Binomni koeficijenti i primjene

Zajec, Jurica

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Jurica Zajec

BINOMNI KOEFICIJENTI I PRIMJENE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc. dr. sc. Sonja Žunar

Zagreb, srpanj, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Neka su n i k nenegativni cijeli brojevi takvi da vrijedi $n \geq k \geq 0$. Neka skup S ima n elemenata. Binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ je broj svih $k-$članih podskupova skupa S, tj. broj kombinacija k-tog razreda od n elemenata. U ovome radu proučavamo binomne koeficijente, s naglaskom na njihova svojstva, primjene i ulogu u nastavi matematike. Osim primjena binomnih koeficijenata u kombinatorici i vjerojatnosti, spomenut ćemo njihovu povezanost sa i primjene u algebri, matematičkoj analizi, geometriji te u računalstvu. Rad se sastoji od triju poglavlja.

Prvo poglavlje počinje uvođenjem gore spomenute kombinatorne definicije binomnih koeficijenata. Poglavlje se dijeli na dva potpoglavlja od kojih prvo sadrži spomenutu definiciju binomnih koeficijenata te niz alternativnih definicija koje navodimo kao karakterizacije binomnih koeficijenata u obliku propozicija dok se u drugom potpoglavlju iskazuju i dokazuju neka dodatna svojstva binomnih koeficijenata.

U drugom poglavlju proučavamo ulogu binomnih koeficijenata u nastavi matematike. Navodimo na koje načine i u kojem ih razredu možemo uvesti u nastavu. Prezentiramo neke primjere i aktivnosti vezane uz obradu faktorijela i binomnih koeficijenata u srednjoškolskoj matematici. Na kraju poglavlja obrađujemo binomne koeficijente na sveučilišnoj razini.

U posljednjem poglavlju povezujemo prva dva poglavlja te primjerima prikazujemo primjene binomnih koeficijenata. Proučavamo njihovu vezu s kompleksnih brojevima i Pascalov trokut te pokazujemo kako isprogramirati ispis prvih nekoliko redova istog. U ovom potpoglavlju ujedno povezujemo geometriju, teoriju brojeva i računalstvo. Na koncu ćemo se dotaknuti binomne distribucije te Galtonove daske koja je dobar primjer pojavljivanja binomnih koeficijenata u pokusu.

Poglavlje 1

Binomni koeficijenti

1.1 Definicije binomnog koeficijenta

Binomne koeficijente možemo definirati kombinatorno, rekurzivno, pomoću binomnog teorema te pomoću faktorijela. Kombinatorno[1] ćemo definirati binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ kao broj načina na koji možemo odabrati $k-$člani podskup iz $n-$članog skupa, a pomoću te definicije dokazat ćemo ekvivalentnost preostalim definicijama.

Definicija 1.1.1. *Neka su n i k nenegativni cijeli brojevi takvi da vrijedi $n \geq k \geq 0$. Neka skup S ima n elemenata.* ***Binomni koeficijent*** $\binom{n}{k}$ *je broj svih $k-$članih podskupova skupa S. Binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ čitamo: n povrh k.*

Promotrimo rubne vrijednosti za $k = 0$ i $k = n$. U slučaju da je $k = 0$, imamo $\binom{n}{0} = 1$ jer svaki konačan skup ima samo jedan podskup bez elemenata. Analogno, $\binom{n}{n} = 1$ jer u svakom konačnom skupu postoji samo jedan podskup maksimalnog broja elemenata.

Propozicija 1.1.2. *(Rekurzivna definicija binomnog koeficijenta) Neka su n i k nenegativni cijeli brojevi takvi da vrijedi $n - 1 \geq k \geq 1$. Tada vrijedi:*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Ova jednakost je poznata i kao Pascalovo pravilo.

Dokaz. Neka je S skup sa n elemenata. Tada je prema definiciji $\binom{n}{k}$ broj svih k-članih podskupova od S. Označimo sa K skup svih k-članih podskupova od S. Dakle, vrijedi

[1] Kombinatorika je grana matematike koja se bavi prebrojavanjem elemenata konačnih skupova u ovisnosti o poretku elemenata.

$|K| = \binom{n}{k}$. Neka je $a \in S$ te A skup svih k−članih podskupova od S takvih da ne sadrže a. Tada je njegov komplement $A^{\complement}$ u K skup svih k−članih podskupova od S koji sadrže a. Očito je $A \cap A^{\complement} = \emptyset$ i $A \cup A^{\complement} = K$. Imamo $|A| = \binom{n-1}{k}$ jer, da bismo konstruirali k-člani podskup skupa S koji ne sadrži a, biramo k elemenata iz $(n-1)$-članog skupa $S \setminus \{a\}$. Skup u $A^{\complement}$ možemo birati tako da prvo fiksiramo a kao jedan od njegovih elemenata, time a već zauzima jedno mjesto pa preostaje izabrati $k-1$ element iz skupa sa $n-1$ elementom (a smo već odabrali pa skup više nema n elemenata nego $n-1$ element). Stoga je broj skupova u $A^{\complement}$ dan sa $\left|A^{\complement}\right| = \binom{n-1}{k-1}$. Budući da je skup K disjunktna unija skupova A i $A^{\complement}$, vrijedi $|K| = |A| + \left|A^{\complement}\right|$, to jest vrijedi

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

□

Propozicija 1.1.3. *(Karakterizacija binomnih koeficijenata pomoću binomnog teorema) Neka su n i k nenegativni cijeli brojevi takvi da je $n \geq k \geq 0$. Pogledajmo polinom $(x+1)^n$ realne varijable x. Koeficijent uz x^k u raspisu polinoma $(x+1)^n$ je binomni koeficijent $\binom{n}{k}$.*

Dokaz. Neka su n i k nenegativni cijeli brojevi takvi da je $n \geq k \geq 0$. Raspišimo potenciju binoma $(x+1)^n$ kao umnožak od n faktora

$$(x+1)^n = (x+1)(x+1) \cdot ... \cdot (x+1)(x+1).$$

Kada pomnožimo sve faktore na desnoj strani po principu "svaki sa svakim", rezultat će biti polinom stupnja n koji se sastoji od 2^n sumanada oblika x^k, gdje je $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, a koji se zatim grupiraju u $n+1$ sumanada međusobno različitih potencija. Da bismo prilikom množenja gornjih zagrada dobili jedan od sumanada oblika x^k, gdje je $k \in \{0, 1, 2, ..., n-1, n\}$, iz svake zagrade odaberemo ili x ili 1, pri čemu x biramo točno k puta, a 1 točno $n-k$ puta, čime dobivamo sumand:

$$x^k \cdot 1^{n-k} = x^k.$$

Dakle, biramo k zagrada (iz kojih ćemo odabrati x) od ukupno n zagrada, te će uz potenciju x^k na kraju našeg raspisa stajati broj takvih mogućih izbora, koji je prema definiciji binomnog koeficijenta upravo $\binom{n}{k}$. Time smo dobili da je u raspisu polinoma $(x+1)^n$ po potencijama od x, $\binom{n}{k}$ doista koeficijent uz x^k. □

Binom $(x+1)$ je samo jedan specijalan slučaj binoma $(x+y)$ gdje je $y = 1$. Navest ćemo binomni teorem koji daje formulu za izračun n−te potencije binoma $(x+y)^n$.

Teorem 1.1.4 (Binomni teorem)**.** *Neka je n strogo pozitivan cijeli broj. Tada za $x, y \in \mathbb{R}$ vrijedi jednakost*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom po n. Za bazu indukcije dokažimo da formula iz teorema vrijedi za $n = 1$. Očito je

$$(x+y)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x^1 y^0 + \binom{1}{1} x^0 y^1.$$

Dakle, baza indukcije je zadovoljena. Za korak indukcije pretpostavimo da formula binomnog teorema vrijedi za neki prirodni broj n i dokažimo da vrijedi za $n+1$. Imamo

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&= (x+y) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\
&= x \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k + y \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1} \\
&= \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k-1} x^{n-k} y^{k+1} + \binom{n}{n} y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{n-(k-1)} y^{(k-1)+1} + y^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k \right] + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] x^{n+1-k} y^k + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k,$$

gdje predzadnja jednakost vrijedi po propoziciji 1.1.2, pa formula vrijedi za $n + 1$. Prema tome po principu matematičke indukcije formula binomnog teorema vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$.

□

Prije sljedeće alternativne definicije binomnih koeficijenata, definirat ćemo bitne pojmove koje ćemo u njoj koristiti.

Definicija 1.1.5. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Produkt svih prirodnih brojeva manjih od ili jednakih n nazivamo* ***faktorijela*** *od n. Oznaka: $\prod_{i=1}^{n} i = n!$.*

Definicija 1.1.6. *Neka skup S ima n različitih elemenata. Svaka uređena $n-$torka međusobno različitih elemenata skupa S naziva se* ***permutacija*** *(bez ponavljanja) skupa S. Ukupan broj permutacija skupa S je $P(n) = n!$.*

Definicija 1.1.7. *Neka skup S ima n različitih elemenata. Svaki $k-$člani podskup skupa S zove se* ***kombinacija*** *$k-$**tog razreda** od n elemenata. Broj svih kombinacija $k-$tog razreda od n elemenata je $\binom{n}{k}$.*

Primijetimo da u definiciji 1.1.7 spominjemo binomni koeficijent. Možemo je shvatiti kao definiciju binomnog koeficijenta ekvivalentnu definiciji 1.1.1, samo je drugačije sročena i u njoj spominjemo kombinacije.

Lema 1.1.8. *(Faktorijelna definicija)*
Neka su n i k cijeli brojevi takvi da vrijedi $n \geq k \geq 0$. Tada vrijedi

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Dokaz. Neka su n i k cijeli brojevi takvi da je $n \geq k \geq 0$. Izraz $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ možemo raspisati koristeći definiciju faktorijela kao

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot ... \cdot(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} \tag{1.1}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdot ... \cdot(n-k+1)}{k!}. \tag{1.2}$$

Brojnik dobivenoga izraza je broj permutacija k elemenata iz $n-$članog skupa, tj. broj načina da prvo odaberemo k elemenata te ih permutiramo tako da je bitan redoslijed. Ako želimo prebrojiti samo načine da odaberemo k elemenata iz n-članog skupa, pri čemu nam poredak nije bitan, brojnik moramo podijeliti s "viškom", tj. brojem permutacija k elemenata, a to je točno $k!$. Dakle, razlomak na desnoj strani gornje jednakosti je broj načina odabira k elemenata iz $n-$članog skupa pa prema definiciji binomnog koeficijenta imamo

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}=\binom{n}{k},$$

tj. zbog gornje relacije jednakosti

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}=\binom{n}{k}.$$

□

1.2 Neka svojstva binomnih koeficijenata

U ovom ćemo poglavlju iskazati i dokazati neke bitne identitete te tvrdnje o binomnim koeficijentima. Kod dokazivanja ćemo koristiti raspis pomoću "faktorijelne definicije" 1.1.8 te algebarskom manipulacijom doći do traženog rezultata.

Propozicija 1.2.1. *(Simetričnost) Neka su n i k cijeli brojevi takvi da vrijedi $n \geq k \geq 0$. Tada vrijedi*

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}.$$

Dokaz. Krenut ćemo sa raspisivanjem desne strane jednakosti:

$$\binom{n}{n-k}=\frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}$$

$$=\frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$=\binom{n}{k}.$$

□

Na analogan način možemo dokazati Pascalovo pravilo iz propozicije 1.1.2.

Alternativni dokaz propozicije 1.1.2. Želimo dokazati

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Imamo

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} &= \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-k+1)!(k-1)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(n-1-k)!k!} + \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \\
&= (n-1)!\left(\frac{1}{(n-1-k)!k!} + \frac{1}{(n-k)!(k-1)!}\right) \\
&= (n-1)!\left(\frac{1}{(n-1-k)!k(k-1)!} + \frac{1}{(n-k)(n-1-k)!(k-1)!}\right) \\
&= (n-1)!\left(\frac{n-k+k}{(n-1-k)!(n-k)k(k-1)!}\right) \\
&= (n-1)!\frac{n}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} \\
&= \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

□

Propozicija 1.2.2. *(Apsorpcija) Neka su n i k prirodni brojevi takvi da vrijedi $n \geq k \geq 1$. Tada vrijedi*

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

Dokaz. Imamo

$$k \cdot \binom{n}{k} = k \cdot \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

$$= k \cdot \frac{n(n-1)!}{(n-k)!k(k-1)!}$$

$$= n \cdot \frac{(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!}$$

$$= n \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

□

Propozicija 1.2.3. *Neka su n, m i k cijeli brojevi takvi da vrijedi $n \geq m \geq k \geq 0$. Tada vrijedi*

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}.$$

Dokaz. Imamo

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \frac{n!}{(n-m)!m!} \cdot \frac{m!}{(m-k)!k!}$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!} \cdot \frac{1}{(m-k)!k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-m)!}$$

$$= \binom{n}{k} \cdot \frac{(n-k)!}{(m-k)!(n-k-(m-k))!}$$

$$= \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}.$$

□

Alternativan, kombinatorni dokaz propozicije 1.2.3. Izraz $\binom{n}{m}$ možemo shvatiti kao broj načina da iz $n-$članog skupa C odaberemo m-člani podskup B, dok $\binom{m}{k}$ možemo shvatiti kao broj načina odabira k-članog podskupa A iz prethodno odabranog $m-$članog skupa B. Dakle, produkt $\binom{n}{m}\binom{m}{k}$, koji je na lijevoj strani jednakosti iz propozicije, jest broj načina da, za zadani n-člani skup C, odaberemo podskupove $A \subseteq B$ od C tako da A ima k, a B m elemenata. Gledajući desnu stranu jednakosti iz propozicije, $\binom{n}{k}$ nam daje broj načina odabira $k-$članog podskupa A zadanog $n-$članog skupa C, dok je $\binom{n-k}{m-k}$ broj načina biranja $(m-k)-$članog podskupa skupa $C \setminus A$. Prema tome, produkt $\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$ je broj načina da prvo odaberemo k elemenata koje želimo staviti u skup A pa zatim od preostalih $n-k$ elemenata odaberemo dodatnih $m-k$ elemenata (što je ujedno broj preostalih elemenata kod odabira k elemenata od m elemenata koji smo radili na lijevoj strani jednakosti) koji će zajedno s elementima skupa A činiti m-člani skup B. Drugim riječima, produkt $\binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$ je broj načina da, za zadani skup C, odaberemo podskupove $A \subseteq B$ od C tako da A ima k elemenata, a B m elemenata. S obzirom da smo u prvom dijelu dokaza točno na isti način opisali produkt $\binom{n}{m}\binom{m}{k}$, zaključujemo da vrijedi tražena tvrdnja

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}.$$

$\square$

Propozicija 1.2.4. *Neka su n i k cijeli brojevi takvi da vrijedi $n-1 \geq k \geq 0$. Tada vrijedi*

$$(n-k)\cdot\binom{n}{k} = n\cdot\binom{n-1}{k}.$$

Dokaz. Imamo

$$\begin{aligned}
(n-k)\cdot\binom{n}{k} &= (n-k)\cdot\frac{n!}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{(n-k)n!}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{(n-k)n!}{(n-k)(n-k-1)!k!} \\
&= \frac{n!}{(n-k-1)!k!} \\
&= \frac{n(n-1)!}{(n-1-k)!k!}
\end{aligned}$$

$$= n \cdot \frac{(n-1)!}{((n-1)-k)!k!}$$

$$= n \cdot \binom{n-1}{k}.$$

□

Propozicija 1.2.5. *Neka su n, m i k cijeli brojevi takvi da vrijedi $n \geq m+k, m \geq 0, k \geq 0$. Tada vrijedi*

$$\binom{n}{m}\binom{n-m}{k} = \binom{n}{m+k}\binom{m+k}{m}.$$

Dokaz. Imamo

$$\binom{n}{m}\binom{n-m}{k} = \frac{n!}{(n-m)!m!} \cdot \frac{(n-m)!}{(n-m-k)!k!}$$

$$= \frac{n!}{m!} \cdot \frac{1}{(n-m-k)!k!}$$

$$= \frac{n!}{m!(n-(m+k))!k!} \cdot \frac{(m+k)!}{(m+k)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-(m+k))!(m+k)!} \cdot \frac{(m+k)!}{k!m!}$$

$$= \binom{n}{m+k} \cdot \frac{(m+k)!}{(m+k-m)!m!}$$

$$= \binom{n}{m+k}\binom{m+k}{m}.$$

□

Propozicija 1.2.6. *Neka su n i k cijeli nenegativni brojevi takvi da vrijedi $n \geq k \geq 2$. Tada vrijedi*

$$k \cdot (k-1) \cdot \binom{n}{k} = n \cdot (n-1) \cdot \binom{n-2}{k-2}.$$

Dokaz. Imamo

$$\begin{aligned}
k \cdot (k-1) \cdot \binom{n}{k} &= k(k-1) \cdot \frac{n!}{(n-k)!k!} \\
&= k(k-1) \cdot \frac{n!}{(n-k)!k(k-1)(k-2)!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!(k-2)!} \\
&= \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-k)!(k-2)!} \\
&= n(n-1) \cdot \frac{(n-2)!}{(n-2-(k-2))!(k-2)!} \\
&= n \cdot (n-1) \cdot \binom{n-2}{k-2}.
\end{aligned}$$

□

Propozicija 1.2.7. *Neka su n i k cijeli brojevi takvi da vrijedi $n-1 \geq k \geq 0$. Tada vrijedi*

$$n \cdot \binom{n}{k} = k \cdot \binom{n}{k} + (k+1) \cdot \binom{n}{k+1}.$$

Dokaz. Imamo

$$\begin{aligned}
k \cdot \binom{n}{k} + (k+1) \cdot \binom{n}{k+1} &= k \cdot \frac{n!}{(n-k)!k!} + (k+1) \cdot \frac{n!}{(n-(k+1))!(k+1)!} \\
&= k \cdot \frac{n!}{(n-k)!k(k-1)!} + (k+1) \cdot \frac{n!}{(n-(k+1))!(k+1)k(k-1)!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{n!}{(n-(k+1))!k(k-1)!}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{n!}{(n-k)(n-k-1)!(k-1)!} + \frac{n!}{(n-(k+1))!k(k-1)!} \\
&= \frac{n! \cdot k + (n-k) \cdot n!}{(n-k)(n-k-1)!k(k-1)!} \\
&= \frac{(k+n-k)n!}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{n \cdot n!}{(n-k)!k!} \\
&= n \cdot \frac{n!}{(n-k)!k!} \\
&= n \cdot \binom{n}{k}.
\end{aligned}
$$

□

Propozicija 1.2.8. *Neka su n i k cijeli brojevi takvi da vrijedi $n - 1 \geq k \geq 0$. Tada vrijedi*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Ovu propoziciju možemo dokazati na dva načina:

Dokaz propozicije 1.2.8 pomoću binomnog teorema. Raspišimo potenciju binoma $(x+1)^n$ pomoću binomnog teorema:

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} \cdot 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k}.$$

Uvrštavanjem $x = 1$ u gornju jednakost imamo

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k},$$

tj. dobivamo traženu jednakost

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

□

Kombinatorni dokaz propozicije 1.2.8. Suma broja načina da odaberemo k-člani podskup nekog $n-$članog skupa S, odnosno $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$, očito je jednaka ukupnom broju svih podskupova $n-$članog skupa S, tj. kardinalitetu partitivnog skupa od S. U slučaju da je $k = 0$, tada imamo $\binom{n}{0} = 1$, što znači da možemo odabrati prazan skup samo jednom. Drugi način da odredimo ukupan broj podskupova n-članog skupa S jest razmišljati "binarno", tj. shvatiti ukupan broj podskupova n-članog skupa S kao broj različitih načina da konstruiramo njegov podskup, i to prolazeći nekim redom po njegovih n elemenata i za svaki element donoseći odluku hoćemo li taj element uključiti u podskup ili ne. Kako pri svakoj odluci imamo dvije moguće opcije, a donosimo točno n odluka jer skup S ima n elemenata, slijedi da je broj svih podskupova skupa S jednak 2^n. Budući da smo u prvom dijelu dokaza vidjeli da je taj broj jednak $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$, slijedi da je

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n.$$

$\square$

Propozicija 1.2.9. *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Tada vrijedi*

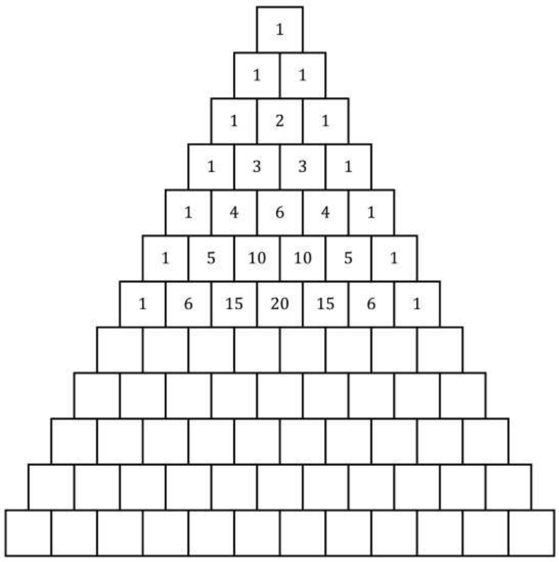
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = 0.$$

Dokaz. Po binomnom teoremu vrijedi $(x + 1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$. Ako u izraz uvrstimo $x = -1$, vrijedi $(-1 + 1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$, tj. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = 0$. $\square$

Poglavlje 2

Binomni koeficijenti u nastavi

U hrvatskom školstvu binomni se koeficijenti prvi put spominju kod obrađivanja binomnog teorema u srednjoj školi, ali to ne znači da se ne koriste još prije u nastavi, npr. u osnovnoj se školi učenicima može pokazati Pascalov trokut kao sa slike 2.1 i već tada učenici pronalaze obrasce i pravilnosti u Pascalovom trokutu te po tome principu popunjavaju prazna polja. Dakle, koriste svojstva binomnih koeficijenata u Pascalovom trokutu, a da toga nisu ni svjesni (kao što i u raznim drugim situacijama u matematici ili nastavi matematike koristimo indirektno neke tvrdnje bez da smo ih svjesni ili da ulazimo u dublje shvaćanje). Nešto više o Pascalovom trokutu pričat ćemo u sljedećem poglavlju. Još jedna situacija u



Slika 2.1: Listić za Pascalov trokut

kojoj se već u osnovnoj školi prešutno radi s binomnim koeficijentima jest kad se bez znanja o binomnim koeficijentima, u osmom razredu upotrebljava specijalizacija binomnog teorema za $n = 2$ (kvadrat binoma). U nastavku ćemo spomenuti što se vezano uz binomne koeficijente obrađuje u školstvu, dat ćemo primjere zadataka počevši od trećih razreda pa sve do sveučilišne razine.

Srednja škola

Uvođenje binomnih koeficijenata u nastavi strukturirano je tako da se najprije definiraju faktorijele jer se koristi definicija preko faktorijela (vidi propoziciju 1.1.8). Faktorijele uvodimo najčešće primjerima koji uključuju neki poredak, neki od takvih primjera su broj načina na koje možemo učenike postaviti u red/vrstu ili oko okrugloga stola, broj načina na koji možemo uzeti neke različite predmete (redoslijed nam je bitan), broj načina na koji možemo zapisati četveroznamenkasti broj od $\{1, 2, 5, 6\}$ tako da koristimo svaki od brojeva jedanput (ako iskoristimo jedinicu na prvom mjestu, onda je više ne možemo koristiti na drugim mjestima).
U nastavku ćemo prikazati listić za obradu nastavne cjeline o faktorijelama.

Nastavni listić: Učiteljičin problem

Učiteljica četvrtog razreda želi učenike posložiti u vrstu. Tokom preslagivanja se umorila jer je stalno netko pričao pa je morala početi sve ponovno. Učiteljica je pokušala na 17 načina te se zapitala na koliko sveukupno načina može posložiti 16 učenika u vrstu. Pomozimo učiteljici u njezinim brigama. Pomoći ćemo joj kroz sljedeće korake:

1) Zapitajmo se na koliko bismo načina mogli poredati 2 učenika.

2) Izračunajte broj načina na koji možemo poredati učenike u vrstu ako su u razredu:
a) 3 učenika

b) 4 učenika

c) 5 učenika.

3) Sada kada smo riješili manje probleme, kako bismo riješili učiteljičin problem?

4) Kako biste izračunali broj načina da se posloži razred od n učenika u vrstu?

Upute i željeni način rješavanja:
Listić kreće od jednostavnog prema složenome te pritom poštuje sva didaktička načela u nastavi matematike. Učenici u prvom koraku rješavaju najosnovniji primjer i vide da imaju samo 2 načina jer biraju samo koji od dvoje učenika će biti na prvome odnosno zadnjem mjestu. Kod drugog koraka možemo dati "hint" da prvo gledaju 3 prazna mjesta u vrsti (ovdje možemo vizualizirati 3 prazne crtice, nastavnik ih može nacrtati na ploču pa individualno učenicima pomogne ukoliko zapnu) pa se zapitaju kako najefikasnije ispuniti ta mjesta učenicima. Ponovo krenimo s prvim mjestom, na koje možemo smjestiti jedno od troje učenika na 3 načina, na drugo mjesto možemo postaviti jedno od preostalo dvoje učenika kao u 1. koraku (ovdje učenici mogu na prazne crtice pisati $\underline{3}$ $\underline{2}$ $\underline{1}$ kao broj načina za svako mjesto kada već odaberemo prethodna mjesta). Za 2.b) učenicima napomenemo da se posluže idejom kao u prethodnom koraku. Kako imamo 4 učenika, na 4 načina možemo izabrati učenika koji će biti prvi u redu, zatim na 3 načina među ostalih 3 odabrati onoga tko će stati na drugo mjesto u redu, pa između preostalih dvaju odabrati onoga tko će stati na treće mjesto, i na kraju zadnji preostali učenik stane na kraj reda. Dakle, ukupno imamo 4 puta 3 puta 2 = 24 načina. Kod 2.c) koraka već uzorak postaje jasan te 5 učenika možemo rasporediti na 5 puta 4 puta 3 puta 2 = 120 načina. Nakon što smo dobili ideju rješavanja, vratimo se na početni učiteljičin problem gdje množimo sve prirodne brojeve od 2 do 16. Ovdje očekujemo da će učenici negodovati zbog količine računanja te tu uvodimo tehnologiju i objasnimo korištenje kalkulatora kod izračuna (gdje mogu naći znak "!" te kako ga upotrebljavati jer kod svakog kalkulatora je drugačije). Odgovor na gornji problem je da na 20922789888000 načina učiteljica može stvoriti vrstu od 16 učenika. Prije generalizacije možemo voditi diskusiju sa učenicima o odgovoru te razvijati njihovo kritičko razmišljanje. Pitanja koja možemo postaviti (ukoliko već učenici sami ne postave ili sami ne daju odgovor) su: Znate li pročitati ovaj ogroman broj (20922789888000 se čita kao dvadeset bilijuna devetsto dvadeset i dvije milijarde sedamsto osamdeset i devet milijuna osamsto osamdeset i osam tisuća)? Može li učiteljica isprobati sve načine tokom jednog školskog sata ili u jednom danu? Na koliko još načina učiteljica može učenike postaviti u vrstu? (Učiteljica još to može učiniti na 20922789887983 načina jer je već pokušala na 17 načina.) U gimnazijama s više sati matematike možemo i komentirati brzi rast faktorijela. U ovom listiću broj 16 je odabran jer donekle ima smisla kao broj učenika, a i da učenici dobiju zornost brzine rasta faktorijela, tj. da uvide da se samo dodavanjem jednog predmeta ili osobe, u skupinu od n članova, broj načina poretka poveća $n + 1$ puta. Moguće je da će većina učenika već na početku rješavanja shvatiti da imamo kod množenja i jedinicu jer će se pitati na koliko načina možemo poredati na posljednje mjesto preostalu osobu (vjerujemo da će nekima biti neobično za posljednje mjesto ne napisati ništa).

Nakon diskusije pustimo učenike da odgovore na četvrto pitanje, očekujemo da će najčešći odgovor biti $n!$ pa ih još dodatno možemo pitati kako bi izračunali taj broj bez kalkulatora te je očekivani odgovor oblika $n(n-1)(n-2)\cdot ... \cdot 2$. Odgovor prokomentiramo pitanjem "Koji nam prirodni broj još nedostaje u zapisu?" te kod odgovora koji je očito "Jedan" pitamo "Hoće li se u ikojem koraku s listića odgovor promijeniti ako još pomnožimo s 1?" (ovdje je očito odgovor da neće jer, kada bilo koji broj pomnožimo brojem 1, on se ne mijenja). Sada zapisujemo naslov Faktorijele, oznaku faktorijela te njihovu definiciju i formulu $n! = n(n-1)(n-2)\cdot ... \cdot 2 \cdot 1$.

Primijetimo da ovaj listić, čak i riješen, možemo iskoristiti i za obradu svojstva rekurzivnosti faktorijela $n! = n(n-1)!$ uz komentare kod 2. koraka počevši od 2.c), kada riješimo prvo mjesto u vrsti, možemo li nekako saznati i iskoristiti nešto iz prethodnog koraka, tj. da već imamo prethodni račun i produkt za $4\cdot 3\cdot 2$, odnosno $3\cdot 2$ za 2.b). Ovdje bi bila motivacija kako brže izračunati sve iznose iz zadataka. Ukoliko opet popunjavamo prazan listić, kod svakoga koraka nakon prvoga mjesta komentiramo da sada računamo kao u koraku neposredno iznad pa će učenici naslutiti, nakon uvođenja pojma faktorijela, da se rješenje pod 2.c) može zapisati kao $5\cdot 4!$, pod 2.b) kao $4\cdot 3!$, a za prethodna dva podzadatka kao $3\cdot 2!$ i $2\cdot 1!$, što je korisno napomenuti radi uvježbavanja zapisa. Prije obrade svojstva rekurzivnosti faktorijela možemo postaviti pitanje "Ako znamo da je $7! = 5040$, kako biste najbrže izračunali $8!$ bez korištenja kalkulatora?" (ovo pitanje može biti i za nagradnu peticu u rubrici Rješavanje problema jer je novonastali izazov).

Analogno se mogu napraviti listići za vježbu i za zadaću gdje učenici moraju izračunati kako poredati nešto (bilo jela na duguljasti pladanj jedno za drugim, učenike oko okruglog stola, presložiti cipele ili riješiti razne druge probleme u kojima je bitan poredak).

Motivacijski zadatak za binomne koeficijente može biti:

Mario ima 5 kutijica od kojih su 3 plave, a preostale su žute. Unutra su pokloni za njegovu curu i on ih želi poredati jednu iza druge u red od 5 kutijica. Kutijice jednakih boja ne razlikujemo. Na koliko načina on to može učiniti? Prije odgovora zapitajmo se sljedeće:
1) Na koliko načina možemo poredati 5 kutijica različitih boja?
2) Na koliko načina možemo poredati 3 plave kutijice različitih veličina?
3) Na koliko načina možemo poredati žute kutijice ako su one različitih veličina?
4) Na koliko načina možemo plave i žute kutijice iz zadatka možemo poredati na 5 mjesta?

5) Povežite zadatak 4) s prethodnim zadacima te pronađite ovisnost pojedinih rješenja iz 1), 2), 3) s rješenjem zadatka 4).

6) Kako biste riješili sličan zadatak gdje imamo n kutijica od kojih su k plave, a ostale žute?

Upute i željeni način rješavanja:
Učenici ne bi trebali imati problem s prva 3 zadatka te su odgovori redom $5! = 120$, $3! = 6$, $(5-3)! = 2! = 2$. Očekujemo da će u zadatku 4) raspisivati sve moguće slučajeve te ih prebrojiti, a traženi raspis bi trebao biti oblika (p,p,p,ž,ž), (p,p,ž,ž,p), (p,ž,ž,p,p), (ž,ž,p,p,p), (ž,p,ž,p,p), (p,ž,p,ž,p), (p,p,ž,p,ž), (ž,p,p,ž,p), (p,ž,p,p,ž) i (ž,p,p,p,ž). Ukoliko se to ne dogodi, nastavnik može savjetovati da se sistematski i strukturirano prebrojava gledajući žute kutijice i njihovu međusobnu udaljenost, tj. koliko plavih kutijica ima između njih (ako su žute kutijice jedna pokraj druge, tada kutijice možemo poredati na 4 načina, u slučaju da je između njih jedna plava na 3 načina, u slučaju da su između žutih kutijica 2 plave imamo 2 načina i, ako su sve tri plave između žutih, tada imamo samo jedan način). Nakon prebrojavanja konačan bi odgovor bio 10. U zadatku 4) očekujemo da učenici kombinacijom raznih računskih operacija iz rezultata zadataka 1), 2) i 3) pokušaju doći do 10 (rješenja iz zadatka 4)). Odgovor koji tražimo je $120 : (4 \cdot 3) = 10$ ili $\dfrac{120}{4 \cdot 3} = 10$. Savjeti kod rješavanja bi bila potpitanja poput: "Na koliko načina možemo posložiti 3 jednake žute kutijice? A 2 jednake plave? Zašto rezultat iz prvog zadatka nije točan odgovor na naš problem? Imamo li neka prebrojavanja viška u prvom zadatku? Ako da koliko više ima nepotrebnih prebrojavanja od potrebnih? Što mislite zašto je to tako? Što trebamo učiniti da bismo dobili točan broj načina?". Nakon što većina učenika dođe do rezultata, nastavnik objasni točan odgovor te slijedi generalizacija u šestom zadatku, čije je rješenje $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Primijetimo da u početnom problemu te u ostalim podzadacima nismo spomenuli da su žute kutijice dvije jer smo htjeli da učenici primijete da ih ima $n - k$. Zapišemo naslov Binomni koeficijenti, definiramo ih i povežemo s formulom iz motivacijskog primjera $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. U slučaju da su se oni spomenuli i definirali kombinatorno prije (ukoliko se prebrojavanje i kombinatorni zadaci rade prije), tada možemo ovaj primjer koristiti za otkrivanje svojstva zapisa binomnih koeficijenata pomoću faktorijela. Vezu bismo ustanovili tako da prilikom prebrojavanja biramo na koja tri mjesta od njih sveukupno pet možemo staviti plave kutijice, a odgovor je $\dbinom{5}{3} = 10$ (ili gledamo samo žute kutijice i dobivamo $\dbinom{5}{2} = 10$, što je zbog simetričnosti i jedinstvenosti rješenja jednako $\dbinom{5}{3}$).

U sljedećem ćemo zadatku navesti neke primjere tipova zadataka koji se pojavljuju.Nakon uvođenja faktorijela može se riješiti sljedeći zadatak.

Zadatak 1 Izračunaj:
a) $5!$ b) $\frac{3!4!}{5!6!}$.

Rješenja:
a) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$.

b) $\frac{3!4!}{5!6!} = \frac{3!4!}{5 \cdot 4 \cdot 3!6 \cdot 5 \cdot 4!} = \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5} = \frac{1}{600}$.

Zatim se definiraju binomni koeficijenti, najčešće pomoću faktorijela formulom $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$ (u nekim udžbenicima već se ranije definiraju prilikom obrade kombinacija kao u definiciji 1.1.1).Nakon te definicije mogu se riješiti zadaci sljedećeg tipa:

Zadatak 2 Izračunaj:
a) $\binom{3}{2}$ b) $\binom{30}{3} \cdot \binom{20}{4}$ c) $\binom{150}{148}$

Rješenja:
a) $\binom{3}{2} = \frac{3 \cdot 2}{2!} = \frac{6}{2} = 3$.

b) U ovom podzadatku samo treba binomne koeficijente raspisati pomoću faktorijelne definicije te pokratiti dobivene razlomke:

$$\begin{aligned}
\binom{30}{3} \cdot \binom{20}{4} &= \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3!} \cdot \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4!} \\
&= \frac{30 \cdot 29 \cdot 28}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{4 \cdot \cdot 3 \cdot 2} \\
&= \frac{10 \cdot 29 \cdot 14}{1} \cdot \frac{5 \cdot 19 \cdot 6 \cdot 17}{2} \\
&= 290 \cdot 14 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 3 \cdot 17 \\
&= 19670700.
\end{aligned}$$

Pod c) koristit ćemo svojstvo simetričnosti 1.2.1 u svrhu jednostavnijeg računa pa zatim izračunati:

c) $\binom{150}{148} = \binom{150}{150-148} = \binom{150}{2} = \frac{150 \cdot 149}{2!} = \frac{150 \cdot 149}{2} = 75 \cdot 149 = 11175$.

Zadatak 3 (Primjer kombinatornog zadatka) Koliko podskupova skupa $A = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ sadrži barem 7 elemenata?

Rješenje:
U zadatku je bitna riječ "barem", što znači da prebrojavamo one podskupove skupa A koji imaju najmanje 7 elemenata. Kako je $|A| = 10$, takvi podskupovi mogu imati 7, 8, 9 ili 10 elemenata. Budući da je broj elemenata svakog podskupa jednoznačno određen, dovoljno je međusobno zbrojiti brojeve k-članih podskupova od A, gdje je $k \in \{7, 8, 9, 10\}$. Broj sedmeročlanih podskupova od A, tj. broj načina odabira sedmeročlanog podskupa skupa A je $\binom{10}{7}$, osmeročlanog $\binom{10}{8}$, deveteročlanog $\binom{10}{9}$ i deseteročlanog $\binom{10}{10}$. Sveukupni broj načina je

$$\begin{aligned}
\binom{10}{7} + \binom{10}{8} + \binom{10}{9} + \binom{10}{10} &= \binom{10}{3} + \binom{10}{2} + \binom{10}{1} + \binom{10}{0} \\
&= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{6} + \frac{10 \cdot 9}{2} + 10 + 1 \\
&= 120 + 45 + 10 + 1 \\
&= 176.
\end{aligned}$$

Ovdje smo,analogno kao u 2.c) zadatku, u prvom retku koristili svojstvo simetričnosti da dobijemo manji raspis (time i manje množenja) pa smo binomne koeficijente raspisali pomoću faktorijela i izračunali. Konačan je odgovor, da podskup od barem 7 elemenata možemo odabrati na 176 načina ili da postoji 176 podskupova od A sa barem 7 elemenata.

Zadatak 4 Odredi prirodan broj n tako da zadovoljava jednadžbu:
a) $\dfrac{(n+2)!}{(n+1)!} = 5$ b) $\dbinom{n}{n-1} = \dbinom{n}{n-2}$.

Rješenja:
a) Imamo sljedeći niz međusobno ekvivalentnih jednadžbi:

$$\frac{(n+2)!}{(n+1)!} = 5$$

$$\frac{(n+2)(n+1)!}{(n+1)!} = 5 \qquad \text{Raspisujemo brojnik pomoću rekurzivnosti faktorijela.}$$

$$n+2=5 \qquad \text{Kratimo razlomak s } (n+1)!.$$
$$n=3.$$

Dakle, traženi broj n je broj 3.
b) Imamo sljedeći niz međusobno ekvivalentnih jednadžbi:

$$\binom{n}{n-1}=\binom{n}{n-2}$$

$$\binom{n}{n-(n-1)}=\binom{n}{n-(n-2)} \qquad \text{Koristimo svojstvo simetričnosti binomnih koeficijenata.}$$

$$\binom{n}{1}=\binom{n}{2}$$

$$n=\frac{n(n-1)}{2} \qquad \text{Raspišemo binomni koeficijent pomoću faktorijela.}$$
$$n(n-1)=2n \qquad \text{Unakrsno pomnožimo.}$$
$$n^2-n=2n$$
$$n^2-3n=0$$
$$n(n-3)=0. \qquad \text{Faktoriziramo kvadratnu jednadžbu.}$$

Sada iz jednadžbe $n(n-3)=0$ dobivamo da je $n=0$ ili $n-3=0$, tj. $n=3$, dakle $n\in\{0,3\}$.

Sljedeći zadaci koriste binomni teorem 1.1.4.

Zadatak 5 Koji se koeficijent nalazi uz:
a) x^6 u raspisu $(x+1)^8$
b) x^6 u raspisu $(4x-3)^7$?

Rješenja:
a) Raspišimo

$$(x+1)^8=\sum_{k=0}^{8}\binom{8}{k}x^{n-k}\cdot 1^k.$$

Vidimo da je koeficijent uz x^6 jednak $\binom{8}{2}$ ili $\binom{8}{6}$ jer općeniti izraz $x^{n-k}\cdot 1^k$ jednak je x^6 za $k=2$. Konačan odgovor je 28.

b) Raspišimo

$$(4x-3)^7 = \sum_{k=0}^{7} \binom{7}{k} (4x)^k \cdot (-3)^{7-k}.$$

Očito je da dobijemo koeficijent uz x^6 samo za $k = 6$ pa imamo da je pripadni pribrojnik dan sa

$$\binom{7}{k}(4x)^k \cdot (-3)^{7-k} = \binom{7}{6}(4x)^6 \cdot (-3)^1 = 7 \cdot 4^6 x^6 \cdot (-3) = -86016x^6.$$

Prema tome, koeficijent uz x^6 u raspisu izraza $(4x-3)^7$ je -86016.

Sveučilište

Derivacija umnoška funkcija

U četvrtom se razredu srednje škole obrađuju derivacije te upotrebljava formula za derivaciju umnoška funkcija

$$(f \cdot g)' = f'g + fg', \tag{2.1}$$

gdje su $f,\ g : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilne funkcije. Na sveučilišnoj se razini ova formula generalizira na formulu za $n-$tu derivaciju umnoška funkcija $(f \cdot g)^{(n)}$, čiji oblik možemo naslutiti iz direktnih raspisa izraza $(f \cdot g)^{(n)}$ za prvih nekoliko prirodnih brojeva n: Imamo da za $n = 1$ vrijedi (2.1). Deriviranjem formule (2.1) dobivamo da vrijedi

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)^{(2)} &= (f'g + fg')' \\
&= (f'g)' + (fg')' \\
&= f^{(2)}g + f'g' + f'g' + fg^{(2)} \\
&= f^{(2)}g + 2f'g' + fg^{(2)}.
\end{aligned}$$

Nadalje, deriviranjem upravo dobivene formule dobivamo i formulu

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)^{(3)} &= (f^{(2)}g + 2f'g' + fg^{(2)})' \\
&= (f^{(2)}g)' + (2f'g')' + (fg^{(2)})' \\
&= f^{(3)}g + f^{(2)}g' + 2f^{(2)}g' + 2f'g^{(2)} + f'g^{(2)} + fg^{(3)} \\
&= f^{(3)}g + 3f^{(2)}g' + 3f'g^{(2)} + fg^{(3)}.
\end{aligned}$$

Iz ovih primjera naslućujemo da vrijedi sljedeća opća formula za svaki $n \in \mathbb{N}$:

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}. \tag{2.2}$$

Dokažimo formulu (2.2) matematičkom indukcijom po $n \in \mathbb{N}$. Formula (2.1) pokazuje da (2.2) vrijedi za $n = 1$, što daje bazu indukcije. Za korak indukcije, pretpostavimo da (2.2) vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$. Tada imamo

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n+1)} &= \left[\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}\right]' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k)} g^{(n-k)}\right)' \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n-k+1)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k+1)} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
\binom{n}{n} f^{(n+1)} \cdot g &+ \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n}{0} f g^{(n+1)} \\
&= \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g + \left[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}\right] + \binom{n+1}{0} f g^{(n+1)} \\
&= \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)} g + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{0} f g^{(n+1)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)}
\end{aligned}$$

dakle formula (2.2) vrijedi i za $n + 1$. Prema tome, po principu matematičke indukcije formula (2.2) vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$.

Proširivanje definicije binomnih koeficijenata
U nastavku ćemo prošiti binomne koeficijente na realne brojeve. Uvest ćemo definicije padajuće i rastuće faktorijele.

Definicija 2.0.1. *Neka su $n \in \mathbb{R}$ i k nenegativni cijeli broj. Tada je* ***padajuća faktorijela*** *dana sa*

$$n^{\underline{k}} = n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1),$$

a ***rastuća faktorijela*** *sa*

$$n^{\overline{k}} = n(n+1)(n+2) \cdot ... \cdot (n+k-1).$$

Neka su n i k nenegativni cijeli brojevi. Ako je $n \geq k$, binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot (n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n^{\underline{k}}}{k!}.\end{aligned}$$

U slučaju kad je $n < k$ vrijednost binomnog koeficijenta $\binom{n}{k}$ dosad nismo definirali, ali jasno je da definiciju 1.1.1 možemo prirodno proširiti i na taj slučaj propisivanjem da za nenegativne cijele brojeve $n < k$ vrijednost binomnog koeficijenta $\binom{n}{k}$ bude 0. Općenitije, binomni koeficijent $\binom{n}{k}$ standardno se definira za sve $n \in \mathbb{R}$ i $k \in \mathbb{Z}$ formulom

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n^{\underline{k}}}{k!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}, & \text{ako je } k \geq 0 \\ 0, & \text{ako je } k < 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

Ovako proširena definicija binomnih koeficijenata omogućuje nam da dokažemo sljedeće poopćenje binomnog teorema, koje daje razvoj funkcije $(x+1)^n$ u tzv. binomni red, koji je primjer Taylorova reda.

Propozicija 2.0.2. *Neka je $n \in \mathbb{R}$ i k nenegativan cijeli broj. Tada za $x \in \mathbb{C}$ i $|x| < 1$ vrijedi*

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k.$$

Primijetimo da je na desnoj strani gornje formule red potencija s realnim koeficijentima.

Dokaz. Formula za Maclaurinov red (Taylorov red u okolini nule) za funkciju $f(x) = (x+1)^n$ je

$$M(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!}.$$

Vidimo da vrijedi

$$\begin{aligned}
f(0) &= (0+1)^n = 1 \\
f'(0) &= n(0+1)^{n-1} = n \\
f''(0) &= n(n-1)(0+1)^{n-2} = n(n-1) \\
&\dots \\
f^{(k)}(0) &= n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(0+1)^{n-k} = n^{\underline{k}}.
\end{aligned}$$

Prema tome, imamo

$$M(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{\underline{k}} x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k.$$

Još trebamo dokazati da red $M(x)$ kovergira prema $(x+1)^n$ za $|x| < 1$. Taj dio je dokazan u skripti Matematička analiza 1 & 2 [2]. □

Sljedeća propozicija omogućuje da binomni koeficijent s negativnim gornjim koeficijentom, do na množenje s ± 1, zapišemo kao binomni koeficijent s nenegativnim gornjim koeficijentom.

Propozicija 2.0.3. *Neka su $n \in \mathbb{R}$ i k nenegativni cijeli broj. Tada vrijedi*

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}.$$

Dokaz. Imamo

$$\begin{aligned}
\binom{-n}{k} &= \frac{-n(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-k+1)}{k!} \\
&= (-1)^k \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{k!} = (-1)^k \frac{(n+k-1)^{\underline{k}}}{k!} \\
&= (-1)^k \binom{n+k-1}{k}.
\end{aligned}$$

□

Teorem 2.0.4. *(Binomna inverzija). Neka su* $f, g : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{C}$ *funkcije. Tada su sljedeće dvije tvrdnje međusobno ekvivalentne:*

(i) Za sve $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *vrijedi*

$$f(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g(k)(-1)^k.$$

(ii) Za sve $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *vrijedi*

$$g(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k)(-1)^k.$$

Dokaz. Dovoljno je dokazati samo jednu implikaciju budući da su uloge funkcija f i g iz tvrdnje teorema simetrične. Pretpostavimo da vrijedi tvrdnja (i). Tada imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k)(-1)^k &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} g(j)(-1)^j \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} \binom{n-j}{k-j} g(j)(-1)^{k+j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} g(j)(-1)^j \sum_{k=j}^{n} \binom{n-j}{k-j} (-1)^k \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} g(j)(-1)^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (-1)^{k+j} \\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} g(j) \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} (-1)^k,
\end{aligned}$$

gdje druga jednakost vrijedi po propoziciji 1.2.3, dok se treća jednakost dobiva promjenom poretka sumacije. Sada promotrimo kako za pojedine indekse j izgleda unutrašnja suma na desnoj strani gornje formule: za $n - j = 0$, tj. $j = n$ imamo da vrijedi $\sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k}(-1)^k = 1$ jer se u promatranoj sumi pojavljuje samo jedan pribrojnik, koji odgovara indeksu $k = 0$, i dan je sa $\binom{0}{0}(-1)^0 = 1$, dok za sve ostale indekse j imamo da je $n - j > 0$ pa po propoziciji 1.2.9 vrijedi $\sum_{j=0}^{n-j} \binom{n-j}{k}(-1)^k = 0$. Dakle, jedini nenulpribrojnik u sumi $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} g(j) \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k}(-1)^k$ jest onaj koji odgovara indeksu $j = n$, i za taj je pribrojnik unutrašnja suma jednaka 1, pa iz gornjeg raspisa slijedi da je

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(k)(-1)^k = \binom{n}{n} g(n) = g(n).$$

$\square$

Poglavlje 3

Primjena binomnih koeficijenata

Kompleksni brojevi i binomni koeficijenti

U ovom ćemo pododjeljku na primjeru pokazati kako pomoću kompleksnih brojeva možemo pojednostaviti kombinatorni račun s binomnim koeficijentima.

Propozicija 3.0.1. *Za nenegativne cijele brojeve n i k vrijede sljedeće tvrdnje:*

1.
$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{2k} (-1)^k = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}$$

2.
$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{2k+1} (-1)^k = 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}.$$

Dokaz. Označimo sume iz tvrdnje propozicije sa

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{2k} (-1)^k,$$

odnosno sa

$$S_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{2k+1} (-1)^k.$$

Kako bismo olakšali računanje vrijednosti S_1 i S_2, koristit ćemo kompleksne brojeve. Uvrštavanjem $x = -i$ u binomnom raspisu iz propozicije 1.1.3 dobivamo da vrijedi

$$(1-i)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-i)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k i^k \binom{n}{k}$$

gdje je $i = \sqrt{-1}$ imaginarna jedinica. Za i također vrijedi $i^0 = 1, i^1 = 1, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1 \ldots$, te se vrijednosti potencija imaginarne jedinice periodički ponavljaju tako da vrijedi $i^{n+4j} = i^n$ za sve cijele brojeve n i j. Primijetimo da desnu stranu gornje jednakosti možemo zapisati kao

$$\binom{n}{0} - i\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + i\binom{n}{3} + \cdots = \left(\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots\right) - i\left(\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \cdots\right)$$

$$= S_1 - iS_2,$$

pa, s obzirom da su S_1 i S_2 realni brojevi, zaključujemo da vrijedi

$$S_1 = \mathrm{Re}\{(1-i)^n\};$$

$$S_2 = -\mathrm{lm}\{(1-i)^n\}.$$

Dakle, da bismo izračunali vrijednosti S_1 i S_2, trebamo izračunati realni i imaginarni dio broja $(1-i)^n$. Broj $z = 1-i$ se nalazi u četvrtom kvadrantu kompleksne koordinatne ravnine. Argument broja z jednak je $\frac{-\pi}{4}$, dok njegova apsolutna vrijednost iznosi $\sqrt{2}$. Prema tome, trigonometrijski zapis broja $z^n = (1-i)^n$ je jednak

$$(\sqrt{2})^n \left(\cos\left(-\frac{n\cdot\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{n\cdot\pi}{4}\right)\right),$$

što je zbog parnosti odnosno neparnosti kosinusa odnosno sinusa jednako

$$(\sqrt{2})^n \left(\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{n\cdot\pi}{4}\right)\right)$$

$$= 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{n\cdot\pi}{4}\right)\right).$$

Dakle, realni dio broja $(1-i)^n$ jednak je $2^{\frac{n}{2}}\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{4}\right)$, a imaginarni dio $-2^{\frac{n}{2}}\sin\left(\frac{n\cdot\pi}{4}\right)$. Dakle, vrijednost S_1 dana je sa

$$S_1 = 2^{\frac{n}{2}}\cos\left(\frac{n\cdot\pi}{4}\right),$$

a vrijednost S_2 jednaka je

$$S_2 = 2^{\frac{n}{2}}\sin\left(\frac{n\cdot\pi}{4}\right).$$

□

Zgodno je primijetiti da su vrijednosti suma S_1 i S_2 cjelobrojne jer su svi pribrojnici u tim sumama cjelobrojni binomni koeficijenti.

Binomni koeficijenti i programiranje

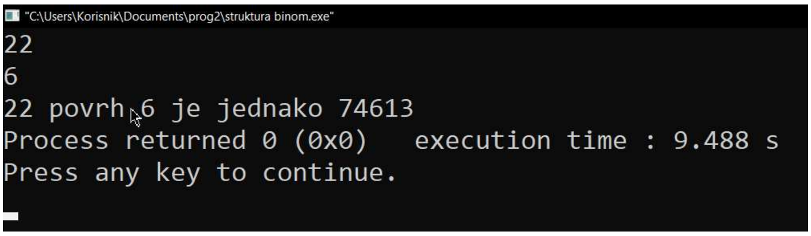
Napisat ćemo rekurzivnu funkciju binokoef u programskom jeziku C koja računa vrijednost binomnog koeficijenta $\binom{n}{k}$ temeljem definicije 1.1.2. Funkcija binkoef će primati dva cijela broja k i n (tip int u programskom jeziku C) te će vraćati binomni koeficijent $\binom{n}{k}$.

```
1   #include <stdio.h>
2  int binkoef(int n, int k)
3  {
4
5    if (k > n)
6    return 0;
7    if (k == 0 || k == n)
8    return 1;
9
10
11   return binkoef(n - 1, k - 1)
12   + binkoef(n - 1, k);
13 }
14 typedef struct binom{
15   int n;
16   int k;
17 }binom ;
18
19
20 int main ( void) {
21   binom a;
22   scanf( "%d %d", &a.n, &a.k);
23   printf("%d povrh %d je jednako %d", a.n,a.k, binkoef(a.n,a.k) );
24   return 0;
25 }
```

U gornjem programu funkcija binkoef prima dva cijela broja k i n (tip int u programskom jeziku C) te provjerava njihov odnos pomoću uvjeta if. Ukoliko nemamo krajnje slučajeve, tj. da je $k = 0$ ili da je $k = n$, funkcija vraća zbroj binomnih koeficijenata $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{n-k}$ te se time poziva sama na sebe. U linijama 14, 15, 16 i 17 definirana je struktura binom koja predstavlja binomni koeficijent. U glavnom dijelu programa (tj. u funkciji main) učitavamo cijele brojeve n i k sa standardnog ulaza te ih spremamo u strukturu binom. Zatim s tim ulaznim podacima pozivamo funkciju binkoef te ispisujemo vrijednost binomnog koeficijenta $\binom{n}{k}$. Izlaz programa za unesene vrijednosti $n = 22$ i $k = 6$, za koji program ispisuje vrijednost binomnog koeficijenta $\binom{22}{6}$, dan je na slici 3.1.

Sljedeći program ispisuje prvih nekoliko redaka Pascalova trokuta.

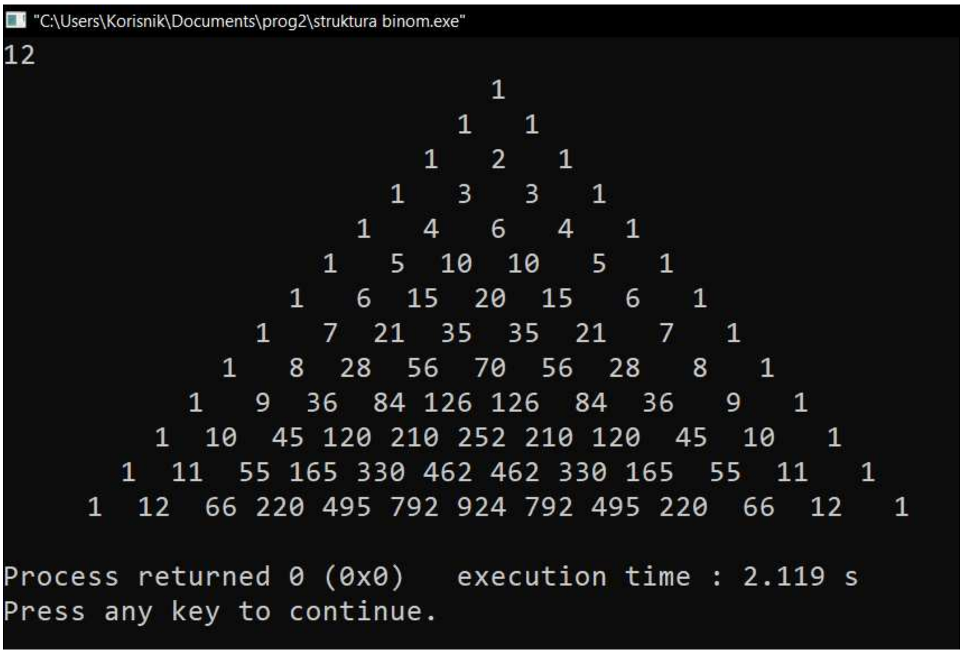
```
#include<stdio.h>
```



Slika 3.1: Izlaz programa

```c
long long int fakt(int n)
{
long long int a;

  for (a = 1; n > 1; n--)
  a *= n;
  return a;
}

int binomkoef (int n, int k)
{
  return fakt(n) / (fakt(n - k) * fakt(k));
}

int main ( void) {
  int m;
  int i, j;
  scanf("%d", &m);

  for (i = 0; i <= m; i++)
  {
    for (j = 0; j <= m - i; j++)
    printf("  ");
    for (j = 0; j <= i; j++)
    printf(" %3d",binomkoef(i, j));
    printf("\n");
  }
  return 0;
}
```

Prvi dio gornjeg programa čini funkcija fakt koja računa faktorijele koristeći faktorijelnu definiciju (vidi lemu 1.1.8), te prima cijeli broj n (tip int u programskom jeziku C). For petlja množi prirodne brojeve od n do 2 (jer do 1 bi bilo suvišno) i funkcija vraća izračunati produkt, koji je jednak $n!$. Koristili smo tip podataka long long int zbog brzog rasta vrijednosti faktorijela, naime već za relativno male brojeve n vrijednost $n!$ je toliko ve-



Slika 3.2: Pascalov trokut

lika da je za njenu pohranu potrebno više memorije nego što je rezervira najčešće korišten cjelobrojni tip podataka int (npr. već za $n = 10$ imamo 10!=3628800). Nadalje, imamo novu funkciju binomkoef koja binomne koeficijente računa temeljem faktorijelne definicije (lema 1.1.8) koristeći funkciju fakt. U glavnom programu sa standardnog se ulaza učitava broj početnih redaka Pascalova trokuta koji program u nastavku ispisuje pomoću matrice čiji se stupci popunjavaju razmacima do potrebne pozicije koju popuni rezultat izračuna odgovarajućeg binomnog koeficijenta. U svakom se retku broj razmaka smanjuje dok se broj binomnih koeficijenata povećava za 1. Radi ljepšeg ispisa, u liniji 26 propisali smo da svaki binomni koeficijent zauzima, s po potrebi dodanim razmacima, prostor namijenjen barem trima znamenkama.
U slučaju da ne želimo uvoditi dodatnu varijablu u funkciji fakt, funkciju za faktorijele možemo zamijeniti sljedećom rekurzivnom funkcijom faktrek.

```
long long int faktrek(int n)
{
  if(n==0) return 1;
  return n*faktrek(n-1);
}
```

Slika 3.2 prikazuje poziv programa za $m = 12$, tj. prikazuje prvih 12 redaka Pascalovog trokuta. Kod Pascalovog trokuta primjećujemo simetričnost zbog propozicije 1.2.1, ali posebno je zanimljivo svojstvo slično Fibonaccijevom nizu: svaki element počevši od drugog reda je zbroj dvaju elemenata koji se nalaze s lijeve i desne strane neposredno iznad tog elementa (ali ovo nije ništa novo, nego samo opisano svojstvo iz rekurzivne definicije propozicije 1.1.2). Za rubne slučajeve pritom zamišljamo da se prije prve i nakon zadnje jedinice u svakom retku nalaze nule. Opširnijim proučavanjem Pascalovog trokuta u njemu možemo pronaći svakakve pravilnosti i nizove brojeva (niz prirodnih, trokutastih, kvadratnih, peterokutnih, šesterokutnih, te mnoga svojstva dubljim proučavanjem, više o tome ima u Elementovom članku MIŠ "Pascalov ili kineski trokut, Šime Šuljić, Pazin") [7] , a mi ćemo spomenuti samo nekoliko njih.

Ukoliko dodamo u liniju 26 gornjeg koda redukciju modulo 2 ili modulo 3, tj. liniju 28 zamijenimo linijom

```
printf(" %3d",binomkoef(i, j)%2);
```

odnosno

```
printf(" %3d",binomkoef(i, j)%3);
```

dobit ćemo zanimljive alternative Pascalovog trokuta. Promatrajući sliku 3.3, primjećujemo različite simetričnosti te označene sukladne trokute sastavljene od brojeva različitih od nule, tj. od jedinica u ovome slučaju. Općenito ovaj obrazac podsjeća na Sierpinskijev trokut, koji se dobije sljedećom konstrukcijom:

korak 1: Konstruiramo jednakostraničan trokut.

korak 2: Konstruirani trokut podijelimo na 4 sukladna jednakostranična trokuta te središnji trokut kojem su samo vrhovi na stranicama početnog trokuta izbrišemo (kod našeg trokuta obrisani trokut bi bio trokut sačinjen samo od nula).

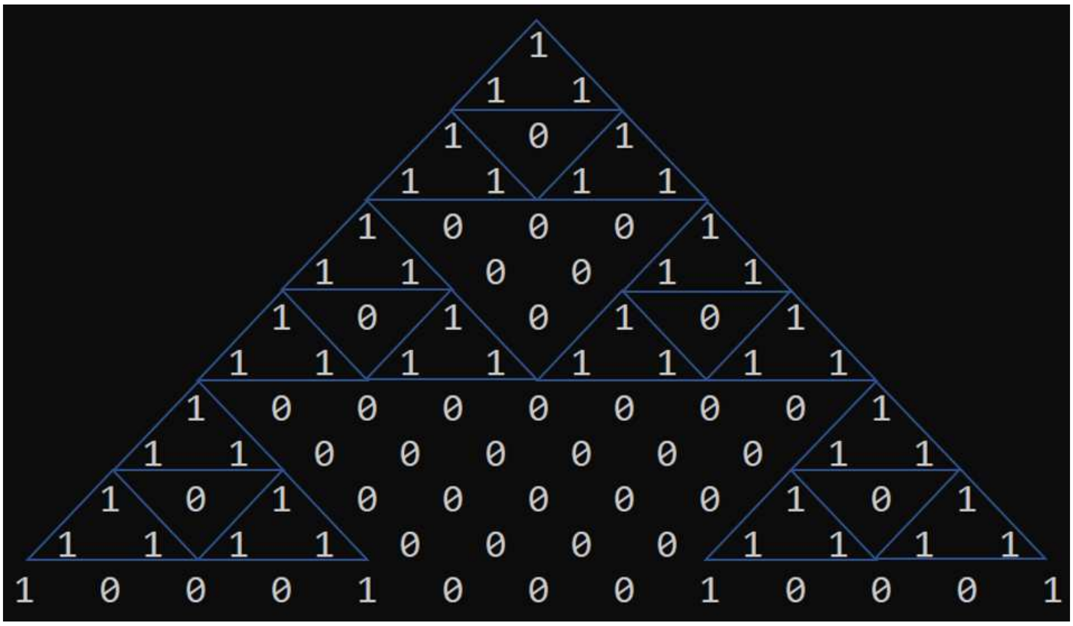
korak 3: Svaki preostali trokut tretiramo kao početni i ponavljamo drugi korak.

Način konstrukcije je prikazan i slikom 3.4.

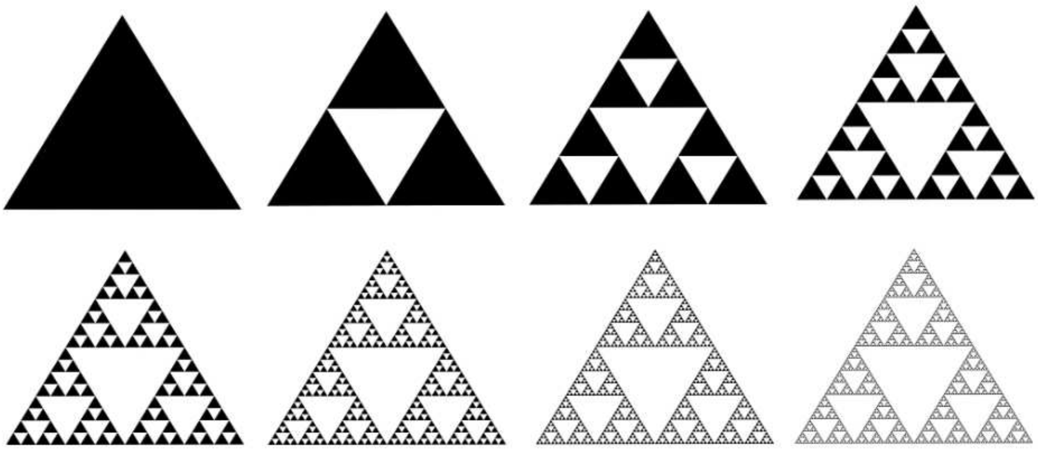
Na slici 3.5 također možemo primijetiti neke pravilnosti i simetrije te naslutiti da se za svaki prirodan broj n Pascalov trokut modulo n particionira u analogne trokute.

Binomni koeficijenti i binomna distribucija ili razdioba

Definicija 3.0.2. *Neka su $n \in \mathbb{N}$ i $p \in \langle 0, 1\rangle$. Neka je X slučajna varijabla koja broji uspjehe u n nezavisnih izvođenja istog pokusa sa samo dva moguća ishoda (uspjeh ili neuspjeh), pri čemu vjerojatnost uspjeha pri svakom pojedinom izvođenju pokusa iznosi p. Tada kažemo*



Slika 3.3: Pascalov trokut modulo 2



Slika 3.4: Sierpinskijev trokut, ; konstrukcija

da slučajna varijabla X ima **binomnu distribuciju** *s parametrima $n \in \mathbb{N}$ i $p \in (0, 1)$ te pišemo $X \sim \boldsymbol{B}(n, p)$.*

```
                        1
                     1     1
                  1     2     1
               1     0     0     1
            1     1     0     1     1
         1     2     1     1     2     1
      1     0     0     2     0     0     1
   1     1     0     2     2     0     1     1
1     2     1     2     1     2     1     2     1
```

```
            1   0   0   0   0   0   0   0   0   1
          1   1   0   0   0   0   0   0   0   1   1
        1   2   1   0   0   0   0   0   0   1   2   1
      1   0   0   1   0   0   0   0   0   1   0   0   1
```

Slika 3.5: Pascalov trokut modulo 3

Formula za računanje normalne razdiobe je

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x},$$

gdje je $q = 1 - p$ vjerojatnost neuspjeha pri pojedinom izvođenju pokusa. Ukratko, bitno je da pokusi ne utječu jedan na drugog, tj. da su nezavisni događaji, da su binarni (imaju samo dva moguća ishoda: uspjeh i neuspjeh), da se ishodi međusobno isključuju i da je vjerojatnost uspjeha odnosno neuspjeha konstantna. Primjeri takvih događaja su bacanje novčića, gađanje koševa itd.

Sljedeći će primjer objasniti povezanost binomne distribucije s binomnim teoremom te s binomnim koeficijentima. Neka je pokus zadan bacanjem 5 novčića. Kako su ishodi ili glava ili pismo (neka nam je glava uspjeh, a pismo neuspjeh), možemo koristiti binomnu razdiobu. Ako označimo pismo s P, a glavu s G, primjenom binomnog teorema na polinom $(P + G)^5$ dobivamo da vrijedi

$$(P + G)^5 = \sum_{k=0}^{5} \binom{5}{k} P^k G^{5-k}$$

$$= \binom{5}{0}G^5 + \binom{5}{1}G^4P + \binom{5}{2}G^3P^2 + \binom{5}{3}G^2P^3 + \binom{5}{4}GP^4 + \binom{5}{5}P^5$$

$$= G^5 + 5G^4P + 10G^3P^2 + 10G^2P^3 + 5GP^4 + P^5.$$

U ovom raspisu koeficijenti uz G^kP^{5-k} predstavljaju broj kombinacija za k glava i $5-k$ pisama, npr. iz $10G^3P^2$ možemo očitati da na 10 načina mogu pasti tri glave i 2 pisma. Za provjeru možemo zapisati sve takve elementarne događaje: (G, G, G, P, P), (G, G, P, G, P), (G, G, P, P, G), (G, P, G, G, P), (G, P, G, P, G),(G, P, P, G, G), (P, G, P, G, G), (P, G, G, P, G), (P, G, G, G, P), (P, P, G, G, G). Primijetimo da takvih elementarnih događaja doista ima 10, što smo i očekivali. Primijetimo i da je ovo u skladu s definicijom 1.1.1 jer problem prebrojavanja takvih elementarnih događaja možemo gledati kao problem određivanja na koliko načina možemo na 5 mjesta "smjestiti" 3 glave (ili 2 pisma jer zbog simetričnosti je ekvivalentno).

Binomna distribucija se najčešće koristi kod predviđanja kvarova kod masovne proizvodnje, kod procjene stanja ekonomije u budućnosti (gdje su mogući ishodi pad ili rast), u kasinima kod uvođenja novih igara, u bankama kod predviđanja kreditne sposobnosti, kod razdiobe IP adresa kada se više računa spoji na određenu mrežu, pri predviđanju vremenskih nepogoda (vremenska prognoza).
Prisjetimo se formula za očekivanje i varijancu binomne distribucije jer će nam trebati u sljedećem primjeru. Očekivanje slučajne varijable $X \sim \mathbf{B}(n, p)$ dano je sa

$$E(X) = n \cdot p.$$

Varijanca σ^2 slučajne varijable $X \sim \mathbf{B}(n, p)$ dana je formulom

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q.$$

Primjer 3.0.3. *Pregledano je 50 kutija po 10 proizvoda i dobivena je distribucija prikazana u tablici 3.1. Pretpostavimo da se broj X oštećenih proizvoda u pojedinoj kutiji ravna po binomnoj distribuciji. Procijenimo temeljem podataka iz tablice 3.1 vjerojatnosti* $P(x) = P(X = x)$ *u njenom četvrtom stupcu, očekivanje i varijancu ove binomne distribucije.*

Binomna distribucija određena je parametrima n i p, gdje je n broj pokusa, dakle u ovom je primjeru $n = 10$. *Računamo prosječan broj* $\overline{X}$ *oštećenih proizvoda po kutiji tako da podijelimo broj svih oštećenih proizvoda (zadnji redak, 3. stupac) brojem sveukupno pregledanih*

Broj oštećenih proizvoda (x)	Broj pregledanih kutija (f_x)	$f_x x$	Procijenjena vjerojatnost $P(x) = P(X = x)$
0	17	0	
1	22	22	
2	6	12	
3	4	12	
4	1	4	
Ukupno	**50**	**50**	

Tablica 3.1: Distribucija oštećenih proizvoda u primjeru 3.0.3

kutija (zadnji redak, 2. stupac):

$$\bar{X} = \frac{\sum_{x=0}^{4} f_x x}{\sum_{x=0}^{4} f_x} = \frac{50}{50} = 1.$$

Izračunali smo da prosječan broj $\overline{X}$ oštećenih proizvoda po kutiji iznosi 1. Procijenimo temeljem toga vjerojatnost p da slučajno odabrani proizvod unutar slučajno odabrane kutije bude oštećen. S obzirom da se u svakoj kutiji nalazi $n = 10$ proizvoda, imamo

$$p = \frac{\bar{X}}{n} = \frac{1}{10} = 0.1 = 10\%.$$

Dakle, procjenjujemo da konstantna vjerojatnost p da će odabran proizvod iz slučajno odabrane kutije biti oštećen iznosi 0.1, a vjerojatnost q da će u slučajno izabranoj kutiji slučajno odabrani proizvod biti ispravan dana je sa

$$q = 1 - p = 1 - 0.1 = 0.9$$

i iznosi 0.9 iliti 90%.
Sad možemo procijeniti vjerojatnosti $P(x)$ u zadnjem stupcu tablice 3.1 koristeći formulu

$$P(x) = \binom{n}{x} \cdot p^x \cdot q^{n-x}$$

Imamo redom:

$$P(0) = \binom{10}{0} \cdot p^0 \cdot q^{10-0} = 0.9^{10} = 0.348678440 \approx 0.35$$

$$P(1) = \binom{10}{1} \cdot p^1 \cdot q^{10-1} = 10 \cdot 0.1 \cdot 0.9^9 = 0.387420489 \approx 0.39$$

$$P(2) = \binom{10}{2} \cdot p^1 \cdot q^{10-2} = 45 \cdot 0.1^2 \cdot 0.9^8 = 0.193710245 \approx 0.19$$

$$P(3) = \binom{10}{3} \cdot p^3 \cdot q^{10-3} = 120 \cdot 0.1^3 \cdot 0.9^7 = 0.057395628 \approx 0.06$$

$$P(4) = \binom{10}{4} \cdot p^4 \cdot q^{10-4} = 210 \cdot 0.1^4 \cdot 0.9^6 = 0.011160261 \approx 0.01.$$

Evaluacija računa:
Provjerili smo i vjerojatnost za 1 oštećen predmet u kutiji i time dobili da je najveća vjerojatnost da će u kutiji od 10 proizvoda 1 biti oštećen i ona iznosi približno 0,39, a to znači da ćemo u približno 39% slučajeva naići na točno jedan oštećeni proizvod u kutiji. S druge strane, vjerojatnost da ćemo u slučajno odabranoj kutiji naći barem jedan oštećen proizvod iznosi $1 - P(0) \approx 65\%$.

Još nam preostaje procijeniti očekivanje i varijancu: temeljem procijenjenih vrijednosti n, p i q procjenjujemo da vrijedi:

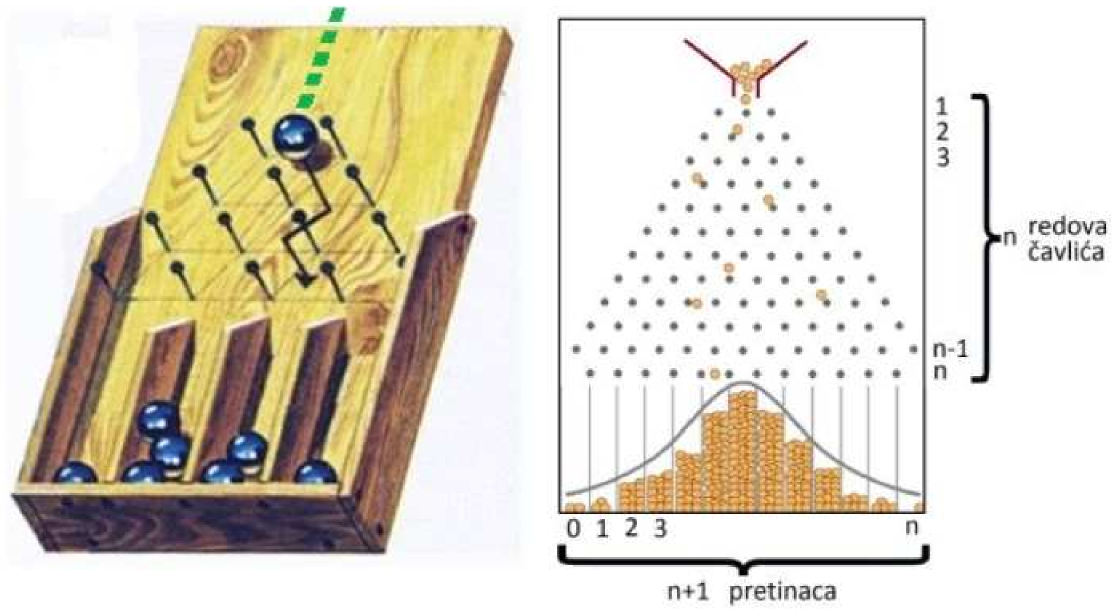
$$E(X) = n \cdot p = 10 \cdot 1.0 = 1,$$

$$\sigma^2 = n \cdot p \cdot q = 10 \cdot 0.1 \cdot 0.9 = 1 \cdot 0.9 = 0.9$$

Prema tome, u prosjeku se očekuje jedan oštećeni proizvod po kutiji, što smo mogli i naslutiti s obzirom da procijenjena vjerojatnost tog ishoda iznosi oko 39%.

Galtonova daska

Galtonova daska je dobar primjer pojavljivanja binomnih koeficijenata (točnije Pascalovog trokuta) u pokusu. Galtonova daska je nagnuta ploča s nekoliko redova čavlića zabijenih u poretku mreže jednakostraničnih trokuta (čavlići su poslagani tako da svaka tri susjedna čavlića čine vrhove jednakostraničnog trokuta). Broj čavlića i njihove međusobne udaljenosti mogu varirati, za bolju predodžbu pogledajte sliku 3.6.



Slika 3.6: Primjeri Galtonove daske

Koraci pokusa: Kuglice promjera manjeg od razmaka čavlića spuštamo sa sredine gornjeg brida Galtonove daske i spuštamo ih niz dasku. Tokom spusta promatramo i zapisujemo kretanje kuglica te u koji pretinac su se smjestile.

Cilj pokusa: Pronaći pravilnosti te pretpostaviti koliko će otprilike kuglica završiti u svakom pretincu. Točnije, tražimo odgovor na pitanje: koliko će kuglica dospjeti u pojedini pretinac ako kroz lijevak pustimo N kuglica, i one prođu kroz n redova čavlića?

Neka su pretinci označeni brojevima od 0 do n kao desno na slici 3.6 (dakle ima ih $n + 1$) te imamo n redova čavlića. Promatrajući rubne slučajeve možemo zaključiti da, da bismo pogodili nulti ili $(n + 1)$-vi pretinac, kuglica mora napraviti n skretanja lijevo (bez ijednog skretanja udesno) za nulti pretinac, odnosno n skretanja desno (bez ijednog skretanja ulijevo) za $(n + 1)$-vi pretinac. Općenito, da bi kuglica dospjela u x-ti pretinac, mora napraviti x skretanja udesno i $n - x$ skretanja ulijevo. Primijetimo da u svakom koraku (tj. pri svakom skretanju) imamo binarnu radnju tj. događa se točno jedan od dva suprotna događaja: ili kuglica skrene lijevo ili skrene desno. U slučaju precizno izrađene daske i preciznog spuštanja kuglice, vjerojatnosti su za oba slučaja $p = q = \frac{1}{2}$ gdje je p vjerojatnost da kuglica skrene lijevo, a q da skrene desno. Očito vrijedi $q + p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, tj, $q = 1 - p$ jer

imamo samo dvije mogućnosti.
Neka je X broj skretanja udesno od njih n. Tada je X binomno distribuirana slučajna varijabla, preciznije $X \sim \mathbf{B}(n,p)$. Prema tome, za svaki $x \in \{0,1,\ldots,n\}$ vjerojatnost $P(x) = P(X = x)$ da kuglica skrene x puta desno, tj. padne u $x-$ti pretinac dana je sa

$$P(x) = \binom{n}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}$$

$$= \binom{n}{x} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Binomni koeficijent $\binom{n}{x}$ u funkciji P je broj odabira x desnih skretanja od ukupno n skretanja koja svaka kuglica napravi pri svojem spustu, naime svaka kuglica pri svojem spustu napravi točno n skretanja (broj redova je jednak broju skretanja).
Pretpostavimo da se ovaj pokus izvršava na dasci sa 6 redova (drugim riječima n=6), što znači da imamo $n + 1$, tj. 7 pretinaca. Vjerojatnost $P(x)$ da kuglica završi u x-tom pretincu je po gornjoj formuli, počevši od nultog pretinca prema zadnjem n-tom:

$$P(0) = \binom{6}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 1 \cdot \frac{1}{64} = \frac{1}{64}$$

$$P(1) = \binom{6}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = 6 \cdot \frac{1}{64} = \frac{6}{64}.$$

Analogno, dobijemo da vrijedi $P(2) = \frac{15}{64}$, $P(3) = \frac{20}{64}$, $P(4) = \frac{15}{64}$, $P(5) = \frac{6}{64}$ i $P(6) = \frac{1}{64}$. Primjećujemo da brojnici nisu ništa drugo nego binomni koeficijenti jednog retka Pascalovog trokuta. Također primjećujemo da je funkcija P dobro definirana vjerojatnost jer je zbroj njenih vrijednosti jednak 1, a nazivnik 64 je zbroj svih binomnih koeficijenata koji se pojavljuju kod računa (iz 1.2.8 znamo da je to jednako 2^n).

Zanimljivo je što, ako na gore opisan način po Galtonovoj dasci s dovoljno velikim brojem pretinaca n ispustimo dovoljno velik broj kuglica N, popunjeni pretinci poprimaju oblik histograma neprekidne normalne razdiobe (primijetite Gaussovu krivulju na slici 3.6), što je ilustracija dobro poznate činjenice da je za velike n binomna distribucija $\mathbf{B}(n,p)$ aproksimirana normalnom distribucijom s očekivanjem np i varijancom $np(1-p)$. Tvrdnja je to de Moivre-Laplaceova teorema, koji je poseban slučaj centralnog graničnog teorema. Više o ovim naprednim rezultatima iz teorije vjerojatnosti može se pročitati primjerice u "N. Sarapa: Teorija vjerojatnosti, §14, Školska knjiga, Zagreb, 2002."

Bibliografija

[1] M. Biljan-August, S. Pivac i A. Štambuk, *Statička analiza u ekonomiji*, 2009., https://www.efri.uniri.hr/upload/knjiznica/E%20izdanja/Statisticka%20analiza%20u%20ekonomiji.pdf.

[2] B. Guljaš, *Matematička analiza 1 & 2*, skripta, PMF – Matematički odsjek, 2018., https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/MATANALuR.pdf.

[3] R. P. Kubelka, *Self-similarity and symmetries of Pascal's triangles and simplices mod p*, The Fibonacci Quarterly (2004), 70–75.

[4] N. Sarapa, *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb, 2002.

[5] M. Spivak, *Combined answer book for calculus third and forth edition*, Houston, Texas, 2008.

[6] Michael Z. Spivey, *The Art of Proving Binomial Identities*, CRC Press, London, 2019.

[7] Š. Šuljić, *Pascalov ili kineski trokut*, (2003), https://mis.element.hr/fajli/383/21-10.pdf.

Izvori slika

- Slika 3.4, dostupna na https://www.researchgate.net/figure/Slika-3-Pocetni-jednakostranicni-trokut-i-prvih-sest-iteracija-sita-trokuta_fig3_334397901
- Slika 2.1, dostupna na https://www.youcubed.org/wp-content/uploads/2019/08/WIM-Pascals-Triangle-Grades-3-5.pdf
- Slika 3.6, dostupna na http://www.prirodopolis.hr/images/galtonHM.pdf
- Ostale slike su snimke zaslona kod izvođenja programa.

Sažetak

U radu proučavamo binomne koeficijente, njihova svojstva i primjene te istražujemo vezu binomnih koeficijenata s raznim matematičkim pojmovima i rezultatima poput binomnog teorema, binomne razdiobe i pravila za računanje derivacija umnoška dviju funkcija. Napisan je program u programskog jeziku C koji računa vrijednost faktorijela i binomnih koeficijenata. Dan je i program koji ispisuje prvih n redaka Pascalovog trokuta. U radu su navedene razne nastavne aktivnosti, primjeri primjena binomnih koeficijenata, zadaci te njihova rješenja koja mogu pomoći u nastavi matematike.

Summary

In this thesis, we study the binomial coefficients, their properties and applications and investigate the role of binomial coefficients in various mathematical concepts and results such as the binomial theorem, binomial distribution, and the product differentation rule. A program is provided in the C programming language that computes factorials and binomial coefficients. Additionally, a program is included that generates the first n rows of Pascal's triangle. Throughout the paper, various activities, examples of binomial coefficient applications, and problem solutions are discussed to aid in teaching and understanding the significance of binomial coefficients.

Životopis

Rođen sam 14.3.1995. u Zagrebu. Osnovnu školu Sveti Križ Začretje pohađao sam do 2009. godine kada upisujem smjer Tehničar za mehatroniku, u Srednjoj školi Krapina. Nakon završetka srednje škole, 2013. godine upisujem preddiplomski studij matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Godine 2016. prebacujem se na nastavnički smjer preddiplomskog studija na istom fakultetu. Preddiplomski studij završio sam 2019. godine. Iste godine upisujem diplomski studij matematika, smjer nastavnički. Trenutno tokom studija paralelno radim kao nastavnik matematike u Osnovnoj školi Josipa Zorića u Dugom Selu (ovo mi je bio prvi, trenutno nakon povratka i treći posao u struci).