# Ramseyjeva teorija na cijelim brojevima

**Flanjak, Ana**

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
MATEMATIČKI ODSJEK

Ana Flanjak

# RAMSEYJEVA TEORIJA NA CIJELIM BROJEVIMA

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Sonja Žunar

Zagreb, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

*Veliko hvala obitelji za neizmjernu podršku tijekom studija. Zahvaljujem mentorici doc. dr. sc. Sonji Žunar na strpljenju, trudu i pomoći tijekom pisanja ovog rada, te prijateljima na međusobnoj motivaciji i nezaboravnim uspomenama stečenim ovih godina.*

# Sadržaj

# Uvod

Teorija grafova je relativno mlada grana matematike, koja se počela ubrzano razvijati posljednjih desetljeća. Glavni razlog razvoja i istraživanja je primjenjivost koja se očituje u mogućnostima prevođenja različitih konkretnih problema u odgovarajuću problematiku na grafu.

U ovom diplomskom radu osvrnut ćemo se na jednu od mnogih teorija koje se bave grafovima i njihovim svojstvima. Kao što naslov sugerira, razmotrit ćemo Ramseyjevu teoriju. Ova teorija se, u jednom od svojih osnovnih oblika bavi pronalaženjem minimalnog reda $R$ potpunog grafa u kojem, s obzirom na proizvoljno bojanje bridova dvjema bojama, sigurno možemo pronaći barem jedan potpun podgraf unaprijed određenog reda $k$ čiji su svi bridovi iste boje. Spomenuti minimalni red $R$ zovemo Ramseyjevim brojem $R(k, k)$. Ramseyjevu teoriju je oko 1930. godine počeo razvijati Frank Plumpton Ramsey, po kojem je teorija i dobila ime.

Ramseyjeva teorija određuje Ramseyjeve brojeve i njihove analogone u raznim situacijama, no u ovom diplomskom radu ograničit ćemo se na dio Ramseyjeve teorije koja se bavi problemima vezanim uz skup cijelih brojeva.

Ovaj je diplomski rad sastavljen na sljedeći način. U prvom poglavlju navodimo neke osnovne rezultate iz algebre i teorije grafova koje ćemo koristiti u glavnom dijelu rada. U drugom poglavlju dokazujemo jedan od fundamentalnih teorema Ramseyjeve teorije, poznat kao Ramseyjev teorem za dvije boje.. U trećem poglavlju osvrnut ćemo se na rane teoreme Ramseyjeve teorije: van der Waerdenov teorem i Schurov teorem. U četvrtom poglavlju usredotočujemo se na dio Ramseyeve teorije koji proučava Ramseyjeve brojeve. Raspravljamo o tome što su Ramseyevi brojevi, navodimo njihova svojstva te pokazujemo neke primjere određivanja tih brojeva. U petom poglavlju fokus je na relevantnosti Ramseyjevih brojeva u scenarijima iz stvarnog života. U šestom poglavlju objašnjavamo jedan algoritam za računanje Ramseyjevih brojeva.

# Poglavlje 1

# Osnovni pojmovi

Ovo će uvodno poglavlje obuhvatiti osnovne pojmove koji su ključni za razumijevanje teme koju obrađujemo, te ćemo ih definirati na način koji će biti relevantan za našu analizu. Važno je naglasiti da ćemo u ovom poglavlju uvedenu terminologiju koristiti tijekom cijelog rada kako bismo osigurali preciznost i jasnoću u izražavanju.

## 1.1 Ponavljanje osnovnih pojmova i rezultata iz algebre

U ovom poglavlju uvodimo osnovne definicije i rezultate iz algebre [5] koji će nam biti od koristi u daljnjem radu. Iduću definiciju uvodimo kako bismo postigli lakše razumijevanje ostalih pojmova.

**Definicija 1.1.1.** *Neka je $G$ neprazan skup s binarnom operacijom $\cdot : G \times G \to G$. Skup $G$ zajedno s operacijom $\cdot$ naziva se **grupa** ako vrijede sljedeći uvjeti:*

*(i) Za sve $a, b, c \in G$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (asocijativnost)*

*(ii) Postoji $e \in G$ tako da za sve $a \in G$ vrijedi, $e \cdot a = a \cdot e = a$ (postojanje neutralnog elementa)*

*(iii) Za svaki $a \in G$, postoji $a^{-1} \in G$ tako da je $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$ (postojanje inverznog elementa).*

*Ako dodatno za sve $a, b \in G$ vrijedi $a \cdot b = b \cdot a$, kažemo da je $G$ komutativna grupa.*

**Definicija 1.1.2.** *Neka je $R$ neprazan skup s dvjema binarnim operacijama $+ : R \times R \to R$ i $\cdot : R \times R \to R$. Skup $R$ zajedno s operacijama $+$ i $\cdot$ naziva se **prsten** ako vrijede sljedeći uvjeti:*

*(i) $(R, +)$ je komutativna grupa s neutralom $0 = 0_R$,*

*(ii)* $(R, \cdot)$ *je polugrupa, tj. množenje je asocijativno,*

*(iii)* *Vrijedi distributivnost množenja prema zbrajanju, tj.*

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \text{ za sve } x, y, z \in R,$$
$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z, \text{ za sve } x, y, z \in R.$$

*Ako dodatno postoji element* $1_R \in R$ *takav da je* $x \cdot 1_R = 1_R \cdot x = x$ *za sve* $x \in R$*, kažemo da je R* ***prsten s jedinicom****.*

**Definicija 1.1.3.** *Element* $\omega \in R$*, gdje je R prsten s jedinicom, je* ***invertibilan****, ako postoji* $\omega' \in R$ *takav da*

$$\omega \cdot \omega' = \omega' \cdot \omega = 1.$$

**Definicija 1.1.4.** *Prsten R s jedinicom je* ***tijelo****, ako je svaki nenulelement u R invertibilan, tj. ukoliko je*

$$R^\times = R \setminus \{0\},$$

*gdje je* $R^\times$ *grupa invertibilnih elemenata u prstenu R. Komutativno tijelo naziva se* ***polje****.*

Nakon što smo naveli gornjih nekoliko definicija, uvodimo primjer prstena koji ćemo koristiti u dokazima nekih teorema u daljnjem radu.

**Definicija 1.1.5.** *Neka je* $n \in \mathbb{N}$*. Promotrimo potpun sustav ostataka* $x_1, \ldots, x_n$ *modulo n. Na skupu klasa ostataka* $[x_1], \ldots, [x_n]$ *definiramo sljedeće operacije:*

1. $[x_i] + [x_j] = [x_i + x_j]$
2. $[x_i] \cdot [x_j] = [x_i \cdot x_j]$.

**Teorem 1.1.6.** *Za dani pozitivan cijeli broj* $n > 0$*, skup klasa ostataka modulo n formira komutativni prsten s jedinicom s operacijama iz prethodne definicije. Taj se prsten zove* ***prsten cijelih brojeva modulo n*** *i označava sa* $\mathbb{Z}_n$*.*

**Teorem 1.1.7.** *Prsten* $\mathbb{Z}_n$ *je polje ako i samo ako je n prost broj.*

*Dokaz.* Budući da znamo da je polje integralna domena, $\mathbb{Z}_n$ ne može biti polje osim ako je $n$ prost broj. Preostaje pokazati da, ako je $n$ prost broj, onda je $\mathbb{Z}_n$ polje. Pretpostavimo da je $n$ prost broj. $\mathbb{Z}_n$ je očito komutativan prsten s jedinicom, a, da bismo pokazali da je on polje, moramo pokazati da svaki nenulelement u $\mathbb{Z}_n$ ima multiplikativni inverz.

Pretpostavimo da je $[a] \in \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$. Tada u su $a$ i $n$ relativno prosti cijeli brojevi pa postoje $x, y \in \mathbb{Z}$ tako da je $ax + ny = 1$. U smislu kongruencije imamo

$$ax \equiv 1 \pmod{n},$$

ili u $\mathbb{Z}_n$

$$[a] \cdot [x] = [1].$$

Zbog toga $[a]$ ima inverz u $\mathbb{Z}_n$ te zaključujemo da je $\mathbb{Z}_n$ polje. □

## 1.2 Osnovni pojmovi u teoriji grafova

Ramseyjeva teorija, bar u svom osnovnom obliku, bavi se grafovima i njihovim svojstvima. Dakle, da bismo razumjeli i dokazali rezultate ove teorije, najprije moramo ponoviti neke osnovne koncepte i rezultate teorije grafova [4].

**Definicija 1.2.1.** ***Graf*** *je uređen par $G = (V, E)$, pri čemu je $V$ skup vrhova, a $E$ skup bridova. Skup bridova $E$ je pritom podskup skupa svih dvočlanih podskupova od $V$.*

**Definicija 1.2.2.** *Graf $G' = (V', E')$ je* ***podgraf*** *grafa $G = (V, E)$ ako vrijedi $V' \subseteq V$ i E' $\subseteq E$.*

**Definicija 1.2.3.** *Vrhove $u, v$ grafa $G$ nazivamo* ***susjednima*** *ili incidentnim ako postoji $e \in E$ takav da je $e = \{u, v\}$, tj. ako su ta dva vrha povezana bridom.*

**Definicija 1.2.4.** *Kažemo da su vrh $v$ i brid $e$ grafa $G = (V, E)$* ***incidentni*** *ako je $e = \{u, v\}$ za neki $u \in V$. U tom slučaju kažemo i da su vrh $v$ i brid $e$ incidentni u vrhu $u$.*

**Definicija 1.2.5.** *Bridove nazivamo* ***incidentnima*** *ako imaju zajednički vrh.*

**Definicija 1.2.6.** ***Stupnjem vrha*** *$v \in V$ grafa $G = (V, E)$ zovemo broj bridova koji su incidentni s vrhom $v$ i označavamo ga sa $d(v)$.*

**Lema 1.2.7.** *(Lema o rukovanju) Neka je $G = (V, E)$ graf. Tada je zbroj svih stupnjeva vrhova grafa $G$ jednak dvostrukom broju bridova. Vrijedi*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|.$$

**Definicija 1.2.8.** ***Potpuni graf*** *s $n$ vrhova (u oznaci $K_n$) je graf na $n$ vrhova sa svojstvom da je svaki par vrhova tog grafa međusobno povezan bridom.*

Potpuni grafovi su posebna vrsta grafova koji se koriste u nekim dijelovima Ramseyjeve teorije, točnije u raspravama o Ramseyjevu teoremu i Ramseyjevim brojevima, o čemu ćemo kasnije detaljnije raspravljati. Potpuni grafovi imaju poznata svojstva koja su korisna za analizu navedene problematike.

Najviše će nam biti od interesa hoćemo li proizvoljnim bojanjem bridova potpunog grafa dvjema bojama nužno dobiti podgraf sa željenim brojem vrhova koji ima sve bridove iste boje. U tu svrhu definiramo sljedećih nekoliko pojmova.

**Definicija 1.2.9.** *Neka je $C$ neprazan, konačan skup boja $\{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ i $E(G)$ skup bridova grafa $G$.* ***Bojanje bridova*** *grafa $G$ je funkcija $\chi : E(G) \to C$ koja dodjeljuje svakom bridu iz $E(G)$ boju iz $C$.*

Intuitivno, bojanje bridova $\chi : E(G) \to C$ svaki brid $e$ grafa $G$ boji bojom $\chi(e)$. Ako je pritom za bojanje bridova korišteno točno $k$ različitih boja, kažemo da je graf $G$ zajedno s bojanjem $\chi$ **$k$-obojeni graf**.

**Definicija 1.2.10.** *Neka je $G = (V, E)$ graf. Bojanje $\chi : E \to C$ je* ***monokromatsko*** *ako je $\chi$ konstantna funkcija. U tom slučaju uređen par $(G, \chi)$ zovemo* ***monokromatskim grafom***.

# Poglavlje 2

# Ramseyjev teorem

U ovom poglavlju upoznat ćemo se s fundamentalnim teoremima Ramseyjeve teorije. Također, upoznat ćemo se s osnovnom terminologijom s kojom ćemo se koristiti [3].

## 2.1 Princip golubinjaka

Neka je $n$ prirodan broj. Zamislite kako morate rasporediti $n + 1$ paket u $n$ pretinaca (pretpostavka je da jedan pretinac može primiti neograničeno mnogo paketa). Možemo li nešto reći o količini paketa koji će biti smješteni u određene pretince? Primijetite kako u jedan pretinac možemo staviti sve pakete (ili niti jedan). Međutim, ono što možemo tvrditi jest da neki pretinac mora sadržavati najmanje dva paketa. Kako bismo to pokazali, zamislite da pokušavate izbjeći pretince s više od jednog paketa. Kako biste to izbjegli, popunjavat ćete pretince na način da stavljate po jedan paket u svaki pretinac. Tim načinom, stavljanjem po jednog paketa u prazan prezinac, možemo smjestiti točno $n$ paketa. Na kraju tog procesa, ostat ćemo s jednim paketom u ruci koji moramo smjestiti u već popunjene pretince. Ovakvim razmišljanjem dolazimo do zaključka da bi barem jedan pretinac trebao imati najmanje dva paketa.

Ova jednostavna ideja poznata je kao princip golubinjaka, koji se može formulirati na sljedeći način: ako je više od $n$ golubova postavljeno u $n$ golubinjaka, tada neki golubinjaci moraju sadržavati najmanje dva goluba.

Prije same formalizacije, dat ćemo još jedan zanimljiv primjer.

**Primjer 2.1.1.** *Uzmimo neki proizvoljan grad s više od milijun stanovnika. Pomoću principa golubinjaka pokazat ćemo da postoje najmanje dva čovjeka u tom gradu s istim brojem vlasi kose. Poznato je da prosječna osoba ima oko* 150000 *vlasi kose, tako da slobodno možemo zaključiti kako niti jedna osoba nema više od* 999999 *vlasi kose. Ako ljude odlučimo razdijeliti u skupove po broju vlasi kose (od* 0 *do* 999999*), dobit ćemo milijun* *skupova ("golubinjaka"). Raspoređujemo strogo više od milijun ljudi ("paketi") u tako napravljene skupove. Budući da je ljudi strogo više nego skupova, to znači da postoji najmanje jedan skup u kojem je raspoređeno najmanje dvoje ljudi. Ekvivalentno, postoji najmanje dvoje ljudi s istim brojem vlasi kose.*

Sada ćemo predstaviti Princip golubinjaka koristeći nešto više matematički jezik.

**Teorem 2.1.2.** *(Osnovni princip golubinjaka) Ako je skup s $n$ elemenata particioniran u $r$ disjunktnih podskupova gdje je $n > r$, tada barem jedan od podskupova sadrži strogo više od jednog elementa.*

**Teorem 2.1.3.** *(Generalizirani princip golubinjaka). Ako je strogo više od $mr$ elemenata particionirano u $r$ skupova, tada neki skup sadrži strogo više od $m$ elemenata.*

*Dokaz.* Neka je $S$ skup takav da je $|S| > mr$. Neka je $S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_r$ neka particija skupa $S$. Pretpostavimo da je $|S_i| \leq m$ za svaki $i$. Tada vrijedi

$$|S| = \sum_{i=1}^{r} |S_i| \leq mr,$$

što je kontradikcija. Dakle, postoji barem jedan $i$ takav da skup $S_i$ sadrži strogo više od $m$ elemenata. □

Primjećuje se da je Teorem 2.1.2 specijalni slučaj Teorema 2.1.3 uz $m = 1$. Iako je načelo pretinca jednostavan koncept i čini se prilično očitim, to je vrlo moćan rezultat i može se koristiti za dokazivanje širokog niza ne tako očitih činjenica.

**Primjer 2.1.4.** *Za svaki cijeli broj $n = 1, 2, \ldots, 200$ neka je $R(n)$ ostatak pri dijeljenju od $n$ sa 7. Tada postoji broj $r \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ takav da je $r = R(n)$ barem za 29 različitih prirodnih brojeva $n \leq 200$. Da bismo to vidjeli, zamislimo prvih 200 prirodnih brojeva kao golubove, te sedam mogućih vrijednosti od $R(n)$ kao pretince. Tada po Teoremu 2.1.3, budući da je $200 > 28 \cdot 7$, jedan od pretinaca mora sadržavati strogo više od 28 elemenata.*

## 2.2 Ramseyjev teorem

Ramseyjev teorem se smatra proširenjem principa golubinjaka, u kojemu nije samo opisan broj elemenata u pretincu već imamo jamstvo određenog odnosa među elementima.

**Primjer 2.2.1.** *(Party problem)*

*Pretpostavimo da se na nekoj zabavi nalazi šest osoba. Ono što želimo pokazati je da na toj zabavi sa šest ljudi mora postojati ili grupa od troje ljudi koji se međusobno poznaju* *ili grupa od troje ljudi koji su potpuni stranci. Kako bismo to dokazali, koristimo princip golubinjaka koji nam govori da za svaku osobu postoje najmanje tri osobe koje ta osoba poznaje ili tri osobe koje su joj potpuni stranci.*

*Za potrebe dokaza, dodijelit ćemo svakom paru osoba na zabavi boju - crvenu ili plavu - i povezati osobe koje se međusobno poznaju crvenom linijom, a one koje su stranci plavom linijom. Tada tvrdimo da za svako takvo bojanje linija između osoba postoji barem jedan plavi ili crveni trokut (s osobama kao vrhovima).*

*Da bismo to dokazali, izdvojimo jednu osobu na proslavi i nazovimo je X. Podijelit ćemo preostalih petero ljudi u dva skupa: osobe koje osoba X poznaje i osobe koje osoba X ne poznaje. Prema principu golubinjaka, osoba X mora poznavati barem tri osobe ili biti stranac najmanje trima osobama. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da osoba X poznaje osobe A, B i C. Zbog toga, linije koje povezuju X sa A, B i C moraju biti crvene boje, jer su to linije koje povezuju ljude koji se poznaju.*

*Sada razmotrimo slučaj da postoji crvena linija između bilo kojeg para osoba A, B ili C. U tom slučaju imamo crveni trokut ABX ili BCX ili ACX, što je upravo ono što smo htjeli dokazati.*

*Ako nema crvene linije između A, B i C, onda su sve tri linije plave boje. U tom slučaju imamo plavi trokut ABC, koji također daje ono što smo željeli dokazati.*

*Dakle, bez obzira na raspored boja, postoji barem jedan plavi ili crveni trokut s trima osobama kao vrhovima. To znači da na zabavi od šest ljudi mora postojati grupa od troje ljudi koji se međusobno poznaju ili troje ljudi koji su međusobno potpuni stranci.*

*Primijetimo kako za slučaj da je samo pet osoba na zabavi, ne bi nužno morala postojati grupa od troje ljudi koji se međusobno poznaju ili grupa od troje ljudi koji se međusobno ne poznaju. Kako bismo to vidjeli, dovoljno je naći jedno bojanje linija između osoba na zabavi tako da ne postoji monokromatski trokut (bilo crveni ili plavi) s trima osobama kao vrhovima. Takvo bojanje linija između osoba u ovisnosti o njihovim odnosima ćemo pokazati u daljnjoj raspravi ovog rada (vidi sliku 4.2 i dokaz teorema 4.3.4).*

Sada možemo izraziti problematiku gornjeg primjera u teorijskom obliku.

**Teorem 2.2.2.** *(Ramseyjev teorem za dvije boje) Neka su $k, l$ prirodni brojevi. Postoji najmanji pozitivan cijeli broj $R = R(k, l)$ takav da svako bojanje bridova grafa $K_R$ plavom i crvenom bojom dopušta crveni $K_k$-podgraf ili plavi $K_l$-podgraf.*

*Dokaz.* Primijetimo prvo da je $R(k, 2) = k$ za sve $k$ i $R(2, l) = l$ za sve $l$. Nastavljamo indukcijom po zbroju $k + l$, uzimajući u obzir da smo tvrdnju upravo dokazali u slučaju kada je $k + l \leq 5$ ili $\min\{k, l\} \leq 2$. Neka je $k + l \geq 6$, gdje su $k, l \geq 3$. Možemo pretpostaviti da $R(k, l - 1)$ i $R(k - 1, l)$ postoje. Tvrdimo da vrijedi $R(k, l) \leq R(k - 1, l) + R(k, l - 1)$, što će pokazati teorem.

Neka je $n = R(k - 1, l) + R(k, l - 1)$. Odaberimo neki vrh $v$ iz grafa $K_n$. Tada postoji $n - 1$ bridova iz vrha $v$. Neka je $A$ broj crvenih bridova, a $B$ broj plavih bridova koji izlaze iz vrha $v$. Tada vrijedi ili $A \geq R(k-1, l)$ ili $B \geq R(k, l-1)$ jer ako bi vrijedilo $A < R(k-1, l)$ i $B < R(k, l-1)$, tada bi vrijedilo i $A + B \leq n - 2$ što je u kontradikciji s činjenicom da je $A + B = n - 1$.

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $A \geq R(k-1, l)$. Neka je $V$ skup vrhova povezanih s vrhom $v$ crvenim bridovima, dakle $|V| \geq R(k-1, l)$. Po pretpostavci indukcije $K_{|V|}$ sadrži crveni $K_{k-1}$-podgraf ili plavi $K_l$-podgraf. Ako sadrži plavi $K_l$-podgraf, gotovi smo. Ako sadrži crveni $K_{k-1}$-podgraf, tada povezivanjem vrha $v$ sa svakim vrhom crvenog podgrafa imamo crveni $K_k$-podgraf (budući da je $v$ povezan s $V$ samo crvenim bridovima) čime je dokaz gotov. □

Brojevi $R(k, l)$ su znani kao Ramseyevi brojevi za dvije boje. Primjer 2.2.1 kaže nam da je $R(3, 3) = 6$. U teoremu 4.3.4 dat ćemo detaljan dokaz te činjenice.

# Poglavlje 3

# Povijest Ramseyjeve teorije

Zanimljiva činjenica jest da Ramseyjev teorem nije bio prvi teorem u području znanom kao Ramseyjeva teorija. U ovom poglavlju predstavit ćemo teoreme rane Ramseyjeve teorije i iznijeti njene važne rezultate.

Prvo ćemo predstaviti van der Waerdenov teorem koji iznosi rezultate sličnog tipa kao i Ramseyjev teorem, no temeljna struktura u tom teoremu nije graf, već je dana zbrajanjem prirodnih brojeva[3].

## 3.1 Van der Waerdenov teorem

**Definicija 3.1.1.** *Neka je $k \in \mathbb{N}$.* ***$k$-člani aritmetički niz*** *je skup oblika $\{a, a+d, a+2d, \dots, a+(k-1)d\}$, gdje su $a \in \mathbb{Z}$ i $d \in \mathbb{N}$.*

**Teorem 3.1.2.** *(Van der Waerdenov teorem) Za sve $k, r \in \mathbb{N}$, postoji $N \in \mathbb{N}$ takav da za bilo koju particiju skupa $\{1, 2, \dots, N\}$ u $r$ podskupova barem jedan od tih $r$ podskupova sadrži $k$-člani aritmetički niz.*

**Definicija 3.1.3.** *Neka je $S$ skup.* **Bojanje skupa** *$S$* **sa** *$r$* **boja** *je surjekcija $\chi : S \to C$, gdje je $|C| = r$.*

**Definicija 3.1.4.** *Bojanje $\chi : S \to C$ je* **monokromatsko** *na skupu $A \subseteq S$ ako je funkcija $\chi$ konstantna na skupu $A$.*

Van der Waerdenov teorem ekvivalentno možemo iskazati na sljedeći način: za sve prirodne brojeve $r$ i $k$, postoji prirodni broj $N$ takav da za svako bojanje skupa $\{1, 2, \dots, N\}$ s $r$ boja postoji $k$-člani aritmetički niz na kojem je to bojanje monokromatsko.

Najmanji $N$ koji zadovoljava van der Waerdenov teorem za dane $k, r$ nazivamo **van der Waerdenov broj** $w(r, k)$.

Dok će ovaj teorem biti dan bez dokaza, proći ćemo kroz koristan primjer te približiti što ovaj teorem implicira.

**Primjer 3.1.5.** *Neka je k=r=2. Dakle, želimo pronaći najmanji cijeli broj* $w = w(2,2)$ *takav da, neovisno o tome kako particioniramo interval* $[1, w] = \{1, 2, \ldots, w\}$ *u dva podskupa, barem jedan podskup mora sadržavati par elemenata* $a, a+d$, *gdje je* $d \geq 1$. *Ako promatramo problematiku ovog primjera u terminima bojanja skupova, reći ćemo da svako bojanje skupa* $\{1, 2, \ldots, w\}$ *s dvije boje mora sadržavati monokromatski dvočlani aritmetički niz.*

*Promotrimo bojanje skupa* $\{1, 2\}$ *gdje su brojevima* 1 *i* 2 *dodijeljene dvije različite boje. Očito, takvim bojanjem particioniramo skup* $\{1, 2\}$ *na skupove* $\{1\}$ *i* $\{2\}$. *Vidimo kako niti jedan od ta dva skupa ne sadržava dvočlani aritmetički podniz.*

*Zaključujemo da je broj* $w(2,2)$ *strogo veći od* 2. *Provjerimo je li* $w(2,2) = 3$. *Drugim riječima, daje li svako bojanje skupa* $\{1, 2, 3\}$ *s dvije boje monokromatski dvočlani aritmetički niz?*

*Odgovor je da, jednostavnom primjenom principa golubinjaka: ako bojamo tri broja dvjema bojama, možemo zaključiti kako će sigurno dva broja biti obojana istom bojom. Budući da je svaki skup koji se sastoji od dvaju prirodnih brojeva dvočlani aritmetički niz, tvdnja vrijedi. Dakle, pokazali smo da je* $w(2,2) = 3$.

**Lema 3.1.6.** $w(r, 2) = r + 1$ *za svaki* $r$.

*Dokaz.* Ovo ćemo pokazati jednostavnom primjenom principa golubinjaka.
Prvo primijetimo kako je $w(r, 2) > r$, jer ne možemo obojati skup $\{1, 2, \ldots, r\}$ (koji sadrži $r$ članova) s $r$ boja tako da dobijemo monokromatski aritmetički niz s 2 člana, jer će svaki broj biti obojan u drugu boju.

Pokažimo da vrijedi $w(r, 2) = r + 1$. Promotrimo bojanje skupa $\{1, 2, \ldots, r+1\}$ s $r$ boja. Korištenjem principa golubinjaka, zaključujemo kako najmanje dva broja moraju biti obojana istom bojom. Kako je dvočlani skup uvijek aritmetički niz, tvrdnja vrijedi. □

Van der Waerdenov teorem nam daje rezultate za konačne duljine aritmetičkih nizova. Drugim riječima, ako obojimo skup svih poznatih cijelih brojeva konačnim brojem boja, tada mora postojati monokromatski skup koji sadrži proizvoljno dug konačan aritmetički niz. Rezultat nije istinit ako zahtijevamo da jedan od skupova sadrži beskonačan aritmetički niz. Pogledajmo sljedeći primjer:

**Primjer 3.1.7.** *Razmotrimo sljedeće* 2*-bojanje skupa* $\mathbb{N}$, *s bojama koje ćemo označiti* 0 *i* 1*:*

$$\underbrace{1}_{1}\ \underbrace{00}_{2}\ \underbrace{1111}_{4}\ \underbrace{00\ldots0}_{8}\ \underbrace{11\ldots1}_{16}\ldots.$$

*Primijetimo: za $j \geq 0$, interval $I_j = [2^j, 2^{j+1} - 1]$ je obojan u 1 ako je j paran broj, a u 0 ako je j neparan. Kada bismo uzeli $2^k$ uzastopnih cijelih brojeva u $I_k$, dobili bismo monokromatski aritmetički niz duljine $2^k$, za bilo koji k koji je konačan.*

*Sad ćemo pokazati da ne postoji monokromatski aritmetički niz beskonačne duljine. Pretpostavimo da je skup $A = \{a, a + d, a + 2d, \dots\}$ neki beskonačno dug aritmetički niz. Tada postoji n takav da je $2^n > d$ i $A \cap I_n$ je neprazan. Budući da je $d < 2^n$, znamo da je $A \cap I_{n+1}$ također neprazan. Kako su boje intervala $I_n$ i $I_{n+1}$ različite, aritmetički niz nije monokromatski.*

Postoje razni zanimljivi aspekti Ramseyjeve teorije na cijelim brojevima koje možemo iznijeti u ovom radu, no daljnji fokus ćemo staviti na teorem koji se može smatrati prvim teoremom Ramseyjeve teorije, poznat kao Schurov teorem.

## 3.2 Schurov teorem

Razmotrimo jednadžbu ravnine $z = x + y$. Neka je $P$ skup točaka u toj ravnini čije su koordinate prirodni brojevi. Tako možemo zaključiti da su na primjer $(1, 1, 2), (3, 4, 7) \in P$. Primijetimo kako ne postoji uvjet da $x$ i $y$ moraju biti različiti. Nadalje, koristeći konačno mnogo boja, dodijelimo svakom prirodnom broju neku boju.

Za svaki $(a, b, c) \in P$ napravit ćemo sljedeće: ako su boje brojeva $a, b$ i $c$ jednake, obojamo točku $(a, b, c)$ u ravnini tom bojom. U drugom slučaju, ako brojevi $a$, $b$ i $c$ nisu svi iste boje, tada označimo tu točku u ravnini s $X$. Pitanje koje ćemo si postaviti jest: mogu li sve točke u ravnini biti označene s $X$ ili mora postojati obojana točka?
Na ovo pitanje je 1916. Isaac Schur [3] dao odgovor. Sada ćemo njegov rezultat napisati u formaliziranijem obliku. Za sam dokaz rezultata poslužit će nam ranije dokazani Ramseyjev teorem.

**Teorem 3.2.1.** *(Schurov teorem) Za bilo koji prirodan broj r, postoji najmanji cijeli broj $s = s(r)$ takav da za bilo koje bojanje cijelih brojeva iz intervala $[1, s]$ s r boja postoji monokromatsko rješenje jednadžbe $x + y = z$.*

*Dokaz.* Primijetimo kako Ramseyjev teorem specifično tvrdi da za svaki prirodan broj $r$, postoji cijeli broj $n = R(3, r)$ takav da za bilo koje bojanje grafa $K_n$ s $r$ boja postoji monokromatski trokut. U ovom dokazu koristit ćemo takvo bojanje.

Označimo vrhove grafa $K_n$ sa $1, 2, \dots, n$. Nadalje, proizvoljno particionirajmo skup $\{1, 2, \dots, n-1\}$ u $r$ podskupova. Drugim riječima, proizvoljno postavimo svaki $x \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ u točno jedan od $r$ skupova. Ovi skupovi odgovaraju $r$ boja. Obojimo bridove grafa $K_n$ koji povezuju vrhove $i$ i $j$ prema boji skupa čiji je broj $|j - i|$ član. Kako smo već naveli, po Ramseyjevom teoremu, monokromatski trokut mora postojati. Označimo vrhove takvog trokuta s $a, b, c$ tako da vrijedi $a < b < c$. Primijetimo kako su tada i brojevi $b - a, c - b$

i $c - a$ svi iste boje. Ako stavimo $x = b - a, y = c - b$ i $z = c - a$, primijetimo da vrijedi $x + y = z$ čime je tvrdnja pokazana. □

**Definicija 3.2.2.** *Multiskup* $\{x, y, z\} \subseteq \mathbb{N}$ *koji zadovoljava* $x + y = z$ *naziva se* ***Schurova trojka***.

Jedine znane vrijednosti za takozvane Schurove brojeve $s(r)$ iz teorema 3.2.1 su za $r = 1, 2, 3, 4 : s(1) = 2, s(2) = 5, s(3) = 14$ i $s(4) = 45$. U sljedećem primjeru ćemo pokazati da vrijedi $s(2) = 5$.

**Primjer 3.2.3.** *Promotrimo bilo koje bojanje cijelih brojeva u intervalu* $[1, 5]$ *s dvije boje. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je broj* 1 *obojan u crveno. Pretpostavimo da ne postoji monokromatska Schurova trojka. Pošto je* $1 + 1 = 2$*, moramo obojati* 2 *u plavo. Pošto je* $2 + 2 = 4$*, moramo obojati* 4 *u crveno. Primijetite i kako je* $1 + 4 = 5$ *pa moramo obojati* 5 *u plavo. Sada samo preostaje obojati broj* 3*. Međutim, ako obojamo* 3 *u crveno, tada je skup* $\{1, 3, 4\}$ *crvena Schurova trojka, a ako obojamo* 3 *u plavo, tada je* $\{2, 3, 5\}$ *plava Schurova trojka. Ovime smo pokazali kako je* $s(2) \leq 5$*.*

*Kako bismo dokazali da je* $s(2) = 5$*, pokazat ćemo kako je* $s(2) > 4$*. Ako uzmemo bojanje* $\chi$ *intervala* $[1, 4]$ *u* $\mathbb{Z}$ *bojama* 0 *i* 1 *definirano s* $\chi(1) = \chi(4) = 0$ *i* $\chi(2) = \chi(3) = 1$*, tada očito nije moguće pronaći* $x, y, z$ *jednake boje tako da vrijedi* $x + y = z$*.*

# Poglavlje 4

# Ramseyjevi brojevi

U ovom poglavlju bavit ćemo se jednim od najistraživanijih i najpoznatijih dijelova Ramseyjeve teorije – Ramseyjevim brojevima. Uvest ćemo njihovu formalnu definiciju jer će se sljedeći odlomci oslanjati na njeno razumijevanje.

**Definicija 4.0.1.** *(Ramseyjev broj (za dvije boje)). Neka su $k$ i $l$ prirodni brojevi.* ***Ramseyjev broj****, u zapisu $n = R(k,l)$, je najmanji prirodan broj $n$ takav da svaki 2-obojen graf $K_n$, pri čemu se za bojanje koristi crvena i plava boja, ima crveni monokromatski podgraf $K_k$ ili plavi monokromatski podgraf $K_l$.*

Iznijet ćemo nekoliko činjenica u vezi ove definicije. Kao prvo, postoje definicije Ramseyjeve teorije i Ramseyjevih brojeva koje koriste i više od dvije boje. Odnose u grafu s dvije boje je puno jednostavnije analizirati te je radi toga postignut veći napredak u svrhu istraživanja Ramseyjevih brojeva s dvije boje nego bilo kojih drugih. Drugo, izbor boja je u potpunosti proizvoljan.

## 4.1 Svojstva Ramseyjevih brojeva

U ovom pododjeljku navodimo neka korisna svojstva Ramseyevih brojeva, poznate vrijednosti i raspone vrijednosti za različite Ramseyeve brojeve. Zatim ćemo ovu tematiku zaključiti izvodima formula za vrijednost nekih važnih Ramseyjevih brojeva [1].
Prvo glavno svojstvo govori da su Ramseyjevi brojevi simetrični s obzirom na brojeve $k$ i $l$.

**Teorem 4.1.1.** *Za sve $k, l \in \mathbb{N}$ vrijedi $R(k,l) = R(l,k)$.*

*Dokaz.* Primijetimo kako je ovaj rezultat posljedica simetrije grafova. Promotrimo bojanje bridova. Činjenica je da svaki 2-obojeni potpuni graf $F$ ima u prirodnom smislu riječi inverzan 2-obojeni potpuni graf $G'$, u kojem je svaki crveni brid u $G$ obojen u plavo i obrnuto. Znamo da broj $R(k,l)$ ima svojstvo da bilo koje bojanje bridova grafa $K_{R(k,l)}$ crvenom i plavom bojom ima crveni monokromatski podgraf $K_k$ ili plavi monokromatski podgraf $K_l$. Također to možemo promotriti i sa inverznog stajališta. To znači da 2-obojeni potpun graf $K'_{R(k,l)}$ ima plavi monokromatski podgraf $K_k$ ili crveni monokromatski podgraf $K_l$. Budući da invertiranjem svih 2-obojenih potpunih grafova $K_{R(k,l)}$ opet dobivamo sve 2-obojene potpune grafove $K_{R(k,l)}$, dobivamo ekvivalentne uvjete za $R(l,k)$. □

Sljedeće su svojstvo 1955. godine dokazali Greenwood i Gleason [2]. Radi se o izuzetno korisnoj rekurzivnoj vezi za Ramseyjeve brojeve koja se u nastavku ovog rada koristi u nekoliko dokaza.

**Teorem 4.1.2.** *Za sve prirodne brojeve $r, b \geq 2$, vrijedi sljedeća nejednakost:*

$$R(r,b) \leq R(r-1,b) + R(r,b-1).$$

*Dokaz.* Neka je $G$ 2-obojen graf čiji su bridovi obojeni crvenom i plavom bojom i neka sadrži $R(r-1,b) + R(r,b-1)$ bridova. Promatrat ćemo vrh $v \in G$. Definiramo $n_r$ kao broj vrhova susjednih vrhu $v$ preko crvenog brida te $n_b$ kao broj vrhova susjednih vrhu $v$ preko plavog brida. $n_r$ vrhova susjednih s vrhom $v$ preko crvenog brida tvori skup $S_r$. Slično, $n_b$ vrhova susjednih vrhu $v$ i povezanih s njime plavim bridom tvori skup koji označimo sa $S_b$. Budući da je vrh $v$ povezan sa svakim vrhom u $G$, imamo:

$$n_r + n_b + 1 = R(r-1,b) + R(r,b-1).$$

Ova relacija formira dva slučaja dokaza. Ako vrijedi $n_r < R(r-1,b)$, tada je $n_b \geq R(r,b-1)$ i promatramo vrhove u skupu $S_b$. Budući da je $n_b \geq R(r,b-1)$, u potpunom podgrafu grafa $G$ formiranom od vrhova iz skupa $S_b$ i svih bridova između tih vrhova postoji crveni potpun monokromatski podgraf na $r$ vrhova ili plavi potpun monokromatski podgraf na $b-1$ vrhova. Ako vrijedi ovo zadnje, tada, budući da su po definiciji skupa $S_b$ vrhovi iz $S_b$ povezani s vrhom $v$ plavim bridom, možemo reći da potpun podgraf grafa $G$ formiran od vrhova na skupu $S_b \cup \{v\}$ i svih bridova između njih, sadrži plavi potpuni monokromatski podgraf s $b$ vrhova. Zaključujemo da $G$ ima crveni potpun monokromatski podgraf s $r$ vrhova ili plavi potpun monokromatski podgraf s $b$ vrhova i nejednakost vrijedi.

U drugom slučaju, imamo $n_r \geq R(r-1,b)$ te promatramo vrhove iz skupa $S_r$. Zbog toga što vrijedi da je $n_r \geq R(r-1,b)$, u potpunom podgrafu grafa $G$ formiranom od vrhova iz skupa $S_r$ i svih bridova između njih, postoji crveni potpun monokromatski podgraf na $r-1$ vrhova ili plavi potpun monokromatski podgraf na $b$ vrhova. Ako vrijedi ovo prvo, s obzirom da su svi vrhovi iz skupa $S_r$ povezani s vrhom $v$ crvenim bridom, možemo reći da je potpuni podgraf grafa $G$ formiran iz vrhova koji pripadaju skupu $S_r \cup \{v\}$ te svih bridova između njih sadrži crveni potpuni monokromatski podgraf s $r$ vrhova.

Zaključujemo da $G$ ima plavi potpun monokromatski podgraf s $b$ vrhova ili crveni potpun monokromatski podgraf s $r$ vrhova. Dakle, nejednakost vrijedi. Prema tome, teorem vrijedi u svim slučajevima.

□

**Lema 4.1.3.** *Kada su oba broja na desnoj strani nejednakosti*

$$R(r, b) \leq R(r-1, b) + R(r, b-1)$$

*parna, nejednakost je stroga.*

*Dokaz.* U dokazu teorema 4.1.2 pokazali smo kako nejednakost vrijedi. Sada ćemo pokazati da je nejednakost zaista stroga kada su oba broja na njenoj desnoj strani parna.

Pretpostavimo da nejednakost nije stroga, tj. vrijedi

$$R(r, b) = R(r-1, b) + R(r, b-1),$$

gdje su $R(r-1, b)$ i $R(r, b-1)$ parni brojevi. Neka je $n = R(r, b) - 1$. Budući da je $n < R(r, b)$, možemo fiksirati 2-bojanje bridova grafa $K_n$ takvo da ne postoji ni crveni $K_r$- ni plavi $K_b$-podgraf.

Izaberimo sada neki vrh $v$ grafa $K_n$. Ako je broj crvenih bridova iz $v$ strogo manji od $R(r-1, b)-1$ i broj plavih bridova iz $v$ strogo manji od $R(r, b-1)-1$, tada je broj bridova iz vrha $v$ strogo manji od $R(r-1, b) + R(r, b-1) - 2$. Međutim, to ne može biti točno, budući da je broj bridova iz vrha $v$ točno $R(r-1, b) + R(r, b-1) - 2$. Dakle, postoji najmanje $R(r-1, b) - 1$ crvenih bridova ili najmanje $R(r, b-1) - 1$ plavih bridova incidentnih s vrhom $v$.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da postoji najmanje $R(r-1, b) - 1$ crvenih bridova incidentnih s vrhom $v$. Pokažimo sad da postoji točno $R(r-1, b) - 1$ crvenih bridova koji izlaze iz vrha $v$. Pretpostavimo suprotno. Tada vrhovi povezani s vrhom $v$ crvenim bridom tvore graf $K_{R(r-1,b)}$. Prema Ramseyjevom teoremu ovaj graf sadrži crveni $K_{r-1}$– ili plavi $K_b$-podgraf. Na početku smo dokaza rekli da naš 2-obojeni graf $K_n$ ne može sadržavati plavi $K_b$-podgraf. Dodamo li crvenom podgrafu $K_{r-1}$ vrh $v$, koji je s ostalim vrhovima u tom podgrafu povezan crvenim bridovima, dobit ćemo crveni podgraf $K_r$ koji također ne može biti sadržan u podgrafu $K_n$. Dakle, postoji točno $R(r-1, b) - 1$ crvenih bridova incidentnih s vrhom $v$. Svi ostali takvi bridovi su plavi i ima ih točno $R(r, b-1) - 1$.

Dakle, svaki vrh u grafu $K_n$ povezan je s ostalih $n-1$ vrhova s točno $R(r-1, b) - 1$ crvenih bridova i $R(r, b-1) - 1$ plavih bridova. Prema lemi o rukovanju mora postojati točno $\frac{n \cdot (R(r-1,b)-1)}{2}$ crvenih bridova u $K_n$. Taj broj mora biti cijel, a to ne može biti u našem slučaju; naime, budući da su $R(r-1, b)$ i $R(r, b-1)$ parni brojevi, broj u brojniku će biti neparan. Slijedi da početna jednakost ne vrijedi te je time tvrdnja pokazana. □

U sljedećem teoremu iznijet ćemo općenitu nejednakost koja nam opisuje gornju ogradu za sve Ramseyjeve brojeve.

**Teorem 4.1.4.** *Neka su $r, b \geq 2$ prirodni brojevi. Tada vrijedi*

$$R(r, b) \leq \binom{r+b-2}{r-1}.$$

*Dokaz.* Dokazat ćemo tvrdnju indukcijom po $r$ i $b$. Prvo pokazujemo za osnovni slučaj $r = b = 2$ : imamo

$$R(2,2) = 2 \leq 2 = \binom{2+2-2}{2-1}.$$

Sada pretpostavimo da vrijedi

$$R(r-1, b) \leq \binom{(r-1)+b-2}{(r-1)-1} \quad \text{i} \quad R(r, b-1) \leq \binom{r+(b-1)-2}{r-1}.$$

Koristeći prethodno dokazani teorem 4.1.2, imamo

$$\begin{aligned} R(r,b) &\leq R(r-1,b) + R(r,b-1) \\ &\leq \binom{(r-1)+b-2}{(r-1)-1} + \binom{r+(b-1)-2}{r-1} \\ &= \binom{r+b-2}{r-1}, \text{ dakle} \\ R(r,b) &\leq \binom{r+b-2}{r-1}. \end{aligned}$$

□

## 4.2 Vrijednosti Ramseyjevih brojeva

Dosad se najveći dio rasprave o Ramseyjevim brojevima odnosio na općenite Ramseyeve brojeve $R(r, b)$. Sada ćemo se fokusirati na konkretne vrijednosti Ramseyjevih brojeva. Međutim, bitno je napomenuti da postoji razlika između Ramseyjevog broja za koji je poznata točna vrijednost i Ramseyjevog broja za koji su poznate samo gornje ili donje ograde. U siječnju 2014. godine Stanislaw P. Radziszowski je posljednji put ažurirao svoj članak Small Ramsey Numbers [1] u kojem su navedene poznate vrijednosti Ramseyjevih brojeva ili njihove donje ili gornje ograde, uz pomoć kojih sastavljamo tablicu Ramseyjevih brojeva $R(r, b)$ gdje su $r, b \leq 10$.

U tablici 4.1 je za Ramseyjeve brojeve čija vrijednost je poznata ta vrijednost zapisana u sredini pripadne ćelije, dok za ostale Ramseyjeve brojeve, brojevi zapisani na vrhu

| r/b | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 2 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 3 | 1 | 3 | 6 | 9 | 14 | 18 | 23 | 28 | 36 | 40<br>42 |
| 4 | 1 | 4 | 9 | 18 | 25 | 36<br>41 | 49<br>61 | 58<br>84 | 73<br>115 | 92<br>149 |
| 5 | 1 | 5 | 14 | 25 | 43<br>49 | 58<br>87 | 80<br>143 | 101<br>216 | 126<br>316 | 144<br>412 |
| 6 | 1 | 6 | 18 | 36<br>41 | 58<br>87 | 102<br>165 | 113<br>298 | 132<br>495 | 169<br>780 | 179<br>1171 |
| 7 | 1 | 7 | 23 | 49<br>61 | 80<br>143 | 113<br>298 | 205<br>540 | 217<br>1031 | 241<br>1713 | 289<br>2826 |
| 8 | 1 | 8 | 28 | 58<br>84 | 101<br>216 | 132<br>495 | 217<br>1031 | 282<br>2870 | 317<br>3585 | 6090 |
| 9 | 1 | 9 | 36 | 73<br>115 | 126<br>316 | 169<br>780 | 241<br>1713 | 317<br>3583 | 565<br>6588 | 581<br>12677 |
| 10 | 1 | 10 | 40<br>42 | 92<br>149 | 144<br>412 | 179<br>1171 | 289<br>2826 | 6090 | 581<br>12677 | 798<br>23556 |

Tablica 4.1: Tablica poznatih vrijednosti i ocjena Ramseyjevih brojeva $R(r, b)$ za $r, b \leq 10$.

pripadne ćelije predstavljaju donju ogradu, a brojevi zapisani na dnu ćelije predstavljaju gornju ogradu.

Nekoliko značajnih činjenica u vezi ove tablice je potrebno istaknuti. Najprije, primijetimo kako su vrijednosti u tablici simetrične s obzirom na glavnu dijagonalu jer je $R(r, b) = R(b, r)$, kako je već pokazano u teoremu 4.1.1.

Druga stvar koju bi bilo potrebno napomenuti jest da su vrijednosti Ramseyjevih brojeva dobro procijenjene za malene $r$ i $b$, no većina vrijednosti ostaje nepoznata. Osnovni razlog tome je što se s malim povećanjem $r$ ili $b$ vrijednost Ramseyjevog broja $R(r, b)$ značajno poveća što možemo popratiti i u tablici. Primijetimo kako se raspon gornjih i donjih granica vrlo brzo povećava. Možda se na prvi pogled čini da na primjer provjera sedam grafova za Ramseyjev broj $R(5, 5)$ ne bi trebala biti toliki problem. No, treba uzeti u obzir da ona znači provjeru svakog 2-bojanja bridova tih potpunih grafova. Za $K_{43}$ to znači da imamo $\frac{43 \cdot 32}{2} = 903$ brida i za svaki taj brid dvije mogućnosti, tako da postoji $2^{903}$ mogućih 2-bojanja. Stoga je potrebno provjeriti otprilike $67,6 \cdot 10^{270}$ slučajeva u kojima ne nalazimo monokromatski potpuni graf reda 5. U principu, nema potrebe provjeravati sve jer je dovoljno pronaći jedno takvo bojanje bridova. Ipak, moramo shvatiti da su mogućnosti zaista ogromne.

Zadnju stvar koju je potrebno naznačiti je da će nama od posebnog interesa biti takozvani dijagonalni Ramseyjevi brojevi $R(k, k)$. Brojevi koji poprimaju ovu formu su najistraženiji i najspomenutiji u svim istraživanjima, počevši od osnovnog primjera koji smo spomenuli na početku zvanog "party problem."

## 4.3 Određivanje vrijednosti nekih Ramseyjevih brojeva

Sada ćemo pokazati za neke Ramseyjeve brojeve da tablica 4.1 doista navodi njihove točne vrijednosti. Prvo ćemo izložiti dva općenita dokaza koji utvrđuju vrijednosti Ramseyjevih brojeva $R(r, b)$ za $r \leq 2$ ili $b \leq 2$, zatim prijeći na utvrđivanje vrijednosti drugih identificiranih brojeva [2].

**Primjer 4.3.1.** $R(1, k) = 1$ *za sve* $k \in \mathbb{N}$.

Neka je $K_1$ monokromatski graf. Primijetimo da se ovaj graf sastoji samo od jednog vrha i nema bridove. Stoga će bilo crveni bilo plavi monokromatski graf $K_1$ zahtijevati jedan vrh u 2-obojenom grafu da se zadovolje uvjeti iz definicije broja $R(k, 1)$ ili $R(1, k)$. Dakle, vrijedi

$$R(1, k) = R(k, 1) = 1.$$

Primijetimo da prva jednakost slijedi i iz svojstva simetričnosti Ramseyjevih brojeva.

**Primjer 4.3.2.** $R(k, 2) = k$ *za sve* $k \in \mathbb{N}$.

U ovom primjeru ćemo također ponuditi neformalni dokaz ove tvrdnje. Promotrimo u 2-obojenom potpunom grafu $G$ s barem dva vrha podgraf $K_2$. Primijetimo da je takav podgraf zapravo brid koji povezuje dva vrha. Dakle, potpun monokromatski podgraf $K_2$ zadane boje će postojati sve dok postoji jedan brid te boje u cijelom grafu. Dakle, jedino bojanje bridova grafa $G$ u kojem uvjeti za Ramseyjev broj $R(k, 2)$ eventualno ne bi bili zadovoljeni jest ono u kojem je svaki brid u grafu $G$ suprotne boje, tj. ono s obzirom na koje je graf $G$ monokromatski suprotne boje. Oni očito doista nisu zadovoljeni kad graf $G$ ima strogo manje od $k$ vrhova. No, ako je graf $G$ monokromatski suprotne boje i ima $k$ vrhova, cijeli graf je monokromatski graf $K_k$ boje zadane uvjetima. Zaključujemo da će svaki podgraf 2-obojenog grafa $K_k$ obojenog plavom i crvenom bojom imati jedan od dva potrebnih monokromatskih podgrafa.

Poglavlje nastavljamo određivanjem vrijednosti nekih Ramseyjevih brojeva koji nisu dijagonalni.

**Primjer 4.3.3.** $R(3, 4) = 9$.

Podsjetimo se da smo već pronašli gornju ogradu. Naime, po teoremu 4.1.4 imamo:

$$R(3, 4) \leq \binom{3 + 4 - 2}{3 - 1} = \binom{5}{2} = 10.$$

Štoviše, po teoremu 4.1.2 i lemi 4.1.3 vrijedi i :

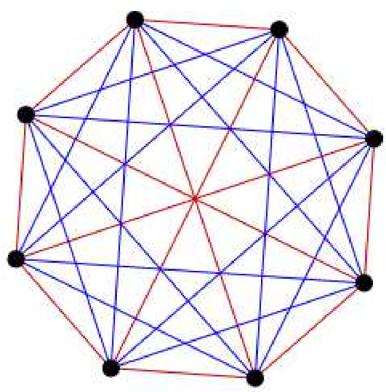
$$R(3, 4) < R(3, 3) + R(2, 4) = 6 + 4 = 10,$$

gdje smo vrijednost $R(3,3)$ iščitali iz tablice, a sam dokaz ćemo navesti nešto poslije (vidi teorem 4.3.4).

Dakle, iz gornje nejednakosti možemo zaključiti da je $R(3,4) < 10$. Sada tvrdimo da je $R(3,4) = 9$. Kako bismo to dokazali, moramo pokazati da postoji takvo 2-bojanje bridova potpunog grafa $K_8$ da u njemu ne postoji crveni podgraf $K_3$ ni plavi podgraf $K_4$. Uz malo truda, možemo pronaći bojanje kao što je prikazano na slici 4.1.

Ako pomno promotrimo graf na slici 4.1, vidimo da na ovakvom bojanju bridova ne nalazimo ni crveni podgraf $K_3$ ni plavi podgraf $K_4$. Pojasnimo zašto je to tako. Bojanje bridova učinjeno je tako da su za svaki vrh $i$ u crveno obojani bridovi koji su incidentni s njim u vrhovima $i \pm 1,\ i + 4$ (indeksaciju vrhova radimo na način da fiksiramo vrh $i$, te u smjeru kazaljke na satu označavamo vrhove $i + 1, i + 2, i + 3, i + 4 \ldots$ redom, počevši od fiksiranog vrha $i$), a u smjeru suprotnom od kazaljke na satu počevši od vrha i označavamo vrhove $i - 1, i - 2, i - 3, i - 4, ....$ U plavo bojamo bridove koji su incidentni u vrhovima $i \pm 2,\ i \pm 3$.

Pretpostavimo da postoji crveni podgraf $K_3$ u ovakvom bojanju. Tada bi neki vrh morao imati dva crvena susjedna brida međusobno povezana još jednim crvenim bridom. Takva situacija se ne može dogoditi budući da nijedan par vrhova $j+1$, $j+4$ i $j+7$ nije međusobno povezan crvenim bridom (jer smo upravo tako definirali plavo bojanje bridova). Pojasnit



Slika 4.1: Bojanje grafa $K_8$ u dvije boje bez crvenih monokromatskih podgrafova $K_3$ i plavih monokromatskih podgrafova $K_4$

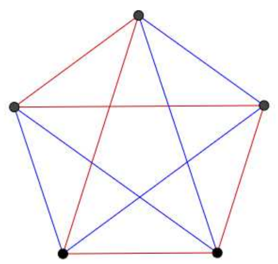
ćemo zašto ne može postojati plavi podgraf $K_4$. Kada bi postojao, morao bi postojati vrh $j$ takav da su svi vrhovi povezani s njime plavim bridovima, odnosno vrhovi $j+2$, $j+3$, $j+5$ i $j + 6$, međusobno povezani plavim bridovima, što se također ne može dogoditi. Naime, bridovi $\{j+2, j+3\}$ i $\{j+5, j+6\}$ obojeni su crvenom bojom. Dakle, zaključujemo da vrijedi $R(3,4) > 8$. S obzirom na već pokazanu gornju ogradu, možemo potvrditi tvrdnju ovog primjera da je $R(3,4) = 9$.

Daljnji fokus ovog poglavlja ćemo staviti na dokazivanje poznatih vrijednosti Ramseyjevih brojeva oblika $R(k,k)$. Prvi broj u ovoj formi koji moramo uzeti u obzir je broj $R(3,3)$, s kojim smo se već susreli na početku u najpoznatijem problemu vezanom za Ramseyjeve brojeve, "party problemu."

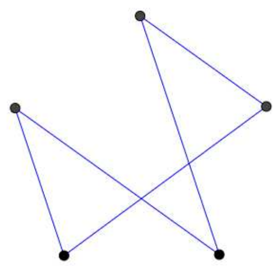
**Teorem 4.3.4.** *Vrijedi*

$$R(3,3) = 6.$$

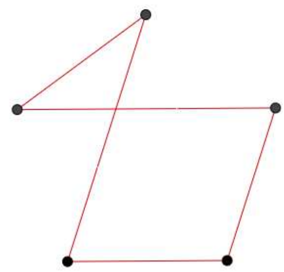
*Dokaz.* Tvrdnju ovog teorema ćemo dokazati tako da pokažemo da vrijedi $5 < R(3,3) \leq 6$. U samom dokazu služit ćemo se ponajviše bojanjem određenog potpunog grafa. Prvo ćemo pokazati da $R(3,3) \neq 5$, služeći se bojanjem potpunog grafa $K_5$.



Slika 4.2: $K_5$-graf bez monokromatskog $K_3$-podgrafa



Slika 4.3: Izdvojeni samo plavi bridovi

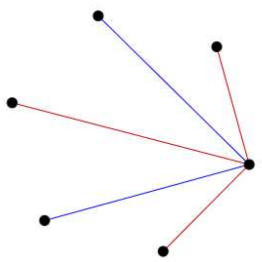


Slika 4.4: Izdvojeni samo crveni bridovi

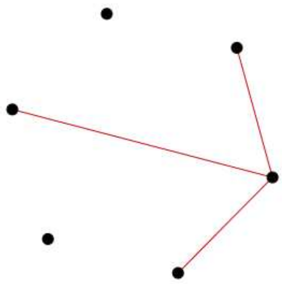
Promotrimo slike 4.2 - 4.4. Plavi i crveni bridovi su izdvojeni kako bi nam pomogli vizualizirati dokaz našeg teorema.

Primijetimo da nijedan od 10 trokuta koji su formirani vrhovima 2-obojenog grafa na slici 4.2 ne tvori monokromatski podgraf $K_3$ (bilo crveni ili plavi). Nakon što smo pronašli odgovarajući primjer, zaključujemo da je $R(3,3) > 5$.

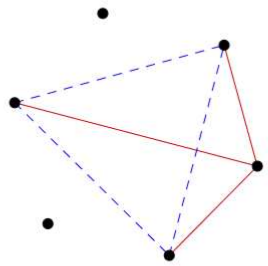
Nadalje, promatrat ćemo potpuni graf $K_6$. Uzmimo proizvoljan vrh $v$ iz potpunog grafa $K_6$. Primijetimo da po principu golubinjaka za taj vrh moraju postojati najmanje tri vrha koji su s njime povezani bridovima iste boje. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je boja tih bridova crvena (slika 4.5). Zatim, promatramo tri vrha susjedna vrhu $v$ preko crvenog brida (slika 4.6). Ako je bilo koji brid između dvaju od ovih triju vrhova obojan u crveno, tada postoji monokromatski trokut. S druge strane, ako niti jedan od bridova između ovih triju vrhova nije obojan u crveno, tada ta tri brida čine monokromatski trokut (slika 4.7).



Slika 4.5:



Slika 4.6:



Slika 4.7:

Pomoću bojanja grafova pokazali smo da, kako god krenuli bojati, garantirano ćemo dobiti crveni ili plavi monokromatski podgraf $K_3$. Dakle, vrijedi da je $R(3,3) \leq 6$ i $R(3,3) > 5$ čime dolazimo do tvrdnje teorema $R(3,3) = 6$. □

Pokazat ćemo još jednu zanimljivu metodologiju za dokazivanje vrijednosti još jednog dijagonalnog Ramseyjevog broja $R(4,4)$. Prije toga uvodimo definiciju koja će nam biti od koristi:

**Definicija 4.3.5.** *Neka je* $(a,n) = 1$. *Neka je* $a \in \mathbb{Z}_n$. *Ako kongruencija*

$$x^2 \equiv a \pmod{n},$$

*ima rješenje u* $\mathbb{Z}$, *onda kažemo da je* $a$ ***kvadratni ostatak modulo*** $n$.

**Teorem 4.3.6.** *Vrijedi* $R(4,4) = 18$.

*Dokaz.* Prvo pokušajmo odrediti gornju ogradu vrijednosti broja $R(4,4)$. Koristeći nejednakost pokazanu u teoremu 4.1.2, primjer 4.3.3 i teorem 4.1.1, imamo:

$$R(4,4) \leq R(4,3) + R(3,4) = 9 + 9 = 18.$$

Kako bismo pokazali da je $R(4,4) > 17$, dat ćemo primjer 2-obojenog grafa $K_{17}$ koji nema monokromatski potpuni podgraf $K_4$. Prvo, promotrimo $\mathbb{Z}_{17}$, čije ćemo elemente radi jednostavnosti notacije identificirati s njihovim predstavnicima $0, 1, \ldots, 16$ u $\mathbb{Z}$. Neka skup $\{0, 1, \ldots, 16\}$ predstavlja vrhove grafa $K_{17}$. Pojedini brid u grafu ćemo bojati ovisno o vrijednosti $v_i - v_j$ mod 17. Ukoliko je razlika između dva brida kvadratni ostatak u $\mathbb{Z}_{17}$, bojamo taj brid u crveno, a ukoliko nije, bojamo u plavo.

Pretpostavimo da imamo četiri vrha koji su svaki sa svakim povezani bridovima iste boje. Bez smanjenja općenitosti, neka su to vrhovi u skupu $\{0, a, b, c\}$. S obzirom da su svi bridovi koji povezuju ove vrhove iste boje, vrijedi da su sve vrijednosti $a, b, c, a-b, a-c, b-c$ istovremeno ili kvadratni ostaci ili ne.

Primijetimo da, s obzirom da $a$ nije element 0 u $\mathbb{Z}_{17}$, a $\mathbb{Z}_{17}$ je polje jer je 17 prost broj, možemo cijeli skup pomnožiti s $a^{-1}$. S obzirom da je produkt kvadratnog ostatka i kvadratnog neostatka uvijek kvadratni neostatak, produkt dvaju kvadratnih ostataka uvijek kvadratni ostatak te produkt dvaju kvadratnih neostataka uvijek kvadratni ostatak, takvim množenjem dobit ćemo skup koji također ima svojstvo da su svi njegovi elementi istovremeno ili kvadratni ostaci ili ne. Ako stavimo $B = b \cdot a^{-1}$ i $C = c \cdot a^{-1}$, tada dobivamo novi skup brojeva $\{1, B, C, 1-B, 1-C, B-C\}$. Budući da je 1 kvadratni ostatak modulo 17, i ostali elementi novog skupa moraju biti kvadratni ostaci modulo 17. No, skup kvadratnih ostataka skupa $\mathbb{Z}_{17}$ jest $\{1, 2, 4, 8, 9, 13, 15, 16\}$ te možemo primijetiti da nijedan odabir vrijednosti za $B$ i $C$ ne može svaki element u tom skupu učiniti kvadratnim ostatkom. Ovom činjenicom smo došli do kontradikcije, što znači da $R(4,4) \nleq 17$ (posljedično, mora vrijediti $R(4,4) > 17$). Uzimajući u obzir upravo pokazanu tvrdnju i gornju ocjenu vrijednosti za $R(4,4)$, vidimo da vrijedi

$$17 < R(4,4) \leq 18,$$

što implicira činjenicu da je $R(4,4) = 18$. $\square$

# Poglavlje 5

# Primjena Ramseyjeve teorije na konkretne probleme

Dosad smo se fokusirali samo na važne rezultate Ramseyjeve teorije, no sad ćemo pokazati kako Ramseyjeva teorija i Ramseyjevi brojevi mogu biti korisni ne samo u teoriji grafova, već u rješavanju određenih konkretnih problema. Najčešće je najteži dio vidjeti ili shvatiti da se problem može riješiti pomoću ovog znanja.

U ovom poglavlju ćemo izložiti neke primjere takvih problema i pokušati ih riješiti prevođenjem u teoriju grafova, što će predstavljati najveći izazov.

**Primjer 5.0.1.** *Pri organizaciji šahovskog turnira, organizatori pokušavaju pronaći minimalan broj natjecatelja, a da se određeni uvjeti zadovolje. U svakom trenutku među igračima oni moraju pronaći petero natjecatelja koji su već odigrali partiju međusobno ili moraju pronaći grupu od četvero igrača među kojima nitko nije ni s kim igrao.*

*Prevedimo ovaj primjer šahovskog turnira u graf. Zanima nas minimalan broj vrhova potpunog grafa u kojem bilo koje bojanje bridova s* $2$ *boje (neka crvena boja predstavlja da su dva igrača već igrala, a plava da nisu) možemo pronaći crveni podgraf* $K_5$ *ili plavi podgraf* $K_4$.

*Možemo zaključiti da se radi o Ramseyjevom broju* $R(5,4)$. *Budući da je dosta teško odrediti ovaj broj, pročitat ćemo ga iz tablice 4.1. Nalazimo da je*

$$R(5,4) = 25.$$

*Dakle, za šahovski turnir mora se prijaviti najmanje* $25$ *igrača kako bi organizatori bili sigurni da će u svakom trenutku moći naći grupu od* $5$ *igrača koji su svi već igrali međusobno ili grupu od* $4$ *igrača takvu da nitko nije igrao ni s kim.*

**Primjer 5.0.2.** *Novi poduzetnik osniva svoju tvrtku. Kao i svaki poduzetnik, želi zaposliti ljude koji će mu biti od koristi. Zanima ga minimalni broj djelatnika koje treba zaposliti* *kako bi svaki tjedan na sastanku okupio grupu od osam ljudi koji će moći svi međusobno sudjelovati na projektu ili grupu od troje ljudi koji ni na koji način neće moći surađivati. Tada bi na primjer ta grupa mogla biti otpuštena zbog neispunjavanja obaveza, ali bi bio siguran da bi grupa od osam ljudi svakako mogla dobro obaviti zadatak. Naravno, pri svakom otkazu poduzetnik bi morao zapošljavati tri nova zaposlenika.*

*Prevedimo sad problematiku ovog primjera u teoriju grafova. Tražimo potpuni graf koji će za bilo koje 2-bojanje svojih bridova sadržavati crveni podgraf $K_3$ ili plavi podgraf $K_8$. Crveni bridovi povezuju one parove djelatnika koji ne mogu surađivati, a plavi bridovi povezuju parove djelatnika koji mogu surađivati. Dakle, tražimo Ramseyjev broj $R(3,8)$. Ovaj broj bi također bio prezahtjevan za odrediti u ovom radu pa njegovu vrijednost čitamo iz tablice 4.1. Nalazimo da je njegova vrijednost*

$$R(3,8) = 28.$$

*Stoga se poduzetnik mora pobrinuti da svaki tjedan ima najmanje* 28 *zaposlenika kako bi imao grupu od osam ljudi koji međusobno mogu surađivati ili grupu od tri osobe koje međusobno ne mogu surađivati.*

Dali smo dva primjera kako utvrditi vrste problema koji se mogu riješiti primjenom Ramseyeve teorije. Pomaže nam kada za određene podskupine koje su povezane određenim svojstvima moramo pronaći skupinu koja ih sigurno sadrži. Također, moguće je primijeniti Ramseyevu teoriju kako bi se odredila minimalna veličina grafa koja garantira postojanje podgrafa s određenim svojstvom.

Do sada smo uglavnom istraživali odnos veličine potpunog grafa i veličine njegovih potpunih podgrafova. Međutim, moguće je koristiti Ramseyevu teoriju i u drugom smjeru - za određivanje veličine najvećeg monokromatskog podgrafa koji sigurno možemo pronaći unutar određenog grafa, ovisno o njegovoj veličini. Kako bi bilo jasnije što želimo pokazati, promotrimo sljedeći primjer.

**Primjer 5.0.3.** *Svake godine u prvi razred srednje škole upisuje se* 200 *učenika. Ravnatelj želi formirati što veću skupinu učenika koji već pohađaju prvi razred srednje škole kako bi preko ljeta pripremali nove učenike za prvu godinu. Ne želi da na te pripreme za upis u srednju školu neki učenik mora dugo putovati. Budući da ne želi da neki učenici u grupi imaju prednost u odnosu na druge u smislu udaljenosti od ostalih članova, želi sastaviti grupu na način ili da najveća udaljenost između bilo kojih dvaju učenika u skupini nije veća od* 5 *kilometara ili je minimalna udaljenost između njih najmanje* 5 *kilometara. Opet, prvo prevodimo problematiku ovog primjera u teoriju grafova. Imamo potpuni graf na* 200 *vrhova (učenika) i neke proizvoljne dvije boje bridova između učenika. Neka crvena boja predstavlja udaljenost između dvaju učenika manju od* 5 *kilometara, a plava neka predstavlja udaljenost između dvaju učenika veću od ili jednaku* 5 *kilometara.*

*Pitamo se koliko veliki monokromatski potpuni graf sigurno možemo pronaći u 2-obojenom potpunom grafu* $K_{200}$. *Mogli bismo pokušati s nejednakostima koje smo naučili, ali dobili bismo jako grube procjene za to. Druga ideja je jednostavno poslužiti se tablicom 4.1. Provjerimo dakle u kojim rubovima dijagonalnih ćelija se nalazi broj* 200. *Nalazimo da na potpunom grafu s* 200 *vrhova, za proizvoljno bojanje s dvije boje, možemo sigurno pronaći monokromatski podgraf reda* 6*, budući da je* $R(6,6) \leq 165$. *Međutim, donja granica za* $R(7,7)$ *u ocjeni* $205 \leq R(7,7) \leq 450$ *veća je od* 200*, što znači da za graf* $K_{200}$ *postoji "loše" 2-bojanje bridova što se tiče postojanja monokromatskog podgrafa reda* 7.

*Slijedi da među* 200 *učenika sigurno možemo pronaći skupinu od šest učenika koji su međusobno udaljeni manje od* 5 *kilometara u parovima ili skupinu od šest učenika u kojoj je svaki par učenika međusobno udaljen više od* 5 *kilometara.*

# Poglavlje 6

# Algoritam za računanje Ramseyjevih brojeva

U ovom poglavlju pokušat ćemo što bolje približiti metodu za računanje ocjena za Ramseyjeve brojeve koju je osmislio i objasnio Barton u svom članku *Ramsey Theory* [1]. Metoda je stvorena kako bi poboljšala poznate ocjene Ramseyjevih brojeva. Metoda zahtjeva sposobnost generiranja svih 2-obojenih potpunih grafova određenog reda te analizu svih monokromatskih podgrafova koji zadovoljavaju uvjete iz definicije zadanog Ramseyjevog broja.

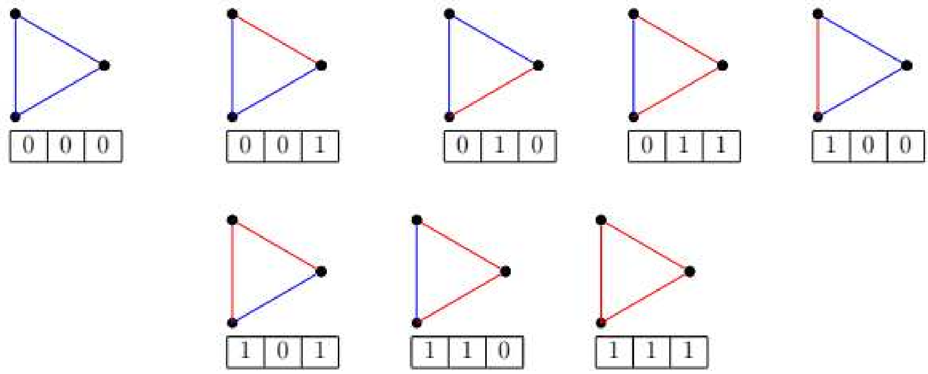
Metoda koju je Barton osmislio računa sva moguća 2-bojanja potpunih grafova (čak i ona koja su slično strukturirana ili za koja se zna da već sadrže monokromatske potpune podgrafove) i iterativno prolazi kroz svaki potpuni podgraf veličine analizirane Ramseyjevim brojem (na primjer: svi mogući $K_5$-podgrafovi ako se računa Ramseyjev broj $R(5,5)$).

Barton u tom članku želi naznačiti kako ovo nije jedini način na koji se može pristupiti navedenom problemu, te da njegova metoda nije najučinkovitija, već predstavlja ideju pomoću koje bi se mogle izračunati te ograde. Također se nada kako će taj kod biti osnova za druge koji će ga eventualno nadograđivati i poboljšavati kako bi generirali razumljivu i učinkovitu računsku metodu za određivanje točnih vrijednosti za Ramseyjeve brojeve.

U sljedećim potpoglavljima ćemo detaljno razraditi kako Bartonov algoritam funkcionira.

## 6.1 Struktura podataka za prikaz bojanja potpunih grafova u računalu

Na početku, pojasnit ćemo način kako se u Bartonovu algoritmu generiraju svi 2-obojeni grafovi. To zahtijeva reprezentaciju svakog pojedinog brida u grafu, koji može biti obojan u 2 boje, na primjer u crvenu ili plavu boju. Ovakav zahtjev motivira nas za korištenje binarnih brojeva kao jedan od mogućih načina predstavljanja svih bridova u grafu. Možemo prikazati bilo koji graf kao niz binarnih brojeva (niz nula i jedinica), čija određena lokacija bita odgovara određenom bridu koji je obojen crvenom ili plavom bojom. To zahtijeva $\binom{n}{2}$-bitni niz za dani $K_n$, kako bi se uzelo u obzir svih $\binom{n}{2}$ bridova. Prednost takve metode jest što znamo da postoji mogućih $2^{\binom{n}{2}}$ bojanja grafa $K_n$, a štoviše možemo pridružiti svakom broju od 0 do $2^{\binom{n}{2}} - 1$ jedinstvenu reprezentaciju binarnim nizom. Točnije, skup svih jedinstvenih reprezentacija će odgovarati skupu svih $\binom{n}{2}$-bitnih nizova nula i jedinica, što znači da smo uzeli u obzir sva moguća bojanja grafa $K_n$ dvjema bojama (vidi sliku 6.1 ispod kao primjer).



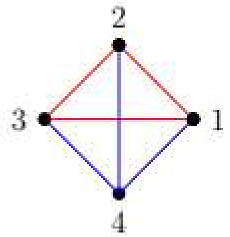

Slika 6.1: Grafička reprezentacija svakog bojanja grafa $K_3$ i odgovarajući binarni niz. Svaki bit odgovara bridu te poprima vrijednost 1 ako je brid obojan u crveno ili 0 ako je obojan u plavo.

## 6.2 Stvaranje matrica susjedstva

Iako je stvaranje binarnih reprezentacija 2-obojenih potpunih grafova korisno, nije vrlo intuitivno kako ih analizirati. Radi efikasnosti, Barton koristi matrice susjedstva kako bi opisao 2-obojene potpune grafove. Prije daljnjeg opisa metode, kako bi bilo jasnije o čemu pričamo, uvest ćemo definiciju matrice susjedstva.

**Definicija 6.2.1.** ***Matrica susjedstva*** *grafa $G$ je $v \times v$ matrica $A(G) = [a_{ij}]$, gdje je $a_{ij}$ broj bridova koji spajaju vrhove $v_i$ i $v_j$. Matrica susjedstva je simetrična matrica ($a_{ij} = a_{ji}$), čiji su elementi nenegativni cijeli brojevi.*

Matrica susjedstva se često koristi za unos grafa u računalo, iako nije optimalan način pohrane.




| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Slika 6.2: Tri ekvivalentne reprezentacije 2-obojenog grafa $K_4$. Grafički prikaz odgovara nizu bitova dodjeljivanjem svakoj boji brida bit 0 (ako je plava) ili 1 (ako je crvena). Bitovi, krenuvši od kraja, odgovaraju bridovima između vrhova $(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)$ redom. Matrica susjedstva je povezana s grafom na način da element $(i, j)$ odgovara boji brida $(i, j)$ u grafu, $-1$ ako je plavi te 1 ako je crveni.

Budući da u ovoj metodi proučavamo potpune 2-obojene grafove, njima ćemo pridružiti malo drugačije definirane matrice susjedstva: svaki element te matrice poprimat će vrijednosti $-1, 0$ ili 1, gdje $-1$ predstavlja plavi brid između vrhova $v_i$ i $v_j$, 1 predstavlja crveno obojani brid između $v_i$ i $v_j$ te je 0 rezerviran za elemente na dijagonali jer nema bridova između vrhova $v_i$ i $v_i$. Razlog za korištenje vrijednosti $-1$ i 1 jest da bismo mogli razlikovati crvene i plave monokromatske podgrafove.

Kako bi se konstruirala takva matrica susjedstva za zadani 2-obojeni potpuni graf, njegov binarni niz prenosi se u matricu susjedstva dodjeljivanjem svakog bita u nizu na mjesto u matrici susjedstva tako da vrijednost 1 bit proizvodi vrijednost 1 na dodijeljenoj lokaciji matrice, a vrijednost 0 bit proizvodi $-1$ u dodijeljenoj lokaciji matrice (pogledajte sliku 6.2 za primjer).

Potrebno je još pojasniti kako se element niza bitova dodjeljuje elementu matrice susjedstva. Kada dodjeljujemo element iz niza bitova matrici susjedstva na poziciji $(i, j)$, taj element niza bitova također dodjeljujemo i elementu na poziciji $(j, i)$, zbog simetrije. Popunjavanje se vrši na način da se daje prioritet popunjavanju svakog retka redom (popunjavanje se vrši redak po redak). Na primjer, da bismo ispunili $n \times n$ matricu susjedstva, dodijelili bismo prvi bit elementu na poziciji $(1, 2)$, drugi elementu na poziciji $(1, 3)$ i tako dalje. Zatim, kada se $(n - 1)$-vi bit dodijeli vrijednosti u matrici na poziciji $(1, n)$, $n$-ti bit počinje popunjavati sljedeći red na poziciji $(2, 3)$, $(n + 1)$-vi bit popunjava vrijednost na poziciji $(2, 4)$, sve dok zadnja tri bita ne popune vrijednosti na pozicijama redom $(n - 2, n - 1), (n - 2, n)$ i $(n - 1, n)$.

## 6.3 Ispitivanje monokromatskih podgrafova

Pojasnit ćemo što točno radimo kada želimo ispitati nalazi li se monokromatski potpuni podgraf određene veličine u nekom grafu.

Jedan od načina kako pomoću matrice susjedstva zadanog 2-obojenog grafa $K_n$ ispitati je li neki njegov podgraf $K_k$ monokromatski jest pomnožiti je matricom susjedstva podgrafa $K_k$, pri čemu je matrica susjedstva podgrafa $K_k$ također reda n, s nulredcima i nulstupcima koji odgovaraju vrhovima grafa $K_n$ koji nisu vrhovi podgrafa $K_k$. Na primjer, ispitivanje je li neki $K_5$-podgraf u grafu $K_{43}$ monokromaski svodi se na množenje dviju kvadratnih matrica reda 43. Matrica susjedstva podgrafa čiju monokromatiku ispitujemo, ima broj 1 na svakoj poziciji koja odgovara bridu između vrhova u $K_5$-podgrafu.

**Primjer 6.3.1.** *Primjer ispitivanja monokromatskog podgrafa u 2-obojenom grafu $K_4$. Matrica susjedstva za 2-obojen graf $K_4$ je pomnožena s matricom susjedstva pridruženom potpunom grafu između vrhova $1, 2, 3 \in K_4$. Rezultirajuća matrica ima vrijednost 2 na pozicijama $(i, i)$, za $i \in \{1, 2, 3\}$, što pokazuje da 2-obojen graf $K_4$ ima monokromatski $K_3$-podgraf između vrhova $1, 2, 3$.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Promatrajući gornji primjer 6.3.1, vidimo da se važne informacije mogu iščitati iz glavne dijagonale rezultirajuće matrice. Ukoliko ispitujemo monokromatiku podgrafa $K_k$, elementi na pozicijama $(x, x)$ u rezultirajućoj matrici, gdje $x$ ide po indeksima vrhova od $K_k$, bit će svi jednaki $k - 1$ ili svi jednaki $-(k - 1)$ ako je $K_k$ monokromatski. Razlog tome je struktura matrice susjedstva 2-obojenog grafa $K_n$ koja ima vrijednost 1 odnosno $-1$ na poziciji koja odgovara crvenom odnosno plavom bridu pa množenje matricom susjedstva monkromatskog podgrafa $K_k$ za svaki njegov vrh identificira $k - 1$ s tim vrhom incidentan brid iste boje.

Možemo zaključiti kako ovom metodom možemo ispitati prisutstvo svih mogućih monokromatskih podgrafova $K_k$. Barton ističe kako je ova metoda spora jer testira sve moguće kombinacije vrhova za monokromatski podgraf veličine koju ispitujemo. Ako je monokromatski podgraf nađen, metoda nastavlja dalje na sljedeći 2-obojen graf $K_n$ te testira njegovu matricu susjedstva za monokromatski podgraf $K_k$. Naposljetku, ili postoji 2-obojen graf $K_n$ u kojem ne postoji monokromatski podgraf $K_k$ ili su sva bojanja grafa $K_n$ dvjema bojama procijenjena uspješnima za monokromatske podgrafove $K_k$ te su uvjeti za Ramseyjev broj $R(k, k)$ zadovoljeni.

# Bibliografija

[1] L. Barton, *Ramsey Theory*, Whitman College, University in Walla (2016).

[2] J. M. Hariss, J. L. Hirst i M. J. Mossinghoff, *Combinatorics and Graph Theory*, Springer Science+Business Media, LLC, 2008.

[3] B. M. Landman i A. Robertson, *Ramsey Theory on the Integers*, American Mathematical Society, 2014.

[4] I. Nakić, *Diskretna matematika, skripta, PMF – Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu*, 2011./2012.

[5] B. Širola, *Algebarske strukture, skripta, PMF – Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu*.

# Sažetak

U ovom diplomskom radu razmotrili smo osnovne teoreme Ramseyjeve teorije te se također usredotočili na ranu fazu njezina razvoja. Pokazali smo kako je računanje Ramseyjevih brojeva vrlo zahtjevan proces, pri čemu je do danas poznato samo 9 netrivijalnih Ramseyjevih brojeva. Nadalje, ukazali smo na primjene Ramseyjeve teorije u rješavanju problema iz stvarnog života. Konačno, predstavili smo jedan od mogućih algoritama za računanje Ramseyjevih brojeva.

# Summary

In this master's thesis, we considered the basic theorems of Ramsey theory and focused on the early stage of its development. We have shown that the computation of Ramsey numbers is a very demanding process, as only 9 non-trivial Ramsey numbers are known to date. In addition, we highlighted the applications of Ramsey theory in solving real-life problems. Finally, we presented one of the possible algorithms for computing Ramsey numbers.

# Životopis

Ana Flanjak rođena je 11.11.1998. u Zagrebu. Godine 2004. preselila se u grad Slunj, gdje je pohađala Osnovnu školu te Opću gimnaziju. Nakon završetka srednjoškolskog obrazovanja, ponovno se vratila u Zagreb, gdje je 2017. upisala studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu. Po završetku preddiplomskog studija 2020. godine, stekla je titulu sveučilišne prvostupnice matematike te upisala studij Financijske i poslovne matematike na istome fakultetu.