo:

$$V(-y) = V(x - y - x) = V((x - y) + x) \leq V(x - y) + V(-x),$$

odnosno:

$$\begin{aligned} V(-y) &\leq V(x - y) + V(-x), \\ V(x - y) &\geq -V(-x) + V(-y). \end{aligned}$$

Uz pomoć toga i pretpostavke leme($W(y) + V(-y) \geq 0$) imamo:

$$\begin{aligned} V(x-y) + W(y) &\geq -V(-x) + V(-y) + W(y) = \\ &= -V(-x) + (W(y) + V(-y)) \geq -V(-x). \end{aligned}$$

Dakle, skup $\{V(x-y) + W(y) \mid y \in F\}$ je ograničen odozdo (s $-V(-x)$). To je skup u $\mathcal{C}(K)$ koji je ograničen odozdo, a $\mathcal{C}(K)$ je po pretpostavci uređajno potpun i onda taj skup ima svoj infimum (lema 3.2.2)) pa je izraz za $V \wedge V(x)$ iz jednadžbe 3.1 dobro definiran.

Sada nam ostaje za provjeriti da je preslikavanje $V \wedge V$ sublinearno, a to će lako slijediti iz svojstava infimuma skupa.

$$\begin{aligned} V \wedge W(x+y) &= \inf\{V(x+y-z) + W(z) \mid z \in F\} = \\ &= \inf\{V(x+y-2z) + W(2z) \mid z \in F\}. \end{aligned}$$

F je vektorski (pot)prostor pa je $z \mapsto 2z$ izomorfizam pa i bijekcija što povlači jednakost u gornjoj jednadžbi. Dalje imamo:

$$\begin{aligned} V(x+y-2z) + W(2z) &= V((x-z) + (y-z)) + 2W(z) \leq \\ &\leq V(x-z) + V(y-z) + 2W(z) = \\ &= (V(x-z) + W(z)) + (V(y-z) + W(z)). \end{aligned}$$

Sada to vratimo u prethodnu jednadžbu:

$$\begin{aligned} V \wedge W(x+y) &= \inf\{V(x+y-2z) + W(2z) \mid z \in F\} \leq \\ &\leq \inf\{(V(x-z) + W(z)) + (V(y-z) + W(z)) \mid z \in F\} \leq \\ &\leq \inf\{V(x-z) + W(z) \mid z \in F\} + \inf\{V(y-z) + W(z) \mid z \in F\} = \\ &= V \wedge W(x) + V \wedge W(y). \end{aligned}$$

□

Napomena 3.3.8. *Za preslikavanje $V \wedge W : X \to \mathcal{C}(K)$ iz prethodne leme 3.3.7 vrijedi $V \wedge W \leq W$ na F i $V \wedge W \leq V$ na X.*

Dokaz. Za $x \in F$ imamo:

$$V \wedge W(x) = \inf\{V(x-y) + W(y) \mid y \in F\} \leq V(x-x) + W(x) = W(x).$$

Za $x \in X$ vrijedi:

$$V \wedge W(x) = \inf\{V(x-y) + W(y) \mid y \in F\} \leq V(x-0) + W(0) = V(x).$$

□

Lema 3.3.9. *Neka je $V : X \to \mathcal{C}(K)$ sublinearno preslikavanje, te neka je $\mathcal{C}(K)$ uređajno potpun. Tada postoji minimalno sublinearno preslikavanje $W : X \to \mathcal{C}(K)$ takvo da vrijedi $W(x) \leq V(x)$ za sve $x \in X$.*

Dokaz. Definirajmo skup svih sublinearnih preslikavanja koja su manja (po točkama) od V:

$$\mathcal{S} = \{U : X \to \mathcal{C}(K) \mid U \text{ je sublinearno i } U(x) \leq V(x) \text{ za sve } x \in X\}.$$

Na tom skupu promatrajmo parcijalni uređaj definiran usporedbom preslikavanja po točkama. Ako pokažemo da on ima minimalni element, dokazat ćemo tvrdnju teorema. Taj minimalni element će biti minimalno sublinearno preslikavanje. Ako ne bi bio, to bi značilo da postoji neki drugi $L : X \to \mathcal{C}(K)$ koji je po točkama manji od toga minimalnog elementa, pa je po točkama manji i od V (iz definicije $\mathcal{S}$), što povlači da bi bio u $\mathcal{S}$. Dakle, dobili bismo element iz $\mathcal{S}$ koji je manji od minimalnog elementa, što je kontradikcija.

Postojanje minimalnog elementa ćemo pokazati korištenjem Zornove leme. Neka je $\Phi = (U_i)_{i \in \mathcal{I}}$ neki lanac (totalno uređen podskup) iz $\mathcal{S}$. Za $i \in \mathcal{I}$ i $x \in X$, korištenjem 3.3.4 i svojstva sublinearnog preslikavanja, imamo:

$$0 = U_i(0) = U_i(x + (-x)) \leq U_i(x) + U_i(-x),$$

odnosno $U_i(x) \geq -U_i(x)$. Iz činjenice da je U_i iz $\mathcal{S}$ slijedi $U_i(-x) \leq V(-x)$ pa iz 3.3.2 dobivamo $-U_i(-x) \geq -V(-x)$, i konačno $U_i(x) \geq -U_i(x) \geq -V(-x)$. Dakle, za proizvoljan $x \in X$ skup:

$$\{U_i(x) \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{C}(K)$$

je ograničen odzodo s $V(x) \in \mathcal{C}(K)$. Budući da je $\mathcal{C}(K)$ uređajno potpun, iz napomene 3.2.2 možemo naći infimum toga skupa i onda definirati:

$$U_\Phi(x) = \inf_{i \in \mathcal{I}} U_i(x).$$

Time smo definirali preslikavanje $U_\Phi(x) : X \to \mathcal{C}(K)$ za koje ćemo pokazati da je sublinearno. Za svaki $x \in X$ i $i \in \mathcal{I}$ vrijedi $U_\phi(x) \leq U_i(x)$ zbog infimuma u $\mathcal{C}(K)$.

Neka je $x \in X$ proizvoljan i neka je $\alpha \geq 0$, vrijedi:

$$U_\Phi(\alpha x) = \inf_{i \in \mathcal{I}} U_i(\alpha x) = \inf_{i \in \mathcal{I}} \alpha U_i(x) = \alpha \cdot \inf_{i \in \mathcal{I}} U_i = \alpha U_\Phi(x).$$

U predzadnjoj jednakosti smo koristili lemu 3.2.4 i time smo dokazali prvo definicijsko svojstvo sublinearnog preslikavanja.

Neka su $i, j \in \mathcal{I}$. Budući da je Φ lanac, možemo bez smanjenja općenitosti pretpostaviti $U_i \leq U_j$. Za proizvoljne $x, y \in X$ iz prethodnog, uz sublinearnost U_i, imamo:

$$U_\Phi(x + y) \leq U_i(x + y) \leq U_i(x) + U_i(y) \leq U_j(x) + U_i(y),$$

tj.

$$U_\Phi(x+y) - U_j(x) \leq U_i(y).$$

Lijeva strana je manja od $U_i(y)$ za svaki $i \in I$ (jer smo i izabrali proizvoljno) pa onda mora biti manja i od njihovog infimuma (u smislu $\mathcal{C}(K)$):

$$U_\Phi(x+y) - U_j(x) \leq U_\Phi(y).$$

Sada imamo:

$$U_\Phi(x+y) - U_\Phi(y) \leq U_j(x).$$

Analogno, na desnoj strani imamo $U_j(x)$ za proizvoljan $j \in \mathcal{I}$ pa lijeva mora biti manja od infimuma:

$$U_\Phi(x+y) - U_\Phi(y) \leq U_\Phi(x),$$

i dobili smo:

$$U_\Phi(x+y) \leq U_\Phi(x) + U_\Phi(y).$$

Ovime je završen dokaz da je U_Φ sublinearno preslikavanje. Također imamo $U_\Phi \leq U_i(x) \leq V(x)$ pa možemo zaključiti da je U_Φ iz $\mathcal{S}$. Dakle, lanac Φ ima svoj minimalni element u $\mathcal{S}$ i sada možemo primijeniti Zornovu lemu i zaključiti da $\mathcal{S}$ ima minimalan element W i time je tvrdnja dokazana. □

Lema 3.3.10. *Neka je $\mathcal{C}(K)$ uređajno potpun i $V : X \to \mathcal{C}(K)$ sublinearno preslikavanje. Ako je V minimalno, onda je linearni operator.*

Dokaz. Neka je $x \in X$ proizvoljan te neka je $F = \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ jednodimenzionalni potprostor od X generiran tim elementom. Definirajmo preslikavanje $W : F \to \mathcal{C}(K)$ kao $W(\lambda x) = -\lambda V(-x)$. To je linearni operator definiran time da x, bazu od F, preslikava u element $-V(-x) \in \mathcal{C}(K)$. Neka je $\lambda \geq 0$. Računamo:

$$\begin{aligned} W(\lambda x) + V(-\lambda x) &= -\lambda V(-x) + V(-\lambda x) = \\ &= -\lambda V(-x) + \lambda V(-x) = 0. \end{aligned}$$

Ako je $\lambda \leq 0$, tada je $-\lambda \geq 0$ pa imamo:

$$\begin{aligned} W(\lambda x) + V(-\lambda x) &= -\lambda V(-x) + V(-\lambda x) = \\ &= -\lambda V(-x) - \lambda V(x) = -\lambda\,[V(x) + V(-x)] \geq \\ &\geq -\lambda V\,(x + (-x)) = -\lambda V(0) = 0. \end{aligned}$$

Pri prijelazu iz drugog u treći red smo koristili drugo svojstvo sublinearnosti te na kraju napomenu 3.3.4. Dokazali smo da je $W(y) + V(-y) \geq 0$ za svaki $y \in F$, a lako se vidi da je W kao linearan operator također sublinearno preslikavanje pa možemo primijeniti lemu

3.3.7 i zaključiti da postoji sljedeće dobro definirano sublinearno preslikavanje (s cijelog X):

$$V \wedge W(z) = \inf \{V(z - y) + W(y) \mid y \in F\} =$$
$$= \inf \{V(z - \lambda x) + W(\lambda x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \leq V(z - 0) + W(0) = V(z).$$

Vidimo da je $V \wedge W \leq V$, a V je po pretpostavci minimalno pa mora biti $W \wedge V = V$. Također za $\lambda \in \mathbb{R}$ imamo:

$$V \wedge W(\lambda x) = \inf \{V(\lambda x - \mu x) + W(\mu x) \mid \mu \in \mathbb{R}\} \leq$$
$$\leq V(\lambda x - \lambda x) + W(\lambda x) = W(\lambda x).$$

Dakle, na F imamo $V \wedge W \leq W$, odnosno po prethodnom $V \leq W$ na F. To povlači da za proizvoljan $\lambda \in \mathbb{R}$ imamo $V(\lambda x) \leq W(\lambda x) = -\lambda V(-x)$ pa posebno za $\lambda = 1$ imamo $V(x) \leq -V(-x)$. Također, iz sublinearnosti V slijedi $0 = V(-x + x) \leq V(-x) + V(x)$ što povlači $-V(-x) \leq V(x)$ pa na kraju imamo $V(x) = -V(-x)$. x je bio proizvoljan pa to vrijedi za svaki $x \in X$. Iz leme 3.3.5 sada slijedi da je V linearan operator. □

Sada smo spremni za Goodner-Nachbinov teorem.

Teorem 3.3.11 (Goodner-Nachbin)**.** *Neka je K kompaktan Hausdorffov prostor. Tada je $\mathcal{C}(K)$ izometrično injektivan ako i samo ako je uređajno potpun.*

Dokaz. Neka je E zatvoren potprostor Banachovog prostora X, te neka je $S : E \to \mathcal{C}(K)$ ograničen linearan operator. Ako je $\|S\| = 0$, onda $S = 0$ te ima trivijalno proširenje (nul operator). Ako je $\|S\| > 0$, onda promatrajmo operator $S_0 = \frac{1}{\|S\|} S$. Tada je $\|S_0\| = 1$ i ako pronađemo operator T_0 koji ga proširuje uz čuvanje norme, onda imamo da $T = \|S\| T_0$ proširuje S te $\|T\| = \|S\|$.

Stoga bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $\|S\| = 1$. To povlači da za svaki $x \in E$ vrijedi:

$$\|S(x)\| \leq \|S\| \|x\| = \|x\|.$$

$S(x) \in \mathcal{C}(K)$ pa za svaki $k \in K$ imamo:

$$|(Sx)(k)| \leq \|S(x)\| \leq \|x\|,$$

odnosno:

$$-\|x\| \leq (Sx)(k) \leq \|x\|, \ \forall k \in K.$$

Ako uzmemo funkciju $1 \in \mathcal{C}(K)$ takvu da je $1(k) = 1$ za sve $k \in K$, gornju jednadžbu možemo zapisati kao:

$$-\|x\| \cdot 1(k) \leq (Sx)(k) \leq \|x\| 1(k), \ \forall k \in K. \tag{3.2}$$

Jednadžba vrijedi za sve $k \in K$ pa onda ju možemo zapisati preko elemenata iz $\mathcal{C}(K)$:

$$- \|x\| \cdot 1 \leq S(x) \leq \|x\| \cdot 1.$$

Definirajmo preslikavanje $V_0 : X \to \mathcal{C}(K)$ kao $V_0(x) = \|x\| \cdot 1$. Provjerimo da je to sublinearno preslikavanje. Za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ imamo:

$$V_0(\lambda x) = \|\lambda x\| \cdot 1 = |\lambda| \cdot (\|x\| \cdot 1) = |\lambda| \, V_0(x).$$

Za $x, y \in X$, imamo:

$$\begin{aligned} V_0(x + y) = \|x + y\| \cdot 1 \leq (\|x\| + \|y\|) \cdot 1 = \\ = \|x\| \cdot 1 + \|y\| \cdot 1 = V_0(x) + V_0(y). \end{aligned}$$

Dakle, V_0 je sublinearno preslikavanje. Također $S : E \to \mathcal{C}(K)$ je po pretpostavci linearan operator pa je po napomeni 3.3.3 i sublinearno preslikavanje. Jednadžbu 3.2 možemo zapisati kao:

$$-V_0(x) \leq S(x) \leq V_0(x).$$

Umjesto x uvrstimo $-x$:

$$\begin{aligned} -V_0(-x) \leq S(-x) \leq V_0(-x), \\ -V_0(-x) \leq -S(x) \leq V_0(-x), \\ V_0(-x) \geq S(x) \geq -V_0(-x). \end{aligned}$$

Pri prijelazu iz drugog u treći red pomnožili smo jednadžbu s -1, i dobili $S(x) \geq -V_0(-x)$ za sve $x \in E$. Također, $\mathcal{C}(K)$ je uređajno potpun pa sada možemo iskoristiti lemu 3.3.7 i zaključiti da postoji sublinearno preslikavanje:

$$V_0 \wedge S(x) = \inf \{V_0(x - y) + S(y) \mid y \in E\}.$$

Iz leme 3.3.9 slijedi da postoji minimalno sublinearno preslikavanje $T : X \to \mathcal{C}(K)$, a iz leme 3.3.10 slijedi da je ono linearni operator. Minimalnost T nam osigurava $T \leq V_0 \wedge S$ na X (pa i na $E \subseteq X$). Sada iz napomene 3.3.8 možemo zaključiti $T \leq V_0$ na X i $T \leq S$ na F.

Za $x \in E$ imamo $T(x) \leq S(x)$ i $T(-x) \leq S(-x)$. Iskoristimo linearnost S i T i imamo $-T(x) \leq -S(x)$ odnosno $T(x) \geq S(x)$. Sada možemo zaključiti $S = T$ na E odnosno $T|_E = S$. Dakle, T je proširenje od S. Posebno, to povlači i da $\|T\| \geq \|S\| = 1$.

S druge strane za $x \in X$ imamo:

$$\begin{aligned} T(x) \leq V_0(x) = \|x\| \cdot 1, \\ -T(x) = T(-x) \leq V_0(-x) = \|-x\| \cdot 1 = \|x\| \cdot 1. \end{aligned}$$

To povlači $|T(x)| \leq \|x\|$ odnosno $\|T\| \leq 1$. Iz $\|T\| \geq 1$ i $\|T\| \leq 1$ slijedi $\|T\| = 1$ odnosno $\|T\| = \|S\|$. Našli smo proširenje od S koje ima istu normu kao i S za proizvoljan linearan operator S. Slijedi da je $\mathcal{C}(K)$ izometrično injektivan.

Sada ćemo dokazati drugi smjer pa pretpostavimo da je $\mathcal{C}(K)$ izometrično injektivan. Identiteta $\mathrm{id} : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K)$ je očito linearan operator norme 1. Također, $\mathcal{C}(K)$ je potprostor Banachova prostora $\ell_\infty(K)$ (prostora svih ograničenih funkcija nad K). Sada možemo iskoristiti izometričku injektivnost $\mathcal{C}(K)$ i zaključiti da postoji $P : \ell_\infty(K) \to \mathcal{C}(K)$ koji proširuje identitetu i ima normu 1. S obzirom na to da proširuje identitetu na $\mathcal{C}(K)$,

$$\begin{tikzcd}
\ell_\infty(K) \arrow[r, two heads, "P"] & \mathcal{C}(K) \\
\mathcal{C}(K) \arrow[u, hook] \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}$$

Slika 3.2: Postojanje projekcije P

onda P mora biti surjekcija. Također za $x \in \ell_\infty(K)$, imamo $P(x) \in \mathcal{C}(K)$ što povlači $P \circ P(x) = P(P(x)) = \mathrm{id}(P(x)) = P(x)$. Dakle, P je projekcija.

Neka su A i B neprazni podskupovi od $\mathcal{C}(K)$ takvi da za svaki $f \in A$ i $g \in B$ vrijedi $f \leq g$. Definirajmo $a : K \to \mathbb{R}$ kao $a(k) = \sup_{f \in A} f(k)$ za svaki $k \in K$. B je neprazan pa postoji $g \in B$, i za svaki $f \in A$ i $k \in K$ imamo $f(k) \leq g(k)$. Dakle, skup $\{f(k) \mid f \in A\}$ ima gornju granicu $g(k)$ pa ima i supremum te je i neprazan pa slijedi da je a dobro definirano preslikavanje te $a \leq g$. Također $g \in \mathcal{C}(K)$ pa $g(k) \leq \max_{s \in K} g(s) = \|g\|$ za svaki $k \in K$. To povlači da svaki $k \in K$ vrijedi $a(k) \leq g(k) \leq \|g\|$ i a je ograničeno preslikavanje pa je element $\ell_\infty(K)$.

Neka je $P(a) = h$. Dokazat ćemo da za sve $f \in A$ i $g \in B$ vrijedi $f \leq h \leq g$. h je očito iz $\mathcal{C}(K)$ jer u kodomeni od P.

Uzimimo $b \in \mathcal{C}(K)$ takav da je $b > 0$, te neka je $0 \leq \lambda \leq \frac{2}{\|b\|}$, računamo:

$$\|P(1 - \lambda b)\| \leq \|P\| \, \|1 - \lambda b\| = \|1 - \lambda b\|.$$

Za $k \in K$ imamo:

$$(1 - \lambda b)(k) = 1(k) - \lambda b(k) = 1 - \lambda b(k) \leq 1.$$

Iskoristili smo činjenicu da $b(k) > 0$ te da je $\lambda \geq 0$ odnosno $\lambda b(k) \geq 0$ pa $-\lambda b(k) \leq 0$. S druge strane:

$$\begin{aligned}
-(1 - \lambda b)(k) &= -1 + \lambda b(k) \leq -1 + \lambda \|b\| \leq \\
&\leq -1 + \frac{2}{\|b\|} \cdot \|b\| = -1 + 2 = 1.
\end{aligned}$$

Dobili smo $|(1 - \lambda b)(k)| \leq 1$ za proizvoljno $k \in K$ što povlači $\|1 - \lambda b\| \leq 1$. Vratimo to u jednadžbu 3.3:

$$\|P(1 - \lambda b)\| \leq 1.$$

Očito je $P(1) = 1$ pa imamo:

$$\begin{aligned}
\|1 - \lambda P(b)\| &\leq 1, \\
|1 - \lambda (Pb)(k)| &\leq 1, \ \forall k \in K, \\
1 - \lambda (Pb)(k) &\leq 1, \ \forall k \in K, \\
-\lambda (Pb)(k) &\leq 0, \ \forall k \in K, \\
\lambda (Pb)(k) &\geq 0, \ \forall k \in K, \\
\lambda P(b) &\geq 0, \\
P(b) &\geq 0.
\end{aligned}$$

Pri prijelazu iz predzadnjeg u zadnji redak iskoristili smo činjenicu da je $\lambda \geq 0$. Dakle, za $b > 0$ imamo $P(b) \geq 0$, odnosno za $b \geq 0$ imamo $P(b) \geq 0$ ($P(0) = 0$), dakle P je pozitivno preslikavanje. Neka su $f \in A$ i $g \in B$ proizvoljni. Sada iz $f \leq a$ slijedi $a - f \geq 0$ pa koristeći pozitivnost P imamo

$$\begin{aligned}
P(a - f) &\geq 0, \\
P(a) - P(f) &\geq 0, \\
h - f &\geq 0, \\
f &\leq h.
\end{aligned}$$

Iskoristili smo činjenicu da je $P(a) = h$ te da je P identiteta na $\mathcal{C}(K)$ pa je $P(f) = f$. Analogno vidimo da iz $a \leq g$ slijedi $h \leq g$. Dokazali smo da je $\mathcal{C}(K)$ uređajno potpun. □

3.4 Goodner-Nachbin-Kellyjev teorem

Prvo dokažimo sljedeću propoziciju:

Propozicija 3.4.1. *Neka je X Banachov prostor. Ako je X izometrično izomorfan nekom uređajno potpunom $\mathcal{C}(K)$, tada je X izometrično injektivan.*

Dokaz. Neka je X Banachov prostor koji je izometrično izomorfan nekom uređajno potpunom $\mathcal{C}(K)$. Tada postoji $I : X \to \mathcal{C}(K)$ koji je izometrički izomorfizam. Neka je Y Banachov prostora, E njegov zatvoren potprostor i $T : E \to X$ ograničen linearan operator.

Definirajmo operator $T_1 : E \to \mathcal{C}(K)$ kao $T_1 = I \circ T$. Za $y \in E$ imamo $\|T_1(y)\| = \|I(Ty)\| = \|T(y)\|$ pa vrijedi $\|T_1\| = \|T\|$.

$\mathcal{C}(K)$ je uređajno potpun pa iz Goodner-Nachbinova teorema (3.3.11) slijedi da izometrično injektivan. Sada mora postojati operator $\tilde{T}_1 : Y \to \mathcal{C}(K)$ koji proširuje T_1 te vrijedi $\|\tilde{T}_1\| = \|T_1\|$. Definirajmo operator $\tilde{T} : Y \to X$ kao $\tilde{T} = I^{-1} \circ \tilde{T}_1$. Za $y \in E$ imamo:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(y) &= \left(I^{-1} \circ \tilde{T}_1\right)(y) = I^{-1}\left(\tilde{T}_1(y)\right) = \\ &= I^{-1}(T_1 y) = \left(I^{-1} \circ T_1\right)(y) = \left(I^{-1} \circ I \circ T\right)(y) = \\ &= T(y). \end{aligned}$$

$\tilde{T}$ proširuje T. Za $y \in Y$ imamo $\|\tilde{T}(y)\| = \left\|I^{-1}\left(\tilde{T}_1(y)\right)\right\| = \|\tilde{T}_1(y)\|$ pa $\|\tilde{T}\| = \|T_1\| = \|T\|$. □

Teorem 3.4.2 (Goodner-Nachbin-Kelly)**.** *Banachov prostor X je izometrično injektivan ako i samo ako je izometrično izomorfan uređajno potpunom $\mathcal{C}(K)$ prostoru.*

Dokaz. Prethodna propozicija nam daje jedan smjer pa dokažimo drugi. Neka je X izometrično injektivan. Pronaći ćemo kompaktan Hausdorffov prostor K takav da je X izometrično izomorfan s uređajno potpunim $\mathcal{C}(K)$.

Krenimo od jedinične kugle u dualnom prostoru B_{X^*} sa slabom* topologijom i skupom njezinih ekstremnih točaka $\partial_e B_{X^*}$. Tvrdimo da postoji maksimalan otvoren (u B_{X^*}) podskup U od B_{X^*} takav da vrijedi $U \cap (-U) = \emptyset$. Neka je $\mathcal{F}$ skup svih takvih podskupova. $\mathcal{F}$ je neprazan jer je očito $\emptyset \in \mathcal{F}$. Neka je $\mathcal{C} = \{U_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ lanac u $\mathcal{F}$. Definirajmo:

$$V = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i.$$

Pretpostavimo da postoji $x \in V \cap (-V)$. To povlači da postoje $i, j \in X$ takvi da je $x \in U_i$ i $x \in -U_j$. To su elementi lanca pa vrijedi $U_i \subseteq U_j$ ili $U_j \subseteq U_i$. Ako je $U_i \subseteq U_j$ slijedi $x \in U_i \subseteq U_j$, a to je kontradikcija jer je $U_i \cap (-U_j) = \emptyset$. Ako je $U_j \subseteq U_i$, iz $x \in -U_j$ slijedi $-x \in U_j$ što povlači $-x \in U_i$ odnosno $x \in -U_i$ i opet dobivamo kontradikciju jer $U_i \cap (-U_i) = \emptyset$. Dakle, $V \cap (-V) = \emptyset$. Iz definicije V je $U_i \subseteq V$, i V je maksimalan element lanca $\mathcal{C}$. Iz Zornove leme slijedi da postoji maksimalan element u $\mathcal{F}$.

Neka je K slabi* zatvarač od U u B_{X^*}. Po Banach-Alaougluovom teoremu (1.2.12) B_{X^*} je slabo* kompaktan. B_{X^*} je Hausdorffov jer je slabo* topologija Hausdorffova pa je onda K Hausdorffov. Sada je iz 1.1.16 K je kao slabo* zatvoren podskup od slabo* kompaktnog B_{X^*} i sam slabo* kompaktan.

K je slabi* zatvarač od U u B_{X^*} pa je $K \cap \partial_e B_{X^*}$ zatvarač od $U \cap \partial_e B_{X^*} = U$ u $\partial_e B_{X^*}$. $-U$ je otvoren u $\partial_e B_{X^*}$ pa je $\partial_e B_{X^*} \setminus (-U)$ zatvoren u $\partial_e B_{X^*}$. Po definiciji zatvarača kao najmanjeg zatvorenog skupa koji sadrži U slijedi da je $K \cap \partial_e B_{X^*} \subseteq \partial_e B_{X^*} \setminus (-U)$ odnosno $K \cap \partial_e B_{X^*} \cap (-U) = \emptyset$, a budući da je $(-U) \subseteq \partial_e B_{X^*}$ imamo $K \cap (-U) = \emptyset$.

Sada tvrdimo da vrijedi $\partial_e B_{X^*} \subseteq K \cup (-K)$. Pretpostavimo da postoji $x \in \partial_e B_{X^*} \setminus (K \cup (-K))$. K je zatvoren u B_{X^*} pa je slabo* zatvoren (odnosno zatvoren u X^* sa slabom* topologijom, 1.1.2). Onda je i $-K$ zatvoren. Budući da je slaba* topologija Hausdorffova, onda ona zadovoljava i T_1 aksiom separacije pa je svaki jednočlan skup zatvoren (1.1.12). Posebno je $\{x\}$ slabo* zatvoren. Na kraju slijedi da je $K \cup (-K) \cup \{x\}$ slabo* zatvoren kao konačna unija slabo* zatvorenih skupova.

Sada slijedi da je $X^* \setminus (K \cup (-K) \cup \{x\})$ slabo* otvoren. Iz 1.3.9 imamo da je X^* sa slabom* topologijom je lokalno konveksan topološki vektorski prostor pa on po 1.3.10 ima apsolutno konveksnu bazu okoline. Element baze okoline oko x se može prikazati kao $x + V$ gdje je V element baze okoline oko 0. Posebno, to znači da postoji apsolutno konveksan otvoren skup V koji je okolina nule (element apsolutno konveksne baze okoline) takav da vrijedi da $x + V \subseteq X^* \setminus (K \cup (-K) \cup \{x\})$ odnosno:

$$U_1 = U \cup ((x + V) \cap \partial_e B_{X^*}) \subseteq \partial_e B_{X^*} \tag{3.3}$$

$x \in x + V$ pa $x \in U_1$ što povlači da je U strogi podskup od U_1. Stoga ako dokažemo da vrijedi $U_1 \cap (-U_1) = \emptyset$, dobit ćemo kontradikciju s maksimalnošću U u $\mathcal{F}$. Pretpostavimo da je postoji $y \in U_1 \cap (-U_1)$. Budući da je $U \cap -U = \emptyset$ onda trivijalno vrijedi da $y \notin U$ ili $y \notin -U$ odnosno $y \notin U$ ili $-y \notin U$. Jasno je da ako je $y \in U_1 \cap (-U_1)$, onda je i $-y \in U_1 \cap (-U_1)$. Stoga, ako vrijedi $-y \notin U$, možemo jednostavno y zamijeniti s $-y$ i dobiti bez smanjenja općenitosti $y \notin U$. Budući da je $y \in U_1$, onda iz definicije 3.3 vidimo da mora vrijediti $y \in x + V$ što povlači $y \notin K \cup (-K)$ pa posebno $y \notin -K$, a onda ne može biti ni u $-U \subseteq -K$. Iz $y \notin (-U)$ i $y \in (-U_1)$ slijedi $y \in -x - V$.

Iz $y \in x + V$ i $y \in -x - V$ slijedi da postoje $z_1, z_2 \in V$ takvi da vrijedi $y = x + z_1$ i $y = -x - z_1$ pa $x + z_1 = -x - z_1$ i dobivamo $x = \frac{1}{2}z_1 + \frac{1}{2}z_2$. V je konveksan skup pa onda slijedi da je $x \in V$ što je kontradikcija. Dakle, $U_1 \cap (-U_1) = \emptyset$ i dobili smo kontradikciju s maksimalnošću U čime je konačno dokazano:

$$\partial_e B_{X^*} \subseteq K \cup (-K) \subseteq B_{X^*}. \tag{3.4}$$

Po Krein-Millmanovom teoremu(1.3.17) B_{X^*} je slabo* zatvorena konveksna ljuska od $\partial_e B_{X^*}$ i $\partial_e B_{X^*}$ je neprazan, pa onda mora biti i slabo* zatvorena konveksna ljuska od $K \cup (-K)$. Naime, $K \cup (-K)$ je sadržan u B_{X^*} koji je slabo* zatvoren konveksan skup pa onda slabo* zatvorena konveksna ljuska od $K \cup (-K)$ mora biti sadržana u B_{X^*}. No slabo* zatvorena konveksna ljuska od $K \cup (-K)$ je slabo* zatvoren konveksan skup koji sadrži $\partial_e B_{X^*}$ pa B_{X^*} mora biti sadržan u njoj po definiciji (to je najmanji slabo* zatvoren konveksan skup koji sadrži $\partial_e B_{X^*}$). Stoga slabo* zatvorena konveksna ljuska od $K \cup (-K)$ mora biti B_{X^*}.

Promatrajmo kanonsko ulaganje (1.2.15) $J : X \to X^{**}$ koje svakome $x \in X$ pridružuje $\hat{x} : X^* \to \mathbb{R}$ definirano kao $\hat{x}(f) = f(x)$. Iz 1.2.14 slijedi da vrijedi sljedeće:

$$||x|| = \max_{f \in B_{X^*}} |f(x)|. \tag{3.5}$$

Fiksirajmo $x \in X$ i promatrajmo funkciju $g : X^* \to \mathbb{R}$ definiranu kao $g(f) = |\hat{x}(f)|$ za $f \in X^*$. Apsolutna vrijednost je neprekidna funkcija s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$, a $\hat{x} : X^* \to \mathbb{R}$ je slabo* neprekidna po definiciji slabo* topologije. Stoga je g kao kompozicija neprekidnih funkcija također slabo* neprekidna. Neka su $0 \leq t \leq 1$ i $f_1, f_2 \in X^*$, računamo:

$$\begin{gathered}g\left(tf_1 + (1-t)f_2\right) = \left|\hat{x}\left(tf_1 + (1-t)f_2\right)\right| = \\ |t\hat{x}(f_1) + (1-t)\hat{x}(f_2)| \leq t\,|\hat{x}(f_1)| + (1-t)\,|\hat{x}(f_2)| \leq \\ \leq tg(f_1) + (1-t)g(f_2).\end{gathered}$$

Dakle, g je konveksna i slabo* neprekidna funkcija, a izraz 3.5 je maksimum te funkcije na konveksnom slabo* neprekidnom skupu. Po teoremu 1.3.16 g postiže maksimum na ekstremnoj točki od B_{X^*}:

$$\|x\| = \max_{f \in B_{X^*}} |f(x)| = \max_{f \in \partial_e B_{X^*}} |f(x)|\,.$$

Onda iz izraza 3.4 vidimo:

$$\|x\| = \max_{f \in (K \cup (-K))} |f(x)|\,.$$

Ako je $f \in -K$, onda je $-f \in K$ te $|f(x)| = |-f(x)|$, pa možemo tražiti maksimum samo na K i dobiti:

$$\|x\| = \max_{f \in K} |f(x)| = \max_{f \in K} |\hat{x}(f)|\,. \tag{3.6}$$

$\hat{x} : X^* \to \mathbb{R}$ je slabo* neprekidna funkcija pa je onda i slabo* neprekidna ako promatramo njezinu restrikciju na K odnosno tada će biti element iz $\mathcal{C}\,(K)$. Na desnoj strani jednadžbe 3.6 upravo imamo normu od $\hat{x}$ u $\mathcal{C}\,(K)$. Dakle, $J : X \to \mathcal{C}\,(K)$ je izometrija. Iz 1.2.5 je onda inverzno preslikavanje sa slike $J^{-1} : J(X) \to X$ izometrija. Budući da je po pretpostavci $\mathcal{C}\,(K)$ izometrično injektivan, postoji $T : \mathcal{C}\,(K) \to X$ koji proširuje J^{-1} i čija je norma jednaka $\|T\| = \left\|J^{-1}\right\| = 1$.

Promatrajmo sada operator $T^* : X^* \to \mathcal{C}\,(K)^*$ adjungiran operatoru T (1.2.11). Po Rieszovom teoremu o reprezentaciji (2.1.2), $\mathcal{C}\,(K)^*$ je izometrično izomorfan (kao normirani prostor s operatorskom normom) s $\mathcal{M}(k)$ pa ih možemo identificirati i promatrati T^* kao $T^* : X^* \to \mathcal{M}(K)$. Djelovanje $\mu \in \mathcal{M}(K)$ na $f \in \mathcal{C}\,(K)$ je tada dano s:

$$\langle f, \mu \rangle = \int_K f\, d\mu\,.$$

Neka je $u \in U$ gdje je U maksimalan otvoren skup u $\partial_e B_{X^*}$ takav da je $U \cap (-U) = \emptyset$, njega smo definirali na početku dokaza. u je ekstremna točka zatvorene jedinične kugle pa iz 1.3.12 imamo $\|u\| = 1$, te također $\|T^*\| = \|T\| = 1$, pa za $T^*u = \mu \in \mathcal{M}(K)$ vrijedi $\|T^*u\| \leq \|T^*\|\,\|u\| = 1$ odnosno $\|\mu\| \leq 1$.

Neka je V neka otvorena okolina oko u u K. Podsjetimo se da na K gledamo relativnu topologiju dobivenu iz slabe* topologije, pa možemo reći da je V slabo* otvoren u K. Neka je sada $K_0 = K \setminus V$, on je po definiciji slabo* zatvoren u K. Neka je $x \in X$ te definirajmo $v \in X^*$ na sljedeći način:

$$v(x) = \int_V \hat{x}(f)\, d\mu(f) = \int_V f(x)\, d\mu(f)\,. \tag{3.7}$$

$\hat{x} : X^* \to \mathbb{R}$ je slabo* neprekidna funkcija pa je onda i μ-izmjeriva jer μ Borelova mjera odnosno mjera generirana svim slabo* otvorenim skupovima u K, pa je gornji integral dobro definiran jer tražimo mjeru na V koji je slabo* otvoren u K pa i izmjeriv.

Definirajmo $w \in X^*$ kao:

$$w(x) = \int_{K_0} \hat{x}(f)\, d\mu(f) = \int_{K_0} f(x)\, d\mu(f)\,. \tag{3.8}$$

Slično kao i gore vidimo da je gornji integral dobro definiran. Samo ovdje imamo integral po K_0 koji je slabo* zatvoren u K pa je izmjeriv.

Sada koristeći 1.4.11 računamo:

$$\begin{aligned} |v(x)| = \left| \int_V f(x)\, d\mu(f) \right| \le \int_V |f(x)|\, d\, |\mu(f)| \le \\ \le \int_V \sup_{f \in v} |f(x)|\, d\, |\mu(f)| = \sup_{f \in V} |f(x)| \int_V d\, |\mu(f)|\,. \end{aligned} \tag{3.9}$$

$V \subseteq K \subseteq B_{X^*}$ pa uz pomoć 1.2.14 imamo:

$$\sup_{f \in V} f(x) \le \sup_{f \in B_{X^*}} f(x) = \|x\|\,.$$

I kad to vratimo u 3.9 te dobijemo:

$$|v(x)| \le \|x\| \int_V d\, |\mu(f)| = \|x\| \cdot |\mu|\,(V).$$

Dakle, mora vrijediti da je $\|v\| \le |\mu|\,(V)$. Analogno vidimo i da je $\|w\| \le |\mu|\,(K_0)$. Zbrojimo sada $v(x)$ i $w(x)$ te uvrstimo njihove definicije 3.7 i 3.8:

$$\begin{aligned} v(x) + w(x) = \int_V \hat{x}(f)\, d\mu(f) + \int_{K_0} \hat{x}(f)\, d\mu(f) = \\ = \int_K \hat{x}(f)\, d\mu(f) = \langle \hat{x}, \mu \rangle = \langle \hat{x}, T^* u \rangle = \langle T\hat{x}, u \rangle = \\ = \langle x, u \rangle = u(x). \end{aligned}$$

Pri prijelazu iz prvog u drugi red smo koristili činjenicu da su K_0 i V disjunktni skupovi takvi da $K = K_0 \cup V$. Zatim smo koristili djelovanja mjere $\mu \in \mathcal{M}(K)$ na $\hat{x} \in \mathcal{C}(K)$ kao elementa iz $\mathcal{C}(K)^*$ po identifikaciji iz teorema 2.1.2. Nakon toga smo iskoristili definiciju adjungiranog operatora (1.2.11) te činjenicu da T na $\mathcal{C}(K)$ djeluje kao i J^{-1} koji je inverz kanonskog ulaganja. $x \in X$ je bio proizvoljan pa imamo:

$$v + w = u. \tag{3.10}$$

Sada računajmo:

$$\begin{aligned} 1 = \|u\| = \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \leq \\ \leq |\mu|(V) + |\mu|(K_0) = |\mu|(K) = \|\mu\| \leq \|u\| = 1. \end{aligned}$$

Možemo zaključiti:

$$\|v\| + \|w\| = 1. \tag{3.11}$$

Ako je $\|v\| = 0$, onda iz 3.10 imamo $w = u = \|w\| u$ i $v = 0 = \|v\| u$. Analogno se zaključi da isto vrijedi i kad $\|w\| = 0$.

Pretpostavimo sada da su $\|v\|$ i $\|w\|$ različiti od 0. Jednadžbu 3.10 možemo zapisati kao:

$$\|v\| \cdot \left(\frac{1}{\|v\|} v\right) + \|w\| \cdot \left(\frac{1}{\|w\|} w\right) = u. \tag{3.12}$$

v i w su iz $K \subseteq B_{X^*}$ čija je u ekstremna točka i onda zbog 3.11 mora vrijediti:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\|v\|} v, \\ u &= \frac{1}{\|w\|} w. \end{aligned}$$

Ako to ne bi vrijedilo, onda bi jednadžba 3.12 bila u suprotnosti s definicijom ekstremne točke 1.3.11. Dalje imamo:

$$\begin{aligned} v &= \|v\| u, \\ w &= \|w\| u. \end{aligned}$$

Pretpostavimo sada da vrijedi $|\mu|(K_0) = \|w\| > 0$. Za $x \in X$ imamo:

$$u(x) = \frac{1}{\|w\|} w(x) = \frac{1}{\|w\|} \int_{K_0} f(x)\, d\mu(f).$$

Dalje računamo:

$$|u(x)| = \frac{1}{\|w\|} \left| \int_{K_0} f(x)\, d\mu(f) \right| \leq \frac{1}{\|w\|} \int_{K_0} |f(x)|\, d\,|\mu|(f).$$

K_0 je po definiciji slabo* zatvoren u K, a kao podskup slabo* kompaktnog skupa je i sam slabo* kompaktan pa slabo* neprekidna funkcija $f \mapsto |\hat{x}(f)|$ na njemu postiže maksimum $M = \max_{f \in K_0} |f(x)|$. Sada imamo:

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \frac{1}{\|w\|} \int_{K_0} |f(x)| \, d|\mu|(f) \leq \frac{1}{\|w\|} M \int_{K_0} d|\mu|(f) \leq \\ &\leq \frac{1}{\|w\|} M |\mu| (K_0) = \frac{1}{\|w\|} M \cdot \|w\| = M. \end{aligned}$$

Dakle, za svaki $x \in X$ vrijedi:

$$|u(x)| \leq \max_{f \in K_0} |f(x)| . \tag{3.13}$$

Dokažimo sada da u mora biti u slabo* zatvorenoj konveksnoj ljusci C od $K_0 \cup (-K_0)$. Prvo provjerimo da je C balansirana. Neka je $f \in K_0$, tada je:

$$0 = \frac{1}{2} \cdot (-f) + \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot f.$$

pa $0 \in C$. Neka je $\alpha \in [0,1]$ i $x \in C$. Imamo $\alpha x = \alpha \cdot x + (1-\alpha) \cdot 0$, pa zbog konveksnosti $\alpha x \in C$. Odnosno $\alpha C \subseteq C$, i time smo dokazali da je skup balansiran. Pretpostavimo da $u \notin C$ i primijenimo teorem 1.3.15 na $Y = X^*$ sa slabo* topologijom, dobivamo da postoji $f \in Y^*$ takav da vrijedi:

$$\begin{gathered} |f(y)| < 1, \ \forall y \in C, \\ f(u) \geq 1. \end{gathered}$$

Y^* je skup svih linearnih funkcionala $h : Y \to \mathbb{R}$ koji su neprekidni s obzirom na topologiju od Y, a to je slaba* topologija na X^*. X^{**} je dual od X^*, tj. skup svih linearnih funkcionala $h : X^* \to \mathbb{R}$ koji su neprekidni s obzirom na topologiju operatorske norme na X^*. Slaba* topologija je slabija od topologije operatorske norme, pa je onda i h neprekidan obzirom na operatorsku normu, i vrijedi $h \in X^{**}$. Imamo da je $f \in X^{**}$.

X je slabo* gust u X^{**} (slaba* topologija na X^{**}, generirana sa svim X^*). Sada postoji neka mreža $(x_i)_{i \in \mathcal{I}}$ u X (kao podskupu od X^{**}) takva da x_i slabo* konvergira k f. Ta se konvergencija poklapa s konvergencijom po točkama iz X^*, pa imamo da $|\hat{x}_i(u)|$ konvergira k $|f(u)| > 1$ tj. $|u(x_i)|$ konvergira k $|f(u)| > 1$. Onda mora postojati neki $j \in \mathcal{I}$ takav da za sve $i \geq j$ vrijedi $|u(x_i)| > 1$ odnosno $|u(x_i)| \geq 1 + \epsilon$.

S druge strane, jer je K_0 kompaktan onda $\max_{y \in K_0} |y(x_i)|$ konvergira k $\max_{y \in K_0} |f(y)| \leq 1$. I sad postoji neki $k \in \mathcal{I}$ takav da za sve $i \geq k$ vrijedi $\max_{y \in K_0} |y(x_i)| < 1 + \epsilon$. Izaberemo neki i takav da je $i \geq j$ i $i \geq k$, i za x_i smo dobili kontradikciju da s jednadžbom 3.13, tj. postoji $x_i \in X$ takav da je:

$$|u(x_i)| > \max_{y \in K_0} |y(x_i)| .$$

Dakle, u je u C koji je sadržan u B_{X^*} čija je ekstremna točka pa onda mora biti i ekstremna točka od C. C je slabo* zatvorena konveksna ljuska od $K_0 \cup (-K_0)$ pa se onda po Millmanovom teoremu (1.3.19) u mora nalaziti u $K_0 \cup (-K_0)$. u smo izabrali iz V, a K_0 je njegov komplement pa $u \notin K_0$ i mora biti $u \in (-K_0)$. Dakle, $u \in V \subseteq K \subseteq U$ i $u \in -K_0 \subseteq -K \subseteq (-U)$ pa smo dobili da je $U \cap (-U)$ neprazan što kontradikcija s njegovom konstrukcijom s početka dokaza. Dakle, mora vrijediti $|\mu|(K_0) = \|w\| = 0$.

Sad iz $v + w = u$ slijedi da je $|\mu|(V) = \|v\| = \|u\| = 1$. V je bio proizvoljan otvoren skup u K pa sad iz regularnosti μ mora slijediti $|\mu| = \delta_u$ odnosno $\mu = \pm\delta_u$ pa $\mu = \delta_u$. Dakle, za proizvoljan $u \in U$ dobili smo $T^*(u) = \delta_u$. K je slabi* zatvarač od U. T^* je slabo* neprekidan (s konvergencijom po točkama iz X^* koja karakterizira slabu* topologiju na X^*), pa mora vrijediti da $T^*(x) = \delta_x$ za sve $x \in X$. Neka je sada $f \in \mathcal{C}(K)$:

$$\langle Tf, x\rangle = \langle f, T^*(x)\rangle = \langle f, \delta_x\rangle = \int_K f\, d\delta_x = f(x) = \hat{x}(f).$$

Za $f \in \mathcal{C}(K)$, Tf je u X. Pogledajmo kako na njega djeluje kanonsko ulaganje J koje smo ranije definirali. Vrijedi $J(Tf) = \hat{Tf}$ pa za $x \in K$ vrijedi $\widehat{Tf}(x) = \langle Tf, x\rangle = f(x)$. Dakle, za svaki $f \in \mathcal{C}(K)$ postoji $Tf \in X$ takav da je $J(Tf) = f$. Stoga je J surjektivno preslikavanje i onda je i izometrički izomorfizam između X i $\mathcal{C}(K)$.

Sada slijedi da je $\mathcal{C}(K)$ izometrično injektivan i po Goodner-Nachbinovom teoremu (3.3.11) on mora biti uređajno potpun. □

Poglavlje 4

Posljedice Goodner-Nachbin-Kellyjevog teorema

U prošlom poglavlju smo dokazali Goodner-Nachbin-Kellyjev teorem koji nam je dao karakterizaciju svih izometrično injektivnih prostora. Za početak, iskoristit ćemo ga da bismo pronašli više primjera izometrično injektivnih prostora koji nisu ℓ_∞. Uz njegovu pomoć ćemo također pokazati da su prostori ℓ_∞ i $L_\infty[0,1]$ izomorfni. Kao i u prošlom poglavlju, K je kompaktan Hausdorffov topološki prostor.

4.1 Primjeri izometrično injektivnih prostora

Prvi netrivijalni primjer će nam biti $\mathcal{C}(K)$ prostori koji su dualni prostori nekog Banachovog prostora.

Teorem 4.1.1. *Ako je $\mathcal{C}(K)$ izometrično izomorfan nekom dualnom prostoru Banachova prostora, onda je $\mathcal{C}(K)$ izometrično injektivan.*

Dokaz. Definirajmo pozitivni konus u $\mathcal{C}(K)$:

$$P = \{f \in \mathcal{C}(K) \mid f \geq 0\}.$$

Neka su $f, g \in \mathcal{C}(K)$ te $0 < t < 1$, očito iz $f, g \geq 0$ slijedi $tf + (1-t)g \geq 0$ pa je P konveksan. Po pretpostavci teorema $\mathcal{C}(K)$ je dual nekog Banachova prostora X, pa možemo primijeniti Banach-Dieudonnéov teorem 1.3.18 da dokažemo da je P slabo* zatvoren. Po njemu je potrebno dokazati da je $P \cap \lambda B_{\mathcal{C}}(K)$ slabo* zatvoren za svaki $\lambda > 0$. Neka je

$f \in P \cap \lambda B_{\mathcal{C}}(K)$, vrijedi $\|f\| \leq \lambda$ i $f \geq 0$ što je ekvivalentno:

$$\begin{gathered}
0 \leq f \leq \lambda, \\
0 \leq f \leq \lambda \cdot 1, \\
-\frac{1}{2}\lambda \cdot 1 \leq f - \frac{1}{2}\lambda \cdot 1 \leq \frac{1}{2}\lambda \cdot 1, \\
\left\| f - \frac{1}{2}\lambda \cdot 1 \right\| \leq \frac{1}{2}\lambda.
\end{gathered}$$

To su sve ekvivalencije, pa vrijedi:

$$P \cap \lambda B_{\mathcal{C}}(K) = \left\{ f \in \mathcal{C}(K) \mid \left\| f - \frac{1}{2}\lambda \cdot 1 \right\| \leq \frac{1}{2}\lambda \right\}.$$

To je u normi zatvorena kugla oko točke $\frac{1}{2}\lambda \cdot 1$ radijusa $\frac{1}{2}\lambda$, a nju možemo dobiti množenjem skalarom i translacijom B_{X^*} koji su homeomorfizmi. Iz Banach-Alaougluova teorema B_{X^*} je slabo* kompaktna pa je onda i slabo* zatvorena. Dakle, P je slabo* zatvoren konveksan skup. Preslikavanje $f \rightarrow -f$ je homeomorfizam pa je slijedi da je $\{f \in \mathcal{C}(K) \mid f \leq 0\}$ također slabo zatvoren.

Dokažimo sada da je $\mathcal{C}(K)$ uređajno potpun. Neka su A i B neprazni podskupovi od $\mathcal{C}(K)$ takvi da za sve $f \in A$ i $g \in B$ vrijedi $f \leq g$. Za sve $f \in A$ i $g \in B$ definirajmo:

$$C_{f,g} = \{h \in \mathcal{C}(K) \mid f \leq h \leq g\}.$$

Očito je $f, g \in C_{f,g}$ pa je on neprazan. Translacija $\tau_f(h) = f + h$ i množenje skalarom $\theta(f) = -f$ su homeomorfizmi pa je $C_{f,g} = \tau_f(P) \cap \tau_g(\theta(P))$ slabo* zatvoren kao presjek dva slabo* zatvorena skupa. Također, svaki $C_{f,g}$ je ograničen u normi. Budući da je $\mathcal{C}(K)$ dual Banachovog prostora, sada slijedi (1.2.17) da je svaki $C_{f,g}$ slabo* kompaktan.

Neka su $f_1, f_2 \dots f_n \in A$ i $g_1, g_2 \dots g_n \in B$. $h = \max(f_1, f_2 \dots f_n)$ je iz $\mathcal{C}(K)$ te je $h \geq f_i,\ i = 1 \dots n$. Pretpostavimo da za neki $i \in \{1, 2 \dots n\}$ ne vrijedi $h \leq g_i$. Tada postoji $x \in K$ takav da je $h(x) > g_i(x)$, pa onda postoji i $j \in \{1, 2 \dots n\}$ takav da je $f_j(x) = h(x)$ te $f_j(x) > g_i(x)$. No mora biti $f_j \leq g_i$ jer $f_j \in A$ i $g_i \in B$. Dakle, $h \leq g_i,\ i = 1 \dots n$ pa je $h \in \bigcap_{i=1}^{n} C_{f_i, g_i}$. Stoga, slabo* kompaktna familija

$$\left\{ C_{f,g} \mid f \in A,\ g \in B \right\}$$

ima svojstvo konačnog presjeka. Iz 1.1.17 slijedi da je presjek te familije neprazan, odnosno postoji $k \in \bigcap_{f \in A, g \in B} C_{f,g}$, i analogno kao maloprije vidimo da za sve $f \in A$ i $g \in B$ mora vrijediti $f \leq k \leq g$.

A i B su bili proizvoljni i dokazali smo da je $\mathcal{C}(K)$ uređajno potpun pa iz Goodner-Nachbinova teorema 3.3.11 slijedi da je $\mathcal{C}(K)$ izometrično injektivan. □

Lako slijedi sljedeći korolar:

Korolar 4.1.2. $L_\infty[0,1]$ *je izometrično injektivan.*

Dokaz. Po korolaru 2.2.2 $L_\infty[0,1]$ je izometrično izomorfan nekom $\mathcal{C}(K)$. Iz korolara 2.2.5 vidimo da je $L_\infty[0,1]$ izometrično izomorfan s dualnim prostorom $(L_1[0,1])^*$. Prethodni teorem nam sad jamči da je $L_\infty[0,1]$ izometrično injektivan. □

4.2 Izomorfnost ℓ_∞ i $L_\infty[0,1]$ prostora

U ovom odjeljku ćemo prezentirati jednu interesantnu posljedicu dobivenih rezultata i Pełczynskijeve dekompozicijske tehnike, a to je da su Banachovi prostori ℓ_∞ i $L_\infty[0,1]$ izomorfni. Krenimo od jedne leme:

Lema 4.2.1. *Neka su X i Y Banachovi prostori te neka je X injektivan. Ako postoji linearno izometrično ulaganje prostora X u Y, onda je X komplementiran u Y.*

Dokaz. Neka je $T : X \to Y$ linearno izometrično ulaganje. To je izometrički izomorfizam na svoju sliku pa je $\operatorname{Im} T$ zatvoren u Y i možemo ga identificirati s X. $T^{-1} : \operatorname{Im} T \to X$ je izometrički izomorfizam. Iz injektivnosti od X (2.4.1) slijedi da postoji $J : Y \to X$ ograničeno proširenje operatora T^{-1} koji ustvari ulaganje $\operatorname{Im} T$ u X odnosno identiteta s X u X ako identificiramo $\operatorname{Im} T$ i X. J je onda proširenje te identitete. Iz propozicije 2.3.2 sada slijedi da je $\operatorname{Im} T$ komplementiran u Y odnosno X je izometrično izomorfan prostoru koji je komplementiran u Y. □

Teorem 4.2.2. ℓ_∞ *i* $L_\infty[0,1]$ *su izomorfni.*

Dokaz. Neka je $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ particija skupa $[0,1]$ kojoj su svi elementi pozitivne mjere. Konstruirat ćemo jednu takvu particiju kao:

$$A_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right) \cup \{1\},$$
$$A_n = \left[a_n, a_n + \frac{1}{2^n}\right), \text{ za } n \geq 2,$$
$$a_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}}, \text{ za } n \geq 2.$$

Lako se vidi da je unija tih skupova $[0,1]$ i da su međusobno disjunktni, mjera svakog je $\lambda(A_n) = \frac{1}{2^n} > 0$. Ako je $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_\infty$, definirajmo preslikavanje $T : \ell_\infty \to L_\infty[0,1]$ kao:

$$T\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \chi_{A_i}.$$

Vrijedi:

$$\begin{aligned}\|T(x)\| &= \inf\{C > 0 \mid \lambda(\{|T(x)| > C\}) = 0\} = \\ &= \sup\{|x_n| \mid n \in \mathbb{N}\} = \|x\|\,.\end{aligned}$$

T je izometrija pa je to automatski izometrično ulaganje u $L_\infty[0,1]$. Iz teorema 2.4.2 znamo da je ℓ_∞ izometrično injektivan pa posebno i injektivan pa uz primjenu leme 4.2.1 zaključujemo da je ℓ_∞ komplementiran u $L_\infty[0,1]$.

$L_1[0,1]$ je separabilan pa možemo odabrati gust niz $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u njegovoj jediničnoj kugli. Ako je $f \in L_\infty[0,1]$ onda definirajmo $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kao:

$$x_n = \int_{[0,1]} \varphi_n(t) f(t)\, dt\,.$$

Sada računamo:

$$|x_n| = \left|\int_{[0,1]} \varphi_n(t) f(t)\, dt\right| \leq \|\varphi_n\|_1\, \|f\|_\infty\,.$$

φ_n je gust u jediničnoj kugli pa mora vrijediti:

$$\|x\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\|_1\, \|f\|_\infty = \|f\|_\infty \cdot \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\|_1 = \|f\|_\infty\,.$$

Preslikavanje f u x je izometrija pa je onda automatski i izometrično ulaganje $L_\infty[0,1]$ u ℓ_∞. Iz 4.1.2 imamo da je $L_\infty[0,1]$ injektivan i uz primjenu leme 4.2.1 je $L_\infty[0,1]$ je komplementiran u ℓ_∞.

Slično kao u lemi 2.3.3 vidimo da $\ell_\infty \approx \ell_\infty \oplus \ell_\infty$. Također iz lema 2.2.7 i 2.2 slijedi:

$$L_\infty[0,1] \approx L_\infty[0,1/2] \oplus L_\infty[0,1/2] \approx L_\infty[0,1] \oplus L_\infty[0,1].$$

Sada možemo primijeniti dekompozicijsku tehniku Pełczyńskog (2.3.6 pod (i)) i zaključiti da su $L_\infty[0,1]$ i ℓ_∞ izomorfni. $\square$

Bibliografija

[1] Fernando Albiac i Nigel Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, sv. 233, siječanj 2016, ISBN 978-3-319-31555-3.

[2] Gerald B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications, 2nd Edition*, John Wiley & Sons, Inc, travanj 1999, ISBN 978-0-471-31716-6.

[3] A. M. Gleason, *Projective topological spaces*, Illinois Journal of Mathematics **2** (1958), br. 4A, 482 – 489, https://doi.org/10.1215/ijm/1255454110.

[4] A.L. Peressini, *Ordered Topological Vector Spaces*, Harper's series in modern mathematics, Harper & Row, 1967, https://books.google.hr/books?id=FBqoAAAAIAAJ.

[5] A. Pełczyński, *Projections in certain Banach spaces*, Studia Mathematica **19** (1960), br. 2, 209–228, http://eudml.org/doc/216957.

[6] W. Rudin, *Functional Analysis*, International series in pure and applied mathematics, McGraw-Hill, 1991, ISBN 9780070542365, https://books.google.hr/books?id=Sh_vAAAAMAAJ.

[7] R.L. Schilling, *Measures, Integrals and Martingales*, Measures, Integrals and Martingales, Cambridge University Press, 2017, ISBN 9781316620243, https://books.google.hr/books?id=sdAoDwAAQBAJ.

Sažetak

U ovome radu proučavamo izometrično injektivne Banachove prostore, koji su definirani kao Banachovi prostori X nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ takvi da za sve Banachove prostore Y, zatvorene potprostore $E \subseteq Y$ i ograničene operatore $T : E \to X$, postoji ograničeno linearno proširenje $\tilde{T} : Y \to X$ od T takvo da je $\left\|\tilde{T}\right\| = \|T\|$. Prema Hahn-Banachovom teoremu osnovni primjer takvog prostora je samo polje $\mathbb{F}$. Dokazat ćemo Goodner-Nachbin-Kellyjev teorem koji daje njihovu karakterizaciju: X je izometrično injektivan ako i samo ako je izometrično izomorfan prostoru $\mathcal{C}(K)$ neprekidnih funkcija $f : K \to \mathbb{F}$, pri čemu je K ekstremno nepovezan kompaktan Hausdorffov prostor. Navest ćemo neke netrivijalne primjere izometrično injektivnih Banachovih prostora. Kao interesantnu posljedicu dobivenih rezultata i Pełczynskijevove dekompozicijske tehnike, dokazat ćemo da su prostori ℓ_∞ i $L_\infty[0, 1]$ međusobno izomorfni.

Summary

In this thesis, we study isometrically injective Banach spaces, which are defined as Banach spaces X over the field $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ such that for all Banach spaces Y, closed subspaces $E \subseteq Y$, and bounded linear maps $T : E \to X$, there exists a bounded linear extension $\tilde{T} : Y \to X$ of T such that $\left\|\tilde{T}\right\| = \|T\|$. By the Hahn-Banach theorem, the basic example of such a space is the underlying field $\mathbb{F}$. We will prove the Goodner-Nachbin-Kelly theorem, which provides their characterization: X is isometrically injective if and only if it is isometrically isomorphic to a space $\mathcal{C}(K)$ of continuous functions $f : K \to \mathbb{F}$, where K is an extremally disconnected compact Hausdorff space. We will also provide some non-trivial examples of isometrically injective Banach spaces. As an interesting consequence of the obtained results and Pełczynski's decomposition technique, we will demonstrate that the spaces ℓ_∞ and $L_\infty[0, 1]$ are mutually isomorphic.

Životopis

Rođen sam 30. studenog 1995. u Mostaru. Osnovnu školu sam pohađao u Čapljini u BiH, a nakon toga prirodoslovno-matematički smjer gimnazije u Metkoviću. 2014. sam upisao preddiplomski studij Računarstva na Fakultetu elektrotehnike i računarstva u Zagrebu. Sljedeće godine sam upisao preddiplomski studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. 2017. sam završio preddiplomski studij Računarstva i iste godine upisao diplomski studij Računarstva, smjer Računarska znanost na istom fakultetu. 2019. sam završio diplomski studij Računarstva i preddiplomski studij Matematike te sam iste godine upisao diplomski studij Teorijske matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu.