Modeli u nastavi matematike i fizike

Knezović, Marko

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Marko Knezović

MODELI U NASTAVI MATEMATIKE I FIZIKE

Diplomski rad

Voditelj rada:
doc.dr.sc. Dalibor Paar
prof.dr.sc. Aleksandra Čižmešija

Zagreb, studeni, 2023.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom ________________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Poštovanom mentoru doc. dr. sc. Daliboru Paaru duboko se zahvaljujem na strpljenju i podršci tijekom pisanja ovog diplomskog rada. Zahvaljujem se prof. dr. sc. Aleksandri Čižmešiji koja mi je predstavila predmet matematike u potpuno drugačijem svijetlu što me motiviralo da i dalje nastavim raditi na poboljšanju vlastitoga znanja. No najviše se zahvaljujem svojoj majci i prijateljima, koji su me podržavali kroz cijelo obrazovanje. Bez njih ne bih bio tko sam danas.

Sadržaj

Sažetak

U suvremenom obrazovanju razrađuju se uloge, funkcije, strategije i preporuke za korištenje modela i modeliranja u potrazi za autentičnim STEM obrazovanjem i poboljšanjem STEM pismenosti. To zahtijeva interakciju između STEM predmeta kao što su matematika i fizika kako bi se doprinijelo integriranoj STEM pismenosti. Kroz matematičko i fizikalno modeliranje, učenici se upoznaju s procesom kojim matematičari i fizičari istražuju probleme iz stvarnog svijeta. Kao pedagoški pristup, matematičko modeliranje naglašava učeničke ideje i njihov odabir reprezentacija te način na koji komuniciraju svoje matematičko razmišljanje o problemima. S materijalnim modelima, učenici mogu istraživati ponašanja, uzorke i veze te mogu raditi pretpostavke. Materijalni modeli potiču međuvršnjačku, vanjsku i internu komunikaciju. Geoploča je primjer materijalnog modela koji može imati brojne primjene u nastavi matematike i fizike. Geoploča olakšava vizualizaciju, postavljanje i rješavanje problema iz matematike i fizike. Potiče ih na istraživanje, sustavnost, kreativnost i ustrajnost u radu, tako da oni postaju aktivni sudionici u procesu učenja. U ovom radu smo dali neke primjere vezane uz vektore. Postoje brojne druge mogućnosti primjene. U kontekstu prevelike izloženosti učenika digitalnim sadržajima, geoploča je primjer obrazovnog alata koji ne mora biti digitalni, a da unaprjeđuje nastavu u smjeru razvoja suvremenog obrazovanja.

Summary

In modern education, the roles, functions, strategies and recommendations for the use of models and modeling in the search for authentic STEM education and improvement of STEM literacy are elaborated. This requires interaction between STEM subjects such as mathematics and physics to contribute to integrated STEM literacy. Through mathematical and physical modeling, students are introduced to the process by which mathematicians and physicists investigate real-world problems. As a pedagogical approach, mathematical modeling emphasizes students' ideas and their choice of representations and the way they communicate their mathematical thinking about problems. With material models, students can explore behaviors, patterns, and relationships, and can make predictions. Material models encourage peer-to-peer, external and internal communication. The Geoplate is an example of a material model that can have numerous applications in the teaching of mathematics and physics. The Geoplate makes it easier to visualize, set up and solve math and physics problems. It encourages them to research, be systematic, creative and persistent in their work, so that they become active participants in the learning process. In this diploma thesis, we have given some examples related to vectors. There are numerous other application possibilities. In the context of too much exposure of students to digital content, the Geoplate is an example of an educational tool that does not have to be digital, but that improves teaching in the direction of the development of modern education.

Uvod

U suvremenoj nastavi razrađuju se uloge, funkcije, strategije i preporuke za korištenje modela i modeliranja u potrazi za autentičnim STEM obrazovanjem i poboljšanjem STEM pismenosti (Hallström i Schönborn, 2019). Modeli se ističu kao sredstvo za promicanje STEM pismenosti i prijenosa znanja i vještina između različitih područja. To zahtijeva interakciju između STEM predmeta kao što su matematika i fizika kako bi se doprinijelo integriranoj STEM pismenosti.

Temeljna uloga modela je pomoći u razumijevanju osnovnih koncepata u matematici i fizici, ali i složenih tema. Pri tome model može služiti za vizualnu reprezentaciju, biti poticaj za diskusiju u razredu ili kao interaktivno okruženje za učenje. Kao izvrstan primjer koji ne zahtijeva velika ulaganja je geoploča, ploča s čavlićima ili sličnim oblicima raspoređenim u mrežu, oko kojih je moguće rastezati elastične vrpce (Čižmešija i sur., 2012, 2015, 2022). Geoploča u ranoj dobi omogućuje upoznavanje s konceptima pomicanja u dvije dimenzije (gore, dolje, lijevo, desno, okomito, vodoravno, dijagonalno itd.), poligonima, osnovnim oblicima, opsegom, površinom, položajem, smjerom, simetrijom i dr.

Općenito, geoploča je model koji može povezivati nastavu matematike, fizike, tehničke kulture i informatike. U tehničkoj kulturi učenici bi mogli dizajnirati i izrađivati različite modele geoploče koje će praktično primijeniti u nastavi matematike, fizike i informatike. U informatici geoploča može biti vizualna interpretacija u uvođenju koncepata robotike. U ovom radu ćemo kroz odabrane primjere pokazati moguće primjene modela u nastavi matematike i fizike. Cilj je poboljšati razumijevanje elemenata u kurikulumu s kojima učenici često imaju problema kroz samo teorijski pristup.

1

O modelima u nastavi

1.1 Modeli i njihova primjena u nastavi

U općenitom smislu, model je reprezentacija fenomena, objekta ili ideje koje mogu biti teško za shvatiti, predstaviti ili direktno promatrati (Ornek, 2008). Modele možemo definirati s obzirom na njihovu prirodu i komponente u procesu modeliranja (Hallström i Schönborn, 2019). Pri tome razmatramo uloge i funkcije modela u odnosu na specifičan proces modeliranja i vještine. Ovisno koji smo model izabrali, potrebno je razviti strategije na koji način ga uključiti u proces učenja i integrirati u postojeći kurikulum.

STEM područja modelom smatraju reprezentaciju objekta, fenomena ili ideje (cilj modela) pomoću nečega što je učeniku poznato (izvorom modela) (Tregidgo i Ratcliffe, 2000). Model se odnosi samo na neka svojstva cilja, dok neki aspekti moraju biti isključeni iz modela. Hestenes (1996) u fizici opisuje model kao prikaz strukture nekog fizikalnog sustava i/ili njegovih svojstva. Pojedini model može sadržavati jedan ili više objekata ili elemenata koji su uklopljeni u cjelinu koja predstavlja dani model.
U STEM područjima koristimo različite vrste modela. Dijelimo ih na mentalne modele, konceptualne modele i fizičke modele (Ornek, 2008). Mentalni modeli su psihološke reprezentacije stvarnih ili zamišljenih situacija, Oni nalaze u našem umu i određuju kako doživljavamo i predočavamo situacije koje se događaju u stvarnom svijetu (Franco i Colinvaux, 2000).
Značajke mentalnih modela su:

1. Mentalni modeli su generativni. Učenici mogu proizvesti nove informacije ili predviđanja koristeći mentalne modele.

2. Mentalni modeli uključuju skriveno znanje. Učenik koji koristi mentalni model nije u potpunosti svjestan samog modela ili nekih njegovih aspekata.

3. Mentalni modeli su sintetički. Modeli su pojednostavljene prezentacije stvarnih sustava. U prezentaciji treba izabrati što će se uzeti u obzir, a što zanemariti. Time se pojednostavljuje i olakšava upotreba modela.

4. Mentalni modelu su ograničeni pogledom na svijet. Mentalni modeli su ograničeni uvjerenjima, pretpostavkama i mogu biti podloga za miskoncepcije što je čest slučaj u fizici.

Konceptualni modeli su vanjski prikazi izrađeni od strane nastavnika ili znanstvenika kako bi olakšali shvaćanje ili učenje o sustavu ili stanju stvari u svijetu (Grace i Moriere, 2000 i Wu et Al, 1998). Konceptualni modeli su pojednostavljeni prikazi stvarnih objekata, fenomena i situacija. To mogu biti matematičke formulacije, analogije, grafovi ili materijalni objekti, prema kojima konceptualne modele dijelimo u matematičke, računalne i materijalne modele.

Računali modeli omogućuju učenicima da uz pomoć računalnih programa razviju numeričke modele stvarnog svijeta (Holland, 1988). Takve računalne simulacije omogućuju učenicima analizu kompleksnih sustava, koji zahtijevaju sofisticiranu matematiku za analizu. Računalne simulacije mogu koristiti mnoge reprezentacije, poput slika, dvodimenzionalnih ili trodimenzionalnih animacija, grafova, vektora i brojčanih prikaza podataka koji mogu biti korisni u razumijevanju koncepata (Sherer et al., 2000).

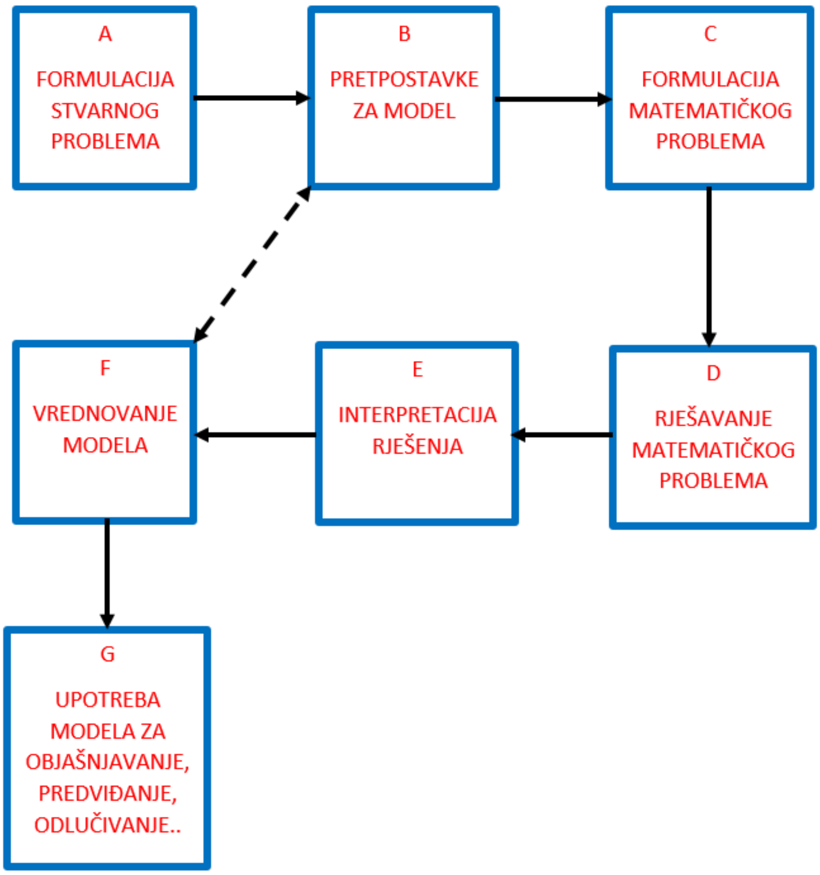
Kada govorimo o materijalnim modelima, može se postaviti pitanje uloge tih modela u obrazovanju u odnosu na virtualne (digitalne) modele. No što su to materijalni modeli, koji su i fokus ovog rada? Oni predstavljaju materijalnu reprezentaciju onoga što se dalje matematički ili fizički modelira. Mogu biti vrlo jednostavni, npr. geometrijska tijela izrađena od drveta , ali i složeni, npr. složeni molekularni modeli koje učenici slažu spajajući odgovarajuće modele atoma ili model parnog stroja sa svim elementima za njegovo funkcioniranje. Zajedničko svojstvo modela u obrazovnom kontekstu je da se mogu dotaknuti, pomicati ili držati u ruci. Na primjeru učenja kristalnih struktura kao teme u kojoj je izbor modela izuzetno važan (što je primjenjivo u nastavi fizike i kemije) Kuo i sur. (2004) su utvrdili da računalni modeli imaju prednost u odnosu na prikaze u ravnini i perspektivi, ali učenici ih doživljavaju kao teže za raditi nego s modelima iz ruke. Kelly (2001) je utvrdila da se učenici razlikuju u svojim preferencijama prema vrstama modela: neki vole praktične modele dok drugi preferiraju računalne vizualizacije. Imajući ovo na umu, čini se da bi idealna strategija uključivala i materijalne modele i virtualne ako je to moguće. S različitim alternativama pri ruci, studenti mogu uspostaviti veze između materijalnih i računalnih modela i riješiti dvosmislenosti koje bi mogle nastati ograničavanjem na jednu vrstu modela. Argument koji se često može čuti među nastavnicima da su materijalni modeli skuplji od digitalnih nije točan jer se u brojnim temama modeli mogu konstruirati od dostupnih priručnih materijala. Na primjer u modeliranju atoma i molekula možemo koristiti gotove nastavne setove, a isto možemo konstruirati pomoću plastelina i drvenih štapića. Korištenjem priručnog materijala mogu se razvijati i dodatne vještine učenika i lakše osmišljavati projektni zadaci koje učenici mogu raditi i kod kuće.

Kada govorimo o računalnim modelima, do sada je fokus bio na prikazu na ekranu računala. Upravo se otvaraju nove mogućnosti promatranja u 3D, posebice u proširenoj stvarnosti (AR – augmented reality) koja sve više pronalazi svoju ulogu u obrazovanju. Danas je upotreba digitalnih tehnologija u obrazovanju izazov na svjetskoj razini, istražuju se prednosti, izazovi i utjecaj tehnologije na učenike. Danas imamo niz izvrsnih računalnih programa prikladnih za nastavu matematike ili fizike koje je šteta ne koristiti, posebno ako su besplatno dostupni. Današnjim digitalnim generacijama učenika time možemo nastavu matematike ili fizike učiniti privlačnijom. No treba naglasiti da je digitalna tehnologija samo jedan od alata koje možemo koristiti u obrazovanju. Ako tako gledamo, možemo postaviti ozbiljno pitanje da li je učenik preopterećen digitalnim sadržajima, ako je njima izložen i značajan broj sati izvan škole. Odgovor je svakako da, na što ukazuje na sve veći problem da ovisnost o digitalnim sadržajima smanjuje motivaciju za učenjem i uzrokuje lošije rezultate (Tülübas et al., 2023). U tom pogledu važan je razvoj komplementarnih rješenja poput materijalnih modela kakve diskutiramo u ovom radu, a koji se mogu i ne moraju nadopunjavati s digitalnim modelima.

1.2 Modeli u matematici i fizici

Modeli u matematici

Kada se govori o uvođenju matematičkih modela u nastavu matematike u osnovnoj i srednjoj školi, u preglednom radu Asempapa (2015) ističe se da postoje različite definicije koncepta modela od konceptualnih sustava koji pomažu razumijevanju matematike do sustava koji opisuju druge sustave s određenom namjenom. Primjer prvih sustava su npr. materijalni modeli geometrijskih tijela s različitim međuodnosima. Primjer drugih sustava su matematički modeli kojima se smatra korištenje matematičkog jezika u opisu ponašanja sustava i za predviđanje njegovog ponašanja u budućnosti. Oni su opis ili sažimanje ključnih značajki stvarnog svijeta ili fenomena u obliku simbola, jednadžbi i brojeva. Matematički modeli su često aproksimacije jer ne mogu obuhvatiti sve značajke stvarnog svijeta. Oni su alat za modeliranje i rješavanje problema u prirodoslovnim i drugim područjima. U kemiji i fizici koristimo matematičke tehnike kako bismo modelirali situacije i rješavali probleme (Hodgson et al., 1999). Burghes i Borrie (1979) opisuju matematičko modeliranje kao način kako problem iz stvarnog života (stvarne probleme iz fizike, kemije, biologije i drugih STEM područja) možemo prevesti u matematičke modele i kako se ti rezultati primjenjuju u tim situacijama. Oni ciklus matematičkog modeliranja prikazuju na sljedeći način:



Slika 1.1: Matematičko modeliranje (Burghes i Borrie, 1979)

Lijeva strana prikaza (kućice A, F i G) predstavlja stvarni svijet dok desna strana (kućice C, D) predstavlja matematički svijet. Srednji dio (kućice B, E) predstavlja vezu između stvarnog i matematičkog svijeta. U srednjem dijelu, problem se prvo pojednostavljuje i pretvara u matematički jezik te se kasnije matematičko rješenje prevodi u stvarni svijet. U matematičkom modeliraju općenito postavljanje problema, kvalitativno vrednovanje i kvalitativno pretpostavljanje su važni prije samog početka rješavanja problema.
Prema Hestenesu (1987), matematički model sastoji se od četiri komponente:

- Imena objekata i sredstava koji su u interakciji s tim objektima.

- Opisnih varijabli koje moraju predstavljati karakteristike objekta: varijable objekta, varijable stanja i varijable interakcija.
- Jednadžbi modela koje opisuju strukturu modela.
- Interpretacije.

Interpretacija (primjena u stvarnom svijetu) je važna za model jer su one same po sebi apstraktne. Matematičko modeliranje primjenjivo je i u osnovnoj i u srednjoj školi (Suh, J., Seshaiyer, P., 2017) i važno je za razvoj karijera u STEM područjima.

Modeli u fizici

Iz perspektive fizičara, modelom se smatra pojednostavljeni prikaz funkcioniranja nekog sustava u fizici. Matematički model može biti komponenta fizičkog modela (fizikalnog modela). Na primjer, u modelu idealnog plina, plin se predstavlja kao mnoštvo malih kuglica koje međudjeluju elastičnim sudarima. U tom pojednostavljenom opisu plina možemo koristiti matematičke zakonitosti iz klasične mehanike. Prema Greca i Moreira (2002), ideja fizičkih modela nije da učenici koriste već napravljene modele, već da primjenjuju temeljne fizikalne principe i stvaraju vlastite modele. Modeliranje u fizici uključuje aproksimacije, a rezultati modela se uspoređuju pokusima sa stvarnim sustavima. Modele je potrebno dograđivati da dobijemo bolji opis stvarnog fenomena. Idealni opis ne postoji jer nije moguće isključiti ili uzeti u obzir sve vanjske utjecaje tijekom izvođenja pokusa kojim se proučava pojedini fenomen.

1.3 Zašto je učenje uz pomoć modela učinkovitije?

Pojednostavljeno rečeno, u obrazovanju model je kvantitativni ili prostorni sustav koji se koristi na način kako se koristi u matematici ili fizici. Ideja je da se matematički modeli koriste već od rane dobi u vrtiću (Dooley et al., 2014). Modeli imaju brojne obrazovne aspekte, od pomoći u shvaćanju određenih tema i situacija, povezivanja između različitih disciplina, poticanja društvene interakcije i suradnje. Kroz modele učenici daju smisao svojim neformalnim matematičkim ili fizikalnim znanjima, odabiru načine za komuniciranje matematičkih ili fizikalnih ideja. Kroz matematičko ili fizikalno modeliranje, učenici se upoznaju s procesom kojim matematičari i fizičari istražuju probleme iz stvarnog svijeta. Kao pedagoški pristup, matematičko modeliranje naglašava učeničke ideje i njihov odabir reprezentacija te način na koji komuniciraju svoje matematičko razmišljanje o problemima. Svoje ideje mogu predstavljati na razne načine uključujući akcije, govorni jezik, konkretne materijale, dijagrame/slike, simbole ili pisane riječi.

Savladavanje temeljnih koncepata iz matematike i fizike važno je već u osnovnoj školi. Kada učenici dođu u srednju školu, uspješnost u matematici i prirodoslovnim predmetima ovisi o sposobnosti učenika kako baratati apstraktnim konceptima i modelima. Nastavnici pomažu učenicima u savladavanju sve složenijih mentalnih modela. Pomoć u tome mogu dati materijalni modeli. Oni pomažu učenicima u razvoju njihovog razumijevanja teme tako da manipuliraju objektima koji predstavljaju stvari ili koncepte. ”Pomičući stvari uokolo” može rezultirati mnogo dubljim razumijevanjem nego čitanjem udžbenika ili promatranjem dvodimenzionalih slika. S materijalnim modelima, učenici mogu istraživati ponašanja, uzorke i veze te mogu raditi pretpostavke. Također mogu naučiti kako procijeniti mogućnosti i ograničenja pojedinih modela. Materijalni modeli se mogu koristiti unutar i van učionice. Materijalni modeli su najefektniji pri poboljšanju učenja kada su učenici potrebni raditi predviđanja o ishodima i kada trebaju napraviti točnu opservaciju o ishodu. Korištenjem materijalnih modela učenike se aktivira te ako učenici (uz vodstvo nastavnika) samostalno izrade model, uključujemo ih u praktično učenje. Radom u skupinama, učenici postaju intrinizično motivirani. Materijalni modeli potiču međuvršnjačku, vanjsku i internu komunikaciju. U demonstracijama, instruktor može igrati važnu ulogu u poticanju kritičkog razmišljanja i u vođenju učeničkih opservacija ishoda. Dok učenici rade na modelu, odmah dobivaju povratnu informaciju, koja pomaže pri daljnjoj nadogradnji ishoda učenja. U aktivnostima malih grupa i individualnim aktivnostima, kritičko razmišljanje i opažanja su kontrolirani od strane učenika, što podrazumijeva da nivo učenja će biti različit za svakog učenika. Zato su povratne informacije instruktora važne, iako one mogu biti vremenski i energijski zahtjevne.

2

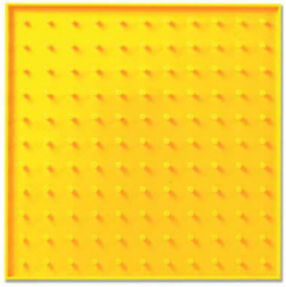
Geoploča

U nastavi matematike i fizike koriste se razni materijalni modeli za poboljšanje učeničkog obrazovanja. Kezerić (2018) u svom radu Didaktički modeli i situacije u nastavi matematike prikazuje nekoliko od njih, poput Cauisenaireovih štapića, modela vage, algebarskih pločica te mnogokutnih pločica. Nastava fizike također se koristi materijalnim modelima kao elementima pokusa, bili to frontalni pokusi koje izvodi nastavnik ili učenički pokusi koji sami učenici izvode kako bi istražili pojave iz stvarnoga svijeta. Na primjer model mogu biti biti kolica s utezima, laseri i leće, elementi strujnih krugova itd. U ovom radu odabrali smo jedan od zanimljivih modela šire primjenjivih u nastavi matematike i fizike. Radi se o konceptu geoploče.

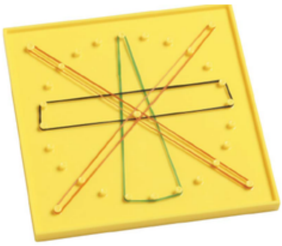
2.1 Što je geoploča?

Geoploča je drvena ili plastična ploča s čavlićima koji su raspoređeni u kvadratnu, kružnu ili izometričku mrežu. Oko čavlića moguće je rastezati elastične (gumene) vrpce. Geoploču je 1952. godine osmislio egipatski matematičar Caleb Gattegno (1911.-1988.) te razvio i prve nastavne materijale za njenu primjenu u nastavi geometrije (Čižmešija et al., 2012). Uz geoploču, Gattegno je popularizirao korištenje i Cauisenaireovih štapića u nastavi matematike. Oba modela bili su namijenjeni razvoju sustavnog učeničkog matematičkog razmišljanja uz istraživanje kroz jasne i opipljive probleme. U današnje doba u upotrebi su četiri standardizirane vrste geoploče (slika 2.1): kvadratna (s 5x5 čavlića), kvadratna (s 11x11 čavlića), kružna (s 24 čavlića), izometrička (s kutom od 60°).

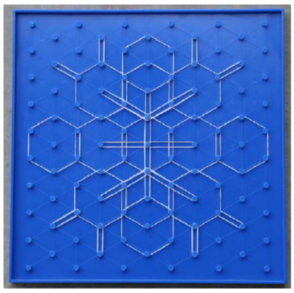
(a) Kvadratna geoploča s 5 x 5 čavlića



(b) Kvadratna geoploča s 11 x 11 čavlića



(c) Kružna geoploča s 24 čavlića



(d) Izometrička geoploča s kutom od 60°

Slika 2.1: Vrste geoploča

Geoploča je model koji nije ograničen ponuđenim materijalnim modelima. Mogu se razvijati nove varijante, a dostupne su i virtualne verzije u obliku besplatnih online aplikacija što može biti korisno nastavniku u pripremi materijala. Primjeri su:

- Geoboard *https://apps.mathlearningcenter.org/geoboard*
- Toy Theater *https://toytheater.com/geoboard*

Geoploče su dostupne i u papirnatoj verziji, u obliku mreže točaka, što omogućuje kreativnim nastavnicima smještanje vlastitih pozadinskih slika kao pomagalo učeničke vizualizacije problema. Kako je geoploča jednostavan materijalan model (sastoji se samo od ploče i čavlića), učenici bi sami mogli konstruirati vlastite geoploče na nastavi Tehničke kulture, koje bi se dalje koristile na nastavi matematike i fizike.

Čižmešija, Souice i Svedrec (2012) ističu da je geoploča koristan model u nastavi matematike u osnovnoj školi. Učenicima pomaže pri istraživanju matematičkih koncepata vezanih uz brojeve i algebru kao što su koncept razlomka, decimalnog broja i postotka te uz geometriju kao što su koncepti opsega i površine, svojstva geometrijskih likova, koncept i primjena koordinatnog sustava u ravnini, mjerne jedinice za duljinu i površinu. Geoploča olakšava vizualizaciju i omogućava im da "rade matematiku". Pruža mogućnost da samostalno otkrivaju matematiku te razmjenjuju matematičke ideje, pritom razvijajući komunikacijske vještine i matematički rječnik. Omogućava postojanje i rješavanje matematičkih problema i potiče ih na istraživanje, sustavnost, kreativnost i ustrajnost u radu, tako da učenici postaju aktivni sudionici u procesu učenja.

Prije razrade konkretnih primjera primjene u nastavi matematike i fizike, napravit ćemo pregled stavki kurikuluma za predmete matematika i fizika u okviru kojih bi geoploča mogla biti prikladan model.

2.2 Pregled ishoda učenja za predmete matematika i fizika

Ovdje dajemo pregled ishoda učenja koji su dio kurikuluma za nastavni predmet Matematika i nastavni predmet Fizika za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj koje su prikladne za primjenu geoploče u nastavi (MZO, 2019). Kako su nam u primjerima koje smo obradili u 3. poglavlju osnova vektori, iz oba kurikuluma su izabrani ishodi učenja vezani uz njih. Ishodi učenja sadrže podatke o razredu, odgojno obrazovni ishod, razradu ishoda, odgojno-obrazovne ishode na razini usvojenosti dobar na kraju razreda, sadržaj te preporuku za ostvarivanje odgojno obrazovnog ishoda.

Kurikulum nastavnog predmeta matematika za osnovne škole i gimnazije

7. razred:
Odgojno obrazovni ishod
MAT OŠ C.7.2. Učenik/ca crta, zbraja i oduzima vektore.
Razrada ishoda

- Crta i opisuje vektor, njegov smjer, orijentaciju i duljinu.
- Opisuje odnose između dvaju ili više vektora matematičkim jezikom.
- Prepoznaje i crta jednake i suprotne vektore, opisuje nulvektor.
- Korelacija sa Fizikom.

Odgojno-obrazovni ishodi na razini usvojenosti »dobar« na kraju razreda

- Zbraja dva vektora uz obrazloženje.

Sadržaj: Vektori. Zbroj i razlika vektora.
Preporuka za ostvarivanje odgojno-obrazovnoga ishoda:
Koristiti se programima dinamične geometrije te ostalim primjerenim i dostupnim interaktivnim računalnim programima i alatima, edukativnim igrama. Ostvariti ishod integriranom nastavom s fizikom, ako je moguće.
Odgojno obrazovni ishod
MAT OŠ C.7.3. Translatira skupove točaka u ravnini.
Razrada ishoda

- Translatira točke, dužine, pravce i ostale skupove točaka u ravnini (trokut, četverokut, krug i kružnicu) za zadani vektor.
- Prepoznaje i opisuje lik nastao translacijom.
- Translacijom stvara složene slike.
- Prošireni sadržaj: Istražuje međusobne položaje dviju kružnica u ravnini.

Odgojno-obrazovni ishodi na razini usvojenosti »dobar« na kraju razreda

- Translatira trokut i četverokut.

Sadržaj: Translacija skupova točaka.
Preporuka za ostvarivanje odgojno-obrazovnoga ishoda:
Ponoviti osnu i centralnu simetriju. Kao dodatnu vrijednost, ako situacija u razredu dopušta, napraviti i kompoziciju preslikavanja. Koristiti se programima dinamične geometrije te ostalim primjerenim i dostupnim interaktivnim računalnim programima i alatima, edukativnim igrama.

Gimnazija 1. razred - 105 sati godišnje:
Odgojno obrazovni ishod
MAT SŠ C.1., MAT SŠ D.1. Računa s vektorima. IZBORNI ISHOD
Razrada ishoda

- Prepoznaje, opisuje i rabi elemente vektora.
- Računa s vektorima (zbraja, oduzima i množi skalarom) i prikazuje ih u ravnini te u koordinatnome sustavu određuje duljinu vektora.
- Prikazuje vektor kao linearnu kombinaciju vektora.
- Prošireni sadržaj: Računa mjeru kuta između vektora

Odgojno-obrazovni ishodi na razini usvojenosti »dobar« na kraju razreda

- Opisuje vektor i odnose između dvaju vektora, crta vektore, određuje koordinate vektora zadanoga točkama u koordinatnome sustavu i računa duljinu vektora.

Sadržaj: Vektori. Operacije s vektorima. Vektori u koordinatnome sustavu. Linearna kombinacija vektora.

Gimnazija 3. razred - 105 sati godišnje:
Odgojno obrazovni ishod
MAT SŠ C.3.6., MAT SŠ D.3.1. Računa s vektorima.
Razrada ishoda

- Prepoznaje, opisuje i koristi elemente vektora.
- Računa s vektorima (zbraja, oduzima i množi skalarom) i prikazuje ih u ravnini i u koordinatnome sustavu, određuje duljinu vektora, računa skalarni umnožak vektora i primjenjuje ga za uvjet okomitosti vektora.
- Primjenjuje svojstva vektora u problemskim zadatcima.
- Prošireni sadržaj: Rastavlja vektore koristeći se linearnom kombinacijom vektora (računski ili grafički).

Odgojno-obrazovni ishodi na razini usvojenosti »dobar« na kraju razreda

- Opisuje vektor, crta vektore u ravnini i u koordinatnome sustavu.
- Računa s vektorima (zbraja, oduzima i množi skalarom) prikazanima na razne načine.

Sadržaj: Pojam vektora. Računske operacije s vektorima. Duljina vektora. Skalarni umnožak vektora. Okomiti vektori.

Gimnazija 1. razred - 140 sati godišnje:
Odgojno obrazovni ishod
MAT SŠ C.1., MAT SŠ D.1. Računa s vektorima. IZBORNI ISHOD
Razrada ishoda

- Prepoznaje, opisuje i rabi elemente vektora.
- Računa s vektorima (zbraja, oduzima i množi skalarom) i prikazuje ih u ravnini i u koordinatnome sustavu, određuje duljinu vektora.
- Prikazuje vektor kao linearnu kombinaciju vektora.
- Prošireni sadržaj: Računa mjeru kuta između vektora.

Odgojno-obrazovni ishodi na razini usvojenosti »dobar« na kraju razreda

- Opisuje vektor i odnose između dvaju vektora, crta vektore, određuje koordinate vektora zadanoga točkama u koordinatnome sustavu i računa duljinu vektora.

Sadržaj: Vektori. Operacije s vektorima. Vektori u koordinatnome sustavu. Linearna kombinacija vektora.

Gimnazija 3. razred - 140 sati godišnje:
Odgojno obrazovni ishod
MAT SŠ C.3.6., MAT SŠ D.3.1. Računa s vektorima.
Razrada ishoda

- Prepoznaje, opisuje i koristi elemente vektora.
- Računa s vektorima (zbraja, oduzima i množi skalarom) i prikazuje ih u ravnini i u koordinatnome sustavu, određuje duljinu vektora, računa skalarni umnožak vektora i primjenjuje ga za uvjet okomitosti vektora.
- Primjenjuje svojstva vektora u problemskim zadatcima.
- Prošireni sadržaj: Rastavlja vektore koristeći se linearnom kombinacijom vektora (računski ili grafički).

Odgojno-obrazovni ishodi na razini usvojenosti »dobar« na kraju razreda

- Opisuje vektor, crta vektore u ravnini i u koordinatnome sustavu.
- Računa s vektorima (zbraja, oduzima i množi skalarom) prikazanima na razne načine.

Sadržaj: Pojam vektora. Računske operacije s vektorima. Duljina vektora. Skalarni umnožak vektora. Okomiti vektori.

Gimnazija 3. razred - 175 sati godišnje:
Odgojno obrazovni ishod
MAT SŠ C.3.6., MAT SŠ D.3.1. Računa s vektorima.
Razrada ishoda

- Prepoznaje, opisuje i koristi elemente vektora.
- Računa s vektorima (zbraja, oduzima i množi skalarom) i prikazuje ih u ravnini i u koordinatnome sustavu, određuje duljinu vektora, računa skalarni umnožak vektora i primjenjuje ga za uvjet okomitosti vektora.

- Dijeli dužinu u zadanome omjeru.
- Primjenjuje svojstva vektora u problemskim zadatcima.
- Prošireni sadržaj: Rastavlja vektore koristeći se linearnom kombinacijom vektora (računski ili grafički).

Odgojno-obrazovni ishodi na razini usvojenosti »dobar« na kraju razreda

- Opisuje vektor, crta vektore u ravnini i u koordinatnome sustavu.
- Računa s vektorima (zbraja, oduzima i množi skalarom) prikazanima na razne načine.

Sadržaj: Pojam vektora. Računske operacije s vektorima. Duljina vektora. Skalarni umnožak vektora. Okomiti vektori.

Gimnazija 3. razred - 210 sati godišnje:
Odgojno obrazovni ishod
MAT SŠ C.3.6., MAT SŠ D.3.1. Računa s vektorima.
Razrada ishoda

- Prepoznaje, opisuje i rabi elemente vektora.
- Računa s vektorima u ravnini i prostoru (zbraja, oduzima i množi skalarom) i prikazuje ih u ravnini i u koordinatnome sustavu.
- Određuje duljinu vektora, računa skalarni umnožak vektora i primjenjuje ga za uvjet okomitosti vektora.
- Rastavlja vektore koristeći se linearnom kombinacijom vektora (računski ili grafički).
- Dijeli dužinu u zadanome omjeru.
- Računa i geometrijski interpretira vektorski umnožak i mješoviti umnožak.
- Primjenjuje svojstva vektora u problemskim zadatcima.

Odgojno-obrazovni ishodi na razini usvojenosti »dobar« na kraju razreda

- Opisuje vektor, crta vektore u ravnini i u koordinatnome sustavu.
- Računa s vektorima (zbraja, oduzima i množi skalarom) prikazanima na razne načine.

Sadržaj: Pojam vektora. Računske operacije s vektorima. Duljina vektora. Skalarni umnožak vektora. Okomiti vektori. Linearna kombinacija vektora. Dijeljenje dužine u zadanome omjeru. Vektorski umnožak i mješoviti umnožak vektora.

Gimnazija 3. razred - 245 sati godišnje:
Odgojno obrazovni ishod
MAT SŠ C.3.6., MAT SŠ D.3.1. Računa s vektorima.
Razrada ishoda

- Prepoznaje, opisuje i rabi elemente vektora.
- Računa s vektorima u ravnini i prostoru (zbraja, oduzima i množi skalarom) i prikazuje ih u ravnini i u koordinatnome sustavu.
- Određuje duljinu vektora, računa skalarni umnožak vektora i primjenjuje ga za uvjet okomitosti vektora.
- Rastavlja vektore koristeći se linearnom kombinacijom vektora (računski ili grafički).
- Dijeli dužinu u zadanome omjeru.
- Računa i geometrijski interpretira vektorski umnožak i mješoviti umnožak.
- Primjenjuje svojstva vektora u problemskim zadatcima i dokazuje tvrdnje u analitičkoj geometriji ravnine i prostora.

Odgojno-obrazovni ishodi na razini usvojenosti »dobar« na kraju razreda

- Opisuje vektor, crta vektore u ravnini i u koordinatnome sustavu.
- Računa s vektorima (zbraja, oduzima i množi skalarom) prikazanima na razne načine.

Sadržaj: Pojam vektora. Računske operacije s vektorima. Duljina vektora. Skalarni umnožak vektora. Okomiti vektori. Linearna kombinacija vektora. Dijeljenje dužine u zadanome omjeru. Vektorski umnožak i mješoviti umnožak vektora.

Kurikulum nastavnog predmeta fizika za osnovne škole i gimnazije

7. razred:
Odgojno obrazovni ishod
FIZ OŠ A.7.1. Uspoređuje dimenzije, masu i gustoću različitih tijela i tvari.
Razrada ishoda

- Uspoređuje dimenzije tijela.
- Uspoređuje mase tijela.
- Objašnjava zapis i značenje fizičke veličine.
- Analizira gustoće tijela različitog oblika i sastava.
- Opisuje primjene mjerenja gustoće.

Odgojno-obrazovni ishodi na razini usvojenosti »dobar« na kraju razreda

- Opisuje kako se određuje gustoća tijela.
- Uspoređuje gustoće tekućina i čvrstih tijela na temelju podataka iz tablica.
- Na temelju gustoće procjenjuje od koje je tvari tijelo građeno.

Sadržaj: Fizička veličina, duljina, površina i volumen, masa, gustoća.
Odgojno obrazovni ishod
FIZ OŠ B.7.2. Analizira međudjelovanje tijela te primjenjuje koncept sile.
Razrada ishoda

- Analizira učinke međudjelovanja.
- Opisuje različite vrste sila.
- Određuje rezultantnu silu.
- Objašnjava silu težu i težinu. Povezuje produljenje opruge s težinom ovješenog utega.

Odgojno-obrazovni ishodi na razini usvojenosti »dobar« na kraju razreda

- Određuje rezultantnu silu na pravcu (grafički i računski).
- Povezuje produljenje opruge s težinom ovješenog utega.
- Opisuje elastičnu silu i svojstvo elastičnosti na primjerima.

Sadržaj: Međudjelovanje, elastična sila, gravitacijska sila, sila teža.

Gimnazija, 1. razred:
Odgojno obrazovni ishod
FIZ SŠ B.1.2. Primjenjuje I. Newtonov zakon.
Razrada ishoda

- Opisuje međudjelovanja tijela i vrste sila.
- Tumači pokuse i primjere pomoću I. Newtonovog zakona.
- Objašnjava relativnost mirovanja i jednolikoga pravocrtnoga gibanja.

Odgojno-obrazovni ishodi na razini usvojenosti »dobar« na kraju razreda

- Tumači značenje inercijskog sustava.
- Tumači Galileijev misaoni pokus koji je doveo do principa inercije.
- Navodi primjere realnih gibanja koja se mogu modelirati kao jednolika pravocrtna gibanja i povezuje ih s I. Newtonovim zakonom.

Odgojno obrazovni ishod
FIZ SŠ B.1.3. Primjenjuje II. Newtonov zakon.
Razrada ishoda

- Istražuje ovisnost ubrzanja o sili i masi.
- Određuje iznos sile teže i opisuje slobodni pad.
- Određuje iznose elastične sile, reakcije podloge, sile trenja i napetost niti.
- Istražuje i opisuje horizontalni hitac.

Odgojno-obrazovni ishodi na razini usvojenosti »dobar« na kraju razreda

- Prepoznaje istodobno djelovanje više sila na tijelo i prikazuje ih dijagramom sila.
- Određuje iznos rezultante više sila na pravcu.
- Grafički prikazuje i tumači ovisnost a (F) i a (1/m).
- Tumači statičko i dinamičko trenje.
- Matematički prikazuje i tumači silu trenja.
- Matematički i grafički prikazuje elastičnu silu.

Sadržaj: Newtonovi zakoni, elastični i neelastični sudar, inercijski sustavi, zakon očuvanja količine gibanja, sastavljanje i rastavljanje sila, sila reakcije podloge, sila trenja, elastična sila, sila napetosti niti, slobodni pad, horizontalni i vertikalni hitac.

3

Primjena geoploče: Vektori

U ovom poglavlju ćemo prikazati odabrane primjere moguće primjene geoploče u nastavi matematike ili fizike kroz aktivnosti. Izabrali smo temu vektora u matematici, a koja ima važnu ulogu u fizici gdje su mnoge veličine vektori. U prikazu aktivnosti krećemo od pojedinog matematičkog koncepta te u nastavku sugeriramo primjenu u fizici. Svaka aktivnost pokriva elemente potrebne za pripremu nastavnog rada: cilj aktivnosti, preporučeni oblik rada, potreban materijal,veza s kurikulumom, nastavni pojmovi te tijek aktivnosti i zaključak.

Popis aktivnosti:

1. Pojam vektora
2. Duljina, smjer i orijentacija vektora
3. Konstrukcija vektora
4. Jedinstvenost vektora
5. Zbrajanje kolinearnih vektora 1
6. Zbrajanje kolinearnih vektora 2
7. Pravilo trokuta
8. Pravilo paralelograma
9. Vektori u koordinatnom sustavu
10. Skalarni umnožak vektora

3.1 Aktivnost. *Pojam vektora*

Radeći suradnički u paru, modeliranjem i analizom odabrane situacije uz pomoć geoploče, učenici će se upoznati s pojmom vektora. Za svaki par učenika potrebna je geoploča $11x11$, gumica, plastelin dviju različitih boja, crni marker i ravnalo. Uz njih, svaki učenik na početku aktivnosti dobiva i odgovarajući nastavni listić s opisom realne situacije i zadacima. Kurikulumom se nadovezujemo na ishode učenja MAT OŠ D.7.2. i FIZ OŠ A.7.1. U aktivnosti pokrivamo pojam duljine i pretvaranje mjernih jedinica što možemo vezati uz matematiku i fiziku, dok se mjerilom karte dotičemo s geografijom.

Aktivnost započinje tako da nastavnik učenike podijeli u parove te svakom paru dodijeli geoploču, komade plastelina dvije različite boje, gumice i crni marker te se očekuje da učenici imaju vlastito ravnalo. Svi nastavni listići su jednaki za svaki par učenika. Nakon što učenici riješe zadatke s nastavnog listića, slijedi razredna diskusija. *Nastavni listić 3.1* predstavlja primjer materijala na kojem radi pojedini par učenika.

Nastavni listić 3.1: Primjer nastavnog listića za Aktivnost 3.1

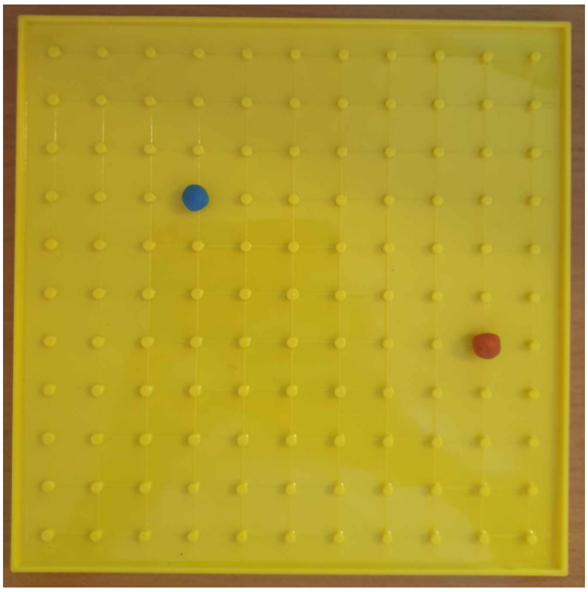
Nastavni listić

Geoploča predstavlja kartu zamišljene države zvanom Kvadraturija. Mjerilo takve karte je 1 : 1000000. Neka svaki učenik u paru označi jednu točku na geoploči kao grad Kvadraturije. Nazovite gradove po želji.

Zadatak 1. Koja je udaljenost između gradova? Kako ćemo to izračunati?

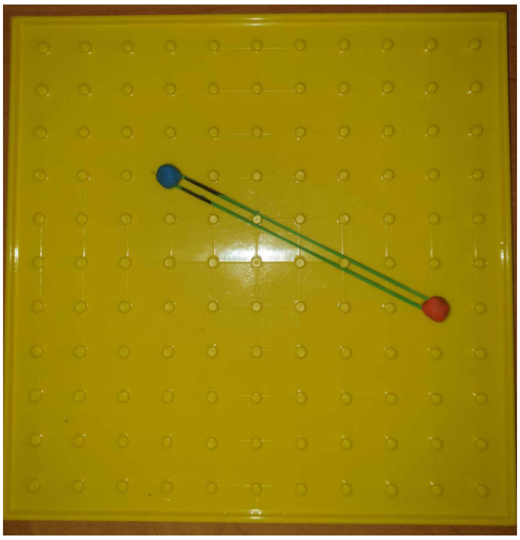
Zadatak 2. a) Ako avion leti iz drugog grada u prvi grad, kako biste to označili?
b) Ako avion leti iz prvog grada u drugi grad, kako biste to označili?

Rad na nastavnim listićima započinje čitanjem teksta zamišljene situacije. Svaki učenik najprije ga mora pročitati samostalno i potom svoje razumijevanje potvrditi u diskusiji s učenikom u paru. Učenici tada koristeći plastelin označavaju dvije točke na geoploči te ih imenuju. Primjer možemo vidjeti na slici 3.1, gdje plavi plastelin predstavlja "Grad 1", te crveni plastelin predstavlja "Grad 2".

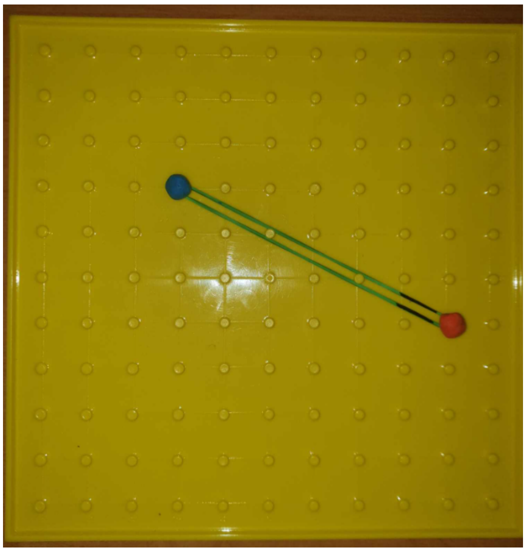


Slika 3.1: Karta Kvadraturije. Plavi plastelin predstavlja Grad 1, crveni plastelin Grad 2

Nakon toga slijedi rješavanje 1. zadatka, u kome učenici ravnalom mjere udaljenost između dviju zadanih točaka te izmjerenu udaljenost na karti pretvaraju u udaljenost u stvarnosti. Zadatkom 2. učenicima se predstavlja problem gdje pomoću gumice i crnog markera trebaju označiti orijentaciju leta aviona. Slike 3.2 i 3.3 predstavljaju rješenja za Zadatak 2. pod a) i b) za zadane točke iz prijašnjeg zadatka.



Slika 3.2: Orijentacija vektora naznačena je crnom bojom.



Slika 3.3: Suprotna orijentacija u odnosu na prethodni primjer.

Nastavni listić 3.2: Primjer riješenog nastavnog listića za Aktivnost 3.1

Nastavni listić

Geoploča predstavlja kartu zamišljene države zvanom Kvadraturija. Mjerilo takve karte je 1 : 1000000. Neka svaki učenik u paru označi jednu točku na geoploči kao grad Kvadraturije. Nazovite gradove drugačijim imenima.

Zadatak 1. Koja je udaljenost između gradova? Kako ćemo to izračunati? Izmjerimo udaljenost između gradova ravnalom pa pomnožimo brojem 1000000. Udaljenost iznosi $13.5 \cdot 1000000 = 13500000\ cm = 135\ km$

Zadatak 2. a) Ako avion leti iz drugog grada u prvi grad, kako biste to označili?
Jednu stranu gumice označili smo crnom bojom.

b) Ako avion leti iz prvog grada u drugi grad, kako biste to označili?
Suprotnu stranu gumice označili smo crnom bojom.

Predviđeno trajanje rada u paru je oko 10 minuta, nakon čega nastavnik proziva nekoliko parova da pokažu ostatku razreda kako su označili gradove i kretanje aviona. Nakon diskusije s nastavnikom učenici definiraju novu dužinu koji su prikazali na geoploči. Na njoj je važno koja je točka početna, a koja završna. Nastavnik predstavlja da takvu usmjerenu/orijentiranu dužinu označujemo strelicom usmjerenom od početne do završne točke. To je vektor. Uvodi i simboličku oznaku vektora početne točke A i završne točke B, $\overrightarrow{AB}$. Vektore također označavamo malim slovima npr. $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$... Produženjem dužine učenici primjećuju da vektor zapravo leži na pravcu. Njega definiramo kao pravac nositelj.

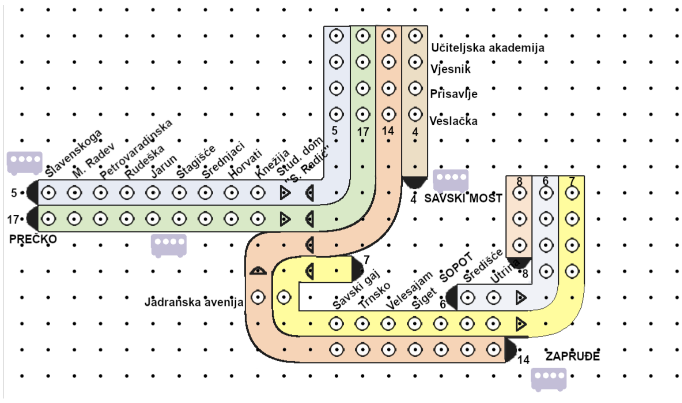
3.2 Aktivnost. *Duljina, smjer i orijentacija vektora*

Radeći suradnički u parovima, analiziranjem situacije iz stvarnog svijeta, učenici će otkriti pojam duljine, smjera i orijentacije vektora. Svaki učenik dobiva nastavni listić s opisom situacija i zadataka za istraživanje i debatu u paru. Svaki par ujedno dobiva i set bojica. Ishode učenja koja aktivnost pokriva su MAT OŠ D.7.2. i FIZ OŠ B.7.2. Nastavni pojmovi kojima se nadovezujemo na matematiku su brojevni pravac te kada su pravci paralelni ili se sijeku. Nastavnik na početku aktivnosti dijeli svakom učeniku nastavni listić. Za svaki zadatak proziva jednog učenika da pročita tekst zadataka na glas te u diskusiji s razredom potvrđuje shvaćanje zadatka. Svaki zadatak sastoji se od papirnate geoploče u kojoj se pozadini nalazi tramvajska karta, gdje je pojedina stanica predstavljena točkom na geoploči. Učenici u paru ucrtavaju vektor za vlastitu kartu te uspoređuju rješenja zadatka.

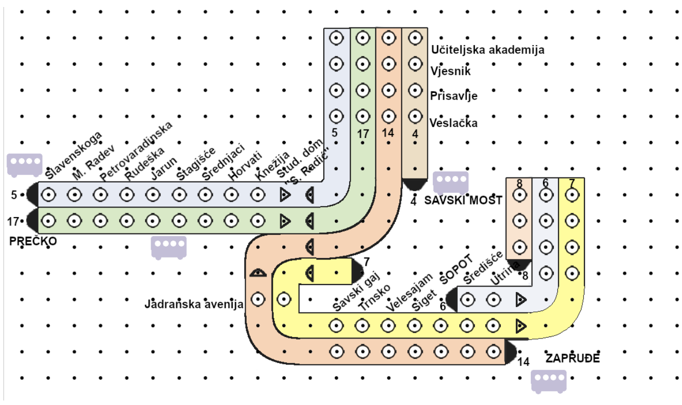
Nastavni listić 3.3: Primjer nastavnog listića za Aktivnost 3.2

Nastavni listić

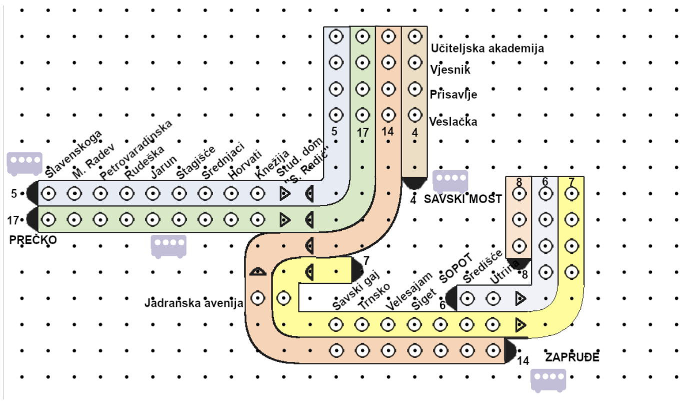
Zadatak 1. Marta stanuje u Savskom gaju. Jedan dan je odlučila otići u dućan u Zapruđu kako bi pogledala ponudu mobitela. Magdalena joj je rekla da sjedne u tramvaj broj 14 i putuje prema Zapruđu. No, Marta ipak nije stigla do dućana. Zašto?



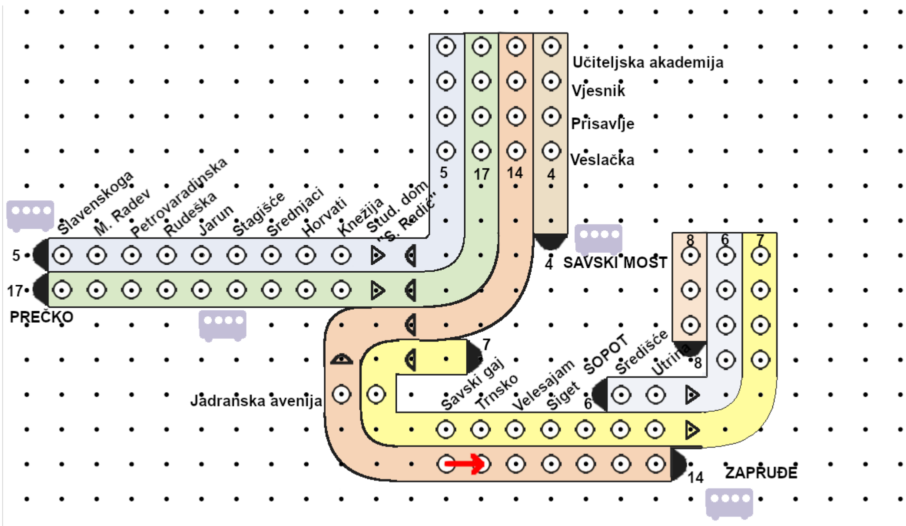
Zadatak 2. Gabrijel i Martina putuju tramvajem do svojih škola. Gabrijel putuje od Rudeške do Horvata, a Martina od Savskog gaja do Sigeta. Što možete reći o njihovim smjerovima kretanja?



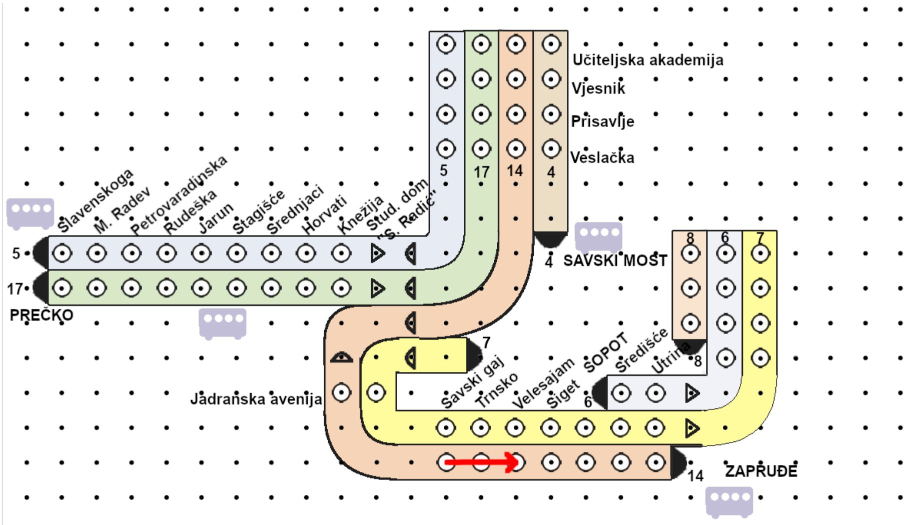
Zadatak 3. Nakon kupovine Ivana i Mirta se rastaju na stanici. Ivana putuje od Sigeta prema Središću, a Mirta od Sigeta prema Savskom gaju. Što možete reći o vektorima kojima prikazujemo njihov put?



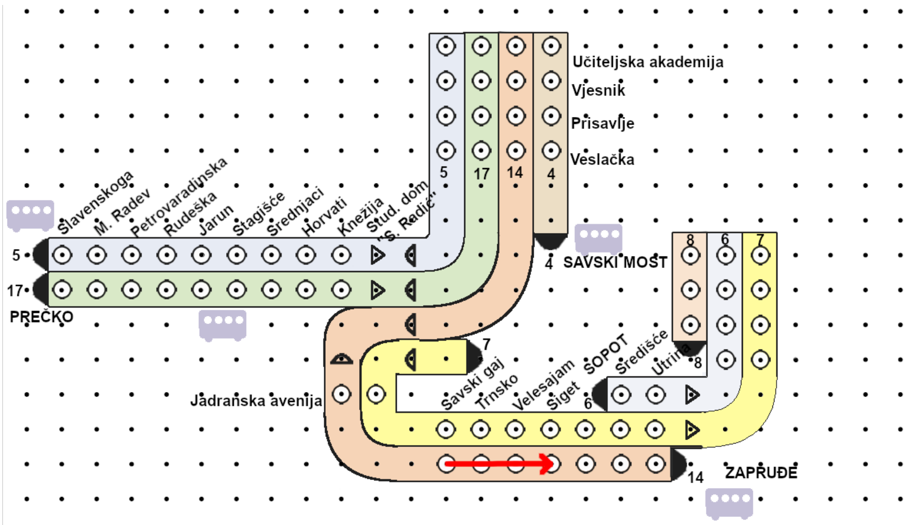
Moguća rješenja za 1. zadatak prikazana su na slikama 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8.



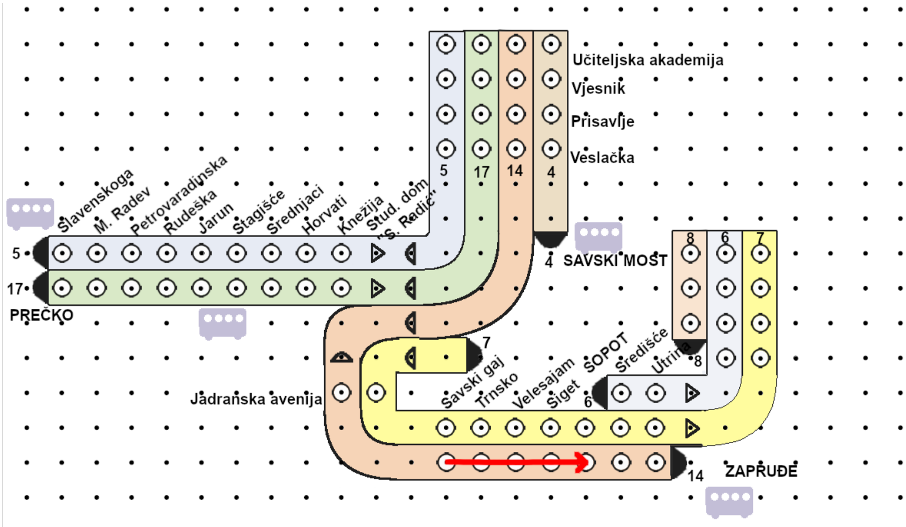
Slika 3.4: Vektor jedne stanice



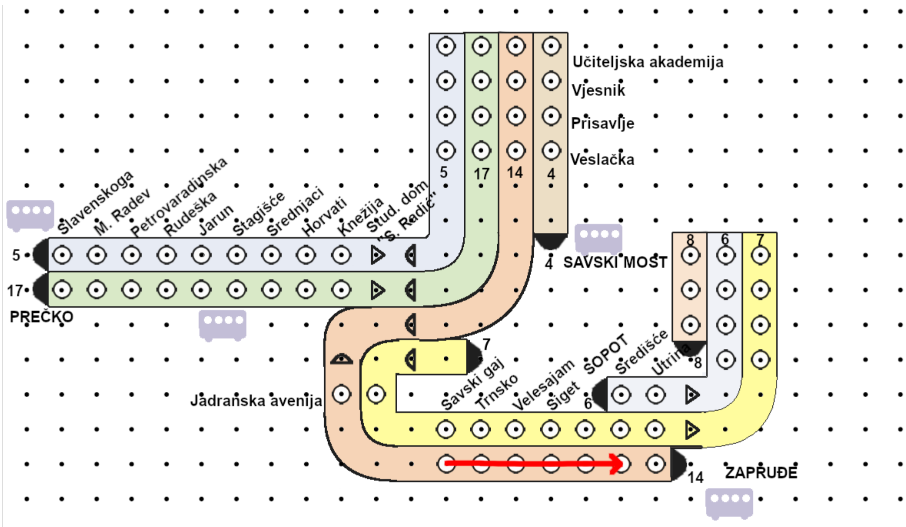
Slika 3.5: Vektor dvije stanice



Slika 3.6: Vektor tri stanice



Slika 3.7: Vektor četiri stanice

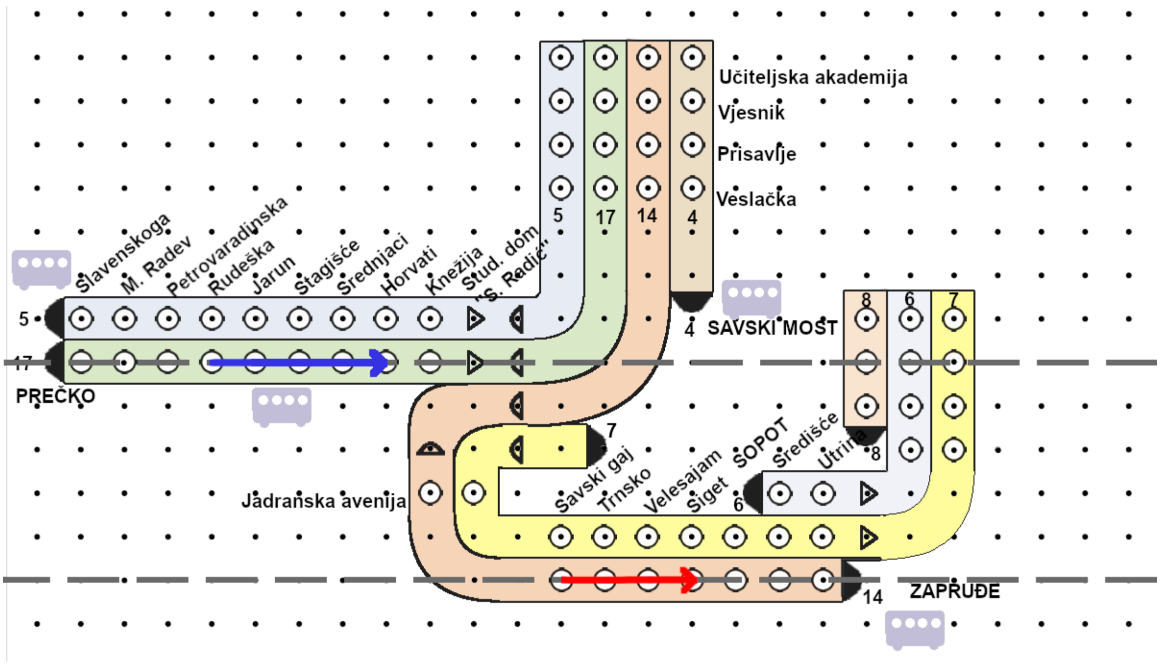


Slika 3.8: Vektor pet stanica

Učenici diskusijom s nastavnikom primjećuju da se nacrtani vektori razlikuju po njihovoj duljini te zaključuju da duljina vektora $\overrightarrow{AB}$ jednaka je duljini dužine $\overline{AB}$. Nastavnik simbolički zapisuje zaključak u obliku $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{a}| = d(A, B) = |AB|$.

Nastavnik također s učenicima komentira brojevni pravac s jediničnom dužinom $\overline{OE}$ kojemu je duljina jednaka 1. Vektor duljine 1 naziva jedinični vektor i simbolički zapisuje kao $|\vec{a}| = 1$.

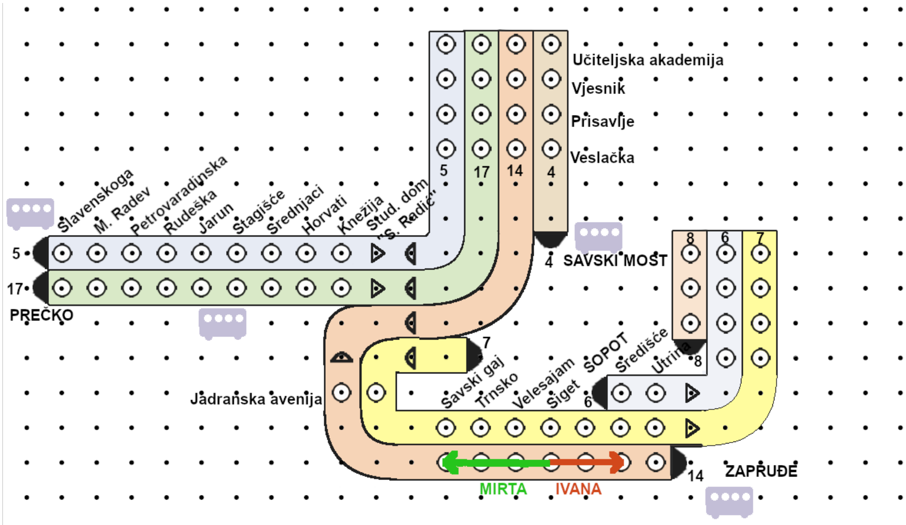
U zadatku 2., pod vodstvom nastavnika crtaju pravce nositelje ucrtanim vektorima, prikazano na slici 3.9.



Slika 3.9: Vektori istog smjera i njihovi pravci nositelji

Učenici primjećuju da su pravci nositelji međusobno paralelni. Vektore koji su na njima nazivamo kolinearni vektori. Osim toga moguć je i slučaj kojem vektori nemaju isti smjer (ne pripadaju istom pravcu ili usporednim pravcima). Nastavnik komentira i nulvektor kao jedini vektor koji nema smjer. Popratnim pitanjima potrebno je i komentirati kada su dva vektora međusobno okomiti. To je onda kada su im pravci nositelji međusobno okomiti.

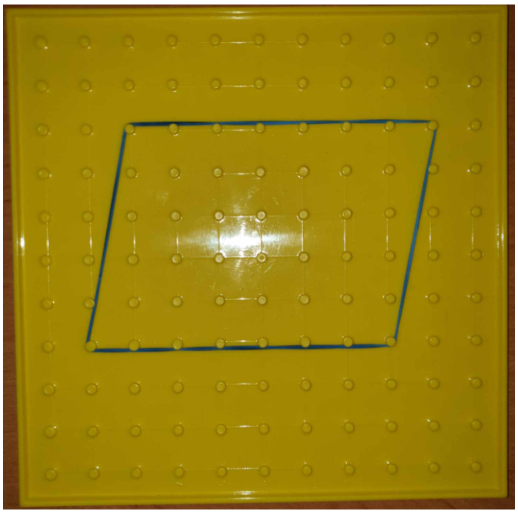
Rješenje 3. zadatka prikazano je na slici 3.10



Slika 3.10: Suprotni vektori

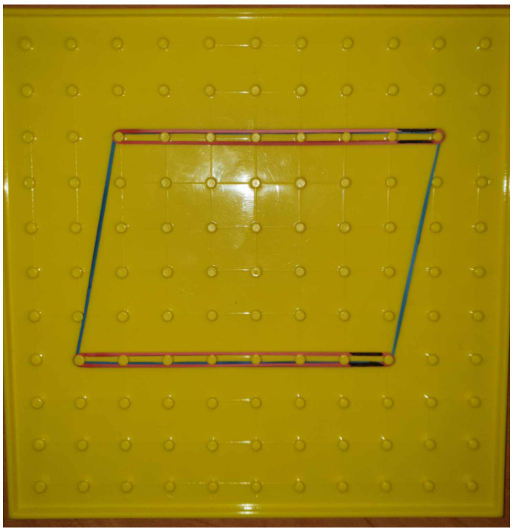
Diskusijom učenici primjećuju da su prikazani vektori istog smjera, ali se razlikuju po orijentaciji. Ponovno promatrajući vektore prvog zadatka, učenici mogu primijetiti da su ti vektori iste orijentacije. Zaključujemo da općenito vektori mogu biti jednake ili suprotne orijentacije te da orijentaciju prikazuje strelica na kraju vektora.

S učenicima komentiramo kada su dva vektora jednaka. To je jedino moguće kada su oni istog smjera, orijentacije i duljine. Učenici mogu uvježbati pojam jednakosti vektora tako da svaki par učenika na geoploči pomoću gumice konstruira paralelogram $ABCD$ (slika 3.11), kojemu je po dogovoru s nastavnikom vrh A vrh donjeg lijevog kuta paralelograma, vrh B vrh donjeg desnog kuta paralelograma, vrh C vrh gornjeg desnog kuta paralelograma te vrh D vrh gornjeg lijevog kuta paralelograma.

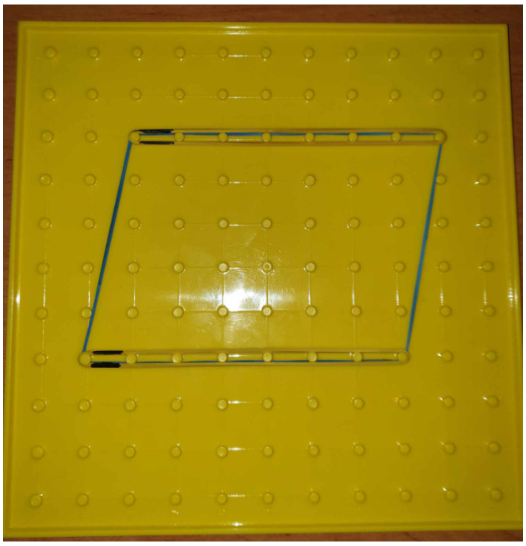


Slika 3.11: Paralelogram ABCD

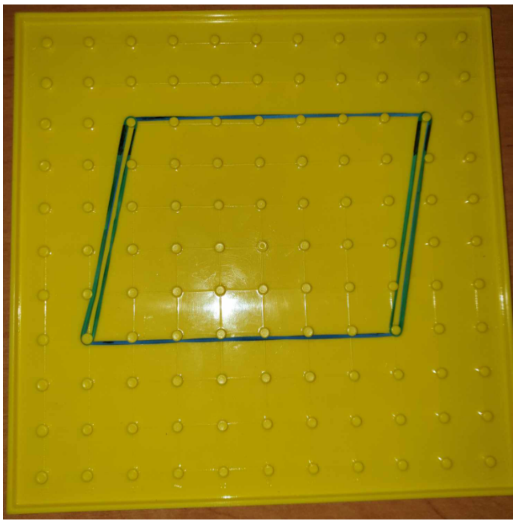
Zadatak učenicima bi bio prikazati gumicom istih boja sve jednake vektore čije su početne i završne točke vrhovi paralelograma. Takvi vektori prikazani su na slikama $3.12, 3.13, 3.14 i 3.15$. To su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AD}$ te $\overrightarrow{CB}$ i $\overrightarrow{DA}$.



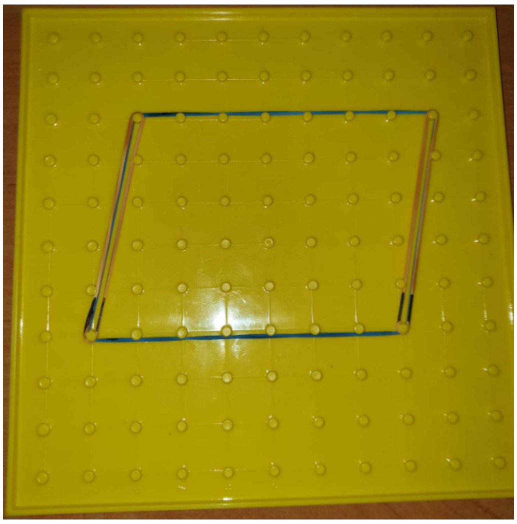
Slika 3.12: Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$



Slika 3.13: Vektori $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{CD}$



Slika 3.14: Vektori $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AD}$



Slika 3.15: Vektori $\overrightarrow{CB}$ i $\overrightarrow{DA}$

3.3 Aktivnost. *Konstrukcija vektora*

Radeći suradnički u paru, učenici će prikazati vektor jednak zadanom te otkriti kako konstruirati kolinearne vektore. Za svaki par učenika potrebne su dvije geoploče $11x11$, gumice dvije različite boje, crni marker, šestar i ravnalo. Svaki učenik dobiva na početku aktivnosti i nastavni listić sa zadacima. Ishodi učenja koje pokrivamo ovoj aktivnosti su MAT OŠ D.7.2. i FIZ OŠ B.7.2. Nastavni pojmovi koji su važni za aktivnost su duljina te upotreba šestara i ravnala čime razvijamo učeničke motoričke vještine.

Aktivnost započinje podjelom nastavnih listića sa zadacima i svakom paru učenika dvije geoploče i gumice dviju različitih boja (jedna boja pripada jednom učeniku, a druga drugom učenikom) te crni marker za označavanje orijentacije vektora.

Nastavni listić 3.4: Primjer nastavnog listića za Aktivnost 3.3

Nastavni listić

Zadatak 1. Čime je određen vektor?
Zadatak 2. Kada kažemo da su dva vektora jednaka?
Zadatak 3. Što znači da su dva vektora istog smjera?
Zadatak 4. Prikaži proizvoljan vektor $\overrightarrow{a}$, a zatim zamijenite geoploče te prikažite vektor jednak vektoru $\overrightarrow{a}$.

Dok učenici rješavaju zadatke nastavnik nadzire rad svakog para učenika. Kroz prva tri zadatka učenici se podsjećaju čime je vektor definiran, kada su dva vektora jednaka i kada su istog smjera. Odgovori na ta pitanja će im pomoći prikazati jednake vektore pomoću geoploče u 4. zadatku.

Nastavni listić 3.5: Primjer riješenog nastavnog listića za Aktivnost 3.3

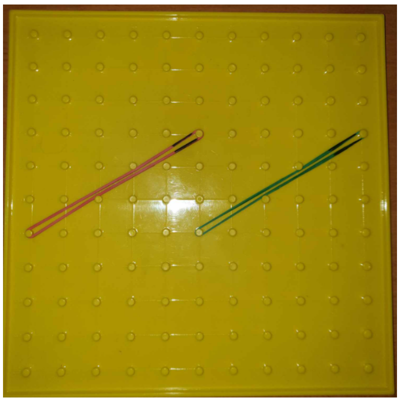
Nastavni listić

Zadatak 1. Čime je određen vektor?
Vektor je određen duljinom, smjerom i orijentacijom.

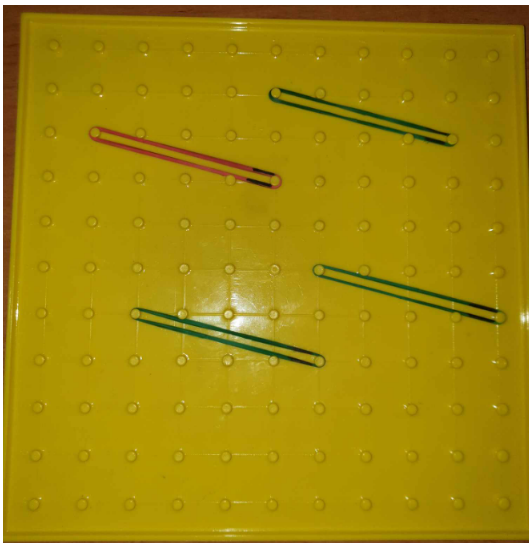
Zadatak 2. Kada kažemo da su dva vektora jednaka?
Dva vektora su jednaka ako su istog smjera, duljine i orijentacije.

Zadatak 3. Što znači da su dva vektora istog smjera?
Dva vektora su istog smjera ako su njihovi pravci nositelji paralelni ili se podudaraju.

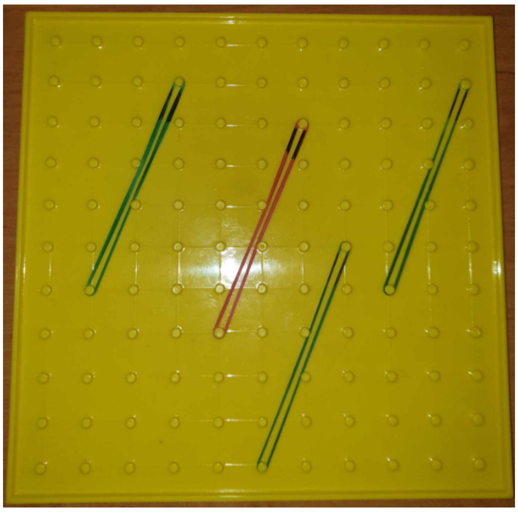
Zadatak 4. Prikaži proizvoljan vektor $\overrightarrow{a}$, a zatim zamijenite geoploče te prikažite vektor jednak vektoru $\overrightarrow{a}$.



Na geoploči crvena gumica predstavlja vektor $\overrightarrow{a}$, dok zelena njemu jednak vektor. Još neka moguća rješenja prikazani su na slikama 3.16 i 3.17.



Slika 3.16: Crvena gumica predstavlja vektor $\overrightarrow{a}$, dok zeleni njemu jednake vektore



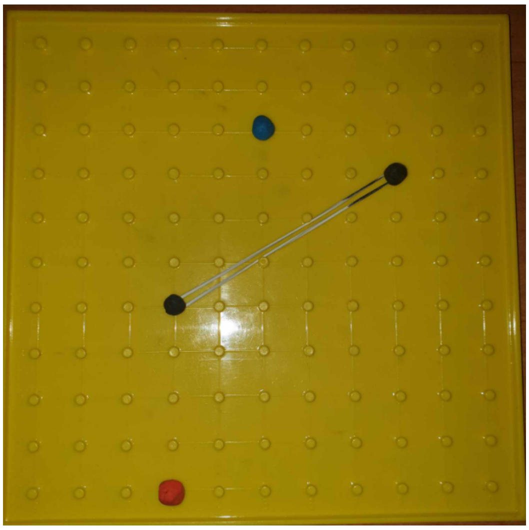
Slika 3.17: Crvena gumica predstavlja vektor $\overrightarrow{a}$. Zeleni vektori jednaki su vektoru $\overrightarrow{a}$.

Nakon provedene aktivnosti slijedi diskusija u kojem učenici predstavljaju vektore prikazane na geoploči. Kako bi vektor $\overrightarrow{a}$ i njemu jednak vektor konstruirali na papiru, za to im je potrebno da šestarom odrede duljinu vektora $\overrightarrow{a}$ koji bi prenijeli na pravac paralelan pravcu nositelju. Nastavnik komentira s učenicima da pozicija početne točke vektora nije važna, nego je bitno da se vektor nalazi na paralelnom pravcu. Također komentiramo kako bismo konstruirali suprotan vektor vektora $\overrightarrow{a}$. Postupak konstrukcije jednak je kao konstrukcija jednakog vektora, osim što je strelicu potrebno orijentirati na drugu stranu.

3.4 Aktivnost. *Jedinstvenost vektora*

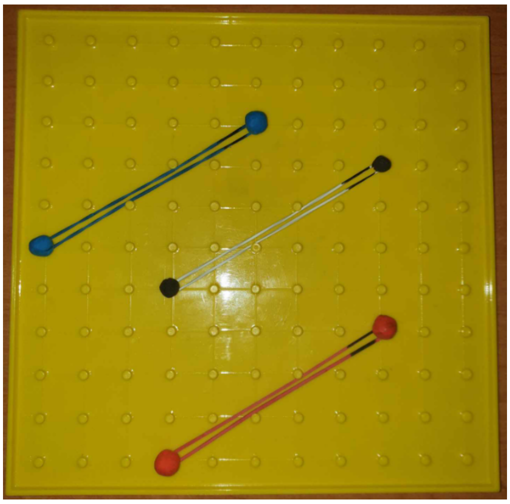
Učenici će u ovoj aktivnosti samostalno prikazati vektor jednak zadanom sa zadanom početnom (ili završnom) točkom. Potreban materijal je geoploča $11x11$, plastelin, gumice i crni marker. Ishodi učenja su MAT OŠ D.7.2. i FIZ OŠ B.7.2. Učenici će se upoznati s matematičkim konceptom kada su dva vektora ista, odnosno kada su dvije sile iste u fizici.

Nastavnik svim učenicima zadaje isti zadatak: Prikažite vektor jednak vektoru $\overrightarrow{a}$, s početnom točkom u točki A (crvena) i vektor jednak vektoru $\overrightarrow{a}$ sa završnom točkom u točki D (plava). Zadatak može biti prikazan u obliku nastavnog listića ili na PowerPoint prezentaciji. Zatim svakom učeniku dodjeljuje geoploču za već zadanim vektorom $\overrightarrow{a}$ te točkom A (crveni plastelin) i točkom D (plavi plastelin), prikazano na slici 3.18.



Slika 3.18: Geoploča sa zadanim vektorom, početnom i završnom točkom

Kada svi učenici prikažu jednake vektore ponuđenome, dižu ploču u zrak i uočavaju da su svi prikazali iste vektore (slika 3.19).



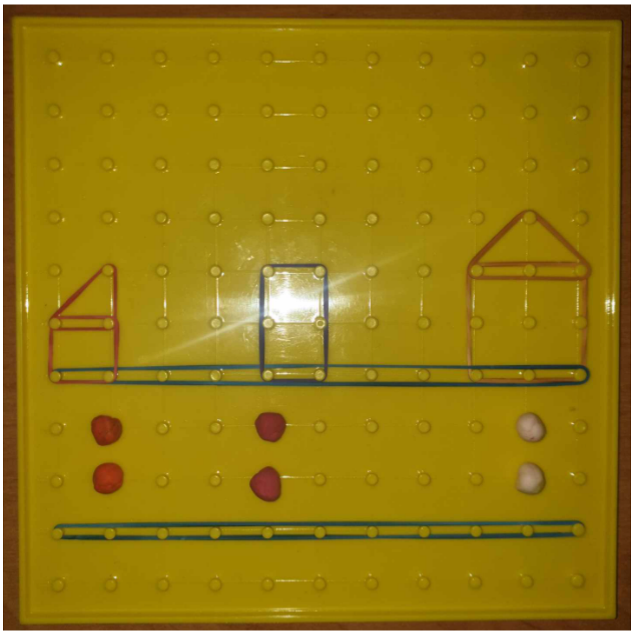
Slika 3.19: Jedinstveni vektori jednaki zadanom vektoru

Učenici zaključuju da iz zadane točke mogu konstruirati samo jedan vektor jednak zadanom.

3.5 Aktivnost. *Zbrajanje kolinearnih vektora 1*

Radeći suradnički u paru, učenici će zbrajati kolinearne vektore iste orijentacije koji pripadaju istom pravcu. Potrebni materijali su geoploča $11x11$, gumice dvije različitih boja i crni marker. Uz materijale svaki učenik u paru dobiva odgovarajući nastavni listić (1 ili 2) s opisom situacije i zadacima. Ishodi učenja koje pokrivamo su MAT OŠ D.7.2 i FIZ OŠ D.7.2.

Aktivnost započinje podjelom nastavnih listića svakom učeniku. Nastavni listići unutar para razlikuju po vektoru koji trebaju prikazati na geoploči. Geoploča za svaki par učenika se sastoji od prikaza ulice i kuća koje su pomoću gumica i plastelina. Za pojedinu kuću određene su dvije kuglice plastelina. Ulica je prikazana na slici 3.20.



Slika 3.20: Geoploča s kućama

Nastavni listić 3.6 predstavlja materijal na kojem radi učenik 1, a *Nastavni listić 3.7* predstavlja materijal na kojem radi učenik 2.

Nastavni listić 3.6: Primjer nastavnog listića 1 za Aktivnost 3.5

Nastavni listić 1

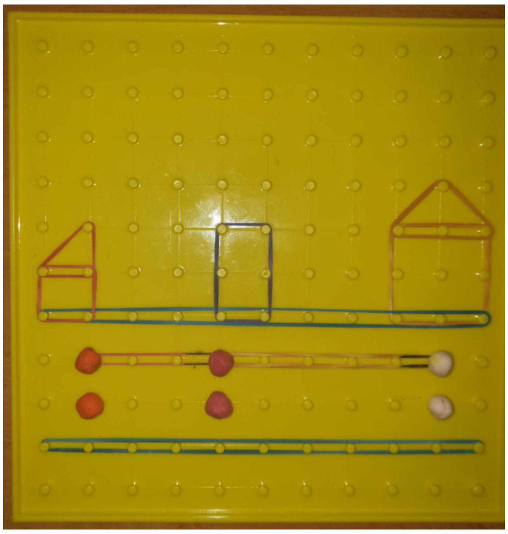
Zadatak 1. Ana živi u crvenoj kući, Lucija u ljubičastoj, a Mihaela u rozoj. One žive u istoj ulici kao što je prikazano na ploči. Danas će se družiti kod Mihaele koja živi na kraju ulice. Ana je krenula od svoje kuće prema Mihaelinoj, ali usput je stala kod Lucije da mogu zajedno prošetati dalje.
Zadatak 2. Gumicama koji predstavljaju vektore prikaži Anino kretanje od kuće do Lucije (crvena gumica $\overrightarrow{AL}$) te od Lucije do Mihaele (narančasta gumica $\overrightarrow{LM}$).
Zadatak 3. Promotrite rješenja na ploči u paru, pa zajedno riješite nastavni listić 3.

Nastavni listić 3.7: Primjer nastavnog listića 2 za Aktivnost 3.5

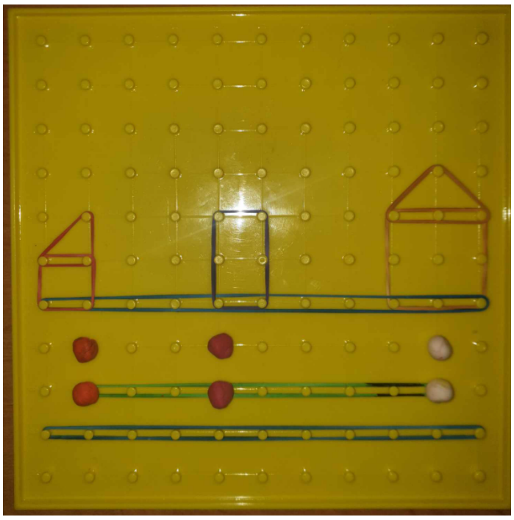
Nastavni listić 2

Zadatak 1. Ana živi u crvenoj kući, Lucija u ljubičastoj, a Mihaela u rozoj. One žive u istoj ulici kao što je prikazano na ploči. Danas će se družiti kod Mihaele koja živi na kraju ulice. Ana je krenula od svoje kuće prema Mihaelinoj, ali usput je stala kod Lucije da mogu zajedno prošetati dalje.
Zadatak 2. Zelenom gumicom koji predstavlja vektor ($\overrightarrow{AM}$) prikaži Anino ukupno kretanje od doma do Mihaele.
Zadatak 3.. Promotrite rješenja na ploči u paru, pa zajedno riješite nastavni listić 3.

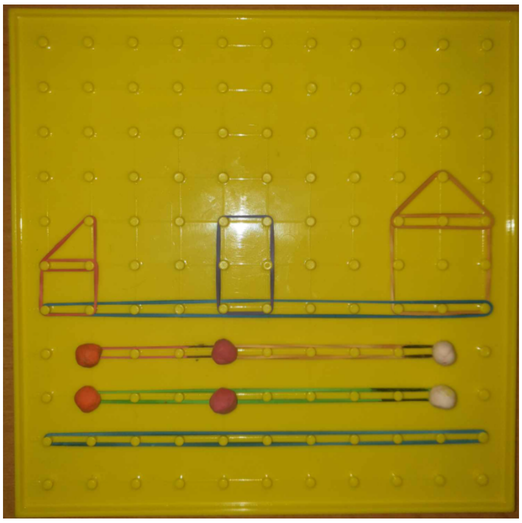
Rješenje nastavnog listića 1 zadatka 2. prikazano je na slici 3.21, rješenje nastavnog listića 2 zadatka 2. prikazano je na slici 3.22 a zajednički rješenje zadatka 2. prikazano je na slici 3.23.



Slika 3.21: Vektor od Anine do Lucijine, te vektor od Lucijine do Mihaeline kuće



Slika 3.22: Vektor od Anine do Mihaeline kuće



Slika 3.23: Vektori oba nastavna listića na jednoj ploči

Nakon, učenici zajednički u paru rješavaju Nastavni listić 3.

Nastavni listić 3.8: Primjer nastavnog listića 3 za Aktivnost 3.5

Nastavni listić 3

Zadatak 1. Kakvi su međusobno vektori $\overrightarrow{AL}$ i $\overrightarrow{LM}$?
Zadatak 2. Kakav je vektor $\overrightarrow{AM}$ u odnosu na $\overrightarrow{AL}$ i $\overrightarrow{LM}$? Koje su početne i završne točke tih vektora? Kolika je duljina vektora $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AL}$ i $\overrightarrow{LM}$?
Zadatak 3. Čemu je jednak ukupan put koji je propješačila Ana?
Zadatak 4. Što zaključujete?

Nastavni listić 3.10: Primjer riješenog nastavnog listića 3 za Aktivnost 3.5

Nastavni listić 3

Zadatak 1. Kakvi su međusobno vektori $\overrightarrow{AL}$ i $\overrightarrow{LM}$?
Vektori $\overrightarrow{AL}$ i $\overrightarrow{LM}$ su kolinearni sa zajedničkim pravcem nositeljem.

Zadatak 2. Kakav je vektor $\overrightarrow{AM}$ u odnosu na $\overrightarrow{AL}$ i $\overrightarrow{LM}$? Koje su početne i završne točke tih vektora? Kolika je duljina vektora $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AL}$ i $\overrightarrow{LM}$?
Vektor $\overrightarrow{AM}$ je istog smjera kao i vektori $\overrightarrow{AL}$ i $\overrightarrow{LM}$ i iste orijentacije. Početna točka vektora $\overrightarrow{AM}$ je i početna točka vektora $\overrightarrow{AL}$, a završna točka vektora $\overrightarrow{AM}$ je i završna točka vektora $\overrightarrow{LM}$. Duljina vektora $\overrightarrow{AM}$ jednaka je ukupnoj duljini vektora $\overrightarrow{AL}$ i $\overrightarrow{LM}$.

Zadatak 3. Čemu je jednak ukupan put koji je propješačila Ana? Jednak je vektoru $\overrightarrow{AM}$, ali i zbroju vektora $\overrightarrow{AL}$i $\overrightarrow{LM}$.

Zadatak 4. Što zaključujete? Zbrojimo li dva kolinearna vektora na istom pravcu, dobivamo vektor istog smjera i orijentacije, duljine jednake zbroju duljina oba vektora.

Diskusijom s nastavnikom učenici primjećuju da su zbrajali kolinearne vektore sa zajedničkim pravcem nositeljem. Primijetili su da je duljina zbroja vektora jednaka zbroju duljina pojedinih vektora. Simbolički nastavnik to prikazuje u obliku $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Dolaze do konačnog zaključka da zbroj dvaju kolinearnih nadovezanih vektora jednake orijentacije jednak je vektoru čija je početna točka ujedno i početna točka prvog vektora zbroja, a završna točka ujedno i završna točka drugog vektora. Pripada istom pravcu i iste je orijentacije, a duljine jednake zbroju duljina vektora koje zbrajamo.

S učenicima također je važno komentirati kada se vektori nalaze na istom pravcu nositelju, a nemaju dodirnih točaka i kada dio jednog vektora leži na drugom vektoru. Tada možemo konstruirati jedinstveni vektor jednak vektoru $\overrightarrow{b}$ s početnom točkom u završnoj točki vektora $\overrightarrow{a}$ ili vektor jednak vektoru $\overrightarrow{a}$ sa završnom točkom u početnoj točki vektora $\overrightarrow{b}$ pa zbrojiti te nadovezane vektore. To jest, zbrajanje kolinearnih vektora istog pravca nositelja u općenitom položaju možemo svesti na zbrajanje nadovezanih vektora.

3.6 Aktivnost. *Zbrajanje kolinearnih vektora 2*

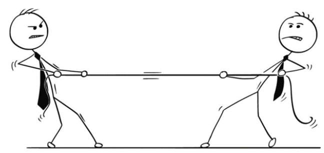
Radeći suradnički u paru, učenici će zbrajati kolinearne vektore suprotne orijentacije na istom pravcu. Potrebni materijali su geoploča $11x11$, gumice tri različite boje i crni marker. Uz materijale, svaki učenik na početku aktivnosti dobiva i nastavni listić s opisom situacije i zadacima za istraživanje. Ishodni učenja su MAT OŠ D.7.2. i FIZ OŠ D.7.2. Nastavni pojmovi su apsolutna vrijednost i sila.

Aktivnost započinje podjelom nastavnih listića. Jedan učenik u paru dobiva Nastavni listić 1, a drugi Nastavni listić 2. Nastavni listići pokrivaju istu situaciju, povlačenja užeta dvjema silama suprotnih orijentacija, jedino se razlikuju po kontekstu situacije.

Nastavni listić 3.11: Primjer nastavnog listića 1 za Aktivnost 3.6

Nastavni listić 1

Zadatak 1. Ivan i Marko povlače uže. Ivan vuče silom od 40 N, a Marko silom od 50 N. Prikaži vektore sila koje djeluju na uže.



Zadatak 2. Kakvi su međusobno prikazani vektori?
Zadatak 3. Čemu je jednaka ukupna sila kojom dječaci djeluju na uže?
Zadatak 4. Tko će pobijediti? Što na temelju toga možete zaključiti?

Nastavni listić 3.12: Primjer nastavnog listića 2 za Aktivnost 3.6

Nastavni listić 2

Zadatak 1. Pas Rex želi ukrasti igračku kojom se igra Max. Rex vuče igračku silom od 25 N, a Max silom od 20 N. Prikaži vektore sila koje djeluju na igračku.

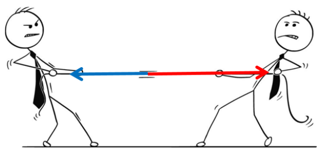
Zadatak 2. Kakvi su međusobno prikazani vektori?
Zadatak 3. Čemu je jednaka ukupna sila kojom psi djeluju na uže?
Zadatak 4. Tko će pobijediti? Što na temelju toga možete zaključiti?

Nastavni listići 1 i 2 svakog učenika se uz kontekst situacije razlikuju i po brojčanim iznosima sila. Kako ne bi došlo do pogrešaka u oduzimanju, vrijednosti sila su višekratnici broja 5. Tako i udaljenost između dvije točke na geoploči vrijediti će 10 N za učenika 1 to jest 5 N za učenika 2. Čitajući prvi zadatak učenici primjećuju da se radi o silama suprotnih orijentacija te ih ucrtavaju na slike. Procjenjuju rezultantu silu na uže u zadatku 3 i ovisno u kojem smjeru je rezultanta sila određuju pobjednika.

Nastavni listić 3.13: Primjer riješenog nastavnog listića 1 za Aktivnost 3.6

Nastavni listić 1

Zadatak 1. Ivan i Marko povlače uže. Ivan vuče silom od 40 N, a Marko silom od 50 N. Prikaži vektore sila koje djeluju na uže.

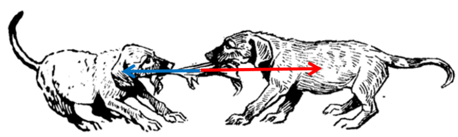


Zadatak 2. Kakvi su međusobno prikazani vektori?
Vektori su kolinearni pripadaju istom pravcu, suprotnih orijentacija.
Zadatak 3. Čemu je jednaka ukupna sila kojom dječaci djeluju na uže? Jednaka je zbroju sila kojima dječaci djeluju na uže.
Zadatak 4. Tko će pobijediti? Što na temelju toga možete zaključiti? Pobijedit će Marko jer vuče većom silom. Rezultanta sila je orijentacije sile većeg iznosa.

Nastavni listić 3.14: Primjer riješenog nastavnog listića 2 za Aktivnost 3.6

Nastavni listić 2

Zadatak 1. Pas Rex želi ukrasti igračku kojom se igra Max. Rex vuče igračku silom od 25 N, a Max silom od 20 N. Prikaži vektore sila koje djeluju na igračku.



Zadatak 2. Kakvi su međusobno prikazani vektori?
Vektori su kolinearni pripadaju istom pravcu, suprotnih orijentacija.
Zadatak 3. Čemu je jednaka ukupna sila kojom psi djeluju na igračku? Jednaka je zbroju sila kojima psi djeluju na igračku.
Zadatak 4. Koji pas će uzeti igračku? Što na temelju toga možete zaključiti? Rex će uzeti igračku jer vuče većom silom. Rezultanta sila je orijentacije sile većeg iznosa.

Nakon toga učenici uspoređuju rješenja i zajednički ispunjavaju Nastavni listić 3 (*Nastavni listić 3.15*), pritom prikazujući vektore nastavnog listića 1 i 2 na geoploči (slike 3.24*i*3.25).

Nastavni listić 3.15: Primjer nastavnog listića 3 za Aktivnost 3.6

Nastavni listić 3

Zadatak 1. Usporedite zadatke i rješenja. Kakvi su vektori u prvom zadatku?
Zadatak 2. Što ste morali napraviti s vektorima kako bi dobili ukupnu vučnu silu?
Zadatak 3. Prikažite vektorima sile koje djeluju i rezultantne sile. Čemu je jednak vektor rezultantne sile?
Zadatak 4. Što zaključujete?

Nastavni listić 3.16: Primjer riješenog nastavnog listića 3 za Aktivnost 3.6

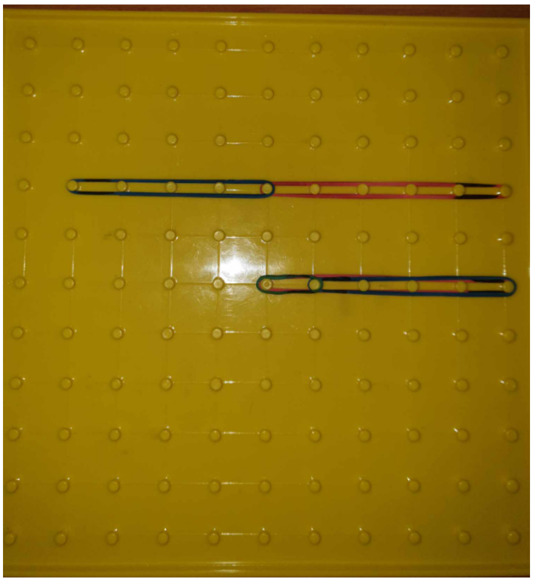
Nastavni listić 3

Zadatak 1. Usporedite zadatke i rješenja. Kakvi su vektori u prvom zadatku? Vektori su kolinearni, pripadaju istom pravcu, ali suprotnih orijentacija.

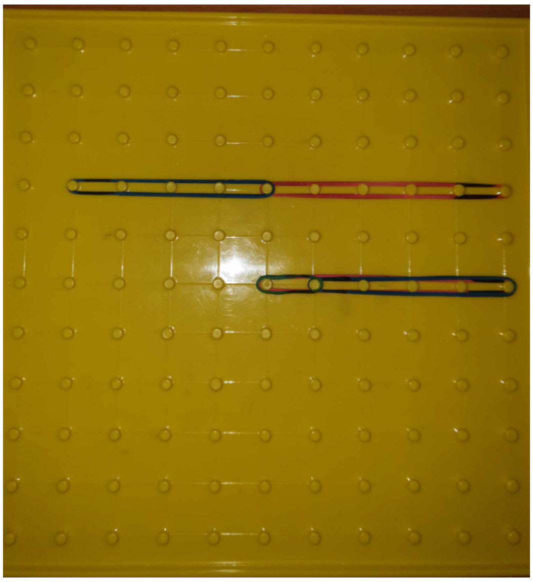
Zadatak 2. Što ste morali napraviti s vektorima kako bi dobili ukupnu vučnu silu?
Morali smo ih zbrojiti.

Zadatak 3. Prikažite vektorima sile koje djeluju i rezultantne sile. Čemu je jednak vektor rezultantne sile?

Zadatak 4. Što zaključujete?
Zbrajanjem kolinearnih vektora istog pravca i suprotne orijentacije dobivamo vektor kolinearan vektorima koje zbrajamo, orijentacije duljeg vektora i duljine jednake razlici duljina vektora koje zbrajamo.



Slika 3.24: Vektori od 40 N i 50 N te vektor rezultantne sile



Slika 3.25: Vektori od 20 N i 25 N te vektor rezultantne sile

Učenici primjećuju da su zbrajali kolinearne vektore istog pravca, suprotnih orijentacija te će rezultantna sila biti orijentirana u smjeru orijentacije veće sile nakon zbroja. Diskusijom s nastavnikom učenici dolaze do zaključka da zbroj broj dvaju kolinearnih vektora istog pravca i suprotne orijentacije jednak je vektoru kolinearnom s vektorima koje zbrajamo (s istim pravcem nositeljem), orijentacije duljeg od dva vektora koja zbrajamo, a duljine jednake apsolutnoj vrijednosti razlike duljina vektora koje zbrajamo. Važno je još komentirati slučajeve zbroja kada dva vektora nemaju dodirnih točaka te kada dio jednog vektora leži na drugom vektoru, koji se mogu svesti za zbrajanje nadovezanih vektora.

3.7 Aktivnost. *Pravilo trokuta*

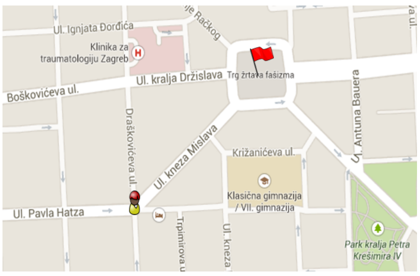
Radeći suradnički u paru, učenici će otkriti kako zbrajati nekolinearne vektore pravilom trokuta. Materijali potrebni za rad u plastična geoploča $11x11$, plastelin tri različite boje, gumice tri različite boje i crni marker. Uz materijale, svaki učenik dobiva i radni lisitić s opisom situacije i zadacima za istraživanje. Ishodi učenja su MAT OŠ D.7.2. i FIZ OŠ B.7.2. Zbrajanje vektora primjenjujemo na pomake tijela u prostoru, a možemo ih povezati i sa zbrajanjem sila na tijelo u fizici.

Aktivnost započinje tako da nastavnik svakom paru učenika podijeli odgovarajući nastavni listić, plastičnu geoploču, plasteline, gumice i crni marker.

Nastavni listić 3.17: Primjer nastavnog listića 1 A za Aktivnost 3.7

Nastavni listić 1 A

Zadatak 1. Toni se nalazi na križanju ulice Pavla Hatza i Draškovićeve i uputio se prema Trgu žrtava fašizma. Označi najbrži put kojim je Toni mogao doći do Trga žrtava fašizma.

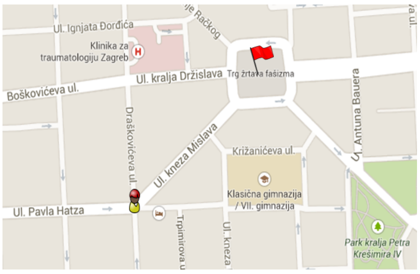


Zadatak 2. Usporedite rješenja u paru. Što uočavate?

Nastavni listić 3.18: Primjer nastavnog listića 1 B za Aktivnost 3.7

Nastavni listić 1 B

Zadatak 1. Toni se nalazi na križanju ulice Pavla Hatza i Draškovićeve i uputio se prema Trgu žrtava fašizma. Označi put kojim je Toni mogao doći do cilja ako želi ići Draškovićevom ulicom.



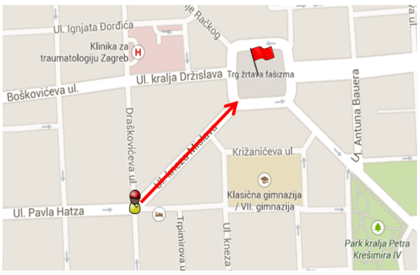
Zadatak 2. Usporedite rješenja u paru. Što uočavate?

Rješavajući zadatak i uspoređujući rješenja, učenici uočavaju da od jednog do drugog mjesta u Zagrebu mogu doći na više načina te će tako otkriti pravilo trokuta za zbrajanje vektora.

Nastavni listić 3.19: Primjer riješenog nastavnog listića 1 A za Aktivnost 3.7

Nastavni listić 1 A

Zadatak 1. Toni se nalazi na križanju ulice Pavla Hatza i Draškovićeve i uputio se prema Trgu žrtava fašizma. Označi najbrži put kojim je Toni mogao doći do Trga žrtava fašizma.

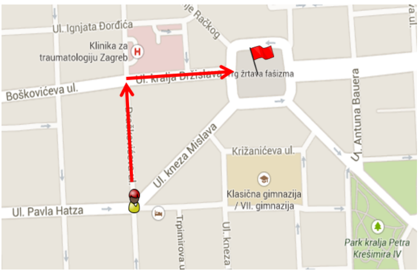


Zadatak 2. Usporedite rješenja u paru. Što uočavate? Toni je do Trga žrtava fašizma mogao doći na dva različita načina. U oba slučaja početni i završni položaj je isti.

Nastavni listić 3.19: Primjer riješenog nastavnog listića 1 B za Aktivnost 3.7

Nastavni listić 1 B

Zadatak 1. Toni se nalazi na križanju ulice Pavla Hatza i Draškovićeve i uputio se prema Trgu žrtava fašizma. Označi put kojim je Toni mogao doći do cilja ako želi ići Draškovićevom ulicom.



Zadatak 2. Usporedite rješenja u paru. Što uočavate? Toni je do Trga žrtava fašizma mogao doći na dva različita načina. U oba slučaja početni i završni položaj je isti.

Učenici nakon usporedne rješenja rješavaju Nastavni listić 2 (*Nastavni listić 3.20*), pri čemu prikazuju nacrtane vektore s karte na geoploči koristeći gumice različitih boja te koriste plastelin da označe početne i završne točke vektora.

Nastavni listić 3.20: Primjer nastavnog listića 2 za Aktivnost 3.7

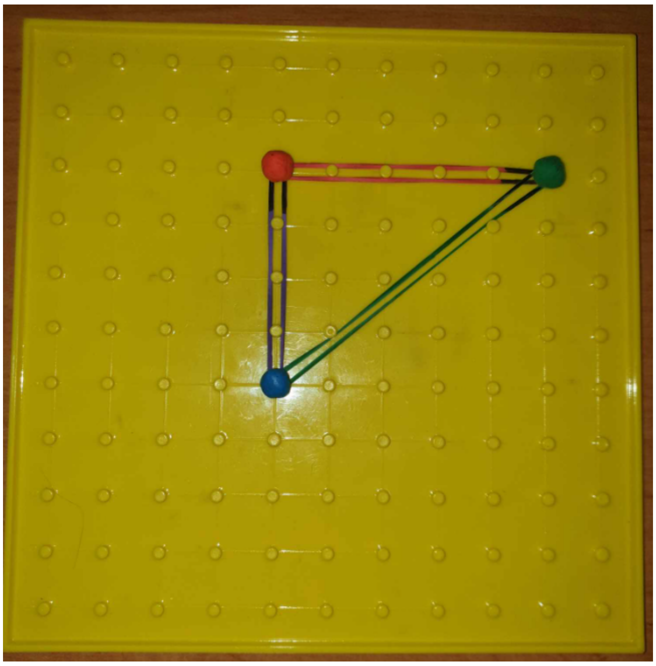
Nastavni listić 2

Zadatak 1. Prikažite samo vektorima obje mogućnosti Tonijeva kretanja. Označite početni položaj, mjesto skretanja u ulicu kralja Držislava i mjesto odredišta točkama A, B i C.
Zadatak 2. Koje vektore uočavate?
Zadatak 3. Kakvi su ti vektori?
Zadatak 4. Što vrijedi za njihove početne i završne točke?

Nastavni listić 3.21: Primjer rješenja nastavnog listića 2 za Aktivnost 3.7

Nastavni listić 2

Zadatak 1. Prikažite samo vektorima obje mogućnosti Tonijeva kretanja. Označite početni položaj, mjesto skretanja u ulicu kralja Držislava i mjesto odredišta točkama A, B i C.



Zadatak 2. Koje vektore uočavate?
Uočavamo vektore $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$.
Zadatak 3. Kakvi su ti vektori?
Vektori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$ su kolinearni.
Zadatak 4. Što vrijedi za njihove početne i završne točke?
Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ imaju zajedničku početnu točku, a $\overrightarrow{AC}$i $\overrightarrow{BC}$ zajedničku završnu točku. Završna točka vektora $\overrightarrow{AB}$ je početna točka vektora $\overrightarrow{BC}$.

Učenici, diskusijom s nastavnikom, primjećuju da su smjer kretanja prikazali vektorima $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BC}$ koji su međusobno nekolinearni vektori te da je ukupni put kretanja jednak zbroju vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$, koji simbolički zapisujemo $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Povlačeći analogiju s prijašnje naučenim zaključkom zbrajanja kolinearnih vektora to jest da je zbroj dvaju kolinearnih vektora jednak vektoru čija je početna točka ujedno i početna točka prvog vektora zbroja, a završna točka ujedno i završna točka drugog vektora zaključuju da vektor $\overrightarrow{AC}$ kojemu je početna točka početak vektora $\overrightarrow{AB}$, a završna točka završetak vektora $\overrightarrow{BC}$, zovemo zbroj vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ i simbolički pišemo: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$. Učenike lik takvog zbroja vektora podsjeća na trokut te konačno pravilo nazivamo pravilom trokuta. Na kraju aktivnosti također je potrebno komentirati zbroj nekolinearnih vektora koji se ne nadovezuju, koje konstrukcijom jednakih vektora možemo svesti za zbrajanje pravilom trokuta. Nastavnik također komentira da je zbrajanje kolinearnih vektora poseban slučaj zbrajanja pravilom trokuta.

3.8 Aktivnost. *Pravilo paralelograma*

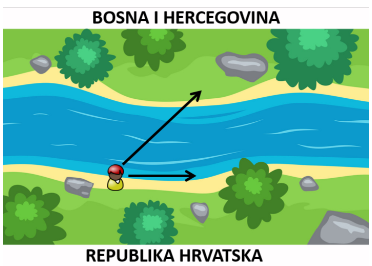
Radeći u paru, učenici će otkriti pravilo paralelograma za zbrajanje vektora. Materijali potrebni za aktivnost su plastična geoploča $11x11$, gumice tri različite boje, plastelin te crni marker. Uz materijale svaki par učenika dobiva nastavni listić za zadatkom. Ishodi koja aktivnost pokriva su MAT OŠ D.7.2 i FIZ OŠ B.7.2.. Nastavni pojmovi kojima se vežemo uz fiziku su brzina i sile te se aktivnosti također nadovezujemo na geografiju.

Aktivnost započinje tako da nastavnik svakom paru učenika dodijeli nastavni listić sa zadatkom.

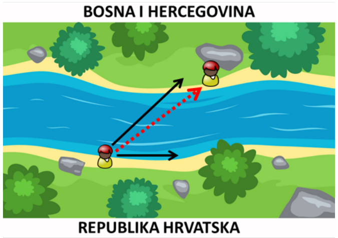
Nastavni listić 3.22: Primjer nastavnog listića za Aktivnost 3.8

Nastavni listić

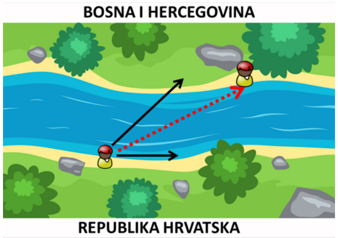
Zadatak. Dario i njegovo društvo otišli su jedan dan na brodsko kupalište Poloj uz rijeku Savu. Odjednom im je sinula ideja kako bi mogli preplivati Savu do Bosne. Na slici je označen smjer plivača i brzina rijeke. Označi mjesto gdje će plivači stići na obalu Bosne.



Neki učenici će metodom pokušaja i promašaja pokušati odrediti mjesto gdje će plivači stići. Primjer takvih rješenja možemo vidjeti na slikama 3.26 i 3.27.

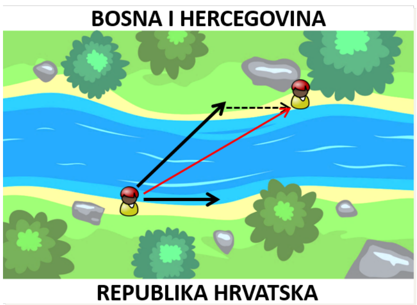


Slika 3.26: Pokušaj prikaza mjesta gdje će plivač stići



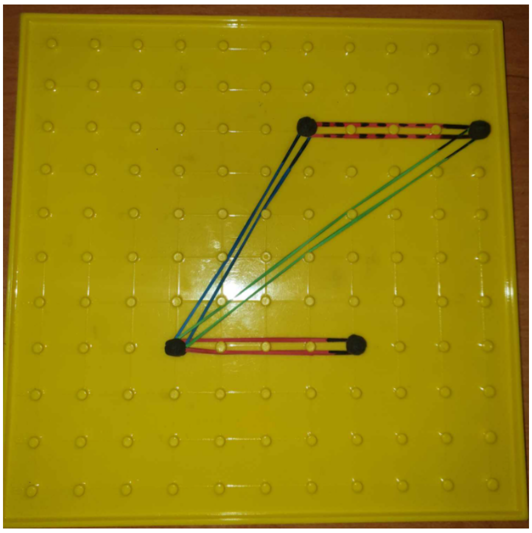
Slika 3.27: Pokušaj prikaza mjesta gdje će plivač stići

Nastavnik diskusijom navodi učenike da konstruiraju vektor jednak smjeru kretanja rijeke pomoću kojega bi primijenili pravilo trokuta, a to je zapravo vektor istog smjera i orijentacije kao smjer kretanja rijeke čija je početna točka završna točka smjera kretanja plivača (slika 3.28).

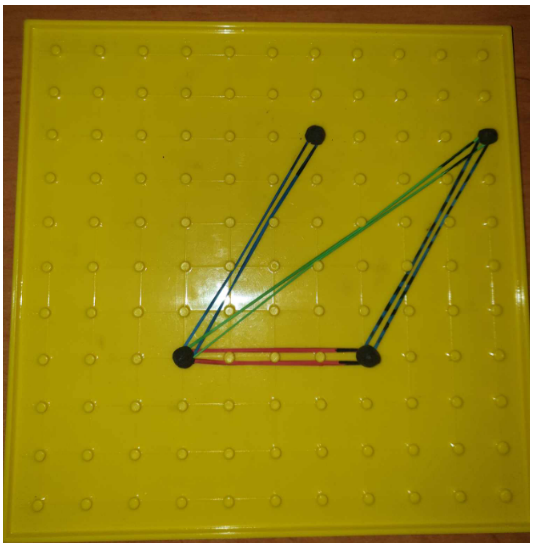


Slika 3.28: Novo konstruirani vektor omogućuje korištenje pravila trokuta

Učenici tada apstrahiraju kontekst tako da zadane vrhove i vektore prikažu na geoploči. Diskusijom učenici primjećuju da su vektore mogli zbrojiti pravilom trokuta na dva načina, konstrukcijom vektora jednak vektoru rijeke (slika 3.29) i vektor jednak vektoru plivača (slika 3.30).

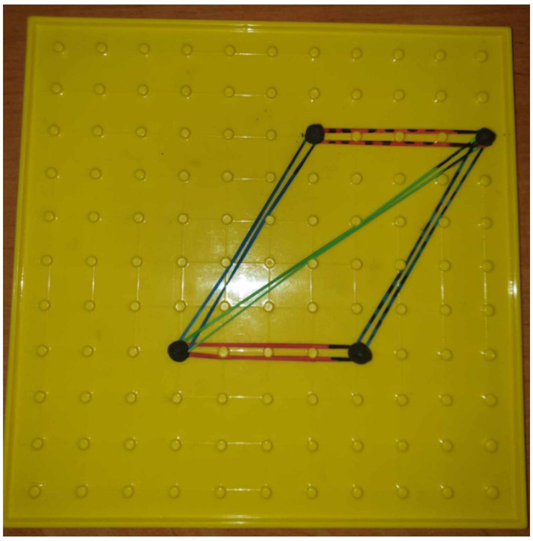


Slika 3.29: Zbroj pravilom trokuta prvi način



Slika 3.30: Zbroj pravilom trokuta drugi način

Učenici će uočiti da su sliku mogli nadopuniti do paralelograma (slika 3.31).

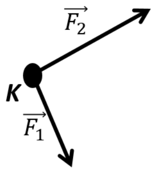


Slika 3.31: Paralelogram

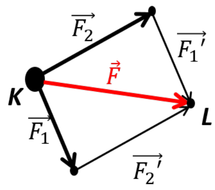
Učenici zaključuju da zbroj vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ je vektor $\overrightarrow{AD}$, pri čemu je točka D dobivena kao presjek pravaca paralelnih s vektorima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ to jest da je zbroj vektora $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ s istom početnom točkom A je vektor $\overrightarrow{AD}$. Kako ih lik ovakvog zbroja podsjeća na paralelogram, ovakav način zbrajanja vektora zovemo zbrajanje po pravilu paralelograma.

Nastavnik je još s učenicima potreban komentirati slučajeve kada nekolinearni vektori nemaju zajedničkih točaka. Učenici se s pojmom vektora prvi put susreću u 7. razredu osnovne škole kada upoznaju silu kao vektorsku veličinu. Stoga im je pravilo paralelograma poznato iz primjera iz fizike.

Primjer. Na tijelo K djeluju dvije sile $\overrightarrow{F_1}$ i $\overrightarrow{F_2}$, kao što je prikazano na slici 3.32. Grafički prikaži rezultantnu silu.



Slika 3.32: Dvije sile djeluju na tijelo



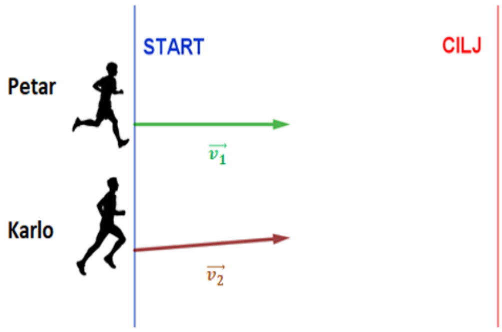
Slika 3.33: Rezultanta sila dviju sila

Rezultantnu silu (slika 3.33) dobijemo tako da nacrtamo vektor $\overrightarrow{F_1'}$ jednak vektoru sile $\overrightarrow{F_1}$ tako da mu je početna točka u završetku vektora sile $\overrightarrow{F_2}$. Nacrtamo vektor $\overrightarrow{F_2'}$ jednak vektoru sile $\overrightarrow{F_2}$ tako da mu je početna točka u završetku vektora sile $\overrightarrow{F_1}$. Vektor $\overrightarrow{F}$ je rezultantna sila i vrijedi: $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{F}$.

3.9 Aktivnost. *Vektori u koordinatnom sustavu*

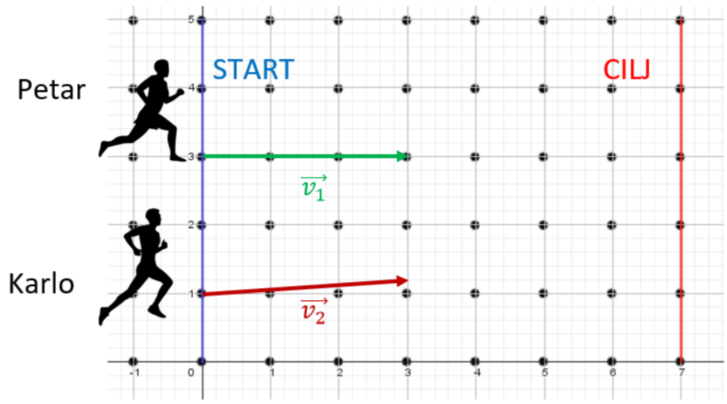
Učenici će, kroz individualan rad, frontalnom nastavom i heurističkim dijalogom, osvijestiti potrebu za prikazom vektora u pravokutnom koordinatnom sustavu te prikazati zadane vektore kao linearnu kombinaciju radijvektora. Potreban materijal je PowerPoint prezentacija s problemskom situacijom, nastavni listić za zadanim vektorima. Svaki učenik dobiva vlastiti nastavni listić. Ishodi učenja koje pokrivamo su MAT SŠ C.3.6, MAT SŠ D.3.1. U fizici su FIZ SŠ B1.2., FIZ SŠ B1.3. u kojima se koordinatni sustavi koriste u primjeni Newtonovih zakona.

Nastavnik postavlja učenicima problem na ploči (slika 3.34) koji učenici pokušavaju riješiti, odnosno problem kojim osvještavaju potrebu za prikazom vektora u pravokutnom koordinatnom sustavu.



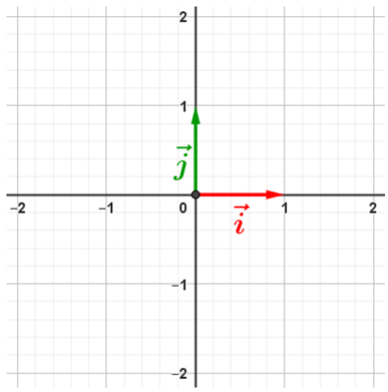
Slika 3.34: Utrka Petra i Karla

Nastavnik učenike pita za njihovo mišljenje tko će prvi doći do cilja, pri čemu je njihovo kretanje prikazano je dvama vektorima, $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$, definirani smjerom, duljinom i orijentacijom. Problem se stvara jer vektori naizgled izgledaju jednaki, ali smještanjem prikaza u koordinatni sustav (slika 3.35) uočavaju da vektori brzina nisu jednaki.



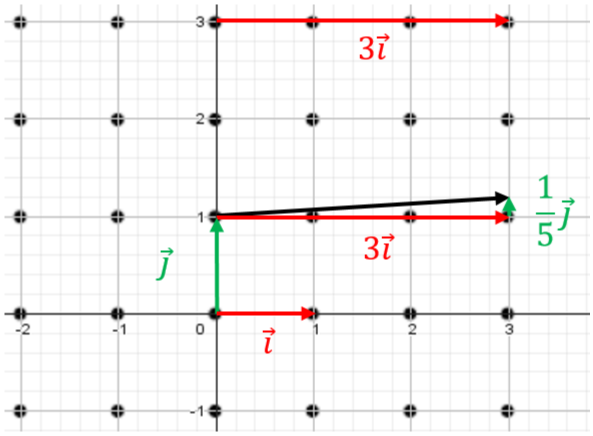
Slika 3.35: Prikaz problema u koordinatnom sustavu

Kako učenici poznaju prikaz vektora kao linearnu kombinaciju bilo koja dva, linearno nezavisna vektora, u koordinatnom sustavu odredimo dva linearno nezavisna vektora, takva da su oni jednake duljine, koja se nalaze na koordinatnim osima. Ove vektore u Kartezijevom (pravokutnom) koordinatnom sustavu nazvati ćemo jedinični vektori: $\overrightarrow{i}$ - jedinični vektor na osi apscisa, $\overrightarrow{j}$ - jedinični vektor na osi ordinata (slika 3.36).



Slika 3.36: Jedinični vektori u koordinatom sustavu

Jedinični vektori su linearno nezavisni, pa stoga svaki vektor u ravnini možemo prikazati kao linearnu kombinaciju jediničnih vektora $\overrightarrow{i}$ i $\overrightarrow{j}$. Učenici nadalje prikazuju vektore iz zadatka kao linearnu kombinaciju jediničnih vektora $\overrightarrow{i}$ i $\overrightarrow{j}$ (slika 3.37) to jest kao $\overrightarrow{v_1} = 3\overrightarrow{i}, \overrightarrow{v_2} = 3\overrightarrow{i} + \frac{1}{5}\overrightarrow{j}$.



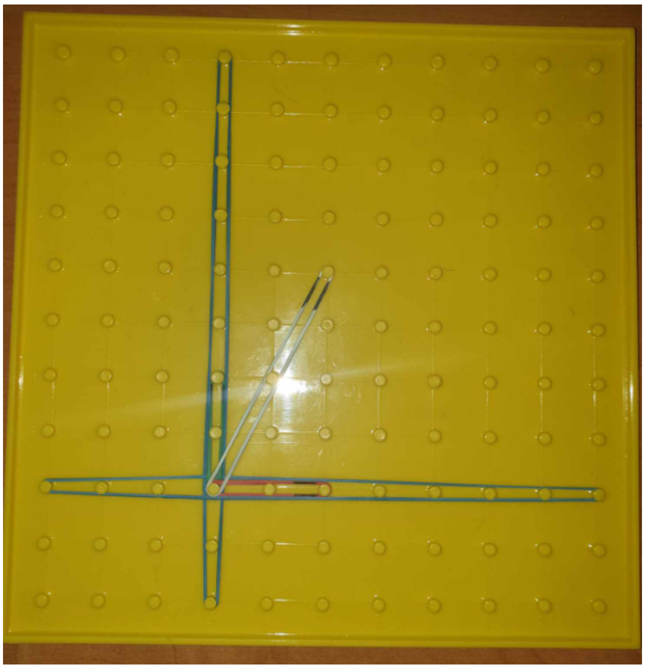
Slika 3.37: Prikaz vektora brzina pomoću jediničnih

Učenici konačno zaključuju da kako Petar i Karlo prijeđu istu udaljenost od 3 jedinična vektora $\overrightarrow{i}$, obojica će na cilj stići u isto vrijeme iako će Karlo proći dodatnu udaljenost od $\frac{1}{5}$ jediničnog vektora $\overrightarrow{j}$ u istom vremenu. Nastavnik za kraj učenicima dijeli nastavne listiće, gdje učenici pomoću jediničnih vektora trebaju prikazati zadane vektore u koordinatnom sustavu. Slučajeve koje treba pokriti je da se vektor nalazi u prvom, drugom, trećem i četvrtom kvadrantu.

Nastavni listić 3.23: Primjer nastavnog listića za Aktivnost 3.9

Nastavni listić

Zadatak. Sljedeće vektore prikažite kao linearnu kombinaciju jediničnih vektora $\overrightarrow{i}$ i $\overrightarrow{j}$.

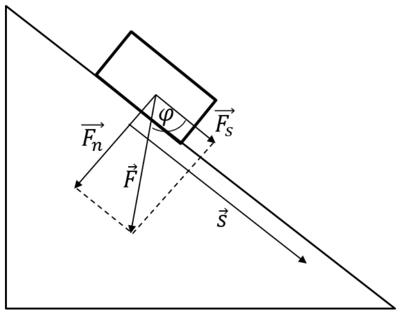


Promatrajući geoploču sa zadanim vektorom u koordinatnom sustavu, vektor mogu prikazati kao $\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$. Diskusijom učenici zaključuju da za zadane $\overrightarrow{i}$ i $\overrightarrow{j}$ dva jedinična, okomita vektora u pravokutnom koordinatnom sustavu i točka T s koordinatama $T(x, y)$ vektor $\overrightarrow{OT}$ (s početkom u ishodištu) nazivamo radijvektor točke T i za njega vrijedi: $\overrightarrow{OT} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$. Realne brojeve x i y nazivamo koordinatama vektora $\overrightarrow{OT}$.

3.10 Aktivnost. *Skalarni umnožak vektora*

Učenici će, frontalnom nastavnom te radom u paru, otkriti pojam skalarnog umnoška dvaju vektora. Potreban materijal je računalo, projekcijsko platno, nastavni listić za svaki par učenika. Ishodi učenja koje pokrivamo aktivnosti su MAT SŠ C.3.6., MAT SŠ D.3.1. i FIZ SŠ B.1.3.. Nastavni pojmovi za fiziku su tijelo na kosini i rad.

Nastavnik učenicima prvo prikazuje motivacijski zadatak iz fizike s tijelom na kosini. **Zadatak:** Na tijelo na putu $\overrightarrow{s}$ djeluje sila $\overrightarrow{F}$ kao na slici. Koliki rad obavi sila $\overrightarrow{F}$ u situaciji kao na slici 3.38?



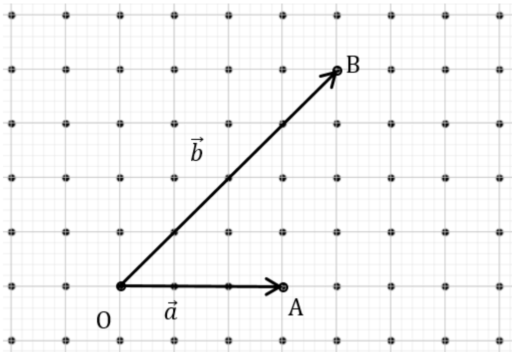
Slika 3.38: Tijelo na kosini

Razrednom diskusijom učenici primjećuju da rad obavlja samo komponenta sile u smjeru puta, tj. komponenta $\overrightarrow{F_s}$ te da rad računaju kao umnožak iznosa sile $\overrightarrow{F_s}$ i duljine puta, $W = |\overrightarrow{F_s}| \cdot |\overrightarrow{s}|$. Primjenom trigonometrijskih omjera dobivaju da $\cos\phi = \frac{|\overrightarrow{F_s}|}{|\overrightarrow{F}|}$, tj. $|\overrightarrow{F_s}| = |\overrightarrow{F}| \cdot \cos\varphi = F \cdot \cos\varphi$. Obavljeni rad tada je jednak $W = F \cdot s \cdot \cos\varphi$ te se taj izraz sastoji od iznosa sile F, duljine puta s i kosinusa kuta između vektora $\overrightarrow{F}$ i $\overrightarrow{F_s}$, odnosno $\overrightarrow{F}$ i $\overrightarrow{s}$. Povezujući s vektorima iznos sile F jednak je duljini vektora $\overrightarrow{F}$, a duljina puta s jednaka je duljini vektora $\overrightarrow{s}$. Nastavnik govori učenicima da izraz $F \cdot s \cdot \cos\varphi$, radi jednostavnosti, kraće označavamo s $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{s}$, a čitamo „skalarni umnožak vektora $\overrightarrow{F}$ i $\overrightarrow{s}$". Nastavnik nakon uvodnoga primjera dijeli učenike u parove te svaki učenik u paru dobiva vlastiti nastavni listić. Nastavni listić rješavaju samostalno i u paru u skladu s uputama u zadacima.

Nastavni listić 3.24: Primjer nastavnog listića 1 za Aktivnost 3.10

Nastavni listić 1

Zadatak 1. (Samostalno!)

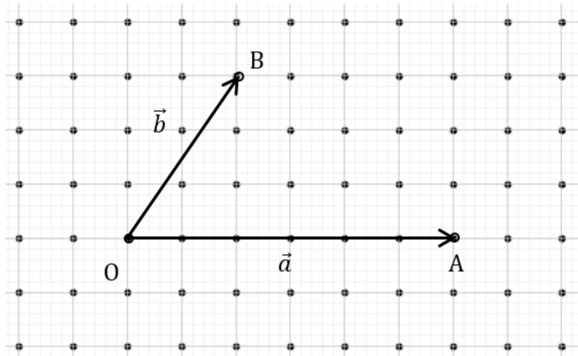


a) Nacrtajte ortogonalnu projekciju $\overrightarrow{OA_1}$ vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ na pravac nositelj vektora $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$.
b) Nacrtajte ortogonalnu projekciju $\overrightarrow{OB_1}$ vektora $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ na pravac nositelj vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$.
Zadatak 2. (Samostalno!)
a) Odredite izraz za duljinu ortogonalne projekcije $|\overrightarrow{OA_1}|$.
b)Odredite izraz za duljinu ortogonalne projekcije $|\overrightarrow{OB_1}|$.
Zadatak 3. (U paru!)
Pomnožite $|\overrightarrow{OA_1}|$ s $|\overrightarrow{OB}|$ i $|\overrightarrow{OA}|$ s $|\overrightarrow{OB_1}|$.
Usporedite dobivene izraze.

Nastavni listić 3.25: Primjer nastavnog listića 2 za Aktivnost 3.10

Nastavni listić 2

Zadatak 1. (Samostalno!)

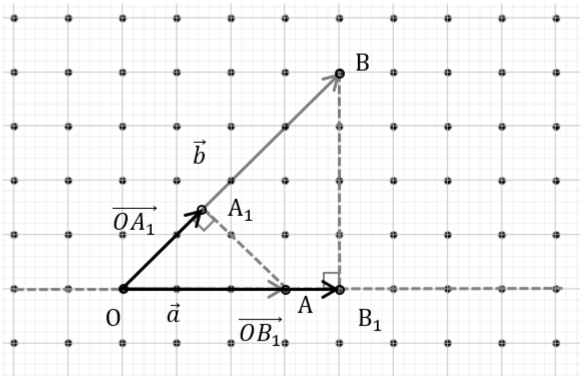


a) Nacrtajte ortogonalnu projekciju $\overrightarrow{OA_1}$ vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ na pravac nositelj vektora $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$.
b) Nacrtajte ortogonalnu projekciju $\overrightarrow{OB_1}$ vektora $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ na pravac nositelj vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$.
Zadatak 2. (Samostalno!)
a) Odredite izraz za duljinu ortogonalne projekcije $|\overrightarrow{OA_1}|$.
b)Odredite izraz za duljinu ortogonalne projekcije $|\overrightarrow{OB_1}|$.
Zadatak 3. (U paru!)
Pomnožite $|\overrightarrow{OA_1}|$ s $|\overrightarrow{OB}|$ i $|\overrightarrow{OA}|$ s $|\overrightarrow{OB_1}|$.
Usporedite dobivene izraze.

Nastavni listić 3.26: Primjer riješnog nastavnog listića 1 za Aktivnost 3.10

Nastavni listić 1

Zadatak 1. (Samostalno!)



a) Nacrtajte ortogonalnu projekciju $\overrightarrow{OA_1}$ vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ na pravac nositelj vektora $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$.
b) Nacrtajte ortogonalnu projekciju $\overrightarrow{OB_1}$ vektora $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ na pravac nositelj vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$.

Zadatak 2. (Samostalno!)

a) Odredite izraz za duljinu ortogonalne projekcije $|\overrightarrow{OA_1}|$.

$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{OA_1}}{\overrightarrow{OA}} \Rightarrow \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA} \cdot \cos\varphi$

b)Odredite izraz za duljinu ortogonalne projekcije $|\overrightarrow{OB_1}|$.

$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{OB_1}}{\overrightarrow{OB}} \Rightarrow \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OB} \cdot \cos\varphi$

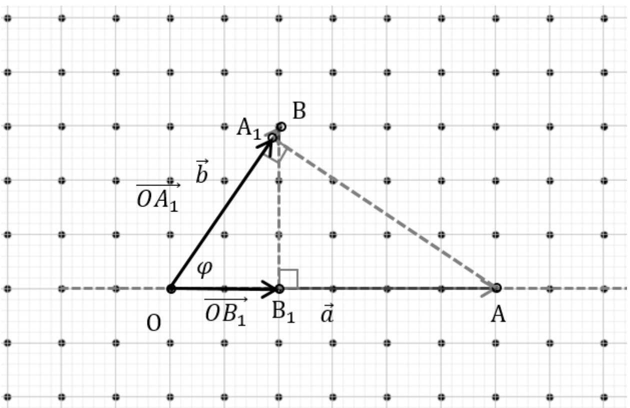
Zadatak 3. (U paru!)

Pomnožite $|\overrightarrow{OA_1}|$ s $|\overrightarrow{OB}|$ i $|\overrightarrow{OA}|$ s $|\overrightarrow{OB_1}|$.
Usporedite dobivene izraze.
$|\overrightarrow{OA_1}| \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \cdot \cos\varphi$ $|\overrightarrow{OA}| \cdot \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \cdot \cos\varphi$

Nastavni listić 3.27: Primjer riješnog nastavnog listića 2 za Aktivnost 3.10

Nastavni listić 2

Zadatak 1. (Samostalno!)



a) Nacrtajte ortogonalnu projekciju $\overrightarrow{OA_1}$ vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ na pravac nositelj vektora $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$.
b) Nacrtajte ortogonalnu projekciju $\overrightarrow{OB_1}$ vektora $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ na pravac nositelj vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$.

Zadatak 2. (Samostalno!)

a) Odredite izraz za duljinu ortogonalne projekcije $|\overrightarrow{OA_1}|$.

$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{OA_1}}{\overrightarrow{OA}} \Rightarrow \overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{OA} \cdot \cos\varphi$

b)Odredite izraz za duljinu ortogonalne projekcije $|\overrightarrow{OB_1}|$.

$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{OB_1}}{\overrightarrow{OB}} \Rightarrow \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OB} \cdot \cos\varphi$

Zadatak 3. (U paru!)

Pomnožite $|\overrightarrow{OA_1}|$ s $|\overrightarrow{OB}|$ i $|\overrightarrow{OA}|$ s $|\overrightarrow{OB_1}|$.
Usporedite dobivene izraze.

$|\overrightarrow{OA_1}| \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \cdot \cos\varphi$

$|\overrightarrow{OA}| \cdot \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \cdot \cos\varphi$

Učenici primjećuju da su konačno dobili izraze koju su međusobno jednaki te da se oni sastoje od članova duljine vektora $\vec{a}$, duljine vektora $\vec{b}$ i kosinusa kuta između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Daljnjom diskusijom primjećuju da je rezultat realan broj te da ova operacija predstavlja množenje vektora. Nastavnik uvodi pojam skalarnog množenja vektora kao operacije množenja vektora čiji je rezultat skalar. Govori učenicima da je izraz $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} \cdot \cos\varphi$, gdje je $\overrightarrow{OA}$ duljina vektora $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB}$ duljina vektora $\overrightarrow{B}$, a φ kut između vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$, skalarni umnožak vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$. Konačno zaključuju da skalarni umnožak dvaju vektora $\overrightarrow{a}$ i $\overrightarrow{b}$ različitih od nulvektora, realan je broj jednak umnošku duljina tih dvaju vektora i kosinusa kuta među tim vektorima. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \cdot \cos\phi$. Ako je vektor $\overrightarrow{a}$ ili $\overrightarrow{b}$ nulvektor, onda je skalarni umnožak jednak nuli. Skalarni umnožak vektora samim sobom je $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|^2$ te se time još nadovezujemo na skalarne produkte jediničnih vektora $\overrightarrow{i}$ i $\overrightarrow{j}$.

4

Zaključak

U suvremenom obrazovanju razrađuju se uloge, funkcije, strategije i preporuke za korištenje modela i modeliranja u potrazi za autentičnim STEM obrazovanjem i poboljšanjem STEM pismenosti. Modeli se ističu kao sredstvo za promicanje STEM pismenosti i prijenosa znanja i vještina između različitih područja. To zahtijeva interakciju između STEM predmeta kao što su matematika i fizika kako bi se doprinijelo integriranoj STEM pismenosti. Kroz modele učenici daju smisao svojim neformalnim matematičkim ili fizikalnim znanjima, odabiru načine za komuniciranje matematičkih ili fizikalnih ideja. Kroz matematičko ili fizikalno modeliranje, učenici se upoznaju s procesom kojim matematičari i fizičari istražuju probleme iz stvarnog svijeta. Kao pedagoški pristup, matematičko modeliranje naglašava učeničke ideje i njihov odabir reprezentacija te način na koji komuniciraju svoje matematičko razmišljanje o problemima. S materijalnim modelima, učenici mogu istraživati ponašanja, uzorke i veze te mogu raditi pretpostavke. Također mogu naučiti kako procijeniti mogućnosti i ograničenja pojedinih modela. Materijalni modeli se mogu koristiti unutar i izvan učionice. Materijalni modeli su najefektniji pri poboljšanju učenja kada su učenici potrebni raditi predviđanja o ishodima i kada trebaju napraviti točnu opservaciju o ishodu. Materijalni modeli potiču međuvršnjačku, vanjsku i internu komunikaciju. Geoploča je primjer materijalnog modela koji može imati brojne primjene u nastavi matematike i fizike. Geoploča olakšava vizualizaciju i omogućava im da ”rade matematiku”. Pruža mogućnost da samostalno otkrivaju matematiku te razmjenjuju matematičke ideje, pritom razvijajući komunikacijske vještine i matematički rječnik. Omogućava postojanje i rješavanje matematičkih problema i potiče ih na istraživanje, sustavnost, kreativnost i ustrajnost u radu, tako da učenici postaju aktivni sudionici u procesu učenja. U ovom radu smo se dotaknuli samo primjera vezanih uz vektore dok su moguće brojne druge primjene. U kontekstu prevelike izloženosti učenika digitalnim sadržajima geoploča je primjer obrazovnog alata koji ne mora biti digitalni, a da unaprjeđuje nastavu u smjeru razvoja suvremenog obrazovanja.

5

Literatura

[1] Asempapa, R.S. (2015), Mathematica modeling: Essential for Elementary and Middle Schoole Students. J. of Math. Edu. 8(1).

[2] Čižmešija A., Soucie T., Svedrec R. (2012) Primjena geoploče u nastavi matematike. Poučak, 13 (50), 25. – 39. Dostupno na: $http://hrcak.srce.hr/$103885[20.10.2023.]

[3] Čižmešija A., Stilinović S., (28. siječnja 2015.) Suradničko učenje i metode aktivne nastave matematike u osnovnoj školi. [PowerPoint prezentacija] Dostupno na: $https://www.dropbox.com/s/qdz0vdnqhbptp0w/Suradnicko\_ucenje$-$pripravnicisijecanj\_2015.pptx?dl = 0$[1.10.2023.]

[4] Čižmešija, A., Stilinović, S., (2022), Geoploča - važno učilo u nastavi matematike. Nastavni materijal: Metodika nastave matematike 3. Matematički odsjek, PMF Sveučilište u Zagrebu.

[5] Dooley, T., Dunphy, E, ….. & Shiel, G. (2014). Mathematics in Early Childhood and Primary Education. Research Report 18. Dublin: National Council for Curriculum and Assessment. $http://ncca.ie/en/Publications/Reports/NCCA\_Research\_Report\_18.pdf$

[6] Franco, C. & Colinvaux, D. (2000), Grasping mental models. In J. K. Gilbert & C. J. Boulter (Eds.), Developing models in science education (pp.93-118). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

[7] Greca, I. M. & Moreira, M. A. (2002). Mental, physical, and mathematical models in the teaching and learning of physics. Science Education, 1, 106- 121.

[8] Hallström, J., Schönborn, K.J. (2019) Models and modelling for authentic STEM education: reinforcing the argument. International Journal of STEM Education 6:22.

[9] Hestenes, D. (1996, August). Modeling methodology for physics teachers. Proceedings of the International Conference on Undergraduate Physics Education, College Park, MA.

[10] Hodgson, S. M., Rojano, T., Sutherland, R. & Ursini, S. (1999), Mathematical modeling: The interaction of culture ahttps://www.overleaf.com/project/654803a425af2138f6f14bc4nd practice. Educational Studies in Mathematics, 39, 167-183.

[11] Holland, D. (1988), A software laboratory. Dynamical modeling and the cellularmodeling system. SSR, 407-416.

[12] Kelly, I. (2001), Comparison of Virtual Models and Hands-on Models for Teaching Crystallography. Purdue University (M.S. thesis)

[13] Kezerić, D., (2018), Didaktički modeli i situacije u nastavi matematike, Faculty of Science - University of Zagreb, [Internet],< *https : //repozitorij.pmf.unizg.hr/islandora/object/pmf*%3A4736*/datastream/PDF/view* >, [29.10.2023.]

[14] Kuo M.-T., Jones, L., Pulos, S., Hyslop R. (2004), The Relationship of Molecular Representations, Complexity, and Orientation to the Difficulty of Stereochemistry Problems. The Chemical Educator v9 p1-7

[15] Luyten, L., Vilquin, T., Vrouew, E., Verstrynge, E., (2016), A comparative study of physical models as a tool for structular education Schools for the Future Foundation, Inc., Caleb Gattegnio, [Internet], < *https : //www.calebgattegno.org/* >, [20.10.2023.]

[16] Neupauer, R., Learning Benefits of Multiple Approaches of Using Physical Models. [Internet], <https://www.cu.edu/ptsp/learning-benefits-multiple-approaches-using-physical-models> [20.10.2023.]

[17] Niss, M., Blum, W., (2020), The Learning and Teaching of Mathematical Modelling, First edition, Routledge

[18] Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj, MZO, NN 7/2019.

[19] Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Fizike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj, MZO, NN 10/2019.

[20] OpenLearn Create (2023), TI-AIE: Using physical models: teaching electricity to Class X. [Internet], < *https* : *//www.open.edu/openlearncreate/mod/oucontent/view.php?id* = 64826 > [20.10.2023.]

[21] Ornek, F. (2008), Models in Science Eduaction: Applications of Models in Learning and Teaching Science, Balıkesir University, Balıkesir, TURKEY

[22] Scherer, D., Dubois, P., & Sherwood, B. (2000). VPython: 3D interactive scientific graphics for students. Computing in Science and Engineering, 82-88.

[23] Suh, J. & Seshaiyer, P. (2017). Modeling mathematical ideas: Developing Strategic Competence in Elementary and Middle School. London: Rowman & Littlefield Publishers.

[24] Tülübas, T. , Karakose, T., Papadakis, S., (2023), A Holistic Investigation of the Relationship between Digital Addiction and Academic Achievement among Students .Eur. J. Investig. Health Psychol. Educ. 13, 2006–2034.

[25] Wingert, K., Wagner, M., Shouse, A., Spodaryk, S., Chowning, J. (2014), What is meant by engaging youth in scientific modeling?. [Internet], < *https* : *//stemteachingtools.org/brief/*8 >, [20.10.2023.]

Životopis

Marko Knezović rođen je 1999. godine u Zagrebu, osnovnu školu je pohađao u OŠ Veruda i OŠ Vidikovac Pula, a srednju u Gimnaziji Pula. Godine 2017. upisao je nastavnički studij matematike i fizike na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu.